

Geometría III

Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.

Fecha 25 de noviembre de 2023.

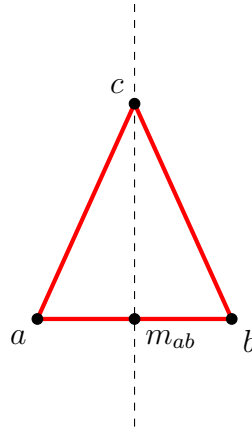
Duración 90 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos). Estudiar si existe una aplicación afín de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 verificando

$$f(0, 1) = (1, 1) \quad f(1, 2) = (-1, 1) \quad f(-1, 0) = (3, 1) \quad f(0, 0) = (2, 1)$$

En caso afirmativo, calcula su expresión matricial en el sistema de referencia usual, y decide si es o no biyectiva.

Ejercicio 2 (2 puntos). Razona que en un triángulo isósceles el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro están siempre alineados.



Sea \mathbb{E} un espacio afín euclídeo, y sea $T = \{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$ un triángulo isósceles con vértices a, b, c . Supongamos sin pérdida de generalidad que es isósceles por el lado $[a, b]$. Es decir, que $d(a, c) = d(b, c)$.

Veamos en primer lugar que la mediatriz del lado $[a, b]$ coincide con la bisectriz del ángulo \widehat{c} . Es decir, que $R_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c$. Además, como el triángulo es isósceles, tenemos que $d(a, c) = d(b, c)$, por lo que $c \in R_c$. De forma similar, es directo ver que $m_{ab} \in R_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in B_c$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{cm_{ab}} &= m_{ab} - c = \ell + \frac{1}{2}(\vec{ca} + \vec{cb}) - \ell = \frac{1}{2}(\vec{ca} + \vec{cb}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\vec{ca}\|}{\|\vec{ca}\|} \cdot (\vec{ca} + \vec{cb}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{ca}\| \left(\frac{\vec{ca}}{\|\vec{ca}\|} + \frac{\vec{cb}}{\|\vec{ca}\|} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \|\vec{ca}\| \left(\frac{\vec{ca}}{\|\vec{ca}\|} + \frac{\vec{cb}}{\|\vec{cb}\|} \right) \in B_c \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c, a) = d(b, c)$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in R_c \cap B_c$, con $m_{ab} \neq c$, por lo que $R_c = B_c$. Veamos ahora que la altura respecto del vértice c coincide con la bisectriz del ángulo \widehat{c} , es decir, que $H_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c \cap H_c$. Además, ya hemos visto que $m_{ab} \in B_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in H_c$:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{cm_{ab}}, \vec{ab} \rangle &= \langle m_{ab} - c, \vec{ab} \rangle = \left\langle \ell + \frac{1}{2}(\vec{ca} + \vec{cb}) - \ell, \vec{ab} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{ca} + \vec{cb}, \vec{ab} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle -\vec{ac} + \vec{cb}, \vec{ac} + \vec{cb} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\|\vec{ac}\|^2 + \|\vec{cb}\|^2 - \langle \vec{ac}, \vec{cb} \rangle + \langle \vec{cb}, \vec{ac} \rangle \right] \stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c, a) = d(b, c)$. Por tanto, $\overrightarrow{cm_{ab}} \perp \overrightarrow{ab}$ y, por tanto, $m_{ab} \in H_c$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in H_c \cap B_c \cap R_c$, con $m_{ab} \neq C$, por lo que $R_c = B_c = H_c$. Como $C, O, I \in R_c = B_c = H_c$, tenemos que C, O, I están alineados en dicha recta. Es decir, como coinciden la altura, la bisectriz y la mediatriz asociadas al vértice C , entonces el circuncentro, el ortocentro y el incentro están alineados.

Como además el baricentro siempre está alineado con el circuncentro y el ortocentro por el Teorema de Euler en la Recta de Euler, tenemos que los 4 puntos notables de un triángulo isósceles están alineados en la Recta de Euler.

Ejercicio 3 (4 puntos). Determina el movimiento helicoidal en \mathbb{R}^3 cuyo eje viene dado por $e := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 1\}$, ángulo $\frac{\pi}{4}$ y vector de traslación $v = (2, 2, 0)$.