Probabilidad

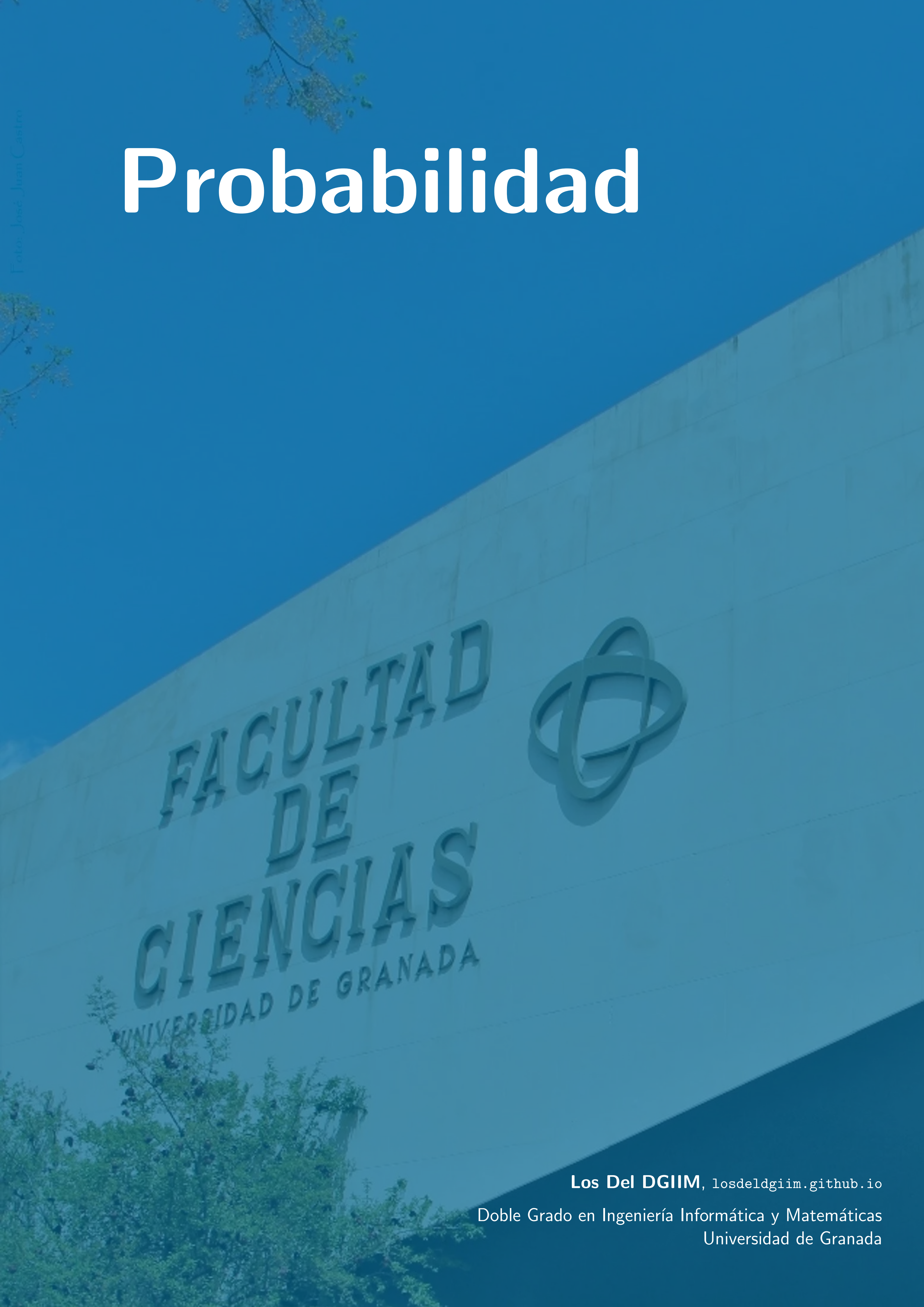

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

0. Introducción **5**

1. Distribuciones de Probabilidad Continua **7**
1.1. Distribución Uniforme Continua 7
1.2. Distribución Normal 10
1.2.1. Aproximaciones 15
1.3. Distribución Exponencial 16
1.3.1. Relación con la Distribución Poisson 19
1.4. Distribución de Erlang 20
1.5. Distribución Gamma 21
1.5.1. Función Gamma 21
1.5.2. Distribución Gamma 22
1.6. Distribución Beta 24
1.6.1. Función Beta 25
1.6.2. Distribución Beta 25

2. Vectores Aleatorios **29**
2.1. Clasificación de vectores aleatorios 31
2.1.1. Vectores aleatorios discretos 32
2.1.2. Vectores aleatorios continuos 34
2.2. Distribuciones marginales 35
2.3. Distribuciones condicionadas 36

3. Relaciones de problemas **39**
3.0. Introducción 39
3.1. Distribuciones de Probabilidad Continua 52
3.2. Vectores Aleatorios 66

0. Introducción

En la asignatura de Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad se presentaron los conceptos más importantes de Probabilidad unidimensional, junto con diversos ejemplos de distribuciones de variables aleatorias discretas.

