

# Topología I

## Examen VIII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

# Topología I

## Examen VIII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Jose Antonio Gálvez López<sup>1</sup>.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 18 de enero de 2023.

**Duración** 3 horas.

---

<sup>1</sup>El examen lo pone el departamento.

**Ejercicio 1** (5 puntos). Sea  $\|\cdot\|$  la norma euclídea usual en  $\mathbb{R}^2$ . Se consideran los conjuntos  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 2\}$  y  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 2\}$ . Para cada  $p = (x, y) \in X$ , se considera la siguiente familia:

- Si  $p \in S$ ,  $\beta_p = \{B((0, 0), r) \cup \{p\} \mid 0 < r < 1\}$ .
- Si  $p \notin S$ ,  $\beta_p = \{B(p, r) \mid 0 < r < 2 - \|p\|\}$ .

Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (1.5 puntos) Demuestra que existe una única topología  $\mathcal{T}$  en  $X$  tal que las familias anteriores forman una base de entornos de cada punto. En los siguientes apartados, se considera el espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ .

Demostramos las 4 condiciones del Teorema correspondiente. En primer lugar, sea  $p \in S$ :

V1) Veamos que  $\beta_p \neq \emptyset$ . Como  $]0, 1[ \neq \emptyset$ , entonces  $\beta_p \neq \emptyset$ . Por ejemplo,  $B(0, 1/2) \cup \{p\} \in \beta_p$ .

V2) Dado  $V \in \beta_p$ , de forma directa se tiene que  $p \in V$ .

V3) Sean  $V_1, V_2 \in \beta_p$ . Tenemos que ver que  $\exists V_3 \in \beta_p$  tal que  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ .

Sean  $V_1 = B(0, r_1) \cup \{p\}$  y  $V_2 = B(0, r_2) \cup \{p\}$ , con  $r_1, r_2 \in ]0, 1[$ . Entonces, tomando  $r_3 = \min\{r_1, r_2\}$ , tenemos que  $V_3 = B(0, r_3) \cup \{p\} \in \beta_p$ , y además  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ , por lo que  $V_3$  cumple lo que buscamos.

V4) Sea  $V \in \beta_p$ . Comprobemos que  $\exists V' \in \beta_p$  tal que  $V' \subset V$  y, para todo  $q \in V'$ ,  $\exists V_q \in \beta_q$  tal que  $V_q \subset V$ .

Sea  $V = B(0, r) \cup \{p\}$ , con  $r \in ]0, 1[$ . Entonces, tomando  $r' = r/2$ , sea  $V' = B(0, r') \cup \{p\} \in \beta_p$ . Como  $r' < r$ , entonces  $V' \subset V$ . Sea ahora  $q \in V'$ :

- Si  $q = p$ , tomamos  $V_q = V'$ , y tenemos que  $V_q \subset V$ .
- Si  $q \neq p$ , entonces  $q \in B(0, r')$ , por lo que  $q \notin S$ . Por tanto, tenemos que  $V_q = B(q, r_q) \in \beta_q$ , para cierto  $0 < r_q < 2 - \|q\|$ . Calculemos  $r_q$  de forma que  $V_q = B(q, r_q) \subset V$ . Para ello, necesitamos que, para todo  $x \in B(q, r_q)$ , se tenga que  $\|x\| < r$ :

$$\|x - q\| < r_q \implies \|x\| < r_q + \|q\| < r_q + r' = r_q + \frac{r}{2} < r \iff r_q < \frac{r}{2}$$

Por tanto, tomando  $r_q = \frac{\min\{\frac{r}{2}, 2 - \|q\|\}}{2}$ , tenemos lo buscado.

Sea ahora  $p \in X \setminus S$ , por lo que  $p \in B(0, 2)$ . Veamos que  $\beta_p$  cumple las condiciones del Teorema:

V1) Veamos que  $\beta_p \neq \emptyset$ . Como  $\|p\| < 2$ , tenemos que  $]0, 2 - \|p\|[ \neq \emptyset$ , por lo que  $\beta_p \neq \emptyset$ . Por ejemplo,  $B(p, \frac{2 - \|p\|}{2}) \in \beta_p$ .

V2) Dado  $V \in \beta_p$ , de forma directa se tiene que  $p \in V$ .

