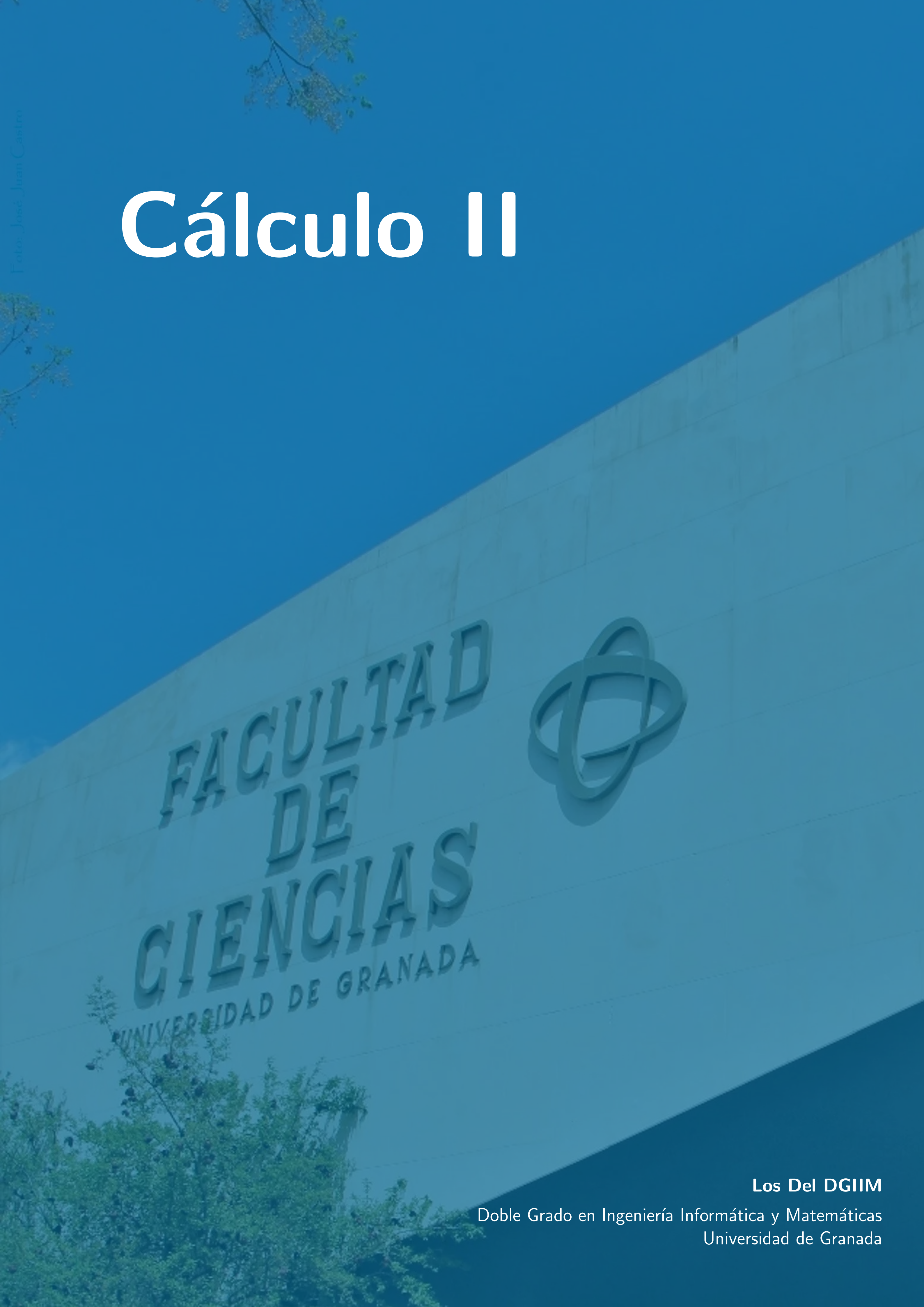


Foto: José Juan Castro

Cálculo II

Los Del DGIIM

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Índice general

1. Relaciones de Problemas **5**

1.1. Cálculo Diferencial 5
1.2. Problemas de Optimización 27
1.3. Polinomios de Taylor y Concavidad 46
1.4. Continuidad Uniforme 67
1.5. Cálculo Integral Teórico 77
1.6. Cálculo Integral Práctico 98
1.7. Aplicaciones del Cálculo Integral 123

1. Relaciones de Problemas

1.1. Cálculo Diferencial

Ejercicio 1.1.1. Estudiar la derivabilidad de la función $f : A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

1. $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

   - Para $x = -1$:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \nexists f'(-1)$$

   - Para $x = 1$:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Longrightarrow \nexists f'(1)$$

   Por tanto, f es derivable en $]-1, 1[$

2. $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-2/3} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   Veamos para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

   Por tanto, $\nexists f'(0)$

3. $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{1-x} & \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

Veamos para $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x}{1-x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1-x} = 2$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+x} = 2$$

Por tanto, como las derivadas laterales coinciden, $f'(0) = 2$.

Además, Por el carácter local de la derivabilidad, f también es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } \ x > 0 \\ 2 & \text{si } \ x = 0 \\ \dfrac{2}{(1-x)^2} & \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

4. $A = R_0^+$ y $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } \ x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$

Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \stackrel{(*)}{=} e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Como $L = 1 \neq 0 = f(0) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = e^{x\ln x}\left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) = x^x\left(\ln(x) + 1\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 1.1.2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Determinar los valores de α y β que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

Por el carácter local de la derivabilidad, $f'(x) = 2x + \alpha \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Como la recta tangente en $x = 2$ es $y = 2x$ y dicha recta tiene pendiente $m = 2$; por la interpretación geométrica de la derivada:

$$f'(2) = 2 \Longrightarrow 4 + \alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = -2$$

Como el punto $(2, 4)$ pertenece a la gráfica,

$$f(2) = 4 \Longrightarrow 2^2 + 2\alpha + \beta = 4 \Longrightarrow \beta = -2\alpha = 4$$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 2x + 4$

Ejercicio 1.1.3. Sea f una función tal que $f(x+h) = f(x)+3xh+h^2-2h,\quad$ para cada $h, r \in \mathbb{R}$, calcular $f'(0)$ y $f'(2)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+3xh+h^2-2h-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3xh+h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0} 3x+h-2 = 3x-2 \end{aligned}$$

Por tanto, $f'(0) = -2$ y $f'(2) = 4$.

Ejercicio 1.1.4. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

y determinar su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} 2x \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} 2x \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{Ec.\ 1,1}{=} 0$$

donde he hecho uso del siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4x^3}{x^8}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot -\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} &\overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\ = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot -\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{\infty} = 0 & \quad (1.1) \end{aligned}$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudiemos ahora su imagen:

- Si $x < 0$:
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$
- Si $x > 0$:
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ estrictamente creciente en $]0, +\infty[$

Además, veamos su comportamiento en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

Como $f(0) = 0$ y f es continua en $\mathbb{R}$, su imagen es:

$$Im(f) = [0, 1[$$

Ejercicio 1.1.5. Estudiar la derivabilidad y el comportamiento en $\pm\infty$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Veamos para los puntos frontera:

- Para $x = 0$:
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{0-1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
Por tanto, $\nexists f'(0)$.

- Para $x = 1$:
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$
Como los límites laterales no coinciden, $\nexists f'(1)$.

Ejercicio 1.1.6. Calcular la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

1. $(f^{-1})'(9)$, siendo $f(x) = x^3 + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como f es continua, inyectiva y derivable en $\mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Veamos el valor de a:

$$f(a) = 9 \iff a^3 + 1 = 9 \iff a^3 = 8 \iff a = 2$$

Por tanto,

$$(f^{-1})'(9) = (f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{12}$$

2. $(f^{-1})'(16)$, siendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Además, $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 9 < 0 \Longrightarrow f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$. Como f es también continua y derivable en $\mathbb{R}$, entonces

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Veamos el valor de a:

$$f(a) = 16 \Longrightarrow a^3 + 2a^2 + 3a + 10 = 16 \Longrightarrow a^3 + 2a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & & 1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Figura 1.1: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

Por tanto, al dividir con Ruffini (figura 1.1), $f(a) = 16 \Longrightarrow a = 1$.

$$(f^{-1})'(16) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+4+3} = \frac{1}{10}$$

3. $(f^{-1})'(2)$, siendo $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 5}{3\sqrt[3]{(x^3 + 5x + 2)^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora si $f(x)$ es inyectiva.
Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y supongamos $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \sqrt[3]{x_1^3 + 5x_1 + 2} = \sqrt[3]{x_2^3 + 5x_2 + 2}$$
$$\Longrightarrow x_1^3 + 5x_1 + 2 = x_2^3 + 5x_2 + 2 \Longrightarrow x_1^3 + 5x_1 = x_2^3 + 5x_2 \Longrightarrow x_1^3 - x_2^3 + 5(x_1 - x_2) = 0$$
$$\Longrightarrow (x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 + 5) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Por tanto, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, demostrando que f es inyectiva. □

Por tanto, como f es continua, inyectiva y derivable,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Veamos el valor de a:

$$f(a) = 2 \Longrightarrow \sqrt[3]{a^3 + 5a + 2} = 2 \Longrightarrow a^3 + 5a + 2 = 8 \Longrightarrow a^3 + 5a - 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

Figura 1.2: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

Por tanto, $f(a) = 2 \Longrightarrow a = 1$

$$(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3\sqrt[3]{(1+5+2)^2}}{3+5} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

4. $(g^{-1})'(9)$, siendo $f(x-2) = x^3 + 1$ y $g(x) = f(\operatorname{arc\,tg}(x))$.

   En primer lugar, vemos que $f(x) = (x+2)^3 + 1$.

   g es continua en $\mathbb{R}$, ya que es la composición de dos funciones continuas. Por el carácter local de la derivabilidad:

$$g'(x) = 3(\arctan(x) + 2)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Como g es continua, inyectiva y derivable,

$$(g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{g'(a)}$$

   Veamos el valor de a:

$$g(a) = 9 \Longrightarrow f(\arctan(a)) = 9 \Longrightarrow (\arctan(a) + 2)^3 + 1 = 9$$
$$\Longrightarrow \arctan(a) + 2 = 2 \Longrightarrow \arctan a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

   Por tanto, $g(a) = 9 \Longrightarrow a = 0$.

$$(g^{-1})'(9) = (g^{-1})'(g(0)) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1+0^2}{3(\arctan(0)+2)^2} = \frac{1}{12}$$

5. $(g \circ f^{-1})'(6)$, siendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ y $g(x) = \frac{x^3+6x^2+9x+5}{x^4+1}$.

   Por la regla de la cadena,

$$(g \circ f^{-1})'(6) = g'(f^{-1}(6)) \cdot (f^{-1})'(6)$$

   Calculo en primer lugar $f^{-1}(6)$.

   $f^{-1}(6) = a \Longleftrightarrow f(a) = 6 \Longleftrightarrow a^3+2a^2+3a = 6 \Longleftrightarrow a^3+2a^2+3a-6 = 0 \Longleftrightarrow a = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & & 1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Figura 1.3: División mediante Ruffini donde se ve que $a = 1$ es una solución.

Por tanto, $f^{-1}(6) = 1$. Calculemos ahora $(f^{-1})'(6)$. Por el carácter local de la derivabilidad, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, como f es continua, inyectiva y derivable,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Como hemos visto anteriormente, $f(a) = 6 \Longrightarrow a = 1$. Por tanto,

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+4+3} = \frac{1}{10}$$

Respecto a g, por el carácter local de la derivabilidad,

$$g'(x) = \frac{(3x^2+12x+9)(x^4+1) - 4x^3(x^3+6x^2+9x+5)}{(x^4+1)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(g \circ f^{-1})'(6) &= g'(f^{-1}(6)) \cdot (f^{-1})'(6) = g'(1)\frac{1}{10} \\ &= \frac{(3+12+9)(1+1) - 4(1+6+9+5)}{10(1+1)^2} = \frac{48-84}{40} = \frac{-9}{10}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.7. Calcular la imagen de las siguientes funciones:

1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x + \operatorname{arc\,tg}(x)$, para todo $x \in [0,1]$,

   Por el carácter local de la derivabilidad:

   $$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in]0,1[$$

   Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0,1[$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $]0,1[$. Como $f(0) = 0$ y $f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$,

   $$Im(f) = \left[0, 1 + \frac{\pi}{4}\right]$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \operatorname{arc\,tg}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

   Por el carácter local de la derivabilidad:

   $$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Veamos el comportamiento de la función en $\pm\infty$:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \operatorname{arc\,tg}(x) = \infty$$

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \operatorname{arc\,tg}(x) = -\infty$$

   Por tanto, el conjunto imagen no está mayorado ni minorado, es decir:

   $$Im(f) = \mathbb{R}$$

3. $f :]0,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}$, para todo $x \in]0,1[$,
   Por el carácter local de la derivabilidad:
   $$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^2+2x-4x^2+1}{(x^2+x)^2} = \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2} \qquad \forall x \in]0,1[$$
   Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:
   $$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2+2x+1 = 0 \Longrightarrow \nexists\ sol \in]0,1[$$
   Como no hay puntos críticos y $f'(0) > 0 \Longrightarrow f(x)$ estrictamente creciente en $]0,1[$. Veamos su comportamiento en $x = 0, 1$.
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}$$
   Por tanto, $Im(f) =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

4. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, para todo $x \in [-1,1]$,
   Por el carácter local de la derivabilidad:
   $$f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \forall x \in]-1,1[$$
   Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:
   $$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
   - <u>Para $x < 0$</u>
     $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ estrictamente decreciente en $]-1,0[$.
   - <u>Para $x > 0$</u>
     $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente en $]0,1[$.

   Como $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$ y $f(0) = 0$,
   $$Im(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

5. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$, para todo $x \in [-1,1]$,
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \frac{2x}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   Como se ha visto en el ejercicio 1.1.1.3,
   $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{2}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-1,1[, f$ es estrictamente creciente en $]-1,1[$.

Como $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, $Im(f) = [-1,1]$.

6. $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}$, para todo $x \in]-1,1[$.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-1,1[, f$ es estrictamente creciente en $]-1,1[$.Veamos su comportamiento en $x = \pm 1$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.8. Demostrar las siguientes desigualdades para los valores de x indicados en cada caso:

1. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad$ para todo $x > 0$,

Comprobemos en primer lugar la primera desigualdad, es decir, que $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$.

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Calculemos su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} \quad \forall x > 0$$

Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \nexists\ sol$$

Como $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$. Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\infty$$

Por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}^-$, es decir,

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

demostrando así la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad, sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln(1+x) - x$. Veamos cuál es su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 \Longrightarrow x = 0 \notin \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \nexists \ sol$$

Como $g'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, g es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$. Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) - x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \ln(1+x) - x = -\infty$$

Por tanto, $Im(g) = \mathbb{R}^-$, es decir,

$$\ln(1+x) - x < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \ln(1+x) < x \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

demostrando así la segunda desigualdad.

Por tanto, se han demostrado las dos desigualdades. □

2. $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$ para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

   Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. Veamos cuál es su imagen.

   Por el carácter local de la derivabilidad:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + x \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

   Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = x \Longrightarrow x = 0 \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \nexists \ sol$$

   Como $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, g es estrictamente creciente en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = -1 + \frac{\pi^2}{8}$$

Por tanto, $Im(f) =]0, -1 + \frac{\pi}{8}[\subset \mathbb{R}^+$, es decir,

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} > 0 \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

demostrando así la desigualdad. □

3. $\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg}(x)$ para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comprobemos en primer lugar la primera desigualdad, es decir, que $\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen}(x) \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sea $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x$. Calculemos su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad, $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow x = \arccos\frac{2}{\pi} \approx 0{,}88$$

- Para $x \in \left]0, \arccos\frac{2}{\pi}\right[$:

  $f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente en $\left]0, \arccos\frac{2}{\pi}\right[$.
- Para $x \in \left]\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right[$:

  $f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente en $\left]\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x = 0$$

Como, además, $f\left(\arccos\frac{2}{pi}\right) \approx -0{,}21 < 0$, $Im(f) = \left]f\left(\arccos\frac{2}{pi}\right), 0\right[\subset \mathbb{R}^-$, es decir,

$$\frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x < 0 \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

demostrando así la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad, sea $g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen} x - x$. Veamos cuál es su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad:

$$g'(x) = \cos x - 1 \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x = 1 \Longrightarrow x = 0 \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \nexists\ sol$$

Como $g'(x) < 0\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, g es estrictamente decreciente en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x - x = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x - x = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Por tanto, $Im(g) = \left]1 - \frac{\pi}{2}, 0\right[\subset \mathbb{R}^-$, es decir,

$$\operatorname{sen} x - x < 0\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \operatorname{sen} x < x\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

demostrando así la segunda desigualdad.

Para la tercera desigualdad, sea $h : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x - \operatorname{tg} x$. Veamos cuál es su imagen.

Por el carácter local de la derivabilidad:

$$h'(x) = 1 - 1 - \operatorname{tg}^2 x = -\operatorname{tg}^2 x \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Veamos en qué puntos se anula la primera derivada:

$$h'(x) = 0 \Longrightarrow -\operatorname{tg}^2 x = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \nexists\ sol$$

Como $h'(x) > 0\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, g es estrictamente decreciente en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Veamos ahora su comportamiento en $x = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x - \operatorname{tg} x = -\infty$$

Por tanto, $Im(h) = \mathbb{R}^-$, es decir,

$$x - \operatorname{tg} x < 0\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow x < \operatorname{tg} x\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

demostrando así la tercera desigualdad.

Por tanto, se han demostrado las tres desigualdades. □

Ejercicio 1.1.9. Determinar el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

f es derivable, con $f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \{-1, 0, 1\}$$

- Para $x \in]-\infty, -1[$:
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ estrictamente decreciente en $]-\infty, -1[$.
- Para $x \in]-1, 0[$:
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente en $]-1, 0[$.

- Para $x \in]0,1[$:
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ estrictamente decreciente en $]0,1[$.

- Para $x \in]1,+\infty[$:
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente en $]1,+\infty[$.

  Por tanto, por el cambio de crecimiento, $x = \pm 1$ son mínimos relativos, y $x = 0$ es un máximo relativo.

  Veamos ahora el valor en los extremos relativos y su comportamiento en $\pm\infty$.

$$f(-1) = 0 \qquad f(0) = 2 \qquad f(1) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

  Por tanto, y debido a la continuidad de f, esta tiene exactamente dos raíces en $\mathbb{R}$, que son $x = \{-1,1\}$. Además, $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$.

Ejercicio 1.1.10. Calcular el número de soluciones de la ecuación $3\ln(x) - x = 0$.

Sea la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3\ln(x) - x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$. Veamos cuántos ceros tiene f.

Por el carácter local de la derivabilidad, $f'(x) = \frac{3}{x} - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{3}{x} = 1 \Longrightarrow x = 3$$

Como $f'(x) = 0$ tiene 1 solución, f tiene, a lo sumo, dos soluciones. Calculemos la imagen de $f(x)$.

- Para $x < 3$
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $]0,3[$.

- Para $x > 3$
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente decreciente en $]3,+\infty[$.

Veamos el comportamiento de la función en $x = 0$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 3\ln(x) - x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3\ln(x) - x = \lim_{x\to\infty} x(3\frac{\ln(x)}{x} - 1) = \infty(0-1) = -\infty$$

Como $f(3) = 3\ln(3) - 3$,

$$Im(f) =]-\infty, 3\ln(3) - 3]$$

Como $f(3) = 3\ln(3) - 3 > 0 \Longleftrightarrow \ln 3 > 1 \Longleftrightarrow 3 > e$, y esto es trivialmente cierto, $f(x)$ tiene **2 soluciones**.

Ejercicio 1.1.11. Dado $a > 1$, probar que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x + e^{-x} - a$. Por el carácter local de la continuidad, f es continua en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + e^{-x} - a = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + e^{-x} - a = +\infty$$

Como $f(0) = 0 + e^0 - a = 1 - a < 0$ y ambos límites en $\pm\infty$ son positivos, por el Teorema de Bolzano, tiene al menos una solución en $\mathbb{R}^+$ y otra en $\mathbb{R}^-$.

Ejercicio 1.1.12. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x + \ln(x) + \operatorname{arc\,tg}(x)$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + \ln(x) + \operatorname{arc\,tg}(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x + \ln(x) + \operatorname{arc\,tg}(x) = +\infty$$

Por tanto, al menos hay una solución en $\mathbb{R}^+$. Además, no puede haber más de una solución ya que $f(x)$ es estrictamente creciente.[1]

Ejercicio 1.1.13. Probar que la ecuación $x + e^x + \operatorname{arc\,tg}(x) = 0$ tiene una única raíz real y determinar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x + e^x + \operatorname{arc\,tg}(x)$. Por el carácter local de la continuidad, f es continua en $\mathbb{R}$.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = 1 + e^x + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Para calcular el intervalo de longitud 1, uso el T. de Bolzano.

$$f(0) = 1 > 0 \qquad f(-1) = -1 + e^{-1} + \operatorname{arc\,tg}(-1) < 0$$

Por el T. de Bolzano, $\exists c \in]-1, 0[\;\mid f(c) = 0$. Además, como f es estrictamente creciente, es la única solución que tiene.

Ejercicio 1.1.14. Probar que la ecuación $\operatorname{tg}(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Sea la función $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg}(x) - x$.

[1] También se puede razonar mediante el Teorema de Rolle.

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 1 = \operatorname{tg}^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Como $f'(x) = 0$ tiene ∞ soluciones en $\mathbb{R}$, $f(x)$ también puede tener, como mucho, ∞ soluciones.

Además, como la función es continua y en cada intervalo de amplitud π tiene como imagen $\mathbb{R}$, en cada intervalo de amplitud π tiene una solución. Es decir, hay una solución en cada

$$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\qquad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\mathbb{Z}$ tiene ∞ elementos, hay ∞ soluciones.

Ejercicio 1.1.15. Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/x}$.

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Veamos los puntos que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow x = e$$

- Para $x < e$
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $]0, e[$.

- Para $x > e$
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente decreciente en $]e, +\infty[$.

Veamos su comportamiento en $x = \{0, +\infty\}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

Además, como $f(e) = e^{\frac{1}{e}} > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} > 0$, y esto último es trivialmente cierto, $Im(f) = \left]0, e^{\frac{1}{e}}\right]$.

Ejercicio 1.1.16. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación dada por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Por el carácter local de la derivabilidad, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Veamos el número de soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\Delta = 4a^2 - 12b = 4(a^2 - 3b) < 0 \Longleftrightarrow a^2 - 3b < 0 \Longleftrightarrow a^2 < 3b$$

Por tanto, como $\Delta < 0$, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ es estrictamente monótona.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Sabiendo el valor de los límites en $\pm\infty$ y sabiendo que es continua, concluimos que tiene al menos una solución. Además, como es estrictamente monótona, esta solución es única.

Ejercicio 1.1.17. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{1/x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ e^2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos y evitar indeterminaciones, tomamos

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ e^2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Por el carácter local de la derivabilidad,

$$f'(x) = e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}x - \ln(x+e^x)}{x^2} \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[- \{0\}$$

Veamos en el caso de $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}x - \ln(x+e^x)}{x^2} \overset{Ec.1,2,1,3}{=} e^2 \cdot \frac{-3}{2} = -\frac{3e^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}x - \ln(x+e^x)}{x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x(x+e^x)-(1+e^x)^2}{(x+e^x)^2}x + \cancel{\frac{1+e^x}{x+e^x}} - \cancel{\frac{1+e^x}{x+e^x}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x(x+e^x)-(1+e^x)^2}{(x+e^x)^2}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x+e^x) - (1+e^x)^2}{2(x+e^x)^2} = \frac{1-2^2}{2\cdot 1} = \frac{-3}{2} \tag{1.2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+e^x}{x+e^x} = \frac{2}{1} = 2 \tag{1.3}$$

Por tanto, f es derivable en $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}x - \ln(x+e^x)}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\frac{3e^2}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.18. Estudiar el comportamiento de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en el punto α, en cada uno de los siguientes casos:

1. $A =]2, +\infty[\,, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \quad (x \in A), \quad \alpha = 2.$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} + 1}{\sqrt{x+2}} \overset{Ec.1,4}{=} \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} = 0 \tag{1.4}$$

2. $A = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ $(x \in A)$, $\alpha = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} \overset{L'Hôpital}{=}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-x+1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

3. $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^x - x}{1-x-\ln x}$ $(x \in A)$, $\alpha = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^x - x}{1-x-\ln x} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1)-1}{-1-\frac{1}{x}} = \frac{e^0(1)-1}{-1-1} = 0$$

4. $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^5}$ $(x \in A)$, $\alpha = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^5} = \lim_{x\to 0^+}\frac{6x - x^3 - 6\operatorname{sen} x}{6x^5} \overset{L'Hôpital}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{6-3x^2-6\cos x}{30x^4} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6x+6\operatorname{sen} x}{120x^3} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6+6\cos x}{360x^2} =$$
$$\overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6\operatorname{sen} x}{720x} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6\cos x}{720} = -\frac{6}{720} = -\frac{1}{120}$$

5. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)^{\operatorname{sen} x}$ $(x \in A)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)^{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{1}{\infty}\right)^1 = 0$$

6. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}$ $(x \in A)$, $\alpha = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x} = 1^\infty = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left((1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg}(x)}} \overset{Ec.1,5}{=} e^1 = e$$

donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopîtal}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = 1 \tag{1.5}$$

7. $A = \mathbb{R}^+\backslash\{e\}$, $f(x) = x^{\frac{1}{\ln(x)-1}}$ $(x \in A)$, $\alpha = e$.

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} x^{\frac{1}{\ln(x)-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} x^{\frac{1}{\ln(x)-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

8. $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (x \in A), \quad \alpha = 0.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e - e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}}{x} \overset{Ec.1,6}{=} \frac{0}{0} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \overset{Ec.1,6y1,7}{=} -e^1 \cdot -\frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

donde he tenido que resolver en primer lugar las siguientes indeterminaciones:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \tag{1.6}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x}{(1+x)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(1+x)^2} = -\frac{1}{2} \tag{1.7}$$

Ejercicio 1.1.19. Estudiar el comportamiento en cero de la función $f : A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

1. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = (\text{sen}(x) + \cos(x))^{\frac{1}{x}} \quad (x \in A),$

   Como la función solo está definida a la derecha del 0, estudiar su comportamiento en el 0 es tomar límite cuando x tiene a 0 por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\text{sen}(x) + \cos(x))^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\text{sen}(x)+\cos(x))}{x}} \overset{Ec.1,8}{=} e^1 = e$$

   donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen}(x) + \cos(x))}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - \text{sen}(x)}{\text{sen}(x) + \cos(x)} = 1 \tag{1.8}$$

   Alternativamente, usando la regla del Zapato o Teorema de Euler,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\text{sen}(x) + \cos(x))^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}(\text{sen}\, x + \cos x - 1)} \overset{Ec.1,9}{=} e^1 = e$$

   donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\text{sen}\, x + \cos x - 1) \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \cos x - \text{sen}\, x = 1 \tag{1.9}$$

2. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (x \in A),$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}} \overset{Ec.1,10}{=} e^0 = 1$$

   donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-sen(x)+x}{cos(x)+\frac{x^2}{2}}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - sen(x)}{2x\cos(x) + x^3} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{2\cos(x) - 2x\,\text{sen}(x) + 3x^2} = 0 \tag{1.10}$$

3. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \frac{x-\operatorname{arc\,tg}(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$ $(x \in A)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\operatorname{arc\,tg}(x)}{\operatorname{sen}^3(x)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^3(x)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2(1+x^2)^2-2(2x)^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}}{6\cos^3(x) - 12\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) - 9\operatorname{sen}(x)^2\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}}{6\cos^3(x) - 21\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. $A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = (1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}}$ $(x \in A)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1-\operatorname{tg} x)}{x^2}} \overset{Ec.1,11}{=} e^{-\infty} = 0$$

donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\operatorname{tg} x)}{x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg} x}}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \tag{1.11}$$

5. $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$ $(x \in A)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \ln x} \overset{Ec.1,12}{=} e^0 = 1$$

donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0 \tag{1.12}$$

Ejercicio 1.1.20. Sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-\operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} & \text{si} \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en función del valor del parámetro a.