Este primer tema es un repaso de lo más importante de dicha asignatura, haciendo especial hincapié en las mencionadas distribuciones discretas. Se recomienda al lector por tanto que se diriga a los apuntes de dicha asignatura, revisando así estos conceptos.

1. Distribuciones de Probabilidad Continua

En el presente capítulo, se estudiarán las distribuciones de probabilidad continua más importantes. Al igual que en la asignatura de EDIP se vieron para variables aleatorias discretas, en este tema se presentarán las más relevantes para variables aleatorias continuas.

1.1. Distribución Uniforme Continua

Definición 1.1 (Distribución Uniforme Continua)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, si su función de densidad toma un valor constante en dicho intervalo, siendo nula fuera de él. Lo denotaremos como $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Proposición 1.1. *Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Entonces, se tiene que:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} \end{array}$$

Demostración. Sea f la función de densidad de X. Para que sea una función de densidad, debe integrar 1 en todo $\mathbb{R}$. Como esta es nula fuera de $[a, b]$, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 1$$

Como f es constante en $[a, b]$, sea entonces $f(x) = k$ para $x \in [a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k(b-a) = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Por tanto, la función de densidad de X es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

□

Proposición 1.2. *Sea $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, entonces su función de distribución es:*

$$\begin{array}{rccl} F_X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases} \end{array}$$

Demostración. Tenemos que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

□

Como consecuencia inmediata a la proposición anterior, vemos como definición alternativa que, si X es una variable aleatoria continua tal que $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, entonces se tiene que la probabilidad de que X tome un valor en un intervalo $[c,d]$, con $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, es directamente proporcional a la longitud del intervalo.

Proposición 1.3. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Su función generatriz de momentos es:*

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a)t} \qquad t \neq 0$$

Para $t = 0$, $M_X(0) = 1$.

Demostración. Veamos en primer lugar el caso $t = 0$. Aunque ya esté demostrado en el temario de EDIP, esto es una propiedad general de las funciones generatrices de momentos, ya que:

$$M_X(0) = E\left[e^{0X}\right] = E[1] = 1$$

Para $t \neq 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}\ dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\ dx = \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t} \end{aligned}$$

□

Calculemos ahora los momentos de una variable aleatoria X tal que $X \sim \mathcal{U}(a,b)$.

Proposición 1.4. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Entonces, su momento no centrado de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es:*

$$m_k = E[X^k] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
m_k = E[X^k] &= \int_a^b x^k \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^k\, dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia, tenemos que:

$$m_1 = E[X] = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Proposición 1.5. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Entonces, su momento centrado de orden $k \in \mathbb{N}$ es:*

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \dfrac{(b-a)^k}{(k+1)2^k} & k \text{ par} \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mu_k &= E[(X-m_1)^k] = E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^k\right] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k \frac{1}{b-a}\, dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^k dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \\
&= \frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)(b-a)}
\end{aligned}$$

Distinguimos ahora en función de la paridad de k:

- Si k es impar, entonces $\mu_k = 0$.
- Si k es par, entonces $\mu_k = \dfrac{(b-a)^k}{(k+1)2^k}$.

□

Algunos ejemplos de su utilidad son los siguientes:

- La distribución uniforme proporciona una representación adecuada para redondear las diferencias que surgen al medir cantidades físicas entre los valores observados y los reales. Por ejemplo, si el peso de una persona se redondea al kg más cercano, entonces la diferencia entre el peso observado y el real será algún valor entre $-0{,}5$ y $0{,}5$ kg. Es común que el error de redondeo siga entonces una distribución $\mathcal{U}(-0{,}5, 0{,}5)$.
- La generación de números aleatorios en un intervalo $[a,b]$ debe seguir una distribución $\mathcal{U}(a,b)$.

1.2. Distribución Normal

Esta es la distribución de probabilidad más importante en la Teoría de la Probabilidad y la Estadística Matemática.

Definición 1.2 (Distribución Normal)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

donde $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$. Lo denotaremos como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

A pesar de darse como definición, hemos de demostrar que efectivamente es una función de densidad. Para ello, incluimos el siguiente Lema, cuya demostración no se incluye por su complejidad, al requerir de integración en varias variables con cambio a coordenadas polares.

Lema 1.6 (Integral de Gauss)**.** *Sea* $a\mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Usando este lema, podemos demostrar que la función de densidad de la normal es efectivamente una función de densidad.

Demostración. La función f_X debe cumplir las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Esto es directo puesto que el término exponencial siempre es positivo.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} = 1$$

  donde en $(*)$ hemos aplicado la Integral de Gauss con $a = \dfrac{1}{2\sigma^2}$ y $b = -\mu$.