V3) Sean  $V_1, V_2 \in \beta_p$ . Tenemos que ver que  $\exists V_3 \in \beta_p$  tal que  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ .

Sean  $V_1 = B(p, r_1)$  y  $V_2 = B(p, r_2)$ , con  $r_1, r_2 \in ]0, 2 - \|p\|$ . Entonces, tomando  $r_3 = \min\{r_1, r_2\}$ , tenemos que  $V_3 = B(p, r_3) \in \beta_p$ , y además  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ , por lo que  $V_3$  cumple lo que buscamos.

V4) Sea  $V \in \beta_p$ . Comprobemos que  $\exists V' \in \beta_p$  tal que  $V' \subset V$  y, para todo  $q \in V'$ ,  $\exists V_q \in \beta_q$  tal que  $V_q \subset V$ .

Sea  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|$ . Entonces, tomando  $r' = r/2$ , sea  $V' = B(p, r') \in \beta_p$ . Como  $r' < r$ , entonces  $V' \subset V$ . Sea ahora  $q \in V'$ :

■ Si  $\|q\| \geq 2$ :

Veamos que este caso no se puede dar. Como  $q \in V' = B(p, r')$ , entonces  $\|q - p\| < r' < r < 2 - \|p\|$ . Además, por la desigualdad triangular, tenemos que:

$$\|q\| - \|p\| \leq \|q - p\| < 2 - \|p\|$$

Por tanto, tenemos que  $\|q\| - \|p\| < 2 - \|p\|$ , por lo que  $\|q\| < 2$ . Pero esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que  $\|q\| \geq 2$ .

■ Si  $\|q\| < 2$ :

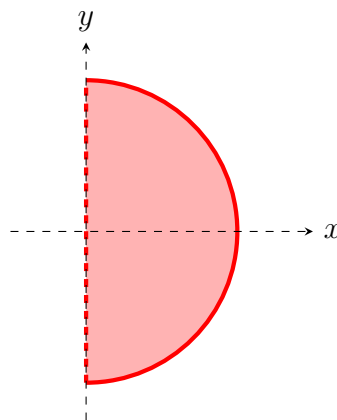
Tenemos que  $V_q = B(q, r_q) \in \beta_q$ , para cierto  $0 < r_q < 2 - \|q\|$ . Calculemos  $r_q$  de forma que  $V_q = B(q, r_q) \subset V$ . Para ello, necesitamos que, para todo  $x \in B(q, r_q)$ , se tenga que  $\|x\| < r$ :

$$\|x - q\| < r_q \implies \|x\| < r_q + \|q\| < r_q + r' = r_q + \frac{r}{2} < r \iff r_q < \frac{r}{2}$$

Por tanto, tomando  $r_q = \frac{\min\{\frac{r}{2}, 2 - \|q\|\}}{2}$ , tenemos lo buscado.

2. (1 punto) Dado el subconjunto  $A = \{(x, y) \in X : x > 0\}$ , calcula el interior y la frontera de  $A$ .

Representamos en la siguiente figura el conjunto  $A$ :



Calcularemos en primer lugar  $A^\circ$ . Tenemos que:

$$p \in A^\circ \iff \exists V \in \beta_p \mid V \subset A$$

Veamos que, si  $p \in S$ , entonces  $p \notin A^\circ$ . Sea  $p \in S$ , por lo que dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(0, r) \cup \{p\}$ , con  $r \in ]0, 1[$ . Por tanto, tenemos que  $(-\frac{r}{2}, 0) \in V$ , pero  $(-\frac{r}{2}, 0) \notin A$ , por lo que  $V \not\subset A$ . Por tanto,  $p \notin A^\circ$ .

Veamos entonces que  $A^\circ = \tilde{A}$ , con:

$$\tilde{A} = A \cap B(0, 2) = A \setminus S(0, 2) = \{(x, y) \in X \mid x > 0, \|(x, y)\| < 2\}$$

▷) Sea  $p = (x, y) \in \tilde{A}$ , y veamos que  $p \in A^\circ$ . Como  $p \in X$ ,  $p \notin S$ , entonces dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|]$ . Buscamos el valor de  $r$  tal que  $V = B(p, r) \subset A$ . Para ello, necesitamos que, para todo  $(x', y') \in B(p, r)$ , se tenga que  $(x', y') \in A$ ; es decir,  $x' > 0$  y  $\|(x', y')\| \leq 2$ . Tomamos entonces  $r = \min\{2 - \|p\|, x/2\}$ , y veamos que  $B(p, r) \subset A$ :

