

# Lógica y Métodos Discretos



*Escuela Técnica Superior de Ingenierías  
Informática y de Telecomunicación*

**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24



# Índice general

<b>1. Relaciones de Problemas</b>	<b>5</b>
1.1. Inducción . . . . .	5
1.2. Recurrencia . . . . .	22
1.3. Lógica Proposicional . . . . .	42



# 1. Relaciones de Problemas

## 1.1. Inducción

**Ejercicio 1.1.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para  $n = 0$ :

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene  $P(0)$ .

- Como hipótesis de inducción supondremos que  $n \in \mathbb{N}$  y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.2.** Demuestre que para todo número natural  $n$ :

$$\left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

*Demostración.* En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■  $n = 0$ :

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■  $n = 1$ :

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■  $n > 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

**Ejercicio 1.1.3** (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural  $n$  vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base  $n = 0$ :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto,  $P(0)$  es correcto.



- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left( \sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción y en  $(**)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Luego  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  se tiene, como se pedía.  $\square$

*Observación.* El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, a la hora de demostrar que un predicado vale para  $n+1$ , se usa que es cierto para todo  $n \in \{0, \dots, n\}$ .

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

**Ejercicio 1.1.4.** Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

*Demostración.* El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula)  $P(n)$  del tenor:

“ $n$  tiene un factor primo”

donde  $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$  (tenemos que  $i_0 = 2$ ).

Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n$  es un número natural superior a 1 y que  $P(k)$  vale para todo  $1 < k < n$ .

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- $n$  es primo:

En este caso,  $n$  es un factor primo de  $n$  (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso, por lo que se tiene el caso base).

- $n$  no es primo:

Si  $n$  no es primo, existen números naturales  $u$  y  $v$  tales que  $n = uv$  y  $1 < u, v$ . Claro está entonces, que  $1 < u, v < n$ . Por la hipótesis de inducción,  $P(u)$  vale, luego  $u$  tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar  $p$ . Así pues,  $p \mid u$  y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego  $P(n)$  vale.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$  vale  $P(n)$ .  $\square$

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base ( $i_0$ ) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con  $i_0 = 2$ .

**Ejercicio 1.1.5** (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea  $p$  la función dada por:

$$p(a, 0) = 0, \\ p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ ,  $p(a, b) = ab$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado  $P(n)$  del tenor:

“Para todo número natural  $m$ ,  $p(m, n) = mn$ .”

Supongamos como hipótesis de inducción que  $k$  es un número natural y que  $P(k)$  vale para todo  $0 \leq k < n$ . Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$ , (sea cual sea  $m$ ):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego  $P(0)$  vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n)$  vale:

Suponemos aquí que  $n > 0$ . Caben dos casos:

1.  $n \equiv 0 \pmod{2}$  (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n}{2} < n$ .

2.  $n \equiv 1 \pmod{2}$  (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n-1}{2} < n$ .

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$ , vale  $P(n)$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.6.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 2 \mid (5^n + 3^{n-1}) ”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como  $2 \mid 6$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq b$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como  $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$  y, por hipótesis de inducción, se tiene que  $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$ , hemos visto que  $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.7.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) ”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como  $8 \mid 8$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq b$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que  $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$  y, por hipótesis de inducción,  $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ , se tiene que  $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.8.** Demuestre que para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como  $2 \geq \sqrt{2}$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que  $P(n+1)$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como  $0 \leq 2+3n$ ,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  es cierto, como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.9.** Demuestra que, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base,  $n = 3$ :

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como  $16 < 27$ ,  $P(3)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural mayor que 2 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que  $(n+1)^2 < n^3$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.10.** Demuestre que para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ n^3 < n! ”$$

- En el caso base,  $n = 6$ :

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como  $6 < 20$ ,  $P(6)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural superior a 5 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en  $(**)$  he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.11.** Demuestre que, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5.

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 5 \mid 8^n - 3^n ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como  $5 \mid 0$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que  $5 \mid 8^n - 3^n$ , se tiene que  $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5, como se pedía.  $\square$

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales. Para ello, emplearemos el mínimo común múltiplo, cuya definición vamos a recordar:

**Definición 1.1** (Mínimo común múltiplo). Sea  $A$  un Dominio de Integridad y  $a, b \in A$ . Un elemento  $m \in A$  diremos que es un **mínimo común múltiplo** (abreviado como mcm) y notado  $m = \text{mcm}(a, b)$  si verifica:

1.  $a \mid m \wedge b \mid m$ ,
2.  $\forall c \in A$  tal que  $a \mid c \wedge b \mid c \implies m \mid c$ .

**Ejercicio 1.1.12.** Demuestra que, para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

*Demostración.* Distinguimos casos según el valor de  $a$  y  $b$ :

- $a = 0$  o  $b = 0$ :

Tenemos que 0 es un múltiplo común de  $a$  y de  $b$ . Además, es el mínimo múltiplo común de  $a$  y  $b$ , ya que cualquier otro múltiplo común de  $a$  y de  $b$  es mayor que 0.

- $a, b > 0$ :

Sea  $M_{a,b}$  el conjunto de los múltiplos comunes de  $a$  y de  $b$ . Es claro que se tiene que  $0 \in M_{a,b}$ , ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que  $ab \in M_{a,b}$ , ya que  $ab$  es múltiplo de  $a$  y de  $b$ . Como  $a, b > 0$ , se tiene que  $ab > 0$ . Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto,  $v_{a,b}$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$ , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales,  $v_{a,b}$  tiene un mínimo, al que llamaremos  $m_{a,b}$ . Veamos que  $m_{a,b}$  es el mínimo común múltiplo de  $a$  y de  $b$ .

1. Como  $m_{a,b} \in M_{a,b}$ , se tiene que  $a|m_{a,b}$  y  $b|m_{a,b}$ .
2. Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a|m$  y  $b|m$ . Buscamos demostrar que  $m_{a,b}|m$ . Como  $m_{a,b} \neq 0$ , por el Teorema de la División de Euclides, existen únicos  $q, r \in \mathbb{N}$  tales que  $m = qm_{a,b} + r$  con  $0 \leq r < m_{a,b}$ . Por tanto,  $r = m - qm_{a,b}$ , por lo que  $r$  es un múltiplo común de  $a$  y de  $b$ ,  $r \in M_{a,b}$ . Como  $r < m_{a,b}$ , se tiene que  $r \notin v_{a,b}$ , por lo que:

$$r \in M_{a,b} \setminus v_{a,b} = M_{a,b} \setminus (M_{a,b} \setminus \{0\}) = \{0\}$$

Por tanto,  $r = 0$ , por lo que  $m = qm_{a,b}$ , es decir,  $m_{a,b}|m$ , teniendo lo buscado.

Por tanto,  $m_{a,b}$  es el mínimo común múltiplo de  $a$  y de  $b$ , como se pedía.

*Observación.* Notemos que la definición del mínimo común múltiplo no es el mínimo de los múltiplos comunes de  $a$  y de  $b$ , algo en lo que el lector podría caer fácilmente.  $\square$

**Ejercicio 1.1.13.** Estime un valor de  $n \in \mathbb{N}$  para el que

$$100^n < n!$$

**Ejercicio 1.1.14** (Ejemplo de principio del buen orden). Sea  $n$  un número natural y sea  $S$  un conjunto de números naturales menores que  $n$ . Demuestre que  $S$  es vacío o tiene máximo.

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que  $S$  es no vacío. Pueden darse dos casos

1.  $S = \{0\}$ ; en este caso,  $S$  tiene máximo y es 0.
2.  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$  (es decir,  $S$  tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea el conjunto de los mayorantes de  $S$ ,  $M(S)$ , dado por:

$$M(S) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \leq m \text{ para todo } x \in S\}$$

Se tiene entonces que  $n \in M(S)$ , por lo que  $M(S) \neq \emptyset$ . Por el principio del buen orden,  $M(S)$  tiene mínimo, al que llamaremos  $m_0$ . Veamos que  $m_0$  es el máximo de  $S$ . Para ello, es necesario demostrar que  $m_0 \in S$  y que  $m_0 \geq x$  para todo  $x \in S$ .

- Como  $m_0 \in M(S)$ , se tiene que  $x \leq m_0$  para todo  $x \in S$ , por lo que efectivamente  $m_0$  es un mayorante de  $S$ .
- Veamos ahora que  $m_0 \in S$ .

*Observación.* A continuación, restaremos 1 a  $m_0$ , considerando  $m_0 - 1$ . Para poder trabajar en  $\mathbb{N}$ , es necesario que  $m_0 \neq 0$ . Como  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , sea  $x_0 \in S \setminus \{0\}$ , por lo que  $x_0 \neq 0$  y  $x_0 \in \mathbb{N}$ . Como  $m_0 \in M(S)$ , se tiene que  $x_0 \leq m_0$ , por lo que  $0 < x_0 \leq m_0$ .



Supongamos que  $x < m_0$  para todo  $x \in S$ . Por tanto:

$$x \leq m_0 - 1 \text{ para todo } x \in S \implies m_0 - 1 \in M(S)$$

Además,  $m_0 - 1 < m_0$ , lo que contradice que  $m_0$  sea el mínimo de  $M(S)$ , por lo que la hipótesis era falsa y  $\exists x_0 \in S$  tal que  $x_0 \geq m_0$ . Como además  $m_0 \geq x_0$  por ser  $x_0 \in S$ , tenemos que  $m_0 = x_0$ , por lo que  $m_0 \in S$ . Por tanto, como  $m_0 \in S \cap M(S)$ , se tiene que  $m_0$  es el máximo de  $S$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.15.** Demuestre mediante inducción que para todo número natural  $n$  tal que  $2 \leq n$  se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Caso base:  $n = 2$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\iff 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \iff 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \iff (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\iff \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$ :

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Por tanto,  $P(2)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n \in \mathbb{N}$  y que vale  $P(n)$ , es decir

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. En primer lugar, veamos que:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Supongando 1 a cada lado de la desigualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 &\implies (\sqrt{n+1})^2 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \implies \\ &\implies \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \\ &< \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \leq 2$ ,  $P(n)$  vale.  $\square$

**Ejercicio 1.1.16.** Demostrar **no inductivamente** que para todo número natural  $n$  se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tenemos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n k &= \left( \sum_{k=0}^n k \right) + \left( \sum_{k=0}^n (n-k) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n k + (n-k) = \sum_{k=0}^n n = n(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Ejercicio 1.1.17.** Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos solo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de superior a 13.

El razonamiento es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado  $P(n)$  del tenor:

“Es posible franquear una carta de  $n$  céntimos con sellos de 3 y 8 céntimos.”

Como hipótesis de inducción, supongamos que  $14 \leq n$  y que  $P(k)$  es cierto para todo  $14 \leq k < n$ . Distinguiamos los siguientes casos:

- Caso base:  $n = 14$ .

Tenemos que  $14 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 8$ , por lo que  $P(14)$  es cierto.

- Caso base:  $n = 15$ .

Tenemos que  $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$ , por lo que  $P(15)$  es cierto.

- Caso base:  $n = 16$ .

Tenemos que  $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$ , por lo que  $P(16)$  es cierto.