Por el carácter local de la continuidad, f es continua en $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$. Veamos para $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln(1-\operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} + 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)} = \frac{\frac{-1}{1} + 2\operatorname{tg}(0)}{1} = -1$$

Por tanto, para que sea continua en $x = 0$ es necesario que $f(0) = a = -1 = L$.

- Si $a \neq -1$: f no es continua en $x = 0$.
- Si $a = -1$: f es continua en $x = 0$, con $f(0) = -1$.

Veamos ahora la derivabilidad. Por el carácter local de la derivabilidad, f es derivable en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, con:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} + 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)\operatorname{sen}(x) - \cos(x)[\ln(1-\operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

Veamos si es derivable en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1-\operatorname{sen} x)-2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} - a}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x) - a\operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - a\cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \frac{-1-a}{0} = \begin{cases} \frac{0}{0} & \text{si } a = -1 \\ \frac{k}{0} = \infty & \text{si } a \neq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Por tanto, para $a = -1$, y sabiendo que f es continua, aplico L'Hôpital.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)-\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} + 2(1+\operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{-1+2-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, para $a = -1$, f es continua y derivable en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} + 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)\operatorname{sen}(x) - \cos(x)[\ln(1-\operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

En el caso de $a \neq -1$, f no es continua en $x = 0$ y por tanto tampoco es derivable en dicho punto.

Ejercicio 1.1.21. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f : A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

1. $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (a^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(a^x+x)}{x}} \overset{Ec.1,13}{=} \begin{cases} e^0 = 1 & \text{si } a \leq 1 \\ e^{\ln a} = a & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

donde he tenido que resolver en primer lugar la siguiente indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a^x + x)}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln(a)}\ln(a)}{a^x + x} = \begin{cases} \frac{0}{\infty} = 0 & \text{si } a \leq 1 \\ \frac{\infty}{\infty} & \text{si } a > 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

En el caso de que $a > 1$, aplicamos la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln(a)}\ln^2(a)}{e^{x\ln(a)}\ln(a)} = \ln a$$

2. $A =]1, +\infty[\ ,\quad f(x) = \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}} \overset{Ec.\ 1,14\ y\ 1,15}{=} \frac{0}{0} \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cancel{\frac{1-\ln x}{x^2}}}{\cancel{\frac{1-\ln x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{Ec.\ 1,14}{=} e^0 = 1$$

donde he hecho uso de que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \tag{1.14}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{Ec.\ 1,14}{=} e^0 = 1 \tag{1.15}$$

3. $A = \mathbb{R}^+,\quad f(x) = x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\quad a \in \mathbb{R}$.

   - Si $a = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0$$

   - Si $a < 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0$$

   - Si $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-a}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-ax^{-a+1}}$$

     - Si $a < 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

     - Si $a = 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

     - Si $a > 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

   Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

4. $A = \mathbb{R}^+,\quad f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\ln x}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}}{\frac{x-2x\ln x}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right)x}{1-2\ln x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \frac{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{2}{x}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{0+\infty\cdot 1}{2} = \infty$$

Ejercicio 1.1.22. Dadas las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$, demostrar que si f es derivable en a, siendo $f(a) = 0$, y si g es continua en a entonces fg [2] es derivable en a.

Demostración. Aplicamos la definición formal de derivada en un punto:

$$(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - \cancelto{0}{f(a)g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a} g(x) =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) \overset{(*)}{=} f'(a)g(a)$$

donde en $(*)$ he aplicado que el límite del producto converge al producto de los límites. El primer límite es la definición formal de $f'(a)$ y, en segundo lugar, he aplicado que g es continua en $x = a$.

Por tanto, se ha demostrado que fg es derivable en $x = a$, con $(fg)'(a) = f'(a)g(a)$. □

Ejercicio 1.1.23. Sea $r > 1$. Si f es una función real de variable real tal que $|f(x)| \leq |x|^r$ en algún intervalo abierto que contenga al cero, demostrar que entonces f es derivable en cero.

Demostración. Veamos en primer lugar el valor de $f(0)$.

$$0 \leq |f(0)| \leq |0|^r = 0 \Longrightarrow |f(0)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$$

Usando la definición de la derivada de una función en un punto,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{Ec.\ 1,16}{=} 0$$

donde he usado este resultado:

$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^r}{|x|} = |x|^{r-1} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (1.16)$$

donde en $(*)$ he usado que, como el exponente es $r-1 > 0$, la sucesión $\{|x|^{r-1}\} \longrightarrow 0$. Por el Lema del sándwich, el límite buscado es 0.

Por tanto, por lo demostrado anteriormente, f es derivable en $x = 0$, con $f'(0) = 0$. □

[2] fg no se refiere a la composición, sino a la multiplicación. Esto se debe a que no se pueden componer por los dominios.

1.2. Problemas de Optimización

Procedimiento

El problema se plantea por lo general como el cálculo del máximo o del mínimo de una función de varias variables y nos proporcionan ecuaciones de "ligadura" entre las variables gracias a las cuales terminamos buscando los máximos y los mínimos de una función de una variable[3].

Trucos

1. El máximo o el mínimo de $f(x)$ se alcanza en los mismos puntos que lo alcanza la función $g(x) = kf(x)$, con $k > 0$.

2. Si g es estrictamente creciente, entonces los máximos y los mínimos absolutos de $f(x)$ y $h(x) = g(f(x))$ se alcanzan en los mismos puntos.

   Demostración. Demostramos para el mínimo, ya que para el máximo es análoga.

   Supongamos a mínimo de $f \Longrightarrow f(a) \leq f(x)\ \forall x \in I$.

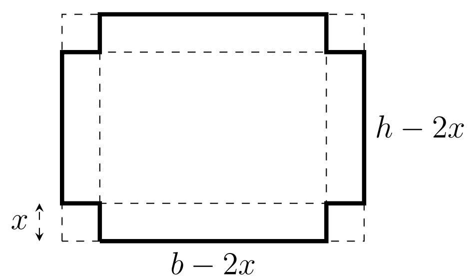
   Como g es estrictamente creciente, $g(f(a)) \leq g(f(x))\ \forall x \in I$. □

3. $f(x)$ y $f^2(x)$ alcanzan los máximos y los mínimos en los mismos puntos si $f(x) \geq 0 \quad \forall x$, ya que $f^2(x) = g(f(x))$, con $g(x) = x^2$ y g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$.

4. $f(x)$ y $e^{f(x)}$ alcanzan los máximos y los mínimos en los mismos puntos.

Ejercicio 1.2.1. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hállense las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados:

1. 10 y 10



Trabajamos de forma general con los valores de altura h y base b como constantes. La medida x es el lado del cuadrado que se ha recortado. El volumen

[3] Cuando estudiemos cálculo en varias variables veremos otros métodos.

de la caja será:

$$\begin{array}{rcl} V : \left]0, \frac{\text{mín}(b,h)}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & V(x) = x(b-2x)(h-2x) = bhx - 2x^2(b+h) + 4x^3 \end{array}$$

Para maximizar el volumen de la caja, le hallamos los extremos relativos a la función V:

$$V'(x) = bh - 4(b+h)x + 12x^2$$

Para $b = h = 10\ u$, los puntos críticos son:

$$V'(x) = 0 \Longrightarrow 12x^2 - 80x + 100 = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 20x + 25 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{3}\ u \\ \cancel{x = 5} \end{array} \right.$$

Veamos si, efectivamente, los puntos críticos son extremos relativos:

- $\underline{\text{Para } x < \frac{5}{3}}$ $V'(x) > 0 \Longrightarrow V$ estrictamente creciente.
- $\underline{\text{Para } x > \frac{5}{3}}$ $V'(x) < 0 \Longrightarrow V$ estrictamente decreciente.

  Por tanto, efectivamente obtenemos un máximo relativo en $x = \frac{5}{3}\ u$. El volumen para estas dimensiones es $V = \frac{2000}{27} \approx 74{,}074\ u^3$.

  Además, efectivamente obtenemos un máximo absoluto, ya que

  $$\lim_{x\to 0^+} V(x) = \lim_{x\to 5^-} V(x) = 0 < V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2000}{27}\ u^3$$

  Por tanto, las dimensiones pedidas son:

  $$x = \frac{5}{3}\ u \qquad V = \frac{2000}{27} \approx 74{,}074\ u^3$$

2. 12 y 18

   Siguiendo un razonamiento análogo, para $b = 12$ y $h = 18\ u$, los puntos críticos son:

   $$V'(x) = 0 \Longrightarrow 12x^2 - 120x + 216 = 0 \Longrightarrow x^2 - 10x + 18 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - \sqrt{7}\ u \\ \cancel{x = 5 + \sqrt{7}} \end{array} \right.$$

   Veamos si, efectivamente, los puntos críticos son extremos relativos:

   - $\underline{\text{Para } x < 5 - \sqrt{7}}$ $V'(x) > 0 \Longrightarrow V$ estrictamente creciente.
   - $\underline{\text{Para } x > 5 - \sqrt{7}}$ $V'(x) < 0 \Longrightarrow V$ estrictamente decreciente.

     Por tanto, efectivamente obtenemos un máximo relativo en $x = 5 - \sqrt{7}\ u$. El volumen para estas dimensiones es $V = V(5 - \sqrt{7}) \approx 228{,}162\ u^3$.

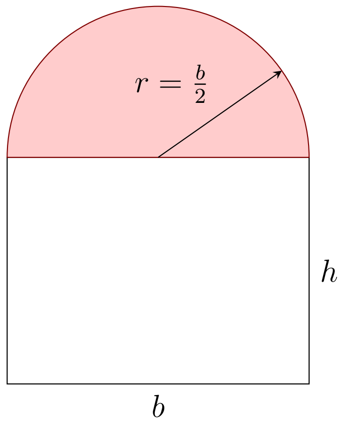
     Además, efectivamente obtenemos un máximo absoluto, ya que

     $$\lim_{x\to 0^+} V(x) = \lim_{x\to 6^-} V(x) = 0 < V\left(5 - \sqrt{7}\right) \approx 228{,}162\ u^3$$

     Por tanto, las dimensiones pedidas son:

     $$x = 5 - \sqrt{7}\ u \qquad V \approx 228{,}162\ u^3$$

Ejercicio 1.2.2. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcúlense las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.



La ecuación de ligadura dada es que el perímetro es constante, es decir:

$$P = b + 2h + \frac{2\pi r}{2} = b + 2h + \pi r = b + 2h + \frac{\pi b}{2} \Longrightarrow h = \frac{P - b(1 + \frac{\pi}{2})}{2}$$

La ecuación a maximizar L que indica la luminosidad obtenida es:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto L(b) = A_B + \tfrac{A_R}{2} = bh + \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi \frac{b^2}{4}}{2} = \tfrac{Pb - b^2(1+\frac{\pi}{2})}{2} + \tfrac{\pi b^2}{16} \end{aligned}$$

Para maximizarla, le hallo los extremos relativos:

$$L'(b) = \frac{P}{2} - b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi b}{8}$$

por tanto,

$$L'(b) = 0 \Longleftrightarrow b\left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{P}{2} \Longleftrightarrow b = \frac{P}{2\left(1 + \frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{P}{2 + \frac{3\pi}{4}} = \frac{4P}{8 + 3\pi}$$

Comprobemos si, efectivamente, el punto crítico es un extremo relativo.

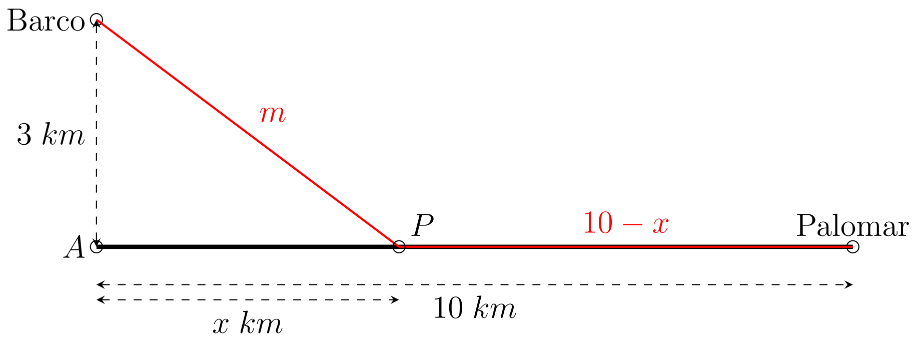
$$L''(b) = -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, como $L''\left(\frac{4P}{8+3\pi}\right) < 0 \Longrightarrow b = \frac{4P}{8+3\pi}$ es un máximo relativo. Además, es máximo absoluto ya que $L(b)$ es continua y solo tiene un extremo relativo. Por tanto, las dimensiones son:

$$h = \frac{P - \frac{4P}{8+3\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{P - \frac{4P}{8+3\pi} - \frac{2P\pi}{8+3\pi}}{2} = P\frac{8 + 3\pi - 4 - 2\pi}{2(8 + 3\pi)} = P\frac{4 + \pi}{2(8 + 3\pi)}$$

$$b = \frac{4P}{8 + 3\pi} \qquad r = \frac{b}{2} = \frac{2P}{8 + 3\pi}$$

Ejercicio 1.2.3. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto donde la paloma abandona el agua.



La ecuación de ligadura, por el Teorema de Pitágoras, es:

$$m^2 = 3^2 + x^2 \Longrightarrow m = \sqrt{9 + x^2}$$

La función que determina la energía consumida es:

$$\begin{aligned} E :]0, 10[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow E(x) = 2m + (10 - x) = 2\sqrt{9 + x^2} + 10 - x \end{aligned}$$

$$E'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{9 + x^2}} - 1$$

$$E'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x = \sqrt{9 + x^2} \Longleftrightarrow 4x^2 = 9 + x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}\ km$$

Veamos si, efectivamente, el punto crítico es extremo relativo.

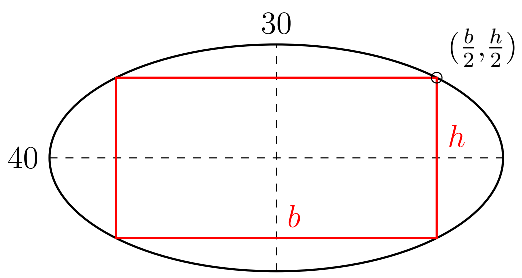
- Para $x < \sqrt{3}$: $E'(x) < 0 \Longrightarrow E(x)$ estrictamente decreciente.
- Para $x > \sqrt{3}$: $E'(x) > 0 \Longrightarrow E(x)$ estrictamente creciente.

Por tanto, sí es extremo relativo. Además, es absoluto ya que es el único extremo relativo y la función es continua y el dominio es un intervalo.

Por tanto, el punto pedido P se encuentra a $\sqrt{3}\ km$ del punto A en la costa.

Ejercicio 1.2.4. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que:

1. El área sea máxima.



Dada la ecuación de la elipse, sabemos que el semieje mayor mide $\sqrt{400} = 20$, y el semieje menor mide $\sqrt{225} = 15$.

La ecuación de ligadura es que el punto $\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ pertenece a la elipse, por lo que cumple la ecuación. Es decir, la ecuación de ligadura es:

$$\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{400} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{225} = 1 \Longrightarrow b = \sqrt{1600\left(1 - \frac{h^2}{900}\right)} \Longrightarrow b = 40\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}}$$

La función a maximizar es el área del rectángulo, es decir,

$$\begin{aligned} A :]0, 30[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longrightarrow A(h) = b \cdot h = 40h\sqrt{1 - \tfrac{h^2}{900}} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Para maximizar A, es decir, calcular su máximo, calculamos los extremos relativos.

$$A'(h) = 40\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}} + 40h\frac{\frac{-h}{450}}{2\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}}} = 40\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}} - \frac{2h^2}{45\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}}}$$

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow 900\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}} = \frac{h^2}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{900}}} \Longrightarrow 900^2 - 900h^2 = \frac{h^4}{1 - \frac{h^2}{900}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 900^2 - 900h^2 - 900h^2 + \cancel{h^4} = \cancel{h^4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 900(-2h^2 + 900) = 0 \Longrightarrow h = 15\sqrt{2}$$

Veamos ahora si el punto crítico $h = 15\sqrt{2}$ es efectivamente un máximo relativo.

- <u>Para $h < 15\sqrt{2}$</u> $A'(h) > 0 \Longrightarrow A$ estrictamente creciente.
- <u>Para $h > 15\sqrt{2}$</u> $A'(h) < 0 \Longrightarrow A$ estrictamente decreciente.

Por tanto, efectivamente obtenemos un máximo relativo en $h = 15\sqrt{2}\ u$. El valor de la base es $b = 20\sqrt{2}\ u$. El área para estas dimensiones es $A = 600\ u^2$.

Además, efectivamente obtenemos un máximo absoluto, ya que

$$\lim_{h \to 0^+} A(h) = \lim_{h \to 30^-} A(h) = 0 < A(15\sqrt{2}) = 600\ u^2$$

Por tanto, las dimensiones pedidas son:

$$b = 20\sqrt{2}\ u \qquad h = 15\sqrt{2}\ u \qquad A = 600\ u^2$$

2. El perímetro sea máximo.
En este caso, la función a maximizar es el perímetro del rectángulo, es decir,

$$\begin{aligned} P :]0,30[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto P(h) = 2b + 2h = 80\sqrt{1 - \tfrac{h^2}{900}} + 2h \end{aligned} \tag{1.18}$$

Para maximizar P, es decir, calcular su máximo, calculamos los extremos relativos.

$$P'(h) = 80\frac{\frac{-h}{450}}{2\sqrt{1-\frac{h^2}{900}}} + 2 = -\frac{4h}{45\sqrt{1-\frac{h^2}{900}}} + 2$$

$$\begin{aligned} P'(x) = 0 \Longrightarrow 2 = \frac{4h}{45\sqrt{1-\frac{h^2}{900}}} \Longrightarrow 90\sqrt{1-\frac{h^2}{900}} = 4h \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 90^2\left(1-\frac{h^2}{900}\right) = 16h^2 \Longrightarrow 90^2 - 9h^2 = 16h^2 \Longrightarrow h = 18\ u. \end{aligned}$$

Veamos ahora si el punto crítico $h = 18$ es efectivamente un máximo relativo.

- Para $h < 18$ $P'(h) > 0 \Longrightarrow P$ estrictamente creciente.
- Para $h > 18$ $P'(h) < 0 \Longrightarrow P$ estrictamente decreciente.

Por tanto, efectivamente obtenemos un máximo relativo en $h = 18\ u$. El valor de la base es $b = 32\ u$. El perímetro para estas dimensiones es $P(18) = 100\ u$.

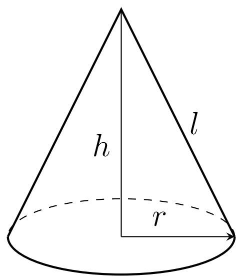
Además, efectivamente obtenemos un máximo absoluto, ya que

$$\lim_{h\to 0^+} P(h) = \lim_{h\to 30^-} P(h) = 0 < P(18) = 100\ u$$

Por tanto, las dimensiones pedidas son:

$$b = 32\ u \qquad h = 18\ u \qquad P = 100\ u$$

Ejercicio 1.2.5. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcúlense sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.



Cabe destacar que se toma como lona solo la superficie lateral. La superficie para la base no se tiene en cuenta.

En este caso, tengo varias ecuaciones de ligadura. En primer lugar,

$$V_o = cte = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Longrightarrow h = \frac{3V_0}{\pi r^2}$$

En segundo lugar, por el Teorema de Pitágonas,

$$l^2 = r^2 + h^2 \Longrightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + \frac{9V_0^2}{\pi^2 r^4}}$$

Por tanto, la función a minimizar es:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto A(r) \end{aligned}$$

$$A(r) = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + \frac{9V_0^2}{\pi^2 r^4}}$$

Como $A(r) > 0\ \forall r$, calculo los puntos críticos de $A^2(r)$, ya que alcanzan los extremos relativos en los mismos puntos.

$$A^2(r) = \pi^2 r^2 \left(r^2 + \frac{9V_0^2}{\pi^2 r^4}\right) = \pi^2 r^4 + \frac{9V_0^2}{r^2}$$

$$(A^2)'(r) = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V_0^2}{r^3} \Longrightarrow (A^2)'(r) = 0 \Longleftrightarrow 4\pi^2 r^6 = 18V_0^2 \Longleftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{9V_0^2}{2\pi^2}}$$

Una vez obtenido el punto crítico, comprobamos si es un mínimo relativo.

$$(A^2)''(r) = 12\pi^2 r^2 + \frac{54V_0^2}{r^4} > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, como la segunda derivada es positiva, se trata de un mínimo relativo. También es absoluto, ya que la función es continua definida en un intervalo y es el único extremo relativo. Por tanto, como es mínimo absoluto de A^2, también lo es de A.

Las dimensiones pedidas son, por tanto,

$$r = \sqrt[6]{\frac{9V_0^2}{2\pi^2}} \qquad h = \frac{3V_0}{\pi \sqrt[6]{\left(\frac{9V_0^2}{2\pi^2}\right)^2}}$$

Ejercicio 1.2.6. Demuéstrese que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

Sea $x \in \mathbb{R}^+$ el número referido. Se pide demostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. Sea f la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x + \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$$

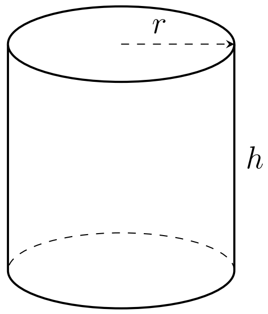
- Para $x < 1$:
  $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ estrictamente decreciente.
- Para $x > 1$:
  $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente.

Por tanto, $x = 1$ es un mínimo relativo. Además, es también un mínimo absoluto, ya que es el único extremo relativo y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Por tanto, el número positivo cuya suma es la menor es $x = 1$. Dicha suma mínima es $f(1) = 2$, como se pedía demostrar.

Ejercicio 1.2.7. Hállense las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie total constante.



La ecuación de ligadura es:

$$S_T = S_{Lat} + 2 \cdot S_{Tapa} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \Longrightarrow h = \frac{S_T}{2\pi r} - r$$

El volumen a maximizar es:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\tfrac{S_T}{2\pi r} - r\right) = \tfrac{S_T}{2} r - \pi r^3 \end{aligned}$$

$$V'(r) = \frac{S_T}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Longleftrightarrow r = \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}}$$

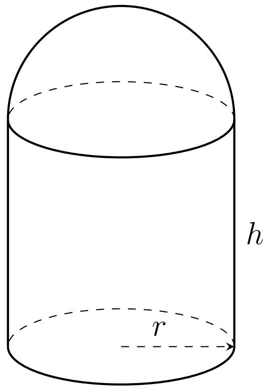
Como $V''(r) = -6\pi r < 0 \quad \forall r$, tengo que $r = \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}}$ es un máximo relativo. Además, es absoluto por ser el único extremo relativo de una función continua, derivable y definida en un intervalo.

Por tanto, las dimensiones son:

$$r = \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{S_T}{2\pi r} - r = \frac{S_T}{2\pi\sqrt{\frac{S_T}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}} = \sqrt{\frac{S_T^2}{\frac{4S_T\pi^2}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{3S_T}{2\pi}} - \sqrt{\frac{S_T}{6\pi}} = \sqrt{\frac{S_T}{\pi}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{6}}\right) = \sqrt{\frac{S_T}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2S_T}{3\pi}} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.8. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.



En este caso, la ecuación de ligadura es el volumen.

$$V = V_{cilindro} + V_{esfera} = \pi r^2 h + \frac{4}{6}\pi r^3 \Longrightarrow h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

Sea C la función que representa los costes de producción a minimizar:

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto C(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(r) &= S_{Lat} + 2 \cdot S_{esfera} = 2\pi r h + 4\pi r^2 = 2\pi r \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} + 4\pi r^2 \\ &= \frac{2V}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2 = \frac{2V}{r} + \frac{8}{3}\pi r^2 \end{aligned}$$

$$C'(r) = -\frac{2V}{r^2} + \frac{16}{3}\pi r = 0 \Longleftrightarrow 3V = 8\pi r^3 \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} \text{ punto crítico.}$$

Veamos ahora si el punto crítico es extremo relativo.

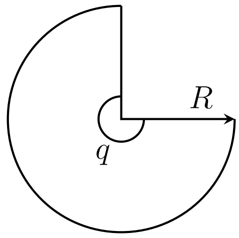
$$C''(r) = \frac{4V}{r^3} + \frac{16}{3}\pi > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

Por tanto, efectivamente el valor de r es un mínimo relativo. Además, es absoluto por ser el único extremo relativo y ser la función definida en un intervalo y continua en este.

Por tanto, las dimensiones óptimas son:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} \qquad h = \frac{V - \frac{1}{4}V}{\pi r^2} = \frac{V}{4\pi r^2}$$

Ejercicio 1.2.9. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio r y ángulo central q. El área del jardín, A, ha de ser fija. ¿Qué valores de r y q hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?



La ecuación de ligadura, en este caso, es que el área es fija.

$$A = \frac{q}{2\pi}\pi r^2 \Longrightarrow q = \frac{2A}{r^2}$$

Por tanto, la función que representa el perímetro es:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto P(r) = 2r + \tfrac{q}{2\pi}2\pi r = 2r + \tfrac{2A}{r} \end{aligned}$$

$$P'(r) = 2 - \frac{2A}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow r^2 = A \Longleftrightarrow r = \sqrt{A}$$

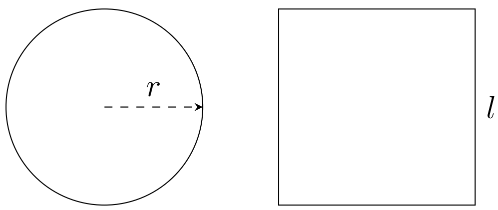
- Para $r < \sqrt{A}$ $P'(r) < 0 \Longrightarrow P(r)$ estrictamente decreciente.
- Para $r > \sqrt{A}$ $P'(r) > 0 \Longrightarrow P(r)$ estrictamente creciente.

Por tanto, como se produce un cambio en el crecimiento, $r = \sqrt{A}$ es un mínimo relativo. Además, es absoluto, ya que la función es continua, el dominio es un intervalo, y es el único extremo relativo que hay.

Por tanto, las dimensiones pedidas son:

$$q = 2 \text{ radianes} \qquad r = \sqrt{A}$$

Ejercicio 1.2.10. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 metro de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?



En este caso, la ecuación de ligadura es la longitud del alambre.

$$P = 1\ m = P_{\bigcirc} + P_{\square} = 2\pi r + 4l \Longrightarrow l = \frac{1 - 2\pi r}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\pi r$$

La función que representa el área total a minimizar es:

$$\begin{aligned} A_T :]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ l &\longmapsto A_T(l) = A_{\bigcirc} + A_{\square} = \pi r^2 + l^2 = \pi r^2 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{\pi^2 r^2}{4} - \tfrac{1}{4}\pi r \end{aligned}$$

$$A'_T = 2\pi r + \frac{\pi^2 r}{2} - \frac{\pi}{4} = 0 \Longleftrightarrow r = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi + \frac{\pi^2}{2}} = \frac{1}{8+2\pi}\ m$$

Comprobemos si el punto crítico efectivamente es extremo relativo.

$$A''_T(r) = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0 \qquad \forall r \in]0,1[$$

Por tanto, es un mínimo relativo. Además, es absoluto, ya que es el único extremo relativo y la función es continua definida en un intervalo.

