

Álgebra II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

1. G-conjuntos y p-grupos	5
1.1. Órbitas de un elemento	9
1.1.1. Acción por traslación	15
1.1.2. Acción por conjugación	15
1.1.3. Acción por conjugación sobre subgrupos	18
1.2. p -grupos	19
1.2.1. p -subgrupos de Sylow	23
2. Clasificación de grupos abelianos finitos	31
2.1. Clasificación de grupos abelianos no finitos	37
2.1.1. Forma Normal de Smith de una matriz	40
3. Clasificación de grupos de orden bajo	47
3.1. Grupos abelianos	47
3.2. Producto semidirecto	47
3.2.1. Grupos de orden pq	54
3.2.2. Grupos de orden 12	56
3.2.3. Grupos de orden 8	58

1. G –conjuntos y p -grupos

Definición 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, una acción¹ de G sobre X es una aplicación:

$$\begin{aligned} ac : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto ac(g, x) \end{aligned}$$

Que verifica:

$$i) \quad ac(1, x) = x \quad \forall x \in X.$$

$$ii) \quad ac(g, ac(h, x)) = ac(gh, x) \quad \forall x \in X, \quad \forall g, h \in G.$$

En dicho caso, diremos que G actúa² (o que opera) sobre X .

Si G actúa sobre X , diremos que este conjunto X es un G –conjunto a izquierda. A la aplicación ac se le llama aplicación de la G –estructura.

Notación. Si $ac : G \times X \rightarrow X$ es una acción de G sobre X , es común denotar:

$$ac(g, x) = {}^g x = g \cdot x = g * x$$

En este documento, usaremos la notación $ac(g, x) = {}^g x$. Con esta, las propiedades que ha de cumplir una aplicación $ac : G \times X \rightarrow X$ para ser una acción son:

$$i) \quad {}^1 x = x \quad \forall x \in X.$$

$$ii) \quad {}^g ({}^h x) = {}^{gh} x \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G.$$

Ejemplo. Si G es un grupo y X es un conjunto no vacío, ejemplos de acciones de G sobre X son:

1. La acción trivial:

$$\begin{aligned} ac : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

2. Si tenemos una acción $ac : G \times X \rightarrow X$ y $H < G$, podemos considerar la acción por restricción $ac : H \times X \rightarrow X$, dada por:

$$ac(h, x) = ac(i(h), x) \quad \forall h \in H, x \in X$$

Donde consideramos la aplicación inclusión $i : H \rightarrow G$ dada por $i(h) = h$, para todo $h \in H$.

¹En realidad esta es la definición de acción por la izquierda, pero no vamos a trabajar con las acciones por la derecha, por lo que hablaremos simplemente de acciones.

²En realidad deberíamos decir que “ G actúa por la izquierda sobre X ”.

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, si $X = \{1, \dots, n\}$ y $G = S_n$, la acción natural de S_n sobre X será la acción $ac : S_n \times X \rightarrow X$ dada por:

$$ac(\sigma, k) = {}^\sigma k = \sigma(k) \quad \forall \sigma \in S_n, k \in X$$

Proposición 1.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, dar una acción de G sobre X equivale a dar un homomorfismo de grupos de G en $\text{Perm}(X)$.*

Demostración. Veamos que es posible:

- Por una parte, dada una acción de G sobre X , $ac : G \times X \rightarrow X$, podemos definir la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow \text{Perm}(X) \\ g &\longmapsto \phi(g) \end{aligned}$$

Donde $\phi(g)$ es una aplicación $\phi(g) : X \rightarrow X$ dada por:

$$\phi(g)(x) = {}^g x \quad \forall x \in X$$

Veamos en primer lugar que ϕ está bien definida, es decir, que $\phi(g) \in \text{Perm}(X)$ para cada $g \in G$. Para ello, veamos antes que ϕ cumple:

- $\phi(1) = id_X$, ya que la aplicación $x \mapsto ac(1, x)$ es la aplicación identidad en X , por ser ac una acción de G sobre X .
- $\phi(g)\phi(h) = \phi(gh)$, ya que al evaluar en cualquier $x \in G$:

$$(\phi(g)\phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(g)({}^h x) = {}^g({}^h x) \stackrel{(*)}{=} {}^{gh} x = \phi(gh)(x)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que ac es una acción de G sobre X .

Ahora, veamos que dado $g \in G$, la aplicación $\phi(g)$ es biyectiva (es decir, está en $\text{Perm}(X)$), ya que su aplicación inversa es $\phi(g^{-1})$:

$$\phi(g^{-1})\phi(g) = \phi(g^{-1}g) = \phi(1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

Y anteriormente vimos que $\phi(1) = id_X$, por lo que $\phi(g) \in \text{Perm}(X)$, para todo $g \in G$ y la aplicación ϕ está bien definida.

Además, por las dos propiedades anteriores, tenemos que ϕ es un homomorfismo de grupos.

- Sea $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(X)$ un homomorfismo de grupos, definimos la aplicación $ac : G \times X \rightarrow X$ dada por:

$$ac(g, x) = \phi(g)(x) \quad \forall g \in G, x \in X$$

Veamos que es una acción:

$$\begin{aligned} ac(1, x) &= \phi(1)(x) = x \quad \forall x \in X \\ ac(g, ac(h, x)) &= \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(gh)(x) = ac(gh, x) \quad \forall x \in X, \quad \forall g, h \in G \end{aligned}$$

□

Definición 1.2 (Representación por permutaciones). Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, si tenemos una acción de G sobre X , el homomorfismo ϕ dado por esta acción según la Proposición 1.1 recibirá el nombre de representación de G por permutaciones.

Además, llamaremos a $\ker(\phi)$ núcleo de la acción, ya que:

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = id_X\} = \{g \in G \mid {}^g x = x \quad \forall x \in X\}$$

En el caso de que $\ker(\phi) = \{1\}$, diremos que la acción es fiel.

Ejemplo. A continuación, dados varios ejemplos de acciones, consideraremos en cada caso su representación por permutaciones:

1. La representación por permutaciones de la acción trivial es el homomorfismo $\phi : G \rightarrow Perm(X)$ dado por:

$$\phi(g) = id_X \quad \forall g \in G$$

2. Si tenemos un conjunto no vacío X y una acción $ac : G \times X \rightarrow X$ sobre un grupo G que tiene asociada una representación por permutaciones ϕ , entonces la acción por restricción $ac : H \times X \rightarrow X$ tendrá asociada como representación por permutaciones el homomorfismo $\phi_H : H \rightarrow Perm(X)$ dado por:

$$\phi_H = \phi \circ i$$

Siendo $i : H \rightarrow G$ la aplicación inclusión.

3. En el caso de la acción natural de S_n sobre $X = \{1, \dots, n\}$, tenemos que la representación por permutaciones es el homomorfismo $\phi : S_n \rightarrow S_n$ dado por:

$$\phi(\sigma) = \sigma \quad \forall \sigma \in S_n$$

Es decir, $\phi = id_{S_n}$.

4. Sea G un grupo, podemos definir la acción por traslación como:

$$\begin{aligned} ac : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

Y el homomorfismo asociado a la acción como representación por permutaciones será $\phi : G \rightarrow Perm(G)$ dado por:

$$\phi(g)(h) = gh \quad \forall g, h \in G$$

Como además:

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid gh = h \quad \forall h \in G\} = \{1\}$$

Tenemos que es una acción fiel.

Teorema 1.2 (Cayley). *Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

Demostración. Sea G un grupo, consideramos la acción por traslación:

$$\begin{aligned} ac : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

Y su representación por permutaciones, $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ dado por:

$$\phi(g)(h) = gh \quad \forall g \in G, \forall h \in G$$

Como la acción por traslación es una acción fiel, tendremos que $\ker(\phi) = \{1\}$ y aplicando el Primer Teorema de Isomorfía sobre ϕ , obtenemos que:

$$G \cong G/\{1\} \cong \text{Im}(\phi)$$

Donde $\text{Im}(\phi) = \phi_*(G)$, que en la Proposición ?? vimos que es un subgrupo de $\text{Perm}(G)$. \square

Ejemplo. Podemos considerar las traslaciones de G sobre conjuntos especiales:

- La acción por traslación de G sobre $\mathcal{P}(G)$ será $ac : G \times \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ dada por:

$$ac(g, A) = gA = \{ga \mid a \in A\} \subseteq G \quad \forall A \in \mathcal{P}(G)$$

- Podemos también considerar la acción por traslación en el cociente por las clases laterales por la izquierda³: si $H < G$, consideramos el cociente de G sobre H por la izquierda y la acción $ac : G \times G/H \rightarrow G/H$ dada por:

$$ac(g, xH) = {}^g(xH) = gxH = \{gxh \mid h \in H\}$$

6. La acción por conjugación se define como $ac : G \times G \rightarrow G$ dada por:

$$ac(g, h) = {}^gh = ghg^{-1}$$

Que es una acción, ya que:

$$\begin{aligned} {}^1h &= 1h1^{-1} = h \quad \forall h \in G \\ {}^g({}^hl) &= g{}^hlg^{-1} = ghlg^{-1} = gh(g^{-1}h) = {}^{gh}l \quad \forall g, h, l \in G \end{aligned}$$

El homomorfismo asociado es:

$$\begin{aligned} \phi : G &\rightarrow \text{Perm}(G) \\ \phi(g)(h) &= ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G \end{aligned}$$

El núcleo en este caso es:

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\} = Z(G)$$

7. La acción por conjugación en partes de G se define como la aplicación $ac : G \times \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ dada por:

$$ac(g, A) = {}^gA = gAg^{-1} = \{gag^{-1} \mid a \in A\} \subseteq G \quad \forall A \in \mathcal{P}(G)$$

³No es necesario considerar $H \triangleleft G$, ya que solo consideramos conjuntos no vacíos, por lo que no es necesario que el cociente tenga estructura de grupo.

8. Podemos definir la acción por conjugación de G también sobre $Subg(G)$:

$$Subg(G) = \{H \subseteq G \mid H < G\}$$

Como la aplicación $ac : G \times Subg(G) \rightarrow Subg(G)$ dada por:

$$ac(g, H) = {}^gH = gHg^{-1} < G$$

Ya que en la Proposición ?? vimos que gHg^{-1} era un subgrupo de G , al que llamaremos subgrupo conjugado de G .

1.1. Órbitas de un elemento

Definición 1.3 (Órbita). Sea G un grupo y X un G -conjunto, definimos en X una relación de equivalencia \sim (se comprueba a continuación) dada por:

$$y \sim x \iff \exists g \in G \mid y = {}^gx$$

La clase de equivalencia de cada $x \in X$ se llama órbita de x , denotada por:

$$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } y = {}^gx\}$$

Como estamos considerando una acción, será equivalente escribir:

$$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } {}^gy = x\}$$

Tenemos de esta forma que el conjunto cociente X/\sim es el conjunto formado por las órbitas de todos los elementos de X :

$$X/\sim = \{Orb(x) \mid x \in X\}$$

Proposición 1.3. La relación \sim de la definición anterior es una relación de equivalencia en X .

Demostración. Comprobamos la reflexividad, simetría y transitividad de \sim :

i) Reflexividad: sea $x \in X$, entonces ${}^1x = x$, por lo que $x \sim x$.

ii) Simetría: sean $x, y \in X$ tales que $y \sim x$, entonces $\exists g \in G$ de forma que $y = {}^gx$. Como G es un grupo, consideramos $g^{-1} \in G$, de forma que:

$${}^{g^{-1}}y = {}^{g^{-1}}({}^gx) = {}^{g^{-1}g}x = {}^1x = x$$

Por lo que $x \sim y$.

iii) Transitividad: sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $\exists g, h \in G$ de forma que:

$$y = {}^gx \qquad z = {}^hy$$

Entonces, tenemos que:

$$z = {}^h({}^gx) = {}^{hg}x$$

Como $hg \in G$, tenemos que $z \sim x$. □

Ejemplo. Sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$: En S_4 consideramos $ac : S_4 \times X \rightarrow X$, la acción natural de S_4 sobre X :

$$ac(\sigma, k) = {}^\sigma k = \sigma(k)$$

- Si tenemos $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$, queremos calcular las órbitas de los elementos de H . Recordamos que:

$$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists \sigma \in H \text{ con } \sigma(y) = x\}$$

Es decir, pensamos en $Orb(x)$ como en los elementos de X desde los que podemos llegar a x con una permutación de H . De esta forma:

$$Orb(1) = \{1, 2, 3\}$$

$$Orb(2) = \{1, 2, 3\}$$

$$Orb(3) = \{1, 2, 3\}$$

$$Orb(4) = \{4\}$$

- En A_4 :

$$A_4 = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4), (2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 4\ 3)\}$$

Como tenemos todos los 3-ciclos:

$$Orb(1) = X$$

Y también tendremos que $Orb(k) = X$, para $k \in X$.

- En V , que contiene a todos los 2-ciclos, la situación será la misma:

$$Orb(k) = X \quad \forall k \in X$$

- En $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$ sucede lo mismo:

$$Orb(k) = X \quad \forall k \in X$$

Definición 1.4. Si el conjunto de órbitas X/\sim es unitario, decimos que la acción es transitiva.

Este nombre se debe a que dados $x, y \in X$, siempre $\exists g \in G$ de forma que:

$$y = {}^g x$$

Definición 1.5 (Estabilizador). Sea G un grupo y X un G -conjunto, definimos el grupo de estabilizadores de $x \in X$ en G como:

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid {}^g x = x\}$$

También se le llama grupo de isotropía.

Para justificar por qué a $Stab_G(x)$ le llamábamos grupo de estabilizadores de x en G , es necesaria la siguiente Proposición:

Proposición 1.4. *Sea G un grupo y X un G -conjunto:*

$$Stab_G(x) < G \quad \forall x \in X$$

Demostración. Fijado $x \in X$, es claro que $Stab_G(x) \subseteq G$. Vemos que:

- $1 \in Stab_G(x)$, ya que ${}^1x = x$ por definición de acción.
- Si $g \in Stab_G(x)$, supongamos que $g^{-1} \notin Stab_G(x)$, con lo que ${}^{g^{-1}}x = y \in X$ con $y \neq x$. En dicho caso:

$$x = {}^1x = {}^{g^{-1}}g x = {}^{g^{-1}}({}^g x) = {}^{g^{-1}}x = y$$

Llegamos a una contradicción, luego $g^{-1} \in Stab_G(x)$ para todo $g \in Stab_G(x)$.

