Ejercicio 1. Se quiere aproximar

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

1. Determina α_0, α_1 y x_0, x_1 para que la fórmula anterior (con peso $\omega(x) = x$) tenga precisión máxima.

   Como hay 2 nodos, el grado máximo es $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Definimos:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= (x-x_0)(x-x_1) = x^2 - (x_0+x_1)x + x_0x_1 \\ &= x^2 + ax + b\end{aligned}$$

   Por comodidad, debido a que lo usaremos muchas veces, tenemos que:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x^3\ dx = \frac{1}{4} \qquad \int_0^1 x^4\ dx = \frac{1}{5}$$

   Imponemos por tanto exactitud en $\Pi(x)$ y en $x\Pi(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x \cdot \Pi(x)\ dx = \int_0^1 x^3 + ax^2 + bx\ dx = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \\ 0 &= \int_0^1 x^2 \cdot \Pi(x)\ dx = \int_0^1 x^4 + ax^3 + bx^2\ dx = \frac{1}{5} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3}\end{aligned}$$

   Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1/4 + a/3 + b/2 &=& 0 \\ 1/5 + a/4 + b/3 &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -6/5 \\ b &=& 3/10 \end{array}\right\}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -6/5 &=& -x_0 - x_1 \\ 3/10 &=& x_0x_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_0 &=& \dfrac{6+\sqrt{6}}{10} \\ x_1 &=& \dfrac{6-\sqrt{6}}{10} \end{array}\right\}$$

   Para obtener α_0 y α_1, tenemos que imponer exactitud en $\{1, x\}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} 1/2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ 1/3 &= \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 &=& \dfrac{9+\sqrt{6}}{36} \\ \alpha_1 &=& \dfrac{9-\sqrt{6}}{36} \end{array}\right\}$$

2. Da una expresión del error.

   El error de viene dado por:

$$R(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \cdot \int_0^1 x\Pi^2(x)\ dx \qquad \xi \in \,]0,1[$$