Geometría III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Hipercuádricas afines

Definición 1.1. Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia. Definimos una hipercuádrica afín real H como:

$$H = \left\{ p \in \mathcal{A} \ : \ (1, p_{\mathcal{R}}^t) \cdot \widehat{C} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{array} \right) = 0 \right\}$$

donde $\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, donde $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$ y $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

A la matriz $\widehat{C}$ la llamaremos la matriz asociada a H en $\mathcal{R}$.

Sea ahora $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$ y $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, con $c_{ij} = c_{ji}$ por ser $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Veamos en primer lugar que H está muy relacionado con las formas cuadráticas vistas en Geometría II:

$$\begin{aligned} 0 = (1, p_{\mathcal{R}}^t) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{array} \right) &= (a + p_{\mathcal{R}}^t z, z^t + p_{\mathcal{R}}^t C) \left(\begin{array}{c} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{array} \right) = \\ &= a + p_{\mathcal{R}}^t z + z^t p_{\mathcal{R}} + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} = a + 2p_{\mathcal{R}}^t z + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

donde tenemos que $p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}}$ era la forma cuadrática asociada a la métrica definida por la matriz C en la base $\mathcal{B}$.

Análogamente, tenemos que H se corresponde con una ecuación cuadrática[1], que resulta menos abstracto:

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2p_{\mathcal{R}}^t z + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} = \\ &= a + 2(x_1, \ldots, x_n) \left(\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{array} \right) + (x_1, \ldots, x_n) \left(\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) = \\ &= a + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia. Encontrar la ecuación cuadrática de la hipercuádrica H, cuya matriz asociada en $\mathcal{R}$ es la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Tenemos que $H = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A} \mid y^2 + 2xy + 2x + 4y + 1 = 0\}$.

[1] Recordemos que una ecuación cuadrática es, simplemente, un polinomio de grado 2.

1.1. Cambio de sistema de referencia e hipercuádricas

Como hemos visto, las hipercuádricas se han definido según un sistema de referencia $\mathcal{R}$; por lo que es lógico preguntarse cómo se ven modificados si dicho sistema de referencia cambia.

Además del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}\}$ que se ha considerado para definir una hipercuádrica, sea $\mathcal{R}' = \{p_0', \mathcal{B}'\}$ otro sistema de referencia tal que:

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right), \qquad A = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 =&(1, p_{\mathcal{R}}^t) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} a + b^t z & z^t + b^t C \\ \hline A^t z & A^t C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} a + b^t z + z^t b + b^t C b & z^t A + b^t C A \\ \hline A^t z + A^t C b & A^t C A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{a} & \widetilde{z}^t \\ \hline \widetilde{z} & A^t C A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{a} = a + b^t z + z^t b + b^t C b \\ \widetilde{z} = A^t (Cb + z) \end{array} \right.$$

1.2. Clasificación de hipercuádricas euclídeas

Dada una hipercuádrica euclídea, nuestro objetivo es encontrar un sistema de referencia en el que la ecuación cuadrática sea fácil de identificar, pudiendo entonces clasificarla.

Por el Teorema de Sylvester visto en Geometría II, como C es simétrica, tenemos que $\exists \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ tal que $A^t C A = D$, con D diagonal:

$$D = A^t C A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
r_1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & r_{n_1} & & & & & & \\ \hline
& & & -r_{n_1+1} & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\ \hline
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Además, veamos que se puede elegir b de la forma que $\widetilde{z}$ (que también define la hipercuádrica) tenga sus primeras $n_1 + n_2$ coordenadas nulas.

Por tanto, hay un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}'$ tal que H viene dada por:

$$0 = (1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
\widetilde{a} & & 0 & & & 0 & & \widetilde{z}_{n_1+n_2+1} & \cdots & \widetilde{z}_n \\
\hline
 & r_1 & & & & & & & & \\
0 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & r_{n_1} & & & & & & \\
\hline
 & & & & -r_{n_1+1} & & & & & \\
0 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\
\hline
\widetilde{z}_{n_1+n_2+1} & & & & & & & 0 & & \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \\
\widetilde{z}_n & & & & & & & & & 0
\end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Distinguimos ahora en función de si $\widetilde{z}$ es nulo o no:

1. <u>El vector columna $\widetilde{z}$ es nulo, $\widetilde{z} = \overrightarrow{0}$</u>:

   En este caso, si $p_{\mathcal{R}'}^t = (s_1, \ldots, s_n)$, los puntos de H cumplen:

   $$r_1 s_1^2 + \cdots + r_{n_1} s_{n_1}^2 - r_{n_1+1} s_{n_1+1}^2 - r_{n_1+n_2} s_{n_1+n_2}^2 = -\widetilde{a}$$

   donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Además, podemos suponer que el número de coeficientes positivos es mayor o igual que el número de valores negativos, cambiando de signo la igualdad si hiciese falta. Además, si $\widetilde{a} \neq 0$, podemos dividir entre $\widetilde{a}$ de forma que esté igualado a ± 1. Por tanto, haciendo esos cambios tenemos que:

   $$R_1 s_1^2 + \cdots + R_m s_m^2 - R_{m+1} s_{m+1}^2 - R_l s_l^2 = \varepsilon$$

   donde los R_i son números positivos, $m \geqslant l/2$ y $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$.

   Por último, veamos que si $\varepsilon = 0$, podemos dividir entre R_l de manera que el coeficiente de s_l^2 sea 1.