- Finalmente, si $g, h \in Stab_G(x)$, entonces:

$${}^{gh}x = {}^g({}^h x) = {}^g x = x$$

Por lo que $gh \in Stab_G(x)$.

□

Ejemplo. Si nuevamente sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$ volvemos a considerar la acción natural de S_4 sobre X :

- En $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$, recordamos que:

$$Stab_H(x) = \{\sigma \in H \mid \sigma(x) = x\}$$

Es decir, el grupo de estabilizadores de x en H son los elementos de H que dejan fijo el elemento x . De esta forma:

$$Stab_H(1) = \{1\}$$

$$Stab_H(2) = \{1\}$$

$$Stab_H(3) = \{1\}$$

$$Stab_H(4) = H$$

- En A_4 :

$$Stab_{A_4}(1) = \{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\} = \langle (2\ 3\ 4) \rangle$$

$$Stab_{A_4}(2) = \langle (1\ 3\ 4) \rangle$$

$$Stab_{A_4}(3) = \langle (1\ 2\ 4) \rangle$$

$$Stab_{A_4}(4) = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

- En V :

$$Stab_V(k) = \{1\} \quad \forall k \in X$$

- En $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:

$$\text{Stab}_H(k) = \{1\} \quad \forall k \in X$$

Vamos a poder establecer una relación entre el orden de las órbitas y del conjunto cociente.

Proposición 1.5. *Sea G un grupo finito que actúa sobre X , entonces para cada $x \in X$, $\text{Orb}(x)$ es un conjunto finito y:*

$$|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$$

En particular, el cardinal de la órbita es un divisor del orden de G .

Demostración. Fijado $x \in X$, si consideramos $\text{Stab}_G(x) < G$ y las clases laterales por la izquierda⁴, $G / \text{Stab}_G(x) \sim$, definimos la aplicación $\phi : G / \text{Stab}_G(x) \sim \rightarrow \text{Orb}(x)$ dada por:

$$\phi(g\text{Stab}_G(x)) = {}^g x \quad \forall g\text{Stab}_G(x) \in G / \text{Stab}_G(x) \sim$$

- Veamos que está bien definida. Para ello, sean $g, g' \in G$ de forma que:

$$g\text{Stab}_G(x) = g'\text{Stab}_G(x)$$

Entonces, existirá $h \in \text{Stab}_G(x)$ de forma que $g = g'h$. En dicho caso:

$$\phi(g\text{Stab}_G(x)) = {}^g x = {}^{g'h} x = {}^{g'} ({}^h x) = {}^{g'} x = \phi(g'\text{Stab}_G(x))$$

- Veamos que es sobreyectiva: sea $y \in \text{Orb}(x)$, entonces $\exists g \in G$ de forma que:

$$y = {}^g x$$

Por lo que $y = \phi(g\text{Stab}_G(x))$.

- Para la inyectividad, sean $g, g' \in G$ de forma que:

$${}^g x = \phi(g\text{Stab}_G(x)) = \phi(g'\text{Stab}_G(x)) = {}^{g'} x$$

Entonces, podemos escribir:

$$x = {}^{g^{-1}} ({}^g x) = {}^{g^{-1}} ({}^{g'} x) = {}^{g^{-1}g'} x$$

De donde concluimos que $g^{-1}g' \in \text{Stab}_G(x)$, por lo que $g\text{Stab}_G(x) = g'\text{Stab}_G(x)$.

En definitiva, acabamos de probar que $\text{Orb}(x)$ es biyectivo con $G / \text{Stab}_G(x) \sim$, por lo que tienen el mismo cardinal. Además:

- Por ser G finito y $\text{Stab}_G(x) < G$, tenemos que:

$$|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x)|}$$

Por lo que $\text{Orb}(x)$ es un conjunto finito.

⁴No consideramos el conjunto cociente porque no sabemos si $\text{Stab}_G(x)$ es un subgrupo normal en G o no.

- Despejando de la igualdad superior, tenemos que:

$$|Orb(x)| |Stab_G(x)| = |G|$$

Por lo que $|Orb(x)|$ es un divisor de $|G|$.

□

Observación. La demostración es cierta sin suponer que G sea un grupo finito, pero entonces solo podemos poner como tesis que $Orb(x)$ es biyectivo con $G/Stab_G(x) \sim$, para todo $x \in X$.

Proposición 1.6. Sea G un grupo que actúa sobre X , si $x, y \in X$ están en la misma órbita, entonces $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son subgrupos conjugados.

Demostración. Si x e y están en la misma órbita, entonces $Orb(x) = Orb(y)$, por lo que $\exists g \in G$ de forma que $y = {}^g x$. En dicho caso, también tenemos que $x = {}^{g^{-1}} y$. Veamos que:

$$Stab_G(x) = g^{-1} Stab_G(y) g$$

Para ello:

⊆) Sea $h \in Stab_G(x)$, queremos ver que $h \in g^{-1} Stab_G(y) g$, para lo que bastará ver que $ghg^{-1} \in Stab_G(y)$:

$$ghg^{-1}y = {}^{gh}x = {}^g x = y$$

⊇) Sea $h \in Stab_G(y)$, queremos ver que $g^{-1}hg \in Stab_G(x)$:

$$g^{-1}hg x = g^{-1}h y = g^{-1}y = x$$

□

Definición 1.6. Sea G un grupo y X un G -conjunto, un elemento $x \in X$ se dice que es fijo por la acción si ${}^g x = x$, $\forall g \in G$.

Consideramos el conjunto de todos los elementos que se quedan fijos por todos los elementos de G :

$$Fix(X) = \{x \in X \mid {}^g x = x, \quad \forall g \in G\}$$

Proposición 1.7. Sea G un grupo y X un G -conjunto, si $x \in X$, entonces:

$$x \in Fix(X) \iff Orb(x) = \{x\} \iff Stab_G(x) = G$$

Demostración. Si recordamos las definiciones de estos tres conjuntos:

$$\begin{aligned} Orb(x) &= \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } {}^g y = x\} \\ Stab_G(x) &= \{g \in G \mid {}^g x = x\} \\ Fix(X) &= \{x \in X \mid {}^g x = x \quad \forall g \in G\} \end{aligned}$$

Veamos todas las implicaciones:

$$x \in \text{Fix}(X) \implies \text{Orb}(x) = \{x\}$$

Si $y \in \text{Orb}(x)$, entonces $\exists g \in G$ con ${}^g y = x$, por lo que:

$$y = g^{-1} g y = g^{-1} ({}^g y) = g^{-1} x \stackrel{(*)}{=} x$$

Donde en $(*)$ usamos que $x \in \text{Fix}(X)$. Concluimos que $\text{Orb}(x) = \{x\}$.

$$\text{Orb}(x) = \{x\} \implies \text{Stab}_G(x) = G$$

Sea $g \in G$, si consideramos $y = {}^g x$, entonces $y \in \text{Orb}(x) = \{x\}$, de donde $y = x$ y $g \in \text{Stab}_G(x)$.

$$\text{Stab}_G(x) = G \implies x \in \text{Fix}(x)$$

$${}^g x = x \quad \forall g \in G$$

De donde deducimos que $x \in \text{Fix}(X)$.

□

Observación. Si tenemos un grupo G y un G -conjunto X , recordamos que tenemos definida sobre X una relación de equivalencia \sim , con la que anteriormente definimos los órbitas de los elementos. En el caso de que X sea un conjunto finito y tenga n elementos:

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Por ser \sim una relación de equivalencia, tenemos una partición de X , lo que nos da la igualdad:

$$|X| = \sum_{k=1}^n |\text{Orb}(x_k)|$$

Para simplificarla usando propiedades ya vistas, sabemos que puede haber órbitas unitarias:

$$\text{Orb}(x) = \{x\} \iff x \in \text{Fix}(x)$$

Por tanto, podemos simplificar la igualdad superior, eliminando de ella todas las órbitas unitarias. Para ello, si Γ contiene un único representante de cada una de las órbitas de elementos que no son puntos fijos ($\Gamma \subseteq X \setminus \text{Fix}(X)$):

$$|X| = \sum_{k=1}^n |\text{Orb}(x_k)| = |\text{Fix}(X)| + \sum_{y \in \Gamma} |\text{Orb}(y)|$$

Y aplicando finalmente la Proposición 1.5, llegamos a que:

$$|X| = \sum_{k=1}^n |\text{Orb}(x_k)| = |\text{Fix}(X)| + \sum_{y \in \Gamma} |\text{Orb}(y)| = |\text{Fix}(X)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : \text{Stab}_G(y)]$$

A continuación, lo que haremos será estudiar los conjuntos $\text{Orb}(\cdot)$, $\text{Stab}_G(\cdot)$ y $\text{Fix}(X)$ para ciertos ejemplos comunes de acciones.

1.1.1. Acción por traslación

Sea G un grupo no trivial, la acción por traslación se define como $ac : G \times G \rightarrow G$ dada por:

$$ac(g, h) = {}^g h = gh \quad \forall g, h \in G$$

De esta forma, tenemos que:

$$Orb(h) = \{k \in G \mid \exists g \in G \text{ con } k = {}^g h = gh\} = G \quad \forall h \in G$$

Ya que fijado $k \in G$ y dado $h \in G$, siempre podemos tomar $g = kh^{-1} \in G$ para tener que ${}^g h = gh = k$.

$$\begin{aligned} Stab_G(h) &= \{g \in G \mid gh = {}^g h = h\} = \{1\} \quad \forall h \in G \\ Fix(G) &= \{h \in G \mid gh = {}^g h = h \quad \forall g \in G\} = \emptyset \end{aligned}$$

Observación. Observemos que la acción por traslación cuenta con las mismas cualidades que tiene una traslación entre dos espacios vectoriales, pensando en que primero fijamos un vector $v \in V$ para luego definir una aplicación $t_v : V \rightarrow V'$. De esta forma:

- Fijado cualquier vector v , t_v siempre será sobreyectiva. Esto se pone de manifiesto al decir que $Orb(h) = G$ para todo $h \in G$.
- La única traslación que mantiene fijo un punto es la correspondiente al vector 1, que deja fijos todos los puntos, $Stab_G(h) = \{1\} \quad \forall h \in G$.
- Como hay traslaciones que no mantienen fijos ningún punto (todas salvo la trivial), no hay ningún punto que permanezca invariante ante todas ellas, $Fix(G) = \emptyset$.

1.1.2. Acción por conjugación

Sea G un grupo, la acción por conjugación se define como $ac : G \times G \rightarrow G$ dada por:

$$ac(g, h) = {}^g h = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G$$

Preliminares

Antes de estudiar los subconjuntos notables de esta acción, definimos ciertos conjuntos y vemos propiedades de estos que nos ayudarán a entender la acción.

Definición 1.7 (Centralizador). Sea G un grupo y $S \subseteq G$, llamamos centralizador de S en G al conjunto:

$$C_G(S) = \{x \in G \mid xs = sx \quad \forall s \in S\}$$

Definición 1.8 (Normalizador). Sea G un grupo y $S \subseteq G$, llamamos normalizador de S en G al conjunto:

$$N_G(S) = \{x \in G \mid xS = Sx\}$$

Proposición 1.8. Sea G un grupo y $S \subseteq G$, se verifica:

- i) $N_G(S) < G$.
- ii) $C_G(S) \triangleleft N_G(S)$.
- iii) Si $S < G$, entonces $S \triangleleft N_G(S)$.

Demostración. Demostramos cada apartado:

- i) Sean $x, y \in N_G(S)$, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} xS = Sx &\implies xSx^{-1} = S \\ yS = Sy &\implies S = y^{-1}Sy \end{aligned}$$

En dicho caso:

$$(xy^{-1})S(xy^{-1})^{-1} = (xy^{-1})S(yx^{-1}) = x(y^{-1}Sy)x^{-1} = xSx^{-1} = S$$

De donde deducimos que $(xy^{-1})S = S(xy^{-1})$, por lo que $xy^{-1} \in N_G(S)$ y $N_G(S) < G$.

- ii) Hemos de ver primero que $C_G(S) < N_G(S)$:

- En primer lugar, si $x \in C_G(S)$:

$$xS = \{xs \mid s \in S\} = \{sx \mid s \in S\} = Sx$$

Por lo que $x \in N_G(S)$ y se tiene que $C_G(S) \subseteq N_G(S)$.

- Ahora, si $x, y \in C_G(S)$, entonces:

$$\begin{aligned} xs = sx &\implies xsx^{-1} = s \\ ys = sy &\implies s = y^{-1}sy \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

Lo que nos permite escribir:

$$(xy^{-1})s(xy^{-1})^{-1} = x(y^{-1}sy)x^{-1} = xsx^{-1} = s \quad \forall s \in S$$

De donde deducimos que $xy^{-1} \in C_G(S)$, por lo que $C_G(S) < N_G(S)$.

Para la normalidad, dado $x \in C_G(S)$ y $g \in N_G(S)$, queremos ver que se cumple $y = gxg^{-1} \in C_G(S)$. Para ello, dado $s \in S$, vemos que:

$$ys = (gxg^{-1})s \stackrel{(*)}{=} gxs'g^{-1} = gs'xg^{-1} \stackrel{(**)}{=} s(gxg^{-1}) = sy$$

Donde en $(*)$ usamos que como $g \in N_G(S)$, también tenemos que $g^{-1} \in N_G(S)$, con lo que $\exists s' \in S$ de forma que:

$$g^{-1}s = s'g^{-1}$$

Y en $(**)$ deshacemos este proceso, ya que multiplicando la igualdad superior por derecha e izquierda por g , llegamos a que:

$$g^{-1}s = s'g^{-1} \implies gg^{-1}sg = gs'g^{-1}g \implies sg = gs'$$

En definitiva, de $ys = sy$ deducimos que $y = gxg^{-1} \in C_G(S)$, para todo $x \in C_G(S)$ y todo $g \in N_G(S)$, de donde $C_G(S) \triangleleft N_G(S)$.

iii) Si suponemos además que $S < G$, por una parte tenemos que:

$$sS = S = Ss \quad \forall s \in S$$

De donde deducimos que $S \subseteq N_G(S)$ y por ser $S < G$, tenemos que $S < N_G(S)$. Para la normalidad, si $g \in N_G(S)$, tendremos entonces que:

$$gS = Sg \implies gSg^{-1} = S$$

De donde deducimos que $S \triangleleft N_G(S)$.