◁) Sea  $q = (x', y') \in B(p, r)$ , y veamos que  $q \in A$ . En primer lugar, comprobamos que  $q \in X$ , es decir,  $\|q\| \leq 2$ . Como  $q \in B(p, r)$ , entonces  $\|q - p\| < r$ , por lo que:

$$\|q - p\| < r \implies \|q\| < r + \|p\| < 2 - \|p\| + \|p\| = 2$$

Por tanto,  $q \in X$ . Veamos ahora que  $q \in A$ , es decir,  $x' > 0$ . Supongamos que  $x' \leq 0$ , y veamos que esto es una contradicción. Como  $q \in B(p, r)$ , entonces  $\|q - p\| < r$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \|q - p\| &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < r \implies |x' - x| < r \implies \\ &\implies x - r < x' < x + r \implies x - r < x' \end{aligned}$$

No obstante, esto es una contradicción, ya que:

$$x - r > x - x/2 = x/2 > 0$$

Por tanto,  $x' > 0$ , por lo que  $q \in A$ .

Por tanto, como  $\exists r \in ]0, 2 - \|p\|]$  tal que  $B(p, r) \subset A$ , entonces  $p \in A^\circ$ .

◁) Sea  $p \in A^\circ$ , y veamos que  $p \in \tilde{A}$ . Sabemos que  $p \in A$ , y supongamos que  $p \in A \cap S$ . Como hemos visto antes, esto es una contradicción, ya que  $p \notin A^\circ$ . Por tanto,  $p \in A \setminus S = \tilde{A}$ .

Por tanto, queda demostrado que  $A^\circ = \tilde{A}$ . Calculemos ahora el cierre. Para ello, sabemos que:

$$p \in \bar{A} \iff \forall V \in \beta_p, V \cap A \neq \emptyset$$

Veamos entonces que  $\bar{A} = \hat{A}$ , con:

$$\hat{A} = A \cup S \cup \{(0, y) \in X\}$$

▷) Sea  $p = (x, y) \in \hat{A}$ , y veamos que  $p \in \bar{A}$ . Distinguimos en función de si  $p \in S$  o no:

- Si  $p \in S$ , entonces dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(0, r) \cup \{p\}$ . Por tanto, tenemos que:

$$\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in V \cap A \subset B(0, r) \cap A \neq \emptyset$$

- Si  $p \in A \setminus S$ , entonces dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|$ . Por tanto,

$$p \in V \cap A = B(p, r) \cap A \neq \emptyset$$

- Si  $p = (0, y)$ ,  $y \neq \pm 2$ , entonces dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|$ . Por tanto, tomando  $\delta = \min\{r/2, \sqrt{4 - \|p\|^2}\}$ , tenemos que:

$$q = (\delta, y) \in V \cap A = B(p, r) \cap A \neq \emptyset$$

En primer lugar, tenemos que  $q \in V$  ya que  $\|q - p\| = |\delta| < r$ . Veamos ahora que  $q \in X$ :

$$\|q\| = \sqrt{\delta^2 + y^2} \leq \sqrt{4 - \|p\|^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$

Por tanto,  $q \in X$ . Además, como  $\delta > 0$ , entonces  $q \in A$ . Por tanto,  $q \in V \cap A$ .

Por tanto, en los tres casos,  $\forall V \in \beta_p$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $p \in \bar{A}$ .

- C) Sea  $p \in \bar{A}$ , y veamos que  $p \in \hat{A}$ . Supongamos que  $p \in X$  pero  $p \notin \hat{A}$ . Entonces,  $p = (x, y)$ , con  $x < 0$  y  $\|p\| < 2$ . Veamos que esto es una contradicción. Como  $\|p\| < 2$ , entonces para todo  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|$ . Consideramos entonces el valor  $r = \min\{2 - \|p\|, -x/2\}$ , y veamos que  $V \cap A = \emptyset$ . Para ello, sea  $q = (x', y') \in V$ , y veamos que  $q \notin A$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|q - p\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < r &\implies |x' - x| < r \implies \\ &\implies x - r < x' < x + r \implies x' < x + r \end{aligned}$$

No obstante, tenemos que  $x + r \leq x - x/2 = x/2 < 0$ , por lo que  $x' < 0$ , por lo que  $q \notin A$ . Por tanto,  $V \cap A = \emptyset$ , por lo que  $p \notin \bar{A}$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $p \in \hat{A}$ .