2. <u>El vector columna $\widetilde{z}$ no es nulo, $\widetilde{z} \neq \overrightarrow{0}$</u>:

   Ya que $\widetilde{w}^t = (\widetilde{z}_{n_1+n_2+1}, \ldots, \widetilde{z}_n)_{\mathcal{B}'} \neq \overrightarrow{0}$, ampliamos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n-(n_1+n_2)}$ dada por $\mathcal{B}''_{\widetilde{w}} = \{e_{n_1+n_2+1}, \ldots, e_n\}$, con $e_n = \frac{\widetilde{w}}{\|\widetilde{w}\|}$. Por tanto, consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R}''$ tal que:

   $$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}'', \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{array}\right)$$

   donde $B = M(\mathcal{B}''_{\widetilde{w}}, \mathcal{B}'_{\widetilde{w}})$ y $\mathcal{B}'_{\widetilde{w}}$ son los $n - (n_1 + n_2)$ últimos vectores de $\mathcal{B}'$.

Como en este caso $\widetilde{b} = 0$, tenemos que $\widetilde{\widetilde{z}} = B^t\widetilde{w} = (0, \dots, 0, \|w\|)^t$. Por tanto, en $\mathcal{R}''$ tenemos que H viene dada por:

$$0 = (1, p^t_{\mathcal{R}''}) \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
\widetilde{\widetilde{a}} & & 0 & & & 0 & & 0 & \cdots & \|w\| \\
\hline
 & r_1 & & & & & & & & \\
0 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & r_{n_1} & & & & & & \\
\hline
 & & & & -r_{n_1+1} & & & & & \\
0 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\
\hline
0 & & & & & & & 0 & & \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \\
\|w\| & & & & & & & & & 0
\end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix}$$

Por último, veamos que hay un cambio de origen del sistema de referencia de manera de manera que la matriz es idéntica a excepción de que $\widetilde{\widetilde{a}} = 0$.

Sea el sistema de referencia $\mathcal{R}'''$ tal que:

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}''', \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|c|c}
1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & I_{n-2} & 0 \\
b_n & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Tenemos que $\widetilde{\widetilde{\widetilde{z}}} = \widetilde{\widetilde{z}}$, pero $\widetilde{\widetilde{\widetilde{a}}} \neq \widetilde{\widetilde{a}}$. Veamos su nuevo valor:

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{a}}} = \widetilde{\widetilde{a}} + (0, \dots, b_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \|w\| \end{pmatrix} + (0, \dots, \|w\|) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \cancel{(0, \dots, b_n)C \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \widetilde{\widetilde{a}} + 2b_n\|w\| = 0 \Longleftrightarrow b_n = \frac{-\widetilde{\widetilde{a}}}{2\|w\|}$$

Por tanto, si $p^t_{\mathcal{R}''''} = (t_1, \dots, t_n)$, los puntos de H cumplen:

$$r_1t_1^2 + \dots + r_{n_1}t_{n_1}^2 - r_{n_1+1}t_{n_1+1}^2 - r_{n_1+n_2}t_{n_1+n_2}^2 + 2\|w\|t_n = 0$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Además, podemos suponer que el número de coeficientes positivos es mayor o igual que el número de valores negativos, cambiando de signo la igualdad si hiciese falta.

Por último, pasamos el término $\pm 2\|w\|t_n$ al término de la derecha, y dividimos entre $\mp\|w\|$. De tal forma, tenemos que queda:

$$R_1t_1^2 + \dots + R_mt_m^2 - R_{m+1}t_{m+1}^2 - R_lt_l^2 = 2t_n$$

donde los R_i son números positivos, $m \geqslant {}^{l}\!/_{2}$ y $l < n$.

Por tanto, de toda la discusión en esta sección tenemos el siguiente teorema:

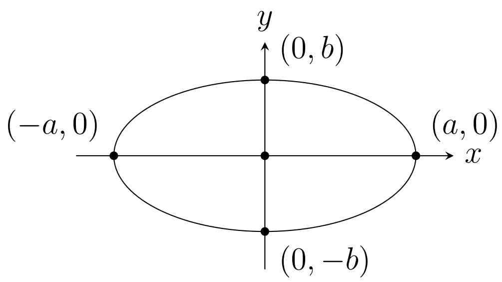

Figura 1.1: Elipse.

Teorema 1.1. *Sea H una hipercuádrica de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}^n$. Entonces existe un sistema de referencia euclídeo en el cual la ecuación cuadrática que define a H en ese sistema de referencia es de una de las siguientes formas:*

1. $R_1x_1^2 + \cdots + R_mx_m^2 - R_{m+1}x_{m+1}^2 - R_lx_l^2 = \varepsilon$, *donde* $R_i > 0\ \forall i$, $m \geqslant l/2$ *y* $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$. *Además, si* $\varepsilon = 0$ *se tiene que* $R_l = 1$.

2. $R_1x_1^2 + \cdots + R_mx_m^2 - R_{m+1}x_{m+1}^2 - R_lx_l^2 = 2x_n$, *donde* $R_i > 0\ \forall i$, $m \geqslant l/2$ *y* $l < n$.

1.2.1. Clasificación de las cónicas

En esta sección, vamos a clasificar las hipercuádricas en el plano euclídeo, también llamadas **cónicas**. Estas son las conocidas elipses, hipérbolas, etc[2].

Usando el Teorema 1.1, podemos hacer la distinción de los posibles casos. Notemos que, como $R_i > 0$ para todo i, y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es biyectiva, notemos que es indiferente poner R_i que $\frac{1}{(R_i')^2}$. Por tanto, los distintos casos son:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$.

