

Análisis Matemático I Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Matemático I Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Análisis Matemático I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Salvador Villegas Barranco.

Fecha 20 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1 (4 puntos).

1. Sean (E, d) y (E, ρ) dos espacios métricos de un mismo espacio E . Demostrar que son equivalentes:
 - a) Las métricas d y ρ generan la misma topología en E .
 - b) $d(x_n, x) \rightarrow 0$ si y solo si $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, siendo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x \in E$.
2. Sea (E, d) un espacio métrico. Definimos $\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in E$$

Demostrar que ρ es una métrica y que genera la misma topología en E que d .

Ejercicio 2 (3 puntos). Sea $X = \{f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$. Demostrar que X es un espacio normado considerando

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{2^n} + \int_1^{\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} dx, \quad f \in X$$

1. ¿Es la aplicación $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(4)$ lineal y continua?
2. ¿Es la aplicación $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(\pi)$ lineal y continua?

Ejercicio 3 (3 puntos). Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales, continuidad de las derivadas parciales, y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \sin(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$