- Supongamos que  $n \geq 17$ , por lo que  $14 \leq n - 3 < n$ , y por la hipótesis de inducción, se tiene que  $P(n - 3)$  es cierto. Es decir, existirán  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $n - 3 = 3a + 8b$ . En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n)$  es cierto. Tenemos que:

$$n = (n - 3) + 3 = 3a + 8b + 3 = 3(a + 1) + 8b$$

Por tanto,  $P(n)$  es cierto.

Por tanto, por el segundo principio de inducción, se tiene que para todo número natural  $n$  superior a 13,  $P(n)$  es cierto, como se pedía.

**Ejercicio 1.1.18.** Demuestre que para cualquier número natural  $n$  se tiene que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 2|(n + 1)(n + 2) ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$2|1 \cdot 2$$

Como  $2|2$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n + 1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (n + 1 + 1)(n + 1 + 2) - (n + 1)(n + 2) &= (n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2) = \\ &= (n + 2)(n + 3 - n - 1) = 2(n + 2) \end{aligned}$$

Por tanto, como  $2|(n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2)$  y, por hipótesis de inducción,  $2|(n + 1)(n + 2)$ , se tiene que  $2|(n + 1 + 1)(n + 1 + 2)$ . Por tanto,  $P(n + 1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , se tiene que  $2|(n + 1)(n + 2)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.19.** Demuestre que para cualquier número natural  $n$  se tiene que:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$6 \mid 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Como  $6 \mid 0$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) &= (n+1)(n+2)[n+3-n] = \\ &= 3(n+1)(n+2) \stackrel{(*)}{=} 3 \cdot 2k = 6k \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos empleado el Ejercicio 1.1.18. Por tanto, como se tiene que  $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)$  y, por hipótesis de inducción,  $6 \mid n(n+1)(n+2)$ , se tiene que  $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , se tiene que  $6 \mid n(n+1)(n+2)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.20** (Parcial DGIIM 23/24). Demuestre por inducción que para todo número natural  $n \in \omega$  existe un polinomio  $f_n(x, y)$  cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor  $f_n(x, y)$  de  $x^n - y^n$  cuya existencia ha concluido y calcule su valor para  $n \in 4$ .

**Notación.** De aquí en adelante, para cualquier número natural  $n \in \omega$ ,  $f_n(x, y)$  denotará un polinomio.

*Demostración.* La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

Como  $0 = 0 \cdot (x - y)$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(k)$  es cierto para  $k \in \omega$ ,  $0 \leq k \leq n$ , es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - y^{n+1} + x^n y - x^n y + x y^n - x y^n \\ &= (x + y)(x^n - y^n) - xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\ &\stackrel{(*)}{=} (x + y)(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy(x - y) \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \\ &= (x - y) \left[ (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \right] \\ &= (x - y) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^{k+1} \right] \\ &= (x - y) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^0 y^n \right] \\ &= (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado la hipótesis de inducción, puesto que  $n, n-1 \leq n$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Así pues, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , existe un polinomio  $f_n(x, y)$  dado por:

$$f_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

tal que cumple:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

□

Veamos ahora para cada valor de  $n \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$  el valor de  $f_n(x, y)$ :

- Para  $n = 0$ :

$$f_0(x, y) = \sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = (x - y) \cdot 0$$

- Para  $n = 1$ :

$$f_1(x, y) = \sum_{k=0}^0 x^{0-k} y^k = 1$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \cdot 1$$

- Para  $n = 2$ :

$$f_2(x, y) = \sum_{k=0}^1 x^{1-k} y^k = x + y$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

- Para  $n = 3$ :

$$f_3(x, y) = \sum_{k=0}^2 x^{2-k} y^k = x^2 + xy + y^2$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

*Observación.* Proponemos ahora una demostración alternativa para la existencia de  $f_n(x, y)$ .

*Demostración.* La demostración es mediante el segundo principio de inducción matemática según el predicado  $Q(n)$  del tenor:

$$“ x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y) ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

Como  $0 = 0 \cdot (x - y)$ ,  $Q(0)$  es cierto.

- Supongamos como hipótesis de inducción que  $n$  es un número natural y que  $Q(k)$  es cierto para todo  $k \in \omega$ ,  $0 \leq k < n$ . Es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot f_k(x, y)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $Q(n)$  es cierto. Distinguimos dos casos:

- Para  $n$  par:

Tenemos que  $n = 2m$  para algún  $m \in \omega$ ,  $m < n$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m} - y^{2m} \\ &= (x^m)^2 - (y^m)^2 \\ &= (x^m - y^m)(x^m + y^m) \\ &\stackrel{(*)}{=} (x - y)f_m(x, y)(x^m + y^m) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado la hipótesis de inducción puesto que  $m < n$ . Por tanto,  $Q(n)$  es cierto.

- Para  $n$  impar:

Tenemos que  $n = 2m + 1$  para algún  $m \in \omega$ ,  $2m < n$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m+1} - y^{2m+1} = x \cdot x^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x \cdot x^{2m} - x \cdot y^{2m} + x \cdot y^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x - y) \\ &\stackrel{(*)}{=} x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= (x - y)(x \cdot f_m(x, y) + y^{2m}) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado la hipótesis de inducción puesto que  $2m < n$ . Por tanto,  $Q(n)$  es cierto.

Así pues, por el segundo principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , existe un polinomio  $f_n(x, y)$  tal que  $x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$ .  $\square$

## 1.2. Recurrencia

**Ejercicio 1.2.1.** Resuelva la relación de recurrencia dada por  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Particularice el resultado suponiendo que  $n \geq 0$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ .

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz  $r = 2$  de multiplicidad  $m = 2$ . La solución general de la recurrencia por tanto es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Y ahora buscar los valores de  $c_1$  y  $c_2$  usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que  $x_0 = u_0 = 1$  y  $x_1 = u_1 = 3$ , entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\ 3 &= (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right)2^n = (2+n)2^{n-1}$$

*Observación.* Notemos que distinguimos muy bien la recurrencia en sí, notada por  $u_n$ , de la solución particular de la recurrencia, notada por  $x_n$ .

**Ejercicio 1.2.2.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0$$

El orden  $k$  de la recurrencia es 2 ( $k = 2$ ). La ecuación característica es:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Usando la notación del Teorema visto en Teoría, donde  $r_i$  son las raíces de la ecuación característica y  $m_i$  son las multiplicidades de las raíces, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & m_1 &= 1 \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & m_2 &= 1 \end{aligned}$$



En efecto, se tiene  $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$ , por lo que estamos en las condiciones del Teorema. Si  $\{x_n\}$  es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los valores de  $c_1$  y  $c_2$  se obtendrán a partir de las condiciones iniciales, que no se nos han proporcionado.

**Ejercicio 1.2.3.** Reuelva el problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema entonces  $x_0 = u_0 = 0$  y  $x_1 = u_1 = 1$ . Sabiendo esto, podemos calcular los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1 \\ 1 &= x_1 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1 \sqrt{5} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema por tanto es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Fibonacci*.

**Ejercicio 1.2.4.** Calcular la solución del problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned}u_0 &= 2 \\u_1 &= 1 \\u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema, entonces  $x_0 = u_0 = 2$  y  $x_1 = u_1 = 1$ . Sabiendo esto, podemos calcular los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned}2 &= x_0 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\&= c_1 + c_2 \implies c_2 = 2 - c_1 \\1 &= x_1 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 1 = c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 0 = c_1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \\&\implies c_1 \sqrt{5} = \sqrt{5} \implies c_1 = 1 \implies c_2 = 1\end{aligned}$$

La solución por tanto es:

$$x_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Lucas*.

**Ejercicio 1.2.5.** Solucionar la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \quad n \geq 0$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 3^n = c_0 + c_1 3^n$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$3 \cdot 3^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_3 = 3 \\ m_3 = 1 \\ q_3(n) = 3 \\ \deg(q_3(n)) = 0 \end{array} \right\} \quad 3 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 1 \\ q_1(n) = 3 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n \cdot 1^n = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de  $c_2$  y  $c_3$ . Para ello, como sabemos que  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$3^{n+1} + 3 = x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)}$$

Calculemos dichos valores:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= c_2 n \cdot 3^n + c_3 n = n(c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_2(n+1) \cdot 3^{n+1} + c_3(n+1) = (n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= c_2(n+2) \cdot 3^{n+2} + c_3(n+2) = (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = \\ &= (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) - 4(n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) + 3n(c_2 \cdot 3^n + c_3) = \\ &= c_2 3^n [3^2(n+2) - 4 \cdot 3(n+1) + 3n] + c_3 [(n+2) - 4(n+1) + 3n] = \\ &= c_2 3^n [9n + 18 - 12n - 12 + 3n] + c_3 [n + 2 - 4n - 4 + 3n] = \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 = 6c_2 3^n - 2c_3$$

Igualando los coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6c_2 &= 3 \Rightarrow c_2 = 1/2 \\ -2c_3 &= 3 \Rightarrow c_3 = -3/2 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n \cdot 3^n - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}(3^n - 3)$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{x_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$x_n = c_0 + c_1 3^n + \frac{n}{2}(3^n - 3) = \left(\frac{n}{2} + c_1\right) 3^n + c_0 - \frac{3n}{2}$$

**Ejercicio 1.2.6.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0 \quad n \geq 0$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la ecuación característica son:

$$z_1 = 2i \quad z_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot (2i)^n + c_2 \cdot (-2i)^n$$

Buscamos ahora expresar la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos. Para ello, tenemos que:

$$|z_1| = |z_2| = 2 \quad \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \quad \theta_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión de  $z_1$  y  $z_2$  en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  y  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Elevando a  $n$ , por el Teorema de Moivre, tenemos que:

$$\begin{aligned} (z_1)^n &= 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ (z_2)^n &= 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \cdot 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] + c_2 \cdot 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[ (c_1 + c_2) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[ d_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.7.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad n \geq 0$$

**Ejercicio 1.2.8.** Calcular el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como “Torres de Hanoi”, en función del número de discos  $n$  con los que cuente.

Para  $n \geq 0$  sea  $u_n$  el número de movimientos necesarios para pasar los  $n$  discos del poste  $A$  al poste  $C$ . Si el puzzle tuviese  $n+1$  discos entonces hacemos lo siguiente:

- Pasamos los  $n$  discos superiores del poste  $A$  al poste  $B$ . Esto nos cuesta  $u_n$  movimientos.
- Pasamos el disco base del poste  $A$  al poste  $C$ . Esto nos cuesta 1 movimiento.
- Pasamos los  $n$  discos superiores del poste  $B$  al poste  $C$ . Esto nos cuesta  $u_n$  movimientos.

