Variable Compleja I

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 4 de Mayo de 2022.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{3^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(3) < \operatorname{Im} z < \ln(3)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{3^n}$$

es continua en Ω y calcular $\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\, dz$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{3^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(3) < \operatorname{Im} z < \ln(3)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{3^n}$$

es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\,dz$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Dado $A \subset \Omega$, probaremos que la serie converge uniformemente en A si y solo si:

$$\sup\{|\operatorname{Im} z| : z \in A\} < \ln(3).$$

$\Longrightarrow$) Demostraremos el recíproco. Como $A \subset \Omega$, no puede darse que dicho supremo sea mayor que $\ln(3)$. Supongamos por tanto que dicho supremo es 3. Entonces, por la caracterización del supremo mediante sucesiones, existe una sucesión $\{\widetilde{z}_n\}$ de puntos de A tal que $\{|\operatorname{Im} \widetilde{z}_n|\} \to \ln 3$. Tomando una parcial suya, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de A tal que $|\operatorname{Im} z_n| > \ln 3 - {}^1\!/\!_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left|\frac{\cos(nz_n)}{3^n}\right| \geqslant \frac{|\operatorname{senh}(n \operatorname{Im} z_n)|}{3^n} = \frac{\operatorname{senh}(n|\operatorname{Im} z_n|)}{3^n} = \frac{e^{n|\operatorname{Im} z_n|} - e^{-n|\operatorname{Im} z_n|}}{3^{n+1}} \geqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im} z_n|}}{3^{n+1}} >$$
$$> \frac{e^{n\ln 3 - 1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3e}$$

Por tanto, como hemos encontrado una sucesión de puntos de A tal que el término general no converge a 0, entonces el término general no converge uniformemente a 0. Por tanto, la serie no converge uniformemente en A.

$\Longleftarrow$) Sea dicho supremo $r < \ln 3$. Entonces, para todo $z \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left|\frac{\cos(nz)}{3^n}\right| < \left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{3}\right)^n < \left(\frac{e^r}{3}\right)^n$$

Como $r < \ln(3)$, tenemos que $e^r < 3$, por lo que la base de la potencia es menor que 1. Por tanto, la serie geométrica de razón dicho cociente es convergente. Por el Test de Weierstrass, la serie de partida converge uniformemente en A.

En particular, dado $K \subset \Omega$ compacto, en particular es cerrado, y el supremo en cuestión se alcanza. Como es un subconjunto de Ω, entonces:

$$\sup\{|\operatorname{Im} w| : w \in K\} = \max\{|\operatorname{Im} w| : w \in K\} < \ln(2)$$

Por tanto, la serie converge uniformemente en compactos de Ω.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Para probar que g es continua, consideramos $z \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Considerando ${}^R/_2$, tenemos que $z \in \overline{D}(z, {}^R/_2) \subset \Omega$. Por ser este compacto, la serie converge uniformemente en $\overline{D}(z, {}^R/_2)$. Como el término general de la serie es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces g es continua en z. Como z es arbitrario, g es continua en Ω.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme del integrando en $C(0, 1)$. Como $C(0, 1)$ es compacto, entonces g converge uniformemente y $z \mapsto {}^1/_z$ es acotado. Por tanto, el integrando converge uniformemente en $C(0, 1)$, luego podemos intercambiar la sumatoria y la integral, algo que nos será de utilidad a la hora de calcular la integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(0,1)} \frac{\cos(nz)}{z3^n}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \int_{C(0,1)} \frac{\cos(nz)}{z}\, dz \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot 2\pi i \cdot \cos(n \cdot 0) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\pi i \cdot \frac{1}{1 - {}^1/_3} = 3\pi i$$

donde en $(*)$ hemos aplicado la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, usando que el seno es una función entera.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Estudiamos en primer lugar la función f. Para ello, con vistas a aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \operatorname{Re}(f(x+iy)) = \operatorname{Re}(\operatorname{sen}(x-iy)) = \operatorname{sen}(x)\cosh(-y)\\
v(x, y) &= \operatorname{Im}(f(x+iy)) = \operatorname{Im}(\operatorname{sen}(x-iy)) = \cos(x)\operatorname{senh}(-y).
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \cos(x)\cosh(-y)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y)\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y)\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= -\cos(x)\cosh(-y)
\end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\
\cos(x)\cosh(-y) &= -\cos(x)\cosh(-y) \\
\cos(x) &= 0 \\
x &\in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\
-\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) &= \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) \\
x \in \pi\mathbb{Z} &\vee y = 0
\end{aligned}$$

Definimos por tanto el conjunto en el que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann como:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \in {}^{\pi}/_{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

Tenemos por tanto que $f \in \mathcal{H}(U)$, y no es derivable en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Estudiamos ahora la función g. Fijado $z \in \mathbb{C}$, veamos si es derivable en z.

- Si $z \in U$, entonces g es derivable en z por serlo f y $z(z-1)$, que son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.
- Si $z \notin U$, distinguimos de nuevo:
  - Si $z \neq 0, 1$, tenemos que:

    $$f(z) = \frac{g(z)}{z(z-1)} \qquad \forall z \notin U$$

    Si g fuese derivable en z, entonces f también lo sería, pero sabemos que no lo es puesto que $z \notin U$. Por tanto, g no es derivable en z.
  - Si $z = 0$, entonces:

    $$g'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z\to 0}(z-1)f(z) = -f(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$$
  - Si $z = 1$, entonces:

    $$g'(1) = \lim_{z\to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z\to 1} \frac{g(z)}{z-1} = \lim_{z\to 1} zf(z) = f(1) = \operatorname{sen}(1)$$

Por tanto, g es derivable en $U \cup \{0, 1\}$ y no es derivable en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b) + B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

- Para $z = a$: $1 = A(a-b) \Longrightarrow A = \frac{1}{a-b}$.
- Para $z = b$: $1 = B(b-a) \Longrightarrow B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$.

Por tanto, la integral queda:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{1}{a-b}\left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz\right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{a-b}\left(2\pi i f(a) - 2\pi i f(b)\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que la función $f(z)$ es entera y que $a, b \in D(0, R)$, por lo que se puede aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función $f(z)$.

Sea ahora f entera y acotada. Entonces, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| &\leqslant \frac{M}{|z-a||z-b|} \leqslant \frac{M}{||z| - |a||\,||z| - |b||} \leqslant \frac{M}{|R - |a||\,|R - |b||} \leqslant \\
&\leqslant \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} \qquad \forall z \in C(0,R)^*
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $z \in C(0,R)^*$, por lo que $|z| = R$; y que $R > \max\{|a|, |b|\}$, por lo que $R - |a| > 0$ y $R - |b| > 0$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz\right| &\leqslant \int_{C(0,R)} \left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| dz \\
&\leqslant 2\pi R \cdot \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} = \frac{2\pi M R}{(R - |a|)(R - |b|)}
\end{aligned}$$

Como la anterior expresión es válida para todo $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|, |b|\}$, podemos hacer tender $R \to \infty$. Por el Lema del Sándwich, se tiene que:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$

Por la expresión anterior a la que habíamos llegado, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por la unicidad del límite, se tiene que:

$$f(b) = f(a) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Por tanto, f es constante.