

Variable Compleja

Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 7 de Mayo de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω . Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\int_{C(\pi,1)} g(z) dz$:

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto ze^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos).

1. [1.5 puntos] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3} dz$$

2. [1.5 puntos] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.
3. [1.5 puntos Extra] Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (4 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω . Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\int_{C(\pi,1)} g(z) dz$:

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{aligned}$$

Sea $z \in \Omega$, por lo que $\operatorname{Re} z > 1$, tenemos que:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{|e^{z \log n}|} = \frac{1}{e^{\operatorname{Re}(z \log n)}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \operatorname{Re} z}} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$$

Por tratarse de una serie de Riemman con $\alpha = \operatorname{Re} z > 1$, la serie de término general $\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ es convergente, y por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente.

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto ze^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos).

1. [1.5 puntos] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3} dz$$

2. [1.5 puntos] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.
3. [1.5 puntos Extra] Probar que, de hecho, $f = g$.