□

Proposición 1.9. Sea G un grupo, $H, K < G$ con $H \subseteq K$, entonces:

$$H \triangleleft K \iff K < N_G(H)$$

De esta forma, el normalizador $N_G(H)$ se caracteriza como el mayor subgrupo de G en el que H es normal.

Demostración. Por ser $H, K < G$ con $H \subseteq K$, tenemos ya que $H < K$. Por una caracterización que vimos de los subgrupos normales:

$$H \triangleleft K \iff kHk^{-1} = H \quad \forall k \in K \iff kH = Hk \quad \forall k \in K \iff K \subseteq N_G(H)$$

Y por ser $K < G$, $K \subseteq N_G(H) \iff K < N_G(H)$.

□

Ejercicio. Para terminar de comprender las propiedades del centralizador y del normalizador, se pide probar que si G es un grupo y $H < G$:

$$\begin{aligned} H \triangleleft G &\iff G = N_G(H) \\ H \subseteq Z(G) &\iff G = C_G(H) \end{aligned}$$

Subconjuntos notables

Estudiadas ya las propiedades del centralizador y del normalizador, estamos ya en condiciones de estudiar los conjuntos notables de la acción por conjugación:

$$Orb(h) = \{k \in G \mid \exists g \in G \text{ con } k = {}^g h = ghg^{-1}\} = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} = Cl_G(h) \quad \forall h \in G$$

De esta forma, llamaremos a la órbita de h por la acción por conjugación la clase de conjugación de h en G .

$$Stab_G(h) = \{g \in G \mid {}^g h = ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\} = C_G(h)$$

El estabilizador de h en G coincide con el centralizador de h en G , y como la órbita de h coincidía con la clase de conjugación de h en G , por la Proposición 1.5, tenemos que:

$$|Cl_G(h)| = |Orb(h)| = [G : Stab_G(h)] = [G : C_G(h)] \quad \forall h \in G$$

Y en el caso de que G sea finito:

$$|Cl_G(h)| |C_G(h)| = |G|$$

Para los puntos fijos:

$$Fix(X) = \{h \in G \mid ghg^{-1} = {}^g h = h \quad \forall g \in G\} = \{h \in G \mid gh = hg \quad \forall g \in G\} = Z(G)$$

Ejemplo. Calcular las clases de conjugación de los elementos de D_4 :

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} = \{s^i r^j \mid i \in \{0, 1\} \ j \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

Vemos que:

$$Cl_{D_4}(1) = \{s^i r^j 1 (s^i r^j)^{-1}\} = \{1\}$$

$$Cl_{D_4}(r) = \{s^i r^j r (s^i r^j)^{-1}\} = \{s^i r^j r r^{-j} s^{-i}\} = \{s^i r s^i\} = \{r, sr s\} = \{r, r^3\}$$

$$Cl_{D_4}(r^2) = \{s^i r^2 s^i\} = \{r^2\}$$

$$Cl_{D_4}(s) = \{s, sr^2\}$$

$$Cl_{D_4}(sr) = \{sr, sr^3\}$$

Fórmula de clases

Podemos particularizar la fórmula anteriormente obtenida:

$$|X| = |Fix(X)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : Stab_G(y)]$$

Para la acción por conjugación, obteniendo la **fórmula de clases**:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : C_G(y)]$$

Donde podemos pensar en Γ en el conjunto formado por los representantes de las órbitas con más de un elemento.

Esta última podemos generalizarla para cualquier subgrupo $H \triangleleft G$, obteniendo la **fórmula de clases general**:

$$|H| = |H \cap Z(G)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : C_G(y)]$$

1.1.3. Acción por conjugación sobre subgrupos

Sea G un grupo, la acción por conjugación sobre sus subgrupos viene definida⁵ por $ac : G \times Subg(G) \rightarrow Subg(G)$ dada por:

$$ac(g, H) = {}^g H = gHg^{-1} \quad \forall g \in G, \quad \forall H \in Subg(G)$$

Veamos que:

$$Orb(H) = \{K \in Subg(G) \mid \exists g \in G \text{ con } gHg^{-1} = {}^g H = K\} = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

Es decir, la órbita de un subgrupo está formado por todos sus conjugados.

⁵está bien definida gracias a la Proposición ??

Observación. Sea G un grupo, $H \in \text{Subg}(G)$, si consideramos la acción por conjugación sobre subgrupos, tenemos que:

$$\text{Orb}(H) = \{H\} \iff H \triangleleft G$$

Esto se debe a que:

$$\text{Orb}(H) = \{H\} \iff \{gHg^{-1} \mid g \in G\} = \{H\} \iff H \triangleleft G$$

Donde la última equivalencia se tiene gracias a la Proposición ??, donde vimos una caracterización de los subgrupos normales.

El estabilizador:

$$\text{Stab}_G(H) = \{g \in G \mid {}^gH = H\} = \{g \in G \mid gH = Hg\} = N_G(H)$$

Vemos finalmente los subgrupos que quedan fijos mediante la acción:

$$\text{Fix}(\text{Subg}(G)) = \{H < G \mid gHg^{-1} = {}^gH = H \quad \forall g \in G\} = \{H < G \mid H \triangleleft G\}$$

Coincide con el conjunto de subgrupos normales de G .

Y tendremos que:

$$|\text{Orb}(H)| = [G : N_G(H)]$$

1.2. p -grupos

Definición 1.9 (p -grupo). Si p es un número primo, un grupo G se dice que es un p -grupo si todo elemento de G distinto del neutro tiene orden una potencia de p . Si G es un grupo, diremos que $H < G$ es un p -subgrupo de G si H es un p -grupo.

Ejemplo. \mathbb{Z}_8 es un ejemplo de 2-grupo, ya que sus elementos son:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Calculamos los órdenes de todos los elementos, sabiendo que (Proposición ??):

$$O(x) = \frac{n}{\text{mcd}(x, n)} \quad \forall x \in \mathbb{Z}_n$$

Por lo que:

$$\begin{array}{llll} O(1) = 8 = 2^3 & O(2) = 4 = 2^2 & O(3) = 8 = 2^3 & O(4) = 2 \\ O(5) = 8 = 2^3 & O(6) = 4 = 2^2 & O(7) = 8 = 2^3 & \end{array}$$

Teorema 1.10 (de Cauchy). Si G es un grupo finito y p es un primo que divide a $|G|$, entonces G tiene un elemento de orden p , y por tanto tendrá un p -subgrupo de orden p .

Demostración. Si consideramos:

$$X = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \in G^p \mid a_1 a_2 \dots a_p = 1\}$$

Si $|G| = n$, entonces $|X| = n^{p-1}$, ya que elegimos libremente las $p - 1$ primeras coordenadas (variación con repetición):

$$a_1, a_2, \dots, a_{p-1} \in G \quad \text{arbitrarios}$$

Y la última viene condicionada:

$$a_p = (a_1, a_2, \dots, a_{p-1})^{-1}$$

Sea $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p) \in S_p$, consideramos $H = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\} \subseteq S_p$. Consideramos también la acción $ac : H \times X \rightarrow X$ dada por (compruébese que es una acción):

$$ac(\sigma^k, (a_1, a_2, \dots, a_p)) = (a_{\sigma^k(1)}, a_{\sigma^k(2)}, \dots, a_{\sigma^k(p)}) \quad \forall (a_1, \dots, a_p) \in X, \forall \sigma^k \in H$$

Por la Proposición 1.5, tenemos que:

$$|Orb(z)| = [H : Stab_H(z)] = \frac{|H|}{|Stab_H(z)|} \quad \forall z \in X$$

De donde tenemos que $|Orb(a_1, \dots, a_p)|$ es un divisor de $|H|$, $\forall (a_1, \dots, a_p) \in X$. En dicho caso, $|Orb(a_1, \dots, a_p)| \in \{1, p\}$, por ser $|H| = p$. Por tanto, las órbitas de un elemento serán unitarias o bien tendrán cardinal p .

Por tanto, sean r el número de órbitas con un elemento y s el número de órbitas con p elementos, entonces $(|\Gamma| = s)$:

$$n^{p-1} = |X| = |Fix(X)| + \sum_{y \in \Gamma} |Orb(y)| = r + \sum_{y \in \Gamma} p = r + sp$$

Veamos ahora cómo son los elementos de $Orb(a_1, \dots, a_p)$:

$$\begin{aligned} Orb(a_1, \dots, a_p) &= \left\{ \sigma^k(a_1, \dots, a_p) \mid k \in \{0, \dots, p-1\} \right\} \\ &= \{(a_1, \dots, a_p), (a_2, \dots, a_p, a_1), \dots, (a_p, a_1, \dots, a_{p-1})\} \end{aligned}$$

Por tanto, la órbita será unitaria si y solo si $a_1 = a_2 = \dots = a_p$. Además, sabemos de la existencia de órbitas con un elemento ($r \geq 1$), como $Orb(1, 1, \dots, 1)$. Busquemos más: por hipótesis, $p \mid n$ y además $r = n^{p-1} - sp$, de donde $p \mid r$, por lo que $r \geq 2$ (ya que lo divide un primo).

En conclusión, $\exists a \in G \setminus \{1\}$ de forma que $Orb(a, a, \dots, a)$ es unitaria, de donde $a^p = 1$, por lo que $O(a) = p$.

Finalmente, sea $x \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$, tenemos entonces que $1 \neq O(x) \mid p$, por lo que $O(x) = p$ y tenemos que todo elemento del subgrupo $\langle a \rangle$ es de orden p . En definitiva, $\langle a \rangle$ es un p -subgrupo de G de orden p . \square

Corolario 1.10.1. *Sea G un grupo finito y p un número primo:*

$$G \text{ es un } p\text{-grupo} \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } |G| = p^n$$

Demostración. Veamos la doble implicación.

\Leftarrow) Si $|G| = p^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces tendremos que $O(x) \mid p^n$ para todo $x \in G$, de donde $O(x) = p^k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, luego G es un p -grupo.

\Rightarrow) Suponemos que q es un primo que divide al orden de $|G|$, luego por el Teorema de Cauchy debe existir $x \in G$ de forma que $O(x) = q$. En dicho caso, como G es un p -grupo, $q = p^r$ para cierto $r \in \mathbb{N}$, de donde (q y p son primos) $r = 1$ y $q = p$.

De esta forma, el único primo que divide a $|G|$ es p , luego $|G| = p^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 1.11 (de Burnside). *Si G es un p -grupo finito no trivial, entonces $|Z(G)| \geq p$, y en particular, $|Z(G)| \neq \{1\}$.*

Demostración. Distinguimos casos:

- Si G es abeliano, $Z(G) = G$ y tenemos que $|Z(G)| = |G| = p^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, por lo que $|Z(G)| \geq p$. En particular, $Z(G) = G$ no es trivial.
- Si G es no abeliano, entonces $Z(G) < G$ y por la fórmula anterior de clases:

$$p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{h \in \Gamma} [G : C_G(h)]$$

Como G es finito, $[G : C_G(h)]$ divide a $|G| = p^n$ para cualquier $h \in \Gamma$ y para cierto $n \in \mathbb{N}$. Es decir:

$$[G : C_G(h)] = p^k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \quad \forall h \in \Gamma$$

En ningún caso puede ser $k = 0$, ya que diríamos que $C_G(h) = G$ y:

$$C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$$

De donde $h \in Z(G)$, por lo que h no estaría en $\Gamma \subseteq G \setminus Z(G)$.

En dicho caso, $p \mid [G : C_G(h)]$ para todo $h \in \Gamma$, $p \mid |Z(G)|$ (despejar $|Z(G)|$ de la anterior igualdad), de donde $|Z(G)| \geq p$. \square

Lema 1.12. *Si G es un grupo y $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.*

Demostración. Como $G/Z(G)$ es cíclico, existirá $z \in G$ de forma que:

$$Z/Z(G) = \langle zZ(G) \rangle$$

Sean $x, y \in G$, si consideramos su proyección al cociente, tendremos que $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$xZ(G) = z^n Z(G) \quad yZ(G) = z^m Z(G)$$

Es decir, $\exists a, b \in Z(G)$ de forma que $x = z^n a$ y $y = z^m b$. Por tanto:

$$xy = z^n a z^m b = z^n z^m ab = z^{n+m} ba = z^m z^n ba = z^m b z^n a = yx$$

□

Corolario 1.12.1. Si G es un grupo y p es un número primo, si $|G| = p^n$, entonces:

$$|Z(G)| \neq p^{n-1}$$

En particular, todos los grupos de orden p^2 son abelianos.

Demostración. Supongamos que $|G| = p^n$ y que $|Z(G)| = p^{n-1}$. De esta forma:

$$|G/Z(G)| = p$$

En dicho caso, $G/Z(G)$ es cíclico, luego G es abeliano (por el Lema anterior). Por tanto, G coincide con su centro, $G = Z(G)$, luego $p^n = p^{n-1}$, contradicción.

En particular, si G es un grupo con $|G| = p^2$ con p primo, como $Z(G) < G$, $|Z(G)|$ a de dividir a p^2 , luego:

- Si $|Z(G)| = 1$, entonces $Z(G) = 1$, que contradice a Burnside.
- $|Z(G)| = p$ no puede ser, por lo que acabamos de probar.
- La única posibilidad es que $|Z(G)| = p^2$, de donde $Z(G) = G$.

□

Observación. Notemos que ahora sabemos que todos los grupos de orden un primo al cuadrado son resolubles, por ser abelianos.

Teorema 1.13. Sea G un grupo finito con $|G| = n$ y sea p un número primo, entonces para toda potencia p^k que divida a n , existe un subgrupo $H < G$ con orden $|H| = p^k$.

Demostración. Por inducción sobre k :

- Si $k = 1$: tenemos el Teorema de Cauchy.
- Primera hipótesis de inducción: el resultado es cierto para todo $l < k$: si p^l divide a $|G|$, entonces $\exists H < G$ con $|H| = p^l$.
Veamos qué ocurre con k , es decir, si $|G| = p^k r = n$ para cierto $r \in \mathbb{N}$.

Por inducción sobre r :

- Si $r = 1$: tomamos $H = G$.

