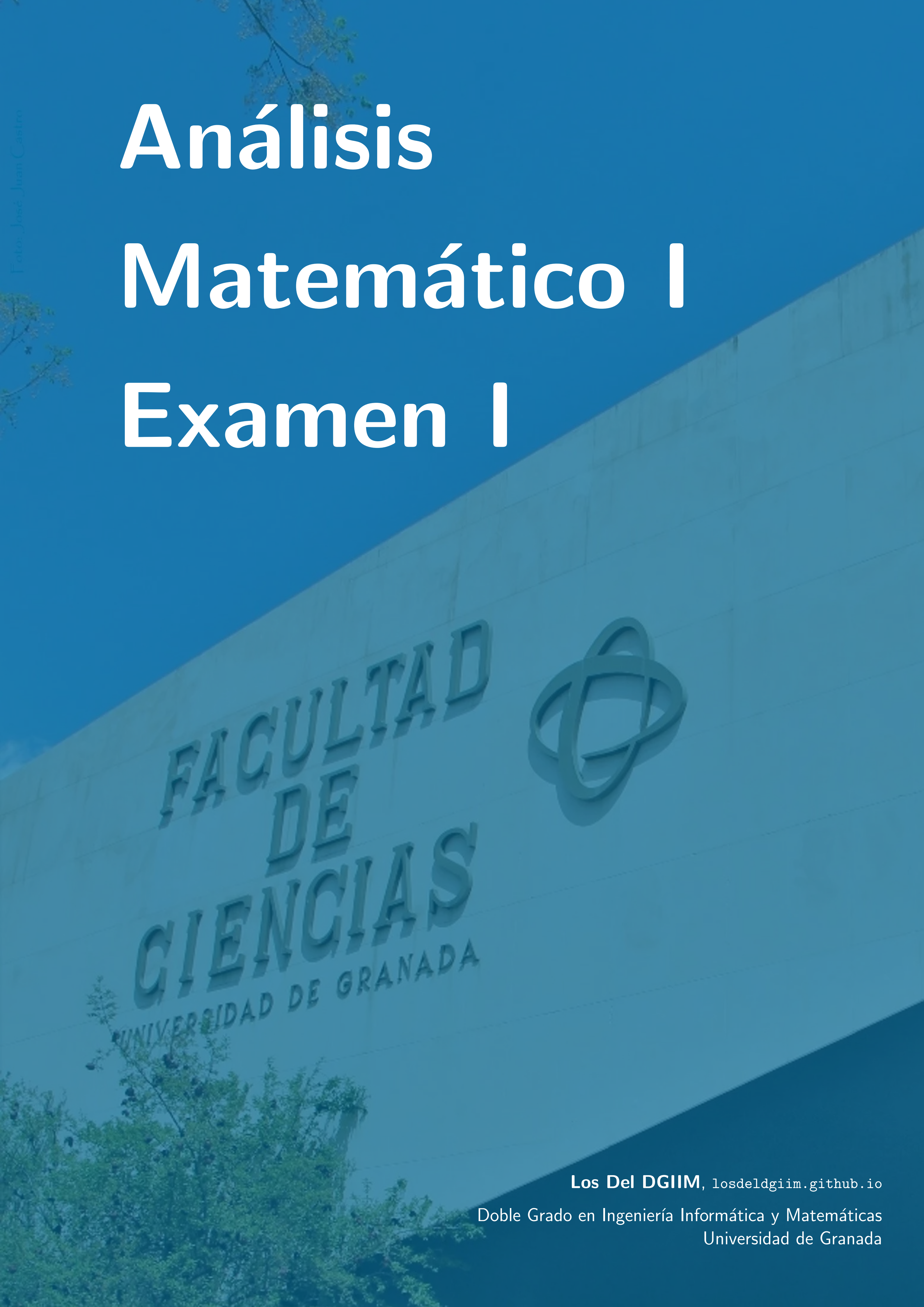
Análisis Matemático I
Examen I



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Análisis Matemático I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Salvador Villegas Barranco.

Fecha 20 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.**

1. Sean (E,d) y (E,ρ) dos espacios métricos de un mismo espacio E. Demostrar que son equivalentes:

   a) Las métricas d y ρ generan la misma topología en E.

   b) $d(x_n,x)\to 0$ si y solo si $\rho(x_n,x)\to 0$, siendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset E,\ x\in E$.

2. Sea (E,d) un espacio métrico. Definimos $\rho : E\times E\to\mathbb{R}$ mediante:

$$\rho(x,y)=\text{mín}\{1,d(x,y)\} \qquad \forall x,y\in E$$

   Demostrar que ρ es una métrica y que genera la misma topología en E que d.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $X=\{f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}\ \text{ continua} \mid \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\}$. Demostrar que X es un espacio normado considerando

$$\|f\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{2^n}+\int_1^{\infty}\frac{|f(x)|}{x^2}\,dx, \qquad f\in X$$

1. ¿Es la aplicación $T:X\to\mathbb{R}$ definida por $T(f)=f(4)$ lineal y continua?

2. ¿Es la aplicación $T:X\to\mathbb{R}$ definida por $T(f)=f(\pi)$ lineal y continua?

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales, continuidad de las derivadas parciales, y diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\,\text{sen}(xy) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$