

# Geometría II

## Examen IV

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Geometría II

## Examen IV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2023

**Asignatura** Geometría II.

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Matemáticas.

**Grupo** A.

**Profesor** Francisco Milán López.

**Descripción** Parcial del Tema 2. Formas Bilineales Simétricas.

**Fecha** 16 de mayo de 2023.

**Ejercicio 1. [7 puntos]** En  $\mathbb{R}^3$  consideramos para cada  $a \in \mathbb{R}$  la métrica  $g_a$ , cuya matriz en la base usual viene dada por:

$$A_a = M(g_a, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2 - 1 & -2a \\ 1 & -2a & 1 - a^2 \end{pmatrix}$$

Calcular una base de Sylvester para  $g_a$  y su signatura.

En primer lugar, clasifico la métrica.

$$|A_a| = -(a^2 - 1)^2 + 2a^2 + 2a^2 - (a^2 - 1) - 4a^2 - a^2(1 - a^2) = -a^4 - 1 + 2a^2 - a^2 + 1 - a^2 + a^4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & a^2 - 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 - a^2 = -1$$

Por tanto, tengo que  $\text{Nul}(g_a) = 1 \forall a$ . Además,  $g(e_1, e_1) = 1$ . Por tanto, tenemos que:

$$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

■ Para  $a \neq \pm 1$ :

$$g(e_2, e_2) = a^2 - 1 = -(1 - a^2) = -g(e_3, e_3)$$

Como  $a \neq 1 \implies a^2 - 1 \neq 0 \implies g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) \neq 0$ . Por tanto, al menos uno de los dos cuadrados es negativo, por lo que:

$$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

■ Para  $a = 1$ :

$$A_1 = M(g_1, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 1 + 0 + 2g(e_1, e_2) = 1 + 2(-1) = -1 < 0$$

Por tanto, tenemos que  $g$  no es semidefinida positiva. Por tanto, estamos ante el segundo caso.

$$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

■ Para  $a = -1$ :

$$A_{-1} = M(g_{-1}, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{-1}(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = 1 + 0 - 2g(e_1, e_2) = 1 - 2(1) = -1 < 0$$

Por tanto, tenemos que  $g$  no es semidefinida negativa. Por tanto, estamos ante el segundo caso.

$$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en los tres casos tenemos que:

$$\text{Signatura} = (1, 1) \quad \text{Nul}(g_a) = 1 \quad \text{Ind}(g_a) = 1$$

Para hallar la base de Sylvester, calculo en primer lugar  $\text{Ker}(g_a)$ :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(g_a) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g_a(v, u) = 0 \quad \forall u \in V\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2 - 1 & -2a \\ 1 & -2a & 1 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \\ -ax_1 + (a^2 - 1)x_2 - 2ax_3 = 0 \\ x_1 - 2ax_2 + (1 - a^2)x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 - a^2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{B}_s = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  la base de Sylvester. Sea  $\bar{e}_1 = e_1$ ,  $\bar{e}_3 = (-1 - a^2, -a, 1)^t$ . Para obtener  $\bar{e}_2$ , necesito que  $\bar{e}_2 \perp \bar{e}_1$ :

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}_1 \rangle^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(\bar{e}_1, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{e}_1^t A_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2 - 1 & -2a \\ 1 & -2a & 1 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, -a, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Sea  $\bar{e}_2 = (a, 1, 0)^t$ . Tengo que:

$$g(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = a^2 g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) + 2ag(e_1, e_2) = a^2 + a^2 - 1 + 2a(-a) = -1$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s &= \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 - a^2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ M(g_a, \mathcal{B}_s) &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2. [3 puntos]** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial métrico con  $\dim V = 2$  y  $\mathcal{B}$  una base de  $V$  para la cual

$$|M(g; \mathcal{B})| = -3$$

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1.  $\exists \mathcal{B}_1$  base de  $V$  tal que  $|M(g; \mathcal{B}_1)| = 3$ .

Esto es **falso**, ya que el signo del determinante es un invariante para la misma métrica independientemente de la base.

Como ambas matrices representan la misma base respecto de distintas métricas, tenemos que son congruentes, es decir,  $\exists P$  regular tal que:

$$M(g; \mathcal{B}_1) = P^t M(g; \mathcal{B}) P$$

Por tanto, tomando determinante,

$$|M(g; \mathcal{B}_1)| = |P^t M(g; \mathcal{B}) P| = |P|^2 |M(g; \mathcal{B})|$$

Por tanto, tenemos que:

$$|M(g; \mathcal{B}_1)| \cdot |M(g; \mathcal{B})| > 0$$

No obstante, tenemos que  $-3 \cdot 3 < 0$ , por lo que esto no es posible.

2.  $\exists \mathcal{B}_2$  base de  $V$  tal que  $|M(g; \mathcal{B}_2)| = -7$ .

Como ambas matrices representan la misma base respecto de distintas métricas, tenemos que son congruentes, es decir,  $\exists P$  regular tal que:

$$M(g; \mathcal{B}_2) = P^t M(g; \mathcal{B}) P$$

Por tanto, tomando determinante,

$$|M(g; \mathcal{B}_2)| = |P^t M(g; \mathcal{B}) P| = |P|^2 |M(g; \mathcal{B})| \implies |P|^2 = \frac{7}{3} \implies |P| = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Un ejemplo, por tanto, de matriz  $P$  podría ser:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{7}{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $P = M(\mathcal{B}_2; \mathcal{B})$ , tenemos que, dado  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ , tendríamos que:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{7}{3}} e_1, e_2 \right\}$$

Por tanto, es **cierto**, y la base dada es un ejemplo.

3.  $\exists \mathcal{B}_3$  base de Sylvester de  $V$  tal que:

$$M(g; \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que  $|M(g; \mathcal{B})| = -3 \neq 0$ , tenemos que  $rg(M(g; \mathcal{B})) = 2$ , por lo que  $Nul(g) = 0$ . Además, como el signo del determinante es un invariante, tenemos que es necesario que  $|M(g; \mathcal{B})| < 0$ . Por tanto, el Teorema de Sylvester afirma que este enunciado es **cierto**.