- Segunda hipótesis de inducción: si $r > 1$, suponemos el resultado cierto para todo grupo de orden divisible por p^k que sea de la forma $p^k m$ con $m < r$, es decir, $\exists H < G$ con $|H| = p^k$, veamos qué ocurre con G :

Para ello, distinguimos casos:

- Si existe $K < G$, $K \neq G$ de forma que $p \nmid [G : K]$. En dicho caso: $|G| = [G : K]|K|$ y $p^k \mid |G|$, entonces p^k dividirá a $|K|$. Usando la Segunda Hipótesis de inducción, tendremos $H < K < G$ de forma que $|H| = p^k$.
- Si para cualquier $K < G$, $K \neq G$ se tiene que $p \mid [G : K]$, entonces usando la fórmula de las clases:

$$|Z(G)| = G - \sum_{h \in \Gamma} [G : C_G(h)]$$

Y como p divide a todos los $[G : C_G(h)]$, concluimos que $p \mid |Z(G)|$. Por el Teorema de Cauchy, podemos encontrar $K < Z(G)$ de forma que $|K| = p$.

Por ser $K \subseteq Z(G)$, entonces $K \triangleleft G$ y podemos considerar el conjunto cociente G/K , con orden:

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{p}$$

De donde $p^{k-1} \mid |G/K|$.

Por la Primera Hipótesis de inducción, existe otro $L < G/K$ con $|L| = p^{k-1}$. Por el Tercer Teorema de Isomorfía, sabemos que $\exists K \triangleleft H < G$ de forma que:

$$L = H/K$$

De donde:

$$|H| = |H/K||K| = p^{k-1}p = p^k$$

□

Ejemplo. Por ejemplo, si G es un grupo de la forma $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$, tendremos un subgrupo de orden 2, otro de orden 4, otro de orden 8 y otro de orden 3.

1.2.1. p -subgrupos de Sylow

En 1872, un noruego llamado Peter LM Sylow (1832-1918) definió unos grupos y llegó a unos resultados sobre ellos. En este documento, sus Teoremas no tendrán demostraciones muy elaboradas, como consecuencia de la teoría que venimos ya desarrollando desde el inicio.

Definición 1.10 (p -subgrupos de Sylow). Si G es un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$, un p -subgrupo de Sylow de G es un p -subgrupo de G cuyo orden es la máxima potencia de p que divide a $|G|$.

Es decir, si $|G| = p^k m$ con $\text{mcd}(p, m) = 1$ y p primo, un p -subgrupo $H < G$ es de Sylow si $|H| = p^k$.

Corolario 1.13.1 (Primer Teorema de Sylow). *Para todo grupo finito G y todo divisor primo p de su orden, existe al menos un p -subgrupo de Sylow.*

Demostración. Es evidente a partir del Teorema 1.13. □

Ejemplo. Si tenemos un grupo G con $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$, vamos a tener:

- $P < G$ un 2-subgrupo de Sylow, con $|P| = 8$.
- $Q < G$ un 3-subgrupo de Sylow, con $|Q| = 3$.

Observación. Si G es un grupo y p es un número primo con:

$$|G| = p^k m \quad \text{mcd}(p, m) = 1$$

Y P es un p -subgrupo de Sylow con $P < H < G$, entonces usando la fórmula de los índices:

$$[G : P] = [G : H][H : P]$$

En dicho caso, $[H : P] \mid [G : P] = m$. Si suponemos que p divide a $[H : P]$, entonces p dividirá a $[G : P] = m$, pero $\text{mcd}(p, m) = 1$, por lo que p no puede dividir a $[H : P]$.

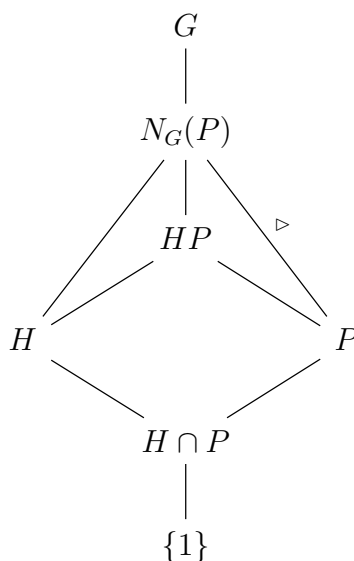
Es decir, si encontramos un subgrupo H de G que contiene a P como subgrupo, entonces p no dividirá a $[H : P]$.

El siguiente Lema también recibe el nombre de Segundo Teorema de Sylow, aunque nos reservamos este nombre para el resultado que se demuestra a partir del Lema.

Lema 1.14. *Si P es un p -subgrupo de Sylow de un grupo finito G y H es un p -subgrupo de $N_G(P)$, entonces H está contenido en P .*

Es decir, los p -subgrupos del normalizador de un p -subgrupo de Sylow estarán contenidos en dicho subgrupo.

Demostración. Como $P \triangleleft N_G(P)$ y $H < N_G(P)$, tenemos que $HP < N_G(P)$ y $H \cap P < H$. Estamos en la situación:



Por el Segundo Teorema de Isomorfía:

$$HP/P \cong H/H \cap P$$

Ahora, si $r = [HP : P] = [H : H \cap P]$, entonces $p \nmid r$. Ahora, como $r = [H : H \cap P]$ y como H es un p -subgrupo, $p^k \mid r$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ (como es un p -grupo, tendremos $k > 0$). Como $p \nmid r$ (por la observación anterior) y $p^k \mid r$, entonces $r = 1$, de donde $HP = P$ y $H < P$. \square

Teorema 1.15 (Segundo Teorema de Sylow). *Sea G un grupo finito, p un número primo, supongamos que $|G| = p^k m$ con $\text{mcd}(p, m) = 1$ y n_p denota el número de p -subgrupos de Sylow de G , entonces:*

- i) *Todo p -subgrupo de G está contenido (como subgrupo) en un p -subgrupo de Sylow de G .*
- ii) *Cualesquiera dos p -subgrupos de Sylow de G son conjugados.*
- iii) *$n_p \mid m$ y $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demostración. Demostramos cada apartado:

- i) Si llamamos $S = \text{Syl}_p(G) = \{P \mid P \text{ es un } p\text{-subgrupo de Sylow de } G\}$, consideramos la acción por conjugación $G \times S \rightarrow S$ dada por:

$$ac(g, P) = {}^gP = gPg^{-1} \in S$$

Que estará bien definida, ya que el orden del conjugado de un elemento coincide con el orden del propio elemento, por lo que $ac(g, P)$ seguirá siendo un p -subgrupo de Sylow, para cualquier $P \in S$ y $g \in G$. Sea $P_1 \in S$, estudiemos su órbita y su estabilizador:

$$\begin{aligned} \text{Orb}(P_1) &= \{gP_1g^{-1} \mid g \in G\} \\ \text{Stab}_G(P_1) &= \{g \in G \mid gP_1g^{-1} = P_1\} = N_G(P_1) \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} |\text{Orb}(P_1)| &= [G : N_G(P_1)] \\ P_1 &< N_G(P_1) < G \\ [G : P_1] &= [G : N_G(P_1)][N_G(P_1) : P_1] \end{aligned}$$

Por lo que $|\text{Orb}(P_1)|$ divide a $[G : P_1] = m$. En definitiva:

$$\text{mcd}(|\text{Orb}(P_1)|, p) = 1$$

Ahora, veamos que todo p -subgrupo está contenido en un p -subgrupo de Sylow. Para ello, sea H un p -subgrupo de G , consideramos la acción sobre la órbita de $P_1 \in S$, $H \times \text{Orb}(P_1) \rightarrow \text{Orb}(P_1)$, dada por:

$$ac(h, P) = {}^hP = hPh^{-1} \in \text{Orb}(P_1)$$

Tendremos:

$$\text{Stab}_H(P) = \{h \in H \mid hPh^{-1} = P\} = H \cap N_G(P) < H$$

Además, también tendremos que $H \cap N_G(P) < P$, ya que si H es un p -subgrupo de $N_G(P)$, entonces $H < P$. En definitiva:

$$\text{Stab}_H(P) = H \cap N_G(P) < H \cap P < H \cap N_G(P)$$

De donde tenemos que $H \cap N_G(P) = H \cap P$. Usando la fórmula de la órbita:

$$|\text{Orb}(P_1)| = \sum_P [H : \text{Stab}_H(P)] = \sum_P [H : H \cap P]$$

De donde cada sumando divide a $|H|$ con H un p -subgrupo de P , por lo que $|H|$ es una potencia de p . Sin embargo, como $p \nmid |\text{Orb}(P_1)|$ (su máximo común divisor era 1), ha de existir un grupo $P \in \text{Orb}(P_1)$ (notemos que P es un p -subgrupo de Sylow. De hecho, P es un conjugado de P_1) de forma que:

$$[H : H \cap P] = 1$$

Por lo que $H \cap P = H$ y $H < P$.

ii) Veamos ahora que cualesquiera dos p -subgrupos de Sylow de G son conjugados. Para ello, sean P_1, P_2 dos p -subgrupos de Sylow de G , antes vimos (el lema) que si $H = P_2 < G$, entonces H está contenido en un subgrupo de Sylow, por lo que $\exists P$, un p -subgrupo de Sylow, conjugado de P_1 (por *i*)) de forma que $P_2 < P$, pero $|P| = |P_2|$, luego $P_2 = P$.

iii) Veamos ahora que $n_p \mid m$ y que $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

En el apartado *ii*) hemos visto que $\text{Orb}(P_1) = S$, luego:

$$n_p = |S| = |\text{Orb}(P_1)| = [G : N_G(P_1)]$$

Por lo que $n_p \mid m$.

Si en el apartado *i*) tomamos $H = P_1$ (el de la demostración anterior):

$$n_p = |\text{Orb}(P_1)| = \sum_P [P_1 : P_1 \cap P]$$

Por lo que $[P_1 : P_1 \cap P] = 1$ y los demás eran múltiplos de p , deducimos que $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

□

Ejemplo. Vamos a calcular grupos de Sylow:

- En $C_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, por el Primer Teorema de Sylow tendremos grupos de Sylow de las potencias máximas de los primos que aparecen en la factorización de n . Es decir, si n se descompone como:

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_m^{t_m}$$

Para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe un p_k -subgrupo de Sylow, que será cíclico y tendrá orden $p_k^{t_k}$, luego los subgrupos de Sylow serán de la forma: $C_{p_k^{t_k}}$.

- En S_3 , como $|S_3| = 6 = 2 \cdot 3$, tendremos 2-subgrupos de Sylow y 3-subgrupos de Sylow. Veamos cuántos tenemos:
 - 2-subgrupos de Sylow, es decir, subgrupos de orden 2 de S_3 . Como $n_2 \mid 3$ y ha de ser $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$, tendremos que n_2 valdrá 1 o 3.

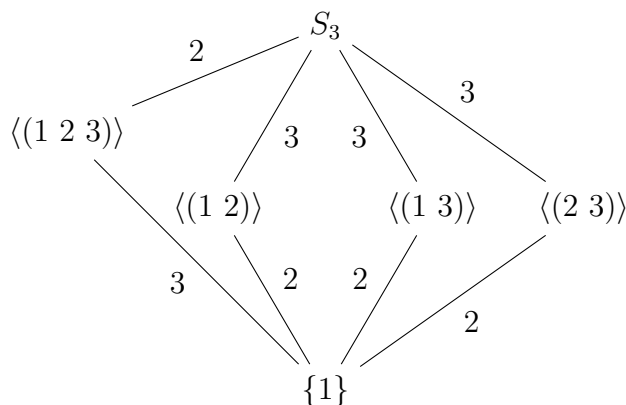


Figura 1.1: Diagrama de Hasse para los subgrupos de S_3 .

como los 3 subgrupos de la derecha son conjugados entre sí (compruébe-se), tendremos que $n_2 = 3$.

- Los 3-subgrupos de Sylow será un subgrupo de orden 3 de S_3 , que será el único que hay: $\langle (1 2 3) \rangle = A_3 \triangleleft S_3$.

Si queremos verlo por el Segundo Teorema de Sylow:

$$\left. \begin{array}{l} n_3 \mid 2 \\ n_3 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right\} \implies n_3 = 1$$

- En A_4 , tenemos $|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$. Tendremos:
 - 2-subgrupo de Sylow de orden 4. Busquemos por el Segundo Teorema de Sylow:

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right\} \implies n_2 \in \{1, 3\}$$

Concluimos que $n_2 = 1$, de donde el 2-subgrupo de Sylow es V , que era normal en A_4 .

- 3-subgrupo de Sylow de orden 3:

$$\left. \begin{array}{l} n_3 \mid 4 \\ n_3 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right\} \implies n_3 \in \{1, 4\}$$

Y serán los subgrupos de A_4 generados por los 3-ciclos.

- En S_4 , $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$:

- Para los 2-subgrupos:

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right\} \implies n_2 \in \{1, 3\}$$

Si suponemos que $n_2 = 1$, sea Q un grupo con $|Q| = 8$ que sea el 2-subgrupo de Sylow. En dicho caso, todas las trasposiciones deben estar contenidas en Q (por ser de orden 2), pero todas las trasposiciones generan a S_4 , luego $Q = S_4$, contradicción.

Por tanto, tenemos $n_2 = 3$, tenemos tres 2-subgrupos de Sylow: Q_1 , Q_2 y Q_3 . El grupo de Klein V es un 2-subgrupo, y es normal en S_4 . Por tanto, va a estar contenido en algún Q_k ($k \in \{1, 2, 3\}$). Supongamos que $V < Q_1$. Como todos ellos son conjugados, $\exists \alpha, \beta \in S_4$ de forma que:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \alpha Q_1 \alpha^{-1} \\ Q_3 &= \beta Q_1 \beta^{-1} \end{aligned}$$

Y si multiplicamos (como $V \triangleleft S_4$):

$$\begin{aligned} V &= \alpha V \alpha^{-1} < \alpha Q_1 \alpha^{-1} = Q_2 \\ V &= \beta V \beta^{-1} < \beta Q_1 \beta^{-1} = Q_3 \end{aligned}$$

De donde deducimos que $V < Q_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$. Los Q_k contendrán a V y a alguna transposición:

$$\begin{aligned} Q_1 &= V \langle (1 \ 2) \rangle \\ Q_2 &= V \langle (1 \ 3) \rangle \\ Q_3 &= V \langle (1 \ 4) \rangle \end{aligned}$$

- Para los 3-subgrupos de Sylow:

$$\left. \begin{array}{l} n_3 \mid 8 \\ n_3 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right\} \implies n_3 \in \{1, 4\}$$

Los subgrupos de orden 4 de S_4 son:

$$\langle (1 \ 2 \ 3) \rangle, \langle (1 \ 2 \ 4) \rangle, \langle (1 \ 3 \ 4) \rangle, \langle (2 \ 3 \ 4) \rangle$$

Que son los 3-subgrupos de Sylow.