□

Teorema 1.7 (Tipificación de la Normal)**.** *Sea* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *Entonces, la variable aleatoria* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *se dice que es la variable aleatoria tipificada de* X. *Se cumple que:*

1. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2. $P[X \leqslant x] = P\left[Z \leqslant \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right]$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Demostramos cada uno de los puntos:

1. Para esto, hay que emplear el Teorema de Cambio de Variable de variable aleatoria continua a variable aleatoria continua. Tenemos que $Re_X = \mathbb{R}$, y definimos por comodidad la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-\mu}{\sigma} \end{array}$$

Tenemos por tanto que $Z = g(X)$, y como g es biyectiva tenemos que $Re_Z = Re_X = \mathbb{R}$. La inversa de g es:

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \sigma z + \mu \end{array}$$

La función de densidad de Z es, por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(g^{-1}(z))\left|(g^{-1})(z)\right| = f_X(\sigma z + \mu)\cdot\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}e^{-\dfrac{(\sigma z + \cancel{\mu} - \cancel{\mu})^2}{2\sigma^2}}\cdot\cancel{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{z^2}{2}}$$

Por tanto, identificando términos, tenemos que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Para demostrar esto, tenemos que:

$$P[X \leqslant x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dt$$

$$P\left[Z \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} f_Z(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{t^2}{2}}\ dt$$

Resolvamos la primera integral mediante el Cambio de Variable siguiente:

$$\left[\begin{array}{c} t = \sigma u + \mu \\ \dfrac{dt}{du} = \sigma \end{array}\right] \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Cuando } t = -\infty, u = -\infty \\ \text{Cuando } t = x, u = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X \leqslant x] = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dt \overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}e^{-\dfrac{u^2}{2}}\cdot\cancel{\sigma}\ du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{u^2}{2}}\ du = P\left[Z \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$$

donde en $(*)$ hemos empleado el cambio de variable. $\square$

Proposición 1.8. *Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, su función generatriz de momentos es:*

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Demostración. Demostraremos este resultado en dos pasos:

Caso particular Demostramos en primer lugar el caso para la variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$M_Z(t) = E\left[e^{tZ}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tz - \frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2-2tz+t^2-t^2}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}}\,dz = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\,dz$$

Debido a que la integral de una función de densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(t, 1)$ en todo $\mathbb{R}$ es 1, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\,dz = 1$$

Por tanto:

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Caso general Demostramos ahora el caso general para $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tenemos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Longrightarrow X = \sigma Z + \mu$$

que

Por tanto, tenemos que:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t(\sigma Z+\mu)}\right] = E\left[e^{t\sigma Z} e^{t\mu}\right]$$

Puesto que $e^{t\mu}$ es una constante, por la linealidad de la esperanza tenemos:

$$M_X(t) = E\left[e^{t\sigma Z} e^{t\mu}\right] = e^{t\mu} E\left[e^{(t\sigma)Z}\right] = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

□

Una vez ya razonada la función generatriz de momentos, podemos entonces entender por qué los parámetros de la normal son μ y σ^2. Veamos en primer lugar que μ es la esperanza de la variable aleatoria ($E[X]$ se nota también como $\overline{X}$ o μ):

Proposición 1.9. *Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, su esperanza es:*

$$E[X] = \mu$$

Demostración. Tenemos que:

$$E[X] = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\Big|_{t=0} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(\mu + \sigma^2 t\right)\Big|_{t=0} = e^0(\mu + 0) = \mu$$

□

De igual forma, podemos ver que σ^2 es la varianza de la variable aleatoria:

Proposición 1.10. *Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, su varianza es:*

$$\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$$

Demostración. Calculemos en primer lugar $E[X^2]$ con la función generatriz de momentos:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}(\mu + \sigma^2 t)\right]\Big|_{t=0} = \\ &= \left(e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\left(\mu + \sigma^2 t\right)^2 + e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\sigma^2\right)\Big|_{t=0} = e^0(\mu^2) + e^0\sigma^2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Tenemos por tanto, usando que $E[X] = \mu$:

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

□

Una de las propiedades más importantes de la distribución normal es que es simétrica respecto a su media.

