Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Índice general

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/˜rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

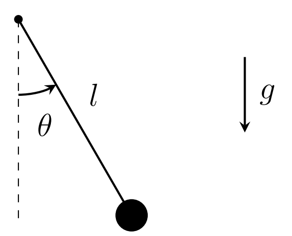
Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área "Ecuaciones Funcionales", pero gracias a que en física $F = m \cdot a$, podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

Ejemplo. Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos l.
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos g.
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos θ.



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo (t), y ver ahora la variable θ como una variable dependiente en función de t:

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si $\theta(t)$ es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación[1]:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) = 0 \tag{1}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones θ que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

[1]De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad\qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente (t, que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función (x, en función de t), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La Φ que aparece en (2) será una función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & \Phi(t, x, y) \end{array}$$

Donde trataremos de ver x como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de t: $x = x(t)$, siendo y su derivada.

Ejemplo. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función Φ en cuestión es:

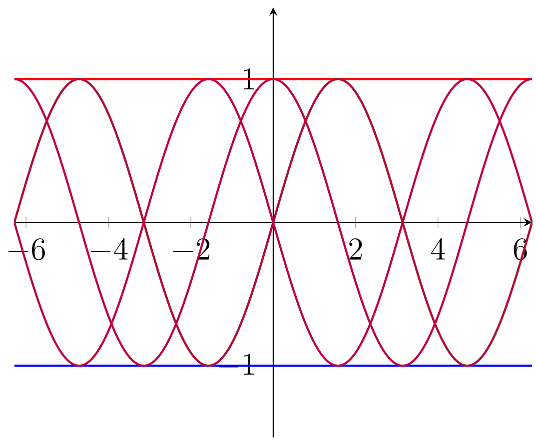
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D = \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{array}{ll} x(t) = \operatorname{sen} t & x(t) = \cos t \\ x(t) = 1 & x(t) = -1 \end{array}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \operatorname{sen}(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geqslant 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en $\mathbb{R}^*$ por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{array}{rrcl} f: & C \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para x': $x'(t) = h(t)$, a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \qquad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \operatorname{sen} t$
- $x'(t) = \operatorname{sen} x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} t$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} t$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} x$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} x$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

1. Relaciones de Problemas

1.1. Ecuaciones y sistemas

Ejercicio 1.1.1. En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos, con dominio $D = \mathbb{R}^2$ y condición inicial $A(0) = 0$.

Ejercicio 1.1.2. Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. La pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m_t = y'(x_0)$. Por otro lado, la distancia del punto al origen, notada por $d(P, O)$ es $d(P, O) = \sqrt{x_0^2 + y(x_0)^2}$. Como la condición impuesta en el enunciado es $m_t = (d(P, O))^2$, tenemos que:

   $$y' = x^2 + y^2$$

   Su dominio es $D = \mathbb{R}^2$.

2. El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

   La representación gráfica de la situación se encuentra en la Figura 1.1.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. Para ambas rectas, usaremos la ecuación punto-pendiente. Para la recta tangente, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{r} m_t = y'(x_0) \\ P_t = (0, y_t) \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(x_0) = \frac{y(x_0) - y_t}{x_0 - 0} \Longrightarrow y_t = y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)$$

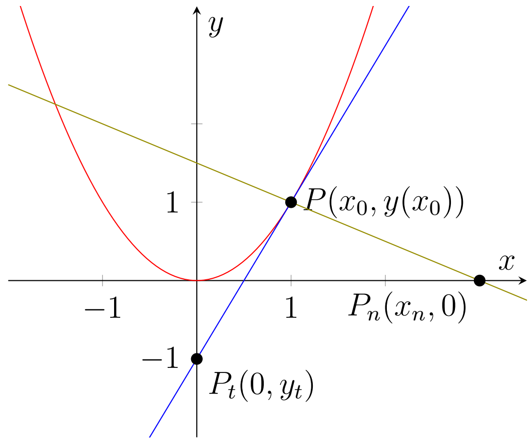


Figura 1.1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 1.1.2.2.