Corolario 1.15.1. Sea P un p -subgrupo de Sylow de un grupo finito G . Entonces:

$$P \text{ es el } \text{único } p\text{-subgrupo de Sylow} \iff P \triangleleft G$$

Demostración. Por doble implicación:

\implies) Si P es el único, como todos los conjugados de P son subgrupos de Sylow, tendremos que:

$$gPg^{-1} = P \quad \forall g \in G$$

Que era la caracterización de subgrupo normal de G .

\impliedby) Supuesto que $P \triangleleft G$, sea Q otro p -subgrupo de Sylow, como P y Q han de ser conjugados, sabemos que $\exists g \in G$ de forma que $gPg^{-1} = Q$, pero por ser $P \triangleleft G$, tenemos también que $P = gPg^{-1}$, luego:

$$P = gPg^{-1} = Q$$

□

Ejemplo. Todo grupo de orden 35 es resoluble.

Demostración. Sea G un grupo con $|G| = 35 = 5 \cdot 7$, vemos que:

$$\left. \begin{array}{l} n_7 \mid 5 \\ n_7 \equiv 1 \pmod{5} \end{array} \right\} \implies n_7 = 1$$

En dicho caso, tenemos un único 7-subgrupo de Sylow $H < G$, que además es normal y tendrá orden 7. En dicho caso, sabemos que será isomorfo a \mathbb{Z}_7 . Como los grupos abelianos son resolubles, tenemos que H es resoluble. Si consideramos el cociente:

$$|G/H| = 5$$

Por lo que $G/H \cong \mathbb{Z}_5$ y G/H será resoluble por ser isomorfo a un grupo abeliano. Deducimos que G es resoluble, por existir $H \triangleleft G$ y ser H y G/H resolubles. □

Se puede demostrar de forma análoga que ciertos grupos de cierto orden son siempre resolubles.

Teorema 1.16. *Sea G un grupo finito en el que todos sus subgrupos de Sylow son normales, entonces G es el producto directo interno de sus subgrupos de Sylow:*

$$G = \prod_{H \in \text{Syl}(G)} H$$

Demostración. En la caracterización de producto directo interno para una cantidad finita de subgrupos (Teorema ??), vimos que G era producto directo interno de todos ellos (los llamaremos H_i con $i \in \{1, \dots, n\}$) si y solo si:

- $H_i \triangleleft G$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $H_1 H_2 \dots H_n = G$.
- $(H_1 \dots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\}$ para todo $i \in \{2, \dots, k\}$

Basta pues, demostrar estos 3 puntos. Supuesto que $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, llamamos P_i al único p_i -subgrupo de Sylow, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

- Por hipótesis, tendremos que $P_i \triangleleft G$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

- También:

$$|P_1 P_2 \dots P_k| = |P_1| |P_2| \dots |P_k| = |G|$$

De donde concluimos que $P_1 P_2 \dots P_k = G$.

- Fijado $i \in \{2, \dots, k\}$, veamos que $(P_1 \dots P_{i-1}) \cap P_i = \{1\}$. Para ello, sea $x \in (P_1 \dots P_{i-1}) \cap P_i$, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} O(x) \mid |P_1 \dots P_{i-1}| = p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} \\ O(x) \mid |P_i| = p_i^{n_i} \end{array} \right\} \implies O(x) = 1 \implies x = 1$$

□

Observación. Notemos que cualquier grupo abeliano finito es producto directo interno de sus subgrupos de Sylow, ya que en cualquier grupo abeliano los subgrupos son normales.

2. Clasificación de grupos abelianos finitos

El objetivo final del tema es demostrar los teoremas de estructura de los grupos abelianos finitos, que permiten clasificar todos estos grupos según su orden (para cada orden tendremos una clasificación), salvo isomorfismos.

Serán de especial relevancia varios resultados que ya hemos visto:

- $C_n \times C_m \cong C_{nm} \iff \text{mcd}(n, m) = 1$, en la Proposición ??.
- Si $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ y G tenía un único P_i p_i -subgrupo de Sylow para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $G \cong P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k$.

Como trabajaremos con subgrupos abelianos, recordamos que la notación que usábamos para el producto directo de grupos abelianos era \oplus .

Teorema 2.1 (Estructura de los p -grupos abelianos finitos).

Sea A un p -grupo abeliano finito con orden $|A| = p^n$ para $n \geq 1$, entonces existen enteros $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_t \geq 1$ de forma que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_t = n \quad y \quad A \cong C_{p^{\beta_1}} \oplus C_{p^{\beta_2}} \oplus \dots \oplus C_{p^{\beta_t}}$$

Además, esta expresión es única, es decir, si existen $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s \geq 1$ de forma que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n \quad y \quad A \cong C_{p^{\alpha_1}} \oplus C_{p^{\alpha_2}} \oplus \dots \oplus C_{p^{\alpha_s}}$$

entonces $s = t$ y $\alpha_k = \beta_k$, para todo $k \in \{1, \dots, t\}$.

Observación. Notemos que lo que estamos haciendo es tomar particiones de n de la forma β_i , y este Teorema nos dice que el p -grupo puede escribirse de forma única salvo isomorfismos como producto de ciertos subgrupos cíclicos.

Es decir, existen tantos p -grupos abelianos de orden p^n como particiones tengamos del número n .

Ejemplo. Por ejemplo:

- Grupos abelianos finitos de orden $8 = 2^3$, tenemos como particiones:

$$\begin{aligned} 3 &\implies A \cong C_8 \\ 1, 2 &\implies A \cong C_4 \oplus C_2 \\ 1, 1, 1 &\implies A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \end{aligned}$$

- Los grupos abelianos finitos de orden $81 = 3^4$, tenemos como particiones:

$$\begin{aligned} A &\cong C_{81} \\ A &\cong C_{27} \oplus C_3 \\ A &\cong C_9 \oplus C_9 \\ A &\cong C_9 \oplus C_3 \oplus C_3 \\ A &\cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \end{aligned}$$

Teorema 2.2 (Estructura de los grupos abelianos finitos).

Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$ siendo p_i primo $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, entonces:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^k \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i}^{n_{ij}} \right)$$

Donde para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} n_{i1} &\geq n_{i2} \geq \dots \geq n_{it_i} \geq 1 \\ n_{i1} + n_{i2} + \dots + n_{it_i} &= r_i \end{aligned}$$

Y la descomposición es única salvo el orden.

Esta última recibe el nombre de descomposición cíclica primaria, y a los $p_i^{n_{ij}}$ con $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, t_i\}$ se les llama divisores elementales de A .

Demostración. Si A es abeliano y finito, entonces todos sus p -subgrupos de Sylow son normales, luego podemos escribir:

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k$$

Siendo P_1, P_2, \dots, P_k el conjunto de todos sus p -subgrupos de Sylow, de forma que $|P_i| = p_i^{r_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como cada P_i es un p_i -subgrupo abeliano finito, aplicando el Teorema 2.1, podemos escribir:

$$P_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i}^{n_{ij}} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

De donde tenemos la expresión de la tesis.

A cada P_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ lo llamaremos componente p_i -primaria de A . \square

Ejemplo. Si tenemos un subgrupo finito abeliano A con $|A| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, veamos los divisores elementales:

Div. elementales	Descomp. cíclica primaria
$2^3 \ 3^2 \ 5$	$C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2^2 \ 2 \ 3^2 \ 5$	$C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2 \ 2 \ 2 \ 3^2 \ 5$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2^3 \ 3 \ 3 \ 5$	$C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus C_8$
$2 \ 2^2 \ 3 \ 3 \ 5$	$C_2 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$
$2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 5$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$

Serían todas las descomposiciones cíclicas primarias de A . Es decir, A será isomorfo a cualquiera de esos.

Sin embargo, si recordamos la Proposición ??, esto nos llevará a la descomposición cíclica, donde observaremos por ejemplo que:

$$\begin{aligned}
C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 &\cong C_{360} \\
C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 &\cong C_{180} \oplus C_2 \\
C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 &\cong C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2 \\
C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus C_8 &\cong C_{120} \oplus C_3 \\
C_2 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 &\cong C_{60} \oplus C_6 \\
C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 &\cong C_{30} \oplus C_6 \oplus C_2
\end{aligned}$$

Ahora, usaremos que:

$$C_n \times C_m \cong C_{nm} \iff \text{mcd}(n, m) = 1$$

Teorema 2.3 (Descomposición cíclica de un grupo abeliano finito).

Si A es un grupo abeliano finito, entonces:

$$A \cong C_{d_1} \oplus C_{d_2} \oplus \dots \oplus C_{d_t}$$

Donde los d_i son enteros positivos de forma que:

$$d_1 d_2 \dots d_t = |A|$$

Y $d_i \mid d_j$ para cada $j \leq i$. Además, la descomposición es única salvo el orden, para cada partición.

Demostración. Supuesto que $|A| = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$, si usamos la descomposición que nos da el Teorema 2.2:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^k \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i}^{n_{ij}} \right)$$

Para ciertos:

$$\begin{aligned}
n_{i1} &\geq n_{i2} \geq \dots \geq n_{it_i} \geq 1 \\
n_{i1} + n_{i2} + \dots + n_{it_i} &= r_i
\end{aligned}$$

Sea $t = \max t_1, t_2, \dots, t_k$, si $t_i < l \leq t$, tendremos entonces que $n_{il} = 0$.

Lo que estamos haciendo es dada una partición, como por ejemplo la $\{2, 2^2, 3^2, 5\}$, denotar por t_i al número de particiones de cada número y por n_{ij} a los exponentes de cada una de las particiones, construyendo la tabla:

$$\left\{ \begin{array}{c|cc} t_1 & n_{11} & n_{12} \\ t_2 & n_{21} & n_{22} \\ t_3 & n_{31} & n_{32} \end{array} \right.$$

De esta forma, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p_1^{n_{11}} & p_2^{n_{21}} & \dots & p_k^{n_{k1}} \\ p_1^{n_{12}} & p_2^{n_{22}} & \dots & p_k^{n_{k2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{n_{1k}} & p_2^{n_{2k}} & \dots & p_k^{n_{kk}} \end{pmatrix}$$

Y A es la suma directa de los cíclicos con órdenas las entradas de las columnas. Si tomamos el producto por columnas obtenemos la cíclica primaria y si la hacemos por filas la que estamos interesados:

$$\begin{aligned} d_1 &= p_1^{n_{11}} p_2^{n_{21}} \dots p_k^{n_{k1}} \\ &\vdots \\ d_t &= p_1^{n_{1t}} p_2^{n_{2t}} \dots p_k^{n_{kt}} \end{aligned}$$

Efectivamente, tendremos que:

$$d_1 d_2 \dots d_t = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} = |A|$$

Como $n_{ij} \geq n_{i,j+1}$, tendremos entonces que $d_i \mid d_j$, para todo $j \leq i$. Además, tendremos que:

$$\begin{aligned} C_{d_1} &\cong C_{p_1^{n_{11}}} \oplus C_{p_2^{n_{21}}} \oplus \dots \oplus C_{p_k^{n_{k1}}} \\ &\vdots \\ C_{d_t} &\cong C_{p_1^{n_{1t}}} \oplus C_{p_2^{n_{2t}}} \oplus \dots \oplus C_{p_k^{n_{kt}}} \end{aligned}$$

De donde $A \cong C_{d_1} \oplus C_{d_2} \oplus \dots \oplus C_{d_t}$. La unicidad viene de la unicidad dada por la descomposición del Teorema 2.2. \square

Los d_i reciben el nombre de factores invariantes.

Ejemplo. Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$:

- Para la partición $\{2^3, 3^2, 5\}$, tenemos que:

$$A \cong C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$$

Los factores invariantes serán:

$$d_1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Por lo que la descomposición cíclica será $A \cong C_{360}$.

- Para la partición $\{2^2, 2, 3^2, 5\}$, la descomposición cíclica primaria fue:

$$A \cong C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$$

En este caso, tendremos $t = \max\{2, 1, 1\} = 2$, por lo que tendremos dos factores invariantes:

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 3^2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que tendremos (los productos de las filas):

$$\begin{aligned} d_1 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \\ d_2 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Y la descomposición cíclica es:

$$A \cong C_{180} \oplus C_2$$

- Para la descomposición $\{2, 2, 2, 3^2, 5\}$, tenemos:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$$

Y tendremos $t = 3$:

$$\begin{pmatrix} d_1 = & 2 & 3^2 & 5 \\ d_2 = & 2 & 1 & 1 \\ d_3 = & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$A \cong C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2$$

- Para $\{2^3, 3, 3, 5\}$:

$$A \cong C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Y tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la descomposición cíclica será:

$$A \cong C_{120} \oplus C_3$$

- Para $\{2^2, 2, 3, 3, 5\}$:

$$A \cong C_4 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Y tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos la descomposición cíclica:

$$A \cong C_{60} \oplus C_6$$

- Para $\{2, 2, 2, 3, 3, 5\}$:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y:

$$A \cong C_{30} \oplus C_6 \oplus C_2$$

En el caso particular de que todos los primos tengan exponente 1:

Corolario 2.3.1. Si A es un grupo abeliano finito con $|A| = p_1 p_2 \dots p_k = n$, entonces salvo isomorfismo, el único grupo abeliano de orden n es el cíclico C_n .