   Tenemos que no es posible, por lo que $H = \emptyset$.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   Se trata de una elipse con semiejes a y b. Tenemos que sus puntos de corte con los ejes son:
   $$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Longrightarrow y = \pm b \\ y = 0 \Longrightarrow x = \pm a \end{array}\right.$$

   Su representación se puede ver en la Figura 1.1.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.

   Tenemos que es un único punto, el origen: $H = \{(0, 0)\}$.

[2]El lector posiblemente las conozca de dibujo técnico, etc. No obstante, estas figuras del plano matemáticamente simplemente se definen como los puntos del plano que cumplen cada ecuación. Más adelante veremos que existen determinados elementos de importancia, como puede ser los focos, ejes, etc; aunque posiblemente el lector ya conozca de su existencia.

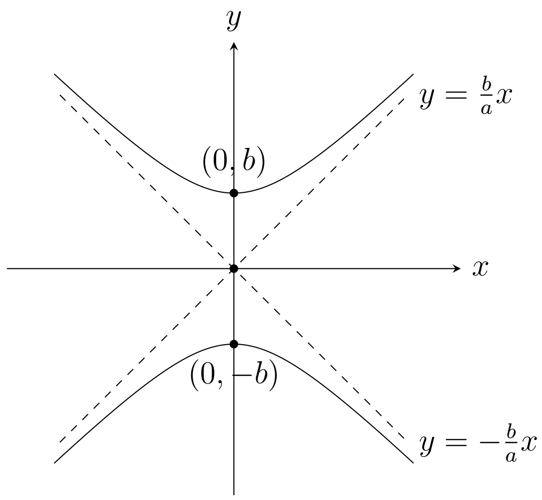

Figura 1.2: Hipérbola que corta al eje Y.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

   Se trata de una hipérbola. Calculemos sus puntos de corte:

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = \pm b \\ y = 0 \Longrightarrow \nexists \end{cases}$$

   Por tanto, tan solo corta al eje Y. Calculemos sus asíntotas oblicuas[3]. Tenemos que $y = f(x) = \pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$. Si la asíntota oblicua es $y = mx + n$, calculamos m, n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pm b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \pm b\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \pm b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \mp \frac{bx}{a} &= \lim_{x\to\infty} \pm b\left[\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a}\right] = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\pm b\left[1 + \cancel{\frac{x^2}{a^2}} - \cancel{\frac{x^2}{a^2}}\right]}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}} = 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que tiene dos asíntotas oblicuas, $y = \pm\frac{b}{a}x$. Está representada en la Figura 1.2.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

   Se trata también de una hipérbola. Calculemos sus puntos de corte:

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \nexists \\ y = 0 \Longrightarrow x = \pm a \end{cases}$$

[3]Aunque este concepto no se haya introducido en la carrera de Matemáticas, se da por conocido de Bachillerato solo con el objeto de hacer ver que se trata de una hipérbola

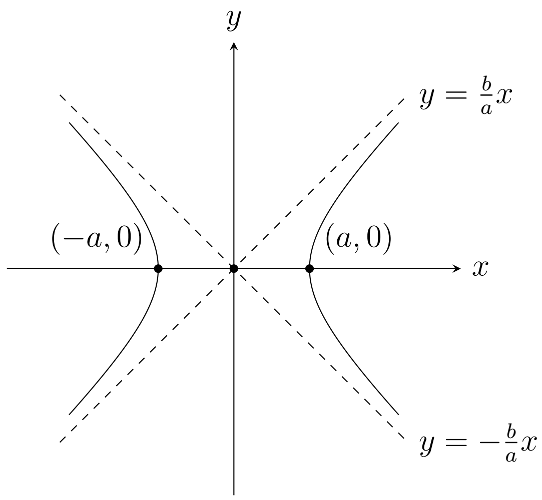

Figura 1.3: Hipérbola que corta al eje X.

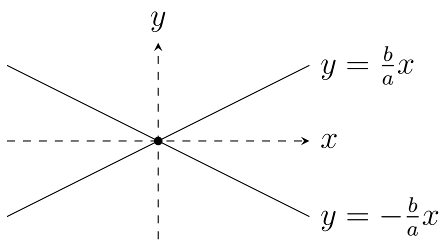

Figura 1.4: Par de rectas secantes.

Por tanto, tan solo corta al eje X. Además, tiene las dos mismas dos asíntotas oblicuas, $y = \pm\frac{b}{a}x$. Está representada en la Figura 1.3.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

   Tenemos que:
   $$0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

   Por tanto, se trata de un par de rectas secantes; representadas en la Figura 1.4.

7. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$

   Tenemos que no es posible, por lo que $H = \emptyset$.

8. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$

   Tenemos que:
   $$x^2 = a^2 \Longrightarrow x = \pm a$$

   Por tanto, se trata de un par de rectas paralelas; representadas en la Figura 1.5.

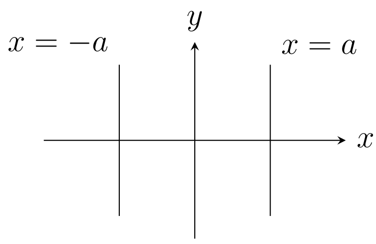

Figura 1.5: Par de rectas paralelas.

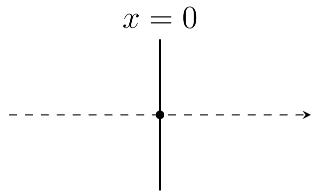

Figura 1.6: Recta (doble).

9. $\dfrac{x^2}{a^2} = 0$.