Por tanto, lo dicho sugiere la siguiente recurrencia:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es  $k = 1$ . La ecuación característica es:

$$x - 2 = 0$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n \quad c_1 \in \mathbb{C}$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 1 = 1 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$1 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ q_1(n) = 1 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2 \quad c_2 \in \mathbb{C}$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener el valor de  $c_2$ . Para ello, como sabemos que  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$1 = x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} = c_2 - 2c_2 = -c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = -1$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{x_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Como sabemos que  $x_0 = u_0 = 0$  ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_1 \cdot 2^0 - 1 = c_1 - 1 \implies c_1 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = 2^n - 1$$

Notemos que esta es la solución al problema de las Torres de Hanoi. Veamos como ilustración los primeros valores de la sucesión:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2^0 - 1 = 0 \\ x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\ x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\ x_4 &= 2^4 - 1 = 15 \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.9.** Sea la sucesión  $\{u_n\}$  definida por:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para  $u_n$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  se tiene:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n = u_{n-1} + n2^n$$

Además, para  $n = 0$  se tiene que:

$$u_0 = \sum_{k=0}^0 k2^k = 0 \cdot 2^0 = 0$$

Por tanto, la expresión recurrente para  $u_n$  es:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n2^n \end{cases} \quad n \geq 1$$

2. Encuentre una fórmula explícita para calcular  $u_n$ .

Encontrar una fórmula explícita para  $u_n$  es equivalente a resolver la recurrencia. Para ello, su polinomio característico es:

$$x - 1 = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$u_n^{(h)} = c_0 \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es:

$$f(n) = n2^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$n2^n \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ m = 0 \\ q(n) = n \\ \deg(q(n)) = 1 \end{cases}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de  $c_1$  y  $c_2$ . Para ello, como sabemos que  $u_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} n2^n &= u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2(c_1 + c_2 n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2^{n-1}[2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2(n-1)] = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$n2^n = 2^{n-1} \cdot 2n = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n = (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{u_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{u_n\} = \{u_n^{(h)} + u_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$u_n = c_0 + (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que  $u_0 = 0$  ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_0 + (0 - 1)2^{0+1} = c_0 - 2 \implies c_0 = 2$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$u_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

**Ejercicio 1.2.10.** Un ciudadano pide un préstamo por cantidad  $S$  de dinero a pagar en  $T$  plazos. Si  $I$  es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante  $P$  debe hacer al final de cada plazo?

Sea  $u_n$  es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del  $n$ -ésimo plazo, es decir, a continuación del  $n$ -ésimo pago. Entonces, para todo  $0 \leq n \leq T - 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1 + I)u_n - P \end{aligned}$$

El problema entonces se reduce a resolver la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1 + I)u_n - P \quad 0 \leq n \leq T - 1 \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es  $k = 1$ . La ecuación característica es:

$$x - (1 + I) = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es  $f(n) = -P = -Pn^0 \cdot 1^n$ . Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$-P \implies \begin{cases} s = -P \\ q(n) = 1 \\ \deg(q(n)) = 0 \end{cases}$$

Para obtener la multiplicidad del 1 como raíz del polinomio característico, depende del valor de  $I$ . Como la única raíz del polinomio característico es  $1 + I$ , realizamos la siguiente distinción de casos:

- $I = 0$ : En este caso, la raíz del polinomio característico es 1 y por tanto,  $m = 1$ . Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n = c_0(1)^n = c_0x_n^{(p)} = c_1n \cdot 1^n = c_1n$$



Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1(n+1) - (1+I)c_1n = \\ &= c_1[n+1 - n(1+I)] = c_1(1-I) = c_1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0 - Pn$$

Para hallar  $c_0$  y  $P$ , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0 - P \cdot 0 = c_0 \implies c_0 = S \\ 0 &= x_T = c_0 - P \cdot T = S - PT \implies P = \frac{S}{T} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = S - \frac{S}{T}n = S \left(1 - \frac{n}{T}\right)$$

La cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo es:

$$P = \frac{S}{T}$$

- $I \neq 0$ : En este caso, la raíz del polinomio característico es  $1+I$  y por tanto,  $m=0$ . Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n x_n^{(p)} = c_1 n^0 \cdot 1^n = c_1$$

Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1 - (1+I)c_1 = -Ic_1 \implies c_1 = \frac{P}{I}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Para hallar  $c_0$  y  $P$ , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0(1+I)^0 + \frac{P}{I} = c_0 + \frac{P}{I} \implies c_0 = S - \frac{P}{I} \\ 0 &= x_T = c_0(1+I)^T + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Por tanto, para hallar la cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo, necesitamos despejar  $P$  de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I} \implies \\ \implies P &= (P - SI)(1+I)^T = P(1+I)^T - SI(1+I)^T \implies \\ \implies P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - I} \end{aligned}$$

La solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right) (1 + I)^n + \frac{P}{I}$$

**Ejercicio 1.2.11.** Encuentre la solución la solución general para la siguiente recurrencia:

$$u_n = u_{n-2} + 2^n + (-1)^n \quad n \geq 2$$

y luego soluciona el problema que surge de ella junto a los valores iniciales:

$$u_0 = u_1 = 2.$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 1 = 0 \implies (x + 1)(x - 1) = 0$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

La función de ajuste es  $f(n) = 2^n + (-1)^n$ . Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n (-1)^n$$

Para el cálculo de  $c_3$  y  $c_4$  no intervienen los valores iniciales. Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} 2^n + (-1)^n &= x_n^{(p)} - x_{n-2}^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n (-1)^n - c_3 2^{n-2} - c_4 (n-2) (-1)^{n-2} = \\ &= 2^{n-2} (2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n (c_4 n - c_4 (n-2)) = \\ &= 2^{n-2} \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$\begin{cases} 3c_3 = 4 \implies c_3 = 4/3 \\ 2c_4 = 1 \implies c_4 = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

Usando los valores iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \implies c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\ 2 &= x_1 = -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \implies -c_1 + c_2 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2/3 \\ c_1 - c_2 = 1/6 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 5/12 \\ c_2 = 1/4 \end{cases}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia para los valores iniciales dados es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n = \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left( \frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.12.** Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3 \cdot 2^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i \implies \begin{cases} r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \\ r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-2 + 2\sqrt{3}i)^n + c_2(-2 - 2\sqrt{3}i)^n$$

Para expresar la solución en términos de senos y cosenos, calculamos el módulo y el argumento de las raíces. El módulo de las raíces es:

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^4} = 4$$

Respecto al argumento de las raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1) &= \frac{\Im(r_1)}{\Re(r_1)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \implies \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{tg}(\theta_2) &= \frac{\Im(r_2)}{\Re(r_2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \implies \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Moivre, es:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left( c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left( c_3 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + c_4 \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \right)$$

Usando que  $\sin(-x) = -\sin(x)$  y  $\cos(-x) = \cos(x)$ , podemos reescribir la solución anterior como:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= 4^n \left( c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left( c_3 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - c_4 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left( (c_1 + c_3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (c_2 - c_4) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left( d_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Como solución particular de la recurrencia, partimos de:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left[ c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

Calculamos  $x_{n+2}^{(p)}$  y  $x_{n+1}^{(p)}$ :

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left[ c_5 \cos \left( \frac{(n+2)\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{(n+2)\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[ c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} + \pi \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} + \pi \right) \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[ c_5 \left( \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \cos \pi - \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \pi \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \cos \pi + c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \pi \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[ -c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[ -16c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 16c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(p)} &= 4^{n+1} \left[ c_5 \cos \left( \frac{(n+1)\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[ c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[ c_5 \left( \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} + c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[ -c_5 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) + c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[ -4c_5 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) + 4c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned} 4^n \left[ 16 \cos \left( \frac{\pi n}{2} \right) - 64 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n}{2} \right) \right] &= \\ &= 4^{n+2} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 4^{n+3} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) = \\ &= x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 16x_n^{(p)} = \\ &= 4^n \left[ -16c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 16c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \\ &\quad + 4^n \left[ -16c_5 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) + 16c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \\ &\quad + 4^n \left[ 16c_5 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + 16c_6 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[ 16c_6 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 16c_5 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{aligned} 16c_6 &= 16 \implies c_6 = 1 \\ -16c_5 &= -64 \implies c_5 = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= 4^n \left( d_1 \cos \left( \frac{2\pi n}{3} \right) + d_2 \sin \left( \frac{2\pi n}{3} \right) \right) + 4^n \left[ 4 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left( d_1 \cos \left( \frac{2\pi n}{3} \right) + d_2 \sin \left( \frac{2\pi n}{3} \right) + 4 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.13** (Función Gamma). Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left[ \begin{array}{ll} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right]$$

Por tanto, tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \stackrel{(*)}{=} n\Gamma(n)$$

donde en  $(*)$  hemos usado la Regla de Barrow, junto a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-t} = 0^n \cdot e^0 = 0$$

Por tanto, mediante una fácil inducción, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \cdot \Gamma(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos el valor de  $\Gamma(1)$ :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Ejercicio 1.2.14.** Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 3^n - 2 & n \geq 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

y redúzcalo a un problema de recurrencia homogénea.

Por variación de índices, tenemos que:

$$u_{n-1} = 3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2$$

Por tanto, multiplicando por 3 llegamos a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + 3^n - 2 \\ 3u_{n-1} & = & 9u_{n-2} + 3^n - 6 \\ \hline u_n - 3u_{n-1} & = & 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4 \end{array}$$

donde hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4$$

Repitiendo el proceso, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} & = & 4 \\ u_{n-1} - 6u_{n-2} + 9u_{n-3} & = & 4 \\ \hline u_n - 7u_{n-1} + 15u_{n-2} - 9u_{n-3} & = & 0 \end{array}$$

donde de nuevo hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que la recurrencia homogénea equivalente es:

$$u_n = 7u_{n-1} - 15u_{n-2} + 9u_{n-3}$$

Resolvamos ahora dicha recurrencia homogénea. El orden de la recurrencia es  $k = 3$ . La ecuación característica es:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

Veamos mediante Ruffini que  $x = 1$  es raíz de la ecuación característica:

$$1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -7 & 15 & -9 \\ & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x - 1)(x^2 - 6x + 9) = (x - 1)(x - 3)^2$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n + c_3 n \cdot 3^n$$

Las condiciones iniciales de contorno que debemos imponer son:

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 = 2 \\ x_1 &= u_1 = 6 + 3 - 2 = 7 \\ x_2 &= u_2 = 21 + 9 - 2 = 28 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 7 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 28 \end{array} \right\} \implies c_0 = c_1 = c_2 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia dada es:

$$x_n = 1 + 3^n + n \cdot 3^n = 1 + (n + 1)3^n$$

*Observación.* Notemos que este “método” tiene varios inconvenientes: oculta que algunos de los coeficientes son independientes de los valores de contorno, no evita encontrar las raíces de un polinomio mientras que eleva el grado del polinomio a estudiar, no es algorítmico, el cálculo de los coeficientes indeterminados es efectuado mediante un sistema de mayor orden, etc.; no obstante el método es algebraicamente bello.

**Ejercicio 1.2.15.** Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} & n \geq 2 \\ t_n = s_{n-1} + t_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

Solucione y resuelva la primera recurrencia.

