

# Topología I

## Examen IV

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

## Examen IV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas<sup>1</sup>.

**Grupo** Único.

**Profesor** Miguel Ortega Titos.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 14 de enero de 2023.

**Duración** 3 horas.

**Observaciones** Todos los apartados de un mismo ejercicio tienen la misma puntuación.

---

<sup>1</sup>El examen lo pone el departamento.

**Ejercicio 1** (4.5 puntos). Para todo  $R \geq 0$ , consideramos el conjunto  $S_R$  dado por  $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = R\}$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$ . Se considera la topología  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}^2$  generada por la base  $\mathcal{B} = \{S_R \mid R \geq 0\}$ .

1. Estudiar cuándo el conjunto  $\{x_0\}$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  arbitrario, es cerrado en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ .
2. Demostrar que  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  es 1AN pero no es 2AN.
3. Calcular la clausura, el interior y la frontera en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  del conjunto  $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |b| \leq 1\}$ .
4. Probar que  $A$  es conexo en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  si y solo si existe  $R \geq 0$  tal que  $A \subset S_R$ . Determinar las componentes conexas de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ .
5. Demostrar que  $A$  es compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  si y solo si existe  $J \subset [0, +\infty[$  finito tal que  $A \subset \bigcup_{R \in J} S_R$ .

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Enunciar y demostrar el teorema de Tichonov. Si se hace uso del lema del tubo, entonces éste debe ser enunciado y demostrado previamente.

**Ejercicio 3** (3 puntos). Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

1. Decidir si los siguientes subespacios de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  son homeomorfos entre sí dos a dos o no:
  - a)  $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 4\}$ ,
  - b)  $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 4\}$ ,
  - c)  $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .
2. Sean  $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$  espacios topológicos. Para  $i = 1, 2$ , sea  $\mathcal{R}_i$  una relación de equivalencia en  $X_i$  tal que la proyección  $p_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i/\mathcal{R}_i, \mathcal{T}/\mathcal{R}_i)$  es abierta. Demostrar que

$$(X_1 \times X_2)/\mathcal{R} \cong (X_1/\mathcal{R}_1, \mathcal{T}_1/\mathcal{R}_1) \times (X_2/\mathcal{R}_2, \mathcal{T}_2/\mathcal{R}_2),$$

donde  $\mathcal{R}$  es la relación de equivalencia en  $X_1 \times X_2$  definida por

$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff x_1\mathcal{R}_1y_1 \text{ y } x_2\mathcal{R}_2y_2.$$

3. Sea  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  una aplicación entre espacios topológicos tal que  $f(A)$  es conexo en  $(Y, \mathcal{T}')$  para cada  $A$  conexo en  $(X, \mathcal{T})$ . ¿Es  $f$  continua?