

# Variable Compleja I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025



# Índice general

<b>1. Relaciones de Ejercicios</b>	<b>5</b>
1.1. Números complejos . . . . .	5
1.2. Topología del plano complejo . . . . .	15
1.3. Funciones holomorfas . . . . .	16
1.4. Funciones analíticas . . . . .	17



# 1. Relaciones de Ejercicios

## 1.1. Números complejos

**Ejercicio 1.1.1.** Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a  $\mathbb{C}$ .

Para comprobar ahora que  $M$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$ , se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar que  $f$  es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1.  $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ .

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2.  $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$ .

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3.  $f(1) = 1$ .

$$\text{Tenemos que } f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1.$$

Por tanto,  $f$  es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- $f$  es inyectiva.

Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  de forma que  $f(z_1) = f(z_2)$ . Entonces, igualando componente a componente, tenemos que  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$  y  $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ . Por lo tanto,  $z_1 = z_2$  y  $f$  es inyectiva.

- $f$  es sobreyectiva.

Sea  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$ . Entonces, sea  $z = a+bi \in \mathbb{C}$ , y tenemos que  $f(z) = A$ . Por tanto,  $f$  es sobreyectiva.

Por tanto,  $f$  también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto,  $M$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 1.1.2.** Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

$$1. \ z_1 = \frac{i - \sqrt{3}}{1 + i}.$$

Tenemos que:

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1 + i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 1 + 3 + 3}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$2. \ z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}.$$

Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 + 3}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Im} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 3}{16}} = \frac{1}{2}.$$



**Ejercicio 1.1.3.** Sea  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Fijado  $a \in U$ , se considera la función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \forall z \in U.$$

Probar que  $f$  es una biyección de  $U$  sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que  $f$  es una aplicación de  $U$  sobre  $U$ . Dado  $z \in U$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \iff |z - a| < |1 - \bar{a}z| \iff |z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \iff \\ &\iff (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \iff z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a} < 1 - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a}z\bar{z} \iff \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\ &\iff |z|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1. \end{aligned}$$

donde hemos usado que, como  $|a| < 1$ , entonces  $|a|^2 < 1$  y por tanto  $1 - |a|^2 > 0$ . Por tanto,  $f$  es una aplicación de  $U$  sobre  $U$ . A partir de ahora por tanto consideramos  $f : U \rightarrow U$ . Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

■ Inyectividad:

Sean  $z_1, z_2 \in U$  tales que  $f(z_1) = f(z_2)$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1} &= \frac{z_2 - a}{1 - \bar{a}z_2} \implies (z_1 - a)(1 - \bar{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \bar{a}z_1) \implies \\ &\implies z_1 - a - \bar{a}z_1z_2 + |a|^2z_2 = z_2 - a - \bar{a}z_2z_1 + |a|^2z_1 \implies \\ &\implies z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \implies (1 - |a|^2)z_1 = (1 - |a|^2)z_2 \implies z_1 = z_2. \end{aligned}$$

■ Sobreyectividad:

Sea  $w \in U$ . Vamos a buscar  $z \in U$  tal que  $f(z) = w$ . Para ello, vamos a despejar  $z$  de la ecuación  $f(z) = w$ :

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} &= w \implies z - a = w(1 - \bar{a}z) \implies z - a = w - w\bar{a}z \implies z + w\bar{a}z = a + w \implies \\ &\implies z(1 + w\bar{a}) = a + w \implies z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}. \end{aligned}$$

donde, en el último paso, hemos hecho uso de que  $1 + w\bar{a} \neq 0$ , ya que  $|wa| = |w||a| < 1$  y:

$$|1 + w\bar{a}| \geq |1 - |w||a|| = 1 - |w||a| > 0 \iff 1 > |w||a|$$

y por tanto  $1 + w\bar{a} \neq 0$ . Por tanto, dado  $w \in U$ , consideramos  $z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}$ .