Mediante una simple variación de índices, tenemos que:

$$s_{n-1} = 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} - 2s_{n-2} - s_{n-3} - 4t_{n-2} = \\ &= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \end{aligned}$$

Luego:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

Haciendo uso de que  $t_n - t_{n-1} = s_{n-1}$ , tenemos que:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}$$

La ecuación característica de la recurrencia homogénea obtenida es:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Veamos que  $x = -1$  es raíz de la ecuación característica:

$$-1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -3 & -3 & 1 \\ & -1 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2(2 + \sqrt{3})^n + c_3(2 - \sqrt{3})^n$$

**Ejercicio 1.2.16.** Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

De forma general, sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 1$ , y consideramos la recurrencia dada por:

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + n\alpha^{n+1} \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es  $k = 1$ . La ecuación característica es:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1$$

La función de ajuste es  $f(n) = n\alpha^{n+1}$ . Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = (c_2 + c_3n)\alpha^n$$

Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^2 n \alpha^{n-1} &= n \alpha^{n+1} = x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} = (c_2 + c_3n)\alpha^n - (c_2 + c_3(n-1))\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^n + c_3n\alpha^n - c_2\alpha^{n-1} - c_3n\alpha^{n-1} + c_3\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^{n-1}(\alpha - 1) + c_3\alpha^{n-1} + c_3n\alpha^{n-1}(\alpha - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_3(\alpha - 1) = \alpha^2 \implies c_3 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \\ c_2(\alpha - 1) + c_3 = 0 \implies c_2 = \frac{-c_3}{\alpha - 1} = \frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \left( \frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^2}{\alpha - 1} \right) \alpha^n = \\ &= \left( \frac{-\alpha^2 + n\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \left( \frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que una solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= c_1 + \left( \frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n \end{aligned}$$



Para hallar el valor de  $c_1$ , como sabemos que  $x_0 = s_0 = 0$ , tenemos que:

$$0 = x_0 = c_1 + \frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \implies c_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$$

Por tanto, la solución a la recurrencia dada es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \left( \frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2} - \alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

Tomando límite con  $n \rightarrow \infty$ , suponiendo  $\alpha \in [0, 1[$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} = \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2 = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora por tanto el ejercicio. Tomando  $\alpha = 10^{-3}$ , se tiene que:

$$s_n = x_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

Tomando límite por tanto con  $n \rightarrow \infty$ , como  $\alpha \in [0, 1[$ , se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left( \frac{10^{-3}}{1 - 10^{-3}} \right)^2 = (110^3 - 1)^2 = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{998001}$$

**Ejercicio 1.2.17.** Demuestre mediante la teoría de recurrencias que  $0.\bar{9} = 1$ .

*Observación.* Observe que, sin mucho rigor, se podría tener lo siguiente:

$$0.\bar{9} = 3 \cdot 0.\bar{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

**Ejercicio 1.2.18** (Parcial DGIIM 23/24). Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \quad n \geq 0$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple con las condiciones iniciales  $u_0 = 1$  y  $u_1 = 4$ .

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \implies (x - 3)^2 = 0$$

La única raíz de la ecuación característica es  $x = 3$  con multiplicidad doble. Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

La función de ajuste es  $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$ . Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n$$

Para el cálculo de  $c_3$  y  $c_4$  no intervienen los valores iniciales. Calculamos primero  $x_{n+2}^{(p)}$  y  $x_{n+1}^{(p)}$ :

$$x_{n+2}^{(p)} = c_3 \cdot 2^{n+2} + c_4(n+2)^2 \cdot 3^{n+2} = 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n$$

$$x_{n+1}^{(p)} = c_3 \cdot 2^{n+1} + c_4(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} = 2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n$$

Usando que  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= x_{n+2}^{(p)} - 6x_{n+1}^{(p)} + 9x_n^{(p)} \\ &= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\ &\quad - 6(2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n) + \\ &\quad + 9(c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n) \\ &= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\ &\quad - 12c_3 \cdot 2^n - 18c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n + \\ &\quad + 9c_3 \cdot 2^n + 9c_4 n^2 \cdot 3^n \\ &= 2^n(4c_3 - 12c_3 + 9c_3) + 3^n(9c_4(n^2 + 4n + 4) - 18c_4(n^2 + 2n + 1) + 9c_4 n^2) \\ &= c_3 2^n + c_4 3^n(9n^2 + 36n + 36 - 18n^2 - 36n - 18 + 9n^2) \\ &= c_3 2^n + 18 \cdot c_4 3^n \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} c_3 = 3 \\ 18c_4 = 7 \implies c_4 = 7/18 \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n = \\ &= 3^n \left( c_1 + c_2 n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales, sabiendo que  $x_0 = u_0 = 1$  y  $x_1 = u_1 = 4$ :

$$x_0 = 1 \implies 1 = 3^0 \left( c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot 0^2 \right) + 3 \cdot 2^0 = c_1 + 3 \implies c_1 = -2$$

$$x_1 = 4 \implies 4 = 3^1 \left( -2 + c_2 \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot 1^2 \right) + 3 \cdot 2^1 = -6 + 3c_2 + \frac{7}{6} + 6 \implies c_2 = \frac{4 - 7/6}{3} = \frac{17}{18}$$

Por tanto, para el caso particular dado tenemos que la solución de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}x_n &= 3^n \left( -2 + \frac{17}{18}n + \frac{7}{18}n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \\&= 3^n \left( -2 + \frac{17n + 7n^2}{18} \right) + 3 \cdot 2^n\end{aligned}$$

## 1.3. Lógica Proposicional

**Ejemplo.** La fórmula proposicional  $(a \rightarrow b)$  (siempre que  $b \neq a$ ) es refutable.

Basta tomar una valoración  $v$  tal que  $v(a) = 1$  y  $v(b) = 0$ .

De hecho,  $a \rightarrow b$  es satisfacible, luego es una fórmula contingente.

**Ejemplo.** Las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías:

1.  $(a \rightarrow a)$

$$\begin{aligned} v(a \rightarrow a) &= v(a)v(a) + v(a) + 1 \\ &= v(a) + v(a) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

*Observación.* Notemos que, dado  $a \in \mathbb{Z}_2$ , se tiene que  $a^2 = a$  y  $2a = 0$ . Esto será usado constantemente, aunque en un principio el lector no esté acostumbrado a trabajar a trabajar en este anillo.

2.  $(\alpha \vee \neg\alpha)$ . Esta tautología se conoce como el principio del tercio excluso.

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + v(\neg\alpha) \\ &= v(\alpha)(v(\alpha) + 1) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)^2 + v(\alpha) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Dada una valoración  $v$  y dadas  $\alpha, \beta$  fórmulas proposicionales, se tiene que:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = v(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} v((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\beta \rightarrow \alpha) \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta)v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \\ &= 6 \cdot v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.3.1.** Dadas  $\alpha, \beta$  fórmulas proposicionales, clasifique las siguientes fórmulas en función de si son tautologías, contradicciones o contingentes:

1.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

En lo que sigue, sea  $v$  una valoración fija pero arbitraria. Para facilitar el desarrollo, notaremos que dada  $\gamma$  fórmula proposicional, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\gamma)v(\neg\gamma) &= v(\gamma)(v(\gamma) + 1) \\ &= v(\gamma)^2 + v(\gamma) \\ &= v(\gamma) + v(\gamma) = 0 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\neg\beta) + 1) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\beta)) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= \cancel{v(\alpha)v(\beta)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)} + \cancel{v(\alpha)v(\beta)^2} + v(\neg\alpha)^2v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) + \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)(v(\neg\beta) + v(\beta)) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)(2v(\beta) + 1) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha) + v(\alpha) \\
 &= 2v(\alpha) + 1 = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una tautología.

## 2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)(v(\alpha \rightarrow \beta)v(\neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)^2v(\neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta)^2 + \cancel{v(\alpha \rightarrow \beta)} + \cancel{v(\alpha \rightarrow \beta)} + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)[v(\neg\alpha) + 1] + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\alpha) + 1 \\
 &= [v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1]v(\alpha) + 1 \\
 &= v(\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2} + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + 1 \\
 &= v(\neg(\alpha \wedge \beta))
 \end{aligned}$$

Por tanto, depende de la valoración.

- Si  $v(\alpha) = 1 = v(\beta)$ , entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) = 0$$

- Si  $v(\alpha) = 0$  ó  $v(\beta) = 0$ , entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) = 1$$

En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una fórmula contingente.

3.  $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ 

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) &= v(\alpha \rightarrow \neg\beta)v(\neg\alpha \rightarrow \beta) + v(\alpha \rightarrow \neg\beta) + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha)) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) \\
 &= \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)v(\beta)}^0 + v(\neg\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2v(\neg\beta)} + \cancel{v(\neg\alpha)v(\alpha)}^0 + \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)} + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha + 1)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha \vee \beta)
 \end{aligned}$$

Por tanto, depende de la valoración.

- Si  $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$ , entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 0$$

- Si  $v(\alpha) = 1$  ó  $v(\beta) = 1$ , entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 1$$

En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una fórmula contingente.

**Ejercicio.** Para cualesquiera fórmulas proposicionales  $\alpha, \beta, \gamma$ , demuestre que las siguientes reglas son correctas:

1.  $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ . Esta regla se conoce como *modus ponens*.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \rightarrow \beta)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\
 &= 1 \cdot v(\beta) + 1 + 1 \\
 &= v(\beta)
 \end{aligned}$$

Por tanto, como  $v(\beta) = 1$ , la regla es correcta.

2.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \wedge \beta \models \gamma$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha \wedge \beta}{\gamma}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1 = v(\alpha \wedge \beta)$$

Debemos demostrar que  $v(\gamma) = 1$ .

Como  $v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta \rightarrow \gamma) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) = v(\alpha)v(\beta)$ . Como por hipótesis también tenemos que  $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \wedge \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) \end{aligned}$$

Uniendo ambos resultados, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) &= v(\alpha)v(\beta) \\ 1 \cdot v(\gamma) &= 1 \\ v(\gamma) &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto,  $v(\gamma) = 1$ , y la regla es correcta.

3.  $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \vee \beta$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \gamma) = 1 = v(\beta \rightarrow \gamma)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \\ 1 &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}v(\alpha)v(\gamma) &= v(\alpha) \\v(\beta)v(\gamma) &= v(\beta)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= v(\alpha \vee \beta)v(\gamma) + v(\alpha \vee \beta) + 1 \\&= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta))v(\gamma) + (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)) + 1 \\&= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1\end{aligned}$$

Aplicando las igualdades anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\&= 2v(\alpha)v(\beta) + 2v(\alpha) + 2v(\beta) + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta.

4.  $\gamma \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \beta \vdash \gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\gamma \rightarrow \alpha \quad \gamma \rightarrow \beta}{\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\gamma \rightarrow \alpha) = 1 = v(\gamma \rightarrow \beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}1 &= v(\gamma)v(\alpha) + v(\gamma) + 1 \\1 &= v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$v(\gamma)v(\alpha) = v(\gamma) = v(\gamma)v(\beta)$$

Comprobemos que la regla es cierta:

$$\begin{aligned}v(\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta) &= v(\gamma)v(\alpha \wedge \beta) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma)(v(\alpha)v(\beta)) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma)v(\alpha)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\&\stackrel{(*)}{=} v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma) + v(\gamma) + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado las hipótesis. Por tanto, la regla es correcta.



5.  $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \models \gamma$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c} (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{array}}{\gamma}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) = 1 = v(\alpha) = v(\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \\ &= v(\alpha \wedge \beta)v(\gamma) + v(\alpha \wedge \beta) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Usando que  $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ , tenemos que:

$$1 = v(\gamma) + 1 + 1 \implies v(\gamma) = 1$$

Por tanto, la regla es correcta.