Demostración. Utilizando el Teorema 2.2, podemos escribir:

$$A \cong C_{p_1} \oplus C_{p_2} \oplus \dots \oplus C_{p_k}$$

Y como $\text{mcd}(p_i, p_j) = 1$ para cada $i, j \in \{1, \dots, k\}$ con $i \neq j$, tenemos que:

$$C_{p_1} \oplus C_{p_2} \oplus \dots \oplus C_{p_k} = C_{p_1 p_2 \dots p_k} = C_n$$

□

Ejemplo. Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = 580 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, busquemos clasificarlo según la descomposición cíclica:

Descomposición	desc. cíclica primaria	factores invariantes	desc. cíclica
$\{2^2, 3^2, 5\}$	$C_4 \oplus C_9 \oplus C_5$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$	C_{180}
$\{2, 2, 3^2, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$	$d_1 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$ $d_2 = 2$	$C_{90} \oplus C_2$
$\{2^3, 3, 3, 5\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ $d_2 = 3$	$C_{60} \oplus C_3$
$\{2, 2, 3, 3, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ $d_2 = 2 \cdot 3 = 6$	$C_{30} \oplus C_6$

Ejemplo. Listar los órdenes de todos los elementos de un grupo de orden 8. Sea A un grupo abeliano finito de orden 8, entonces lo podemos clasificar en:

- C_8 :
 - Los elementos $\{1, 3, 5, 7\}$ tienen orden 8.
 - $O(0) = 1$.
 - $O(2) = 8/\text{mcd}(2, 8) = 4 = O(6)$.
 - $O(4) = 2$.
- $C_4 \oplus C_2$, aplicamos que $O(a, b) = \text{mcm}(O(a), O(b))$: Como los órdenes de los elementos en C_4 son: $\{1, 2, 4\}$ y en C_2 son $\{1, 2\}$, las posibilidades son: $\{1, 2, 4\}$:
 - $O(0, 0) = 1$.
 - $O(0, 1) = 2$.
 - $O(1, b) = 4 = O(3, b), \forall b \in C_2$
 - $O(2, b) = 2, \forall b \in C_2$.
- $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$, los órdenes son $\{1, 2\}$ y todos tienen orden 2 salvo el elemento $(0, 0, 0)$, que tiene orden 1.

Ejemplo. Listar los órdenes de todos los elementos de un grupo abeliano A de orden 12.

Sea A con $|A| = 12 = 2^2 \cdot 3$, tenemos $A \cong \mathbb{Z}_{12}$ o $A \cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$.

- En \mathbb{Z}_{12} :

- $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\}$.
- $O(2) = 6$.
- $O(3) = 4 = O(9)$.
- $O(4) = 3 = O(8)$.
- $O(6) = 2$.

■ En $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$:

$$O(a, b) = \text{mcm}(\text{Div}(6), \text{Div}(2)) = \text{mcm}(\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 6\}$$

El orden de los elementos de \mathbb{Z}_6 son:

- $U(\mathbb{Z}_6) = \{1, 5\}$, luego $O(1) = O(5) = 6$.
- $O(2) = 3 = O(4)$.
- $O(3) = 2$.
- $O(0) = 1$.

Ahora:

- $O(0, 0) = 1$.
- $O(1, b) = O(5, b) = 6 \ \forall b \in \mathbb{Z}_2$.
- $O(3, b) = 2 \ \forall b \in \mathbb{Z}_2$.
- $O(2, 0) = O(4, 0) = 3$.
- $O(2, 1) = O(4, 1) = 6$.

2.1. Clasificación de grupos abelianos no finitos

Buscamos hallar la descomposición cíclica y la descomposición cíclica primaria de dos grupos cualesquiera. Para ello, recordamos varias definiciones que ya vimos.

Notación. Como trabajaremos con grupos abelianos finitos, usaremos la notación aditiva.

Definición 2.1. Un grupo abeliano A se dice que es finitamente generado si existe un conjunto:

$$X = \{x_1, \dots, x_r\} \subseteq A$$

De forma que para todo $a \in A$, existirán $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$a = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k$$

En dicho caso, diremos que X es un sistema de generadores de A , y notaremos:

$$A = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$$

Definición 2.2 (Base). Sea A un grupo abeliano, un conjunto de generadores $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ de A es una base si son \mathbb{Z} -linealmente independientes.

En dicho caso A es un grupo abeliano libre de rango r .

Observación. Observemos que si A es un grupo abeliano libre de rango r , entonces tendremos que:

$$A \cong \mathbb{Z}^r$$

Además, si $H < A$, tendremos entonces que $H \cong \mathbb{Z}^s$, para cierta $s \leq r$.

De esta forma, si A es un grupo finitamente generado, podemos descomponerlo en:

$$A \cong F \oplus T(A)$$

Que será la descomposición estándar de A . F será un grupo abeliano libre de rango finito y:

$$T(A) = \{a \in A \mid O(a) < +\infty\}$$

Que recibe el nombre de subgrupo de torsión de A .

Proposición 2.4. *El subgrupo de torsión de un grupo es un grupo abeliano finito.*

De esta forma, existirán $r \geq 0$ y d_1, \dots, d_s con $d_i \mid d_j$ con $j \leq i$ de forma que:

$$d_1 d_2 \dots d_s = |T(A)|$$

Por lo que:

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_s}$$

- Llamaremos r al rango de A .
- A los d_i los llamaremos factores invariantes de A .

Ejemplo. Si tomamos:

$$A = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4, x^2 z = z^{-1} y, xy = yx, xz = zx, yz = zy \rangle$$

Si lo escribimos en notación aditiva:

$$A = \langle x, y, z \mid 3x = 4y, 2x + z = y - z, x + y = y + x, x + z = z + x, y + z = z + y \rangle$$

Si nos olvidamos de las últimas y pensamos que el grupo es abeliano, así como despejando:

$$A = \langle x, y, z \mid 3x - 4y = 0, 2x - y + 2z = 0 \rangle$$

Y tenemos el sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos 3 incógnitas y $rg(M) = 2$, un Sistema Compatible Indeterminado, con un parámetro libre. Veremos que transformaremos M en:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Que es la forma normal de Smith (parecido a Hermite pero en \mathbb{Z}). De esta forma, tendremos que:

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Sea:

$$A = \left\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\rangle$$

con n generadores y $m \leq n$ relaciones siendo. Sea:

$$X = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Consideramos $F = \langle X \rangle$, que será $F \cong \mathbb{Z}^r$. La descomposición estándar de A será:

$$A = F + T(A)$$

Si definimos:

$$\begin{aligned} \varphi: F &\longrightarrow A \\ e_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Tenemos que φ está bien definida, así como que es sobreyectiva. Tendremos:

$$\ker(\varphi) < F$$

Por lo que:

$$\ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}^m$$

De esta forma, si $\{y_1, \dots, y_m\}$ es una base de $\ker(\varphi)$, cumplirá que (basta aplicar φ):

$$\begin{cases} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \dots + a_{mn}e_n = y_m \end{cases}$$

De esta forma, tenemos:

$$\ker(\varphi) \xrightarrow{i} F \rightarrow A$$

De forma que la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A la que llamaremos matrices de relaciones del grupo, que nos lleva el vector (y_1, \dots, y_m) en (x_1, \dots, x_n) , tras multiplicar por (e_1, \dots, e_n) , y tendremos aplicando Teoremas de Isomorfía que:

$$A \cong F / \ker(\varphi)$$

Esta matriz la convertiremos en la forma normal de Smith.

Como los factores invariantes eran productos de primos, no nos podrá salir ningún 1, por lo que esos unos los eliminaremos, ya que como factores invariantes han de ser mayor que 1.

Ejemplo. En $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, una base para \mathbb{Z} es:

$$X = \{1\}$$

Y un sistema de generadores para $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ es:

$$\{(1, 1)\}$$

2.1.1. Forma Normal de Smith de una matriz

Ejemplo. Una forma de Hermite por filas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las operaciones elementales sobre matrices eran:

- Intercambiar filas.
- Multiplicar una fila por un número.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra.

Al hacer la forma normal de Smith podemos encontrar dos matrices P y Q regulares de forma que:

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_s \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

De forma que $d_i \mid d_{i+1}$. P contenía las transformaciones elementales por filas y Q por columnas.

Ejemplo. Si consideramos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Como mcd de todos los elementos es 1, tenemos que poner un 1 arriba (consejo: no hacer ceros hasta poner un 1). Para ello, hacemos la cuarta fila más la segunda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nos la llevamos a la primera posición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, hacemos ceros en la primera fila, salvo el 1. Restamos a la primera la cuarta multiplicada por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el mcd es 2, hay que sacar un 2 en la posición 2, 2. Para ello, intercambiamos las filas segunda y cuarta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el mcd es 6 y tenemos un 6, hemos terminado. Hemos conseguido la forma normal de Smith.

Ejemplo. Calcular el rango de A y todos los grupos abelianos no isomorfos de orden igual que la torsión.

$$A = \left\langle x, y, z, t \mid \begin{array}{l} 14x + 4y + 4z + 14t = 0 \\ -6x + 4y + 4z + 10t = 0 \\ -16x - 4y - 4z - 20t = 0 \end{array} \right\rangle$$

Calculamos la forma normal de Smith de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 & 14 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_1 = -(F_1 + F_3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - 3C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 & 28 \\ -16 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 8F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 28 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_2 = -F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 + 7C_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de A es (el número de incógnitas menos el rango de la matriz)

3. Ahora, la descomposición cíclica sería:

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56}$$

Y la descomposición cíclica primaria:

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7$$

Y tendremos:

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7$$

Para ello, buscamos los grupos G con orden $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 448 = 2^6 \cdot 7$ y descartamos el isomorfo a $T(A)$:

Divisores elementales	Factores invariantes
$2^6, 7$	448
$2, 2^5, 7$	2, 224
$2, 2, 2^4, 7$	2, 2, 112
$2, 2, 2, 2, 2^3, 7$	2, 2, 2, 56
$2, 2, 2, 2, 2, 2^2, 7$	2, 2, 2, 2, 28
$2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7$	2, 2, 2, 2, 2, 14
$2, 2^2, 2^3, 7$	2, 4, 56
$2^2, 2^2, 2^2, 7$	4, 4, 28
$2^3, 2^3, 7$	8, 56
$2^2, 2^4, 7$	4, 112
$2, 2, 2^2, 2^2$	2, 2, 4, 28

¿Hay algún elemento de orden infinito en A ? Sí:

$$(1, 0, 0, 0)$$

¿Hay algún elemento de orden 56? Sí:

$$(0, 0, 0, 1)$$

¿Hay algún elemento de orden 8? Sí:

$$(0, 0, 0, 7)$$

O también:

$$(0, 1, 1, 7)$$

Ejemplo. Forma normal de Smith de:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Como no está en forma normal, hemos de añadir elementos para poder hayar el 2:

$$2 = \text{mcd}(4, 6, 8)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-C_1} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
& \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea G un grupo abeliano de orden n y $l(G)$ su longitud (la longitud de su serie de composición). Si la descomposición en factores primos de n es:

$$n = p_1^{r_1} \dots p_r^{e_r}$$

Entonces:

$$l(G) = e_1 + \dots + e_r$$

Y los factores de composición son:

$$fact(G) = (C_{p_1}, \cdot^{e_1}, C_{p_1}, C_{p_2}, \cdot^{e_2}, C_{p_2}, \dots, C_{p_r}, \cdot^{e_r}, C_{p_r})$$

Como:

$$G \cong (C_{p_1}^{\alpha_{11}} \oplus \dots \oplus C_{p_1}^{\alpha_{1n_1}}) \oplus \dots \oplus (C_{p_r}^{\alpha_{r1}} \oplus \dots \oplus C_{p_r}^{\alpha_{rn_1}})$$

Para:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &\geq \dots \geq \alpha_{1n_1} \geq 1 & \alpha_{11} + \dots + \alpha_{1n_1} &= e_1 \\
&\vdots & &\vdots \\
\alpha_{r1} &\geq \dots \geq \alpha_{rn_1} \geq 1 & \alpha_{r1} + \dots + \alpha_{rn_1} &= e_r
\end{aligned}$$

Como G es abeliano, los factores de composición son cíclicos.

Para conseguir la serie de composición, lo que haremos será considerar la descomposición de G en suma de grupos cíclicos y en cada paso, iremos quitando un grupo cíclico:

$$\begin{aligned}
G_1 &= (C_{p_1}^{\alpha_{12}} \oplus \dots \oplus C_{p_1}^{\alpha_{1n_1}}) \oplus \dots \oplus (C_{p_r}^{\alpha_{r1}} \oplus \dots \oplus C_{p_r}^{\alpha_{rn_1}}) \\
G_2 &= (C_{p_1}^{\alpha_{13}} \oplus \dots \oplus C_{p_1}^{\alpha_{1n_1}}) \oplus \dots \oplus (C_{p_r}^{\alpha_{r1}} \oplus \dots \oplus C_{p_r}^{\alpha_{rn_1}}) \\
&\vdots \\
G_{n_1} &= (C_{p_2}^{\alpha_{21}} \oplus \dots \oplus C_{p_2}^{\alpha_{2n_2}}) \oplus \dots \oplus (C_{p_r}^{\alpha_{r1}} \oplus \dots \oplus C_{p_r}^{\alpha_{rn_1}}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea A un grupo con $|A| = 40 = 2^3 \cdot 5$:

Descomposición	Descomp. cíclica primaria	Factores invariantes	Descomp. cíclica
$2^3, 5$	$C_8 \oplus C_5$	40	C_{40}
$2, 2^2, 5$	$C_2 \oplus C_4 \oplus C_5$	2, 20	$C_2 \oplus C_{20}$
$2, 2, 2, 5$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_5$	2, 2, 10	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_{10}$

Como $l(A) = 4$ por el ejercicio anterior, series de composición serán:

$$\begin{aligned} C_{40} \triangleright C_{20} \triangleright C_{10} \triangleright C_5 \triangleright \{1\} \\ C_{40} \triangleright C_8 \triangleright C_4 \triangleright C_2 \triangleright \{1\} \end{aligned}$$

Los factores de composición de la primera son:

$$C_{40}/C_{20} \cong C_2 \quad C_{20}/C_{10} \cong C_2 \quad C_{10}/C_5 \cong C_2 \quad C_5/\{1\} \cong C_5$$

Ejemplo. Sea:

$$G = \langle a, b, c \mid \begin{array}{l} 2a - 6b + 18c = 0 \\ 6a + 6c = 0 \end{array} \rangle$$

Y sea:

$$H = \mathbb{Z}^3 / \langle (1, -9, 3), (1, -7, 1), (1, -1, 1) \rangle$$

Tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 18 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 & 18 \\ 0 & 18 & -48 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 48 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Por lo que G tiene rango 1 y sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria son:

$$G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

Con H tenemos lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$$

y H no tiene parte libre. Tendremos:

$$l(H) = 3$$

Los factores de composición serán $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} G &\not\cong H \\ T(G) &\cong T(H) = H \end{aligned}$$

¿Cuáles son los elementos de orden 6 de H ? Tiene al menos:

$$O(a, 1) = O(a, 5) = 6 \quad \forall a \in \mathbb{Z}_2$$

También tendremos:

$$O(1, 2) = \text{mcm}(O(1), O(2)) = \text{mcm}(2, 3) = 6$$

¿ G tiene elementos de orden 6? Sí, los mismos pero con un 0 en primera coordenada.