Por tanto, queda demostrado que  $\bar{A} = \hat{A}$ . Por tanto, tenemos que:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \hat{A} \setminus \tilde{A} = (A \cup S \cup \{(0, y) \in X\}) \setminus (A \cap B(0, 2)) = S \cup \{(0, y) \in X\}$$

3. (0.5 puntos) Estudia si  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorff o no.

Veamos que no lo es. Sean  $p, q \in S \subset X$ , con  $p \neq q$ . Entonces tenemos que, para todo  $V \in \beta_p$ ,  $U \in \beta_q$ , se tiene que  $0 \in V \cap U$ . Por tanto,  $\nexists V \in \beta_p$ ,  $U \in \beta_q$  tal que  $V \cap U = \emptyset$ , por lo que  $(X, \mathcal{T})$  no es Hausdorff.

4. (1 punto) Estudia si  $(X, \mathcal{T})$  es conexo o no.

Veamos en primer lugar que  $V_p = B(p, 1/2)$  es conexo para todo  $p \in X$ ,  $\|p\| \leq 1/2$ . Veamos que  $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{u_{V_p}}$ :

- C) Sea  $q \in V_p$ , y un entorno básico de  $q$  en  $\mathcal{T}_{V_p}$  será de la forma  $B(q, r) \cap V_p$ , con  $r \in ]0, 2 - \|q\|$ . Veamos que dicho conjunto es un entorno de  $q$  en  $\mathcal{T}_{u_{V_p}}$ . Como  $B(q, r) \in \mathcal{T}_u$ , entonces  $B(q, r) \cap V_p \in \mathcal{T}_{u_{V_p}}$ . Además, como  $q \in B(q, r) \cap V_p$ , entonces  $B(q, r) \cap V_p$  es un entorno de  $q$  en  $\mathcal{T}_{u_{V_p}}$ , por lo que se tiene que  $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{u_{V_p}}$ .

Por tanto, supongamos que  $V_p$  no es conexo, es decir, que existen  $U, V \in \mathcal{T}_{V_p}$  no triviales tales que  $U \cap V = \emptyset$  y  $V_p = U \cup V$ . Como  $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{uV_p}$ , entonces  $U, V \in \mathcal{T}_{uV_p}$ , por lo que  $(V_p, \mathcal{T}_{uV_p})$  no es conexo, lo cual es una contradicción, ya que  $V_p$  es una bola abierta y sabemos que es conexa por ser estrellada. Por tanto,  $V_p$  es conexo.

Sea ahora  $q \in S$ , y consideramos  $V_q = B(0, 1/2) \cup \{q\} \in \beta_q$ . Veamos que  $V_q$  es conexo. Para ello, supongamos que  $V_q$  no es conexo, es decir, que existen  $U, V \in \mathcal{T}$  no triviales tales que  $U \cap V = \emptyset$  y  $V_q = U \cup V$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $q \in U$ . Como  $U$  es abierto, entonces  $U$  es entorno de  $q$ , por lo que  $\exists r \in ]0, 1/2[$  tal que  $B(0, r) \subset U$ . Como  $U \cap V = \emptyset$ , entonces  $V \subset B(0, 1/2) \setminus B(0, r)$ .

Consideramos ahora  $V_0 = B(0, 1/2)$ , y tenemos que  $\mathcal{T}_{V_0} \subset \mathcal{T}_{uV_0}$ . Sean  $\tilde{U} = U \cap V_0$ ,  $\tilde{V} = V \cap V_0$ , y tenemos que  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{T}_{V_0}$ . Además,

$$\begin{aligned}\tilde{U} \cap \tilde{V} &= (U \cap V_0) \cap (V \cap V_0) = U \cap V \cap V_0 = \emptyset \\ \tilde{U} \cup \tilde{V} &= (U \cap V_0) \cup (V \cap V_0) = (U \cup V) \cap V_0 = V_q \cap V_0 = V_0\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $V_0$  es desconexo. No obstante, esto es una contradicción, ya que antes hemos visto que  $V_0$  era conexo. Por tanto,  $V_q$  es conexo.