6.  $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma \models \beta \vee \gamma$ . Esta regla se conoce como la regla de resolución.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \vee \gamma \end{array}}{\beta \vee \gamma}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 = v(\neg\alpha \vee \gamma)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ \\ 1 &= v(\neg\alpha \vee \gamma) \\ &= v(\neg\alpha)v(\gamma) + v(\neg\alpha) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha) &= v(\alpha)v(\gamma) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la regla es correcta:

$$\begin{aligned} v(\beta \vee \gamma) &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + \cancel{v(\gamma)} + v(\beta) + \cancel{v(\gamma)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta. Hagamos ahora otro razonamiento distinto:

- Si  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ , entonces  $v(\alpha) = 1$  ó  $v(\beta) = 1$ .
- Si  $v(\neg\alpha \vee \gamma) = 1$ , entonces  $v(\alpha) = 0$  ó  $v(\gamma) = 1$ .

Si  $v(\beta) = 1$ , entonces  $v(\beta \vee \gamma) = 1$ . Supongamos por tanto que  $v(\beta) = 0$ , y demostremos que  $v(\gamma) = 1$ . Como  $v(\beta) = 0$ , entonces  $v(\alpha) = 1$ , por lo que  $v(\alpha) \neq 0$  y por tanto,  $v(\gamma) = 1$ , de donde  $v(\beta \vee \gamma) = 1$ . Queda demostrado por tanto que la regla es correcta.

7.  $\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \alpha$ . Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo clásica.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\alpha \rightarrow \neg\beta}{\alpha}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + v(\beta) + 1 + v(\alpha) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha)v(\beta) &= v(\beta) \end{aligned}$$

De forma directa, tenemos que  $v(\alpha) = 1$ , y por tanto, la regla es correcta.

8.  $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta \models \neg\alpha$ . Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo intuicionista.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \rightarrow \neg\beta}{\neg\alpha}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ \\ 1 &= v(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &= v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= v(\alpha)v(\beta) \\ v(\alpha)v(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $v(\alpha) = 0$ , por lo que  $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1 = 1$ , y por tanto, la regla es correcta.

9.  $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$ . Esta regla se conoce como la regla de demostración por casos.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Sea  $v$  una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ \\ 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \end{aligned}$$

De la primera hipótesis deducimos que  $v(\alpha)v(\beta) = v(\alpha)$ , y por tanto de la segunda hipótesis deducimos que  $v(\beta) = 1$ , y por tanto, la regla es correcta.

*Observación.* Sean  $A, B$  dos conjuntos, y sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Entonces, definimos la aplicación  $f_*$  por:

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ C &\longmapsto \{f(x) \mid x \in C\} \end{aligned}$$

Notemos que, dado  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  un conjunto de fórmulas proposicionales, se tiene que  $\Gamma \models \alpha$  si y sólo si, para toda valoración  $v$ , se tiene que  $v(\alpha) = 1$  siempre que  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ .

**Proposición 1.1.** *Dada una fórmula  $\alpha$ , demostrar que  $\alpha$  es una tautología si y sólo si  $\models \alpha$ .*

*Demostración.* Tenemos que notar  $\models \alpha$  es equivalente a notar  $\emptyset \models \alpha$ . Dada una valoración  $v$ , tenemos que  $v_*(\emptyset) = \emptyset \subseteq \{1\}$ .

Por tanto, sabemos que  $\models \alpha$  si y sólo si para toda asignación se tiene que  $v(\alpha) = 1$  y esto se da si y sólo si  $\alpha$  es una tautología.  $\square$

**Proposición 1.2.** *Veamos algunos resultados sobre conjuntos satisfacibles.*

1. *El conjunto  $\emptyset$  es satisfacible.*
2. *Existen conjuntos insatisfacibles.*
3. *Si  $\Delta$  es insatisfacible y  $\Delta \subseteq \Gamma$ , entonces  $\Gamma$  es insatisfacible.*
4.  *$\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha\}$  es insatisfacible.*

*Demostración.*

1. Razonamos por vacuidad. Dado una fórmula  $a_0$ , sea  $v = \chi_{\{a_0\}}$ .

Si  $\emptyset$  fuese insatisfacible, existiría  $\varphi_v \in \emptyset$  tal que  $v(\varphi_v) = 0$ , lo cual es absurdo.

2. Sea el conjunto  $\{a, \neg a\}$ . Sea  $v$  tal que  $v(a) = 1$ . Entonces  $v(\neg a) = v(a) + 1 = 0$ , por lo que dicho junto no es satisfacible.
3. Como  $\Delta$  es insatisfacible, entonces para toda valoración  $v$  se tiene que existe  $\varphi_v \in \Delta \subset \Gamma$  tal que  $v(\varphi_v) = 0$ , por lo que  $\Gamma$  es insatisfacible.
4. Sea  $v$  tal que  $v(\alpha) = 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned} v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) &= v(\alpha)v(\neg \alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 1 \cdot 0 + 1 + 1 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Si  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg \alpha\}$  fuera satisfacible, debería ser  $v(\alpha) = 1$  y  $v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) = 1$ , pero si  $v(\alpha) = 1$ , entonces  $v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) = 0$ .

□

**Proposición 1.3.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces,

$$\text{Con}(\Gamma) = \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$$

*Demostración.* Demostramos por doble inclusión:

⊂) Como  $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma)$ , entonces  $\text{Con}(\Gamma) \subset \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$ .

⊃) Dado  $\alpha \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$ , entonces por definición  $\text{Con}(\Gamma) \models \alpha$ .

Para ver que  $\alpha \in \text{Con}(\Gamma)$ , basta ver que  $\Gamma \models \alpha$ . Sea  $v$  una valoración con  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ . Por tanto,  $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$ , y por tanto  $v(\alpha) = 1$ , por lo que  $\Gamma \models \alpha$ .

□

**Ejercicio 1.3.2.** Sea  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Demostrar que si  $\Gamma \models \alpha$  y  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $\Gamma \models \beta$ . Es decir, si  $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\Gamma)$ , entonces  $\beta \in \text{Con}(\Gamma)$ .

*Demostración.* Demostremos en primer lugar que  $\text{Con}(\Gamma) \models \beta$ . Sea  $v$  una valoración tal que  $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$ . Entonces, tendremos que:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \rightarrow \beta)$$

Por la regla de *modus ponens*, como  $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$ , entonces  $v(\beta) = 1$ . Por tanto,  $\text{Con}(\Gamma) \models \beta$ . Deducimos entonces que  $\beta \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma)) = \text{Con}(\Gamma)$ , por lo que  $\Gamma \models \beta$ .

Este resultado se resume diciendo que  $\text{Con}(\Gamma)$  es cerrado por *modus ponens*. □

**Proposición 1.4.** Para toda  $\alpha, \beta$  fórmulas proposicionales,  $\beta \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg \alpha\})$ .

*Demostración.* Sabemos que  $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ ,  $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$  son tautologías, por lo que:

$$(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha \in \text{Con}(\emptyset)$$

Además,  $\alpha \wedge \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ . Como  $\emptyset \subset \{\alpha \wedge \neg\alpha\}$ , tenemos que:

$$\alpha \wedge \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Por la Regla de *modus ponens*, tenemos que  $\alpha, \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ . Además, tenemos que otra tautología es:

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Aplicando la Regla de *modus ponens* dos veces de forma consecutiva, primero llegamos a que  $\neg\alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ , y posteriormente llegamos a que se tiene que  $\beta \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ , que es lo que buscábamos demostrar.  $\square$

**Ejercicio 1.3.3.** Demuestre que para todo conjunto de fórmulas  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ , se cumple

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) = \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$$

*Demostración.* La demostración es por doble inclusión.

$\subseteq$ ) Veamos en primer lugar que  $\alpha, \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ .

Sabemos que  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$  es una tautología, luego  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\emptyset)$ . Como  $\emptyset \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$ , entonces  $\text{Con}(\emptyset) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ , y por tanto  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ .

Por otro lado,  $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ , y por tanto  $\alpha \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ .

Por tanto, como  $\text{Con}(\Gamma, \alpha)$  es cerrado por *modus ponens*, entonces tenemos que  $\alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ . Como además  $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ , entonces:

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma, \alpha)) = \text{Con}(\Gamma, \alpha)$$

Razonando de igual forma, tenemos que  $\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \beta)$ , por lo que:

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$$

$\supseteq$ ) Sea  $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$ , es decir:

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \implies \Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma$$

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \beta) \implies \Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma$$

Tenemos que demostrar que  $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$ , es decir, que  $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \models \gamma$ . Demostremos antes el siguiente resultado.

Sea  $v$  una asignación fija. Veamos que si  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ , entonces  $v(\alpha) = 1$  ó  $v(\beta) = 1$ . Por reducción al absurdo, supongamos que no, es decir, que  $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$ . Entonces:

$$1 = v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) = 0$$

Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que  $v(\alpha) = 1$  o  $v(\beta) = 1$ .

Sabiendo esto, veamos si  $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$ . Sea  $v$  una valoración tal que  $v(\theta) = 1$  para todo  $\theta \in \Gamma$  y  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ . Por lo que acabamos de ver,  $v(\alpha) = 1$  ó  $v(\beta) = 1$ , supongamos  $v(\alpha) = 1$  (el otro caso es idéntico). Entonces, como  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma$ , entonces  $v(\gamma) = 1$ , por lo que:

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$$

Por tanto,  $\text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$

□

**Ejercicio.** Sea  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, si  $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \beta$  y  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \psi$ , entonces  $\Gamma \models \neg\beta \rightarrow \psi$  y  $\Gamma \models \neg\psi \rightarrow \beta$ .

*Demostración.* Sea  $v$  una valoración tal que  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ . Entonces, por hipótesis, tenemos que:

$$v(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\alpha \rightarrow \psi)$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \psi) \\ &= v(\alpha)v(\psi) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Veamos que es cierto lo dicho. Tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\neg\beta \rightarrow \psi) &= v(\neg\beta)v(\psi) + v(\neg\beta) + 1 \\ &= (v(\beta) + 1)v(\psi) + v(\beta) + 1 + 1 \\ &= v(\beta)v(\psi) + v(\psi) + v(\beta) \\ &= v(\beta \vee \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\neg\psi \rightarrow \beta) &= v(\neg\psi)v(\beta) + v(\neg\psi) + 1 \\ &= (v(\psi) + 1)v(\beta) + v(\psi) + 1 + 1 \\ &= v(\psi)v(\beta) + v(\beta) + v(\psi) \\ &= v(\psi \vee \beta) \end{aligned}$$

Por tanto, nuestro problema se reduce a demostrar que  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ .

- Si  $v(\beta) = 1$ , entonces  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ .

- Si  $v(\beta) = 0$ , entonces por la primera hipótesis tenemos que  $v(\alpha) = 1$ , y por la segunda hipótesis tenemos que  $v(\psi) = 1$ , por lo que  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ .

En cualquier caso, tenemos que  $v(\alpha \vee \beta) = 1$ , por lo que  $\Gamma \models \neg\beta \rightarrow \psi$  y  $\Gamma \models \neg\psi \rightarrow \beta$ .  $\square$

**Teorema 1.5** (de la Reducción). *Sea  $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Equivalen:*

1.  $\Gamma, \alpha \models \beta$
2.  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$

*Demostración.* La demostración es mediante doble implicación.