   Tenemos que:
   $$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$
   Por tanto, se trata de una recta (doble); representada en la Figura 1.6.

10. $\dfrac{x^2}{a^2} = 2y$.

    Tenemos que:
    $$y = \frac{x^2}{2a^2}$$
    Por tanto, se trata de una parábola; representada en la Figura 1.7.

1.2.2. Clasificación de las cuádricas

En esta sección, vamos a clasificar las hipercuádricas en el espacio euclídeo, también llamadas **cuádricas**[4].

[4]Estas posiblemente serán menos conocidas para el lector, pero son las equivalentes en el espacio.

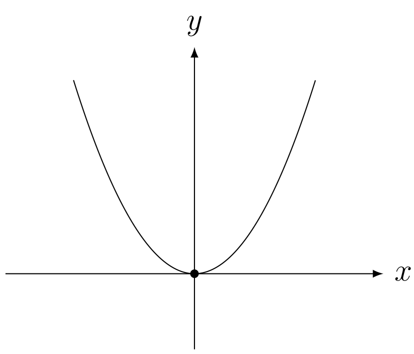

Figura 1.7: Parábola.

Usando el Teorema 1.1, podemos hacer la distinción de los posibles casos. Notemos que, como $R_i > 0$ para todo i, y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es biyectiva, notemos que es indiferente poner R_i que $\frac{1}{(R_i')^2}$. Por tanto, los distintos casos son:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

   Se trata de un punto, el origen. $H = \{(0,0,0)\}$.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

   Se trata de un elipsoide de semiejes a, b y c.

   Vemos fácilmente que los cortes con cada plano son elipses.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

   No es posible, por lo que $H = \emptyset$.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

   Se trata de un cono elíptico. Tenemos que:

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

   Por tanto, para cada valor de z, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z = 0$ tenemos un único punto, el origen.

   Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

   $$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \pm \frac{b}{c} z \\ x = 0 \end{array} \right.$$

   $$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm \frac{a}{c} z \\ y = 0 \end{array} \right.$$

   Por tanto, tenemos que son dos rectas en cada caso.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

   Se trata de un hiperboloide reglado o de una hoja. Tenemos que:

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

   Por tanto, para cada valor de z, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z = 0$ también tenemos una elipse.

   Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

   $$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   $$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Por tanto, tenemos que en cada caso es una hipérbola que no corta al eje Z.

Veamos ahora por qué se llama "reglado". Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Longrightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\Longrightarrow\frac{\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)}{\left(1-\frac{y}{b}\right)}=\frac{\left(1+\frac{y}{b}\right)}{\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)}:=\mu$$

Por tanto, tenemos la siguiente familia de rectas:

$$r_\lambda\equiv\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\end{array}\right.$$

Por ello, se llama hiperboloide reglado, ya que está formado por una familia de rectas.

6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

   Se trata de un <u>hiperboloide elíptico o de dos hojas</u>. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}$$

   Por tanto, para cada valor de z tal que $|z|>c$, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z=\pm c$, tenemos un único punto. Para $z\in]-c,c[$, tenemos que no existe ningún punto de la cuádrica.

   Veamos ahora los cortes con los planos $x=0$ e $y=0$:

$$\begin{aligned} x=0&\Longrightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0&\Longrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que en cada caso es una hipérbola que corta al eje Z y no corta a los otros ejes.

7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

   Tenemos que $H\equiv x=y=0$, por lo que se trata de una recta.

8. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

   Para cada valor de z tenemos la misma elipse, por lo que se trata de un <u>cilindro elíptico</u>.

9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1.$

   No es posible[5], por lo que $H=\emptyset$.

[5]Esta cuádrica también se denomina cilindro imaginario

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

    Tenemos que:
    $$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{a}{b}y$$
    Por tanto, tenemos que son dos planos. Además, su intersección es la recta $x = y = 0$; es decir, el eje Z.

    Por tanto, son dos planos secantes.

11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

    Por tanto, para cada valor de z, tenemos la misma parábola que no corta al eje Y.

    Se denomina cilindro hiperbólico.

12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

    Por tanto, para cada valor de z, tenemos la misma parábola que no corta al eje X.

    En este caso también se denomina cilindro hiperbólico.

13. $\dfrac{x^2}{a^2} = 0.$

    En este caso tengo $x = 0$; por lo que es un plano (doble).

14. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1.$

    En este caso tengo $x = \pm a$; por lo que es un par de planos paralelos.

15. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$

    No es posible, por lo que $H = \emptyset$.

16. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

    Se trata de un paraboloide elíptico.

    Para cada valor de $z > 0$, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace z. Para $z = 0$ tenemos un único punto, el origen; y para $z < 0$ tenemos que no es posible.

    Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:
    $$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{y^2}{2b^2}$$
    $$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{x^2}{2a^2}$$
    Por tanto, tenemos que son dos parábolas en cada caso.

17. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

    Se trata de un paraboloide hiperbólico.

    Para cada valor de $z > 0$, tenemos una hipérbola que corta al plano $y = 0$ que con valores de los semiejes distintos.

    Para $z = 0$, tenemos dos rectas secantes, $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ y = \pm\frac{b}{a}x \end{cases}$

    Para cada valor de $z < 0$, tenemos una hipérbola que corta al plano $x = 0$ que con valores de los semiejes distintos.

    Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = -2z \Longrightarrow z = -\frac{y^2}{2b^2}$$

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{x^2}{2a^2}$$

    Por tanto, tenemos que son dos parábolas en cada caso, una cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo.