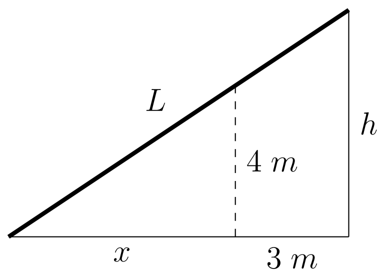
Por tanto, las medidas pedidas son:

$$r = \frac{1}{8+2\pi}\ m \qquad l = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16+4\pi}\ m$$

Por tanto, los trozos de alambre serán de:

$$P_{\bigcirc} = 2\pi r = \frac{2\pi}{8+2\pi} = \frac{\pi}{4+\pi}\ m \qquad P_{\square} = 4l = 4\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16+4\pi}\right) = 1 - \frac{\pi}{4+\pi} = \frac{4}{4+\pi}\ m$$

Ejercicio 1.2.11. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.



En este caso, la ecuación de ligadura viene dada por el Teorema de Thales:

$$\frac{h}{4} = \frac{3+x}{x} \Longrightarrow h = 4\cdot\frac{3+x}{x}$$

La función L que determina la longitud de la escalera viene dada por:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto L(x) = \sqrt{h^2 + (3+x)^2} = \sqrt{\left(4\cdot\frac{3+x}{x}\right)^2 + (3+x)^2} \end{aligned}$$

Como $L(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, minimizo $L^2(x)$, ya que tendrá el mismo mínimo absoluto.

$$(L^2)'(x) = 32\cdot\frac{3+x}{x}\cdot\frac{x-3-x}{x^2} + 2(3+x) = -96\cdot\frac{3+x}{x^3} + 6 + 2x$$

$$(L^2)'(x) = 0 \Longleftrightarrow 96(3+x) = 6x^3 + 2x^4 \Longleftrightarrow x^4 + 3x^3 - 48x - 144 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\overset{Fig.\ 1,4}{\Longleftrightarrow} (x+3)(x^3-48) = 0 \Longleftrightarrow x = \{\cancel{-3}, \sqrt[3]{48}\}$$

	1	3	0	-48	-144
-3		-3	0	0	144
	1	0	0	-48	0

Figura 1.4: División mediante Ruffini donde se ve que $x = -3$ es una solución.

Como $L^2(x)$ es derivable en $\mathbb{R}^+$, comprobemos que $x = \sqrt[3]{48}$ es extremo relativo:

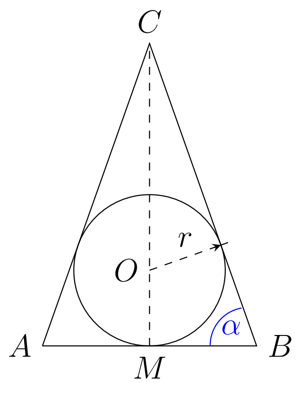
- $\underline{\text{Para } 0 < x < \sqrt[3]{48}}$ $(L^2)'(x) < 0 \Longrightarrow L^2(x)$ decrece.
- $\underline{\text{Para } \sqrt[3]{48} < x}$ $(L^2)'(x) > 0 \Longrightarrow L^2(x)$ crece.

Por tanto, efectivamente es un mínimo relativo. Además, es absoluto, ya que es el único extremo relativo de una función continua y derivable en un intervalo.

Por tanto, la longitud de la escalera es:

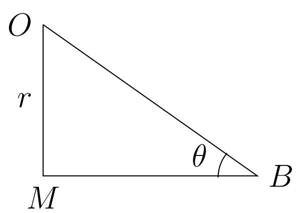
$$L(\sqrt[3]{48}) = \sqrt{\left(4 \cdot \frac{3+\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{48}}\right)^2 + (3+\sqrt[3]{48})^2} = \sqrt{\left(4 \cdot \frac{3+\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{48}}\right)^2 \left(1 + \frac{\sqrt[3]{48}}{4}\right)} =$$
$$= 4 \cdot \frac{3+\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{48}} \sqrt{1 + \frac{\sqrt[3]{48}}{4}} \approx 10{,}0877\ m$$

Ejercicio 1.2.12. Demuéstrese que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r el de área mínima es el triángulo equilátero de altura $3r$.



Como es isósceles, tenemos que $\alpha = \angle CAB = \angle CBA$. Además, tenemos que $\overline{AC} = \overline{CB}$. Además, $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\overline{BM}$.

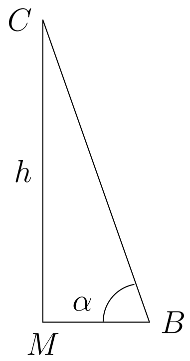
Nos reducimos a $\triangle OBM$.



Una de las ecuaciones de ligadura es:

$$\tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\overline{BM}} \Longrightarrow \overline{BM} = \frac{r}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Nos reducimos ahora a $\triangle CBM$.



La otra de las ecuaciones de ligadura es:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} \Longrightarrow \overline{CM} = h = \tan\alpha\cdot\overline{BM} = \tan\alpha\cdot\frac{r}{\tan\frac{\alpha}{2}} = r\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

La función del área del triángulo es:

$$\begin{aligned} A : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto A(\alpha) = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{2\cdot\overline{BM}\cdot\overline{CM}}{2} = \tfrac{r}{\tan\frac{\alpha}{2}}\cdot r\cdot\tfrac{\tan\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}} = r^2\tfrac{\tan\alpha}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Para calcular el mínimo absoluto, calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= r^2\cdot\frac{(1+\tan^2\alpha)\tan^{\cancel{2}}\frac{\alpha}{2} - \cancel{2}\tan\alpha\cancel{\tan\frac{\alpha}{2}}(1+\tan^2\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}{\tan^{\cancel{4}\,3}\frac{\alpha}{2}} \\ &= r^2\cdot\frac{\tan\frac{\alpha}{2}(1+\tan^2\alpha) - \tan\alpha(1+\tan^2\frac{\alpha}{2})}{\tan^3\frac{\alpha}{2}} \\ &= r^2\cdot\frac{\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} - \frac{\tan\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\tan^3\frac{\alpha}{2}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Resuelvo la ecuación $A'(\alpha)=0$, sabiendo que todas las funciones trigonométricas toman valores positivos por ser α del primer cuadrante. Además, ninguna se anula ni se va a $+\infty$, ya que el intervalo es abierto.

$$\begin{aligned} A'(\alpha) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \tan\alpha\cos^2\alpha \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \Longleftrightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \cancel{\operatorname{sen}\alpha} = 2\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha \Longleftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Veamos ahora si, efectivamente, se trata de un mínimo relativo.

- Para $\alpha < \frac{\pi}{3}$: $A'(\alpha) < 0 \Longrightarrow A(\alpha)$ estrictamente decreciente.
- Para $\alpha > \frac{\pi}{3}$: $A'(\alpha) > 0 \Longrightarrow A(\alpha)$ estrictamente creciente.

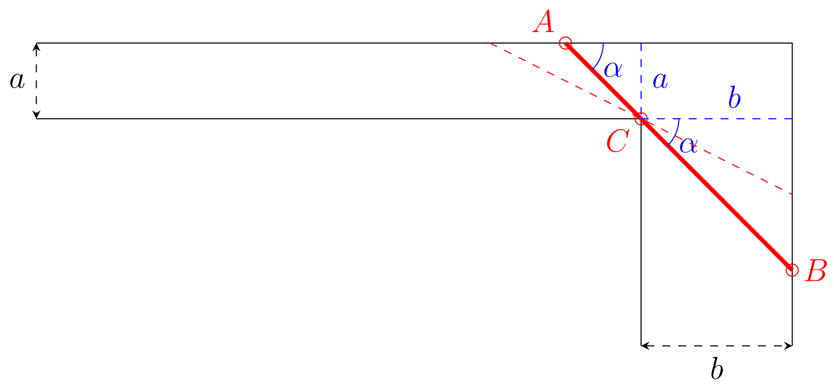
Por tanto, vemos que en $\alpha = \frac{\pi}{3}$ se produce un cambio de monotonía, por lo que efectivamente es un mínimo relativo. Además, también es absoluto, al ser el único extremo relativo en una función continua y derivable definida en un intervalo.

Calculamos ahora la altura del triángulo de área mínima:

$$h = \overline{CM} = r \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}} = r \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{6}} = 3r$$

Por tanto, queda demostrado el enunciado.

Ejercicio 1.2.13. ¿Cuál es la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?



La barra pedida es el segmento que pasa por los puntos A, B y C. Variando el valor de α, obtenemos un haz de segmentos. Paradójicamente, necesitamos minizar la longitud de la barra que pasa por los puntos A, B y C ya que, al ser la longitud de la barra constante, si no se usa la barra más corta, en algún momento del giro chocará contra las paredes de los corredores.

Por tanto, la longitud a minimizar de la barra pedida es:

$$L = \overline{AC} + \overline{CB}$$

La ecuación de ligadura en este caso viene dada por el ángulo α, ya que al ser los dos corredores perpendiculares y la anchura de cada uno constante, el ángulo es el mismo. Por tanto, como $\alpha = \alpha$, las medidas de los segmentos son:

$$\cos \alpha = \frac{b}{\overline{CB}} \Longrightarrow \overline{CB} = \frac{b}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{AC} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Por tanto, la longitud L de la barra viene dada por:

$$\begin{aligned} L : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto L(x) = \frac{b}{\cos \alpha} + \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

$$L'(\alpha) = b\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2\alpha} - a\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 0 \Longleftrightarrow b\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2\alpha} = a\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Longleftrightarrow b\operatorname{sen}^3\alpha = a\cos^3\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Veamos ahora si el punto crítico es un extremo relativo.

$$L''(\alpha) = b\frac{\cos^3\alpha + 2\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha} - a\frac{-\operatorname{sen}^3\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^4\alpha} =$$
$$= b\frac{\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha} - a\frac{-\operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha} = b\frac{1+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^3\alpha} - a\frac{-1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha} =$$
$$= b\frac{2-\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} + a\frac{2-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha}$$

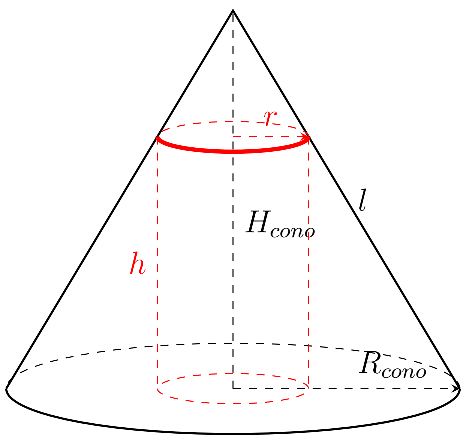
Por tanto, podemos ver que $L''(\alpha) > 0 \qquad \forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ya que en dicho intervalo tanto el seno como el coseno son positivos (por lo que los denominadores son positivos). Respecto a los numeradores, tanto el seno como el coseno en dicho intervalo están acotadas entre $]0,1[$, por lo que su cubo también lo estará. Como $a, b \in \mathbb{R}^+$ y las fracciones son positivas, la segunda derivada en dicho intervalo siempre es positiva.

Como $L''(\alpha) > 0 \qquad \forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ es un mínimo relativo. También es absoluto, ya que la función es continua y definida en un intervalo.

La longitud pedida es:

$$L\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) = \frac{b}{\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)} + \frac{a}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)}$$

Ejercicio 1.2.14. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio R y altura H.



La ecuación de ligadura viene dada por el Teorema de Thales:

$$\frac{R_{cono}}{r} = \frac{H_{cono}}{H_{cono} - h} \Longrightarrow h = -\frac{H_{cono}r}{R_{cono}} + H_{cono}$$

La ecuación a maximizar es:

$$\begin{aligned} V :]0, R_{cono}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(-\tfrac{H_{cono} r}{R_{cono}} + H_{cono}\right) \end{aligned}$$

$$V'(r) = 2\pi r \left(-\frac{H_{cono} r}{R_{cono}} + H_{cono}\right) - \frac{H_{cono}}{R_{cono}}\pi r^2 = -3\frac{H_{cono}}{R_{cono}}\pi r^2 + 2\pi r H_{cono}$$

$$V'(r) = 0 \Longleftrightarrow \frac{3r}{R_{cono}} = 2 \Longleftrightarrow r = \frac{2}{3}R_{cono}$$

Veamos ahora si el punto crítico es, efectivamente, extremo relativo.

$$V''(r) = -6\frac{H_{cono}}{R_{cono}}\pi r + 2\pi H_{cono} \qquad V''\left(\frac{2}{3}R_{cono}\right) = -4\pi H_{cono} + 2\pi H_{cono} < 0$$

Por tanto, como $V''(r) < 0$ para el punto crítico, es un máximo relativo. Además, como la función es continua definida en un intervalo y solo tiene un extremo relativo, también es extremo absoluto.

Por tanto, las dimensiones que maximizan el volumen del cilindro inscrito son:

$$r = \frac{2}{3}R_{cono} \qquad h = -\frac{2}{3}H_{cono} + H_{cono} = \frac{1}{3}H_{cono}$$

Ejercicio 1.2.15. Un cultivador de naranjas estima que plantando 60 naranjos obtendría una cosecha media de 400 naranjas por árbol, y que este número bajaría 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hállese el número de árboles que hace máxima la cosecha.

Sea P la función que determina la producción, es decir, el número de naranjas producidas. Sea n el número de naranjos plantados, y k el número de naranjas por árbol. La ecuación de ligadura es:

$$k = 400 - 4(n - 60) = 640 - 4n$$

La función P se define para $n \geq 60$, ya que en el caso de menos árboles no se da información sobre la productividad.

$$\begin{aligned} P : [60, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto P(n) = kn = 640n - 4n^2 \end{aligned}$$

$$P'(n) = 640 - 8n = 0 \Longleftrightarrow n = 80$$

Como $P''(n) = -8 < 0 \ \forall n \in [60, +\infty[$, efectivamente el punto crítico es un máximo relativo. Además, también es absoluto ya que la función es continua definida en un intervalo, y es el único extremo relativo que hay.

Por tanto, el número de árboles que maximiza la cosecha son $n = 80$ naranjos, siendo la cosecha total $P(80) = 25600$ naranjas.

Ejercicio 1.2.16. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio r mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

La función a maximizar es:

$$\begin{array}{rl} V:]0, r_0[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ r & \longmapsto V(r) = Ar^2(r_0 - r) = Ar_0r^2 - Ar^3 \end{array}$$

$$V'(r) = 2Ar_0r - 3Ar^2 = 0 \Longleftrightarrow r = \frac{2}{3}r_0$$

Veamos si el punto crítico es, efectivamente, un extremo relativo.

$$V''(r) = 2Ar_0 - 6Ar \Longrightarrow V''\left(\frac{2}{3}r_0\right) = 2Ar_0 - 4Ar_0 = -2Ar_0 < 0$$

Por tanto, como $V''(r) < 0$, r es un máximo relativo. También es absoluto ya que se trata de una función continua definida en un intervalo y es el único extremo relativo.

En conclusión, $r = \frac{2}{3}r_0$ maximiza la velocidad del aire de la tráquea durante la tos.

Ejercicio 1.2.17. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 euros/máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sola persona, que gana 35 euros/hora.

1. ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

   Sea n el número de máquinas empleadas y sea h el número de horas que se emplean. Sea C_T el coste total de producción.

   La ecuación de ligadura es:

   $$8000 = 50nh \Longrightarrow n = \frac{8000}{50h} = \frac{160}{h}$$

   La función C_T a minimizar es:

   $$\begin{array}{rl} C_T: \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto C_T(h) = C_{máquinas} + C_{supervisor} = 800n + 35h = \dfrac{128000}{h} + 35h \end{array}$$

   $$C_T'(h) = -\frac{128000}{h^2} + 35 = 0 \Longleftrightarrow h = \sqrt{\frac{128000}{35}} = \sqrt{\frac{25600}{7}} = \frac{160}{\sqrt{7}} = \frac{160\sqrt{7}}{7}$$

   Veamos si el punto crítico es realmente un extremo relativo.

   $$C_T''(h) = \frac{2 \cdot 128000}{h^3} > 0 \; \forall h \in \mathbb{R}^+$$

Como $C''(h) > 0$, se trata de un mínimo relativo. Además, como la función es continua definida en un intervalo y es el único extremo relativo. Se trata de un mínimo absoluto.

No obstante, $n = \frac{160\cdot\sqrt{7}}{160} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$ máquinas no tiene sentido físico. El resultado serán 2 o 3 máquinas.

- Para $n = 2$ máquinas:

$$h = \frac{160}{2} = 80 \qquad C_T(80) = 4400 \text{ euros}$$

- Para $n = 3$ máquinas:

$$h = \frac{160}{3} \qquad C_T\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{12800}{3} \text{ euros} = 4266.\bar{6} \text{ euros}$$

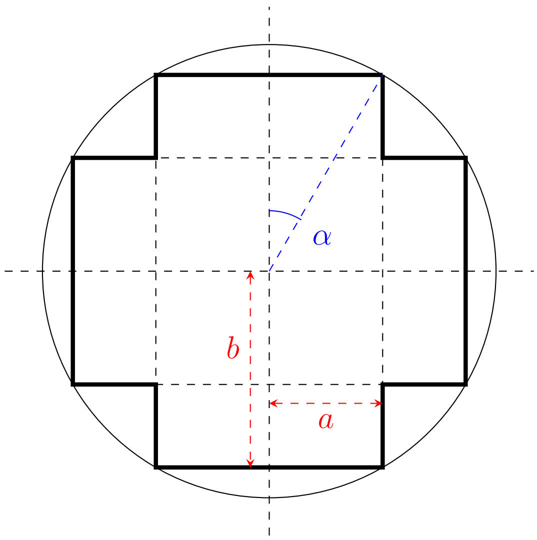
Por tanto, el número de máquinas que minimiza los costes sería $n = 3$ máquinas.

2. Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?

En el caso de que se usasen $n = 3$ máquinas, se necesitan $h = \frac{160}{3}$ horas. Por tanto, el supervisor cobrará:

$$C_{supervisor} = 35h = 35 \cdot \frac{160}{3} = \frac{5600}{3} \text{ euros} = 1866.\bar{6} \text{ euros}$$

Ejercicio 1.2.18. Calcular las dimensiones de una cruz simétrica respecto de los ejes coordenados que estando inscrita en una circunferencia de radio 1 tenga área máxima.



Debido a la trigonometría, sabemos que:

$$\cos\alpha = \frac{b}{R} \Longrightarrow b = R\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{R} \Longrightarrow a = R\operatorname{sen}\alpha$$

La función A que determina el área de la figura es:

$$\begin{array}{rcl} A: \left]0, \frac{\pi}{4}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & A(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 2\cdot 2a2b-(2a)^2 = 8ab-4a^2 = 4(2ab-a^2) = 4(2R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - R^2\operatorname{sen}^2\alpha) = \\ &= 4R^2(\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}^2\alpha) \qquad \forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\end{aligned}$$

Para maximizar la función, hallamos los puntos críticos.

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= 4R^2(2\cos(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\alpha)) = 0 \Longleftrightarrow 2\cos(2\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2 = \tan(2\alpha) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arctan 2 \end{aligned}$$

Veamos ahora si el punto crítico es un extremo relativo.

$$A''(\alpha) = 4R^2(-4\operatorname{sen}(2\alpha)-2\cos(2\alpha)) = -8R^2(2\operatorname{sen}(2\alpha)+\cos(2\alpha)) < 0 \ \forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

Esto se da ya que el seno y coseno son positivos en el primer cuadrante. Por tanto, como la segunda derivada es negativa, entonces se trata de un máximo relativo. También se trata de un extremo absoluto ya que es una función continua definida en un intervalo, y es el único extremo relativo.

Por tanto, los valores que maximizan el área son:

$$b = R\cos\alpha = \cos\left(\frac{1}{2}\arctan 2\right) \qquad\qquad a = R\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\arctan 2\right)$$

1.3. Polinomios de Taylor y Concavidad

Teorema. *Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in I^\circ$ hasta el orden n. Entonces,*

$$P_{n,a}^{(f+g)} = P_{n,a}^{f}(x) + P_{n,a}^{g}(x)$$

Demostración. Sabemos que $P_{n,a}^{(f+g)}$ es el único polinomio $Q(x)$ de grado n que pasa por $(a, f(a))$ y tiene la propiedad de $\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (P_{n,a}^{f}(x) + P_{n,a}^{g}(x))}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}^{f}(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - P_{n,a}^{g}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Como conclusión,

$$Q(x) = P_{n,a}^{f}(x) + P_{n,a}^{g}(x) = P_{n,a}^{(f+g)}(x)$$

□

Ejercicio 1.3.1. Sea $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$. Dado $a \in \mathbb{R}$, expresar el polinomio $p(x)$ en potencias de $(x-a)$. Como aplicación, expresar en potencias de $(x-2)$ el polinomio $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$.

Usando el polinomio de Taylor,

$$P_{n,a}^{p}(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como, además, el polinomio de Taylor de un polinomio es dicho polinomio, $\Longrightarrow P_{n,a}^{p}(x) = p(x)$. Por tanto,

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Para expresar el polinomio $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$ como potencias de $(x-2)$, tenemos que:

$$p(x) = p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{p^{3)}(2)}{6}(x-2)^3 + \frac{p^{4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$

Como:

$$p'(x) = 7 - 6x - 15x^2 + 4x^3 \quad p''(x) = -5 - 30x + 12x^2 \quad p'''(x) = -30 + 24x \quad p''''(x) = 24$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= -16 - 33(x-2) - \frac{18}{2}(x-2)^2 + \frac{18}{6}(x-2)^3 + \frac{24}{14}(x-2)^4 = \\ &= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.2. Sea $f(x)$ una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen es $P_{3,0}^{f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen de la función $g(x) = xf(x)$.

Sabiendo que $P_{n,0}^{x}(x) = x$, tenemos que:

$$P_{3,0}^{g}(x) = \left[P_{3,0}^{x}(x) P_{3,0}^{f}(x)\right]_{\text{truncado en } n=3} = \left[x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right]_{\text{truncado en } n=3} = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$

Ejercicio 1.3.3. Si el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en el origen, de la función $f(x)$ es $P_{3,0}^f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, calcular el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = e^{f(x)}$.

En primer lugar, sabemos que:

$$P_{3,0}^f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 - x + x^2 - x^3$$

de lo que deducimos:

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1 \qquad f''(0) = 2 \cdot 1 = 2 \qquad f'''(0) = -1 \cdot 6 = -6$$

$$P_{3,0}^g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3$$

donde:

$$\begin{aligned}
g(0) &= e^{f(0)} = e^{P_{3,0}^f(0)} = e^1 = e \\
g'(0) &= f'(0)e^{f(0)} = ef'(0) = -e \\
g''(0) &= f''(0)e^{f(0)} + (f'(0))^2e^{f(0)} = 2e + e = 3e \\
g'''(0) &= f'''(0)e^{f(0)} + f''(0)f'(0)e^{f(0)} + 2f'(0)f''(0)e^{f(0)} + (f'(0))^3e^{f(0)} = \\
&= -6e + -2e - 4e - e = -13e
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución queda como:

$$P_{3,0}^g(x) = e - ex + 3e\frac{x^2}{2} - 13e\frac{x^3}{6}$$

Ejercicio 1.3.4. Calcular el polinomio de Taylor de orden n, en el punto $x = 0$ (desarrollo de Maclaurin) de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^x$

$$P_{n,0}^{e^x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$$P_{n,0}^{(1+x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha!}{(\alpha - n)!}\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

3. $f(x) = \cos(x)$

$$P_{2n,0}^{\cos(x)} = P_{2n+1,0}^{\cos(x)} = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

   Las derivadas del seno son:

   $$f^{(4k)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(4k+1)}(x) = \cos x \qquad f^{(4k+2)}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

   Como $\operatorname{sen} 0 = -\operatorname{sen} 0 = 0$, tenemos que:

   $$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(4k+1)}(0) = 1 \qquad f^{(4k+3)}(x) = -1$$

   Por tanto, de la definición del polinomio de Taylor:

   $$\begin{aligned} P_{2n,0}^{\operatorname{sen}(x)} &= \cancelto{0}{f^{(0)}(0)} + \cancelto{1}{f^{(1)}(0)}x + \cancelto{0}{f^{(2)}}(0)\frac{x^2}{2} + \cancelto{-1}{f^{(3)}}(0)\frac{x^3}{3!} + \cancelto{0}{f^{(4)}}(0)\frac{x^4}{4!} + \cancelto{1}{f^{(5)}}(0)\frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \tan(x)$

   En primer lugar, vemos que la tangente es una función impar. Es decir, que $f(x) = -f(-x)$.

   $$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = -f(-x)$$

   donde he hecho uso de que el seno es una función impar y el coseno es par.

   Demostremos ahora mediante inducción que toda derivada de orden par de una función impar es una función impar. Es decir, que dado f impar, se da que:

   $$f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

   - Para $k = 1$:
     Veamos que $f^{(2)}(x) = f''(x) = -f''(-x)$:

     $$\begin{aligned} &f(x) = -f(-x) \Longrightarrow \\ &\qquad \Longrightarrow f'(x) = -f'(-x) \cdot (-1) = f'(-x) \Longrightarrow \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow f''(x) = -f''(-x) \end{aligned}$$

     Por tanto, es cierto para $k = 1$.