$1 \implies 2$ ) Supongamos que  $\Gamma, \alpha \models \beta$ . Entonces, sea  $v$  una valoración tal que  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ . Caben dos posibilidades:

- $v(\alpha) = 0$ . Entonces,  $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ , por lo que  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ .
- $v(\alpha) = 1$ . Entonces, por hipótesis tenemos que  $v(\beta) = 1$ , por lo que  $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ , y por tanto  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ .

$2 \implies 1$ ) Tenemos que  $\alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\Gamma) \subset \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ . Como  $\alpha \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ , entonces por la regla de *modus ponens* tenemos que  $\beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$ , es decir,  $\Gamma, \alpha \models \beta$ , que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

**Teorema 1.6.** *Sea  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, equivalen:*

1.  $\Gamma \models \alpha$
2.  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es insatisfacible.

*Demostración.* La demostración es mediante doble implicación.

$1 \implies 2$ ) Supongamos que  $\Gamma \models \alpha$ , y sea  $v$  una valoración fija pero arbitraria. Si  $\exists \varphi \in \Gamma$  tal que  $v(\varphi) = 0$ , entonces ya tenemos que  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es insatisfacible. En caso contrario, tenemos que  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ , por lo que  $v(\alpha) = 1$ , y por tanto  $v(\neg\alpha) = 0$ , por lo que  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es insatisfacible.

$2 \implies 1$ ) Supongamos que  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es insatisfacible, y sea  $v$  una valoración tal que  $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$ . Como  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es insatisfacible, entonces  $v(\neg\alpha) = 0$ , por lo que  $v(\alpha) = 1$ .

$\square$

*Observación.* En numerosas ocasiones, estudiar la insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas es más sencillo que estudiar la validez de una fórmula (es decir, es más fácil estudiar el punto 2 que el punto 1 en el teorema anterior). Usaremos por tanto dicho resultado para demostrar la validez de una fórmula.



**Ejemplo** (Regla de la Cláusula Unit). Veamos algunos ejemplos de la Regla 2 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea  $\Sigma = \{a, a \vee b, \neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$  un conjunto de cláusulas.

Tan solo cuenta con una cláusula unitaria,  $\lambda = a$ . Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

$$\Sigma' = \{\neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$$

Como  $\Sigma' \neq \emptyset$ , eliminamos ahora de cada cláusula de  $\Sigma'$  todas las ocurrencias de la cláusula unitaria  $\lambda^c = \neg a$ :

$$\Sigma'' = \{b, b \vee c\}$$

Por la regla 2, sabemos que  $\Sigma''$  es insatisfacible si y solo si lo es  $\Sigma$ .

2. Sea  $\Sigma = \{a, a \vee b, a \vee \neg c\}$  un conjunto de cláusulas.

Tan solo cuenta con una cláusula unitaria,  $\lambda = a$ . Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

$$\Sigma' = \emptyset$$

Por tanto, por la regla 2, sabemos que  $\Sigma$  es satisfacible.

**Ejemplo** (Regla del Literal Puro). Veamos algunos ejemplos de la Regla 3 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea  $\Sigma = \{\neg a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, b \vee \neg d\}$  un conjunto de cláusulas.

Tenemos que  $\lambda = \neg a$  es un literal puro en  $\Sigma$ , puesto que  $\lambda^c = a$  no aparece en ninguna otra cláusula. Eliminamos todas las ampliaciones de  $\lambda$ , y obtenemos:

$$\Sigma' = \{\neg b \vee c, b \vee \neg d\}$$

Por la regla 3, sabemos que  $\Sigma'$  es insatisfacible si y solo si lo es  $\Sigma$ .

2. Sea  $\Sigma = \{\neg a \vee b, a \vee \neg b\}$  un conjunto de cláusulas.

En este caso, no hay literales puros, por lo que no podemos aplicar la regla 3.

**Ejemplo** (Regla de Descomposición). Veamos un ejemplo de la Regla 4 del Algoritmo de Davis y Putnam. Sea el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee d, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg d\}$$

Apliquemos las reglas vistas:

1.  $\Sigma$  no tiene cláusulas tautológicas.
2.  $\Sigma$  no tiene cláusulas unitarias.
3.  $\Sigma$  no tiene literales puros.

4. Considerando  $\lambda = a$ , podemos dividir las cláusulas como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{b \vee d, b \vee \neg d\} \\ \Sigma_1 &= \{\neg b \vee \neg c\} \cup \Omega = \{\neg b \vee \neg c, b \vee d, b \vee \neg d\} \\ \Sigma_2 &= \{b \vee c\} \cup \Omega = \{b \vee c, b \vee d, b \vee \neg d\}\end{aligned}$$

Por la regla 4, sabemos que  $\Sigma$  es insatisfacible si y solo si lo son  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

**Ejercicio 1.3.4.** Sean las siguientes fórmulas proposicionales:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (a \vee b) \rightarrow (c \vee d) \\ \gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \rightarrow (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ \gamma_3 &= a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ \varphi &= (d \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow (d \wedge \neg(a \vee \neg b))\end{aligned}$$

Estudie si  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ ; y en caso de no serlo dé una asignación que lo evidencie.

Estudiaremos la satisfacibilidad del conjunto  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}$  mediante el Algoritmo de Davis y Putnam. Para ello, en primer lugar hemos de transformar las fórmulas a su forma normal conjuntiva.

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (a \vee b) \rightarrow (c \vee d) \\ &= \neg(a \vee b) \vee (c \vee d) \\ &= (\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee d) \\ &= (\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \\ \gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \rightarrow (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= \neg(\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (\neg\neg a \vee \neg\neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (a \vee d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e) \\ \gamma_3 &= a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ &= \neg a \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ &= (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b) \\ \neg\varphi &= \neg[(d \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= \neg[\neg(d \rightarrow (b \vee a)) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= \neg[\neg(\neg d \vee b \vee a) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= (a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg(d \wedge \neg a \wedge b) \\ &= (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)\end{aligned}$$

Queremos por tanto estudiar la satisfacibilidad del conjunto  $\Sigma_0$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\} \\ &= \{(\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d), \\ &\quad (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e), \\ &\quad (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b), \\ &\quad (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)\}\end{aligned}$$

Estudiar la satisfacibilidad de  $\Sigma_0$  equivale a estudiar la satisfacibilidad de  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(\neg a \vee c \vee d), \quad (\neg b \vee c \vee d), \\ &\quad (a \vee d \vee \neg c), \quad (a \vee d \vee c \vee e), \\ &\quad (\neg a \vee \neg c), \quad (\neg a \vee \neg b), \quad (\neg a \vee \neg d \vee b), \\ &\quad (a \vee b \vee \neg d), \quad (a \vee \neg b \vee \neg d)\} \\ &= \{\neg a \vee c \vee d, \\ &\quad \neg b \vee c \vee d, \\ &\quad a \vee d \vee \neg c, \\ &\quad a \vee d \vee c \vee e, \\ &\quad \neg a \vee \neg c, \\ &\quad \neg a \vee \neg b, \\ &\quad \neg a \vee \neg d \vee b, \\ &\quad a \vee b \vee \neg d, \\ &\quad a \vee \neg b \vee \neg d\}\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Algoritmo de Davis y Putnam para estudiar la satisfacibilidad de  $\Sigma$ , representado en la Figura 1.1. De ahí, deducimos que  $\Sigma$  es satisfacible, por lo que  $\Sigma_0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}$  es satisfacible, y por tanto  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \not\models \varphi$ . Deducimos que existe al menos una valoración  $v$  tal que  $v(\gamma_1) = v(\gamma_2) = v(\gamma_3) = 1$  y; sin embargo,  $v(\varphi) = 0$ .

Como asignación que evidencie la satisfacibilidad de  $\Sigma$ , vale cualquier valoración  $v$  que cumpla las siguientes restricciones:

$$v(e) = v(\neg a) = v(\neg b) = v(\neg d) = v(\neg c) = 1$$

**Ejercicio 1.3.5.** Demuestre que la fórmula conocida como *Ley de Meredith* es una tautología:

$$[(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma] \rightarrow ((\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi))$$

Demostrar que es una tautología equivale a demostrar que:

$$\models [(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma] \rightarrow ((\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi))$$

Esto es equivalente, aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, a demostrar:

$$[((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \alpha] \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \varphi, \beta \vdash \varphi$$

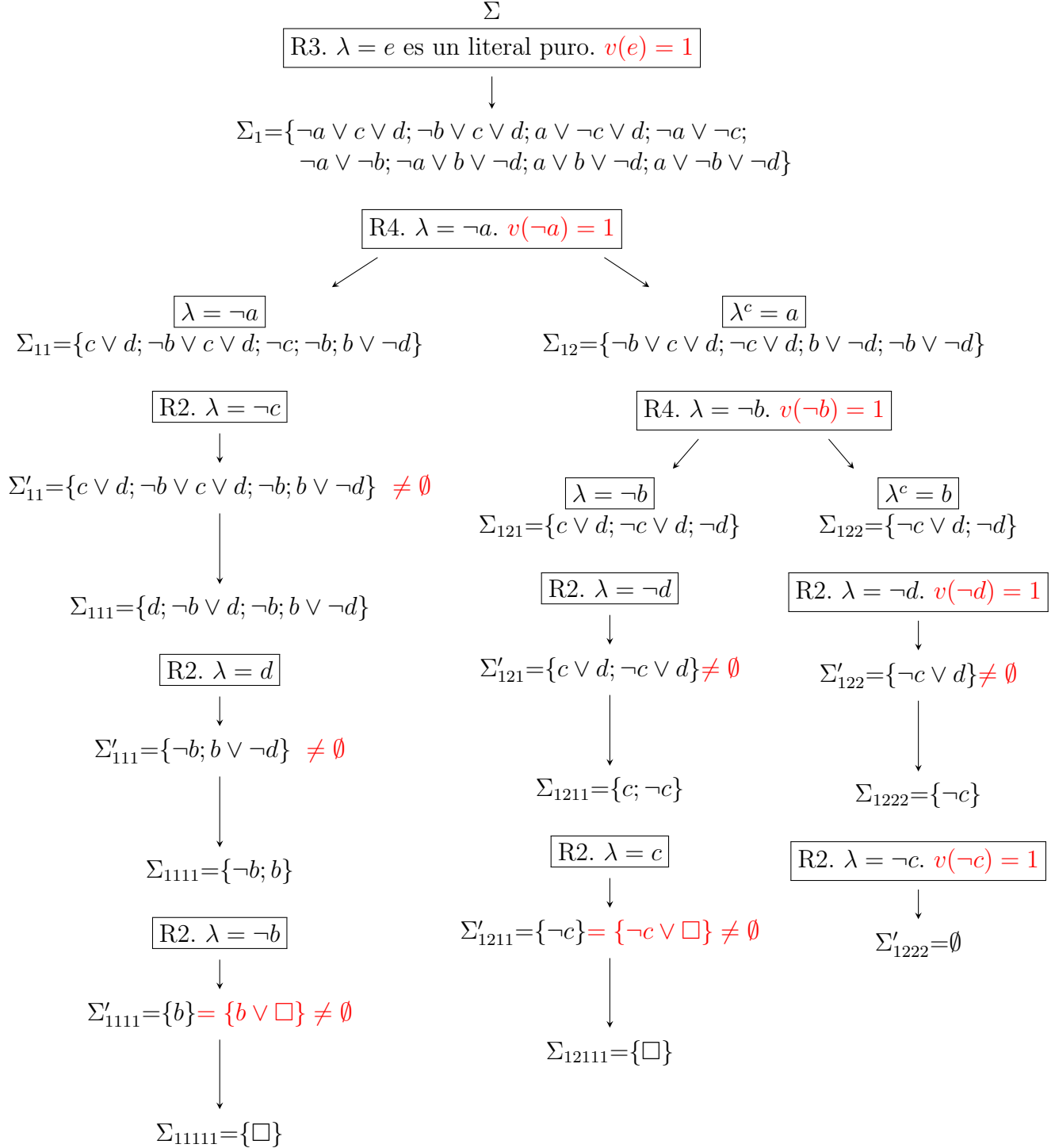


Figura 1.1: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.4.