18. $\dfrac{x^2}{a^2} = 2z.$

    Para cualquier y, se tiene que:

$$z = \frac{x^2}{2a^2}$$

    Es decir, tenemos que es siempre la misma parábola. Se denomina cilindro parabólico.

1.3. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con este tema, consultar la sección 3.1.

2. Espacio Proyectivo

Sea $V^{n+1}(\mathbb{R})$ un espacio vectorial, y consideramos $V^* = V \setminus \{0\}$.
En V^* definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$v_1 \sim v_2 \Longleftrightarrow v_2 = \lambda v_1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Definimos el espacio proyectivo de dimensión n como el espacio vectorial cociente mediante dicha relación de equivalencia $\sim$:

$$V^*/\sim = \{[v] \mid v \in V^*\}$$

Notamos dicho espacio cociente como $P(V)$. En el caso particular de $V = \mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que se denota de la siguiente forma:

$$(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \;=\; P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$$

Idea también de la Esfera. Pedirla o mirar de topo

2.1. Subespacios Proyectivos

Consideramos la proyección según dicha clase de equivalencia:

$$\begin{aligned} \pi : V^* &\longrightarrow P(V) \\ v &\longmapsto [v] \end{aligned}$$

Definición 2.1. Dado el espacio proyectivo $P(V)$, y un subconjunto $X \subset P(V)$, diremos que X es un subespacio proyectivo si $\pi^{-1}(X) \cup \{0\} = \widetilde{X}$ es un subespacio vectorial.

Además, $\dim X = \dim \widetilde{X} - 1$.

Por convenio, diremos que $\emptyset$ es un subespacio proyectivo de dimensión -1.

Proposición 2.1. *Sea V un espacio vectorial, y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces:*

$$U = \pi^{-1}(\pi(U)) \cup \{0\}$$

Operaciones entre espacios proyectivos

Sea $P(V^{n+1})$ un espacio proyectivo, y sean X, Y dos subespacios proyectivos de forma que $X = \pi(\widetilde{X} - \{\emptyset\})$, $Y = \pi(\widetilde{Y} - \{\emptyset\})$.

Tenemos que:

$$X \cap Y = \pi(\widetilde{X} - \{\emptyset\}) \cap \pi(\widetilde{Y} - \{\emptyset\}) = \pi(\widetilde{X} \cap \widetilde{Y} \setminus \{0\})$$

Definición 2.2. Sea $X \subset P(V^{n+1})$. Llamamos subespacio proyectivo generado por C, notado por $\langle C \rangle$, al menor subespacio proyectivo que lo contenga. Es decir,

$$\bigcap \{X \supset C \mid X \text{ es un subespacio proyectivo}\}$$

A partir de esa definición, tenemos que:

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle = \pi(\widetilde{X} + \widetilde{Y})$$

Proposición 2.2. *Tenemos que:*

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$$

Proposición 2.3. *En un plano proyectivo, dos rectas paralelas siempre se intersecan.*

Algunas propiedades que tenemos son:

1. Si $X \subset Y$ son subespacios proyectivos, entonces:

$$\dim X \leqslant \dim Y$$

   Además, se da la igualdad si y solo si $X = Y$.

2.2. Coordenadas Homogéneas

Sea $\mathcal{B}$ una base de V^{n+1}, y consideramos $v \in V^{n+1} \setminus \{0\}$. Sea $v = (x_0, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$.
Definimos las coordenadas homogéneas de $[v] \in P(V^{n+1})$ como las coordenadas de dicho v:

$$[v] \equiv (x_0 : \dots : x_n)$$

Notemos que, como $[v] = [\lambda v]$, tenemos que dichas coordenada son únicas salvo factores de proporc

Las ecuaciones paramétricas o implícitas de X son las de $\widetilde{X}$.

Ejemplo. Sea $p = (1 : 2 : 3), q = (0 : 1 : 2) \in \mathbb{P}^2$. Calcular la recta proyectiva que une ambos planos.

Tenemos que $p = [(1, 2, 3)]$, $q = [(0, 1, 2)]$. Entonces:

$$p + q = \pi(\mathcal{L}\{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\})$$

Por tanto, tenemos que:

$$(x : y : z) \in p + q \iff (x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(0, 1, 2)$$

La ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix}$$

2.3. Proyectividades

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & V_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(V_1) & \xrightarrow{f} & P(V_2) \end{array}$$

Definición 2.3 (Proyectividad)**.** Diremos que una aplicación $f : P(V_1) \to P(V_2)$ es una proyectividad si y solo si existe $\widetilde{f} : V_1 \to V_2$ lineal e inyectiva tal que

$$f([v]) = [\widetilde{f}(v)]$$

Diremos que $\widetilde{f}$ es la lineal asociada a f.

Notemos que se pide que sea inyectiva para poder proyectar.
Notemos que esta es única salvo proporcionalidad:

Proposición 2.4. *$\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son lineales asociadas a f si y solo si $\widetilde{f} = \lambda\widetilde{g}$.*

Proposición 2.5. *Las proyectividades conservan la dimensión. Es decir, si f es una proyectividad y X es un subespacio proyectivo, entonces $f(X)$ es un subespacio proyectivo. Además,*

$$\dim f(X) = \dim X$$

Demostración. Tenemos que $f(X) = [\widetilde{f}(\widetilde{X})]$ □

Determinar f es equivalente a determinar $\widetilde{f}$.
TERMINAR

3. Relaciones de Ejercicios

3.1. Hipercuádricas afines.

Ejercicio 3.1.1. Clasifica las hipercuádricas de un espacio afín euclídeo de dimensión 1.