Proposición 1.11. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, es simétrica respecto a su media, es decir:*

$$P[X \leqslant \mu - x] = P[X \geqslant \mu + x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Para probar esto, probaremos que su función de densidad es simétrica respecto a su media. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f_X(\mu - x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{((\mu - x) - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(-x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{((\mu + x) - \mu)^2}{2\sigma^2}} = f_X(\mu + x) \end{aligned}$$

Veamos ahora lo pedido. Como f_X es una función de densidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X \geqslant \mu + x] &= 1 - P[X \leqslant \mu + x] = 1 - \int_{-\infty}^{\mu + x} f_X(t)\ dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt - \int_{-\infty}^{\mu + x} f_X(t)\ dt = \int_{\mu + x}^{+\infty} f_X(t)\ dt \end{aligned}$$

donde podemos restar las integrales puesto que todas ellas son convergentes. Aplicamos ahora el cambio de variable $t = \mu + u$:

$$\left[\begin{array}{c} t = \mu + u \\ \dfrac{dt}{du} = 1 \end{array}\right] \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{u \to x} t = \mu + x \\ \lim\limits_{u \to \infty} t = +\infty \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X \geqslant \mu + x] = \int_{\mu+x}^{+\infty} f_X(t)\ dt = \int_{x}^{\infty} f_X(\mu+u)\ du = \int_{x}^{\infty} f_X(\mu-u)\ du$$

Notemos que este primer cambio de variable ha sido esencial para poder aplicar la simetría. Aplicamos ahora el cambio de variable $u = -v + \mu$:

$$\left[\begin{array}{c} u = -v + \mu \\ \dfrac{du}{dv} = -1 \end{array}\right] \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{v \to \mu - x} t = x \\ \lim\limits_{v \to -\infty} t = +\infty \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X \geqslant \mu + x] &= \int_{x}^{\infty} f_X(\mu-u)\ du = -\int_{\mu-x}^{-\infty} f_X(v)\ dv = \int_{-\infty}^{\mu-x} f_X(v)\ dv = \\ &= P[X \leqslant \mu - x] \end{aligned}$$

Notemos que, de forma intuitiva, lo que hacemos con el primer cambio de variable es “llevarlo al eje de simetría”, y en ese eje aplicamos la simetría y “deshacemos” el cambio hecho anteriormente. □

Otra propieda importante de la distribución normal es que la media, mediana y moda coincide.

Corolario 1.11.1. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces:*

$$\mu = E[X] = Me[X] = Mo[X]$$

Demostración. Calculemos por separado ambos valores:

Cálculo de la Mediana Sabiendo que la distribución es simétrica respecto a su media, veamos que $P[X \leqslant \mu] = P[X \geqslant \mu] = 1/2$.

La primera igualdad es directa, puesto que $P[X \leqslant \mu] = P[X \geqslant \mu]$ por ser simétrica respecto de μ. Posteriormente, tenemos que:

$$P[X \geqslant \mu] = 1 - P[X \leqslant \mu] = 1 - P[X \geqslant \mu] \Longrightarrow P[X \geqslant \mu] = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\mu = Me[X]$.

Cálculo de la Moda Es el máximo absoluto de la función de densidad. Calculémoslo mediante el estudio de la primera derivada:

$$f'_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = \mu$$

Por tanto, vemos que el único candidato a extremo relativo es μ. Además, vemos que f'_X es creciente para $x < \mu$ y decreciente para $x > \mu$, de lo que deducimos que μ es un máximo absoluto. Por tanto, $\mu = Mo[X]$. □

Teorema 1.12 (Regla de la Probabilidad Normal). *Sea X una variable aleatoria continua tal que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces:*

1. $P[\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma] \approx 0{,}6826$
2. $P[\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma] \approx 0{,}9544$
3. $P[\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma] \approx 0{,}9974$

Demostración. Vamos a demostrar el primer apartado, siendo los demás análogos.

$$\begin{aligned}
P[\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma] &= P\left[\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right] = P[-1 \leqslant Z \leqslant 1] = \\
&= P[Z \leqslant 1] - P[Z \leqslant -1] = P[Z \leqslant 1] - P[Z \geqslant 1] = \\
&= 2P[Z \leqslant 1] - 1 \approx 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \approx 0{,}6826
\end{aligned}$$

donde Z representa la variable aleatoria tipificada de X y, al terminar, hemos consultado los valores en la tabla de la distribución normal estándar. □

Su gráfica es ampliamente conocida y tiene forma de campana, como podemos ver en la Figura 1.1.

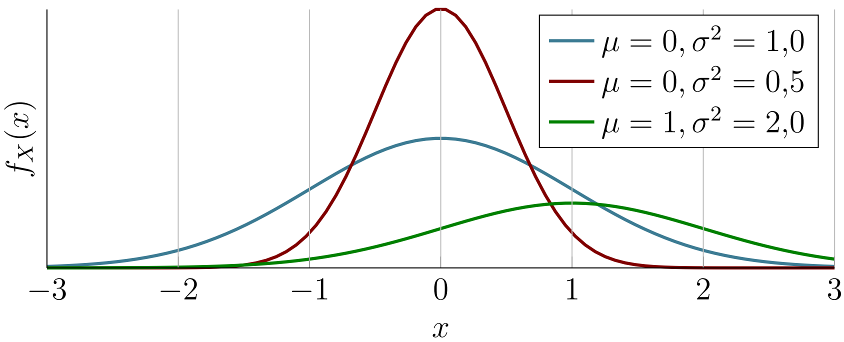

Figura 1.1: Función de densidad de una v. a. con distribución normal.