Notemos además que, en el caso de $x_0 = 0$, también podemos ver que se cumple que $y_t = y(x_0) - 0 \cdot y'(x_0) = y(x_0)$. Respecto a la recta normal, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} m_n = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \\ P_n = (x_n, 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow -\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y(x_0)}{x_n - x_0} \Longrightarrow x_n = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0$$

Notemos que, si $y'(x_0) = 0$, se cumple también que $x_n = 0 \cdot y(x_0) + x_0 = x_0$. Además, si $x_n = x_0$, entonces se tiene que $y'(x_0) = 0$ o $y(x_0) = 0$, por lo que también se cumple.

La ecuación diferencial que especifica el enunciado es $|y_t| = |x_n|$. Por tanto, tenemos que:

$$|y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)| = |y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0|$$

Quitando los valores absolutos, llegamos a que:

$$y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0 \Longrightarrow y(x_0) - x_0 = y'(x_0)\,(y(x_0) + x_0)$$
$$y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = -y(x_0) \cdot y'(x_0) - x_0 \Longrightarrow y(x_0) + x_0 = y'(x_0)\,(x_0 - y(x_0))$$

Por tanto, describe varias ecuaciones diferenciales distintas:

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \qquad \text{con dominio} \left\{\begin{array}{c} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}. \end{array}\right.$$

$$y' = \frac{y + x}{x - y} \qquad \text{con dominio} \left\{\begin{array}{c} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}. \end{array}\right.$$

Ejercicio 1.1.3. En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

Del contexto, deducimos que $x \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$. Además, tenemos que su primera derivada solo se anula en $x = \alpha$ y $x = \beta$. Consideramos por tanto los siguientes casos:

- Si $x \in]0, \alpha[$: En este caso, $x < \alpha < \beta$, luego $x - \alpha < 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.
- Si $x \in]\alpha, \beta[$: En este caso, $\alpha < x < \beta$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' > 0$, luego es creciente.
- Si $x \in]\beta, +\infty[$: En este caso, $x > \beta > \alpha$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x < 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.

Por tanto, para el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$, tenemos que:

- Si $x(0) \in]0, \alpha[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to 0$.
- Si $x(0) \in]\alpha, \beta[$, entonces x' es creciente, luego $x(t) \to \beta$.
- Si $x(0) \in]\beta, +\infty[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to \beta$.

Ejercicio 1.1.4. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1. $xy = k$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$0 = y + xy' \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

   $$y' = \frac{x}{y}$$

2. $y = kx^4$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$0 = 4kx^3 - y' \Longrightarrow y' = 4kx^3 = 4 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{y}{x}$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

   $$y' = -\frac{x}{4y}$$

3. $y = e^{kx}$.

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = ke^{kx} - y' \Longrightarrow y' = ke^{kx}$$

   Para despejar la k, tenemos que $k = \dfrac{\ln y}{x}$. Por tanto, tenemos que:

$$y' = \frac{\ln y}{x} \cdot e^{\frac{\ln y}{x} \cdot x} = \frac{\ln y}{x} \cdot y$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{y \ln y}$$

Ejercicio 1.1.5. Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Las soluciones alcanzan un punto crítico donde $x'(t) = 0$, es decir, $t + x^3 = 0$. Por tanto, las soluciones alcanzan un punto crítico en la curva $x(t) = \sqrt[3]{-t}$. El dibujo, tanto del campo de direcciones como de la curva, se encuentra en la Figura 1.2.

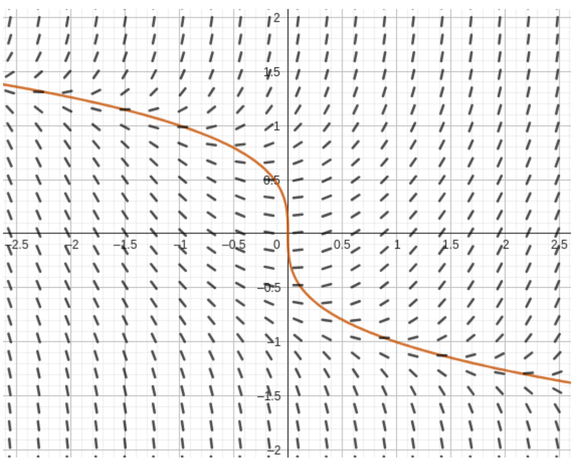


Figura 1.2: Campo de direcciones y curva del Ejercicio 1.1.5.

