Análisis Matemático II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Ejercicios Voluntarios

Teorema 1.1 (Aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ de manera que $\{P_n\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.*

Demostración. Definimos la sucesión de polinomios de Bernstein como:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Tenemos claramente que $k, n-k \in \mathbb{N}$, por lo que $B_n(f)(x)$ es un polinomio. Veamos ahora que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. Para ello, usaremos el siguiente lema relacionado con el binomio de Newton:

Lema 1.2. *Para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$

Demostración. Demostramos cada uno de los apartados por separado:

1. Usamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \qquad p, q \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

   En concreto, para $p = x$ y $q = 1-x$, se tiene que:

$$1 = (x+(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{1.2}$$

2. Derivando la fórmula del binomio de Newton (Ecuación 1.1) respecto de p, se tiene que:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kp^{k-1}q^{n-k} \Longrightarrow p(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\cdot p^kq^{n-k} \tag{1.3}$$

Derivando ahora la Ecuación 1.3 respecto de p, se tiene que:

$$(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$$

Multiplicando todo por p y diviendo por n, se tiene que:

$$\frac{p}{n} \cdot (p+q)^{n-1} + \frac{p^2}{n}(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \cdot p^k q^{n-k} \tag{1.4}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - 2x \cdot \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k} = \\
&\quad = x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} x^2 - 2x \cdot x(x+1-x)^{n-1} + \frac{x}{n} \cdot (x+1-x)^{n-1} + \frac{x^2}{n}(n-1)(x+1-x)^{n-2} = \\
&\quad = x^2 - 2x^2 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n}(n-1) = -x^2 + \frac{x}{n} + x^2 - \frac{x^2}{n} = \frac{x - x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se han usado las Ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.4.

$\square$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, la acotación entonces la obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \cdot 1 \right| \overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \\
&\overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad triangular y se quitó el valor absoluto ya que $x, 1-x > 0$. Ahora, usamos el Teorema de Heine para afirmar que, como f es continua en $[0,1]$ (cerrado y acotado), es uniformemente continua en $[0,1]$. Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad |x-y| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Fijado $\varepsilon > 0$, consideramos el δ dado por la continuidad uniforme para $\varepsilon/2$. Consideramos el siguiente conjunto:

$$F = \left\{ k \in \{0,\dots,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}$$

Veamos qué ocurre en los puntos de F y en los que no están en F:

- Si $k \in F$, entonces $|x - k/n| < \delta$, por lo que $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$.
- Si $k \notin F$, el razonamiento es algo más complejo. Por el Teorema de Weierstrass, sabemos que f es acotada en $[0,1]$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [0,1]$. Además, como $k \notin F$, se tiene que:

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \geqslant \delta^2 \Longrightarrow \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \geqslant 1$$

Uniendo ambos resultados, se tiene que:

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2M \leqslant 2M \left(\frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \right)$$

Por tanto, en función de si $k \in F$ o no, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k\in F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\
&\qquad + \sum_{k\notin F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k\in F} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\notin F} 2M \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \qquad \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usó el Lema 1.2 y en $(**)$ se usó que la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (x) = x(1-x) = x - x^2$ es una parábola con imagen $g([0,1]) = [0, 1/4]$.

Por tanto, buscamos que $\dfrac{M}{2n\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon\delta^2}{M} \iff n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

Sea $m = E\left(\dfrac{M}{\varepsilon\delta^2}\right) + 1$ el primer natural que cumple la condición. Entonces, para $n \geqslant m$, se tiene que:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [0,1]$$

queda así demostrado que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. $\square$

Definición 1.1. Un monstruo de Weierstrass es una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ningún punto.

Ejercicio. Encontrar un monstruo de Weierstrass y demostrar que lo es.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos\left((n!)^2 x\right)$$

2. Prácticas

2.1. Sucesiones de funciones

Ejercicio 2.1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0, \rho]$ y en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en 0. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

En resumen, tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función f_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{1+nx} \cdot (1+nx) - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2} = \frac{n - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de f_n son:

$$f_n'(x) = 0 \iff \log(1+nx) = 1 \iff 1+nx = e \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{e-1}{n}\right]$, entonces $f_n'(x) > 0$, por lo que f_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, entonces $f_n'(x) < 0$, por lo que f_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho < \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$ (podría haber tomado cualquier valor $x_n \in [0, \rho]$, ya que no afecta al límite).
- Si $n \geqslant \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho \geqslant \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{e-1}{n} \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \dfrac{1}{e}$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Observación. También sirve tomar $x_n = \frac{1}{n}$, y tendríamos que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$.

