

Topología I

Examen IX

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

Topología I

Examen IX

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Antonio Gálvez López.¹

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 14 de febrero de 2023.

Duración 3 horas.

¹El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (4.5 puntos). Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Para cada $(x, y) \in X$ denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leq 1\}$$

En X , consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x, y) \in X\}$$

- (a) Prueba que \mathcal{B} es base para alguna topología \mathcal{T} en X .
- (b) ¿Verifica (X, \mathcal{T}) el segundo axioma de numerabilidad?
- (c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}$.
- (d) En X consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x, y) = \lambda(x', y')$$

Prueba que $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ donde \mathcal{T}_D es la topología discreta.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

- 2a. Sean (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') espacios topológicos. Prueba que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo si y sólo si (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') son conexos.
- 2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 3 (3 puntos). Consideremos $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, donde p es un punto que no pertenece a \mathbb{R} y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde \mathcal{T}_u denota la topología usual de \mathbb{R} . Demuéstrese que:

- (a) (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico.
- (b) (X, \mathcal{T}) es compacto.
- (c) (X, \mathcal{T}) es T_2 y conexo.

Ejercicio 1 (4.5 puntos). Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada $(x, y) \in X$ denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leq 1\}$$

En X , consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x, y) \in X\}$$

(a) Prueba que \mathcal{B} es base para alguna topología \mathcal{T} en X .

Para una mayor intuición de la base dada, notemos que $B_{(x,y)}$ es el segmento que une $(0,0)$ con (x, y) sin incluir el $(0,0)$.

Para ver que \mathcal{B} es base, veamos que verifican B1 y B2:

$$\text{B1)} \quad \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$$

Por ser $B_{(x,y)} \subseteq X \quad \forall B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$, sabemos que $\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} \subseteq X$.

Sea $(x, y) \in X$, $(x, y) \in B_{(x,y)} \Rightarrow (x, y) \in \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$.

Luego $X \subseteq \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$.

$\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$ y se tiene B1.

B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \mid x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Sean $B_{(x,y)}, B_{(x',y')} \in \mathcal{B}$. Sea $x = (u, v) \in B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')}$
Veamos que:

$$B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} = B = \{(tx'', ty'') \mid 0 < t \leq 1\} = B_{(x'', y'')}$$

Donde:

$$(x'', y'') = \begin{cases} (x, y) & \text{si } \|(x, y)\| \leq \|(x', y')\| \\ (x', y') & \text{si } \|(x', y')\| < \|(x, y)\| \end{cases}$$

Por lo que:

$$B = \begin{cases} B_{(x,y)} & \text{si } \|(x, y)\| \leq \|(x', y')\| \\ B_{(x',y')} & \text{si } \|(x', y')\| < \|(x, y)\| \end{cases}$$

$$B \in \mathcal{B} \text{ y además, } x \in B = B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')}$$

Por lo que se tendría B2.

$$\begin{aligned} (u, v) \in B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} &\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in]0, 1] \mid (u, v) = \alpha(x, y) = \beta(x', y') \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \text{ con } \frac{\beta}{\alpha} > 0 \end{aligned}$$

- Supongamos que $\|(x, y)\| \leq \|(x', y')\|$:

Sea $t \in]0, 1]$, entonces $(tx, ty) = t(x, y) \in B_{(x, y)}$.

$$t(x, y) = t \cdot \frac{\beta}{\alpha}(x', y')$$

Estamos interesados en ver que $t \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$ para tener que $(tx, ty) \in B_{(x', y')}$.

$$\|(x, y)\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \right\| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|(x', y')\| \leq \|(x', y')\| \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow (tx, ty) \in B_{(x', y')} \quad \forall (tx, ty) \in B_{(x, y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{(x, y)} \subseteq B_{(x', y')} \Rightarrow B_{(x, y)} \cap B_{(x', y')} = B_{(x, y)}$$

- Supongamos que $\|(x', y')\| \leq \|(x, y)\|$:

Sea $t' \in]0, 1]$, entonces $(t'x', t'y') = t'(x', y') \in B_{(x', y')}$.