Supongamos ahora una solución tal que $x(0) = 0$. Como x es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, tenemos que $x \in C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, x es derivable en 0. Calculamos la derivada de x en 0:

$$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$$

Por tanto, tenemos que es un punto crítico. Comprobemos que es un mínimo local estricto. Para ello, calculamos la segunda derivada de x en 0:

$$x''(0) = 1 + 3x(0)^2 \cdot x'(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 \cdot 0 = 1 > 0$$

Por tanto, es un mínimo local estricto.

Respecto de la demostración de que es un mínimo global, intuitivamente observando el campo de direcciones se tiene directamente.

Ejercicio 1.1.6. Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

Buscamos obtener y en función de x. Hay dos opciones:

Opción 1: Buscamos completar cuadrados para obtener las funciones $y(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2x + 2y &= (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y) = (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y + {}^1\!/\!_4 - {}^1\!/\!_4) = \\ &= (x+1)^2 - 1 + 2(y + {}^1\!/\!_2)^2 - {}^1\!/\!_2 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$C \equiv (x+1)^2 + 2(y + {}^1\!/\!_2)^2 = {}^5\!/\!_2 \equiv (y + {}^1\!/\!_2)^2 = \frac{{}^5\!/\!_2 - (x+1)^2}{2}$$

Aplicando la raíz cuadrada, tenemos que:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{{}^5\!/\!_2 - (x+1)^2}{2}} - \frac{1}{2}$$

Opción 2: Despejamos y usando la ecuación de segundo grado, considerando x fijo:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2-2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x + 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{20 - 4 \cdot 2 \cdot (x+1)^2}{16}} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{{}^5\!/\!_2 - (x+1)^2}{2}} \end{aligned}$$

En ambos casos, vemos que obtenemos dos funciones diferenciables, una para cada signo. Como C es una elipse, se trata de la parte superior e inferior de la misma. El intervalo maximal de definición es aquel que mantiene el argumento de la raíz cuadrada positivo:

$$\frac{5/2-(x+1)^2}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow 5/2 \geqslant (x+1)^2 \Longrightarrow -5/2 \leqslant x+1 \leqslant 5/2 \Longrightarrow |x+1| \leqslant \sqrt{5/2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -\sqrt{5/2}-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{5/2}-1$$

Por tanto, el intervalo maximal de definición es $I = \left[-\sqrt{5/2}-1, \sqrt{5/2}-1\right]$.

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

   Derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$2x+2+(4y+2)y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{2x+2}{4y+2} = -\frac{x+1}{2y+1}$$

   Por tanto, la ecuación diferencial que describe las funciones del apartado anterior es $y = f(x, y)$, con:

   $$f(x,y) = -\frac{x+1}{2y+1} \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y+1 > 0\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y+1 < 0\}. \end{cases}$$

3. La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

Ejercicio 1.1.7. Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0, s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

Observación. Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

La situación descrita se encuentra en la Figura 1.3.

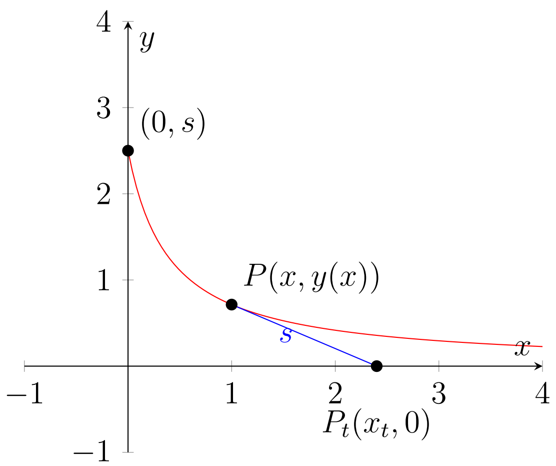


Figura 1.3: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 1.1.7.