1.2.1. Aproximaciones

La distribución normal es una de las más importantes en la Estadística, y es común que se utilice para aproximar otras distribuciones. Esto se debe a que la distribución normal es una de las más sencillas de trabajar. En esta sección estudiaremos algunas de estas aproximaciones.

Observación. Notemos que estas aproximaciones solo tienen sentido hoy en día histórico o docente, ya que actualmente se dispone de herramientas computacionales que permiten trabajar con cualquier distribución sin necesidad de aproximarla. En el pasado, no obstante, estas aproximaciones eran muy útiles al no existir dichas herramientas. Igual ocurre en el ámbito docente actualmente.

Proposición 1.13 (Aproximación de la Binomial por la Normal). *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim B(n, p)$. Entonces, si n es suficientemente grande y p*

no está muy cerca de 0 o 1, se tiene que X se puede aproximar por una distribución normal con parámetros $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$. Es decir:

$$X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

Empíricamente se ha comprobado que esta aproximación es buena si $n \geqslant 30$ y $0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$.

Proposición 1.14 (Aproximación de la Poisson por la Normal)**.** *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim P(\lambda)$. Entonces, si λ es suficientemente grande, se tiene que X se puede aproximar por una distribución normal con parámetros $\mu = \lambda$ y $\sigma^2 = \lambda$. Es decir:*

$$X \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

Empíricamente se ha comprobado que esta aproximación es buena si $\lambda \geqslant 10$.

Corrección por Continuidad

Notemos que en muchos casos, como en las dos aproximaciones anteriores, se trata de aproximar una variable aleatoria discreta por una continua. En estos casos, es posible caer en el siguiente error. Supongamos X una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial, y sea x_i un valor de la variable aleatoria con $P[X = x_i] > 0$. Al aproximarlo por una normal, se tendría que $P[X = x_i] = 0$, ya que la normal es continua. Esto es incoherente, por lo que se introduce una *corrección por continuidad*.

Esta corrección por continuidad siempre se realiza sumando o restando 0.5 (Este valor se ha establecido así porque, empíricamente, se ha comprobado que mejora la aproximación.) a los extremos de la desigualdad (según convenga). Lo que buscaremos es cubrir los valores de la variable aleatoria discreta en un intervalo de la variable aleatoria continua. Veamos algunos ejemplos:

- Para aproximar $P[X = x_i]$ en la binomial, se calculará con la expresión dada por $P[x_i - 0{,}5 \leqslant X \leqslant x_i + 0{,}5]$ en la normal.
- Para aproximar $P[X \leqslant x_i]$ en la binomial, se calculará $P[X \leqslant x_i + 0{,}5]$ en la normal.
- Para aproximar $P[X \geqslant x_i]$ en la binomial, se calculará $P[X \geqslant x_i - 0{,}5]$ en la normal.

1.3. Distribución Exponencial

Definición 1.3 (Distribución Exponencial)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Lo denotaremos como $X \sim \exp(\lambda)$.

Comprobemos ahora que efectivamente es una función de densidad.

Demostración. La función de densidad debe cumplir las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Esto es directo puesto que el término exponencial siempre es positivo.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 1$$

□

Veamos algunas aplicaciones de esta distribución:

- La distribución exponencial se utiliza para modelar el tiempo aleatorio entre dos fallos consecutivos en *fiabilidad* o entre dos llegadas consecutivas en *teoría de colas*.
- También se aplica en la modelización de tiempos aleatorios de supervivencia (*Análisis de Supervivencia*).
- En general, X suele representar un tiempo aleatorio transcurrido entre dos sucesos, que se producen de forma aleatoria y consecutiva en el tiempo. Dichos sucesos se contabilizan mediante un proceso de Poisson homogéneo. El parámetro λ representa la razón de ocurrencia de dichos sucesos, que en este caso es constante.

Proposición 1.15. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \exp(\lambda)$. Entonces, su función de distribución es:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Demostración. Distinguimos dos casos:

- Si $x < 0$, entonces $F_X(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, entonces:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\ dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\ dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-e^{-\lambda x} + 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}$$

□

Proposición 1.16. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \exp(\lambda)$. Su función generatriz de momentos es:*

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad si\ t < \lambda$$

Demostración. Tenemos que:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\ dx = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x}\ dx = \left[\frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^\infty$$

Para que la integral sea convergente, necesitamos que $t-\lambda<0$, es decir, $t<\lambda$. Tenemos entonces:

$$M_X(t) = \left[\frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^\infty = 0 - \frac{\lambda e^0}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

□

Proposición 1.17. *Sea X una variable aleatoria tal que $X\sim\exp(\lambda)$. Entonces, sus momentos no centrados de orden $k\in\mathbb{N}$ son:*

$$E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Demostración. Demostramos por inducción sobre k que:

$$\frac{d^k}{dt^k}M_X(t) = \frac{k!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}}$$

