
Ejercicio 1. Se pretende aproximar mediante integración de Romberg la integral:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

Calcula para ello $R(2, 2)$.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : [1, 3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/x \end{aligned}$$

Calculamos en primer lugar $R(i, 0)$.

$$R(0, 0) = T_1 = (3 - 1) \cdot \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{4}{3}$$

$$R(1, 0) = T_2 = \frac{3-1}{2 \cdot 2} \left(f(1) + 2 \cdot f\left(1 + \frac{3-1}{2}\right) + f(3) \right) = \frac{7}{6}$$

$$\begin{aligned} R(2, 0) = T_4 &= \frac{3-1}{4 \cdot 2} \left(f(1) + 2 \left[f\left(1 + \frac{3-1}{4}\right) + f\left(1 + 2 \cdot \frac{3-1}{4}\right) + f\left(1 + 3 \cdot \frac{3-1}{4}\right) \right] + f(3) \right) \\ &= \frac{67}{60} \end{aligned}$$

Una vez obtenidos esos valores, calculamos $R(i, j)$ para $i, j = 1, 2$, con $j < i$:

$$R(1, 1) = \frac{4R(1, 0) - R(0, 0)}{3} = \frac{10}{9}$$

$$R(2, 1) = \frac{4R(2, 0) - R(1, 0)}{3} = \frac{11}{10}$$

$$R(2, 2) = \frac{4^2 R(2, 1) - R(1, 1)}{15} = \frac{742}{675} \approx 1,09925925$$

Ejercicio 2. Dada la regla de integración numérica

$$\int_a^b f(x) dx = L_n(f, h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

¿Cómo se haría un procedimiento similar a la integración de Romberg con esta fórmula?