De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned}X &= S \cup (X \setminus S) = \left( \bigcup_{p \in S} \{s\} \right) \cup X \setminus S = \bigcup_{s \in S} (B(0, 1/2) \cup \{s\}) \cup X \setminus S \subset \\ &\subset \bigcup_{s \in S} (B(0, 1/2) \cup \{s\}) \bigcup_{\substack{p \in X \\ \|p\|=1/2}} B\left(p, \frac{1}{2}\right) \subset X\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$X = B(0, 1/2) \cup \left( \bigcup_{s \in S} (B(0, 1/2) \cup \{s\}) \right) \bigcup_{\substack{p \in X \\ \|p\|=1/2}} B\left(p, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces,  $X$  es la unión de conjuntos conexos en  $(X, \mathcal{T})$ , y todos ellos intersecan a  $B(0, 1/2)$ , por lo que  $(X, \mathcal{T})$  es conexo.

5. (1 punto) Estudia si  $(X, \mathcal{T})$  es compacto o no.

Veamos que  $X \setminus S$  es abierto. Sea  $p \in X \setminus S$ , y veamos que  $\exists V \in \beta_p$  tal que  $V \subset X \setminus S$ . Como  $p \in X \setminus S$ , entonces  $\|p\| < 2$ . Por tanto, dado  $V \in \beta_p$ , se tiene que  $V = B(p, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|p\|]$ . Tomamos entonces  $r = \frac{2 - \|p\|}{2}$ , y veamos que  $V \subset X \setminus S$ . Para ello, sea  $q \in V$ , y veamos que  $q \in X \setminus S$ . Como  $q \in V$ , entonces:

$$\|q - p\| < r = \frac{2 - \|p\|}{2} = 1 - \frac{\|p\|}{2} \implies \|q\| < 1 - \frac{\|p\|}{2} + \|p\| = 1 + \frac{\|p\|}{2} < 2 \iff \|p\| < 2$$



Por tanto,  $q \in X \setminus S$ , por lo que  $V \subset X \setminus S$ . Por tanto,  $X \setminus S$  es abierto.

Veamos ahora que, dado  $p \in S$ ,  $U_p = B(0, 1/2) \cup \{p\}$  es abierto. Para ello, veamos que dado  $q \in U_p$ ,  $\exists V \in \beta_q$  tal que  $V \subset U_p$ . Distinguimos en función de si  $q = p$  o no:

- Si  $q = p$ , entonces  $V = U_p$  cumple lo que buscamos.
- Si  $q \neq p$ , entonces  $q \in B(0, 1/2)$ , por lo que  $\|q\| < 1/2$ . Por tanto, dado  $V \in \beta_q$ , se tiene que  $V = B(q, r)$ , con  $r \in ]0, 2 - \|q\|$ . Por tanto, tomando  $r$  lo suficientemente pequeño, tenemos que  $V \subset B(0, 1/2)$ , por lo que  $V \subset U_p$ .

Por tanto,  $U_p$  es abierto. Por tanto, consideramos el siguiente recubrimiento de  $X$  mediante abiertos:

$$X = \left( \bigcup_{p \in S} U_p \right) \cup (X \setminus S)$$

Supongamos entonces que  $X$  es compacto. Entonces, dado dicho recubrimiento, existe un subrecubrimiento finito. Sea entonces  $S_0 \subset S$  finito tal que:

$$X = \left( \bigcup_{p \in S_0} U_p \right) \cup (X \setminus S)$$

No obstante, esto es una contradicción, ya que  $S$  es no numerable (infinito), y  $S_0$  es finito. Por tanto, hay puntos de  $S$  que no están en  $S_0$ , por lo que no están en dicho subrecubrimiento recubrimiento, lo cual es una contradicción.

Por tanto,  $X$  no es compacto.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Elige una de las siguientes preguntas (2a o 2b):

2a. Da una definición de subespacio compacto en un espacio topológico y prueba las siguientes afirmaciones:

- a) Un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.
- b) Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.