$$t'(x', y') = t' \cdot \frac{\alpha}{\beta}(x, y)$$

Estamos interesados en que $t' \cdot \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$ para tener que $(t'x', t'y') \in B_{(x', y')}$.

$$\|(x', y')\| = \left\| \frac{\alpha}{\beta}(x, y) \right\| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \|(x, y)\| \leq \|(x, y)\| \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t' \cdot \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \Rightarrow (t'x', t'y') \in B_{(x', y')} \quad \forall (t'x', t'y') \in B_{(x', y')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{(x', y')} \subseteq B_{(x, y)} \Rightarrow B_{(x, y)} \cap B_{(x', y')} = B_{(x', y')}$$

Notemos que en el caso $\|(x, y)\| = \|(x', y')\|$, se tiene que $(x, y) = (x', y')$:

$$\|(x, y)\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \right\| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|(x', y')\| = \|(x', y')\| \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

Acabamos de probar que si tenemos $(u, v), (a, b) \in X \mid \exists \lambda > 0$ con $(u, v) = \lambda(a, b)$, entonces:

- O bien $B_{(u, v)} \subseteq B_{(a, b)}$
- O bien $B_{(a, b)} \subseteq B_{(u, v)}$

Cosa que nos será de utilidad a lo largo del examen.

(b) ¿Verifica (X, \mathcal{T}) el segundo axioma de numerabilidad?

No:

Supongamos que sí, luego $\exists \mathcal{B}'$ base numerable de (X, \mathcal{T}) .

Sea $(x, y) \in X$, consideramos el abierto $B_{(x, y)}$. \mathcal{B}' es base de (X, \mathcal{T}) , luego:

$$\exists B \in \mathcal{B}' \mid (x, y) \in B \subseteq B_{(x, y)}$$

Pero como B es el segmento que une el $(0, 0)$ (sin él) con un punto, y contiene al (x, y) , ha de ser $B_{(x,y)}$ o algo mayor. Por estar contenido en $B_{(x,y)}$ sabemos que:

$$B = B_{(x,y)}$$

Por este razonamiento, podemos definir una aplicación $f : X \rightarrow \mathcal{B}'$ dada por:

$$f(x, y) = B_{(x,y)} \quad \forall (x, y) \in X$$

Que es claramente inyectiva, luego $|X| \leq |\mathcal{B}'|$. Pero \mathcal{B}' era numerable y X no lo es, contradicción.

(c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}$.

$$A = \mathbb{R} \times]0, 1]$$

Veamos que A es abierto:

Sea $(x, y) \in A$, $(x, y) \in B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$. Veamos que $B_{(x,y)} \subseteq A$:

Sea $(tx, ty) \in B_{(x,y)}$ con $t \in]0, 1]$. Por ser $(x, y) \in A \Rightarrow y \in]0, 1]$.

Entonces, $ty \in]0, 1]$ por estar ambos en $]0, 1]$ ².

Luego $(tx, ty) \in A \quad \forall (tx, ty) \in B_{(x,y)}$.

Por lo que $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq A \quad \forall (x, y) \in A \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

$$\text{int}(A) = A$$

Para la clausura, intuimos que será el conjunto $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Veamos primero que este conjunto es cerrado:

Consideramos $B = X \setminus (\mathbb{R} \times]0, +\infty[) = (\mathbb{R} \times]-\infty, 0]) \setminus \{(0, 0)\}$ y veamos que es abierto:

Sea $(x, y) \in B$. Si $y = 0 \Rightarrow (x, 0) \in B_{(x,0)} \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\} \subseteq B$.

Si $y \neq 0 \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\Rightarrow y < 0$. $(x, y) \in B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid t \in]0, 1]\}$.

Luego, sea $(tx, ty) \in B_{(x,y)} \Rightarrow ty < 0 \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[\subseteq B$.

Por tanto, $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq B \quad \forall (x, y) \in B \Rightarrow B \in \mathcal{T} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Para concluir que $\overline{A} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, veamos que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$:

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in B$$

Sea $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, sea $B_{(x',y')} \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in B_{(x',y')}$

Sea $(u, v) = \frac{(x', y')}{\|(x', y')\|} \in \mathbb{S}^1 \cap (\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \subseteq A$, proporcional a (x', y')

Luego: $(u, v) \in B_{(x',y')} \Rightarrow A \cap B_{(x',y')} \neq \emptyset$.

$$\overline{A} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

Por tanto:

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A) = (\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \setminus (\mathbb{R} \times]0, 1]) = \mathbb{R} \times]1, +\infty[$$

²Nociones de Cálculo I

(d) En X consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x, y) = \lambda(x', y')$$

Prueba que $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ donde \mathcal{T}_D es la topología discreta.