Por tanto, la condición impuesta es que la distancia desde un punto de la gráfica al punto de corte de la tangente a la curva por ese punto con el eje de abscisas es constante e igual a s. Es decir, si el punto es $(x, y(x))$, entonces la condición es:

$$\sqrt{(x - x_t)^2 + y(x)^2} = s$$

Veamos cómo calcular x_t. Usando la definición de pendiente con los puntos P y P_t, tenemos:

$$y'(x) = \frac{y(x) - 0}{x - x_t} \Longrightarrow x_t = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que $y'(x) = 0$ no tiene sentido, puesto que la recta descrita sea horizontal, y por tanto no habría punto de corte con el eje X (es decir, no habría un único x_t). Por tanto, la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$\sqrt{\left(x - x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right)^2 + y(x)^2} = s \Longrightarrow \sqrt{\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2} = s$$

Elevando al cuadrado, tenemos que:

$$\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2 = s^2 \Longrightarrow y'(x)^2 = \frac{y(x)^2}{s^2 - y(x)^2}$$

Notemos que $y(x) < s$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el denominador es siempre positivo. Aplicamos ahora la raíz cuadrada, sabiendo que $y'(x) < 0$ por ser la pendiente de la curva decreciente, y $y(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{s^2 - y(x)^2}}$$

Usando la notación correspondiente, tenemos que la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}} \qquad \text{con dominio } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -s < y < s\}$$

Ejercicio 1.1.8. Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{1.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{1.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (1.1).

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (1.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (x'(t))^2 + x^2(t). \end{array}$$

Por ser x una solición de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x,\ x' \in C^1(I)$ y, por tanto f es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\ \ [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que f es constante en I. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{gathered}(x'(t))^2 + x^2(t) = 0^2 + 1^2 = 1,\\ x''(t) + x(t) = 0 + 1 = 1\end{gathered}$$

Ejercicio 1.1.9. Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\end{aligned}$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.

   Representemos la situación en la Figura 1.4.

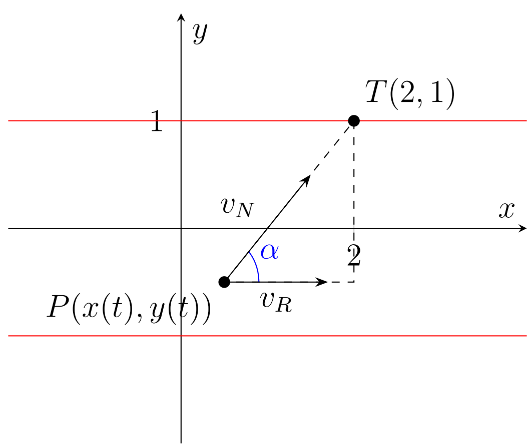


Figura 1.4: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 1.1.9.

Tenemos que $x(t)$ es la componente horizontal de la posición de la nadadora, por lo que $x'(t)$ es la velocidad horizontal de la nadadora:

$$x'(t) = v_R + v_N \cdot \cos(\alpha) \overset{(*)}{=} v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de coseno como cateto contiguo sobre hipotenusa. Por otro lado, $y(t)$ es la componente vertical de la posición de la nadadora, por lo que $y'(t)$ es la velocidad vertical de la nadadora:

$$y'(t) = v_N \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \overset{(*)}{=} v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de seno como cateto opuesto sobre hipotenusa.

2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

   Tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_N \cdot \dfrac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}}{v_R + v_N \cdot \dfrac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}} = \frac{1-y}{\dfrac{v_R}{v_N}\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} + 2 - x}$$

Ejercicio 1.1.10. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$,

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 e^t - c_2 e^{-t}, \\ x'' &= c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que la ecuación diferencial $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite como solución a la familia de funciones dada.

2. $x = c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t$.

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 \operatorname{senh} t + c_2 \cosh t, \\ x'' &= c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que la ecuación diferencial $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite de nuevo como solución a la familia de funciones dada.

Ejercicio 1.1.11. Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx' + \varphi(x')$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.
2. Suponiendo que $\varphi(x) = x^2$, demuestre que $x(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ también es solución.