Busquemos la forma normal conjuntiva de cada una de las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 [((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \alpha] \rightarrow \gamma &= \neg [((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \alpha] \vee \gamma \\
 &= \neg [\neg ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
 &= \neg [\neg (\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
 &= \neg [\neg (\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
 &= \neg [(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
 &= [\neg ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
 &= [(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
 &= [((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
 &= [(\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
 &= (\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)
 \end{aligned}$$

$$\gamma \rightarrow \varphi = \neg\gamma \vee \varphi$$

Sean por tanto las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\
 \varphi_1 &= \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\
 \varphi_2 &= \neg\alpha \vee \gamma \\
 \varphi_3 &= \neg\gamma \vee \varphi \\
 \varphi_4 &= \beta
 \end{aligned}$$

Notando  $\Sigma_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ , el problema equivale a demostrar que  $\Sigma_0 \models \varphi$ .

**Opción 1.** Usando la Regla de Resolución.

$$\begin{array}{ll}
 \Sigma_0 \models \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma & \varphi_0 \in \Sigma_0 \\
 \Sigma_0 \models \beta & \varphi_4 \in \Sigma_0 \\
 \Sigma_0 \models \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma & \text{Regla de Resolución} \\
 \Sigma_0 \models \neg\alpha \vee \gamma & \varphi_2 \in \Sigma_0 \\
 \Sigma_0 \models \varphi \vee \gamma \vee \gamma & \text{Regla de Resolución} \\
 \Sigma_0 \models \varphi \vee \gamma & \gamma \vee \gamma = \gamma \\
 \Sigma_0 \models \neg\gamma \vee \varphi & \varphi_3 \in \Sigma_0 \\
 \Sigma_0 \models \varphi \vee \varphi & \text{Regla de Resolución} \\
 \Sigma_0 \models \varphi & \varphi \vee \varphi = \varphi
 \end{array}$$

Además,  $\varphi_1$  no se ha empleado en este proceso, por lo que  $\Sigma_0 \setminus \{\varphi_1\} \models \varphi$ .

**Opción 2.** Usando el Algoritmo de Davis y Putnam.

Buscamos demostrar la insatisfacibilidad de  $\Sigma$ , donde:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \neg\varphi\} \\
 &= \{\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \neg\alpha \vee \gamma, \neg\gamma \vee \varphi, \beta, \neg\varphi\}
 \end{aligned}$$

Por el Algoritmo de D&P de la Figura 1.2, tenemos  $\square \in \Sigma_{1111}$ , por lo que  $\Sigma_{1111}$  es insatisfacible y, por tanto  $\Sigma$  también, por lo que  $\Sigma_0 \models \varphi$ . Además,  $\neg\psi \in \Sigma_{1111}$ , lo que pone de nuevo de manifiesto que  $\Sigma_0 \setminus \{\varphi_1\} \models \varphi$ .

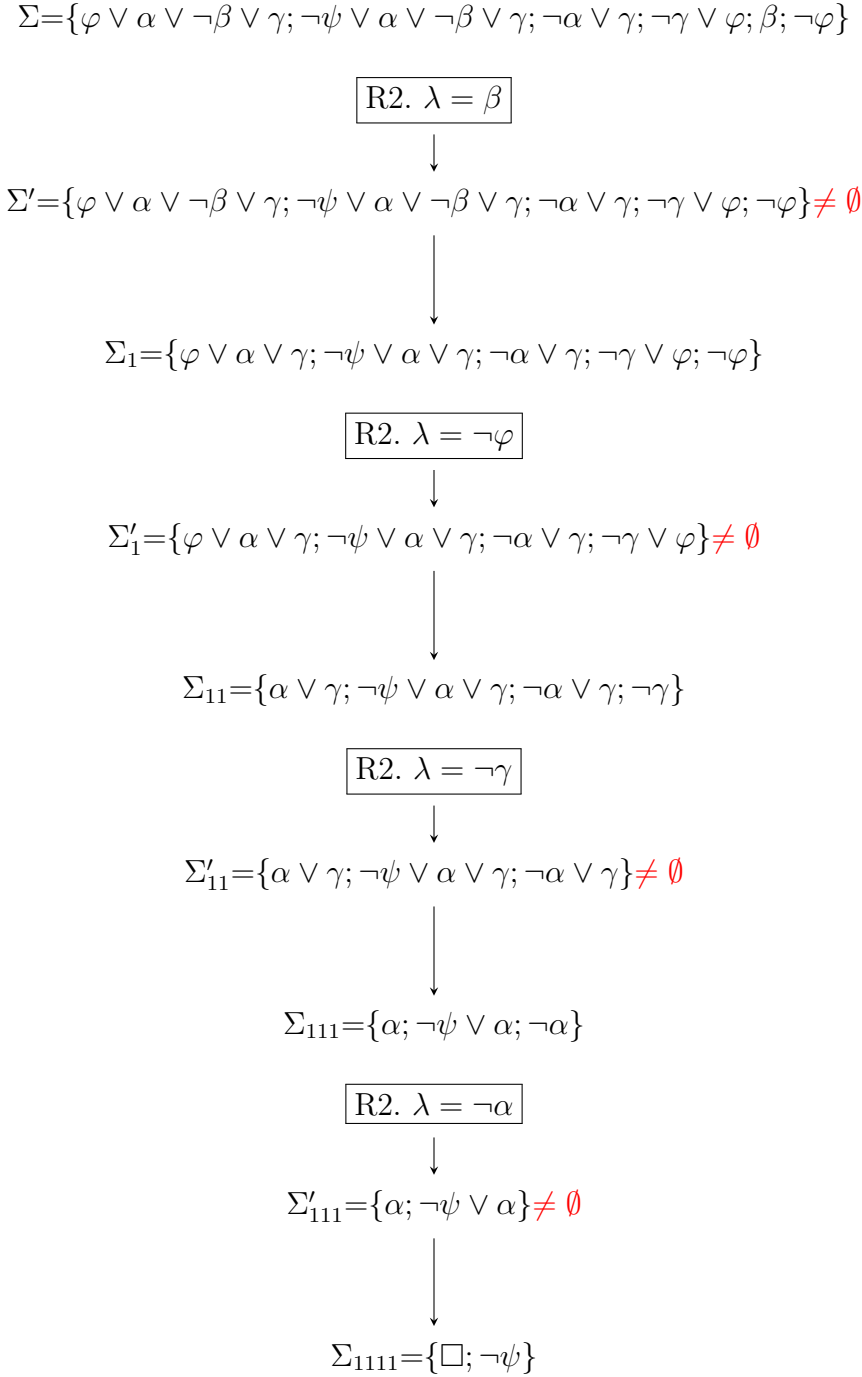


Figura 1.2: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.5.

**Ejercicio 1.3.6.** Sean  $\alpha, \beta, \gamma$  fórmulas proposicionales. Clasifique la siguiente fórmula en función del carácter de sus subfórmulas:

$$\varphi \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$$

Encontremos la forma normal conjuntiva de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha)) \\ &= \neg(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \vee ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha)) \\ &= \neg(\neg\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma)) \vee (\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\gamma \rightarrow \alpha)) \\ &= \neg(\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma)) \vee (\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\gamma \vee \alpha)) \\ &= (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\gamma \vee \alpha) \\ &= (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee ((\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma \vee \alpha)) \\ &= ((\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \vee \neg\gamma)) \wedge ((\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\neg\beta \vee \neg\gamma \vee \alpha)) \\ &= (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\beta \vee \alpha \vee \neg\gamma) \wedge \cancel{(\alpha \vee \neg\gamma)} \wedge \\ &\quad \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma \vee \alpha) \wedge \cancel{(\beta \vee \neg\beta \vee \alpha \vee \neg\gamma)} \wedge \cancel{(\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma)} \\ &= (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\beta \vee \alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma \vee \alpha) \\ &= (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge [(\beta \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \vee \neg\gamma)] \\ &= \alpha \vee \neg\gamma \\ &= \gamma \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

- $\models \varphi$  si y solo si  $\models \gamma \rightarrow \alpha$ , y esto es si y solo si  $\{\gamma, \neg\alpha\}$  es insatisfacible.
- $\models \neg\varphi$  si y solo si  $\{\alpha \vee \neg\gamma\}$  es insatisfacible, y esto es si y solo si  $\alpha$  es una contradicción y  $\gamma$  es una tautología.

Tenemos entonces la siguiente discusión de casos:

- $\gamma$  es una tautología: En este caso  $\varphi = \alpha$ , por lo que:
  1.  $\alpha$  es una contradicción  $\implies \varphi$  es una contradicción.
  2.  $\alpha$  es una tautología  $\implies \varphi$  es una tautología.
  3.  $\alpha$  es una contingencia  $\implies \varphi$  es una contingencia.
- $\gamma$  es una contradicción:  
Entonces  $\{\neg\gamma\}$  es insatisfacible, y por tanto  $\models \varphi$ .  $\varphi$  es una tautología.
- $\gamma$  es una contingencia. Sea  $v$  una valoración fija pero arbitraria.
  1. Si  $v(\gamma) = 0$ , entonces  $v(\varphi) = 1$ , por lo que  $\varphi$  es satisfacible.
  2. Si  $v(\gamma) = 1$ , entonces  $v(\varphi) = v(\alpha)$ , por lo que se puede dar que  $v(\varphi) = 0$  y  $\varphi$  es refutable.

Por tanto,  $\varphi$  es una contingencia.

**Ejercicio 1.3.7.** Sean  $\{a, b, c, d\}$  fórmulas proposicionales. Decida si:

$$(\neg a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d), a \rightarrow c, (\neg b \wedge \neg c) \rightarrow d, b \rightarrow a, (d \wedge \neg c) \rightarrow a, a \rightarrow d \models a \wedge c \wedge d$$

En primer lugar, de la hipótesis  $(\neg a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)$  consideraremos as hipótesis  $\neg a \rightarrow b$  y  $c \rightarrow d$ ; obteniendo un problema equivalente. Obtenemos la forma normal conjuntiva de cada una de las fórmulas:

$$\begin{aligned}\neg a \rightarrow b &= a \vee b \\ c \rightarrow d &= \neg c \vee d \\ a \rightarrow c &= \neg a \vee c \\ (\neg b \wedge \neg c) \rightarrow d &= b \vee c \vee d \\ b \rightarrow a &= \neg b \vee a \\ (d \wedge \neg c) \rightarrow a &= \neg d \vee c \vee a \\ a \rightarrow d &= \neg a \vee d \\ \neg(a \wedge c \wedge d) &= \neg a \vee \neg c \vee \neg d\end{aligned}$$

Por tanto, sea  $\Sigma$  el conjunto de fórmulas:

$$\Sigma = \{a \vee b, \neg c \vee d, \neg a \vee c, b \vee c \vee d, \neg b \vee a, \neg d \vee c \vee a, \neg a \vee d, \neg a \vee \neg c \vee \neg d\}$$

Estudiar lo pedido equivale a estudiar la insatisfacibilidad de  $\Sigma$ , lo que haremos mediante el Algoritmo de Davis y Putnam. En la Figura 1.3 se muestra el proceso, donde se puede apreciar que  $\Sigma$  es insatisfacible, por lo que la implicación del enunciado es cierta.