2b. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Todo entorno de un punto de un espacio topológico es abierto.  
Esto es falso. Como contraejemplo, consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ , donde  $\mathcal{T}_u$  es la topología usual. Entonces, el conjunto  $[-2, 2]$  es un entorno de 0, ya que existe una bola abierta  $] -1, 1[$  tal que se tiene que  $0 \in ] -1, 1[ \subset [-2, 2]$ . No obstante, este conjunto no es abierto, ya que no es entorno del 2.
- b) Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico entonces la aplicación identidad dada por  $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$  es continua si y solo si  $(X, \mathcal{T})$  es T1. Aquí,  $\mathcal{T}_{CF}$  denota la topología cofinita.  
Tenemos que  $Id$  es continua si y solo si  $\mathcal{T}_{CF} \subset \mathcal{T}$ . Veamos por tanto que es cierta mediante doble implicación:

$\implies$ ) Supongamos que  $Id$  es continua, por lo que  $\mathcal{T}_{CF} \subset \mathcal{T}$ . Dados  $x, y \in X$  tales que  $x \neq y$ , entonces como  $(X, \mathcal{T}_{CF})$  es T1, entonces existen  $U \in \mathcal{T}_{CF}$  con  $x \in U$ ,  $y \notin U$ . Como  $\mathcal{T}_{CF} \subset \mathcal{T}$ , entonces  $U \in \mathcal{T}$ , por lo que  $(X, \mathcal{T})$  es T1.

$\impliedby$ ) Supongamos que  $(X, \mathcal{T})$  es T1, y veamos que  $\mathcal{T}_{CF} \subset \mathcal{T}$ . Para ello, veamos que  $C_{CF} \subset C_{\mathcal{T}}$ . Sea  $C \in C_{CF}$ . Entonces,  $C$  es finito, por lo que  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$C = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$$

Como  $(X, \mathcal{T})$  es T1, entonces  $\{x\} \in C_{\mathcal{T}}$  para todo  $x \in X$ , por lo que  $C$  es una unión finita de cerrados, por lo que  $C \in C_{\mathcal{T}}$ . Por tanto,  $C_{CF} \subset C_{\mathcal{T}}$ , por lo que  $\mathcal{T}_{CF} \subset \mathcal{T}$  e  $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$  es continua.

c) Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una aplicación biyectiva entre espacios compactos y T2, entonces  $f$  es continua si, y solo si,  $f^{-1}$  es continua.

Demostremos que es cierta mediante doble implicación:

$\implies$ ) Supongamos que  $f$  es continua, y tenemos que  $f$  es biyectiva. Además, como  $(X, \mathcal{T})$  es compacto y  $(Y, \mathcal{T}')$  es T2, entonces  $f$  es cerrada. Como  $f$  es continua, cerrada y biyectiva, entonces  $f$  es un homeomorfismo, por lo que  $f^{-1}$  es continua.

$\impliedby$ ) De manera análoga, como  $f^{-1}$  es continua, cerrada y biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es un homeomorfismo, por lo que  $f$  es continua.

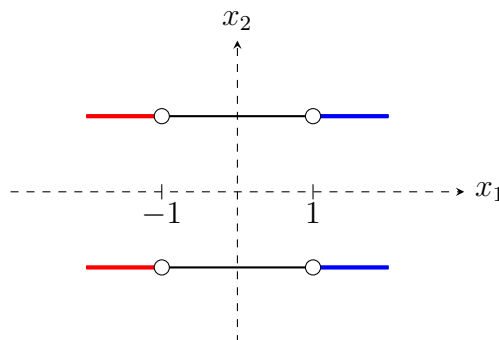
**Ejercicio 3** (2.5 puntos). En  $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$  consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x_1, y_1) \mathcal{R}(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2), & \text{o bien} \\ x_1, x_2 > 1, & \text{o bien} \\ x_1, x_2 < -1. \end{cases}$$

Si sobre  $X$  consideramos la topología usual inducida de  $\mathbb{R}^2$ , estudiar si:

1. La proyección canónica  $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  es una aplicación abierta,

Veamos qué puntos identifica la relación de equivalencia:



Demostremos ahora que es abierta. Para ello, una base de  $(X, \mathcal{T})$  es:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[ \times \{1\}, ]a, b[ \times \{-1\} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Demostremos para el caso de  $]a, b[ \times \{1\}$ , y el otro caso es análogo. Distingamos entonces en función de  $a, b$ :

- Si  $]a, b[ \subset ]1, +\infty[$ :

En este caso, tenemos que:

$$p([a, b[ \times \{1\}) = \{[ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ]\} \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$$

- Si  $]a, b[ \subset ]-\infty, -1[$ :