Vamos a comprobar que  $z \in U$ :

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{a + w}{1 + w\bar{a}} \right| = \frac{|a + w|}{|1 + w\bar{a}|} < 1 \iff |a + w| < |1 + w\bar{a}| \iff |a + w|^2 < |1 + w\bar{a}|^2 \iff \\ &\iff (a + w)(\bar{a} + \bar{w}) < (1 + w\bar{a})(1 + \bar{w}a) \iff \\ &\iff a\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{a} + w\bar{w} < 1 + w\bar{a} + \bar{w}a + a\bar{a}w\bar{w} \iff \\ &\iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\ &\iff |w|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $z \in U$  y  $f(z) = w$ . Por tanto,  $f$  es sobreyectiva.

Por tanto,  $f$  es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{aligned} f^{-1}: U &\longrightarrow U \\ w &\longmapsto \frac{a+w}{1+w\bar{a}} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.1.4.** Dados  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$ , encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada  $k \in \Delta_n$ , se tenga que  $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $z_k = \lambda_k z_1$ . Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

$\implies$ ) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre  $n$ .

- $n = 1$ : La igualdad es trivialmente cierta, tomando  $\lambda_1 = 1$ .
- $n = 2$ : Hay dos opciones:

**Opción Rutinaria** Supongamos que se cumple para  $n = 2$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| \implies |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2|z_1||z_2| \implies (z_1\bar{z}_2)^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \implies \\ &\implies (z_1\bar{z}_2)^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies (z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos opciones:

**Opción 1** Tenemos que:

$$z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 = \overline{z_1\bar{z}_2} \implies z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora  $\lambda_2 = \frac{z_2\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} \in \mathbb{R}$ , por lo que:

$$\lambda_2 z_1 = \frac{z_2\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} z_1 = z_2$$

**Opción 2** Sea ahora  $z_1 = a + bi$  y  $z_2 = c + di$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 &= (a + bi)(c - di) = ac + bd + (bc - ad)i, \\ z_2\bar{z}_1 &= (c + di)(a - bi) = ac + bd + (ad - bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 \implies bc - ad = ad - bc \implies ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de  $b$ :

- Si  $b = 0$ , entonces  $ad = 0$ .
  - Si  $a = b = 0$ , entonces  $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$ , por lo que no es posible.
  - Si  $a \neq 0$ , entonces  $d = b = 0$ , por lo que  $z_1 = a$ ,  $z_2 = c$ , con  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$ . Por tanto, tomando  $\lambda_2 = c/a$ , se tiene que  $z_2 = \lambda_2 z_1$ .
- Si  $b \neq 0$ , entonces  $c = ad/b$ . Por tanto, tomando  $\lambda_2 = d/b$ , se tiene que  $z_2 = \lambda_2 z_1$ .

$$\lambda_2 z_1 = \frac{d}{b}(a + bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que  $z_2 = \lambda_2 z_1$ , con  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Para ver que  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1(1 + \lambda_2)| = |z_1||1 + \lambda_2| \\ |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda_2 z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como  $|z_1| \neq 0$ , tenemos que  $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$ . Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en  $\mathbb{R}$  se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ .

**Otra Opción** Vemos ahora los elementos de  $\mathbb{C}$  como elementos de  $\mathbb{R}^2$ , con el producto escalar de  $\mathbb{R}^2$  y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en  $\mathbb{R}^2$ , se cumple la igualdad si y solo si:

1.  $z_1$  y  $z_2$  son linealmente dependientes. Es decir,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $z_2 = \lambda z_1$ .
2. Su producto escalar es positivo. Es decir,  $\langle z_1, z_2 \rangle > 0$ . Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, \lambda z_1 \rangle = \lambda \langle z_1, z_1 \rangle = \lambda \|z_1\|^2 > 0 \iff \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para  $n = 2$ .

- Supongamos que se cumple para  $n$ , demostrémoslo para  $n + 1$ .

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left| \left( \sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| = \left( \sum_{k=1}^n |z_k| \right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| &= \left( \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| \right) + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left| \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| + |z_{n+1}| \end{aligned}$$

Notando por  $w = \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \in \mathbb{C}^*$ , y aplicando lo ya demostrado para  $n = 2$ , vemos que  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  tal que  $z_{n+1} = \rho w$ . Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho w = \rho \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1$$

Tomando  $\lambda_{n+1} = \rho \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \in \mathbb{R}^+$ , se tiene que  $z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$ . Por tanto, se cumple para  $n + 1$ .