Para el caso de la semirrecta $[\rho, +\infty[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \frac{e-1}{m}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \frac{e-1}{n}$. Por tanto, tenemos que $[\rho, +\infty[\ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{f_n(p)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

Ejercicio 2.1.2. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, donde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de x:

- Si $|x| < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$1 \leqslant 1 + x^{2n} \leqslant 1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 \leqslant g_n(x) \leqslant \sqrt[n]{2}$$

  Como $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$, por el Lema del Sándwich tenemos que $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| = 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

  Por tanto, $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| > 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}$$

Como $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n(x)\} \to x^2$.

Por tanto, tenemos que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \max\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para la convergencia uniforme, en primer lugar tenemos en cuenta que:

$$\sqrt[n]{1+x^{2n}} \geqslant \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2,\ \sqrt[n]{1} = 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{1+x^{2n}} \geqslant \max\{1, x^2\} = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, buscamos acotar $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x)$. Para ello, fijado $n \in \mathbb{N}$, usaremos la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & t^{1/n} = \sqrt[n]{t} \end{array}$$

Tenemos que es derivable en todo su dominio, y su derivada es:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot t^{n-1/n}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Por el Teorema del valor medio, tenemos que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, con $t_1 < t_2$, existe un $c \in]t_1, t_2[$ tal que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(c) \cdot (t_2 - t_1)$$

Diferenciamos ahora si $|x| \leqslant 1$ o $|x| > 1$:

- Si $|x| \leqslant 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[1, 1+x^{2n}]$, obteniendo que existe un $c \in]1, 1+x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(1) = \varphi_n'(c) \cdot (1+x^{2n}-1) = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}}$$

Como $|x| \leqslant 1$, tenemos que $|x^{2n}| \leqslant 1$; y como $c > 1$ y $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $c^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

- Si $|x| > 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[x^{2n}, 1+x^{2n}]$, obteniendo que existe un $d \in]x^{2n}, 1+x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \varphi_n'(d) \cdot (1+x^{2n}-x^{2n}) = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}}$$

Como $|x| > 1$, tenemos que $|x^{2n}| > 1$, por tanto, $d > 1$. Como también se tiene que $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $d^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados se tiene que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1.3. Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$h_n(x,y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto, $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$, como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\max\{|x|, |y|\} < M$. De esta forma, para todo $(x,y) \in A$, tenemos que:

$$|h_n(x,y)| = \left|\frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2}\right| \leqslant \frac{M^2}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \to 0$, tenemos que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en A.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{h(x_n, y_n)\} \to \frac{1}{3} \neq 0$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.1.4. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si y solo si C está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, distinguimos en función de si C está acotado o no:

- Si C está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C$, tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

- Si C no está acotado, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in C$ tal que $|x_n| > n$. Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:

$$|f_n(x_n)| = \left|\frac{x_n}{n}\right| > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que $\{f_n(x_n)\}$ no puede converger a 0, por lo que se tiene que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en C.

Ejercicio 2.1.5. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty[$, pero no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$. Para $x > 0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = 0$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \delta \in [0, \delta]$.
- Si $n \geqslant \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \delta]$. Veamos lo siguiente:

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1+1} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \{g_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Para el caso de la semirrecta $[\delta, +\infty[$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función g_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$g_n'(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{-4n^3x^5 + 4nx}{(1+n^2x^4)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de g_n son:

$$g_n'(x) = 0 \iff -4n^3x^5 + 4nx = 0 \iff 4xn(-n^2x^4+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, entonces $g_n'(x) > 0$, por lo que g_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, entonces $g_n'(x) < 0$, por lo que g_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{\sqrt{m}}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\delta > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Por tanto, tenemos que $[\delta, +\infty[\ \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, por lo que g_n es decreciente en $[\delta, +\infty[$. De esta forma, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(\delta) \qquad \forall x \in [\delta, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{g_n(\delta)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\underline{\{g_n\} \text{ converge uniformemente en } [\delta, +\infty[}$.

Ejercicio 2.1.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$h_n(x) = n \cos^n x \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $\rho \in \ ]0, \pi/2[$, probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, \pi/2]$, pero no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son positivos. Considerando fijo $x \in \ ]0, \pi/2[$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos^{-n} x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{n-1}} = 0$$

donde he usado que $|\cos x| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, tenemos que:

$$0 \leqslant n \cos^n x \operatorname{sen} x \leqslant n \cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $]0, \pi/2[$.