   - Supuesto cierto para $k - 1$, demostrar para k:
     Partiendo de la hipótesis de inducción,

     $$\begin{aligned} &f^{(2k-2)}(x) = -f^{(2k-2)}(-x) \Longrightarrow \\ &\qquad \Longrightarrow f^{(2k-1)}(x) = -f^{(2k-1)}(-x) \cdot (-1) = f^{(2k-1)}(-x) \Longrightarrow \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x) \end{aligned}$$

Por tanto, ya hemos visto que $f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x)$. Obtenemos de manera directa lo siguiente:

$$f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x) \Longrightarrow f^{(2k)}(0) = -f^{(2k)}(0) \Longrightarrow f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Haciendo uso de la definición de Polinomio de Taylor, tenemos que el polinomio de Taylor de la tangente queda como:

$$\begin{aligned} P^f_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

El objetivo es calcular los valores de a_i. Haciendo uso de que $f^{(2k)}(0) = 0$, sabemos que $a_{2k} = 0\ \forall k$. Por tanto, queda como:

$$\begin{aligned} P^f_{2n+1,0}(x) &= f'(0)x + f'''(0)\frac{x^3}{3} + \dots \\ &= a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1} \end{aligned}$$

Haciendo uso del Resto de Lagrange:

$$f(x) = P^f_{2n+1,0}(x) + R_{2n+1,0}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + f^2(x) \\ &= a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \dots + (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} + R'_{2n+1,0}(x) \end{aligned}$$

Evaluando la derivada en $x = 0$, obtenemos que

$$f'(0) = 1 = a_1 + \cancel{R'_{2n+1,0}(0)} \Longrightarrow a_1 = 1$$

Por tanto, hasta ahora tenemos que $a_1 = 1$ y que $a_{2k} = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para calcular el resto de coeficientes a_i, calculamos $P^{f'}_{2n,0}(x)$ de dos formas distintas. Por un lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} P^{f'}_{2n,0}(x) &= \left[P^f_{2n+1,0}(x)\right]' \\ &= a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \dots + (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} \\ &= 1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \dots + (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Por el otro lado, como $f'(x) = 1 + f^2(x)$, entonces:

$$P^{f'}_{2n,0}(x) = P^{1+f^2}_{2n,0}(x) = P^1_{2n,0}(x) + P^{f^2}_{2n,0}(x) = 1 + P^{f^2}_{2n,0}(x) \tag{1.20}$$

Calculamos por tanto $P_{2n,0}^{f^2}(x)$:

$$\begin{aligned}
P_{2n,0}^{f^2} &= \left[\left(P_{2n}^{f}(x)\right)^2\right]_{\text{truncado en } 2n} \\
&= \left[\left(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1}\right)^2\right]_{\text{truncado en } 2n} \\
&= \beta_2x^2 + \beta_3x^3 + \dots + \beta_{2n}x^{2n}
\end{aligned}$$

donde $\beta_k = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}} a_ia_j$. Por tanto, como $a_1 = 1$ y $a_{2k} = 0\ \forall k$, obtenemos:

$$\beta_2 = a_1^2 = 1 \qquad \beta_3 = a_1a_2 + a_2a_1 = 0 \qquad \beta_4 = a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1 = 2a_1a_3$$

$$\beta_5 = 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0 \qquad \beta_6 = 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 = 2a_1a_5 + a_3^2$$

Igualando las dos expresiones de $P_{2n}^{f'}(x)$ (ecuaciones 1.19 y 1.20), tenemos que:

$$\cancel{1} + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + \dots + (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} = \cancel{1} + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 + \dots + \beta_{2n}x^{2n}$$

Igualando los términos del mismo grado, obtengo que $\beta_{2k+1} = 0\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Además, podemos calcular cada coeficiente a_i.

$$3a_3 = \beta_2 = 1 \Longrightarrow a_3 = \frac{1}{3} \qquad 5a_5 = \beta_4 = 2a_1a_3 = \frac{2}{3} \Longrightarrow a_5 = \frac{2}{15}$$

$$7a_7 = \beta_6 = 2a_1a_5 + a_3^2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{17}{45} \Longrightarrow a_7 = \frac{17}{315}$$

De forma general, obtenemos cada coeficiente a_k se puede obtener sabiendo los anteriores de la siguiente forma:

$$a_k = \frac{\beta_{k-1}}{k} = \frac{\sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=k-1}} a_ia_j}{k}$$

Como conclusión, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
P_{2n+1,0}^{f}(x) &= x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x_7 + \dots
\end{aligned}$$

6. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$
   Para calcular su desarrollo de Taylor, hago uso de que:

$$\left[P_{n+1,a}^{f}(x)\right]' = P_{n,a}^{f'}(x) \Longrightarrow P_{n+1,a}^{f}(x) = \int P_{n,a}^{f'}(x)dx$$

   Sabemos que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Además, como $f'(x)$ está definida en $]-1,1[$, tenemos que $|x| < 1$.

$$P_{n,0}^{(1-x)^\alpha} = 1 - \alpha x + \dots + (-1)^n\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}(-1)^kx^k$$

$$P_{2n,0}^{f'}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}$$

Por tanto,

$$P_{2n+1,0}^{f}(x) = \int P_{2n,0}^{f'}(x)dx = \int \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

7. $f(x) = \ln(1+x)$

$$P_{n,0}^{\ln(1+x)} = 0 + x - \frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

8. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ Para calcular su desarrollo de Taylor, hago uso de que:

$$\left[P_{n+1,a}^{f}(x)\right]' = P_{n,a}^{f'}(x) \Longrightarrow P_{n+1,a}^{f}(x) = \int P_{n,a}^{f'}(x)dx$$

Sabemos que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$.

$$P_{n,0}^{(1+x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$P_{n,0}^{(1+x)^{-1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} x^k = (-1)^k x^k$$

donde esto último se da, ya que:

$$\binom{-1}{k} := \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k\frac{k!}{k!} = (-1)^k$$

Por tanto,

$$P_{2n,0}^{f'}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$$

Por tanto, el desarrollo pedido es:

$$P_{2n+1,0}^{f}(x) = \int P_{2n,0}^{f'}(x)dx = \int \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Ejercicio 1.3.5. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones $(n+1)$ veces derivables en el punto $a \in I$. Sea $h(x) = f(x)g(x)$ para cada $x \in I$. Demostrar que $P_{n,a}^{h}(x)$ se obtiene del polinomio producto $P_{n,a}^{f}(x)P_{n,a}^{g}(x)$ eliminando los términos de orden mayor estricto que n.

Se pide demostrar:

$$P_{n,a}^{fg}(x) = \left[P_{n,a}^{f}(x)P_{n,a}^{g}(x)\right]_{\text{truncado en } n}$$

Demostración.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-P^f_{n,a}(x)P^g_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-P^f_{n,a}(x)g(x)+P^f_{n,a}(x)g(x)-P^f_{n,a}(x)P^g_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P^f_{n,a}(x)}{(x-a)^n}g(x)+\lim_{x\to a}P^f_{n,a}(x)\frac{g(x)-P^g_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

□

Por tanto, multiplicando ambos

Ejercicio 1.3.6. Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces derivable en el punto $x=0$ (que es interior a I). Sea $k\in\mathbb{N}$ y $h(x)=f(x^k)$. Demostrar que $P^h_{nk,0}(x)=P^f_{n,0}(x^k)$.

Demostración.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P^f_{n,0}(x)}{x^n}=0\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x^k)-P^f_{n,0}(x^k)}{(x^k)^n}=0$$

Esto se da ya que $\{x\}\longrightarrow 0\Longleftrightarrow\{x^k\}\longrightarrow 0\qquad\forall k\in\mathbb{N}$ □

Ejemplo. Aplicaciones del último ejercicio son:

$$P^{e^x}_{3,0}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$
$$P^{e^{x^2}}_{6,0}(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$$

Ejercicio 1.3.7. Calcular los siguientes límites (utilizando el desarrollo de Taylor):

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}-2-2x-x^2\right)=\lim_{x\to 0}\cancelto{0}{\frac{f(x)-P^f_{4,0}(x)}{x^4}}+\frac{P^f_{4,0}(x)}{x^4}=$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{P^f_{4,0}(x)}{x^4}\overset{Ec.\ 1{,}21}{=}\frac{5}{12}$
   siendo $f(x)=2x(1+x^3)^{\frac{1}{3}}+2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-2-2x-x^2$.

$$P^{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}_{4,0}(x)=1+2\frac{x^3}{3!}=1+\frac{x^3}{3}$$

$$P^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}_{4,0}(x)=1+\frac{x^2}{2!}-3\frac{x^4}{4!}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$$

$$P^f_{4,0}(x)=2\left(x+\frac{x^4}{3}\right)+2\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)-2-2x-x^2=$$
$$=2x+\frac{2}{3}x^4+2+x^2-\frac{x^4}{4}-2-2x-x^2=\frac{5}{12}x^4\quad(1.21)$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan x - \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \frac{x^4}{2}}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{6,0}^f(x)}{x^6} \overset{Ec.\ 1{,}22}{=} \dfrac{1}{24}$
siendo $f(x) = (\tan x - \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \frac{x^4}{2}$.

$$P_{6,0}^{\tan x}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \qquad\qquad P_{6,0}^{\operatorname{sen} x}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P_{6,0}^f(x) &= \left[\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right]_{n=6} - \frac{1}{2}x^4 \\ &= \cancel{\frac{1}{2}x^4} - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{8}x^6 - \cancel{\frac{1}{2}x^4} = \frac{x^6}{24} \end{aligned} \tag{1.22}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)\operatorname{sen} x - x^2 + x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{3,0}^f(x)}{x^3} \overset{Ec.\ 1{,}23}{=} \dfrac{1}{2}$
siendo $f(x) = \ln(1+x)\operatorname{sen} x - x^2 + x^3$.

$$P_{3,0}^{\ln(1+x)}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$P_{3,0}^{\operatorname{sen} x}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_{3,0}^f(x) = \left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - x^2 + x^3\right]_{n=3} = x^2 - \frac{x^3}{2} - x^2 + x^3 = \frac{x^3}{2} \tag{1.23}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$
Sea $f(x) = \ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2(x)$ y $g(x) = 1 - e^{-x^2}$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{g(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{P_{2,0}^f(x)}{x^2}}{\frac{P_{2,0}^g(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{1} = 0$$

donde he usado que:

$$P_{2,0}^f(x) = \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 - x^2\right]_{\text{truncado en } n=2} = 0$$

$$P_{2,0}^g(x) = \left[1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!}\right)\right]_{\text{truncado en } n=2} = x^2$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{n,0}^f(x)}{x^n} \overset{Ec.\ 1{,}24}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^n} = 0$
siendo $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

$$P_{n,0}^f(x) = P_{n,0}^{e^x}(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 0 \tag{1.24}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{n,0}^f(x)}{x^n} \overset{Ec.\ 1,25}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^n}{n!}}{x^n} = \dfrac{1}{n!}$
siendo $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.

$$P_{n,0}^f(x) = P_{n,0}^{e^x}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^n}{n!} \tag{1.25}$$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{4,0}^f(x)}{x^4} \overset{Ec.\ 1,26}{=} \dfrac{1}{4!}$
siendo $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

$$P_{4,0}^f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^4}{4!} \tag{1.26}$$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - x^2}$

Sea $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x$ y $g(x) = e^x - 1 - x - x^2$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{g(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{P_{2,0}^f(x)}{x^2}}{\frac{P_{2,0}^g(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+\frac{x^2}{2}}{x^2}}{\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

donde he usado que:

$$P_{2,0}^f(x) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} - x\right]_{\text{truncado en } n=2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$P_{2,0}^g(x) = \left[1 + x + x\frac{x^2}{2} - 1 - x - x^2\right]_{\text{truncado en } n=2} = -\frac{x^2}{2}$$

Ejercicio 1.3.8. Estudiar el comportamiento en 0 y en $\pm\infty$ de la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$, para cada $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{P_{6,0}}{x^6} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\left(x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_{n=6}}{x^6} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)\right]_{n=6}}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3!\cdot 3!}}{x^6} = \frac{1}{3!\cdot 3!} = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x}\left(\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^5}\right) = \\ = \overset{L'H\hat{o}pital}{\cdots} = 1\cdot\infty = \infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x}\left(\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^5}\right) =$$
$$= 1\cdot 0 = 0$$

Ejercicio 1.3.9. Probar que $1-\dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ para todo $x \in [0,\pi]$

Demostramos haciendo uso del resto de Taylor. Sabemos que:

$$\cos x = P_{n,0}^{\cos x}(x) + R_{n,0}^{\cos x}(x) \tag{1.27}$$

Demuestro en primer lugar la primera desigualdad. La ecuación 1.27 para $n=2$ queda como:

$$\cos x = P_{2,0}^{\cos x}(x) + R_{2,0}^{\cos x}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos'''(c)}{3!}x^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(c)}{3!}x^3 \quad \text{para algún } c\in[0,x]$$

Por tanto,

$$\cos x - \left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \cancel{1-\frac{x^2}{2}} + \frac{\operatorname{sen}(c)}{3!}x^3 - \cancel{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{3!}x^3 \geq 0$$

ya que $c\in[0,x]\subseteq[0,\pi]$, y el seno en dicho intervalo es ≥ 0. Además, como $x\in[0,\pi]\subset\mathbb{R}_0^+$, también es ≥ 0. Por tanto, como es ≥ 0, se demuestra la primera desigualdad.

Demuestro ahora la segunda desigualdad. La ecuación 1.27 para $n=4$ queda como:

$$\cos x = P_{4,0}^{\cos x}(x) + R_{4,0}^{\cos x}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\cos(x)^{5)}(c)}{5!}x^5 =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\operatorname{sen}(c)}{5!}x^5 \quad \text{para algún } c\in[0,x]$$

Por tanto,

$$\cos x - \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right) = \cancel{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}} - \frac{\operatorname{sen}(c)}{5!}x^5 - \cancel{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)} = -\frac{\operatorname{sen}(c)}{5!}x^5 \leq 0$$

ya que $c\in[0,x]\subseteq[0,\pi]$, y el seno en dicho intervalo es ≥ 0. Además, como $x\in[0,\pi]\subset\mathbb{R}_0^+$, no cambia el signo. Por tanto, como es ≤ 0, se demuestra la segunda desigualdad.

Ejercicio 1.3.10. Calcular el polinomio de Taylor de orden 8 en el punto $x=0$ de la función $\ln(1+x^4)$.

Obtengo en primer lugar el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x=0$ de la función $f(x)=\ln(1+x)$.

$$P_{2,0}^f(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, sabiendo que la función pedida es $f(x^4)=\ln(1+x^4)$

$$P_{8,0}^{\ln(1+x^4)}(x) = P_{2\cdot4,0}^f(x^4) = x^4 - \frac{x^{2\cdot4}}{2} = x^4 - \frac{x^8}{2}$$

Ejercicio 1.3.11. Calcular un valor aproximado, con un error menor que 10^{-2} de los siguientes números reales:

1. $\sqrt[3]{7}$
   Vamos a aproximar el valor mediante el desarrollo de Taylor de la exponencial de base 7.

$$\sqrt[3]{7} \approx P_{n,0}^{7^x}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Veamos el valor de la derivada n-ésima de la exponencial de base 7:

$$7^x = e^{x\ln(7)} \Longrightarrow (7^x)' = 7^x \ln(7)$$

Por inducción se demuestra fácilmente que $\frac{d^n}{dx^n}7^x = (7^x)^{n)} = 7^x \ln^n(7)$

Para saber de qué orden debe ser la aproximación, establecemos la condición de que el error debe ser menor que 10^{-2}. El error viene dado por:

$$R_{n,0}^{7^x}(x) = \frac{(7^x)^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{7^c \cdot \ln^{n+1}(7)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{para algún } c \in]0, x[$$

Como estamos evaluando en $x = \frac{1}{3}$, y sabiendo que la exponencial de base 7 es estrictamente creciente, tenemos el siguiente resultado:

$$0 < c < \frac{1}{3} \Longrightarrow 1 = 7^0 < 7^c < 7^{1/3} < 8^{1/3} = 2 \Longrightarrow 7^c < 2$$

Como nos piden que el error sea menor a 10^{-2}, la inecuación a resolver es:

$$R_{n,0}^{7^x}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7^c}{(n+1)!}\frac{1}{3^{n+1}} < 10^{-2}$$

Usando la condición de que $7^c < 2$:

$$R_{n,0}^{7^x}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7^c \cdot \ln^{n+1}(7)}{(n+1)!}\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{2 \cdot \ln^{n+1}(7)}{(n+1)!}\frac{1}{3^{n+1}} < 10^{-2}$$

Por tanto, resuelvo la siguiente inecuación para hallar el valor de n:

$$\frac{2 \cdot \ln^{n+1}(7)}{(n+1)!}\frac{1}{3^{n+1}} < 10^{-2} \Longrightarrow 200 < \frac{(n+1)! \cdot 3^{n+1}}{\ln^{n+1}(7)}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que $n = 4$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más.

Por tanto, con $n = 4$, el resultado queda:

$$\sqrt[3]{7} \approx P_{4,0}^{7^x}\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{\ln 7}{3} + \frac{\ln^2 7}{3^2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 7}{3^3 \cdot 3!} + \frac{\ln^4 7}{3^4 \cdot 4!}$$

2. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$
   Vamos a aproximar el valor mediante el desarrollo de Taylor del seno.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right)$$

El error viene dado por:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}(x) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{para algún } c \in]0, x[$$

Como estamos evaluando en $x = \frac{1}{2}$, y sabiendo que el seno y el coseno están acotados entre -1 y 1, tenemos el siguiente resultado:

$$-1 < \operatorname{sen}^{n+1)}(c) < 1$$

Como nos piden que el error sea menor a 10^{-2}, la inecuación a resolver es:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Usando la condición de que $\operatorname{sen} c < 1$:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Por tanto, resuelvo la siguiente inecuación para hallar el valor de n:

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 100 < (n+1)!2^{n+1}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que $n = 3$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más. Por tanto, con $n = 3$, el resultado queda:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_{3,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{23}{48}$$

3. $\ln 3$
   Vamos a aproximar el valor mediante el desarrollo de Taylor del $\ln(x)$ centrado en $a = e$.

$$\ln 3 \approx P_{n,e}^{\ln}(3)$$

Veamos el valor de la derivada n-ésima del $\ln x$. Por inducción se demuestra fácilmente que:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Para saber de qué orden debe ser la aproximación, establecemos la condición de que el error debe ser menor que 10^{-2}. El error viene dado por:

$$R_{n,e}^{\ln x}(x) = \frac{(-1)^n \frac{n!}{c^{n+1}}}{(n+1)!}(x-e)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\frac{x-e}{c}\right)^{n+1} \quad \text{para algún } c \in]e, x[$$

Por tanto, como $e < c < 3$

$$R_{n,e}^{\ln x}(3) = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\frac{3-e}{c}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{3-e}{e}\right)^{n+1}$$

Como nos piden que el error sea menor a 10^{-2}, la inecuación a resolver es:

$$R_{n,e}^{\ln x}(3) = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\frac{3-e}{c}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{3-e}{e}\right)^{n+1} < 10^{-2}$$

Por tanto, resuelvo la siguiente inecuación para hallar el valor de n:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{3-e}{e}\right)^{n+1} < 10^{-2}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que $n = 1$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más.

Por tanto, con $n = 1$, el resultado queda:

$$\ln(3) \approx P_{1,e}^{\ln x}(3) = \ln e + \frac{1}{3}(3-e) = 1 + \frac{3-e}{3}$$

4. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$
   Vamos a aproximar el valor mediante el desarrollo de Taylor del seno.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right)$$

El error viene dado por:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}(x) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{para algún } c \in]0, x[$$

Como estamos evaluando en $x = \frac{1}{2}$, y sabiendo que el seno y el coseno están acotados entre -1 y 1, tenemos el siguiente resultado:

$$-1 < \operatorname{sen}^{n+1)}(c) < 1$$

Como nos piden que el error sea menor a 10^{-2}, la inecuación a resolver es:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Usando la condición de que $\operatorname{sen} c < 1$:

$$R_{n,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Por tanto, resuelvo la siguiente inecuación para hallar el valor de n:

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 100 < (n+1)!2^{n+1}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que $n = 3$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más. Por tanto, con $n = 3$, el resultado queda:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_{3,0}^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{23}{48}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ y hemos supuesto que es par, podemos ver que $n = 3$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más. Por tanto, con $n = 3$, el resultado queda:

$$\sqrt{e} \approx P_{3,0}^{e^x}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$$

5. $\sqrt{e}$

Vamos a aproximar el valor mediante el desarrollo de Taylor de la exponencial.

$$\sqrt{e} \approx P_{n,0}^{e^x}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Para saber de qué orden debe ser la aproximación, establecemos la condición de que el error debe ser menor que 10^{-2}. El error viene dado por:

$$R_{n,0}^{e^x}(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{para algún } c \in]0, x[$$

Como estamos evaluando en $x = \frac{1}{2}$, y sabiendo que la exponencial es estrictamente creciente, tenemos el siguiente resultado:

$$0 < c < \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 = e^0 < e^c < e^{1/2} < 2 \Longrightarrow e^c < 2$$

Como nos piden que el error sea menor a 10^{-2}, la inecuación a resolver es:

$$R_{n,0}^{e^x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Usando la condición de que $e^c < 2$:

$$R_{n,0}^{e^x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2}$$

Por tanto, resuelvo la siguiente inecuación para hallar el valor de n:

$$\frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{(n+1)!2^{n}} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 100 < (n+1)!2^{n}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que $n = 3$ satisface la inecuación. Para valores mayores de n la aproximación será mejor, pero para obtener error menor al pedido no es necesario más. Por tanto, con $n = 3$, el resultado queda:

$$\sqrt{e} \approx P_{3,0}^{e^x}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$$

Ejercicio 1.3.12. Probar que la función $\ln x$ es cóncava hacia abajo. Deducir la Desigualdad de Young: si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siendo $p > 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, para cada $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Demuestro en primer lugar que $f(x) = \ln x$ es cóncava hacia abajo.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Como $f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}^+$.

Por tanto, si $x < y$ tenemos que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Demostramos ahora la Desigualdad de Young. Sea el cambio de variable $x = a^p$ y $y = b^q$.

- Suponemos $a^p < b^q$.

  Sea el cambio de variable $t = \frac{1}{p}$. Por tanto, como $t \in [0, 1]$, necesitamos que $p \geq 1$ (se tiene, ya que $p > 1$). Además, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tenemos que $(1-t) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Por tanto:

  $$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}} = \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

  Por tanto, como ln es una función creciente, tenemos que

  $$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

  Es decir, para $a^p < b^q$ se cumple la desigualdad.

- Suponemos $a^p > b^q$.

  Sea el cambio de variable $t = \frac{1}{q}$. Por tanto, como $t \in [0, 1]$, necesitamos que $q \geq 1$. Veamos que se da. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tenemos que:

  $$q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \geq 1 \Longleftrightarrow p \geq p - 1 \text{ cierto}$$

  Por tanto, tenemos que $q \geq 1$. Sabiendo que $t = \frac{1}{q}$, tenemos que $1 - t = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Por tanto:

  $$\ln\left(\frac{1}{q}b^q + \frac{1}{p}a^p\right) \geq \frac{1}{q}\ln(b^q) + \frac{1}{p}\ln(a^p) = \ln(b^q)^{\frac{1}{q}} + \ln(a^p)^{\frac{1}{p}} = \ln b + \ln a = \ln(ab)$$

Por tanto, como ln es una función creciente, tenemos que

$$\frac{1}{q}b^q + \frac{1}{p}a^p = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Es decir, para $a^p > b^q$ se cumple la desigualdad.

- Suponemos $a^p = b^q$.

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p$$

Por tanto, para $a^p = b^q$ hemos de comprobar que $a^p \geq ab$. Sabemos, lo siguiente:

$$a^p = b^q \Longrightarrow p = \log_a(b^q) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$a^p = b^q \Longrightarrow a^p = b^{\frac{p}{p-1}} \Longrightarrow p = \frac{p}{p-1}\log_a b \Longrightarrow \log_a b = p - 1$$

Por tanto, usando las tres ecuaciones anteriores,

$$a^p \geq ab \Longleftrightarrow p \geq \log_a(ab) = 1 + \log_a(b) = 1 + p - 1 = p \Longleftrightarrow p \geq p$$

Por tanto, para $a^p = b^q$ se da la desigualdad.

Ejercicio 1.3.13. Sean I, J intervalos, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones cóncavas hacia arriba tales que $f(I) \subseteq J$. Probar que si g es creciente, entonces $g \circ f$ es cóncava hacia arriba. Deducir que la función $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{f(x)}$ es cóncava hacia arriba.

Como la función f es cóncava hacia arriba, dados $a, b \in I \mid a < b$, tenemos que:

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \qquad \forall t \in [0,1]$$

Como $f(I) \subset J$, entonces puedo aplicar g al primer lado de la desigualdad. Veamos ahora que el segundo lado de la desigualdad también pertenece a J.

Supongamos, sin perder generalidad, que $f(a) \leq f(b)$. Entonces, es fácil ver que $[f(a), f(b)] \subset J$. Entonces,

$$f(a) = tf(a) + (1-t)f(a) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq tf(b) + (1-t)f(b) = f(b)$$

Por tanto, $tf(a) + (1-t)f(b) \in [f(a), f(b)] \subset J$, por lo que puedo aplicar g también al segundo lado de la desigualdad. Además, como sé que g es una función creciente, el sentido de la desigualdad se conserva. Por tanto,

$$(g \circ f)(ta + (1-t)b) = g(f(ta + (1-t)b)) \leq g(tf(a) + (1-t)f(b)) \qquad \forall t \in [0,1]$$

Aplicamos ahora que g es cóncava hacia arriba.

- Supuesto $f(a) < f(b)$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(ta+(1-t)b) \leq g(tf(a)+(1-t)f(b)) &\overset{(1)}{\leq} tg(f(a))+(1-t)g(f(b)) = \\ &= t(g\circ f)(a)+(1-t)(g\circ f)(b) \qquad \forall t\in[0,1]\end{aligned}$$

donde en (1) he aplicado que g es cóncava hacia arriba. Por tanto, tenemos que $g\circ f$ es cóncava hacia arriba.

- Supuesto $f(a) > f(b)$

Realizo el cambio de variable $s = 1-t$. Tenemos que $s\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(ta+(1-t)b) &\leq g(tf(a)+(1-t)f(b)) = g(sf(b)+(1-s)f(a)) \overset{(1)}{\leq} \\ &\overset{(1)}{\leq} sg(f(b))+(1-s)g(f(a)) = s(g\circ f)(b)+(1-s)(g\circ f)(a) = \\ &= t(g\circ f)(a)+(1-t)(g\circ f)(b) \qquad \forall t\in[0,1]\end{aligned}$$

donde en (1) he aplicado que g es cóncava hacia arriba. Por tanto, tenemos que $g\circ f$ es cóncava hacia arriba.

- Supuesto $f(a) = f(b)$ Tenemos que f es constante, por lo que $g\circ f$ también lo es. Por tanto, como las funciones constantes son cóncavas hacia arriba y hacia abajo, se tiene.

Respecto a la función $h(x) = e^{f(x)}$, estamos en las condiciones del enunciado con $g(x) = e^x$. Por tanto, tenemos que la composición también es cóncava hacia arriba.

Ejercicio 1.3.14. Dar un ejemplo que muestre que la composición de dos funciones cóncavas hacia arriba puede no ser cóncava hacia arriba.

Sean $f(x) = x^2-4$ y $g(x) = |x|$ definidas en $\mathbb{R}$. Ambas son funciones cóncavas hacia arriba. Sin embargo, $(g\circ f)(x) = |x^2-4|$ no es cóncava hacia arriba, ya que su restricción a $[-2,2]$ es cóncava hacia abajo.

Ejercicio 1.3.15. En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

1. $f(x) = x^5-5x^4+5x^3+10$

$$f'(x) = 5x^4-20x^3+15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3-60x^2+30x = 10x(2x^2-6x+3) = 10x\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-x\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}-x\right)$$

Sabemos que f derivable en $\mathbb{R}$, por lo que los únicos candidatos a puntos de inflexión son los que anulan la segunda derivada, es decir, $\left\{0, \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Veamos si efectivamente son puntos de inflexión:

   - Para $x<0$: $f''(x)<0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.

- Para $0 < x < \frac{3-\sqrt{3}}{2}$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.
- Para $\frac{3-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $x > \frac{3+\sqrt{3}}{2}$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

Como en los 3 candidatos a punto de inflexión se produce un cambio de concavidad, tenemos que efectivamente son todos los puntos de inflexión.

2. $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+1) - 2x(x^2+3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x} + 3x^2 + 3 - \cancel{2x^3} - 6x^2 - \cancel{2x}}{(x^2+1)^2} = \\ = \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 3\cdot \frac{-2x(1+x^2)^{\cancel{2}} - 4x(1-x^2)\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = 3\cdot\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3} = \\ = 3\cdot\frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3} = 6x\cdot\frac{x^2-3}{(1+x^2)^3}$$

Además, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto, los candidatos a puntos de inflexión son aquellos que anulan la segunda derivada, es decir, $\{0, \pm\sqrt{3}\}$.

- Para $x < -\sqrt{3}$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $-\sqrt{3} < x < 0$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.
- Para $0 < x < \sqrt{3}$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $x > \sqrt{3}$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

Como en los 3 candidatos a punto de inflexión se produce un cambio de concavidad, tenemos que efectivamente son todos los puntos de inflexión.

3. $f(x) = \ln(1+x^2)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad f''(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$$

Además, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto, los únicos candidados a puntos de inflexión son los puntos que anulan la segunda derivada, es decir, $\{\pm 1\}$.

- Para $x < -1$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $-1 < x < 1$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

- Para $x > 1$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.

Como en los dos candidatos a punto de inflexión se produce un cambio de concavidad, tenemos que efectivamente son todos los puntos de inflexión.