3. Clasificación de grupos de orden bajo

Clasificar grupos es una tarea dura y difícil, por lo que nos centraremos en grupos de orden bajo.

3.1. Grupos abelianos

Sabemos ya clasificar los grupos abelianos de orden menor o igual que 15:

Orden	Grupo
1	$\{1\}$
2	C_2
3	C_3
4	$C_2 \oplus C_2, C_4$
5	C_5
6	C_6
7	C_7
8	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2, C_2 \oplus C_4 \oplus C_8$
9	$C_9, C_3 \oplus C_3$
10	C_{10}
11	C_{11}
12	$C_{12}, C_6 \oplus C_2$
13	C_{13}
14	C_{14}
15	C_{15}
\vdots	\vdots

En general, si $|G| = p$ primo, tendremos C_p .

Si el grupo no es finito, nos dan la presentación y también sabemos clasificarlos. Nos centraremos por tanto en los grupos no abelianos.

3.2. Producto semidirecto

Será una especie de producto que nos permitirá escribir muchos grupos no abelianos. Con esta herramienta podremos escribir muchos grupos no abelianos (aunque no todos).

Ejemplo. En el Capítulo ?? vimos que $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es isomorfo a:

$$Q_2^{\text{abs}} = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Es decir, teníamos una aplicación (gracias a Teorema de Dyck) $f : Q_2 \rightarrow Q_2^{\text{abs}}$ dada por:

$$f(x) = i \quad f(y) = j$$

Que además era un epimorfismo, porque $Q_2^{\text{abs}} = \langle i, j \rangle$. Veamos que $|Q_2^{\text{abs}}| = 8$, de una forma distinta que contar elementos:

Demostración. Como $x^4 = 1$, si consideramos $H = \langle x \rangle$, tendremos que $|H| \leq 4$. Ahora, como:

$$yxy^{-1} = x^{-1} \in H$$

Tenemos que $H \triangleleft Q_2^{\text{abs}}$. Si escribimos Q_2^{abs} en su partición de clases:

$$Q_2^{\text{abs}} \cong H \cup yH$$

Ya que $y \notin H$, de donde al tomar cocientes:

$$Q_2^{\text{abs}}/H \cong \langle yH \rangle$$

Ahora, como:

$$(yH)^2 = y^2H = x^2H = H$$

Llegaremos a que:

$$|Q_2^{\text{abs}}/H| \leq 2$$

Si aplicamos el Primer Teorema de Isomorfía sobre f :

$$Q_2^{\text{abs}}/\ker(f) \cong \text{Im}(f) = Q_2$$

De donde $|Q_2^{\text{abs}}| = |Q_2| |\ker(f)| \geq 8$. Concluimos que $|Q_2^{\text{abs}}| = 8$. \square

El hecho de introducir Q_2^{abs} en el Capítulo ?? fue para ahora generalizar lo que hacíamos con Q_2 a todo grupo, con el producto semidirecto.

Definición 3.1 (Grupos dicíclicos). Para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos el k -ésimo grupo dicíclico como el grupo:

$$Q_k = \langle x, y \mid x^{2k} = 1, y^2 = x^k, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Ejemplo. Veamos que:

- Para $k = 1$:

$$Q_1 = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^2 = x, yxy^{-1} = x \rangle$$

Nos preguntamos qué grupo es. Si tratamos de describir los elementos, obtenemos:

$$\{1, x, y, xy\} = \{1, y, y^2, y^3\}$$

Es decir, $Q_1 \cong C_4$.

- Observemos que si $k = 2$, obtenemos Q_2^{abs} .

- Para $k \geq 3$, tendremos que tiene un cociente isomorfo a D_k , por lo que no será abeliano. Sin embargo, podemos acotar el orden de Q_k :

$$2k \leq |Q_k| \leq 4k \quad \forall k \geq 3$$

Y si k es impar, tendremos que $|Q_k| = 4k$.

Demostración. Si recordamos al grupo diédrico de orden k :

$$D_k = \langle r, s \mid r^k = s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$$

Tenemos que $r^{2k} = (r^k)^2 = 1$ y tenemos la primera relación. Para la segunda, tenemos que $s^2 = 1 = r^k$. Finalmente, $sr = r^{-1}s$ nos da la tercera (compruébese). Podemos aplicar el Teorema de Dyck, que nos da un homomorfismo $f : Q_k \rightarrow D_k$ de forma que:

$$f(x) = r \quad f(y) = s$$

Además, sabemos que f es un epimorfismo, ya que $D_k = \langle r, s \rangle$. Por el Primer Teorema de Isomorfía aplicado a f , podemos asegurar que:

$$Q_k / \ker(f) \cong D_k$$

Por tanto, el dicíclico de orden k no será abeliano.

\geq) Sabemos que $|D_k| = 2k$, y por el epimorfismo anterior, sabemos que $2k$ divide a $|Q_k|$, de donde $2k \leq |Q_k|$.

\leq) Usando que $x^{2k} = 1$, si tomamos $H = \langle x \rangle$, tenemos que:

$$|H| = |\langle x \rangle| \leq 2k$$

Como también tenemos que:

$$yxy^{-1} = x^{-1} \in H$$

Tendremos que $H \triangleleft Q_k$, de donde al considerar el cociente, tendremos al igual que antes que:

$$Q_k/H \cong \langle yH \rangle$$

De esta forma:

$$(yH)^2 = y^2H = x^kH = H$$

Por lo que $y^2 \notin yH$ y:

$$|Q_k/H| \leq 2$$

De donde deducimos que:

$$|Q_k| = |Q_k/H||H| \leq 4k$$

Suponiendo ahora que $k = 2t + 1$ para cierto $t \in \mathbb{N}$, consideramos el cíclico de orden 4:

$$C_4 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$$

1. Tenemos que:

$$(a^2)^{2k} = (a^4)^k = 1$$

2. Además:

$$(a^2)^k = a^{2k} = a^{4t+2} = a^2$$

3. Finalmente:

$$aa^2 = a^3 = a^2a = (a^2)^{-1}a$$

Por el Teorema de Dyck, podemos construir el homomorfismo $f : Q_k \rightarrow C_4$ dado por:

$$f(x) = a^2 \quad f(y) = a$$

Que de hecho es un epimorfismo, ya que $C_4 = \langle a \rangle$. Al igual que antes:

$$Q_k / \ker(f) \cong C_4$$

De donde llegamos a que 4 divide a $|Q_k|$. Como además $2k$ divide a $|Q_k|$, tenemos que $\text{mcm}(2k, 4)$ divide a $|Q_k|$ y, como k era impar, tendremos que:

$$\text{mcm}(2k, 4) = 4$$

De donde $4k \leq |Q_k|$, que con la desigualdad anterior nos da la igualdad. \square

Ejemplo. Grupos no abelianos de orden 12 conocíamos:

- A_4 .
- D_6 .

Y ahora conocemos Q_3 . Próximamente veremos que estos grupos son los únicos, salvo isomorfismo.

Definición 3.2 (Producto semidirecto). Dados dos grupos, K , H y una acción $\theta : H \rightarrow \text{Aut}(K)$, consideramos el conjunto producto cartesiano:

$$G = K \times H = \{(k, h) \mid k \in K, h \in H\}$$

Sobre el que definimos la siguiente operación:

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1^{h_1}k_2, h_1h_2)$$

Se verifica que $K \times H$ con esta operación tiene estructura de grupo, al que llamaremos **producto semidirecto de K por H relativo a θ** , que denotaremos por:

$$K \rtimes_{\theta} H$$

Teorema 3.1. *Se verifica que $K \times H$ con esta operación tiene estructura de grupo*

Demostración. Veamos:

- El elemento $(1, 1)$ es el neutro:

$$\begin{aligned}(k, h)(1, 1) &= (k^h 1, h) = (k, h) \\ (1, 1)(k, h) &= (1, {}^1k, h) = (k, h) \\ \forall (k, h) &\in K \times H\end{aligned}$$

- Para el inverso, dado $(k, h) \in K \times H$, el inverso será:

$$\begin{aligned}(k, h)^{-1} &= ({}^{h^{-1}}k^{-1}, h^{-1}) \\ (k, h)({}^{h^{-1}}k^{-1}, h^{-1}) &= \left(k^h ({}^{h^{-1}}k^{-1}), hh^{-1}\right) = \left(k^{hh^{-1}}k^{-1}, 1\right) = (kk^{-1}, 1) = (1, 1)\end{aligned}$$

□

Ejemplo. Veamos:

- Si $\theta = 1$, tenemos que el producto semidirecto coincide con el producto directo:

$$\theta(1)(h) = {}^1h = h \quad \forall h \in H$$

De donde:

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1 {}^{h_1}k_2, h_1 h_2) = (k_1 k_2, h_1 h_2) \quad \forall (k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times H$$

- Veamos cómo escribir S_3 como producto semidirecto:

$$S_3 \cong C_3 \rtimes_{\theta} C_2$$

Tenemos los elementos:

$$C_3 \times C_2 = \{(x, y) \mid x \in C_3, y \in C_2\}$$

Buscamos qué homomorfismo $\theta : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$ hemos de coger. Será:

$$\theta(y)(x) = x^{-1} \quad \forall y \in C_2, \forall x \in C_3$$

Ya que $\text{Aut}(C_3) \cong C_2 = \{1, x\}$. Los elementos serán:

$$C_3 \rtimes_{\theta} C_2 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, \text{algo} \rangle$$

Con $|C_3 \rtimes_{\theta} C_2| = 6$. Los grupos que conocemos de orden 6 son S_3 y C_6 , que podemos distinguir en función de si el grupo es abeliano o no. Veamos que no lo es:

$$\begin{aligned}(x, y^2)(1, y) &= (x^2 {}^y1, y^2) = (x^2, 1) \\ (1, y)(x^2, y) &= (1 {}^y x^2, y^2) = (x, 1)\end{aligned}$$

Como $x \neq x^2$, no es conmutativo, por lo que $C_3 \rtimes_{\theta} C_2 \cong D_3$. Por tanto, completamos la presentación pensando en la de D_3 :

$$C_3 \rtimes_{\theta} C_2 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, xy = yx^{-1} \rangle$$

En definitiva, el único producto semidirecto de dos grupos de orden 6 es S_3 .

- Veamos que $Q_3 = C_3 \rtimes_{\theta} C_4$. De nuevo, el homomorfismo a considerar será:

$$\begin{aligned} \theta : C_4 &\longrightarrow \text{Aut}(C_3) \\ y &\longmapsto \theta(y)(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

Tendremos:

$$C_3 \rtimes_{\theta} C_4 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^4 = 1, yx = x^{-1}y \rangle$$

Y queremos ver el isomorfismo con:

$$Q_3 = \langle c, d \mid c^6 = 1, d^2 = c^3, dc = c^{-1}d \rangle$$

- Si $n \geq 3$, si consideramos $\theta : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$ dado por:

$$\theta(y)(x) = x^{-1} \quad \forall x \in C_n, y \in C_2$$

Tendremos que $C_n \rtimes_{\theta} C_2 \cong D_n$.

Definición 3.3. En el producto semidirecto, definimos:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\lambda_1} & K \rtimes H & \xleftarrow{\lambda_2} & H \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & H & & \end{array}$$

Por:

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) &= (k, 1) \\ \lambda_2(h) &= (1, h) \\ \pi(k, h) &= h \end{aligned}$$

Proposición 3.2. Se verifica que:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \pi$ son homomorfismos de grupos.
2. $\pi\lambda_1$ es trivial.
3. $\pi\lambda_2 = id_H$.

De forma análoga a la propiedad universal del producto directo, podemos tener la propiedad universal para el producto semidirecto.

La siguiente Proposición nos será de utilidad para clasificar grupos haciéndolos isomorfo a un producto semidirecto, a partir del orden.

Teorema 3.3. Sea G un grupo y $K, H < G$ con $K \triangleleft G$, $KH = G$ y $K \cap H = \{1\}$, sea $\theta : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ un homomorfismo que nos da la acción $ac : H \times K \rightarrow K$ por conjugación¹:

$$\theta(h)(k) = hkh^{-1} \quad \forall h \in H, \forall k \in K$$

Entonces, $K \rtimes_{\theta} H \cong G$.

¹La condición $K \triangleleft G$ nos dice que θ está bien definida

Demostración. Definiremos la aplicación $f : K \rtimes_{\theta} H \rightarrow G$ dada por:

$$f(k, h) = kh \quad \forall k \in K, \forall h \in H$$

Veamos que es un isomorfismo:

- f es sobreyectiva, ya que $G = KH$, de donde cualquier elemento $g \in G$ se escribe como $g = kh$ para ciertos $k \in K$, $h \in H$.
- Para la inyectividad, si $f(k_1, h_1) = f(k_2, h_2)$, entonces $k_1 h_1 = k_2 h_2$, de donde $k_2^{-1} k_1 = h_2 h_1^{-1}$:
 - $k_2^{-1} k_1 \in K$.
 - $h_2 h_1^{-1} \in H$.

Y como $H \cap K = \{1\}$, concluimos que $k_1 = k_2$ y $h_1 = h_2$, de donde f es inyectiva.

- Para ver que f es un homomorfismo, si $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \rtimes_{\theta} H$:

$$\begin{aligned} f((k_1, h_1)(k_2, h_2)) &= f(k_1 {}^{h_1}k_2, h_1 h_2) = f(k_1 h_1 k_2 h_1^{-1}, h_1 h_2) \\ &= k_1 h_1 k_2 h_1^{-1} h_1 h_2 = k_1 h_1 k_2 h_2 = f(k_1, h_1) f(k_2, h_2) \end{aligned}$$

□

Definición 3.4. Si G verifica las condiciones de la Proposición anterior, decimos que G es producto semidirecto interno de K y H .

Definición 3.5 (Complemento de un subgrupo). Si $K < G$, un subgrupo $H < G$ se llama complemento para K en G si $G = KH$ con $K \cap H = \{1\}$.