   Para esto, vemos:

   $$tx' + \varphi(x') = t \cdot \left(\frac{-2t}{4}\right) + \left(\frac{-2t}{4}\right)^2 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{4} = x$$

   Por tanto, $x(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ es solución.
3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

Ejercicio 1.1.12. Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.

1. **Problema 6:** Transformar la ecuación $e^{x'} = x$ en una ecuación en forma normal y prueba que tiene una única solución tal que $x(t_0) = a$ para todo t_0 y todo $a \in \mathbb{R}^+$.

   Aplicando el logaritmo neperiano, tenemos que la ecuación diferencial en forma normal es:

   $$x' = \ln x \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$
2. **Problema 7:** Encuentra la ecuación cuya solución es la catenaria:

   $$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

   Calculamos su derivada:

   $$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh}(t)$$

   Por tanto, la ecuación diferencial que describe la catenaria es:

   $$x' = \operatorname{senh}(t) \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

1.2. Cambios de Varible

Ejercicio 1.2.1. Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas de la forma dada por $x' = p(t)q(x)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$ y, para que el dominio sea conexo, podemos considerar $J = \mathbb{R}^+$ o $J = \mathbb{R}^-$.

Usamos por tanto el método de variables separadas. En primer lugar, comprobamos que q no tiene raíces en J:

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 = 0$$

Una vez comprobado esto, procedemos a resolver la ecuación usando el método de variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t-5}{x^2} \Longrightarrow x^2 dx = (t-5)dt \Longrightarrow \int x^2 dx = \int (t-5)dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{t^2}{2} - 5t + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

Despejando x obtenemos la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - 15t + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Busquemos ahora su intervalo maximal de definición (llamémoslo $\widehat{I} \subset I$). Necesitamos que $x(t) \in J$ para todo $t \in \widehat{I}$ y que x sea derivable en $\widehat{I}$. Distinguimos casos:

- $\underline{J = \mathbb{R}^+}$: En este caso, necesitamos que $x(t) > 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea positivo:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C > 0$$

  Veamos en qué puntos se anula el radicando:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C = 0 \Longrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 6C}}{3} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

  Distinguimos en función de C:

  $$25 - \frac{2C}{3} = 0 \Longrightarrow C = \frac{75}{2}$$

- $C > 75/2$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x, y este es siempre positivo. Por tanto, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$; es decir, $x(t) \in J$ para todo $t \in I$. Además, x es derivable en I, luego el intervalo maximal de definición es I, $\widehat{I} = I$.
- $C = 75/2$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, 5[\qquad I_2 =]5, +\infty[$$

En ambos casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.
- $C < 75/2$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus [t_1, t_2]$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, t_1[\qquad I_2 =]t_2, +\infty[$$

En todos los casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.

- $J = \mathbb{R}^-$: En este caso, necesitamos que $x(t) < 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea negativo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C < 0$$

Distinguimos en función de C:

- $C > 75/2$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x. Además, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$, por lo que no hay solución en este caso.
- $C = 75/2$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Además, como el intervalo de definición de la solución debe ser abierto y conexo, no hay solución en este caso.
- $C < 75/2$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) < 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Como en el abierto es derivable, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} =]t_1, t_2[$.

Ejercicio 1.2.2. En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P' = P(\alpha - \beta P)$$

y la ecuación de Gompertz

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P)$$

siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

Resolvamos en primer lugar la ecuación de Verhulst. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta P) \end{array}$$

donde consideramos $I = J = \mathbb{R}$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, \frac{\alpha}{\beta}$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación son, para todo $t \in I$:

$$P(t) = 0 \qquad P(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \mathbb{R}^-$, $J_2 =]0, \alpha/\beta[$ y $J_3 =]\alpha/\beta, +\infty[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en el la segunda componente del dominio.

- $\underline{J_1 = \mathbb{R}^-}$:

  Como en este caso no cumple que $P(0) = 100 \in J_1$, no nos interesa este dominio.