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = 0 \Longleftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Además, sabemos que $\operatorname{sen} x \in C^\infty$, por lo que los dados son todos los candidatos a puntos de inflexión. Para ver los intervalos, hago uso de que tiene periodicidad con periodo $T = 2\pi$. Estudio, por tanto, en $[0, 2\pi]$:

- Para $0 < x < \pi$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $\pi < x < 2\pi$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

Generalizando para todo el dominio, para $k \in \mathbb{Z}$,

- Para $2k\pi < x < (2k+1)\pi$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.
- Para $(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

Por tanto, como en todos los candidatos se produce un cambio de concavidad, efectivamente los puntos de inflexión son:
$$x = \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejercicio 1.3.16. Demostrar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava hacia abajo y acotada es constante.

Demostramos mediante reducción al absurdo. Suponemos que f no es constante. Por tanto, $\exists x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y \land f(x) < f(y)$.

- Para $x < y$:
$$f(x) = f\left(t \cdot \frac{x-(1-t)y}{t} + (1-t)y\right) \geq tf\left(\frac{x-(1-t)y}{t}\right) + (1-t)f(y) \qquad \forall t \in]0,1]$$
Despejando,
$$\frac{f(x)-(1-t)f(y)}{t} = \frac{f(x)-f(y)}{t} + f(y) \geq f\left(\frac{x-(1-t)y}{t}\right)$$
Tomando límite con $t \to 0^+$, tenemos que
$$\frac{f(x)-f(y)}{t} + f(y) \longrightarrow -\infty$$
Por tanto, para $t \approx 0$, tenemos que:
$$-\infty \geq f\left(\frac{x-(1-t)y}{t}\right)$$
Por lo que f no tiene cota inferior, en contradicción con que f sea acotada.

- Para $x > y$:

$$f(x) = f\left((1-t')\cdot\frac{x-(t')y}{1-t'} + t'y\right) \geq (1-t')f\left(\frac{x-t'y}{1-t'}\right) + t'f(y) \qquad \forall t' \in [0,1[$$

Despejando,
$$\frac{f(x)-t'f(y)}{1-t'} \geq f\left(\frac{x-t'y}{1-t'}\right)$$
Tomando límite con $t' \to 1^-$, tenemos que
$$\frac{f(x)-t'f(y)}{1-t'} \longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{0^+} = -\infty$$

Por tanto, para $t' \approx 1$, tenemos que:
$$-\infty \geq f\left(\frac{x-t'y}{1-t'}\right)$$

Por lo que f no tiene cota inferior, en contradicción con que f sea acotada.

Por tanto, concluimos que f es constante.

Ejercicio 1.3.17. Calcular los puntos de inflexión (si los hay) de las funciones:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[5]{(x+2)^3}}$$

   Sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}-\{-2\}$. Por tanto, como no hay puntos que anulen la segunda derivada, y una condición necesaria para que $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ sea punto de inflexión es que $f''(c) = 0$, tenemos que no hay puntos de inflexión en $\mathbb{R}-\{-2\}$.

   Estudiamos para $x = -2$, ya que f no es derivable en $x = -2$.

   - Para $x < -2$: $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
   - Para $x > -2$: $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

   Por tanto, como en $x = -2$ se produce un cambio de concavidad, tenemos que $x = -2$ es un punto de inflexión.

2. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 2x + 1$
$$f'(x) = 6x^2 + 18x + 2$$
$$f''(x) = 12x + 18 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

   Además, como $f'''(x) = 12 \neq 0\ \forall x$, el candidato a punto de inflexión efectivamente lo es. Además, no hay más puntos de inflexión por ser f derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.3.18. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función cóncava hacia arriba. Probar que:

1. Si f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in I$ entonces f tiene un mínimo absoluto en x_0.

   Sea $a \in I$ el mínimo absoluto; es decir, $f(a) < f(x) \quad \forall x \in I$. Dividimos la demostración en dos partes.

   Supuesto $x_0 < a$, por ser f cóncava hacia arriba, tenemos que
   $$f(tx_0 + (1-t)a) \leq tf(x_0) + (1-t)f(a) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Entonces, como $f(a) < f(x_0)$, tenemos:
   $$f(tx_0+(1-t)a) \leq tf(x_0)+(1-t)f(a) < tf(x_0)+(1-t)f(x_0) = f(x_0) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Por tanto,
   $$f(tx_0 + (1-t)a) < f(x_0) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Para $t \to 1$, tenemos que $tx_0 + (1-t)a \to x_0$. Por tanto, para $t \approx 1$, tenemos que
   $$\exists r > 0 \mid tx_0 + (1-t)a \in]x_0 - r, x_0 + r[, \text{ con } f(tx_0 + (1-t)a) < f(x_0)$$
   Esto, sin embargo, contradice que x_0 sea un mínimo relativo, por lo que $x_0 \geq a$.

   Supongamos ahora que $a < x_0$. Por ser f cóncava hacia arriba, tenemos que
   $$f(ta + (1-t)x_0) \leq tf(a) + (1-t)f(x_0) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Entonces, como $f(a) < f(x_0)$, tenemos:
   $$f(ta+(1-t)x_0) \leq tf(a)+(1-t)f(x_0) < tf(x_0)+(1-t)f(x_0) = f(x_0) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Por tanto,
   $$f(ta + (1-t)x_0) < f(x_0) \qquad \forall t \in [0,1]$$
   Para $t \to 0$, tenemos que $ta + (1-t)x_0 \to x_0$. Por tanto, para $t \approx 0$, tenemos que
   $$\exists r > 0 \mid ta + (1-t)x_0 \in]x_0 - r, x_0 + r[, \text{ con } f(ta + (1-t)x_0) < f(x_0)$$
   Esto, sin embargo, contradice que x_0 sea un mínimo relativo. Por tanto, $a \geq x_0$.

   Uniendo ambos resultados, tenemos que $x_0 = a$. Por tanto, x_0 es el mínimo absoluto.

2. Si f es derivable en I y $x_0 \in I$ es un punto crítico de f entonces f alcanza un mínimo absoluto en x_0.

   Sabiendo f es derivable en I y x_0 es un punto crítico; por la condición necesaria de punto crítico tenemos que $f'(x_0) = 0$.

   Como f es cóncava hacia arriba y es derivable, tenemos que $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$. Por tanto, f' es creciente.

   - Supuesto $x < x_0 \Longrightarrow f'(x) \leq f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f$ decreciente.
   - Supuesto $x > x_0 \Longrightarrow f'(x) \geq f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f$ creciente.

   Por tanto, como en x_0 se produce un cambio de crecimiento, es un mínimo relativo. Como es el único extremo relativo, es el extremo absoluto.

1.4. Continuidad Uniforme

Proposición. *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *uniformemente continua en* A *y* $\emptyset \neq B \subseteq A$ *entonces* f *es uniformemente continua en* B.

Proposición. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$, *y dado* $a \in I$. *Si* f *es uniformemente continua en* $I \cap]-\infty, a[$ *y en* $I \cap]a, +\infty[$ *y* f *continua en* a, *entonces* f *uniformemente continua en* I.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1, \delta_2, \delta_3$ tales que:

- Si $x, y \in I \cap]-\infty, a[$ con $|x-y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- Si $|x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$
- Si $x, y \in I \cap]a, +\infty[$ con $|x-y| < \delta_3 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_2\}$. Si $|x-y| < \delta$, hay tres posibilidades:

1. $x, y < a \Longrightarrow x, y \in]-\infty, a[\Longrightarrow f$ uniformemente continua en dicho intervalo.
2. $x, y > a \Longrightarrow x, y \in]a, +\infty[\Longrightarrow f$ uniformemente continua en dicho intervalo.
3. $x \leq a \leq y \Longrightarrow x \in I \cap]-\infty, a[, y \in I \cap]a, +\infty[$
   Como $|x-y| = y-x < \delta \Longrightarrow \begin{cases} |x-a| = a-x \leq y-x < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |a-y| = y-a \leq y-x < \delta \Longrightarrow |f(a)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

   Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |f(x)-f(a)+f(a)-f(y)| \leq \\ &\leq |f(x)-f(a)| + |f(a)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

   Por tanto, si $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \Longrightarrow f$ es uniformemente continua en este caso.

□

Ejercicio 1.4.1. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas en A. Probar que $f+g$ también es uniformemente continua en A. Si adicionalmente las funciones f y g están acotadas en A, demostrar que entonces fg también es uniformemente continua en A.

Demostramos en primer lugar que $f+g$ es uniformemente continua.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, como f, g son uniformemente continuas, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si:

$$\begin{array}{l} |x-y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x-y| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Si\ |x-y| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} &\Longrightarrow |f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))| \leq \\ &\leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto, $f+g$ es uniformemente continua.

Supuestas f, g acotadas en A, veamos ahora que fg es uniformemente continua.

Como f está acotada, sea M_1 tal que $|f(x)| \leq M_1\ \forall x \in A$.

Como g está acotada, sea M_2 tal que $|g(x)| \leq M_2\ \forall x \in A$.

Sea δ_1 el asociado a $\frac{\varepsilon}{2M_1}$ para la continuidad uniforme de f en A.

$$\text{Si } |x-y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

Sea δ_2 el asociado a $\frac{\varepsilon}{2M_2}$ para la continuidad uniforme de g en A.

$$\text{Si } |x-y| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, por la Ec. 1.28,

$$\text{Si } |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\
&\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \leq \\
&\leq M_1|g(x) - g(y)| + M_2|f(x) - f(y)| \leq M_1\frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2\frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Observación. $f(x) = x$ sí es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, pero no podemos asegurar que $g(x) = x^2$ lo sea, ya que $\mathbb{R}$ no está acotado. De hecho, no lo es.

Ejercicio 1.4.2. Probar que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Se pide demostrar lo siguiente:

Supuesto $B \subseteq A$ acotado, es decir, $|x| \leq M\ \forall x \in B$, entonces $f(B)$ está acotado, es decir, $\exists \hat{M}$ con $|f(x)| \leq \hat{M}\ \forall x \in B$. En particular, si A está acotado y f es uniformemente continua entonces $f(A)$ está acotado.

Demostración. Demostramos mediante reducción al absurdo.

Supongamos $B \subseteq A$ acotado pero $f(B)$ no mayorado.

Entonces consideramos la sucesión $\{b_n\} \subseteq B$ acotado tal que

$$f(b_{n+1}) = f(b_n) + \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_0 > 0 \text{ fijo}$$

Definir de esta forma $\{b_n\}$ siempre es posible, ya que $f(B)$ no está mayorado. Por tanto, siempre podremos encontrar un elemento de B con una imagen mayor, definiendo así $\{b_n\}$.

Además, como $\{b_n\} \subset B$ acotado, entonces $\{b_n\}$ admite una parcial convergente. Es decir, $\exists \sigma$ parcial tal que $\{b_{\sigma(n)}\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}$. Además, tenemos también que $\{b_{\sigma(n+1)}\} \longrightarrow L$.

Por tanto, tenemos que

$$\{b_{\sigma(n+1)}\} - \{b_{\sigma(n)}\} \longrightarrow L - L = 0$$

No obstante,

$$|f(b_{\sigma(n+1)}) - f(b_{\sigma(n)})| = |f(b_{\sigma(n)}) + \varepsilon_0 - f(b_{\sigma(n)})| = \varepsilon_0 > 0$$

Por tanto, tenemos que f no es uniformemente continua, llegando por tanto a una contradicción, por lo que $f(B)$ mayorado.

Si hubiésemos supuesto que $f(B)$ no minorado, el procedimiento es análogo pero

$$f(b_{n+1}) = f(b_n) - \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_0 > 0$$

demostrando así que $f(B)$ minorado. □

Observación. Las funciones continuas transforman cerrados y acotados en cerrados y acotados. Las uniformemente continuas transforman acotados en acotados (algo que no ocurre con las continuas).

Esto prueba que la función $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua, ya que $Im(f) = [1, +\infty[$.

De no disponer de esta herramienta, habría que encontrar $x_n,\ y_n$ con $\{x_n - y_n\} \to 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. En este caso, un ejemplo sería

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad y_n = \frac{1}{n+1} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| = |-1| = 1$$

Ejercicio 1.4.3. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Dado $r > 0$, probar que la restricción de f a $[r, +\infty[$ es lipschitziana, mientras que la restricción de f a $]0, r]$ no es uniformemente continua. ¿Sucede lo mismo con $g(x) = \ln x$?

Su derivada es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Sé que $f'([r, +\infty[) =]0, -\frac{1}{r^2}]$ está acotado, por lo que es lipschitziana en $[r, +\infty[$.

Sin embargo, no es uniformemente continua en $]0, r]$ ya que $f(]0, r])$ no está acotado y $]0, r]$ acotado. Como transforma conjuntos acotados en no acotados, no es uniformemente continua.

Veamos ahora el caso de $g(x) = \ln x$. Si fuese $\ln(x)$ uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$, también lo sería en $]0, r]$ y en consecuencia, tendría que $\ln(]0, r])$ acotado y no lo es. Como conclusión, el $\ln x$ no es uniformemente continua en $]0, r]$ y por tanto no lo puede ser en $\mathbb{R}^+$. Sin embargo sí es lipschitziana en $[r, +\infty[\ \forall r > 0$. Por tanto, sí sucede lo mismo con $g(x) = \ln x$.

Ejercicio 1.4.4. Sea I un intervalo no trivial ($I \neq \emptyset,\ I \neq \{a\},\ I \neq \pm\mathbb{R}$). Probar que si todas las funciones continuas en I son uniformemente continuas en I entonces I es un intervalo cerrado y acotado.

Esto es, en el Teorema de Heine no podemos reemplazar $[a, b]$ por otro intervalo I.

Dado $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$, los tipos de intervalos no triviales que hay definidos son: $[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[, [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, b],]-\infty, b[$.

1. $I = [a, b[\quad I' =]a, b[\quad I'' =]-\infty, b[$
   Sea $f(x) = \frac{1}{b-x}$. Las imágenes son:

$$f(I) = [f(a), +\infty[\quad f(I') =]f(a), +\infty[$$

f es continua en I, I', I''.

f no es uniformemente continua en I, I', ya que el dominio es acotado pero la imagen no, es decir, no transforma conjuntos acotados en acotados.

Además, tampoco es uniformemente continua en $I'' =]-\infty, b[$, pues de serlo también lo sería en $I, I' \subset I''$.

Por tanto, como $\exists f$ continua que no es uniformemente continua, estos intervalos quedan descartados.

2. $I =]a, b] \quad I' =]a, +\infty[$
   Sea $f(x) = \frac{1}{a-x}$. Las imágenes son:

   $$f(I) =]-\infty, f(b)]$$

   f es continua en I.

   f no es uniformemente continua en I, ya que el dominio es acotado pero la imagen no, es decir, no transforma conjuntos acotados en acotados.

   Además, tampoco es uniformemente continua en $I' =]a, +\infty[$, pues de serlo también lo sería en $I \subset I'$.

   Por tanto, como $\exists f$ continua que no es uniformemente continua, estos intervalos quedan descartados.

3. $I = [a, +\infty[\quad I' =]a, +\infty[$

   Este contraejemplo es válido para los conjuntos no mayorados. La función $f(x) = x^2$ es continua en los intervalos I, I'.

   No obstante, sean las sucesiones

   $$\{x_n\} = n + \frac{1}{n} \qquad \{y_n\} = n$$

   Tenemos que:

   $$x_n - y_n = n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} \to 0$$

   $$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 + 2\frac{n}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2 \right| = \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| > 2$$

   Por tanto, como $\exists f$ continua que no es uniformemente continua, estos intervalos quedan descartados.

4. $I =]-\infty, b] \quad I' =]-\infty, b[$

   Este contraejemplo es válido para los conjuntos no minorados. La función $f(x) = x^2$ es continua en los intervalos I, I'.

   No obstante, sean las sucesiones

   $$\{x_n\} = -n - \frac{1}{n} \qquad \{y_n\} = -n$$

Tenemos que:

$$x_n - y_n = -n - \frac{1}{n} + n = -\frac{1}{n} \to 0$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 + 2\frac{n}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2 \right| = \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| > 2$$

Por tanto, como $\exists f$ continua que no es uniformemente continua, estos intervalos quedan descartados.

5. $I = [a, b]$
   Por el Teorema de Heine, en este caso continuidad uniforme y continuidad son equivalentes, por lo que es el único caso en el que se cumple.

Ejercicio 1.4.5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $r > 0$. Probar que si la restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq r\}$ es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.

Sabemos que f es uniformemente continua en $[-r, r]$ por Heine. También, el enunciado nos afirma que f es uniformemente continua en $]-\infty, -r]$ y en $[r, +\infty[$.

Por la proposición 1.4 (la herramienta de "pegado"), f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Veamos el proceso.

En primer lugar, demuestro que es uniformemente continua en $]-\infty, r]$. Para ello, es necesario usar que f es continua en $-r$ y que es uniformemente continua en $]-\infty, -r], [-r, r]$.

Una vez tenemos que es uniformemente continua en $]-\infty, r]$, vemos que lo es en $\mathbb{R}$. Para ello, es necesario usar que f es continua en r y que es uniformemente continua en $]-\infty, r], [r, +\infty]$.

Usando dos veces la proposición 1.4, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.4.6. Sea $a < b$ y $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\exists \hat{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}\big|_{]a,b[} = f$.

2. f es uniformemente continua en $]a, b[$.

$1 \Longrightarrow 2)$ $\hat{f}$ continua en $[a, b] \overset{Heine}{\Longrightarrow} \hat{f}$ uniformemente continua en $[a, b]$

Por tanto, $\hat{f}_{|]a,b[} = f$ es uniformemente continua en $]a, b[$, por ser restricción de una uniformemente continua.

$2 \Longrightarrow 1)$ Suponemos f uniformemente continua en $]a, b[$

Veamos ahora que $\exists \hat{f}$ continua en los puntos a, b. Sea $\hat{f}$ definida como:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}(a) & si \quad x = a \\ f(x) & si \quad x \in]a, b[\\ \hat{f}(b) & si \quad x = b \end{cases}$$

Para la continuidad en el punto a, es necesario que:

$$\forall x_n \to a,\ x_n \in [a,b] \Longrightarrow \hat{f}(x_n) \to \hat{f}(a)$$

Sea $x_n \longrightarrow a,\ x_n \in]a,b[$. Como $]a,b[\subset \mathbb{R}$ y x_n convergente $\Longrightarrow x_n$ de Cauchy. Por la continuidad uniforme en $]a,b[\Longrightarrow f(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ de Cauchy, y por ende $f(x_n)$ convergente $\Longrightarrow \exists L \in \mathbb{R} \mid f(x_n) \to L$.

Veamos ahora que, dada otra sucesión $y_n \to a,\ \ y_n \in]a,b[$, se cumple que $f(y_n) \to L$. En primer lugar, $f(y_n)$ ha de converger por el mismo razonamiento anterior. Supongamos $f(x_n) \to L' \neq L$. Entonces, tenemos $x_n, y_n \in]a,b[$ con:

$$x_n - y_n \to a - a = 0 \qquad f(x_n) - f(y_n) \to L - L' \neq 0$$

En contradicción con que f es uniformemente continua en $]a,b[$. Por tanto, $L = L'$. Es decir,

$$\forall x_n \to a\ x_n \in]a,b[\Longrightarrow f(x_n) \to L$$

Definiendo $\hat{f}(a) = L$, obtenemos la definición de continuidad en el punto a. Por tanto, $\hat{f}$ es continua en el punto a.

Análogamente, se demuestra que, debido a la continuidad uniforme de f en $]a,b[$, $\hat{f}$ es continua en b.

Por tanto, $\exists \hat{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}_{|]a,b[} = f$.

Observación. Esto también es válido para $]a,b]$ y $[a,b[$

Ejercicio 1.4.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y periódica. Probar que:

1. f está acotada y alcanza (en $\mathbb{R}$) su máximo y su mínimo absoluto.

   Supongamos que el periodo de la función es T. Demostramos en primer lugar que $Im(f) = Im(f\,\big|_{[0,T]})$.

   $$\forall f(x) \in Im(f) \qquad \exists k! \in \mathbb{Z} \mid f(x) = f(x - kT) \text{ con } x - kT \in [0,T[$$

   De hecho, k es el cociente entero de dividir x entre T. El resto, $x-kT$, pertenece a $[0,T[$. Por tanto, $Im(f) \subseteq Im(f\,\big|_{[0,T]})$

   El hecho de que $Im(f\,\big|_{[0,T]}) \subseteq Im(f)$ es trivial, por lo que $Im(f) = Im(f\,\big|_{[0,T]})$.

   Como, por el teorema de Weierstarss, la imagen, por una función continua, de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado, tengo que $Im(f\,\big|_{[0,T]})$ es un intervalo cerrado y acotado.

   Por tanto, como $Im(f) = Im(f\,\big|_{[0,T]})$, tenemos que $Im(f)$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, tenemos que f está acotada y alcanza en $\mathbb{R}$ su máximo y su mínimo absolutos.

2. f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

   Por el Teorema de Heine, tenemos que f es uniformemente continua en $[0,2T]$. Es decir,

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \hat{\delta} > 0 \mid \text{ si } x, y \in [0,2T] \text{ con } |x-y| < \hat{\delta} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sea ahora $\delta = \min\{\hat{\delta}, T\}$. Sea $x, y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \delta$. Supongamos $x < y$ sin pérdida de generalidad. Entonces, como $|x-y| < \delta \leq T$:

$$\exists k! \in \mathbb{Z} \mid \begin{cases} f(x) = f(x-kT) \text{ con } x-kT \in [0,T] \\ f(y) = f(y-kT) \text{ con } y-kT \in [0,2T] \end{cases}$$

Por tanto, como $x-kT, y-kT \in [0,2T]$ y f es uniformemente continua en dicho intervalo,

$$|f(x)-f(y)| = |f(x-kT)-f(y-kT)| < \varepsilon$$

En conclusión, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid \text{ si } |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Por lo que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.4.8. Se dice que dos sucesiones x_n e y_n son *paralelas* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$, para cada $n > n_0$. Demostrar que $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si, y solo si, transforma sucesiones paralelas de A en sucesiones paralelas de $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$) Supongamos f uniformemente continua y veamos que transforma sucesiones paralelas de A en sucesiones paralelas de $\mathbb{R}$.

Sean x_n, y_n ($x_n, y_n \in A$) sucesiones paralelas de A. Es decir,

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{ Si } n > n_0 \Longrightarrow |x_n - y_n| < \hat{\varepsilon} \tag{1.29}$$

Veamos que $f(x_n), f(y_n)$ son sucesiones paralelas de $\mathbb{R}$. Para ello, usamos que f es uniformemente continua, es decir, que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid \text{ si } |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \tag{1.30}$$

Tomando $\hat{\varepsilon} = \delta$, vemos que, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0, n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{ Si } n > n_0 \overset{Ec.\ 1{,}29}{\Longrightarrow} |x_n - y_n| < \delta \overset{Ec.\ 1{,}30}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{ Si } n > n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Es decir, que $f(x_n), f(y_n)$ son paralelas. Además, podemos ver que n_0 es el mismo.

$\Longleftarrow$) Suponemos que f transforma sucesiones paralelas de A en sucesiones paralelas de $\mathbb{R}$, y veamos que f es uniformemente continua.

Por reducción al absurdo, supongamos que f no es uniformemente continua. Es decir, dado $\varepsilon_0 > 0$,

$$\exists x_n, y_n \subseteq A \mid x_n - y_n \to 0 \land |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos ahora que x_n, y_n son paralelas:

$$x_n - y_n \to 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{ Si } n > n_0 \Longrightarrow |x_n - y_n - 0| < \varepsilon$$

No obstante, $f(x_n), f(y_n)$ no son paralelas, ya que dado ε_0 tenemos que:

$$\nexists n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{ Si } n > n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon_0$$

Por tanto, f transforma un par de sucesiones paralelas en un par de sucesiones no paralelas. Esto contradice nuestra hipótesis, por lo que f sí es uniformemente continua.

Ejercicio 1.4.9. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado. Demostrar que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si, y solo si, preserva las sucesiones de Cauchy. ¿Sería cierto el resultado si A no fuese un conjunto acotado?

$\Longrightarrow)$ Supongamos f uniformemente continua.

Sea x_n sucesión de Cauchy en A, es decir,

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0 \; \exists n_0 \mid si \; m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \hat{\varepsilon}$$

Veamos que $f(x_n)$ es de Cauchy también. Como f es uniformemente continua en A,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1.31}$$

Uniendo ambos resultados, obtenemos que para $\hat{\varepsilon} = \delta$:

$$\exists n_0 \mid si \; m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \delta \stackrel{Ec.\ 1.31}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Por tanto, resumiendo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid si \; m, n \geq n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Por tanto, $f(x_n)$ es una sucesión de Cauchy.

$\Longleftarrow)$ Supongamos que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Veamos que f es uniformemente continua.

Demostramos mediante reducción al absurdo. Supongamos que f no es uniformemente continua y llegaremos a una contradicción.

Como f no es uniformemente continua, dado $\varepsilon_0 > 0$,

$$\exists x_n, y_n \subseteq A \text{ con } x_n - y_n \to 0 \quad t.q. \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \tag{1.32}$$

- Como $x_n \subseteq A$ acotado $\Longrightarrow \exists x_{\sigma(n)} \to L \in \mathbb{R}$ por el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

- Como $y_n \subseteq A$ acotado $\Longrightarrow \exists y_{\sigma'(n)} \to L' \in \mathbb{R}$ por el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

  Pasando a la parcial de la parcial, no es restrictivo decir que la parcial es la misma. Por tanto, tenemos:

$$\begin{gathered} x_{\sigma(n)} \to L \in \mathbb{R} \\ y_{\sigma(n)} \to L' \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

  Como $\{x_n - y_n\} \to 0$ y toda parcial de una sucesión convergente converge al mismo límite, tenemos que

$$\{x_n - y_n\}_{\sigma(n)} = \{x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\} \longrightarrow 0 = L - L' \Longrightarrow L = L'$$

  Sea ahora la sucesión $z_n = \begin{cases} x_{\sigma(n)} & si\ n\ par \\ y_{\sigma(n)} & si\ n\ impar \end{cases}$

  Es fácil ver que z_n es convergente, ya que $z_n \to L = L'$.

  Por tanto, como $z_n \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, por el Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$ tenemos que ser una sucesión convergente es equivalente a ser de Cauchy. Por tanto, z_n es de Cauchy.

  Veamos ahora si $f(z_n)$ es de Cauchy.

$$f(z_n) = \begin{cases} f(x_{\sigma(n)}) & si\ n\ par \\ f(y_{\sigma(n)}) & si\ n\ impar \end{cases}$$

  Para que sea de Cauchy, es necesario que

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0\ \exists n_0 \mid si\ m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \hat{\varepsilon}$$

  es decir, es necesario que a partir de un término n_0 en adelante, todos los elementos disten tan poco entre ellos como delimite $\hat{\varepsilon}$. Veamos si esto ocurre para $f(z_n)$.

$$|f(z_{n+1}) - f(z_n)| = |f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \overset{(1)}{\geq} \varepsilon_0$$

  donde en (1) he aplicado la ecuación de hipótesis de inducción, la Ec. 1.32, ya que es cierta $\forall n$, por lo que también lo es para la parcial.

  Por tanto, podemos ver que dos términos de la sucesión siempre distan al menos ε_0, por lo que esta sucesión no es de Cauchy.

  Para terminar, vemos que z_n es de Cauchy y $f(z_n)$ no lo es, pero nuestra hipótesis es que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, por lo que llegamos a una contradicción. Se demuestra así que nuestra suposición era falsa, y que f sí es uniformemente continua.

Lo segundo no es cierto, y ejemplo de ello es $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$. Sabemos que transforma Cauchy en Cauchy porque, como $Dom(f), Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ y por el Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$, esto es equivalente a que transforme sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Esto es cierto, ya que la función es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, hemos encontrado una sucesión que transforma Cauchy en Cauchy, pero que no es uniformemente continua. Esto se debe a que el dominio no está acotado.

