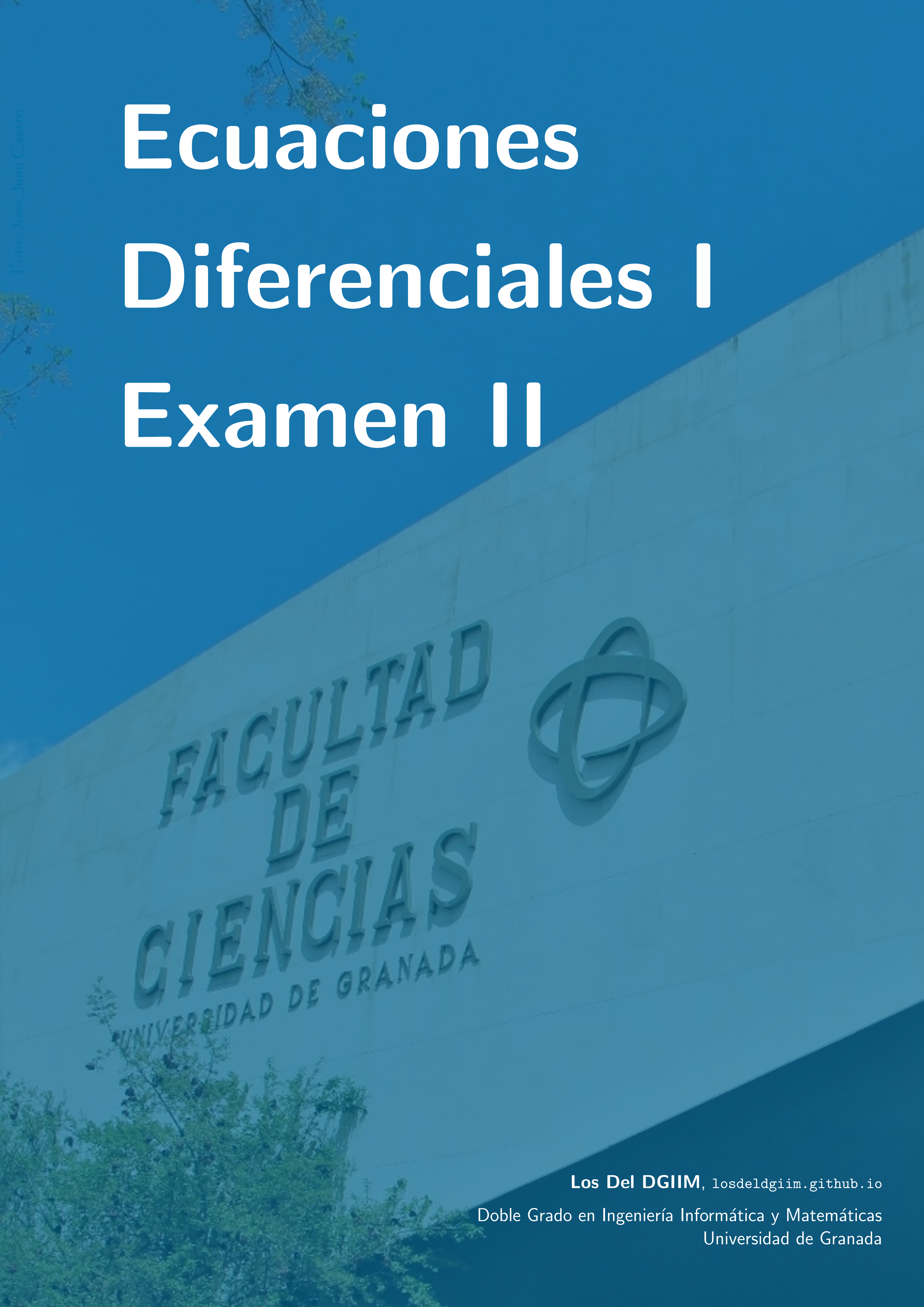

Foto: José Juan Castro

Ecuaciones Diferenciales I

Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 17 de marzo de 2016.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes funciones F y φ:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

se define la siguiente función *phi*:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x,\varphi(x)) \end{array}$$

Suponiendo que F y φ son de clase C^2, expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ.

Veamos en primer lugar que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend left, "F\circ H=\phi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x,\varphi(x)) \longmapsto F(x,\varphi(x))$$

En primer lugar, $H = (Id, \varphi)$, donde Id es la función identidad. Por tanto, se tiene que $H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser ambas componentes $C^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ por hipótesis. Por tanto, $\phi = F \circ H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser composición de funciones de clase $C^2(\mathbb{R})$. Tenemos por tanto que:

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

Derivando de nuevo, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi''(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi''(x) + \\ + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Encuentra la solución de la siguiente ecuación diferencial, precisando el intervalo I donde está definida:

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0) = 0$$

Ejercicio 3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

La distancia al origen desde un punto $P = (x, y(x))$, notada por $d(P, O)$, viene dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + (y(x))^2}$$

La recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto $(x, y(x))$ tiene pendiente $y'(x)$ y pasa por el punto $(x, y(x))$. Siendo $(x_0, 0)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas, se tiene que: Tenemos entonces que, de la definición de pendiente dada por dos puntos, tenemos que:

$$y'(x) = m_t = \frac{y(x) - 0}{x - x_0} = \frac{y(x)}{x - x_0} \Longrightarrow x_0 = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que el caso $x = x_0$ implicaría que la recta tangente es vertical, por lo que no podríamos considerar $y'(x)$ (pues no estaría definida). Es decir, el dominio no varía. En este caso, tendríamos simplemente que $x_0 = x$, que coincide si consideramos la pendiente de una recta vertical como infinito.

La primera coordenada del punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas es x_0. Por tanto, esta es:

$$x_0 = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Imponiendo la condición del enunciado de que $d(P, O) = x_0$, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + (y(x))^2} = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Despejando $y'(x)$, tenemos que:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x - \sqrt{x^2 + (y(x))^2}}$$

Expresado con la notación correspondiente a la ecuación diferencial, tenemos:

$$y' = -\frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables $\phi : s = e^t, y = e^{-tx}$. Demuestra que ϕ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio Ω del plano. Determina Ω. Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = tx^2$ y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

Ejercicio 5. Se considera la función seno hiperbólico $f = \operatorname{senh}$ definida como:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) = \operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{array}$$

Demuestra que f tiene una inversa[1] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

Para demostrar esto, en primer lugar hemos de demostrar que f es biyectiva. Para ello, hemos de demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva.

[1] Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{argsh} x$, argumento del seno hiperbólico

Inyectividad Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, f es estrictamente creciente, lo que implica que es inyectiva.

Sobreyectividad Para demostrar que f es sobreyectiva, basta con demostrar que su imagen es todo $\mathbb{R}$. Para ello, como es continua por ser suma de continuas, basta con estudiar sus límites en los extremos:

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \frac{0 - \lim_{t \to \infty} e^t}{2} = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{\lim_{t \to \infty} e^t - 0}{2} = +\infty$$

Por tanto, tenemos que f es sobreyectiva.

Entonces, f tiene inversa, notada por g, tal que $g = f^{-1}$. Además, como f' no se anula en ningún punto, tenemos que:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{2}{e^{g(x)} + e^{-g(x)}}$$