- Caso base: $k=1$.

$$\frac{d}{dt}M_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} = \frac{1!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{1+1}}$$

- Supuesto cierto para k, demostramos para $k+1$:

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}M_X(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k}{dt^k}M_X(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{k!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}}\right) = \frac{k!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{2k+2}}\cdot(k+1)(\lambda-t)^k = \\ &= \frac{(k+1)k!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{k+2}} = \frac{(k+1)!\cdot\lambda}{(\lambda-t)^{k+2}}\end{aligned}$$

Por tanto, una vez demostrado este resultado, tenemos que:

$$E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{k!\cdot\lambda}{(\lambda-0)^{k+1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

□

Como consecuencia, tenemos que:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}[X] = E[X^2]-E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Proposición 1.18 (Falta de memoria)**.** *Sea X una variable aleatoria tal que $X\sim\exp(\lambda)$. Entonces, se cumple la propiedad de falta de memoria:*

$$P(X\geqslant t+s\mid X\geqslant s) = P(X\geqslant t) \qquad \forall t,s\in\mathbb{R}^+$$

Demostración. Tenemos que:

$$P(X \geqslant t+s \mid X \geqslant s) = \frac{P(X \geqslant t+s, X \geqslant s)}{P(X \geqslant s)} = \frac{P(X \geqslant t+s)}{P(X \geqslant s)} \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \overset{(*)}{=} P(X \geqslant t)$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

□

La gráfica de la función de densidad de la exponencial es decreciente y asintótica al eje de abscisas, como podemos ver en la Figura 1.2.

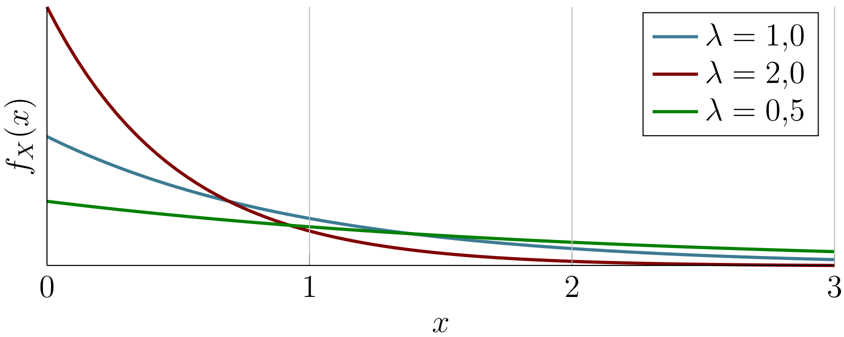

Figura 1.2: Función de densidad de una v. a. con distribución exponencial.

1.3.1. Relación con la Distribución Poisson

La distribución exponencial está estrechamente relacionada con la distribución de Poisson.

- Sea Y una variable aleatoria que indica el número de sucesos aleatorios que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t cuando la razón de ocurrencia de dichos sucesos es λ. Entonces, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

- Sea X una variable aleatoria que indica el tiempo que transcurre hasta que se produce el primer suceso aleatorio, o bien el tiempo que transcurre entre dos sucesos consecutivos, cuando la razón de ocurrencia de dichos sucesos es λ. Entonces, $X \sim \exp(\lambda)$.

Su relación es la siguiente:

$$P[Y = 0] = e^{-\lambda t} = P[X \geqslant t] = 1 - P[X < t] = 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

Esto es coherente, ya que la probabilidad de que no se produzca ningún suceso en un intervalo de tiempo de longitud t ($P[Y = 0]$) es la misma que la probabilidad de que el tiempo que transcurra hasta que se produzca el primer suceso sea mayor que t ($P[X \geqslant t]$).

1.4. Distribución de Erlang

Definición 1.4 (Distribución de Erlang)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución de Erlang con parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si modela el tiempo que transcurre hasta que se producen n sucesos aleatorios consecutivos, cuando la razón de ocurrencia de dichos sucesos es λ. Lo denotaremos como $X \sim \mathcal{E}(n, \lambda)$.

Observación. La distribución de Erlang es una generalización de la distribución exponencial. En efecto, si $n = 1$, entonces la distribución de Erlang se reduce a la distribución exponencial.