Ejercicio 1.4.10. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones:

1. $f(x) = e^x$ en $\mathbb{R}_0^+$.

   Buscamos dos sucesiones x_n, y_n tal que $|x_n - y_n| \to 0$ pero que $|f(x_n) - f(y_n)| = |e^{x_n} - e^{y_n}| \geq \varepsilon_0$, para algún $\varepsilon_0 > 0$.

   Sean esas sucesiones$\{x_n\} = \{\ln(n)\}$ e $\{y_n\} = \{\ln(n+1)\}$.

$$|x_n - y_n| = |\ln n - \ln(n+1)| = \left|\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \longrightarrow \ln 1 = 0$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |e^{x_n} - e^{y_n}| = |n - n - 1| = 1 = \varepsilon_0$$

   Por tanto, hemos demostrado que f no es uniformemente continua.

2. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $]0, 1[$.

   Podemos ver que $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, por lo que no se puede ampliar el dominio de definición. Por el ejercicio 1.4.6, al no poder ampliarse a $[0, 1]$, la función g no es uniformemente continua.

1.5. Cálculo Integral Teórico

Ejercicio 1.5.1. Calcular usando el Teorema de Cauchy para integrales que

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \qquad (\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Tenemos que:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Por tanto, tomando $f(x) = x^p$, tenemos:

$$\int_0^1 x^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} k^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Como tengo que $\{n^{p+1}\} \nearrow\nearrow +\infty$, uso el Criterio de Stolz para sucesiones:

$$\int_0^1 x^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \overset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

Demuestro ahora por inducción sobre p:

- Para $p = 0$:

$$\int_0^1 x^0\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

  Por tanto, para $p = 0$ es cierto.

- Supongo cierto para p y demuestro para $p+1$:
  Por hipótesis de inducción, tengo que:

$$\int_0^1 x^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

  Comprobamos para $p+1$:

$$\int_0^1 x^{p+1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1}}{(n+1)^{p+2} - n^{p+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p(n+1)}{(n+1)^{p+1}(n+1) - n^{p+1}n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p(n+1)}{(n+1)^{p+1}\cdot n + (n+1)^{p+1} - n^{p+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p(n+1)}{n[(n+1)^{p+1} - n^{p+1}] + (n+1)^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p(n+1)}{[(n+1)^{p+1} - n^{p+1}]\cdot\left[n + \frac{(n+1)^{p+1}}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \cdot \frac{n+1}{n + \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\cdot(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1} + \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}}$$

Haciendo uso de la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\int_0^1 x^{p+1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}+\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}} = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{p+2}$$

Por tanto, se verifica para $p+1$.

Por tanto, hemos demostrado que:

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \qquad (\forall p \in \mathbb{N}\cup\{0\}).$$

Ejercicio 1.5.2. Justificar las siguientes desigualdades:

1. $\displaystyle \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < 1$

   Definimos $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Sabemos que $f(x)$ es estrictamente decreciente en $]-1,+\infty[$, por lo que $Im(f)=\left[\frac{1}{2},1\right]$. Por tanto, tenemos que:

   $$\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1 \qquad \forall x\in[0,1]$$

   Por la conservación del orden, como tenemos las desigualdades no estrictas y, además, $f(x)\neq 1 \wedge f(x)\neq \frac{1}{2}$, tenemos que:

   $$\int_0^1 \frac{1}{2}dx < \int_0^1 f(x)d(x) < \int_0^1 dx$$

   Resolviendo las integrales de las constantes, tenemos que:

   $$\frac{1}{2} < \int_0^1 f(x)d(x) < 1$$

2. $\displaystyle \frac{1}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{4}$

   Trivialmente, tenemos que:

   $$\frac{x^3}{\sqrt{2}} < \frac{x^3}{\sqrt{1+x}} < x^3 \qquad \forall x \in]0,1[$$

   Por la conservación del orden, tenemos que:

   $$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2}}\,dx < \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\,dx < \int_0^1 x^3\,dx$$

   Resuelvo la siguiente integral:

   $$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

   Por tanto,

   $$\frac{1}{4\sqrt{2}} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2}}\,dx < \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\,dx < \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.5.3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función continua y tal que $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$. Demostrar que:

$$\int_a^b f(x)dx=0\Longrightarrow f=0$$

Sea $x_0\in]a,b[$ arbitrario. Por ser f continua, tenemos que $\exists\delta>0$ tal que se cumple que:

$$A=[x_0-\delta,x_0+\delta]\subseteq]a,b[\qquad\wedge\qquad f(A)\geq\frac{f(x_0)}{2}$$

Por tanto, por las acotaciones inferiores en cada intervalo,

$$0=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx\geq$$
$$\geq 0(x_0-\delta-a)+\frac{f(x_0)}{2}(x_0+\delta-x_0+\delta)+0(b-x_0-\delta)=\delta f(x_0)\Longrightarrow f(x_0)=0$$

Por tanto, llegamos a que $f(x_0)=0\ \forall x_o\in]a,b[$. Además, por ser f continua, tenemos que $f(a)=0=f(b)$. Por tanto, $f=0$.

Ejercicio 1.5.4. Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función continua verificando que

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt\quad\forall x\in[0,1]$$

Demostrar que $f=0$.

En la desigualdad dada, como es cierto $\forall x\in[0,1]$, tomamos límite con $x\longrightarrow 0$:

$$0=\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0}\int_x^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$$

Al ser $f(x)\geq 0\quad\forall x\in[0,1]$, por el ejercicio anterior tenemos que $f=0$. No obstante, se puede razonar de otra manera como sigue:

Además, por ser f integrable tenemos que, $\forall x\in[0,1]$ tenemos que:

$$0=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt$$

Además, por el la condición del enunciado, tenemos que:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt\Longrightarrow\int_0^x f(t)dt-\int_x^1 f(t)dt=0$$

Usando ambas ecuaciones, tengo que:

$$0=\cancel{\int_0^x f(t)dt}-\int_x^1 f(t)dt=\cancel{\int_0^x f(t)dt}+\int_x^1 f(t)dt\Longrightarrow\int_x^1 -f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$$

Por tanto, como es cierto $\forall x\in[0,1]$, tenemos que $f(x)=-f(x)\quad\forall x\in[0,1]$, entonces $f=0$.

Ejercicio 1.5.5. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Demostrar que $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = g(c)$.

Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces, por la hipótesis del enunciado:

$$\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 0$$

Además, como f, g son continuas tenemos que h también. Por el Teorema del Valor Medio para las integrales, tenemos:

$$\exists c \in [a, b] \mid \int_a^b h(x)\, dx = h(c)(b - a)$$

Por tanto, igualando tenemos que $\exists c \in [a, b]$ tal que:

$$h(c)(b - a) = 0 \Longrightarrow h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$$

Por tanto, queda demostrado que $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = g(c)$.

Ejercicio 1.5.6. Sea $f[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ si, y solo si, para cada partición $P \in \mathscr{P}[a, b]$ existe al menos una suma de Riemann $\sigma(f, P) \mid \alpha = \sigma(f, P)$.

Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Suponemos que $\alpha = \int_a^b f(x)dx$, y comprobemos que $\forall P \in \mathscr{P}[a, b]$ existe al menos una suma de Riemann $\sigma(f, P) \mid \alpha = \sigma(f, P)$.

Sea $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición cualquiera. Por la aditividad respecto del intervalo de integración, tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

Aplicando el Teorema del valor medio integral en cada una de las integrales,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Por tanto, como $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, P)$ con etiquetas c_i, tenemos que:

$$\alpha = \int_a^b f(x)dx = \sigma(f, P)$$

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\forall P \in \mathscr{P}[a,b]$ existe al menos una suma de Riemann $\sigma(f,P)$ | $\alpha = \sigma(f,P)$, y veamos que $\alpha = \int_a^b f(x)dx$.

Sea $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ una sucesión de particiones con $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ (algo que siempre es posible, usando particiones encajadas, por ejemplo).

Por tanto, tengo que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(P_n, f) = \alpha$$

Ejercicio 1.5.7. Sea $r > 0$ y sea $f[-r,r] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que:

1. Si f es par, entonces $\int_{-r}^r f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx$

   Suponemos f par, es decir, $f(x) = f(-x)$. Entonces:

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{-r}^0 f(x)dx + \int_0^r f(x)dx$$

   Para resolver la primera integral, aplico el cambio de variable $-x = t$:

$$\int_{-r}^0 f(x)dx = \left[\begin{array}{c} -x = t \\ -dx = dt \end{array}\right] = -\int_r^0 f(-t)dt = \int_0^r f(-t)dt$$

   Como f es par, tenemos que:

$$\int_{-r}^0 f(x)dx = \int_0^r f(t)dt$$

   Por tanto, como la variable es muda,

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{-r}^0 f(x)dx + \int_0^r f(x)dx = \int_0^r f(t)dt + \int_0^r f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx$$

2. Si f es impar, entonces $\int_{-r}^r f(x)dx = 0$

   Suponemos f impar, es decir, $-f(x) = f(-x)$. Entonces:

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{-r}^0 f(x)dx + \int_0^r f(x)dx$$

   Para resolver la primera integral, aplico el cambio de variable $-x = t$:

$$\int_{-r}^0 f(x)dx = \left[\begin{array}{c} -x = t \\ -dx = dt \end{array}\right] = -\int_r^0 f(-t)dt = \int_0^r f(-t)dt$$

   Como f es impar, tenemos que:

$$\int_{-r}^0 f(x)dx = -\int_0^r f(t)dt$$

   Por tanto, como la variable es muda,

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{-r}^0 f(x)dx + \int_0^r f(x)dx = -\int_0^r f(t)dt + \int_0^r f(x)dx = 0$$

Ejercicio 1.5.8. Demostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y periódica de periodo T, entonces, para cada $x\in\mathbb{R}$ se cumple que:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t+x)dt$$

Notando que $x\in\mathbb{R}$ es fijo, tenemos que:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \left[\begin{array}{c} t-x=z \\ dt=dz \end{array}\right] = \int_0^T f(z+x)dz$$

Como las variables t,z son mudas, tenemos demostrado lo pedido.

Ejercicio 1.5.9. Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

Definiendo $f(x)=\frac{1}{1+x}$, tenemos que el límite pedido es:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln 2$$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)\right]$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)\right] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$

Definiendo $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, tenemos que el límite pedido es:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \\ &= \int_0^1 f(x)\ dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)\right]$

Definiendo $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$, tenemos que el límite pedido es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Ejercicio 1.5.10. Demostrar que la función $f(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{x}$ es integrable en $[0,1]$ verificándose que $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e-1$.

Tenemos que f no está definida en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{1} = e^0 = 1$$

Sabemos que f es integrable en $]0,1]$ por ser acotada. Además, definiendo $f(0) = 1$ tenemos que f es continua y, por tanto, es integrable en $[0,1]$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 f(x)\,dx$$

Además, podemos definir $f(0) = k \in \mathbb{R}$, que como f solo tendría una discontinuidad de salto finito, tenemos que no varía el valor de la integral. Por tanto, podemos suponer $f(0) = 0$, lo cual no es restrictivo. Por tanto, tenemos que:

$$0 \leq f(x) = 0 \leq e^x = 1 \qquad x = 0$$

Veamos ahora para $x \neq 0$:

$$0 < f(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{x} < e^x \qquad \forall x \in]0,1]$$

La primera desigualdad es trivial, ya que todos los términos son positivos. Para la segunda desigualdad, es necesario ver lo siguiente:

$$\frac{e^x \operatorname{sen} x}{x} < e^x \Longleftrightarrow \operatorname{sen} x < x \Longleftrightarrow \operatorname{sen} x - x < 0 \qquad \forall x \in]0,1]$$

Para ver que $\operatorname{sen} x - x < 0$, buscamos que la imagen de $h(x) = \operatorname{sen} x - x$ sea negativa.

$$h(0) = 0 \qquad\qquad h'(x) = \cos x - 1 < 0 \Longrightarrow h \text{ estr. decreciente}$$

Por tanto, $Im(h) \subset \mathbb{R}^-$, por lo que se da lo buscado. En conclusión, tenemos que:

$$0 \leq f(x) \leq e^x \qquad \forall x \in [0,1]$$

Aplicamos el operador integral sabiendo que mantiene el orden:

$$0 = \int_0^1 0 \cdot dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e-1$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq e-1$$

Ejercicio 1.5.11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Demostrar que si para cada $c, d \in [a, b]$ tales que $a < c < d < b$, $\exists x \in]c, d[$ verificando que $f(x) = 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Sea una sucesión de particiones $P_n \in \mathscr{P}[a, b]$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, algo que siempre es posible, por ejemplo, tomando sucesiones de puntos encajados. Denotemos dicha partición como:

$$P_n = \{x_0 = a, x_1 \ldots, x_n = b\}$$

Consideremos para cada $k = 0, \ldots, n-1$ el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, y denotemos $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ como el valor que verifica que $f(\xi_k) = 0$. Este siempre existe por la hipótesis del enunciado. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$$

No obstante, tenemos que dicha sumatoria es una suma intermedia $\sigma(f, P_n)$ en las etiquetas ξ_k. Por tanto, como por hipótesis tenemos que f es integrable y hemos encontrado una sucesión de particiones cuyo diámetro tiende a 0 y una suma parcial suya es nula, tenemos que:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = 0$$

Ejercicio 1.5.12. Demostrar que la composición de dos funciones integrables puede no ser una función integrable.

Sea $f_1 : [1, 0] \to \mathbb{R}$ la función de las Palomitas, que se ha demostrado que es integrable.

$$f_1(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} & x = \frac{p}{q},\ mcd(p, q) = 1 \\ 1 & \text{si} & x \in \{0, 1\} \end{array}\right.$$

Sea $f_2 : [1, 0] \to \mathbb{R}$ la siguiente función, que es integrable por ser continua en todos los puntos excepto en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

$$f_2(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array}\right.$$

Veamos el valor de la composición:

$$\begin{array}{ccccc} x \notin \mathbb{Q} & \xrightarrow{f_1} & 0 & \xrightarrow{f_2} & 0 \\ x = \frac{p}{q} & \longrightarrow & \frac{1}{q} & \longrightarrow & 1 \\ x \in \{0, 1\} & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que $f_2 \circ f_1$ es la función de Dirichlet, que se ha visto que no es integrable.

Por tanto, hemos visto que no se cumple que la composición de funciones integrables sea integrable. Para que se cumpliese, f_2 debía haber sido continua.

Ejercicio 1.5.13. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es integrable. Sea $c \in \mathbb{R}$. Si $g : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = f(x-c)$, para $x \in [a+c, b+c]$, demostrar que g es integrable, siendo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx$$

Dedúzcase que, para cada $h \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx$$

Para demostrar lo primero, realizo el cambio de variable $t = x + c$:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{c} t = x + c \\ dt = dx \end{array}\right] = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)dt$$

Por tanto, la primera igualdad queda demostrada. Como se ha demostrado $\forall c \in \ \mathbb{R}$, tomando $h = -c$ queda demostrada la segunda.

Ejercicio 1.5.14. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función positiva y estrictamente decreciente. Demuéstrese que para cada $n, p \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$f(n+p) + \int_n^{n+p} f(x)dx < f(n) + f(n+1) + \cdots + f(n+p) < f(n) + \int_n^{n+p} f(x)dx$$

Como consecuencia demostrar que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}} > \sqrt{p} \qquad p \geq 2.$

Al ser monótona y acotada en $[n, n+p]$ tenemos que es Riemman Integrable. Por tanto,

$$\int_n^{n+p} f(x)\ dx = S(f) = I(f)$$

Además, sabemos que $S(f) < S(f, P)$ para todo $P \in \mathscr{P}[n, n+p]$. Por tanto, suponiendo $P = \{n, n+1, \dots, n+p\}$, tenemos que:

$$\int_n^{n+p} f(x)\ dx = S(f) < S(f, p) = \sum_{i=n}^{n+p-1} f(i)$$

Por tanto, y simplificando $f(n+p)$, tenemos la primera desigualdad. Demostremos ahora la segunda:

$$\int_n^{n+p} f(x)\ dx = I(f) > I(f, p) = \sum_{i=n+1}^{n+p} f(i)$$

Simplificando en este caso $f(n)$, tenemos probada la segunda desigualdad.

Para demostrar que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}} > \sqrt{p} \qquad p \geq 2$, tomamos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $n = 1$. Entonces:

$$\int_1^{p+1} f(x)\ dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{p+1} = 2(\sqrt{p+1} - 1) > \sqrt{p} \Longleftrightarrow 2\sqrt{p+1} > \sqrt{p} + 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4p+4 > p+4+4\sqrt{p} \Longleftrightarrow 3p > 4\sqrt{p} \Longleftrightarrow 9p > 16 \Longleftrightarrow p > \frac{16}{9} \quad \text{¡Cierto!, ya que } p \geq 2$$

Por tanto, tenemos que $\int_1^{p+1} f(x)\ dx > \sqrt{p}$. Por tanto, por lo demostrado previamente, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{p-1} f(i) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}} > \int_1^{p+1} f(x)\ dx > \sqrt{p}$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}} > \sqrt{p}$$

Ejercicio 1.5.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-x^2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)dt$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Demostrar que h es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.

Tenemos que f es continua y acotada en $\mathbb{R}$, por lo que sabemos que es Riemman Integrable. Por el TFC, tenemos que $\int_0^x f(t)dt$ es derivable en $\mathbb{R}$. Además, como el seno también es derivable, tenemos que h lo es, con

$$h'(x) = f(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x = e^{-\operatorname{sen}^2 x} \cos x$$

Ejercicio 1.5.16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-x^2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$, para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Estudiar la continuidad uniforme de la función g y su derivabilidad.

Tenemos que f es continua y acotada en $\mathbb{R}$, por lo que sabemos que es Riemman Integrable. Por el TFC, tenemos que $\int_0^x f(t)dt$ es derivable en $\mathbb{R}_0^+$. Además, $\sqrt{x}$ es derivable en $\mathbb{R}^+$, por lo que g es derivable en $\mathbb{R}^+$ con

$$g'(x) = f(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

Veamos si es derivable en $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{1}{0} = +\infty \Longrightarrow \nexists g'(0)$$

Por tanto, tenemos que g es derivable en $\mathbb{R}^+$.

Veamos ahora si es uniformemente continua en $\mathbb{R}_0^+$.

Por el teorema de Heine, tenemos que $g(x)$ es uniformemente continua en $[0, r] \quad \forall r > 0$. Supongamos $r > 0$ y veamos que es lipschitziana. Sabemos que $g'(x)$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$, y tenemos que:

$$g'(r) = \frac{e^{-r}}{2\sqrt{r}} = \frac{1}{e^r\sqrt{r}} \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$$

Por tanto, como $g'(x)$ está acotada $\forall\ r > 0$, tenemos que g es lipschitziana y por tanto uniformemente continua en $[r, +\infty[$. Como además hemos visto que es uniformemente continua en $[0, r[$ y sabemos que es continua en r, tenemos que g es uniformemente continua en $\mathbb{R}_0^+$.

Ejercicio 1.5.17. Estudiar la derivabilidad de la función $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$ y calcular $F'(1)$.

Sea $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^3}}$. Tenemos que f es continua, por lo que es Riemman Integrable. Por tanto, dado $c \in [\sqrt[3]{x}, x^2]$ tenemos que:

$$F(x) = \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt = \int_{\sqrt[3]{x}}^{c} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt + \int_{c}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt = \int_{c}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} - \int_{c}^{\sqrt[3]{x}} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$$

Por tanto, por el TFC tenemos que F es derivable en $\mathbb{R}_0^+$, con:

$$F'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Por tanto,

$$F'(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Ejercicio 1.5.18. Probar que todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3} f(x)$ son derivables en $\mathbb{R}_0^+$. Determinar el conjunto de dichas funciones.

Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3} f(x)$. Por tanto, por el TFC, como f es continua entonces F es derivable en $\mathbb{R}_0^+$, con $F' = f$. Por tanto,

$$F'(x) = f(x) = \left[\frac{x}{3} f(x)\right]' = \frac{1}{3}[f(x) + xf'(x)] \tag{1.33}$$

donde, como f es continua, tenemos que es derivable.

Calculamos ahora el conjunto de dichas funciones f.

- <u>Supuesto $f = 0$:</u>

  Se tiene, ya que f es una recta constante en 0. Se cumple la igualdad dada.

- <u>Supuesto $f(x) \neq 0$ en $[a, b]$, con $0 < a < b$:</u>

  De la ecuación 1.33, tenemos que:

  $$3f(x) = f(x) + xf'(x) \Longrightarrow 2f(x) = xf'(x) \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} \qquad \forall x \in [a, b]$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_a^x \frac{2}{t} dt \Longrightarrow \ln|f(x)| - \ln|f(a)| = 2\ln x - 2\ln a \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \ln|f(x)| = \ln(x^2) + \ln|f(a)| - \ln(a^2)$$

  Como $a \in \mathbb{R}^+$ es fijo, definimos:

  $$K := \frac{|f(a)|}{a^2} > 0 \qquad \ln K = \ln\left(\frac{|f(a)|}{a^2}\right) = \ln|f(a)| - \ln(a^2)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\ln|f(x)| = \ln(x^2) + \ln K = \ln(Kx^2)$$

Como el $\ln(x)$ es una función inyectiva, tenemos que:

$$|f(x)| = Kx^2 \Longrightarrow f(x) = \pm Kx^2 \qquad K \in \mathbb{R}^+$$

Es decir, f es una parábola.

Veamos ahora cómo de grande es ese intervalo $[a, b]$.

Supongamos que $\text{ínf}\{0 \leq \hat{a} \leq a \mid f(x) \neq 0\ \forall x \in [\hat{a}, b]\} > 0$. Entonces:

$$\exists a_n \to \hat{a} \quad | \quad 0 \leq a_n \leq \hat{a} \ \wedge\ f(a_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como tenemos que f es continua, por la elección de a_n y $\hat{a}$, tenemos:

$$\lim_{x\to\hat{a}^-} f(x) = \lim_{x\to\hat{a}^-} 0 = 0$$

No obstante, tenemos que f es continua y es del tipo $f(x) = kx^2 \quad \forall x \in [\hat{a}, b]$, $k \neq 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to\hat{a}^+} f(x) = \lim_{x\to\hat{a}^+} kx^2 = k\hat{a}^2 \neq 0 \qquad \text{ya que } k, \hat{a} \neq 0$$

Por tanto, hemos llegado a que en $\hat{a}$ la función no es continua, por lo que es una contradicción. Tenemos entonces que $\hat{a} = 0$.

Supongamos que $\text{máx}\{b \leq \hat{b} \mid f(x) \neq 0\ \forall x \in [0, \hat{b}]\} \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\exists b_n \to \hat{b} \quad | \quad b_n > \hat{b} \ \wedge\ f(b_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como tenemos que f es continua, por la elección de b_n y $\hat{b}$, tenemos:

$$\lim_{x\to\hat{b}^+} f(x) = \lim_{x\to\hat{b}^+} 0 = 0$$

No obstante, tenemos que f es continua y es del tipo $f(x) = kx^2 \quad \forall x \in [0, \hat{b}]$, $k, \hat{b} \neq 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to\hat{b}^-} f(x) = \lim_{x\to\hat{b}^-} kx^2 = k\hat{b}^2 \neq 0 \qquad \text{ya que } k, \hat{b} \neq 0$$

Por tanto, hemos llegado a que en $\hat{b}$ la función no es continua, por lo que es una contradicción. Tenemos entonces que $\hat{b} \notin \mathbb{R}$.

Por tanto, hemos llegado a que el conjunto pedido es:

$$\{f = 0\} \cup \{f \mid f(x) = kx^2,\ \ k \neq 0\} = \{f \mid f(x) = kx^2,\ \ k \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, el conjunto pedido es el de las parábolas con vértice en el $(0, 0)$.

Ejercicio 1.5.19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua. Justificar que la función dada por $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$, para cada $x \in \mathbb{R}$, es derivable y calcular su derivada.

Como f es continua, tenemos que es Riemman Integrable. Por tanto, dado $c \in [x^2, x^3]$, tenemos que:

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)dt = \int_{x^2}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{x^3} f(t)dt = \int_{c}^{x^3} f(t)dt - \int_{c}^{x^2} f(t)dt$$

Por el TFC, como f es Riemman Integrable y continua, tenemos que H' es derivable, com:

$$H'(x) = 3x^2 f(x^3) - 2xf(x^2)$$

Ejercicio 1.5.20. Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^3 t dt$

   Como tenemos que el integrando es continuo y acotado en $\mathbb{R}$, por el TFC tenemos que F_1 es derivable en $\mathbb{R}$ con:

   $$F_1'(x) = \operatorname{sen}^3 x$$

2. $F_2(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$

   Reescribo F_2 para que se le pueda aplicar el TFC:

   $$F_2(x) = -\int_b^x \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

   Como tenemos que el integrando es continuo y acotado en $\mathbb{R}$, por el TFC tenemos que F_2 es derivable en $\mathbb{R}$ con:

   $$F_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}$$

3. $F_3(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$

   Como estamos integrando respecto a t, tenemos que x es una constante. Por tanto,

   $$F_3(x) = x \cdot \int_a^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

   Además, como la integral es propia y el integrando es Riemman Integrable, tenemos que tomará un valor real. Es decir, tomará un valor constante y fijo, que no depende en ningún momento de x. Por tanto,

   $$F_3'(x) = \int_a^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

Ejercicio 1.5.21. Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}dt$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y determinar los extremos relativos de dicha función. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)}$.

Como el integrando es continuo y acotado en $\mathbb{R}$, por el TFC tenemos que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ con:

$$f'(x)=e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)=0\Longleftrightarrow x(3x-2)=0\Longleftrightarrow x=\left\{0,\frac{2}{3}\right\}$$

Estudiamos la monotonía:

- Para $x\in\left]0,\frac{2}{3}\right[$: $f'(x)<0\Longrightarrow f(x)$ estrictamente decreciente.
- Para $x\in\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$: $f'(x)>0\Longrightarrow f(x)$ estrictamente creciente.

Por tanto, tenemos que $x=\frac{2}{3}$ es un mínimo relativo y absoluto, con $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

Además, como f es derivable en $\mathbb{R}^+$, tenemos que una condición necesaria de ser extremo relativo es que se anule la primera derivada. Por tanto, tenemos que no hay más posibles extremos relativos. El 0 no lo consideramos, ya que $0\notin\mathbb{R}^+$.

Resolvemos ahora el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H\hat{o}pital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(x^3-x^2)^2}\cancel{(3x^2-2x)}}{\cos(x^3-x^2)\cdot\cancel{(3x^2-2x)}}=\frac{e^0}{\cos 0}=1$$

Ejercicio 1.5.22. Sea $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\int_0^{x-1}(e^{-t^2}-e^{-2t})dt$. Calcular su máximo absoluto. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{\pi}-1)$, calcular el mínimo absoluto de f.

Como tenemos que el integrando es continuo y acotado en $\mathbb{R}$, tenemos que $f(x)$ es derivable en $[1,\infty[$ por el TFC. Por tanto,

$$f'(x)=e^{-(x-1)^2}-e^{-2(x-1)}=0\Longleftrightarrow(x-1)^2=2(x-1)\Longleftrightarrow x^2-4x+3=0$$

Por tanto, resolviendo la ecuación, tenemos que los puntos que anulan la primera derivada son $x=\{1,3\}$. Estudiamos la monotonía:

- Para $x\in]1,3[$: $f'(2)=e^{-1}-e^{-2}>0\Longrightarrow f(x)$ estrictamente creciente.
- Para $x\in]1,+\infty[$: $f'(4)=e^{-9}-e^{-6}<0\Longrightarrow f(x)$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos que $x=3$ es un máximo relativo que, además, es máximo absoluto.