- $\underline{J_2 =]0, \alpha/\beta[}$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_2$:

  $$100 \in J_2 \Longleftrightarrow 100 < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta < \alpha$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_2$:

  $$P' = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = dt \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt$$

  Para resolver la primera integral, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

  $$\frac{1}{P(\alpha - \beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P} = \frac{A(\alpha - \beta P) + BP}{P(\alpha - \beta P)}$$

- Para $P=0$: $1 = A\cdot\alpha \Longrightarrow A = {}^{1}/_{\alpha}$.
- Para $P = {}^{\alpha}/_{\beta}$: $1 = B\cdot {}^{\alpha}/_{\beta} \Longrightarrow B = {}^{\beta}/_{\alpha}$.

Por tanto, tenemos que:

$$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha-\beta P)} = \int dt \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\int\frac{dP}{P} + \frac{\beta}{\alpha}\int\frac{dP}{\alpha-\beta P} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha-\beta P) = t + C \qquad C\in\mathbb{R}$$

donde en la última implicación hemos usado que $P\in J_2$.

Operando con la solución obtenida, llegamos a:

$$\ln\left(\frac{P}{\alpha-\beta P}\right) = \alpha(t+C) \Longrightarrow \frac{P}{\alpha-\beta P} = e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(1+\beta e^{\alpha(t+C)}) = \alpha e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow P = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}$$

Por tanto, para $P\in J_2$, la familia de soluciones es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C\in\mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0)=100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{1+\beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(1+\beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{100}{\alpha-100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t\in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)$$

- $J_3 =]{}^{\alpha}/_{\beta}, +\infty[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_3$:

$$100\in J_3 \Longleftrightarrow 100 > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta > \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_3$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\beta P - \alpha) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Operando con la solución obtenida, llegamos a que la familia de soluciones para $P \in J_3$ es:

$$P(t) = \frac{-\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 - \beta e^{\alpha(t+C)}} = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{-1 + \beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(-1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{-100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Por tanto, y a modo de resumen, distinguimos en función de los valores de α, β:

- <u>$100 = \alpha/\beta$</u>: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad t \in I$$

- <u>$100 < \alpha/\beta$</u>: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

- <u>$100 > \alpha/\beta$</u>: En este caso, la solución está en J_3, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Ejercicio 1.2.3. Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t - x)$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

Al no indicarnos nada sobre la primera variable, suponemos que esta no varía, luego el cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{cases} s = t, \\ y = t - x. \end{cases}$$

Al no especificar dominio de la ecuación, suponemos que está definida en $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, t - x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi = (\psi_1, \psi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, s - y) \end{array}$$

Para emplear el cambio de variable, en primer lugar hemos de comprobar que φ es un difeomorfismo. Para ello, hemos demostrar que φ es biyectiva y que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demostraremos en primer lugar que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$:

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(s, y) &= \varphi(s, s - y) = (s, s - (s - y)) = (s, y) = Id_{\mathbb{R}^2}(s, y) \qquad \forall (s, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi \circ \varphi(t, x) &= \psi(t, t - x) = (t, t - (t - x)) = (t, x) = Id_{\mathbb{R}^2}(t, x) \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que φ es biyectiva y que $\varphi^{-1} = \psi$. Además, como ambas componentes de φ, ψ son de clase 1, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, luego φ es un difeomorfismo.

A continuación, hemos de comprobar que el cambio es admisible. Aunque lo sabemos puesto que no varía la primera variable, lo demostramos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t, x) = 1 + 0 \cdot \cos(t - x) = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que el cambio de variable es admisible. Procedemos a aplicarlo a la ecuación dada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = 1 - \cos(t - x) = 1 - \cos y$$

Usando la notación usual, la nueva ecuación diferencial, con dominio $\mathbb{R}^2$, es:

$$y' = 1 - \cos y$$

Esta es de la forma $y' = p(s)q(y)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & 1-\cos y \end{array}$$

Buscamos en primer lugar los valores en los que se anula q:

$$q(y)=0 \Longleftrightarrow 1-\cos y=0 \Longleftrightarrow \cos y=1 \Longleftrightarrow y=2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Fijado ahora $k\in\mathbb{Z}$, restringimos ahora el dominio de q a $J=]2\pi k, 2\pi(k+1)[$. En J tenemos que q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{ds}=1-\cos y \Longrightarrow \frac{dy}{1-\cos y}=ds \Longrightarrow \int\frac{dy}{1-\cos y}=\int ds$$