Proposición 1.19. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{E}(n, \lambda)$. Entonces, su función de densidad es:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Demostración. La función de densidad debe cumplir las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Esto es directo puesto que el término exponencial siempre es positivo.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

  Para calcular la última integral, realizamos inducción sobre n para demostrar que:

  $$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  - Caso base: $n = 1$.

    $$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n+1$:

    $$\int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x}\, dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = x^n & v'(x) = e^{-\lambda x} \\ u'(x) = nx^{n-1} & v(x) = -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{array} \right] =$$
    $$= \left[-\frac{x^n e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{\lambda} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx \overset{(*)}{=} \frac{n}{\lambda} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^n} = 1$$

□

Proposición 1.20. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{E}(n, \lambda)$. Entonces, su función generatriz de momentos es:*

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \qquad \text{si } t < \lambda$$

Demostración. Tenemos que:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{(t-\lambda)x}\,dx$$

Mediante una inducción análoga a la realizada en la demostración anterior, podemos demostrar (asumiendo que $t < \lambda$) que:

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{(t-\lambda)x}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(\lambda - t)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M_X(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{(\lambda - t)^n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

□

1.5. Distribución Gamma

1.5.1. Función Gamma

Previamente al estudio de la distribución Gamma, vamos a estudiar la función Gamma, que es la función que da nombre a la distribución. Esta es:

$$\begin{array}{rccl} \Gamma: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

Algunas propiedades son:

1. $\Gamma(1) = 1$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Mediante integración por partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt = \left[\begin{array}{cc} u(t) = t^x & v'(t) = e^{-t} \\ u'(t) = xt^{x-1} & v(t) = -e^{-t} \end{array}\right] = \\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

3. $\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

   Se deduce directamente de las dos propiedades anteriores.

4. Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t}\ dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$.

   Hacemos el cambio de variable $t = {}^u/_\lambda$:

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t}\ dt = \left[\begin{array}{c} t = {}^u/_\lambda \\ \frac{dt}{du} = {}^1/_\lambda \end{array}\right] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{x-1} e^{-u}\ \frac{du}{\lambda} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^x}\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\ du = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$$

5. $\Gamma\left({}^1/_2\right) = \sqrt{\pi}$.

$$\Gamma\left({}^1/_2\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\ dt = \left[\begin{array}{c} t = {}^{u^2}/_2 \\ {}^{dt}/_{du} = u \end{array}\right] = \int_0^\infty \sqrt{2}\cdot u^{-1}\cdot e^{-u^2/2}\cdot u\ du =$$
$$= \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\ du$$

   Como la función $x \mapsto e^{-x^2}$ es par, tenemos que:

$$\Gamma\left({}^1/_2\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\ du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}\ du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}\ du =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}\ du = \sqrt{\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\ du \overset{(*)}{=} \sqrt{\pi}$$

   donde en $(*)$ hemos usado que el integrando es la función de densidad de una distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

1.5.2. Distribución Gamma

Definición 1.5 (Distribución Gamma)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución Gamma con parámetros $u, \lambda \in \mathbb{R}^+$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^u}{\Gamma(u)}x^{u-1}e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Lo denotaremos como $X \sim \Gamma(u,\lambda)$.

- El parámetro u se conoce como *parámetro de forma.*
- El parámetro λ se conoce como *parámetro de escala.*

Observación. La distribución Gamma es una generalización de la distribución de Erlang. En efecto, si $u \in \mathbb{N}$, entonces la distribución Gamma se reduce a la distribución de Erlang.

Proposición 1.21. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \Gamma(u,\lambda)$. Entonces, su función de densidad cumple las condiciones de una función de densidad.*

Demostración. La función de densidad debe cumplir las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  Esto es directo puesto que el término exponencial siempre es positivo.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}\ dx = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-\lambda x}\ dx \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \cdot \frac{\Gamma(u)}{\lambda^u} = 1$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad 4 de la función Gamma.

□

Proposición 1.22. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \Gamma(u, \lambda)$. Entonces, su función generatriz de momentos es:*

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \qquad \textit{si } t < \lambda$$

Demostración. Tenemos que:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}\ dx = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{(t-\lambda)x}\ dx$$

Usando de nuevo la propiedad 4 de la función Gamma, como $\lambda - t > 0$, tenemos:

$$M_X(t) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \cdot \frac{\Gamma(u)}{(\lambda - t)^u} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u$$

□

Proposición 1.23. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \Gamma(u, \lambda)$. Entonces, sus momentos no centrados de orden $k \in \mathbb{N}$ son:*

$$E[X^k] = \frac{\Gamma(u+k)}{\lambda^k\ \Gamma(u)}$$

Demostración. Hay dos maneras de demostrar este resultado:

Opción 1 Usar la función generatriz de momentos.

Demostramos por inducción sobre k que:

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{(\lambda - t)^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Caso base: $k = 1$.

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = u \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{u-1} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{u}{\lambda - t}$$

- Supuesto cierto para k, demostramos para $k+1$:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} M_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{(\lambda - t)^k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{u}{\lambda - t} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{(\lambda - t)^k} + \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{(\lambda - t)^{k+1}} \cdot k =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k}(u+i)}{(\lambda - t)^{k+1}}$$

Por tanto, una vez demostrado este resultado, tenemos que:

$$E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - 0}\right)^u \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{(\lambda - 0)^k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(u+i)}{\lambda^k} = \frac{\Gamma(u+k)}{\lambda^k\,\Gamma(u)}$$

Opción 2 Usar la definición de los momentos no centrados.

$$E[X^k] = \int_0^\infty x^k \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^\infty x^{u+k-1} e^{-\lambda x}\, dx \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{\Gamma(u+k)\lambda^u}{\lambda^{u+k}\,\Gamma(u)} = \frac{\Gamma(u+k)}{\lambda^k\,\Gamma(u)}$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad 4 de la función Gamma.

