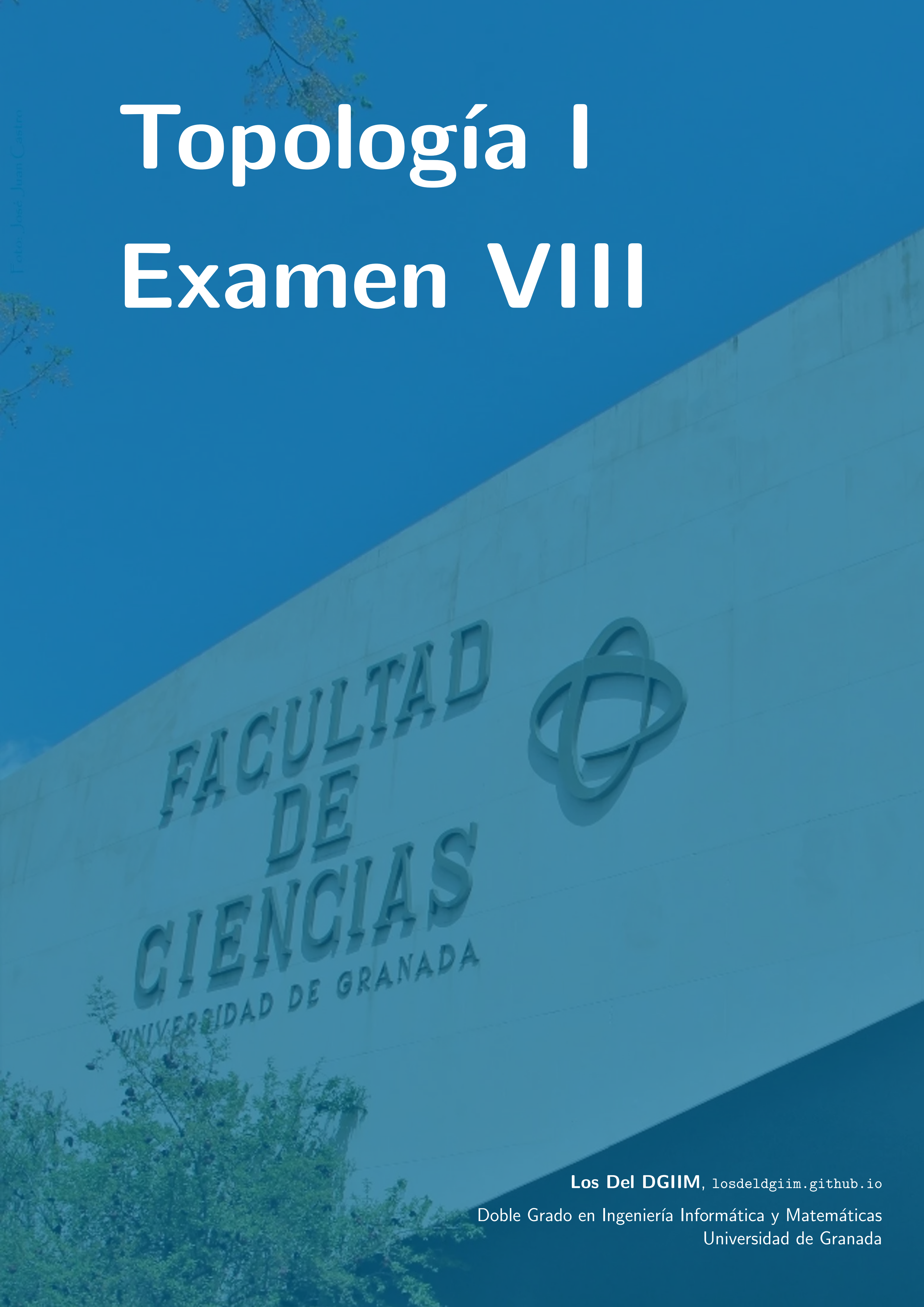
Topología I
Examen VIII

Foto: José Juan Castro



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Jose Antonio Gálvez López[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 18 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

[1] El examen lo pone el departamento

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Sea $\|\cdot\|$ la norma euclídea usual en $\mathbb{R}^2$. Se consideran los conjuntos $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \geqslant 2\}$ y $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 2\}$. Para cada $p = (x, y) \in X$, se considera la siguiente familia:

- Si $p \in S$, $\beta_p = \{B((0, 0), r) \cup \{p\} \mid 0 < r < 1\}$.
- Si $p \notin S$, $\beta_p = \{B(p, r) \mid 0 < r < 2 - \|p\|\}$.

Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (1.5 puntos) Demuestra que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que las familias anteriores forman una base de entornos de cada punto. En los siguientes apartados, se considera el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.
2. (1 punto) Dado el subconjunto $A = \{(x, y) \in X : x > 0\}$, calcula el interior y la frontera de A.
3. (0.5 puntos) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff o no.
4. (1 punto) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es conexo o no.
5. (1 punto) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es compacto o no.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Elige una de las siguientes preguntas (2a o 2b):

2a. Da una definición de subespacio compacto en un espacio topológico y prueba las siguientes afirmaciones:

a) Un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.
b) Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.

2b. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Todo entorno de un punto de un espacio topológico es abierto.
b) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico entonces la aplicación identidad dada por $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ es continua si y solo si $(X, \mathcal{T})$ es T1. Aquí, $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ denota la topología cofinita.
c) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación biyectiva entre espacios compactos y T2, entonces f es continua si, y solo si, f^{-1} es continua.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** En $X = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2), & \text{o bien} \\ x_1, x_2 > 1, & \text{o bien} \\ x_1, x_2 < -1. \end{cases}$$

Si sobre X consideramos la topología usual inducida de $\mathbb{R}^2$, estudiese si:

1. La proyección canónica $p : X \to X/\mathcal{R}$ es una aplicación abierta,
2. $X/\mathcal{R}$ es T2,
3. $X/\mathcal{R}$ es compacto,
4. $X/\mathcal{R}$ es conexo.