En este caso, tenemos que:

$$p([a, b[ \times \{1\}) = \{[ ]-\infty, -1[ \times \{1, -1\} ]\} \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$$

- Si  $]a, b[ \subset ]-1, 1[$ :

En este caso, tenemos que  $]a, b[ \times \{1\} \in \mathcal{T}_X$ . Además,

$$p([a, b[ \times \{1\}) = ]a, b[ \times \{1\} \quad p^{-1}(p([a, b[ \times \{1\})) = ]a, b[ \times \{1\}$$

Por tanto,  $]a, b[ \times \{1\}$  es saturado, por lo que  $p([a, b[ \times \{1\}) \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$ .

- Si  $-1 < a < 1$  y  $b > 1$ :

Tenemos que:

$$p(U) = ]a, 1[ \times \{1\} \cup \{[ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ]\}$$

Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:

$$V = ]a, +\infty[ \times \{1\} \cup [ ]1, +\infty[ \times \{-1\} \in \mathcal{T}_X$$

Tenemos que  $p^{-1}(p(V)) = V$ , por lo que  $p(V)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ . Además,  $p(U) = p(V)$ , por lo que  $p(U)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ .

- Si  $a < -1$  y  $-1 < b < 1$ :

Tenemos que:

$$p(U) = \{[ ]-\infty, -1[ \times \{1, -1\} ]\} \cup [-1, b[ \times \{1\}$$

Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:

$$V = ]-\infty, -1[ \times \{-1\} \cup [ ]-\infty, b[ \times \{1\} \in \mathcal{T}_X$$

Tenemos que  $p^{-1}(p(V)) = V$ , por lo que  $p(V)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ . Además,  $p(U) = p(V)$ , por lo que  $p(U)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ .

- Si  $a < -1$  y  $b > 1$ :

Tenemos que:

$$p(U) = \{[ ]-\infty, -1[ \times \{1, -1\} ]\} \cup \{[ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ]\} \cup [-1, 1[ \times \{1\}$$

Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:

$$V = \mathbb{R} \times \{1\} \cup [ ]-\infty, -1[ \times \{-1\} \cup [ ]1, +\infty[ \times \{-1\} \in \mathcal{T}_X$$

Tenemos que  $p^{-1}(p(V)) = V$ , por lo que  $p(V)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ . Además,  $p(U) = p(V)$ , por lo que  $p(U)$  es abierto en  $\mathcal{T}/\mathcal{R}$ .

Por tanto, como para todos los abiertos de la base  $\mathcal{B}$  se tiene que  $p(U) \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$ , entonces  $p$  es abierta.

2.  $X/\mathcal{R}$  es T2,

En primer lugar, necesitamos calcular  $X/\mathcal{R}$ . Tenemos que:

$$X/\mathcal{R} = \{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ], [ ] - \infty, -1[ \times \{1, -1\} ] \} \cup \bigcup \{ A \times \{1\}, A \times \{-1\}, A \times \{1, -1\} \mid A \subset [-1, 1] \}$$

Sea  $x = \{1\} \times \{1\} = (1, 1) \in X/\mathcal{R}$ . Buscamos  $U \in \mathcal{T}_X$  saturado tal que  $\{x\} \in p(U)$ . Como  $p^{-1}(\{x\}) = x$ , buscamos  $U \in \mathcal{T}_X$  saturado tal que  $x \in U$ , por lo que  $U$  es entorno de  $x$ , y entonces  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que  $B((1, 1), \varepsilon) \cap X \subset U$ . Por tanto, se tiene que  $U \cap ([ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\}) \neq \emptyset$ . Por tanto, como  $U$  es saturado,

$$([ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\}) \cup (1, 1) \subset U$$

Por tanto, tenemos que, tomando  $x = [(1, 1)]$  e  $y = [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ]$ , se tiene que  $\forall U \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$  con  $x \in U$ :

$$\{y\} \cap U \subset \{y\} \cap ([ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\}) \cup (1, 1) ] = \{y\} \cap (\{y\} \cup \{x\}) = \{y\} \neq \emptyset$$

Por tanto, no es T2.

Otra opción de ver que no es T2 es ver que tampoco es T1. Para esto, veamos que  $\{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ] \}$  no es cerrado en  $X/\mathcal{R}$ .