Por tanto, por inducción se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

$\Leftarrow$ ) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada  $k \in \Delta_n$ , se tiene que  $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $z_k = \lambda_k z_1$ . Entonces, tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k z_1 \right| = \left| \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| = \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| = \sum_{k=1}^n \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

**Ejercicio 1.1.5.** Describir geoméricamente los subconjuntos del plano dados por

1.  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2|z - i|\}$ .

Sea  $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy + i| &= 2|x + iy - i| \implies |x + (y + 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \implies x^2 + (y + 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \implies \\ &\implies x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \implies 3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 = 0 \implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Por tanto,  $A$  es la circunferencia de centro  $\left(0, \frac{5}{3}\right)$  y radio  $\frac{4}{3}$ .

2.  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$ .

Sea  $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy - i| + |x + iy + i| &= 4 \implies |x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \implies \\ &\implies x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies -2y = 16 + 2y - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies 4 + y = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies 16 + 8y + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4 + 8y \implies \\ &\implies 4x^2 + 3y^2 = 12 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide  $\sqrt{3}$  y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es  $\sqrt{4-3} = 1$ . Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos  $(0, i)$ ,  $(0, -i)$  y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

**Ejercicio 1.1.6.** Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo  $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ :

$$\arg z = 2 \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado  $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ , consideramos  $\arg z \in ]-\pi, \pi[$ . Entonces, como en particular se tiene  $\arg z \in \operatorname{Arg} z$ , tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como  $z \notin \mathbb{R}^-$  (y por tanto  $|z| \neq -\operatorname{Re} z$ ), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z) \cdot |z|}{\cos(\arg z) \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2 \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) = 2 \arctan \left( \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen  $\arg z$ . Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} f : ]-\pi, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \alpha - 2 \arctan \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $f(0) = 0 - 2 \arctan(0) = 0$ . Por otro lado, como  $f \in C^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$ , consideramos la derivada de  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 + 2 \cos \alpha} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in ]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es constante, por lo que  $f(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ . Tomando como ángulo  $\alpha = \arg z$ , que por la elección hecha sabemos que  $\arg z \in ]-\pi, \pi[$ , tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left( \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

**Ejercicio 1.1.7.** Probar que, si  $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como  $\arg z \in \text{Arg } z$ , tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\text{Re } z}{|z|} \quad \wedge \quad \sin(\arg z) = \frac{\text{Im } z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que  $x = \text{Re } z = |z| \cos(\arg z)$  e  $y = \text{Im } z = |z| \sin(\arg z)$ . Por tanto, distinguimos en función de los valores de  $x$  e  $y$ , usando además que  $\arg z \in ]-\pi, \pi[$ :

■ Si  $x > 0$ :

En este caso,  $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \implies \arg z \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan(\tan(\arg z)) = \arg z$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

■ Si  $x < 0, y > 0$ :

En este caso,  $y = |z| \sin(\arg z) > 0 \implies \arg z \in ]0, \pi[$ . Además, se tiene que  $x = |z| \cos(\arg z) < 0$ . Por tanto,  $\arg z \in ]\pi/2, \pi[$ . No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar  $\theta = \arg z - \pi \in ]-\pi/2, 0[$ , que por la periodicidad de la tangente sabemos que  $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$ . Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z - \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \end{aligned}$$

■ Si  $x < 0, y < 0$ :

En este caso,  $y = |z| \sin(\arg z) < 0 \implies \arg z \in ]-\pi, 0[$ . Además, se tiene que  $x = |z| \cos(\arg z) < 0$ . Por tanto,  $\arg z \in ]-\pi, -\pi/2[$ . No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar  $\theta = \arg z + \pi \in ]0, \pi/2[$ , que por la periodicidad de la tangente sabemos que  $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$ . Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z + \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{aligned}$$

- Si  $x = 0, y > 0$ :

En este caso,  $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \implies \arg z \in ]0, \pi[$ . Además, se tiene que  $x = |z| \cos(\arg z) = 0$ . Por tanto,  $\arg z = \pi/2$ .