Observación. Con esta última definición, tendremos que G será un producto semidirecto interno de dos subgrupos propios si y solo si algún subgrupo normal propio tiene un complemento.

Ejemplo. Esto último no siempre será posible. Por ejemplo, si G es simple, no tendrá subgrupos normales propios, por lo que no será producto semidirecto interno de dos subgrupos.

Si G es un grupo que sí tiene subgrupos normales propios, tampoco somos capaces siempre de poner como un producto semidirecto. Por ejemplo, Q_2 no es un producto semidirecto interno de subgrupos propios. Si recordamos su diagrama de Hasse:

$$\begin{aligned} \langle i \rangle \cap \langle j \rangle &= \{1, -1\} \\ \langle i \rangle \cap \langle k \rangle &= \{1, -1\} \\ \langle j \rangle \cap \langle k \rangle &= \{1, -1\} \end{aligned}$$

Dado un subgrupo normal, no seremos capaces de complementarlo con otro.

Ejemplo. Para cualquier grupo K , si tomamos $H = \text{Aut}(K)$ y $\theta = 1_{\text{Aut}(K)}$, si tomamos:

$$K \rtimes_{\theta} \text{Aut}(K) = \text{Hol}(K)$$

Al que llamaremos grupo holomorfo de K .

Por ejemplo:

$$\text{Hol}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = S_4$$

Ejemplo. Como ejemplos de aplicaciones inmediatas del último Teorema, tenemos:

- Sea $G = S_n$, $K = A_n \triangleleft S_n$ y $H = \langle (1\ 2) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, entonces:

$$A_n H = S_n \quad A_n \cap H = \{1\}$$

Por lo que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema, con lo que:

$$S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$$

- En $G = S_4$, si tomamos $K = V \triangleleft S_4$, $H = S_3 = \text{Stab}_{S_4}(V)$, tenemos que:

$$VH = S_4 \quad V \cap H = \{1\}$$

Por lo que:

$$S_4 \cong V \rtimes S_3$$

- Sea $G = A_4$, $K = V \triangleleft A_4$, $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$, tenemos que:

$$A_4 \cong V \rtimes H$$

3.2.1. Grupos de orden pq

Veamos ahora cómo son los grupos G con $|G| = pq$ con $p < q$ y p, q primos. En dicho caso, tendremos:

- $P \in \text{Syl}_p(G)$
- $Q \in \text{Syl}_q(G)$

$$\left. \begin{array}{l} n_q \mid p \\ n_q \equiv 1 \pmod{p} \end{array} \right\} \implies n_q \in \{1, p\}$$

Pero como $p < q$, no puede ser $n_q = p$, ya que entonces $p \equiv 1 \pmod{q}$. De esta forma, sabemos que Q es el único q -subgrupo de G , por lo que $Q \triangleleft G$. De esta forma, tenemos que:

$$Q \cap P = \{1\} \quad QP = G$$

Por tanto, vamos a poder escribir siempre:

$$G \cong Q \rtimes P$$

Como $|Q| = q$, tenemos que $Q \cong C_q$. De la misma forma, como $|P| = p$, tenemos que $P \cong C_p$. En definitiva, tenemos que $n_q = 1$. Ahora:

$$\left. \begin{array}{l} n_p \mid q \\ n_p \equiv 1 \pmod{p} \end{array} \right\} \implies n_p \in \{1, q\}$$

- Si $n_q = 1 = n_p$, entonces tendremos que $P, Q \triangleleft G$, por lo que:

$$G \cong Q \rtimes P \cong Q \times P \cong C_q \times C_p \cong C$$

- Si $n_q = 1$ y $n_p = q$, entonces $p \mid q - 1$. Si buscamos una acción:

$$C_p \rightarrow \text{Aut}(C_q) \cong U(C_q) \cong C_{q-1}$$

Como $p \mid q - 1$, sabemos que existe un único subgrupo cíclico $\langle \alpha \rangle \subseteq \text{Aut}(C_q)$ de orden p .

Una acción $\theta : C_p \rightarrow \text{Aut}(C_q)$ vendrá dado por:

$$\theta(y) = \alpha^j$$

Podemos definir θ_i que a cada $y_i \mapsto \alpha^i$, para $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Para $i = 0$:

$$\theta_0(y_0) = 1$$

Luego tenemos $G \cong C_{pq}$. Para el resto de los casos, como son todas isomorfas, tomamos $\theta(y_i) = \alpha$.

En conclusión:

$$G \cong C_q \rtimes C_p \cong \langle x, y \mid x^q = 1, y^p = 1, yxy^{-1} = \alpha(x) \rangle$$

Con lo que así se describen todos los grupos G no abelianos de orden pq .

Ejemplo. En el caso $p = 2$, para C_{2q} :

$$C_q \rtimes C_2 = \langle x, y \mid x^q = 1, y^2 = 1, yxy^{-1} = \alpha(x) \rangle$$

Pero:

$$\alpha \in \text{Aut}(C_q) \quad O(\alpha) = 2$$

Y morfismos de C_q en C_q de orden 2 solo hay uno:

$$x \mapsto x^{-1}$$

Por tanto:

$$C_q \rtimes C_2 = \langle x, y \mid x^q = 1, y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle = D_q$$

Por lo que grupos G con $|G| = 2q$ tenemos que G es abeliano o que es D_q .

Repasando lo que sabemos clasificar:

$$\begin{aligned} |G| = 6 &\mapsto C_6, & D_3 &\cong S_3 \\ |G| = 10 &\mapsto C_{10}, & D_5 & \\ |G| = 14 &\mapsto C_{14}, & D_7 & \\ |G| = 15 &\mapsto C_{15}, ? & & \end{aligned}$$

Vamos a ver el caso que $|G| = 15$, con lo que tenemos haciendo cuentas que $n_3 = 1 = n_5$, por lo que concluimos que grupos de orden 15 solo tenemos C_{15} . Este razonamiento puede seguirse para $|G| = n$ para $n \geq 15$, si el lector desea hacerlo.

3.2.2. Grupos de orden 12

Sea G un grupo de orden $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$.

Sabemos que grupos abelianos de orden 12 tenemos:

$$C_2 \times C_2 \times C_3 \cong C_2 \times C_6 \quad C_4 \times C_3 \cong C_{12}$$

Supuesto que G no es abeliano:

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right\} \implies n_2 \in \{1, 3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} n_3 \mid 4 \\ n_3 \equiv 1 \pmod{4} \end{array} \right\} \implies n_3 \in \{1, 4\}$$

- Supongamos que $n_4 = 3$ y $n_3 = 4$, entonces tendremos:

$$\begin{array}{ll} P_1, P_2, P_3, P_4 \in Syl_3(G) & |P_i| = 3 \\ Q_1, Q_2, Q_3 \in Syl_2(G) & |Q_i| = 4 \end{array}$$

Por lo que sacamos 8 elementos distintos de orden 3 y 9 elementos de orden 2 o 4, con lo que este caso es imposible.

- Si $n_2 = 1$ o $n_3 = 1$, tendremos en cualquier caso de la existencia de un p -subgrupo de Sylow ($p \in \{2, 3\}$) $K \triangleleft G$. Si consideramos su complemento, $H < G$, tendremos que:

$$G \cong K \rtimes_{\theta} H$$

Si suponemos que $K \in Syl_3(G)$ y $H \in Syl_2(G)$ (en otro caso es análogo), tendremos entonces que $K \cong C_3$ y $|H| = 4$, por lo que $H \cong C_4$ o $H \cong C_2 \times C_2$

- Si $n_2 = 1 = n_3$, entonces tenemos dos subgrupos normales, con lo que:

$$G \cong C_2 \times C_6 \quad \text{o} \quad G \cong C_{12}$$

El primer caso si $H = C_2 \times C_2$ y el segundo si $H = C_4$, por lo que volvemos al caso abeliano.

- Si $n_3 = 1$ y $n_2 = 3$, tenemos entonces que:

$$G \cong K \rtimes H \cong \begin{cases} C_3 \rtimes C_4 \\ C_3 \rtimes C_2 \times C_2 \end{cases}$$

Y vendrá por una acción:

$$\begin{array}{l} \theta : C_4 \rightarrow Aut(C_3) \\ \theta : C_2 \times C_2 \rightarrow Aut(C_3) \end{array}$$

Alguno de ellos. sin embargo, como $Aut(C_3) \cong C_2 = \{1, x^{-1}\}$

- En $C_3 \rtimes C_4$ para la acción $xy = x^{-1}$, tenemos que:

$$C_3 \rtimes C_4 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^4 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

- En $C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$, los automorfismos de la forma:

$$C_2 \times C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$$

Solo tenemos uno no trivial, que es (y, x son los generadores):

$$\theta : C_2 \times C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$$

$$y \mapsto \alpha$$

$$x \mapsto 1$$

Tendremos que:

$$C_3 \rtimes_{\theta} (C_2 \times C_2) = \langle x, y, z \mid x^3 = 1, y^2 = z^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1}, zxz^{-1} = x, yzy^{-1} = zy \rangle$$

Que es isomorfo a $D_6 \cong D_3 \times C_2$, tomando $r = xy$ y $s = yz$

- En el caso $n_3 = 4$ y $n_2 = 1$, hay un ejercicio en la relación de p -grupos que decía que si un grupo de orden 12 tiene más de 3-subgrupos de Sylow, entonces $G \cong A_4$. Para ello:

$$\phi : G \rightarrow \text{Perm}(\text{Syl}_3(G)) \cong S_4$$

$$G/\ker(\phi) \cong G \cong \text{Im}(\phi) \subseteq S_4$$

Por lo que $G < S_4$ con $|G| = 12$, luego ha de ser $G \cong A_4$. Tendremos ahora:

$$G \cong H \rtimes K \cong \begin{cases} C_4 \rtimes C_3 \\ (C_2 \times C_2) \rtimes C_3 \end{cases}$$

- Si $C_4 \rtimes C_3$, tendremos que la única acción no trivial es

$$\begin{aligned} \theta : C_3 &\longrightarrow \text{Aut}(C_4) \cong C_2 \\ y &\longmapsto y^{-1} \end{aligned}$$

Con orden 2. Sin embargo, como su orden ha de dividir a $|C_3| = 3$, el morfismo no divide a 3, luego no hay nada no trivial ahí: todos los automorfismos son triviales. En dicho caso, tenemos:

$$C_4 \rtimes C_3 = C_4 \times C_3 = C_{12}$$

- En el caso $(C_2 \times C_2) \rtimes C_3$, buscamos una acción $C_3 \rightarrow \text{Aut}(C_2 \times C_2) \cong S_3$, por lo que tendremos dos automorfismos no triviales de $C_2 \times C_2$ de orden 3.

$$\theta_1 : x \mapsto \alpha$$

$$\alpha \begin{cases} y \mapsto z \\ z \mapsto yz \end{cases}$$

$$\theta_2 : x \mapsto \alpha^2$$

$$\alpha^2 \begin{cases} y \mapsto yz \\ z \mapsto y \end{cases}$$

Que podemos pensarlo con:

$$(1, 0), (0, 1) \mapsto (0, 1), (1, 1)$$

Por lo que:

$$(C_2 \times C_2) \rtimes_{\theta_1} C_3 \\ = \langle x, y, z \mid x^3 = 1, y^2 = z^2 = 1, xyx^{-1} = z, xzx^{-1} = zy, yz = zy \rangle \cong A_4$$

Este último isomorfismo no sale fácil. Ver que un grupo es A_4 suele verse siempre viendo que tiene más de un 3-subgrupo de Sylow.

3.2.3. Grupos de orden 8

Sea G un grupo de orden 8, no vamos a tener p -subgrupos de Sylow, porque el único es el total. Los grupos abelianos son:

$$C_2 \times C_2 \times C_2 \quad C_2 \times C_4 \quad C_8$$

No abelianos

Si G es un grupo no abeliano de orden 8, entonces no existen elementos en G de orden 8, ya que entonces G sería cíclico, luego abeliano. Por tanto, los elementos de G tendrán orden 2 o 4. Tampoco pueden ser todos de orden 2, puesto que G también sería abeliano, por lo que $\exists a \in G$ de forma que $O(a) = 4$. Consideramos:

$$H = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$$

Tenemos que $[G : H] = 2$, por lo que $H \triangleleft G$. Dado $b \in G \setminus H$, tendremos dos clases en el cociente:

$$G = H \cup Hb$$

De esta forma, podemos describir G como:

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

Si consideramos b^2 , veamos en qué clase está. Supuesto que $b^2 \in Hb$, entonces:

- Puede ser que $b^2 = b \implies b = 1$.
- Puede ser $b^2 = ab \implies b = a$.
- Puede ser $b^2 = a^2b \implies b = a^2$.
- Puede ser $b^2 = a^3b \implies b = a^3$.

Todas imposibles, por lo que $b^2 \in H = \{1, a, a^2, a^3\}$, de donde:

- Si $b^2 = a$, entonces $O(b^2) = O(a) \implies O(b) = 8$, imposible.
- Si $b^2 = a^3$, entonces $O(b^2) = O(a^3) = O(a)$, imposible.

- Si $b^2 = 1$, veamos que $ba = a^3b$. Como $H \triangleleft G$, tenemos que $bab^{-1} \in H$, pero como $O(b) = 2$, tenemos que $bab \in H$ y:

$$O(bab) = O(a) = 4$$

De donde $bab \in \{a, a^3\}$. Si $bab = a$, entonces G es abeliano, imposible, por lo que:

$$bab = a^3$$

Por lo que en este caso tenemos:

$$G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, ba = a^3b \rangle = D_4$$

- Si $b^2 = a^2$, vamos a probar la misma igualdad: $ba = a^3b$. Para ello, como $H \triangleleft G$, tenemos que $bab^{-1} \in H$, pero como:

$$O(bab^{-1}) = O(a) = 4$$

Por lo que $bab^{-1} \in \{a, a^3\}$. Si $bab^{-1} = a$, entonces es abeliano, por lo que también tenemos $bab = a^3$. En este caso:

$$G = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, ba = a^3b \rangle = Q_2$$

De esta forma, los únicos grupos no abelianos de orden 8 son:

$$D_4 \quad Q_2$$

Para grupos de orden 12 podemos emplear también este mismo tipo de razonamiento.