Tratamos de buscar el homeomorfismo dando una identificación. Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} \end{aligned}$$

• Veamos en primer lugar que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$:

Dados $(x, y), (a, b) \in X$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}_f(a, b) &\Leftrightarrow f(x, y) = f(a, b) \Leftrightarrow \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \Leftrightarrow (x, y) = \frac{\|(x, y)\|(a, b)}{\|(a, b)\|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \lambda(a, b) \text{ con } \lambda = \frac{\|(x, y)\|}{\|(a, b)\|} > 0 \Leftrightarrow (x, y)\mathcal{R}(a, b) \end{aligned}$$

• A continuación, veamos que f es sobreyectiva:

Dado $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \|(x, y)\| = 1$. $\mathbb{S}^1 \subseteq X \Rightarrow (x, y) \in X$.

$$f(x, y) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{(x, y)}{1} = (x, y) \in \mathbb{S}^1$$

Falta ver que f es abierta o cerrada para tener que es una identificación.

• Por ser el espacio de llegada $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$, tenemos que cualquier aplicación es abierta y cerrada. En particular, nuestra f lo es.

Por un teorema visto en teoría, tenemos que f es una identificación. Por tanto, $\tilde{f}: (X/R, \mathcal{T}/R) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

2a. Sean (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') espacios topológicos. Prueba que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo si y sólo si (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') son conexos.

\Rightarrow) Supongamos que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo. Recordamos que π_X y π_Y son continuas y que la imagen de un conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo. Como:

$$\pi_X(X \times Y) = X \quad \pi_Y(X \times Y) = Y$$

Se tiene que (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') son conexos.

\Leftrightarrow) Supongamos que (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') son conexos. Como la conexión es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos) y tenemos que, para todo $x \in X$ e $y \in Y$:

$$X \cong X \times \{y\} \quad Y \cong \{x\} \times Y$$

Se tiene que $X \times \{y\}$ y $\{x\} \times Y$ son conexos $\forall x \in X, y \in Y$.

Recordamos además que la unión de conexos que intersecan a uno fijo es un conjunto conexo, luego (fijado un $y \in Y$):

$$X \times Y = \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \right) \cup (X \times \{y\})$$

$$(x, y) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Es un conjunto conexo.

- 2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es un homeomorfismo.

Sea $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ continua e inyectiva, falta ver que es sobreyectiva y abierta (o cerrada o que su inversa es continua) para llegar a que es un homeomorfismo.

Comenzamos viendo que es cerrada:

Sabemos que $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es compacta y T_2 (visto en clase), luego f es cerrada por un teorema visto en teoría.

Veamos ahora que es sobreyectiva:

Supongamos que no, luego $\exists p \in \mathbb{S}^1 \mid \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$

Por ser \mathbb{S}^1 conexa y f continua, sabemos que $f(\mathbb{S}^1)$ ha de ser conexo, luego $f(\mathbb{S}^1)$ ha de ser un arco de circunferencia.

Elegimos un punto del centro de dicho arco, $f(q) \in \text{Im}(f)$, y consideramos $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$:

$\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ es conexo, pero $\text{Im}(f) \setminus \{f(q)\}$ deja de ser conexo y se tiene que $f(\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}) = \text{Im}(f) \setminus \{f(q)\}$, lo que es una contradicción con que f sea continua. Esta idea ha de formalizarse.

Ejercicio 3 (3 puntos). Consideremos $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, donde p es un punto que no pertenece a \mathbb{R} y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde \mathcal{T}_u denota la topología usual de \mathbb{R} . Demuéstrese que:

- (a) (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico.