**Ejercicio 1.3.8.** Llega un grupo de meteorólogos a la isla de los veraces y mentirosos, interesados en saber si durante la jornada anterior estuvo lloviendo en la misma. Encuentran a tres indígenas que dicen llamarse Ana, Bruno y Carmen. Al ser preguntados por lo que interesa a los meteorólogos, las respuestas que dieron son las siguientes:

1. Ana: “Ayer no llovió aquí”.
2. Bruno: “Ayer sí llovió aquí”.
3. Carmen: “Si ayer llovió aquí, yo soy mentirosa”.

Averigüe el carácter de cada uno de los indígenas y si llovió o no la jornada anterior en la isla. Constate que los meteorólogos habrían tenido éxito en su pesquisa hablando sólo con Carmen.

Abreviamos con:

- $a$ : La frase “Ana es veraz”.
- $b$ : La frase “Bruno es veraz”.
- $c$ : La frase “Carmen es veraz”.



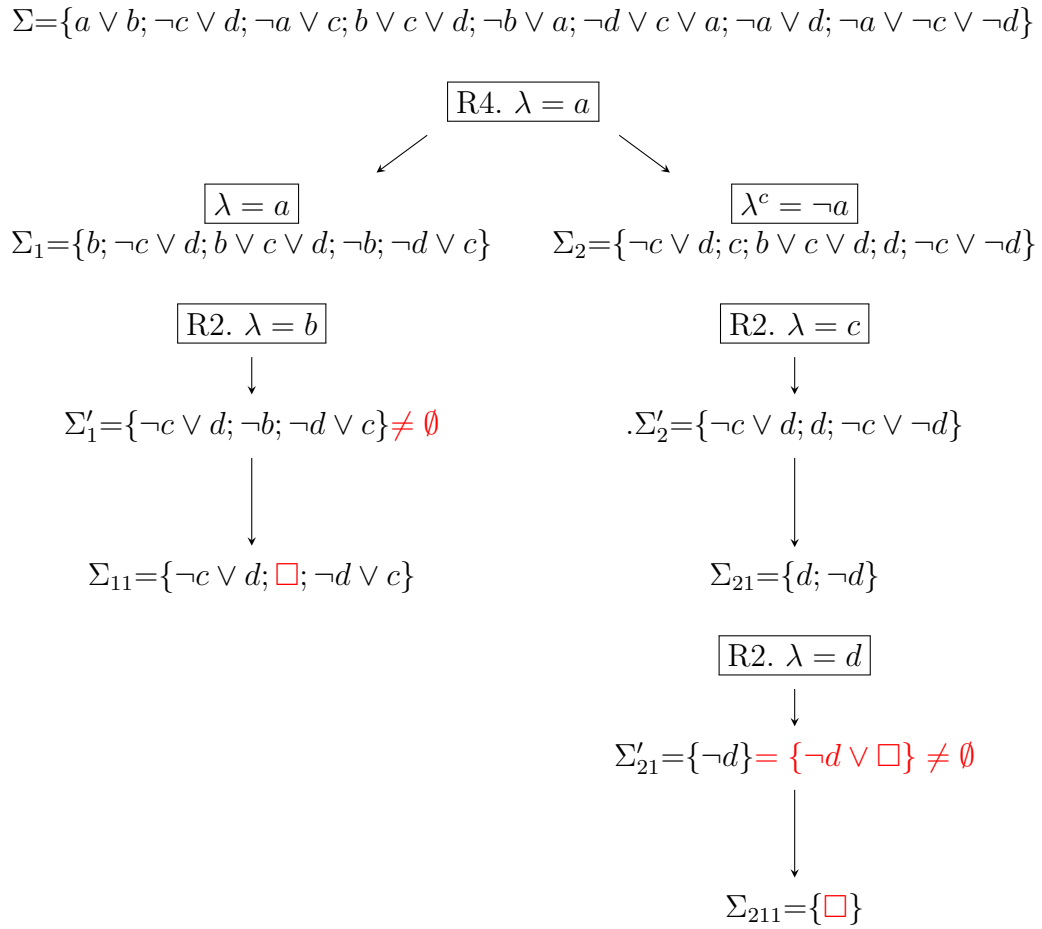


Figura 1.3: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.7.

- $d$ : La frase “En la isla llovió el día anterior”.

Sea  $v$  una valoración fija pero arbitraria. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
 0 &= v(a) + v(\neg d) = v(a) + v(d) + 1 \\
 0 &= v(b) + v(d) \\
 0 &= v(c) + v(d \rightarrow \neg c) = v(c) + v(d)v(\neg c) + v(d) + 1 \\
 &= v(c) + v(d)(v(c) + 1) + v(d) + 1 = v(c) + v(d)v(c) + 2v(d) + 1 \\
 &= v(c) + v(d)v(c) + 1 = v(c)[v(d) + 1]
 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} v(a) + v(d) = 1 \\ v(b) + v(d) = 0 \\ v(c)[v(d) + 1] = 1 \end{cases}$$

Como  $v(c)[v(d) + 1] = 1$ , tenemos que  $v(c) = 1$  y  $v(d) = 0$ . Por tanto,  $v(a) = 1$  y  $v(b) = 0$ ; es decir:

$$v(a) = v(c) = 1, \quad v(b) = v(d) = 0$$

Por tanto, Ana y Carmen son veraces, y Bruno es mentiroso. Ayer no llovió en la isla.

**Ejercicio 1.3.9.** En otro extraño incidente, cuando Eloísa llegó a una isla buscando a Pedro, se encontró con cinco nativos:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ , quienes adivinaron su propósito. Formularon los siguientes enunciados:

- $A$ : Pedro está en esta isla.
- $B$ : Pedro no está en esta isla.
- $C$ : Pedro estuvo aquí ayer.
- $D$ : Pedro no está aquí hoy y no estuvo aquí ayer.
- $E$ : O  $D$  es un mentiroso o  $C$  es veraz.

Eloísa meditó durante un rato, pero no logró obtener una respuesta. “¿Podría alguno de ustedes añadir algo más, por favor?” suplicó Eloísa. En ese momento  $A$  dijo: “O  $E$  es mentiroso o  $C$  es veraz.”. Ahora sí que Eloísa pudo saber si Pedro estaba o no en la isla. Y usted, ¿podría decir si está o no está?

Sean las abreviaturas siguientes:

- $a$ : La frase “ $A$  es veraz”.
- $b$ : La frase “ $B$  es veraz”.
- $c$ : La frase “ $C$  es veraz”.
- $d$ : La frase “ $D$  es veraz”.

- $e$ : La frase “ $E$  es veraz”.
- $p$ : La frase “Pedro está en la isla”.
- $q$ : La frase “Pedro estuvo en la isla ayer”.

Sea  $v$  una valoración fija pero arbitraria. Entonces, por los datos del enunciado, sabemos que:

$$\begin{aligned}
 0 &= v(a) + v(p) \\
 0 &= v(b) + v(\neg p) = v(b) + v(p) + 1 \\
 0 &= v(c) + v(q) \\
 0 &= v(d) + v(\neg p \wedge \neg q) = v(d) + v(\neg p)(\neg q) = v(d) + (v(p) + 1)(v(q) + 1) = \\
 &= v(d) + v(p)v(q) + v(p) + v(q) + 1 \\
 0 &= v(e) + v(\neg d \vee c) = v(e) + v(\neg d)v(c) + v(\neg d) + v(c) = \\
 &= v(e) + (v(d) + 1)v(c) + v(d) + 1 + v(c) = v(e) + v(d)v(c) + v(d) + 1 \\
 0 &= v(a) + v(\neg e \vee c) = v(a) + v(\neg e)v(c) + v(\neg e) + v(c) = \\
 &= v(a) + (v(e) + 1)v(c) + v(e) + 1 + v(c) = v(a) + v(e)v(c) + v(e) + 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(a) + v(p) = 0 \\ v(b) + v(p) = 1 \\ v(c) + v(q) = 0 \\ v(d) + v(p)v(q) + v(p) + v(q) = 1 \\ v(e) + v(d)v(c) + v(d) = 1 \\ v(a) + v(e)v(c) + v(e) = 1 \end{array} \right.$$

Sabemos que  $v(a) = v(p)$  y  $v(c) = v(q)$ . Por tanto, de la 4ª ecuación obtenemos que:

$$v(d) = v(p)v(q) + v(p) + v(q) + 1 = v(a)v(c) + v(a) + v(c) + 1$$

De la 5ª ecuación obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 v(e) + v(d) + 1 &= v(d)v(c) \\
 &= (v(a)v(c) + v(a) + v(c) + 1)v(c) \\
 &= \cancel{v(a)v(c)^2} + \cancel{v(a)v(c)} + \cancel{v(c)^2} + \cancel{v(c)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos:

$$v(d)v(c) = 0 \quad v(d) = v(e) + 1$$

Usando la 5ª ecuación, tenemos que:

$$v(d) = v(e) + 1 = v(d)v(c) + v(d) = v(d)(v(c) + 1)$$

Como  $v(d)v(c) = 0$ , entonces  $v(d) = 0$  o  $v(c) = 0$ . Veamos que  $v(d) = 0$  por reducción al absurdo:

- Si  $v(d) = 1$ , entonces por la última igualdad obtenida tendríamos  $1 = v(c) + 1$ , por lo que  $v(c) = 0 = v(q)$ . De la 4ª ecuación, obtendríamos que  $v(p) = 0 = v(a)$ , lo que contradice la 1ª ecuación. Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned}
 0 &= v(a) + v(e)v(c) \\
 &\stackrel{6^\circ}{=} v(e) + 1 \\
 &= v(d) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, llegamos a un absurdo, por lo que  $v(d) = 0$ .

Como  $v(d) = 0$ , entonces  $v(e) = 1$ . De la última ecuación, deducimos que  $v(a) = v(c)$ . De la 4ª ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}
 1 &= 0 + v(p)v(q) + v(p) + v(q) \\
 &= v(a)v(c) + v(a) + v(c) \\
 &= v(a)^2 + v(a) + v(a) \\
 &= v(a)
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $v(a) = 1 = v(c) = v(p) = v(q)$ , y entonces  $v(b) = 0$ . Por tanto, tenemos que:

$$v(a) = v(c) = v(e) = v(p) = v(q) = 1, \quad v(b) = v(d) = 0$$

Por tanto, tenemos que Pedro está en la isla y estuvo en la isla ayer. Todos excepto  $B$  y  $D$  son veraces.