Tenemos que la forma cuadrática de toda hipercuádrica en cierto sistema de referencia euclídeo $\mathcal{R}$ es una de las siguientes:

1. $\frac{x^2}{a^2} = 0$.

   Es un único punto doble, el origen.

2. $\frac{x^2}{a^2} = 1$.

   Son dos puntos, $x = \pm a$.

3. $\frac{x^2}{a^2} = -1$.

   No es posible, por lo que es el vacío.

Ejercicio 3.1.2. En el semiplano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geqslant 0\}$ tomamos una circunferencia C de centro $(c, 0, 0)$ y radio $r > 0$ con $C > r > 0$. Se llama toro de revolución generado por C a la superficie T obtenida al rotar C alrededor del eje z. Dibujar T y describir la superficie como el conjunto de soluciones de una ecuación con 3 incógnitas. ¿Es dicha ecuación la de una cuádrica?

Ejercicio 3.1.3. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín de dimensión n y S un subespacio afín suyo de dimensión $m > 0$. Demuestra que:

1. Existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ tal que las ecuaciones implícitas de S en dicho sistema son $x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0$.

2. Si H es una hipercuádrica de $\mathcal{A}$ entonces $H \cap S$ es una hipercuádrica de S o bien vacío o todo S.

Ejercicio 3.1.4. Sean H una hipercuádrica y R una recta de un espacio afín $\mathcal{A}$. Prueba que $R \cap H$ puede ser vacío, un punto, dos puntos o toda la recta. Da un ejemplo conocido de cada uno de los casos cuando $\mathcal{A}$ tiene dimensión dimensión 2 y dimensión 3.

Ejercicio 3.1.5. Construir explícitamente un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C) = C'$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $n = 2$, $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y^2 = 1\}$.

2. $n = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $C' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

3. $n = 2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y = 0 = 1\}$, $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x - y^2 = 0\}$.

4. $n = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|ax^2 + by^2 = 1\}$, $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejercicio 3.1.6. Cuestiones sobre elipses:

1. Dados dos puntos distintos p_1, p_2 de un plano afín euclídeo $\mathcal{A}$ y $r > \frac{1}{2}d(p_1, p_2)$, demuestra que $H = \{p \in \mathcal{A} \mid d(p, p_1) + d(p, p_2) = r\}$ es una elipse. Los puntos p_1, p_2 reciben el nombre de focos de la elipse. Se llama centro de la elipse al punto medio de sus focos y vértices a los puntos de intersección de la elipse con la recta que pasa por sus focos.

2. Prueba que toda elipse se puede escribir como en el apartado anterior, para ciertos puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{A}$.

3. Demuestra que toda elipse H es simétrica con respecto a la recta $R_{p_1p_2}$ que pasa por sus focos y con respecto a la mediatriz de sus focos.

4. Prueba que, para cada punto p de una elipse H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con las rectas que pasan por p y cada uno de sus focos.

Ejercicio 3.1.7. Cuestiones sobre hipérbolas:

1. Dados dos puntos distintosp_1, p_2 de un plano afín euclídeo $\mathcal{A}$ y $r > \frac{1}{2}d(p_1, p_2)$, demuestra que $H = \{p \in \mathcal{A} \mid |d(p, p_1) - d(p, p_2)| = r\}$ es una hipérbola. Los puntos p_1, p_2 reciben el nombre de focos de la hipérbola. Se llama centro de la hipérbola al punto medio de sus focos y vértices a los puntos de intersección de la hipérbola con la recta que pasa por sus focos.

2. Prueba que toda hipérbola se puede escribir como en el apartado anterior, para ciertos puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{A}$.

3. Demuestra que toda hipérbola H es simétrica con respecto a la recta $R_{p_1p_2}$ que pasa por sus focos y con respecto a la mediatriz de sus focos.

4. Prueba que, para cada punto p de una hipérbola H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con las rectas que pasan por p y cada uno de sus focos.

Ejercicio 3.1.8. Cuestiones sobre parábolas:

1. Sean p_0 un punto de un plano afín euclídeo $\mathcal{A}$ y R una recta de $\mathcal{A}$ que no contiene a p_0. Demuestra que $H = \{p \in \mathcal{A} \mid d(p, p_0) = d(p, R)\}$ es una parábola. El punto p_0 recibe el nombre de foco de la parábola y R se llama directriz de la parábola. Se llama vértice de la parábola al punto de la parábola más próximo al foco o, equivalentemente, a la directriz.

2. Prueba que toda parábola se puede escribir como en el apartado anterior, para cierto punto p_0 y cierta recta R de $\mathcal{A}$.

3. Demuestra que toda parábola H es simétrica con respecto a la recta que pasa por su foco y es perpendicular a su directriz (esta recta se llama eje de la parábola).

4. Prueba que, para cada punto p de una parábola H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con la recta que pasa por p y su foco y con la recta que pasa por p y es paralela al eje de la parábola.

Ejercicio 3.1.9. Consideremos las siguientes rectas de $\mathbb{R}^3$:

$$R_1 = (1,0,0) + \mathcal{L}\{(0,1,1)\} \qquad R_2 = (1,0,0) + \mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$$

1. Demuestra que la superficie generada al rotar R_1 (o bien R_2) alrededor del eje z es el hiperboloide de una hoja que tiene ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

2. Deduce que si H es cualquier hiperboloide de una hoja de $\mathbb{R}^3$ y $p \in H$ entonces existen dos rectas distintas contenidas en H que pasan por p.