Buscamos  $U \subset X$  saturado y cerrado tal que  $p(U) = \{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ] \}$ . El único conjunto saturado de  $X$  tal que  $p(U) = \{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ] \}$  es  $U = ]1, +\infty[ \times \{1, -1\}$ , que no es cerrado, por lo que no existe dicho conjunto saturado y cerrado. Por tanto,  $\{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ] \}$  no es cerrado, por lo que  $X/\mathcal{R}$  no es T1, por lo que tampoco es T2.

3.  $X/\mathcal{R}$  es compacto,

Sabemos que  $X$  no es compacto por no ser  $\mathbb{R}$  acotado, por lo que el hecho de que la proyección  $p$  sea continua no nos sirve para demostrar si  $X/\mathcal{R}$  es compacto.

**Opción 1:** De forma directa.

Para ver que sí es compacto, demostraremos que  $X/\mathcal{R}$  es unión finita de compactos. Para ello, sean los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ [ ]1, +\infty[ \times \{1, -1\} ] \} & A_2 &= \{ [ ] - \infty, -1[ \times \{1, -1\} ] \} \\ A_3 &= [-1, 1] \times \{1\} & A_4 &= [-1, 1] \times \{-1\} \end{aligned}$$

Es directo ver que  $X/\mathcal{R} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ . Además,  $A_1, A_2$  son compactos por ser conjuntos unitarios. Veamos ahora que  $A_3$  es compacto. En primer lugar, sabemos que es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que es

compacto en  $\mathbb{R}^2$  y, como es cerrado en  $X$ , entonces es compacto en  $X$ . Además, como  $\mathcal{T}/\mathcal{R}|_{A_3} = \mathcal{T}|_{A_3}$ , entonces  $A_3$  es compacto en  $X/\mathcal{R}$ . De forma análoga, se demuestra que  $A_4$  es compacto.

Por tanto,  $X/\mathcal{R}$  es unión finita de compactos, por lo que es compacto.

**Opción 2:** Usando que la proyección canónica es continua.

Sea  $C = [-2, 2] \times \{-1, 1\} \subset X$  un conjunto compacto en  $X$ . por ser unión de dos compactos. Como  $p$  es continua, tenemos que  $p(C) = X/\mathcal{R}$  es compacto.

4.  $X/\mathcal{R}$  es conexo.

Sabemos que  $X$  no es conexo por no ser producto de conexos (ya que  $\{-1, 1\}$  no es conexo), por lo que el hecho de que la proyección  $p$  sea continua no nos sirve para demostrar si  $X/\mathcal{R}$  es conexo.

**Opción 1:** De forma directa.

Para ver si es conexo, buscamos  $p(U) \in \mathcal{T}/\mathcal{R} \cap C_{\mathcal{T}/\mathcal{R}}$ . Es decir, buscamos  $U$  saturado tal que  $U \in \mathcal{T}_X \cap C_{\mathcal{T}_X}$ . Como  $\mathbb{R}$  es conexo, los únicos abiertos y cerrados en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  son  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}$ . Por tanto, los conjuntos abiertos y cerrados en  $X$  son:

$$\emptyset, X, \mathbb{R} \times \{1\}, \mathbb{R} \times \{-1\}$$

No obstante, los dos últimos no son saturados, por lo que los únicos abiertos y cerrados en  $X$  saturados son  $\emptyset$  y  $X$ . Por tanto,  $U = X, \emptyset$  por lo que  $p(U) = X/\mathcal{R}, \emptyset$ . Por tanto, tenemos que  $X/\mathcal{R}$  es conexo.

**Opción 2:** Usando que la proyección canónica es continua.

Sea  $A = [-2, 2] \times \{-1\}, B = [-2, 2] \times \{1\} \subset X$  dos conjuntos conexos en  $X$ . Como  $p$  es continua, tenemos que  $p(A), p(B)$  son conexos en  $X/\mathcal{R}$ . Además, tenemos que:

$$X/\mathcal{R} = p(A) \cup p(B)$$

Además,  $p(A) \cap p(B) \neq \emptyset$ , ya que  $p(2, 1) = p(2, -1) = [1, +\infty[\times\{1, -1\}] \in p(A) \cap p(B)$ . Por tanto, como  $X/\mathcal{R}$  es unión de dos conjuntos conexos con intersección no vacía, entonces  $X/\mathcal{R}$  es conexo.