Sumándole que, en $x = 0, \pi/2$ se tiene que $h_n(x) = 0$, se tiene que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $[0, \pi/2]$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in \ ]0, \pi/2[$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < 1/\rho$ $(\rho < 1/n)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $n \geqslant 1/\rho$ $(\rho \geqslant 1/n)$, entonces $x_n = 1/n \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} e^0\cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite en $(*)$, hemos tomado en primer logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} -\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Para el caso de $[\rho, \pi/2]$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función h_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $h_n \in C^\infty\left(]0, \pi/2[\right)$, estudiamos su derivada:

$$h_n'(x) = n\left(-n\cos^{n-1}x\operatorname{sen}^2 x + \cos^{n+1}x\right) = n\cos^{n-1}x\left(-n\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de h_n son:

$$h_n'(x) = 0 \iff \cos^2 x = n\operatorname{sen}^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$, entonces $h_n'(x) > 0$, por lo que h_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, entonces $h_n'(x) < 0$, por lo que h_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in]0, \pi/2[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, lo cual es posible ya que $\left\{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \to 0$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Por tanto, tenemos que $[\rho, \pi/2] \subset \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, por lo que h_n es decreciente en $[\rho, \pi/2]$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leqslant h_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, \pi/2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{h_n(\rho)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, \pi/2]$.

Ejercicio 2.1.7. Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1+n|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+n|x|} = 0$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C \setminus \{0\}$, tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^2}{1+n|x|}\right| \leqslant \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, en el caso de que se tenga que $0 \in C$, se tiene que $|\varphi_n(0)| = 0 \leqslant \frac{M}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, como se tiene que $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Tomamos $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ de forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

Como $\{\varphi_n(n)\} \to 1 \neq 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1.8. Se considera la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$, con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}$ en los intervalos $[0, r]$, $[r, \rho]$ y $[\rho, +\infty[$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de x:

- Si $|x| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{0}+1} = 0$$

  Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función nula en $[0, 1[$.

- Si $|x| > 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1$$
Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante 1 en $]1,+\infty[$.

- Si $x = 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$
Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante $1/2$ en $\{1\}$.

Por tanto, de forma directa deducimos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $[r,\rho]$, ya que a pesar de ser continua para todo $n \in \mathbb{N}$ (es racional), su función límite no lo es, por lo que no se preserva la continuidad.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $[0,r]$. Tenemos que:
$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant \left|\frac{r^n}{1}\right| = r^n \qquad \forall x \in [0,r],\ \forall n \in \mathbb{N}$$
donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant r < 1$, y por tanto $x^n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $\{r^n\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[0,r]$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho,+\infty[$. Tenemos que:
$$|\varphi_n(x) - 1| = \left|\frac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \left|\frac{-1}{x^n}\right| = \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{\rho^n} \qquad \forall x \in [\rho,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
donde he empleado que $x \geqslant \rho > 1$, y por tanto $x^n \geqslant \rho^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\left\{\frac{1}{\rho^n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 1 en $[\rho,+\infty[$.

Ejercicio 2.1.9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida como:
$$f_n(x) = x - x^n \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in [0,1[$, tenemos:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - x^n = x$$

Fijado $x = 1$, tenemos que:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la continuidad de f en $[0,1]$:
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$$
Por tanto, f no es continua en 1. No obstante, f_n sí es continua en 1 para todo $n \in \mathbb{N}$ (es un polinomio). Por tanto, se tiene que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,1]$.

Ejercicio 2.1.10. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $\mathbb{R}_0^+$ y en $[0,\rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Además, tenemos que $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$. Consideramos la sucesión $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$ de forma que:

$$f_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n(n)\} \to 1/2 \neq 0$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[0,\rho]$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n}\right| \leqslant \frac{\rho}{n} \qquad \forall x \in [0,\rho],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant \rho$. Entonces, como $\left\{\frac{\rho}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[0,\rho]$.

Ejercicio 2.1.11. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[\rho,\infty[$ y en $[0,\rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$, consideramos la sucesión dada por:

- Si $n < 1/\rho$ $(\rho < 1/n)$, entonces $x_n = \rho \in [0,\rho]$.
- Si $n \geqslant 1/\rho$ $(\rho \geqslant 1/n)$, entonces $x_n = 1/n \in [0,\rho]$.

Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \neq 0$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho, +\infty[$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{1 + nx}\right| \leqslant \frac{1}{1 + nx} \leqslant \frac{1}{1 + n\rho} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $x \geqslant \rho$. Entonces, como sabemos que $\left\{\frac{1}{1+n\rho}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, +\infty[$.

2.2. Series de funciones

Ejercicio 2.2.1. .