Para estudiar el mínimo absoluto, calculamos la imagen de $x=1$ y el límite en $+\infty$:

$$f(1)=\int_0^0(e^{-t^2}-e^{-2t})dt=0\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{\pi}-1)>0$$

Como $f(1)$ es menor, tenemos que $x=1$ es el mínimo absoluto.

Ejercicio 1.5.23. Sea $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $H(x) = \int_0^{\pi x^2} e^{2t} \operatorname{sen} t dt$. Estudiar los extremos absolutos y relativos de la función H y determinar su imagen.

Por el TFC, como el integrando es una funcion continua y acotada, tenemos que F es derivable en $[-1,1]$, con:

$$H'(x) = e^{2\pi x^2} \operatorname{sen}(\pi x^2) \cdot 2\pi x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\pi x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ \vee \\ \operatorname{sen}(\pi x^2) = 0 \Longleftrightarrow \pi x^2 = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x^2 = k,\ k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

Estudiamos, por tanto, la monotonía de $H(x)$:

- Para $x \in]-1,0[$: $H'(x) < 0 \Longrightarrow H(x)$ estrictamente decreciente.
- Para $x \in]0,1[$: $H'(x) > 0 \Longrightarrow H(x)$ estrictamente creciente.

Por tanto, en $x = 0$ tenemos un mínimo relativo.

$$H(0) = \int_0^0 e^{2t} \operatorname{sen} t dt = 0$$

$$\begin{aligned} H(-1) = H(1) = \int_0^\pi e^{2t} \operatorname{sen} t dt &= \begin{bmatrix} u(t) = e^{2t} & u'(t) = 2e^{2t} \\ v'(t) = \operatorname{sen} t & v(t) = -\cos t \end{bmatrix} = \\ &= \left[-e^{2t}\cos t\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi e^{2t}\cos t\, dt = \begin{bmatrix} u(t) = e^{2t} & u'(t) = 2e^{2t} \\ v'(t) = \cos t & v(t) = \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \\ &= \left[-e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\operatorname{sen} t\right]_0^\pi - 4\int_0^\pi e^{2t} \operatorname{sen} t\, dt \end{aligned}$$

Por tanto, resolviendo la integral cíclica tenemos:

$$5H(-1) = 5\int_0^\pi e^{2t} \operatorname{sen} t dt = \left[-e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\operatorname{sen} t\right]_0^\pi \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow H(-1) = H(1) = \frac{\left[-e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\operatorname{sen} t\right]_0^\pi}{5} = \frac{e^{2\pi}+1}{5}$$

Por tanto, tenemos que:

$$Im(H) = \left[0, \frac{e^{2\pi}+1}{5}\right]$$

Los máximos absolutos son:

$$\left(-1, \frac{e^{2\pi}+1}{5}\right) \qquad \left(1, \frac{e^{2\pi}+1}{5}\right)$$

El mínimo absoluto, que además es mínimo relativo, es

$$(0,0)$$

Ejercicio 1.5.24. Probar que la función $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(y)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}}$ es lipschitziana.

Ver si es Lipschiziana desde la definición es complejo, por lo que veamos si la derivada $f'(y)$ es acotada. Para poder calcular la derivada mediante el TFC, buscados la variable y en los límites de integración.

$$f(y)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}}=\int_0^1 \frac{dx}{y^2\sqrt{\frac{x^4}{y^4}+1}}=\frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4+1}}$$

donde la constante $\frac{1}{y^2}$ no se ve afectada por la integral ya que se integra respecto a x. Llegados a este punto, aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{x}{y}=u(x) \\ \frac{dx}{y}=du \end{array}\right]$$

Entonces:

$$f(y)=\frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4+1}}=\frac{1}{y^2}\int_{u(0)}^{u(1)} \frac{y\,du}{\sqrt{u^4+1}}=\frac{1}{y}\int_0^{1/y} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}}$$

Por tanto, calculamos la derivada empleando la regla del producto:

$$f'(y)=-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}\frac{1}{\sqrt{u^4+1}}\,du+\frac{1}{y}\left[\int_0^{1/y}\frac{du}{\sqrt{u^4+1}}\right]'=-\frac{1}{y}f(y)-\frac{1}{y^3}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^4+1}}=$$

$$=-\frac{1}{y}f(y)-\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}=-\frac{1}{y}\left(f(y)+\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\right)$$

donde he empleado que, por el TFC:

$$\left[\int_0^{\frac{1}{y}}\frac{du}{\sqrt{u^4+1}}\right]'=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^4+1}}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^4+1}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

Tenemos que la derivada es acotada, ya que:

$$|f'(y)|=\left|-\frac{1}{y}\left(f(y)+\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\right)\right|=\frac{1}{y}\left(f(y)+\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\right)\overset{y\in[1,2]}{\leq}$$

$$\leq\frac{1}{1}\left(f(y)+\frac{1}{\sqrt{1+1^4}}\right)\overset{(*)}{\leq}M+\frac{1}{\sqrt{2}}\in\mathbb{R}$$

donde en $(*)$ he usado que, por el TFC, $f(y)$ es continua y, por el Teorema de Bolzano-Weirstrass, $f(y)$ es acotada.

$$0\leq f(y)\leq M\in\mathbb{R}$$

Por tanto, como su derivada es acotada, tenemos que $f(y)$ es lipschitziana.

Ejercicio 1.5.25. Dado $a > 0$, calcular la imagen de la función $G : [-a, a] \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}dt$.

En primer lugar, aplicamos que el integrando es una función par en la variable t, por lo que:

$$G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}dt = G(x) = 2\int_{0}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}dt$$

Para calcular la imagen, es necesario calcular $G'(x)$. Aplicando el TFC, tenemos que:

$$G'(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0 \qquad \forall x \in [-a, a]$$

Por tanto, tenemos que G es creciente. Además, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que $Im(G)$ es cerrado y acotado, por lo que:

$$Im(G) = [G(-a), G(a)]$$

Opción 1: Analíticamente. Para calcular las imágenes, calculo en primer lugar la integral indefinida.

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}dt = \left[\begin{array}{cc} t = a \operatorname{sen} u & u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dt = a \cos u \, du & \end{array}\right] = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 u}\, a \cos u \, du =$$

$$= \int a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}\, a \cos u \, du = \int a^2 \cos^2 u \, du$$

Para resolver la integral del coseno al cuadrado, aplico las siguientes identidades trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1 \\ \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \cos(2u) \end{array}\right\} \Longrightarrow \cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

Por tanto,

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}dt = \int a^2 \cos^2 u \, du = a^2 \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} \, du = a^2 \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2u)\right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable ($u = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{a}\right)$), llegamos a que:

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}dt = a^2 \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2u)\right) + C = a^2 \left(\frac{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{a}\right)}{2} + \frac{t}{4a} \cos\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{t}{a}\right)\right) + C$$

Por tanto, las imágenes buscadas son:

$$G(a) = 2\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}dt = 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 0 - 0\right) = a^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$G(-a) = 2\int_{0}^{-a} \sqrt{a^2 - t^2}dt = 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + 0 - 0\right) = -a^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Por tanto,

$$Im(G) = [G(-a), G(a)] = \left[-a^2 \cdot \frac{\pi}{2}, a^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

Opción 2: Geométricamente. Sabemos que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. Por tanto, la función que determina el semicírculo superior de una circunferencia de radio r es:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Por tanto, la función dada $G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt$ determina el área encerrada por una circunferencia de radio a con el eje X entre x y $-x$. Por tanto,

$$G(a) = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$G(-a) = \int_{a}^{-a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = -\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = -\frac{\pi a^2}{2}$$

Como vemos, esta opción facilita mucho los cálculos, pero es necesario caer en el área del círculo.

Ejercicio 1.5.26. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = 0$ y $\int_a^b f(t)dt = 0$. Definimos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $F(a) = 0$ y

$$F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x - a} \qquad \forall x \neq a$$

Probar que F es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b]$. Demostrar que si f es derivable en a entonces F es derivable en $[a, b]$ y existe $c \in]a, b[$ tal que $F'(c) = 0$.

Estudio en primer lugar la continuidad de F. Como f es continua en $[a, b]$, tenemos por el TFC que $\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$. Por tanto, tenemos la continuidad de $F(x)$ en $x \in [a, b] - \{a\}$. Comprobemos para $x = a$:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)dt}{x - a} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 = F(a)$$

Por tanto, tenemos la continuidad de F en $[a, b]$.

Respecto a la derivabilidad, por el TFC tenemos que $\int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a, b]$, con derivada $f(x)$. Por el carácter local de la derivabilidad, tenemos que:

$$F'(x) = \frac{f(x)(x - a) - \int_a^x f(t)dt}{(x - a)^2} \qquad \forall x \neq a$$

Por tanto, tenemos que F es derivable en $[a, b] - \{a\}$. Supongamos ahora f derivable en a:

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \lim_{x\to a} F'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)(x - a) - \int_a^x f(t)dt}{(x - a)^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)(x - a) + \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)}}{2(x - a)} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{2} = \frac{f'(a)}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, suponiendo f derivable en a tenemos F' derivable en a, con $F'(a) = \frac{f'(a)}{2}$.

Demostramos ahora que existe $c \in]a,b[$ tal que $F'(c) = 0$.

$$F(a) = 0 \qquad F(b) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0$$

Como tenemos F continua en $[a,b]$, F derivable en $]a,b[$ y $F(a) = F(b)$; por el Teorema de Rolle se tiene que:

$$\exists c \in]a,b[\mid F'(c) = 0$$

Ejercicio 1.5.27. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt}{\operatorname{sen}(x^4)}$.

Por el TFC, tenemos que:

$$\left[\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt\right]' = \operatorname{sen}(x^2)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt}{\operatorname{sen}(x^4)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt + \operatorname{sen}(x^2)x}{4x^3\cos(x^4)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{12x^2\cos(x^4) - 16x^6\operatorname{sen}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + x^2\cos(x^2)}{6x^2\cos(x^4) - 8x^6\operatorname{sen}(x^4)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{6x^2\cos(x^4) - 8x^6\operatorname{sen}(x^4)} + \frac{\cos(x^2)}{6\cos(x^4) - 8x^4\operatorname{sen}(x^4)} \overset{Ec.\ 1{,}34}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{6x^2\cos(x^4) - 8x^6\operatorname{sen}(x^4)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{12x\cos(x^4) - 24x^5\operatorname{sen}(x^4) - 48x^5\operatorname{sen}(x^4) - 32x^9\cos(x^4)} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)}{12\cos(x^4) - 24x^4\operatorname{sen}(x^4) - 48x^4\operatorname{sen}(x^4) - 32x^8\cos(x^4)} = \frac{1}{6} \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.28. Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t)\arctan(t)dt}{x^2e^x}$.

En primer lugar, hemos de demostrar que $\int_1^{+\infty} \ln(x)\arctan(x)dt$ diverge positivamente. Sea $f(x) = \ln(x)\arctan(x)$.

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x)\arctan(x) = +\infty \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \ln(x)\arctan(x)dt = +\infty$$

Por tanto, procedemos a calcular el límite aplicando el TFC:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t)\arctan(t)dt}{x^2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[(x+1)e^x]\arctan[(x+1)e^x]\cdot(e^x(x+2))}{2xe^x+x^2e^x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[(x+1)e^x]\arctan[(x+1)e^x]\cdot(x+2)}{x(2+x)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[ln(x+1)+x]\arctan[(x+1)e^x]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ln(x+1)}{x}+1\right)\arctan[(x+1)e^x] =$$
$$\overset{Ec.\ 1{,}35}{=} \frac{\pi}{2}$$

donde he hecho uso del siguiente resultado:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x+1)}{x} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \tag{1.35}$$

Ejercicio 1.5.29. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sean $I_n := \int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ y $J_n := \int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$. Demostrar que las sucesiones $\{I_n\},\{J_n\}$ convergen a 0.

Demuestro en primer lugar para I_n:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$$

Aplico el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{cc} u(x)=f(x) & u'(x)=f'(x) \\ v'(x)=\cos(nx) & v(x)=\frac{1}{n}\operatorname{sen} x \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}f(x)\operatorname{sen} x - \int_a^b \frac{1}{n}\operatorname{sen} x f'(x)\ dx\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(x)\operatorname{sen} x - \int_a^b \operatorname{sen} x f'(x)\ dx\right) = 0$$

donde esto último se da ya que $x\in[a,b]$ fijo, lo que tiene a $+\infty$ es el valor de n.

Demuestro ahora para J_n:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

Aplico el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{cc} u(x)=f(x) & u'(x)=f'(x) \\ v'(x)=\operatorname{sen}(nx) & v(x)=-\frac{1}{n}\cos x \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}f(x)\cos x + \int_a^b \frac{1}{n}\cos x f'(x)\ dx\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(-f(x)\cos x + \int_a^b \cos x f'(x)\ dx\right) = 0$$

Ejercicio 1.5.30. Demostrar que para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se verifica que:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\ dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{t}\ dt = \frac{\pi}{4}$$

Sea $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\ dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{t}\ dt$$

Como los integrandos son acotados, ya que las funciones trigonométricas inversas dadas lo son, por el TFC tenemos que F' es derivable, con:

$$\begin{aligned} F'(x) = \arccos[\sqrt{\cos^2 x}] \cdot (-2\cos x \operatorname{sen} x) + \operatorname{arc\,sen}[\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}] \cdot (2\cos x \operatorname{sen} x) = \\ = -x \operatorname{sen}(2x) + x \operatorname{sen}(2x) = 0 \qquad\qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que el seno y el coseno son positivos.

Por tanto, tenemos que $F(x)$ es constante.

Para ver que es igual a $\frac{\pi}{2}$, demostramos en primer lugar que:

$$h(x) = \arccos x + \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostramos en primer lugar que es constante y luego mostramos un valor.

$$h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad\qquad h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, sabiendo esto, calculamos el valor de F para cierto x. En este caso, nos es conveniente usar $x = \frac{\pi}{4}$, ya que su seno y coseno coinciden:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \arccos \sqrt{t} + \operatorname{arc\,sen} \sqrt{t}\ dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\ dt = \frac{\pi}{2} \left[t\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, como F es constante y tenemos un valor de x que vertifica la condicion del enunciado, esta queda demostrada.

1.6. Cálculo Integral Práctico

Ejercicio 1.6.1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + C$

c) $\displaystyle\int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) dx = \int [\operatorname{tg}^3 x(1+\operatorname{tg}^2 x)] dx = \frac{1}{4} \int [4 \operatorname{tg}^3 x(1+\operatorname{tg}^2 x)] dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x (1-\cos^2 x) dx = \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx =$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

e) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x + 1 - 1 \, dx = \operatorname{tg} x - x + C$

f) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+4^x} dx$

Tenemos que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$. Por tanto,

$$\int \frac{2^x}{1+4^x} dx = \int \frac{2^x}{1+(2^x)^2} dx = \begin{bmatrix} 2^x = t \\ 2^x \ln 2 \, dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{\cancel{2^x}}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{\cancel{2^x} \ln 2} =$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \arctan t + C = \frac{1}{\ln 2} \arctan 2^x + C$$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx = \begin{bmatrix} 1-e^x = t \\ dx = -\frac{dt}{e^x} \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{\sqrt{t}} dx = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1-e^x} + C$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{9+x^6} dx = \frac{1}{9} \int \frac{x^2}{1+\frac{x^6}{9}} dx = \frac{1}{9} \int \frac{x^2}{1+\left(\frac{x^3}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{9} \arctan\left(\frac{x^3}{3}\right) + C$

i) $\displaystyle\int \ln x \, dx = \begin{bmatrix} u(x) = \ln x & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$

Aplico el siguiente cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Longrightarrow dx = 2t \, dt \end{bmatrix}$$

Por tanto, la integral queda:

$$\int \frac{2t}{1+t}dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt = 2t - 2\ln|1+t| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

k) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(2x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$

l) $\displaystyle\int (x^2+5)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+5) - \int 2xe^{-x}$

Aplico el método de integración por partes con:

$$\begin{bmatrix} u(x) = x^2+5 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\int (x^2+5)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+5) + \int 2xe^{-x}\,dx$$

Vuelvo a aplicar el método de integración por partes con:

$$\begin{bmatrix} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$\int (x^2+5)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+5) + \int 2xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+5) - e^{-x}(2x) + \int 2e^{-x} =$$
$$= -e^{-x}(x^2+5) - e^{-x}(2x) - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+7) + C$$

ll) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen}(3x)\,dx$

Aplico el método de integración por partes con:

$$\begin{bmatrix} u(x) = x^3 & u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \operatorname{sen}(3x) & v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) \end{bmatrix}$$

$$\int x^3 \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \int 3x^2\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \int x^2\cos(3x)\,dx$$

Aplico de nuevo el método de integración por partes con:

$$\begin{bmatrix} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos(3x) & v(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) \end{bmatrix}$$

$$\int x^3 \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \int x^2\cos(3x)\,dx =$$
$$= -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \int 2x\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\,dx =$$
$$= -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\int x\operatorname{sen}(3x)\,dx$$

Aplico por tercera vez el método de integración por partes con:

$$\left[\begin{array}{rl} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=\operatorname{sen}(3x) & v(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x) \end{array}\right]$$

$$\int x^3\operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\int x\operatorname{sen}(3x)\,dx =$$
$$= -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}\cos(3x) + \int\frac{1}{3}\cos(3x)\right] =$$
$$= -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3\cdot 3}\int 3\cos(3x)\right] =$$
$$= -\frac{x^3}{3}\cos(3x) + \frac{x^2}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x)\right] + C =$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\cos(3x) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)\operatorname{sen}(3x)$$

m) $\int x\ln(1+x^2)\,dx$

Aplico el método de integración por partes con:

$$\left[\begin{array}{rl} u(x)=\ln(1+x^2) & u'(x)=\frac{2x}{1+x^2} \\ v'(x)=x & v(x)=\frac{x^2}{2} \end{array}\right]$$

$$\int x\ln(1+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

Para calcular la integral, realizamos la división de polinomios:

$$\begin{array}{l} (\quad x^3) \div (x^2+1) = x + \dfrac{-x}{x^2+1} \\ \underline{-x^3 - x} \\ \quad -x \end{array}$$

$$\int x\ln(1+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int x - \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C =$$
$$= \ln(1+x^2)\left(\frac{x^2+1}{2}\right) - \frac{x^2}{2} + C$$

n) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-1}dx$

Factorizo en primer lugar el denominador.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \Longrightarrow x^4-1=(x+1)(x^3-x^2+x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Longrightarrow x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

Por tanto,

$$\int \frac{x+1}{x^4-1}dx=\int \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x^2+1)}dx=\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Aplico el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\Longrightarrow 1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

- $\underline{x=1}\Longrightarrow 1=2A\Longrightarrow A=\frac{1}{2}$
- $\underline{x=0}\Longrightarrow 1=A-C\Longrightarrow C=A-1=-\frac{1}{2}$
- $\underline{x=-1}\Longrightarrow 1=2A+2B-2C\Longrightarrow B=\frac{1}{2}-A+C=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

Por tanto,

$$\int \frac{x+1}{x^4-1}dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C$$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

Aplico el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Longrightarrow x-2=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

- $\underline{x=1}\Longrightarrow -1=2B\Longrightarrow B=-\frac{1}{2}$
- $\underline{x=0}\Longrightarrow -2=-A\Longrightarrow A=2$
- $\underline{x=-1}\Longrightarrow -3=2C\Longrightarrow C=-\frac{3}{2}$

Por tanto,

$$\int \frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}\,dx=2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+1|+C=\ln\frac{x^2}{\sqrt{|(x-1)(x+1)^3|}}+C$$

o) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Realizo la división de polinomios:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^4-3x^3 \qquad\quad -3x-2\big) \div \big(x^3-x^2-2x\big) = x-2+\dfrac{-7x-2}{x^3-x^2-2x} \\ \underline{-x^4 \ \ +x^3+2x^2} \\ \qquad -2x^3+2x^2-3x \\ \qquad\ \ \underline{2x^3-2x^2-4x} \\ \qquad\qquad\quad -7x-2 \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Para calcular la integral restante, factorizo el denominador.

$$x^2-x-2=0 \iff x=\{2,-1\}$$

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2}-2x-\int \frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)}dx$$

Aplico el método de coeficientes indeterminados:

$$\frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} \Longrightarrow 7x+2 = A(x+1)(x-2)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

- Para $x=0$ $\Longrightarrow 2=-2A \Longrightarrow A=-1$
- Para $x=-1$ $\Longrightarrow -5=3C \Longrightarrow C=-\frac{5}{3}$
- Para $x=2$ $\Longrightarrow 16=6B \Longrightarrow B=\frac{8}{3}$

Por tanto,

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2}-2x-\int \frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|-\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{5}{3}\ln|x+1|+C$$

p) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+3}\,dx$

Como $\Delta = 3^2-4\cdot 3<0$, no tiene raíces reales.

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cdot 1}{x^2-3x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3}+\frac{5}{x^2-3x+3}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+3}\,dx$$

Busco ahora un binomio al cuadrado en el denominador.

$$x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=$$
$$=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2+1\right]$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int\frac{x+1}{x^2-3x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2-3x+3}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2+1\right]}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3|+\frac{5\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)+C$$

q) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x+2\cos^2 x\operatorname{sen} x}\,dx$

Como la función es impar en el coseno, aplico el cambio de variable $\operatorname{sen} x=t$.

$$\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x+2\cos^2 x\operatorname{sen} x}\,dx=\left[\begin{array}{c}\operatorname{sen} x=t\\ \cos x\;dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^3+2(1-t^2)t}\,dx=$$
$$=\int\frac{dt}{t^3+2t-2t^3}\,dx=\int\frac{dt}{t(-t^2+2)}\,dx=\int\frac{dt}{t(\sqrt{2}+t)(\sqrt{2}-t)}\,dx$$

Aplico ahora el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{t(\sqrt{2}+t)(\sqrt{2}-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{\sqrt{2}+t}+\frac{C}{\sqrt{2}-t}\Longrightarrow 1=A(\sqrt{2}+t)(\sqrt{2}-t)+Bt(\sqrt{2}-t)+Ct(\sqrt{2}+t)$$

- <u>Para $t=0$</u> $\Longrightarrow 1=2A\Longrightarrow A=\frac{1}{2}$
- <u>Para $t=\sqrt{2}$</u> $\Longrightarrow 1=C\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\Longrightarrow 1=4C\Longrightarrow C=\frac{1}{4}$
- <u>Para $t=-\sqrt{2}$</u> $\Longrightarrow 1=-B\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\Longrightarrow 1=-4b\Longrightarrow B=-\frac{1}{4}$

Por tanto, tenemos que:

$$\int\frac{dt}{t^3+2(1-t^2)t}\,dx=\int\frac{dt}{t(\sqrt{2}+t)(\sqrt{2}-t)}\,dx=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}\ln|\sqrt{2}+t|-\frac{1}{4}\ln|\sqrt{2}-t|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\, dx = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{4}\ln|\sqrt{2}+\operatorname{sen} x| - \frac{1}{4}\ln|\sqrt{2}-\operatorname{sen} x| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{4}\ln(2-\operatorname{sen}^2 x) + C$$

r) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b) \\ \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2} = \operatorname{sen}(a)\cos(b)$$

Por tanto,

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(-x)}{2} = -\frac{1}{14}\cos(7x) + \frac{1}{2}\cos(-x) + C =$$

$$= -\frac{1}{14}\cos(7x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C$$

s) $\displaystyle\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x}$

Como la función es impar en el coseno, aplico el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$:

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

Aplico el método de coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} \Longrightarrow 1 = A(1-t) + B(1+t)$$

- <u>Para $t = 1$</u> $\Longrightarrow 1 = 2B \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$
- <u>Para $t = -1$</u> $\Longrightarrow 1 = 2A \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$

Por tanto,

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) + C$$

t) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Busco un binomio en el denominador.

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=$$
$$=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

Por tanto,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}}=\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$$

Aplico el siguiente cambio de variable. Es válido ya que es $\mathrm{tg}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ es una biyección de clase 1.

$$\left[\begin{array}{c}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\mathrm{tg}\,t \qquad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx=(1+\mathrm{tg}^2\,t)\,dt\end{array}\right]$$

Usando que $\mathrm{tg}^2\,t+1=\sec^2 t$, la integral queda:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{1+\mathrm{tg}^2\,t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,t+1}}\,dt=\int\frac{\sec^2 t}{\sqrt{\sec^2 t}}\,dt=\int|\sec t|\,dt=\int\sec t\,dt$$

donde he aplicado que $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, por lo que el coseno es positivo y por tanto la tangente también. Usando el ejercicio 1.s (apartado anteror), tenemos que:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\sec t\,dt=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\mathrm{sen}\,t}{1-\mathrm{sen}\,t}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\mathrm{sen}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]}{1-\mathrm{sen}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]}\right)+C$$

u) $\displaystyle\int\frac{dx}{x[\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2]}=\left[\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^3-2t^2-t+2}$

Factorizamos en primer lugar el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & & 1 & -1 & -2\\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\Longrightarrow t^3-2t^2-t+2=(t-1)(t^2-t-2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2\\ -1 & & -1 & 2\\ \hline & 1 & -2 & 0\end{array}\Longrightarrow t^3-2t^2-t+2=(t-1)(t+1)(t-2)$$

Por tanto,
$$\int \frac{dt}{t^3-2t^2-t+2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)(t-2)}$$

Aplico el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)(t-2)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-2} \Longrightarrow 1 = A(t+1)(t-2)+B(t-1)(t-2)+C(t^2-1)$$

- <u>Para $t=1$</u> $\Longrightarrow 1=-2A \Longrightarrow A=-\frac{1}{2}$
- <u>Para $t=-1$</u> $\Longrightarrow 1=6B \Longrightarrow B=\frac{1}{6}$
- <u>Para $t=2$</u> $\Longrightarrow 1=3C \Longrightarrow C=\frac{1}{3}$

Por tanto,

$$\int \frac{dt}{t^3-2t^2-t+2} = -\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\ln|t-2|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x[\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2]} = -\frac{1}{2}\ln|\ln(x)-1|+\frac{1}{6}\ln|\ln(x)+1|+\frac{1}{3}\ln|\ln(x)-2|+C$$

v) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x}$

Para la primera integral:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{c}\cos x = t\\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt\end{array}\right] = -\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}\cdot\frac{dt}{\operatorname{sen} x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} =$$
$$= \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)t^2}$$

Aplico ahora el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)t^2} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 = At(t+1)(t-1)+B(t+1)(t-1)+Ct^2(t-1)+Dt^2(t+1)$$

- <u>Para $t=0$</u> $\Longrightarrow 1=-B \Longrightarrow B=-1$
- <u>Para $t=1$</u> $\Longrightarrow 1=2D \Longrightarrow D=\frac{1}{2}$
- <u>Para $t=-1$</u> $\Longrightarrow 1=-2C \Longrightarrow C=-\frac{1}{2}$
- <u>Para $t=2$</u> $\Longrightarrow 1=6A+3B+4C+12D \Longrightarrow A=0$

Por tanto,

$$-\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C = \frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que la primera integral es:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1} \right| + C$$

Por tanto, el resultado final es:

$$\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1} \right| + \operatorname{tg} x + C$$

Ejercicio 1.6.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calcular:

a) $$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{\frac{1}{\cos^2 x}[a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x]} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2}$$

Aplico el siguiente cambio de variable:

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right]$$

Por tanto, la integral queda:

$$\int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b} t\right)^2 + 1} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{\left(\frac{a}{b} t\right)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} t\right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) + C$$

b) $$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$$

Aplico en primer lugar el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{ax} & u'(x) = ae^{ax} \\ v'(x) = \cos(bx) & v(x) = \frac{1}{b} \operatorname{sen}(bx) \end{array} \right]$$

La integral, por tanto, queda:

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \int \frac{a}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx$$

Aplico de nuevo el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{ax} & u'(x) = ae^{ax} \\ v'(x) = \operatorname{sen}(bx) & v(x) = -\frac{1}{b} \cos(bx) \end{array} \right]$$

La integral, por tanto, queda:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx)\, dx &= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx = \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos(bx)\, dx \end{aligned}$$

Despejando la integral, tenemos que:

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{\frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx)}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + C = \frac{be^{ax} \operatorname{sen}(bx) + ae^{ax} \cos(bx)}{b^2 + a^2} + C$$

Ejercicio 1.6.3. Obtener una fórmula recurrente para las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^n e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x^n & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array}\right] = -x^n e^{-x} + \int nx^{n-1}e^{-x} dx =$
$\displaystyle = -\frac{x^n}{e^x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\ dx$

Definiendo la sucesión $I_n = \int x^n e^{-x} dx$, tenemos que:

$$I_n = -\frac{x^n}{e^x} + nI_{n-1} \qquad \forall n = 1, 2, \dots$$

Calculamos el primer elemento de la sucesión, I_0:

$$I_0 = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x} + C = -\frac{1}{e^x} + C$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{cc} u(x) = \cos^{n-1}(x) & u'(x) = -(n-1)\cos^{n-2}(x)\operatorname{sen}(x) \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \operatorname{sen} x \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx = \cancelto{0}{\left[\operatorname{sen}(x)\cos^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2}(x)\operatorname{sen}^2(x)\ dx = \\ = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\ dx = \\ = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)\ dx\end{aligned}$$

Definiendo la sucesión $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx$, tenemos que:

$$I_n = (n-1)(I_{n-2}-I_n) = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \Longrightarrow I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n} \qquad \forall n = 2, 3, \dots$$

Calculamos I_0 y I_1:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Ejercicio 1.6.4. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\ dt}{x^3}$

- **Opción 1: Resolviendo la integral**

  Para resolver esa integral, aplico las siguientes identidades trigonométricas:
  $$\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \\ \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos(2t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

  Por tanto,
  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\,dt}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 1-\cos(2t)\,dt}{2x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left[t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}{2x^3} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{6x^2} = \\ &\stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{12x} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(2x)}{12} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- **Opción 2: Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo**

  Sea $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$. Como $f(\mathbb{R}) = [0,1]$, tenemos que está acotada. Además, f es continua en $\mathbb{R}$.