Notaremos al segundo conjunto como:

$$\Lambda = \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

Primero, reescribimos Λ para tener una mayor intuición de lo que tenemos que demostrar:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es cerrado y acotado en } \mathcal{T}_u\} \\ &= \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge O \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \text{ y no está mayorado ni minorado}\}\end{aligned}$$

Veamos que se verifican A1, A2 y A3 para tener el apartado probado:

A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{T} \\ \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u \text{ y } A &=]-\infty, -1[\cup \{p\} \cup]1, +\infty[\in \Lambda \\ \text{Luego: } X &= \mathbb{R} \cup A \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

A2) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

$$\text{Sea } J = \{i \in I \mid p \notin U_i\} = \{i \in I \mid U_i \notin \Lambda\}$$

$$U_j \in \mathcal{T}_u \quad \forall j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$$

$$U_i \in \Lambda \quad \forall i \in I \setminus J. \text{ Veamos si } \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \in \Lambda$$

$$p \in U_i \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow p \in \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i$$

$$U_i \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u$$

Sea $h \in I \setminus J$, tenemos que U_h no está mayorado ni minorado y por ser $U_h \subseteq \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\})$ no está mayorado ni minorado.

$$\text{Por tanto, } \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \Lambda$$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} U_j \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \in \mathcal{T}_u \cup \Lambda = \mathcal{T}$$

A3) Si $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

$$\text{Si } U, V \in \mathcal{T}_u \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}.$$

$$\text{Si } U \in \mathcal{T}_u \text{ y } V \in \Lambda \Rightarrow U \cap V = U \cap (V \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$$

Si $U, V \in \Lambda$:

$$p \in U \wedge p \in V \Rightarrow p \in U \cap V$$

$$\mathbb{R} \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbb{R} \setminus V \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$$

$$\mathbb{R} \setminus U \text{ acotado} \wedge \mathbb{R} \setminus V \text{ acotado} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) \text{ acotado}$$

$$\text{Luego } U \cap V \in \Lambda.$$

(b) (X, \mathcal{T}) es compacto.

Supongamos que tenemos un recubrimiento de X por abiertos de \mathcal{T} :

$$X = \mathbb{R} \cup \{p\} = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ con } U_i \in \mathcal{T}$$

$$p \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists h \in I \mid p \in U_h \text{ con } U_h \in \mathcal{T} \Rightarrow U_h \in \Lambda \Rightarrow \mathbb{R} \setminus U_h \text{ es compacto}$$

$$\mathbb{R} \setminus U_h \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ finito} \mid \mathbb{R} \setminus U_h \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

Por lo que $\bigcup_{j \in J} U_j \cup U_h$ es finito y se verifica que:

$$X = \mathbb{R} \setminus U_h \cup U_h \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \cup U_h$$

(c) (X, \mathcal{T}) es T_2 y conexo.

Veamos primero que es T_2 :

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$.

- Supongamos que $x, y \in \mathbb{R}$:

Por ser $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ T_2 , tenemos que $\exists U, V \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$ con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$

- Supongamos que $y = p$ y que $x \in \mathbb{R}$:

Tenemos que, para un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$U =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T} \text{ con } x \in U$$

$$V =]-\infty, x - \varepsilon[\cup]x + \varepsilon, +\infty[\cup \{p\} \in \Lambda \subseteq \mathcal{T} \text{ con } y \in V$$

$$U \cap V = \emptyset$$

Luego (X, \mathcal{T}) es T_2 .

Ahora que es conexo:

Se tiene que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. \mathbb{R} es conexo en \mathcal{T}_u .

Veamos que $\overline{\mathbb{R}} = X$ en (X, \mathcal{T}) para tener que (X, \mathcal{T}) es conexo:

$X \in C_{\mathcal{T}}$. Falta ver que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T} \mid p \in U$:

$$\text{Sea } U \in \mathcal{T} \mid p \in U \Rightarrow U \in \Lambda$$

$\{p\} \notin \Lambda$ ya que $\mathbb{R} \setminus \{p\} = \mathbb{R}$, que no es compacto en \mathcal{T}_u .

Además, $\Lambda \neq \emptyset$, luego tenemos que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T} \mid p \in U \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} = X$.

En teoría se ha visto que el cierre de un conjunto conexo es conexo, por lo que se tiene probado el apartado.