- Si  $x = 0, y < 0$ :

En este caso,  $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \implies \arg z \in ]-\pi, 0[$ . Además, se tiene que  $x = |z| \cos(\arg z) = 0$ . Por tanto,  $\arg z = -\pi/2$ .

**Ejercicio 1.1.8.** Probar las fórmulas de De Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre  $n$ .

- $n = 1$ : La igualdad es trivialmente cierta.
- Supongamos que se cumple para  $n$ , demostrémoslo para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= \cos(n\theta) \cos \theta - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen} \theta + i(\cos(n\theta) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos \theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como no hemos impuesto restricciones sobre  $\theta$ , se cumple para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.1.9.** Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^8.$$

Sea  $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\ \arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que  $\operatorname{Re} z' > 0$ . Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ z &= (z')^8 = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^8 \stackrel{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

donde en (\*) hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Ejercicio 1.1.10.** Probar que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \quad (1.2)$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por  $i$  y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^k$$

donde en (\*) hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo  $z = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$ , definimos  $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ , por lo que  $u^2 = z$ . Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k \bar{u}^k - u^{2k} = u^k (\bar{u}^k - u^k) = -2i \operatorname{sen}\left(k \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de  $z$ , tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{-2i \operatorname{sen}\left((n+1) \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^{n+1}}{-2i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot u} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot u^n = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

donde en (\*) hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que  $z \neq 1$ ; es decir, que  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$  (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.



## 1.2. Topología del plano complejo

**Ejercicio 1.2.1.** Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es,  $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.2.2.** Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , se considera el conjunto  $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \text{Arg } z\}$ . Probar que existe una función  $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$  que verifica  $\varphi(z) \in \text{Arg}(z)$  para todo  $z \in S_\theta$ .

**Ejercicio 1.2.3.** Probar que no existe ninguna función  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$  tal que  $\varphi(z) \in \text{Arg } z$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ , y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo  $\mathbb{C}^*$  por  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

**Ejercicio 1.2.4.** Probar que la función  $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  es continua, considerando en  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si  $\{z_n\}$  es una sucesión de números complejos no nulos, tal que  $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$  y  $\theta \in \text{Arg } z$ , se puede elegir  $\theta_n \in \text{Arg } z_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de forma que  $\{\theta_n\} \rightarrow \theta$ .

**Ejercicio 1.2.5.** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , probar que la sucesión  $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$  no es convergente y calcular su límite.

### 1.3. Funciones holomorfas

**Ejercicio 1.3.1.** En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como se indica:

1.  $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
2.  $f(x + iy) = x^3 - y + i \left( y^3 + \frac{x^2}{2} \right)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
3.  $f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , con  $f(0) = 0$ .

**Ejercicio 1.3.2.** Probar que existe una función entera  $f$  tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si se exige además que  $f(0) = 0$ , entonces  $f$  es única.

**Ejercicio 1.3.3.** Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir  $a, b, c \in \mathbb{R}$  para que exista una función entera  $f$  tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 1.3.4.** Sea  $\Omega$  un dominio y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Supongamos que existen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a^2 + b^2 > 0$ , tales que:

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Probar que  $f$  es constante.

**Ejercicio 1.3.5.** Sea  $\Omega$  un dominio y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Probar que si  $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ , entonces  $f$  es constante.

**Ejercicio 1.3.6.** Sea  $\Omega$  un dominio y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Sea  $\Omega^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega\}$  y  $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{para todo } z \in \Omega^*.$$

Probar que  $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$ .

**Ejercicio 1.3.7.** Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

## 1.4. Funciones analíticas

**Ejercicio 1.4.1.** Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$$

$$2. \sum_{n \geq 0} z^{2n}$$

$$3. \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$$

$$4. \sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$5. \sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

$$6. \sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n \text{ con } a \in \mathbb{C}$$

**Ejercicio 1.4.2.** Conocido el radio de convergencia  $R$  de la serie  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ , calcular el de las siguientes:

$$1. \sum_{n \geq 0} n^k \alpha_n z^n \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$$

**Ejercicio 1.4.3.** Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

**Ejercicio 1.4.4.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  donde:

$$f_n(z) = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^n \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$