  Definimos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, y por el TFC tengo que $F(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, con $F'(x) = f(x)$.

  Por tanto,
  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\,dt}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{6x} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\operatorname{sen} t}\,dt}{x^2}$

Sea $f(t) = e^{\operatorname{sen} t}$. Como $f(\mathbb{R}) = [e^{-1}, e]$, tenemos que está acotada. Además, f es continua en $\mathbb{R}$.

Definimos $F(x^2) = \int_0^x f(t)\,dt$, y por el TFC tengo que $F(x^2)$ es derivable en $\mathbb{R}$, con $F'(x^2) = f(x) \Longrightarrow F'(x) = 2f(x)$.

Por tanto,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\operatorname{sen} t}\,dt}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x^2)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xf(x^2)}{2x} = \\ &= \lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0} = e^{\operatorname{sen} x^2} = e^0 = 1\end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx$

b) $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{1-2x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

e) $\displaystyle\int_0^1 xe^{ax^2+b}\,dx \qquad (a,b\in\mathbb{R})$

f) $\displaystyle\int_0^1 a^{2x}\,dx \qquad (a\in\mathbb{R}^+)$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+3}\,dx$

j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

k) $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx$

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

ll) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}}\,dx$

n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}\,dx$

o) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

p) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

q) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \qquad (0<a<b).$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

s) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Ejercicio 1.6.6. Estudiar la convergencia y, cuando la haya, calcular el valor las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^n\,dx \quad (a>0)$

- Para $n \neq -1$:

$$\int_a^{+\infty} x^n\,dx = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^c = \lim_{c\to\infty}\frac{c^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} = \left\{\begin{array}{cc} \infty & n>-1 \\ -\frac{a^{n+1}}{n+1} & n<-1 \end{array}\right.$$

- Para $n=-1$:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty}[\ln x]_a^c = \lim_{c\to\infty}\ln\frac{c}{a} = \infty$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_a^{+\infty} x^n\,dx = \left\{\begin{array}{cc} \infty & n\geq -1 \\ -\dfrac{a^{n+1}}{n+1} & n<-1 \end{array}\right.$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{c\to-\infty}[e^x]_c^0 = 1$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \lim_{c\to\infty}\int_0^c (e^x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^c = 2$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\,dx \quad (a\in\mathbb{R})$

- Para $a=0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^0\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx = \infty = \lim_{c\to-\infty}[t]_c^0 + \lim_{c\to\infty}[t]_0^c = \infty$$

- Para $a>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_c^0 + \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^c =$$
$$= \frac{1}{a} - 0 + 0 + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

- Para $a < 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}\, dx = \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_c^0 + \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^c =$$
$$= \frac{1}{a} + \infty + \infty + \frac{1}{a} = \infty$$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array}\right] = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dt}{t(t+t^{-1})} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[\arctan t\right]_1^c = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^8}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^8} = \left[\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array}\right] = \lim_{c\to\infty} \int_{\ln 2}^c \frac{dt}{t^8} = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{t^{-7}}{-7}\right]_{\ln 2}^c = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{1}{-7t^7}\right]_{\ln 2}^c = \frac{1}{7\ln^7 2}$$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\, dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-e^x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} e^x e^{-e^x}\, dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \int_{e^{-c}}^{e^c} e^{-t}\, dt = \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_{e^{-c}}^{e^c} = -e^{-\infty} + e^0 = 1$$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{-x} & u'(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = \operatorname{sen} x & v(x) = -\cos x \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-x}\cos x\Big|_0^c - \int_0^c e^{-x}\cos x\, dx\right] = \left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{-x} & u'(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \operatorname{sen} x \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-x}\cos x - e^{-x}\operatorname{sen} x\Big|_0^c - \int_0^c e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx\right]$$

Por tanto, tenemos que:

$$2\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-x}\cos x - e^{-x}\operatorname{sen} x\right]\Big|_0^c \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}$$

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c x^n e^{-x}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x^n & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{c\to\infty} -x^n e^{-x}\Big|_0^c + \int_0^c nx^{n-1}e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^c + n\int_0^c x^{n-1}e^{-x}\, dx =$$

$$= \lim_{c\to\infty} -\frac{c^n}{e^c} + n\int_0^c x^{n-1}e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} n\int_0^c x^{n-1}e^{-x}\, dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$$

Definiendo la sucesión $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$, tenemos que:

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0 = n!$$

Esto se debe a que $I_0 = 1$:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^c = 1$$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx$

l) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

ll) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

m) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R}, a<b)$

n) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$

ñ) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

o) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}}\, dx$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Ejercicio 1.6.7. Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente integral converge, calculando el valor de la misma:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}dx$$

Tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} \frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}dx = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln|2x^2+2\alpha| - \alpha\ln|x+1|\right]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\sqrt[4]{|2x^2+2\alpha|}}{(x+1)^\alpha}\right|\right]_0^c = \lim_{c\to\infty}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{|2c^2+2\alpha|}}{(c+1)^\alpha}\right| - \ln\left|\sqrt[4]{|2\alpha|}\right| = \lim_{c\to\infty}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{|2c^2+2\alpha|}}{(c+1)^\alpha\sqrt[4]{|2\alpha|}}\right| =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\ln\sqrt[4]{\left|\frac{2c^2+2\alpha}{(c+1)^{4\alpha}\cdot 2\alpha}\right|} = \lim_{c\to\infty}\ln\sqrt[4]{\left|\frac{c^2+\alpha}{(c+1)^{4\alpha}\cdot\alpha}\right|} = \begin{cases} \ln\infty = \infty & \text{si} \quad 2 > 4\alpha \\ \ln\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} = \ln\sqrt[4]{2} & \text{si} \quad 2 = 4\alpha \\ \ln 0 = -\infty & \text{si} \quad 2 < 4\alpha \end{cases}$$

Por tanto, como tenemos que el integrando es localmente integrable, tenemos que solo converge para $\alpha = \frac{1}{2}$, valor para el cual la integral vale $\ln\sqrt[4]{2}$.

Ejercicio 1.6.8. Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1\right)\,dx = 1.$$

Resuelvo en primer lugar la integral indefinida:

$$\int\left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1\right)\,dx = \int\frac{(\beta-\alpha)x+\alpha}{x(2x+\alpha)}\,dx$$

- <u>Para $\alpha \neq 0$</u>: Por tanto, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{x(2x+\alpha)} = \frac{A'}{x} + \frac{B'}{2x+\alpha} = \frac{A'(2x+\alpha)+B'x}{x(2x+\alpha)}$$

  - Para $x = 0 \Longrightarrow 1 = A'\alpha \Longrightarrow A' = \frac{1}{\alpha}$
  - Para $x = -\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 1 = -B'\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow B' = -\frac{2}{\alpha}$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx &\stackrel{Ec.\ 1{,}6{,}8}{=} \int \frac{(\beta-\alpha)x+\alpha}{x(2x+\alpha)}\, dx = \\
&= (\beta-\alpha)\int \frac{x}{x(2x+\alpha)}\, dx + \alpha\left[\frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{x} - \frac{2}{\alpha}\int \frac{dx}{2x+\alpha}\right] = \\
&= \frac{(\beta-\alpha)}{4}\int \frac{4x}{x(2x+\alpha)}\, dx + \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{2x+\alpha} = \\
&= \frac{(\beta-\alpha)}{4}\ln|2x^2+\alpha x| + \ln|x| - \ln|2x+\alpha| + C \\
&= \frac{(\beta-\alpha)}{4}\ln|2x^2+\alpha x| + \ln\left|\frac{x}{2x+\alpha}\right| + C
\end{aligned}$$

- <u>Para $\alpha = 0$</u>:

$$\int \left(\frac{2x^2+\beta x}{2x^2} - 1 \right) dx \stackrel{Ec.\ 1{,}6{,}8}{=} \int \frac{\beta x}{2x^2}\, dx = \frac{\beta}{4}\ln|2x^2| + C$$

Una vez tenemos la integral indefinida, calculamos la integral definida.

- <u>Para $\alpha = 0$</u>:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+\beta x}{2x^2} - 1 \right) dx = \frac{\beta}{4}\lim_{c\to\infty}\left[\ln 2x^2\right]_1^c = \frac{\beta}{4}\lim_{c\to\infty}\ln 2c^2$$

Por tanto, para $\alpha = 0$ tenemos que converge si y solo si $\beta = 0$. No obstante, tenemos que:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2} - 1 \right) dx = 0$$

Por tanto, para $\alpha = 0$ no se puede dar.

- <u>Supuesto $\alpha \neq 0$</u>:

Veamos antes si la siguiente integral definida converge:

$$\int_{\left|\frac{\alpha}{2}\right|+1}^{+\infty} \left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{(\beta-\alpha)}{4}\ln|2x^2+\alpha x| + \ln\left|\frac{x}{2x+\alpha}\right|\right]_{\left|\frac{\alpha}{2}\right|+1}^{c}$$

Como en el valor de la primitiva en $\left|\frac{\alpha}{2}\right|+1$ es finito, ya que se trata de un valor del dominio de dicha función continua, para que esa integral converja es necesario que el límite en $+\infty$ de la integral converja.

$$\left[\lim_{c\to+\infty}\frac{(\beta-\alpha)}{4}\ln|2c^2+\alpha c| + \ln\left|\frac{c}{2c+\alpha}\right|\right] \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \beta-\alpha = 0 \Longleftrightarrow \beta = \alpha$$

Por tanto, si $\alpha \neq 0$ es necesario que $\alpha = \beta$ para que la integral de partida converja, ya que:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx =$$
$$= \int_1^{\left|\frac{\alpha}{2}\right|+1} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx + \int_{\left|\frac{\alpha}{2}\right|+1}^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx$$

Como observación, cabe destacar que en el caso de que $-\frac{\alpha}{2} > 1$, la primera integral sería impropia y también sería necesario dividirla en dos integrales. No obstante, como la segunda parte ya vemos que solo converge para $\alpha = \beta$, tenemos que esto es condición necesaria para que la integral de partida converja. Por tanto, procedemos suponiendo $\alpha = \beta \neq 0$:

- Supuesto $-\frac{\alpha}{2} \leq 1 \iff -\alpha \leq 2 \iff \alpha > -2$.

  Tenemos que el integrando no tiene ninguna asíntota vertical. Por tanto:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx =$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\ln\left| \frac{x}{2x+\alpha} \right| \right]_1^c = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2+\alpha} = \ln\frac{2+\alpha}{2} = 1 \iff \frac{2+\alpha}{2} = e \iff$$
$$\iff \alpha = 2e - 2$$

  Además, tenemos que $2e - 2 > -2 \iff 2e > 0$, por lo que estamos en esta suposición. Por tanto, tenemos que si $\alpha = \beta = 2e - 2$, la integral impropia vale 1.

- Supuesto $-\frac{\alpha}{2} \geq 1 \iff -\alpha \geq 2 \iff \alpha < -2$.

  Como la asíntota pertenece al intervalo de integración, rompemos la integral en ese punto.

$$\int_1^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx$$

  Veamos no obstante si la primera integral es convergente:

$$\int_1^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx = \lim_{c\to-\frac{\alpha}{2}^-} \int_1^{c} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx =$$
$$= \lim_{c\to-\frac{\alpha}{2}^-} \left[\ln\left| \frac{x}{2x+\alpha} \right| \right]_1^c = \infty - \ln\left| \frac{1}{2+\alpha} \right| = \infty$$

  Por tanto, tenemos que en este caso la integral no es convergente.

Por tanto concluimos que:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x + \alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx = 1 \iff \alpha = \beta = 2e - 2$$

Ejercicio 1.6.9. Se define la función gamma como la función $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

a) Probar que dicha integral converge para $x > 0$ y diverge para $x \leq 0$.

b) Probar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para cada $x > 0$.

c) Deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.6.10. Justificar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales (sin necesidad de resolverlas):

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\, dx$

Sea $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}$. Sea $g(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^4}$. Veamos que $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ converge:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} g(x)\, dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x^2+3x+1}{x^4}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x^2}{x^4} + \frac{3x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\, dx = \\ &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} + 3\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1} + 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^t = \\ &= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Como ese límite es $L = \frac{17}{6} \in \mathbb{R}$, tenemos que converge. Probamos ahora que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}g(x) \geq f(x) \Longleftrightarrow \frac{x^2+3x+1}{x^4} \geq \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}} &\Longleftrightarrow x^4+x^3+\sqrt{x} \geq x^4 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x^3+\sqrt{x} \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0 \qquad \text{Cierto.}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [1, +\infty[$.

Como $f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [1, +\infty[$ y el orden se conserva en las integrales de Riemman, por el Criterio de Comparación tenemos que:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\, dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\, dx$ sí converge.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}\, dx$

Sea $f(x) = \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}$. Sea $g(x) = \frac{1}{x}$. Veamos que $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge positivamente:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}; dx = \lim_{t\to+\infty} [\ln|x|]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$$

Calculamos ahora el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5} = \frac{1}{2} = L \in \mathbb{R}^*$$

Como $L \in \mathbb{R}^*$, tenemos que, por el Criterio Límite de Comparación,

$$\int_1^{+\infty} g(x)\, dx \text{ diverge positivamente} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge positivamente}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}\, dx$ diverge positivamente.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$

Sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$. Sea $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Veamos que $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge positivamente:

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1}; dx = \lim_{t\to+\infty} [\ln|x+1|]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$$

Calculamos ahora el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^4+1}} = 1 = L \in \mathbb{R}^*$$

Como $L \in \mathbb{R}^*$, tenemos que, por el Criterio Límite de Comparación,

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx \text{ diverge positivamente} \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge positivamente}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$ diverge positivamente.

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

Sea $f(x) = \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Sea $g(x) = \frac{1}{x+1}$, y por el ejercicio anterior tenemos que $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge positivamente. Calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 = L \in \mathbb{R}^*$$

Como $L \in \mathbb{R}^*$, tenemos que, por el Criterio Límite de Comparación,

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx \text{ diverge positivamente} \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge positivamente}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ diverge positivamente.

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Vemos, en primer lugar, que la función $f(x) = e^{-x^2}$ es par. Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx + 2\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Como $f(x)$ está acotada en $[-1,1]$ y es Riemman Integrable, tenemos que esa parte de la integral converge. Veamos la integral impropia restante. Definimos $g(x) = e^{-x}$, y veamos que su integral entre 1 y $+\infty$ converge:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} -e^{-t} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Como tenemos que $L = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}$, tenemos que dicha integral impropia converge. Vemos ahora que $g(x) \geq f(x)$:

$$g(x) \geq f(x) \Longleftrightarrow e^{-x} \geq e^{-x^2} \Longleftrightarrow -x \geq -x^2 \Longleftrightarrow x \leq x^2 \qquad \text{Cierto } (x \in [1,+\infty])$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, tenemos que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Por lo mencionado anteriormente, tenemos que la integral buscada es suma de integrales convergentes, por lo que converge a la suma de los límites. Es decir, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \to +\infty$, tenemos que $f(x)$ no está acotada, por lo que se trata de una integral impropia.

Sea $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Veamos que $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1} -2\int_0^t \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t = \\ = \lim_{t\to 1} -2\sqrt{1-t} + 2\sqrt{1} = 2$$

Como ese límite es $L = 2 \in \mathbb{R}$, tenemos que converge. Probamos ahora que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,1]$:

$$g(x) \geq f(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^4} \geq \sqrt{1-x} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow 1-x^4 \geq 1-x \Longleftrightarrow x \geq x^4 \qquad \text{Cierto, ya que } x \in [0,1].$$

Como $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0,1[$ y el orden se conserva en las integrales de Riemman, por el Criterio de Comparación tenemos que:

$$\int_0^1 g(x)\,dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ sí converge.

g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$

Sea $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$. Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \to +\infty$, tenemos que $f(x)$ no está acotada, por lo que se trata de una integral impropia.

Sea $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Veamos que $\int_0^2 g(x)\,dx$ converge:

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)\,dx = \lim_{t\to 2}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{t\to 2} -2\int_0^t \frac{-dx}{2\sqrt{2-x}} = \lim_{t\to 2}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^t = \\ = \lim_{t\to 2} -2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Como ese límite es $L = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, tenemos que converge. Probamos ahora que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,2]$:

$$\begin{aligned}g(x) \geq f(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}} \Longleftrightarrow (1+x^2)\sqrt{4-x^2} \geq \sqrt{2-x} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (1+x^2)\sqrt{2+x} \geq 1\end{aligned}$$

donde esto es cierto, ya que al ser $x \in [0,2]$, tenemos que $\sqrt{2+x} \geq \sqrt{2} > 1$ y $(1+x^2) \geq 1$. Por tanto, tenemos que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,2]$.

Como $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0,2[$ y el orden se conserva en las integrales de Riemman, por el Criterio de Comparación tenemos que:

$$\int_0^2 g(x)\,dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_0^2 f(x)\,dx \text{ converge}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$ sí converge.

h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$

Sea $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$. Como $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to +\infty$, tenemos que $f(x)$ no está acotada, por lo que se trata de una integral impropia.

Sea $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$. Veamos que $\int_2^3 g(x)\,dx$ converge:

$$\int_2^3 g(x)\,dx = \lim_{t\to 3}\int_2^t \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3} -2\int_2^t \frac{-dx}{2\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\to 3} -2\sqrt{3-t}+2\sqrt{1} = 2$$

Como ese límite es $L = 2 \in \mathbb{R}$, tenemos que converge.

Resolvemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 1 = L \in \mathbb{R}^*$$

Como $L \in \mathbb{R}^*$, tenemos que, por el Criterio Límite de Comparación,

$$\int_2^3 g(x)\,dx \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_2^3 f(x)\,dx \text{ converge}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}\,dx$ converge.

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx \qquad (m \in \mathbb{N})$.

Sea $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^m}$.

- Para $m \neq 1$:
  Veamos en primer lugar que, por la acotación del coseno,

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^m} \leq \frac{2}{x^m} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Sea $g(x) = \frac{2}{x^m}$. Veamos que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$ converge:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}}\int_0^t \frac{2}{x^m}\,dx = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}}\left[2\cdot\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} 2\cdot\frac{t^{-m+1}}{-m+1} = L \in \mathbb{R}$$

Como ese límite es $L \in \mathbb{R}$, tenemos que converge.
Por el criterio de comparación, como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx \text{ converge}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ converge para $m \neq 1$.

Para $m = 1$:
Sea $g(x) = 1$. Es fácil ver que su integral converge en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Además,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}^*$$

Como $L \in \mathbb{R}^*$, y tenemos que la integral de $g(x)$ es convergente en dicho intervalo, por el Criterio Límite de comparación se tiene que la integral de $f(x)$ es convergente.
Es decir, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x}\, dx$ es convergente.

Por tanto, hemos llegado a que dicha integral es convergente $\forall m \in \mathbb{N}$.

1.7. Aplicaciones del Cálculo Integral

Ejercicio 1.7.1. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones dadas por $f(x) = 3x$ y por $g(x) = x^2$.

Ejercicio 1.7.2. Calcular mediante integración, el área de un triángulo y de un trapecio.

Ejercicio 1.7.3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \; x^3$, el eje de abcisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 1.7.4. Calcular el área del recinto limitado por la curva que tiene por ecuación $f(x) = \frac{x-2}{(x-4)(x+2)}$, el eje de abcisas y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

Ejercicio 1.7.5. Calcular el área del recinto limitado por la parábola que tiene por ecuación $y^2 - 2x = 0$ y la recta que une los puntos $(2, -2)$ y $(4, 2\sqrt{2})$.

Ejercicio 1.7.6. Calcular el área del recinto limitado por la parábola que tiene por ecuación $f(x) = 4x - x^2$ y el eje de abcisas.

Ejercicio 1.7.7. Calcular el área de los recintos limitados por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y la recta de ecuación $x + y = 1$.

Ejercicio 1.7.8. Calcular el área comprendida entre las curvas $x^2 + y^2 = 2$ y $2y = x^2 + 1$.

Ejercicio 1.7.9. Calcular el área de la región acotada delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \ln x$, la recta $x = e$, y el eje OX.

Para saber qué área me piden, representamos la gráfica de $f(x)$. Como no indican dominio, tomamos el dominio maximal, es decir, $Dom(f) = \mathbb{R}^+$. Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R}^+$, con

$$f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Ejercicio 1.7.10. Calcular el área limitada por la curva $y(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, los ejes coordenados y la recta $x = a$, siendo $a > 0$.

Ejercicio 1.7.11. Calcular el área de cada una de las regiones del plano que delimitan conjuntamente las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el primer cuadrante.

Ejercicio 1.7.12. Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

Ejercicio 1.7.13. Calcular el valor de λ para el cual la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos partes de igual área a la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 1.7.14. Calcular el área de una elipse de semiejes a y b.

Ejercicio 1.7.15. Calcular el área comprendida entre las elipses $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Ejercicio 1.7.16. Calcular el área encerrada por el bucle de la curva que tiene por ecuación $y^2 = x(x-1)^2$.

Ejercicio 1.7.17. Dados $a, b > 0$, calcular el área encerrada por la curva que tiene por ecuación $x^4 - ax^3 + by^2 = 0$.

Ejercicio 1.7.18. Sea $a > 0$. Calcular el área comprendida entre el esferoide que tiene por ecuación $y^2(a+x) = x^2(a-x)$, y su asíntota vertical.

Ejercicio 1.7.19. Calcular la longitud de la curva $y(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Por lo visto en clase, notando l como la longitud pedida, sabemos que:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Calculamos por tanto dicha derivada, que sabemos que es derivable $[1, 2]$ por ser continua en dicho intervalo:

$$y'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x[e^x - 1 - (e^x + 1)]}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Por tanto,

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left[\frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}\right]^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}\, dx =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}}\, dx = \ln \frac{e^2 - \frac{1}{e^2}}{e - \frac{1}{e}}$$

Ejercicio 1.7.20. Calcular la longitud de arco de la curva $y(x) = \sqrt{8} \ln x$ entre los puntos $(1, 0)$ y $(8, \sqrt{8} \ln 8)$.

Ejercicio 1.7.21. Hallar la longitud de arco de la curva $y(x) = 2\sqrt{x}$, entre los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 1.7.22. Hallar la longitud de arco de la curva $y(x) = \ln x$, entre los puntos $x = \sqrt{3}$ y $x = \sqrt{8}$.

Ejercicio 1.7.23. Sea $a > 0$. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica de ecuación $ay^2 = x^3$ comprendido entre el origen de coordenadas y el punto $x = 5a$.

Ejercicio 1.7.24. Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular la longitud de arco de la curva dada por la ecuación $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$.

Ejercicio 1.7.25. Sea $a > 0$. Hallar la longitud de arco de la catenaria de ecuación $y(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ entre el origen de coordenadas y el punto (x_0, y_0).

Ejercicio 1.7.26. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar sobre el eje OX la superficie limitada por parábola $y = ax - x^2$ (siendo $a > 0$) y el eje de abcisas.

Ejercicio 1.7.27. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar sobre el eje OX, la región limitada por la gráfica de curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, el eje de abcisas en el intervalo $[0, \pi]$.

Ejercicio 1.7.28. Para cada $a > 0$, sea $V(x)$ el volumen del sólido obtenido al girar sobre el eje OX la superficie determinada por la gráfica de la función $y(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ cuando t recorre el intervalo $[0, x]$. Determinar el valor de $a > 0$ tal que $V(a) = \dfrac{1}{2} \lim_{x\to\infty} V(x)$.

Ejercicio 1.7.29. Un sólido de revolución está generado por la rotación alrededor del eje OX de la superficie determinada por gráfica de la función positiva $y = f(x)$ sobre el intervalo $[0, a]$. Si para $a > 0$ el volumen de dicho sólido es $a^3 + a$, ¿Quién es la función f?

Ejercicio 1.7.30. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje OY la superficie de la región acotada determinada por las parábolas $y = ax^2$ e $y = b - cx^2$, siendo $a, b, c > 0$.

Ejercicio 1.7.31. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar la curva $y^2 = 8x$, para valores de x en el intervalo $[0, 2]$ cuando la curva gira sobre:

a) El eje OX,

b) El eje OY,

c) La recta $x = 2$,

Ejercicio 1.7.32. Determinar el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX la región acotada determinada por las parábolas $y^2 = 2px$, y $x^2 = 2py$, siendo $p > 0$.

Ejercicio 1.7.33. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejercicio 1.7.34. Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 4$, y $g(x) = 4 - x$, cuando dicha región gira alrededor de la recta $y = -1$.

Ejercicio 1.7.35. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje OX la región que en el primer cuadrante delimitan las curvas $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$ e $y = e$.

Ejercicio 1.7.36. Calcular el volumen generado cuando la superficie acotada limitada por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ y el eje OX se hace girar alrededor de la recta $y = 6$.

Ejercicio 1.7.37. Calcular el volumen del toro. Esto es el sólido de revolución generado por un círculo de radio r que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano del círculo, a una distancia a del centro del círculo, con $a > r$.

Ejercicio 1.7.38. Calcular la superficie de la esfera de radio r.

Ejercicio 1.7.39. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 1.7.40. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $8y^2 = x^2 - x^4$ alrededor del eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 1.7.41. Calcular el área lateral de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = \frac{e^x + e^{-1}}{2}$ alrededor del eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 1.7.42. Calcular el área lateral de superficie de revolución engendrada al girar la curva $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje OX

Ejercicio 1.7.43. Calcular el área lateral de superficie la superficie de revolución engendrada por la curva $y^2 = 4x$ cuando gira alrededor del alrededor del eje OX en el intervalo $[0, 3]$.