Ejercicio 1.2.4. Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que

$$v'+\frac{k}{m}v^2=g,$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k>0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0)=0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $v'=p(t)q(v)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & -\dfrac{k}{m}v^2+g \end{array}$$

Comprobamos las raíces de q en $\mathbb{R}$:

$$q(v)=0 \Longleftrightarrow -\frac{k}{m}v^2+g=0 \Longleftrightarrow v^2=\frac{gm}{k} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1=-\sqrt{\dfrac{gm}{k}}, \\ v_2=\sqrt{\dfrac{gm}{k}}. \end{cases}$$

Como buscamos la solución que cumple $v(0)=0$, consideramos el dominio dado por $J=]v_1,v_2[$. En este dominio, q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v^2+g \Longrightarrow \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2+g}=dt \Longrightarrow \int\frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2+g}=\int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow m\int\frac{dv}{-kv^2+gm}=t+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

Para resolver la integral, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{-kv^2+gm}=\frac{A}{v-v_1}+\frac{B}{v-v_2}=\frac{A(v-v_2)+B(v-v_1)}{(v-v_1)(v-v_2)}$$

- Para $v = v_1$: $1 = A(v_1 - v_2) \Longrightarrow A = \dfrac{1}{v_1 - v_2} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.

- Para $v = v_2$: $1 = B(v_2 - v_1) \Longrightarrow B = \dfrac{1}{v_2 - v_1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
m\int \frac{dv}{-kv^2+gm} &= m\int\left(\frac{A}{v-v_1}+\frac{B}{v-v_2}\right)dv = \\
&= m\left(A\ln(v-v_1)+B\ln(v_2-v)\right)+C' = \\
&= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left(\ln(v_2-v)-\ln(v-v_1)\right)+C' = \\
&= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{v_2-v}{v-v_1}\right)+C' = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}+v}\right)+C'
\end{aligned}$$

Por tanto, la famlia de soluciones en J es:

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}+v}\right) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Operando, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}+v} &= \exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \\
-v\left[1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right] &= \sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}} \\
v &= -\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\dfrac{2}{m}\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\dfrac{gm}{k}}}{1+\exp\left((t+C)\cdot\dfrac{2}{m}\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\right)} \\
v &= -\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}}\left[\exp\left((t+C)\cdot\dfrac{2}{m}\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\right)-1\right]}{1+\exp\left((t+C)\cdot\dfrac{2}{m}\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\right)}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0) = 0$ es:

$$v(0) = 0 = -\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[\exp\left(C \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) - 1\right]}{1 + \exp\left(C \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \Longrightarrow 1 = \exp\left(C \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}} = 0 \Longrightarrow C = 0$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0) = 0$ es:

$$v(t) = -\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[\exp\left(t \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) - 1\right]}{1 + \exp\left(t \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Estudiemos ahora el comportamiento a largo plazo de la solución. Para ello, consideramos el límite cuando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}}$$

Por tanto, la velocidad tiende a la raíz positiva de $\dfrac{gm}{k}$ cuando $t \to +\infty$.

Ejercicio 1.2.5. Calcule la solución de la ecuación

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

que verifica $y(0) = 1$.

Ejercicio 1.2.6. Resuelva los siguientes problemas lineales

1. $x' + 3x = e^{-3t}$, $x(1) = 5$
2. $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{1 + t^2}$, $x(2) = 0$
3. $x' = \cosh t \cdot x + \sinh t$, $x(0) = 1$

Ejercicio 1.2.7. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $a(t) \geqslant c > 0$ para todo t y

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes)

Ejercicio 1.2.8. La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problemas de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

Ejercicio 1.2.9. Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

Ejercicio 1.2.10. Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

Ejercicio 1.2.11. Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t$, $y = \lambda^2 x$, con $\lambda > 0$.

Ejercicio 1.2.12. Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.