Ejercicio 3.1.10. Prueba que cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ corta al hiperboloide de una hoja que tiene ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Ejercicio 3.1.11. Encuentra, si existe, una parábola de $\mathbb{R}^2$ que pase por los puntos $(2,0), (0,1), (3,1)$ y $(0,0)$.

Tenemos que una hipercuádrica es del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Establecemos las condiciones de contorno dadas:

$$\begin{aligned}
&(2,0) \longrightarrow 4A + 2D + F = 0\\
&(0,1) \longrightarrow B + E + F = 0\\
&(3,1) \longrightarrow 9A + B + 3C + 3D + E + F = 0\\
&(0,0) \longrightarrow F = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a revolver queda:

$$\left\{\begin{array}{l} F = 0\\ 2A + D = 0\\ B + E = 0\\ 9A + B + 3C + 3D + E = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F = 0\\ D = -2A\\ E = -B\\ 9A + B + 3C - 6A - B = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F = 0\\ D = -2A\\ E = -B\\ C = -A \end{array}\right\}$$

Por tanto, nuestra hipercuádrica queda:

$$Ax^2 + By^2 - Axy - 2Ax - By = 0 \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Por tanto, hay gran cantidad de hipercuádricas que pasan por los 4 puntos. Clasifiquémoslas en función de $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
0 &= Ax^2 + By^2 - Axy - 2Ax - By =\\
&= A[x^2 - x(y+2)] + By^2 - By =\\
&= A\left[x - \frac{y+2}{2}\right]^2 - A \cdot \frac{(y+2)^2}{4} + By^2 - By =\\
&= A\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{A}{4}\right)y^2 - (A+B)y - A
\end{aligned}$$

Como en una parábola existe un sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tal que su ecuación reducida en dicho sistema es $\widetilde{x}^2 = 2\widetilde{y}$, entonces necesito que la segunda coordenada no esté elevado al cuadrado. Por tanto,

$$B - \frac{A}{4} = 0 \Longleftrightarrow A = 4B$$

Tenemos entonces que la hipercuádrica queda:

$$0 = 4B\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 - 5By - 4B = 4B\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{5By+4B}{2}$$

Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{B} & 2\sqrt{B} & -\sqrt{B} \\ 2B & 0 & 5B \end{array}\right)$$

Tenemos que se trata de un sistema de referencia para todo $B \in \mathbb{R}^*$, por lo que $B \neq 0$. En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 = 2\widetilde{y}^2$$

Es decir, se trata de una parábola. Por tanto, tenemos que las parábolas que pasan por dichos puntos son de la forma:

$$4Bx^2 + By^2 - 4Bxy - 8Bx - By = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - y = 0$$

Y por tanto, hemos determinado de forma única dicha parábola. Notemos que hemos simplificado porque $B \neq 0$.

Ejercicio 3.1.12. Clasifica euclídeamente las siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$ y obtén, en cada caso, un sistema de referencia euclídeo en el cual su expresión sea reducida:

1. $-125 - 220x - 14x^2 - 40y - 96xy + 14y^2 = 0$.

   Tenemos que la matriz asociada a dicha cuádrica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} -125 & -110 & -20 \\ \hline -110 & -14 & -48 \\ -20 & -48 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

   Diagonalizamos C. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 2500 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 50$$

   Sus vectores propios asociados son:

$$V_{50} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -64 & -48 \\ -48 & -36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}(-3,4)\right\}$$

$$V_{-50} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 36 & -48 \\ -48 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}(4,3)\right\}$$

   Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} -14 & -48 \\ -48 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -110 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} -14 & -48 \\ -48 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 20 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = (-1,-2)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{(-1,-2), \left\{\frac{1}{5}(-3,4), \frac{1}{5}(4,3)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -62500 = \widetilde{a}\cdot 50 \cdot -50 \Longrightarrow \widetilde{a} = 25$$

Por tanto, la matriz asociada a la hipercuádrica en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 25 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$50\widetilde{x}^2 - 50\widetilde{y}^2 = -25 \Longleftrightarrow 2\widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 = -1$$

Por tanto, se trata de una hipérbola que corta al eje X de ese nuevo sistema de referencia. Sus ejes son:

$$e_1 = (-1,-2) + \mathcal{L}\{(-3,4)\} \qquad e_2 = (-1,-2) + \mathcal{L}\{(4,3)\}$$

Su centro es el punto $(-1,-2)$. La longitud de los semiejes (que son iguales, por ser equilátera) es $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La distancia focal es $c = 1$. Entonces, los focos son:

$$F_1 = (1,0)_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (-1,0)_{\mathcal{R}'}$$

Las ecuaciones de las asíntotas en $\mathcal{R}'$ son:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Longrightarrow y = -\frac{b}{a}x = -x \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Longrightarrow y = \frac{b}{a}x = x$$

2. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 2 = 0$.

   Tenemos que la matriz asociada a dicha cuádrica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \hline 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

   Diagonalizamos C. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$$

Sus vectores propios asociados son:

$$V_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$$

$$V_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$$

Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -16 = \widetilde{a} \cdot 4 \cdot 2 \Longrightarrow \widetilde{a} = -2$$

Por tanto, su matriz asociada en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$4\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{y}x^2 = 2 \Longleftrightarrow 2\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 1$$

Por tanto, se trata de una elipse. Sus ejes son:

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,1)\} \qquad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}$$

Su centro es el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La longitud de los semiejes es $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = 1$. La distancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{4}$. Entonces, los focos son:

$$F_1 = (0, {-3}/4)_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (0, 3/4)_{\mathcal{R}'}$$

Ejercicio 3.1.13. Clasifica euclídeamente las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$ y obtén, en cada caso, un sistema de referencia euclídeo en el cual su expresión sea reducida:

1. $3x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz - 6x - 6y + 3 = 0$.

2. $3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz + 2\sqrt{2}x + 2y + 2\sqrt{2}z + 2 = 0.$

Ejercicio 3.1.14. Clasifica las siguientes cónicas afines de $\mathbb{R}^2$ y determina un sistema de referencia donde su expresión sea reducida:

1. $4x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 3y - 3 = 0.$
2. $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x - 18y + 11 = 0.$
3. $2x^2 + 12xy + 18y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$
4. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 9y + 2 = 0.$
5. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$
6. $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x - 11y + 11 = 0.$

Ejercicio 3.1.15. Clasifica las siguientes cónicas afines de $\mathbb{R}^3$ y determina un sistema de referencia donde su expresión sea reducida:

1. $3x^2 + 4y^2 + 21z^2 + 6xy + 12xz + 18yz - 12x - 14y - 29z + 14 = 0.$

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= 3x^2 + 4y^2 + 21z^2 + 6xy + 12xz + 18yz - 12x - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3x^2 + 6x(y + 2z - 2) + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3[x^2 + 2x(y + 2z - 2)] + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 - 3(y + 2z - 2)^2 + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 - 3(y^2 + 4z^2 + 4 + 4yz - 4y - 8z) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 2y - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + y^2 + 2y(3z - 1) + 9z^2 - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + [y + (3z - 1)]^2 - (3z - 1)^2 + 9z^2 - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + [y + 3z - 1]^2 + z + 1 = \\
&= [\sqrt{3}(x + y + 2z - 2)]^2 + [y + 3z - 1]^2 - 2\left[-\frac{z + 1}{2}\right]
\end{aligned}$$

   Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-2\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\
-1 & 0 & 1 & 3 \\
-1/2 & 0 & 0 & -1/2
\end{array}\right)$$

   Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-2\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\
-1 & 0 & 1 & 3 \\
-1/2 & 0 & 0 & -1/2
\end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \sqrt{3}/3 & -1 & -2 \\
4 & 0 & 1 & 6 \\
-1 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)$$

Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{(0,4,-1), \left\{\left(\sqrt{3}/3, 0, 0\right), (-1,1,0), (-2,6,-2)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 2\widetilde{z}$$

Por tanto, se trata de un paraboloide elíptico.

2. $3x^2 + 2y^2 + 7z^2 + 6xy + 12xz + 6yz - 12x - 10y - 10z + 12 = 0$.

3. $x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + 4y - 12z = 0$.

4. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz + 2x - 3y + 4 = 0$.

5. $x^2 + 11y^2 + 9z^2 - 6xy + 4xz - 8yz + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + 11y^2 + 9z^2 - 6xy + 4xz - 8yz + 2x - 2y + 2z + 3 = \\
&= x^2 + 2x(-3y + 2z + 1) + 11y^2 + 9z^2 - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= [x + (1 - 3y + 2z)]^2 - (1 - 3y + 2z)^2 + 11y^2 + 9z^2 - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 - (1 + 9y^2 + 4z^2 - 6y + 4z - 12yz) + 11y^2 + 9z^2 - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 4y - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2y^2 + 4y(z + 1) + 5z^2 - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2[y + (z + 1)]^2 - 2(z + 1)^2 + 5z^2 - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3z^2 - 6z = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3(z^2 - 2z + 1) - 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3(z - 1)^2 - 3 = \\
&= \frac{1}{3}(x + 1 - 3y + 2z)^2 + \frac{2}{3}(y + z + 1)^2 + \frac{3}{3}(z - 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

   Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right)$$

   Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right)\right]^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -9 & \sqrt{3} & 3\sqrt{6}/2 & -5 \\ -2 & 0 & \sqrt{6}/2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{(-9,-2,1), \left\{\left(\sqrt{3},0,0\right), \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right), (-5,-1,1)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 = 1$$

Por tanto, se trata de un elipsoide.

6. $xy + xz + yz - 1 = 0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= xy + xz + yz - 1 = \\
&= x(y+z) + yz - 1 = \\
&= x(y+z) + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= (y+z)\left[x + \frac{1}{4}(y+z)\right] - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(y+z+x+\frac{1}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y+z-x-\frac{1}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(x+\frac{5}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(-x+\frac{3}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(-x+\frac{3}{4}(y+z)\right)^2 + \frac{1}{4}(y-z)^2 - \frac{1}{4}\left(x+\frac{5}{4}(y+z)\right)^2 + 1
\end{aligned}$$

   Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 \end{array}\right)$$

   Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left[\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 \end{array}\right)\right]^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

   Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{O, \left\{\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,1,-1), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 - \widetilde{z}^2 = -1$$

Por tanto, se trata de un hiperboloide de dos hojas. Vemos que corta a la recta $\widetilde{x} = \widetilde{y} = 0$ (eje $\widetilde{z}$).

Ejercicio 3.1.16. Clasifica, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$:

1. $x^2 + ay2 + 2xy - 2x + a = 0$.
2. $x^2 + axy + y^2 + 1 = 0$.

Ejercicio 3.1.17. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $F = (0, 0, 1)$ y el plano afín S de ecuación $x - z = 0$. Definimos el conjunto:

$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid d(p, F) = d(p, S)\}.$$

Demostrar que C es una cuádrica y clasificarla.