□

Como consecuencia, tenemos que:

$$E[X] = \frac{u}{\lambda} \qquad \text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{u(u+1)}{\lambda^2} - \frac{u^2}{\lambda^2} = \frac{u}{\lambda^2}$$

Tiene muchas aplicaciones en experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas v.a. que siempre son no negativas y cuyas distribuciones son sesgadas a la derecha.

1.6. Distribución Beta

Previamente al estudio de la distribución Beta, vamos a introducir la función Beta, que es la función que da nombre a la distribución.

1.6.1. Función Beta

Definición 1.6 (Función Beta)**.** La función Beta es una función definida como:

$$\begin{array}{rrcl} \beta: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (p,q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \end{array}$$

Algunas propiedades son:

1. Es simétrica. Es decir, $\forall p, q \in \mathbb{R}^+$, se cumple que $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.

$$\begin{aligned} \beta(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \left[\begin{array}{c} t = 1-u \\ dt = -du \end{array}\right] = -\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,du = \\ &= \int_0^1 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,du = \beta(q,p) \end{aligned}$$

2. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

   Esta demostración no se incluye por ser requerir de integración en varias variables, siendo por tanto de mayor complejidad.

1.6.2. Distribución Beta

Definición 1.7 (Distribución Beta)**.** Una variable aleatoria continua X sigue una distribución Beta con parámetros $p, q \in \mathbb{R}^+$, si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Lo denotaremos como $X \sim \beta(p,q)$.

Comprobemos que la función de densidad cumple las condiciones de una función de densidad.

Demostración. La función de densidad debe cumplir las siguientes propiedades:

- $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Esto es directo puesto que los términos x^{p-1}, $(1-x)^{q-1}$ y $\beta(p,q)$ siempre son positivos.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \\ &= \frac{1}{\beta(p,q)} \cdot \beta(p,q) = 1 \end{aligned}$$

□

Proposición 1.24 (Simetría). *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \beta(p,q)$. Entonces, $1-X \sim \beta(q,p)$.*

Demostración. Calculemos la función de densidad de $Y = 1-X$ usando el Teorema de Cambio de Variable:

$$P[Y=y] = P[X=1-y] = \frac{1}{\beta(p,q)}(1-y)^{p-1}y^{q-1} = \frac{1}{\beta(q,p)}y^{q-1}(1-y)^{p-1}$$

Tenemos por tanto que $1-X \sim \beta(q,p)$. □

Proposición 1.25. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \beta(p,q)$. Entonces, sus momentos no centrados de orden $k \in \mathbb{N}$ son:*

$$E[X^k] = \frac{\beta(p+k,q)}{\beta(p,q)}$$

Demostración. Usamos la propiedad de la función Beta que relaciona la función Beta con la función Gamma:

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \int_0^1 x^k \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{1}{\beta(p,q)}\int_0^1 x^{p+k-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \\ &= \frac{\beta(p+k,q)}{\beta(p,q)} \end{aligned}$$

□

Como consecuencia, tenemos que:

$$E[X] = \frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p}{p+q}$$

Para la varianza tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.26. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \beta(p,q)$. Entonces, su varianza es:*

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{\beta(p+2,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} \\ \mathrm{Var}[X] &= E[X^2]-E[X]^2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{p(p+1)(p+q)-p^2(p+q+1)}{(p+q)^2(p+q+1)} = \\ &= \frac{p(p+q)\left[p+1-p\right]-p^2}{(p+q)^2(p+q+1)} = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \end{aligned}$$

□

Respecto a la forma que toma la función de densidad de la distribución Beta, podemos ver que toma formas muy variadas en función de los valores de los parámetros p y q. Esto es muy útil para modelar situaciones muy diversas. Tenemos los siguientes ejemplos:

- Si $p = q$, entonces la función de densidad es simétrica respecto a $x = 1/2$.
- Si $p = q = 1$, entonces $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- Si $p < q$, entonces la función de densidad es asimétrica a la derecha, y viceversa.
- Si $p < 1$ y $q \geqslant 1$, es decreciente y cóncava, mientras que si $p \geqslant 1$ y $q < 1$, es creciente y convexa.
- Si $p, q > 1$, entonces tiene solo un máximo.
- Si $p, q < 1$, entonces tiene solo un mínimo.

Por tanto, como hemos descrito, puede tomar formas muy diversas.

2. Vectores Aleatorios

Hasta ahora, hemos estudiado variable aleatoria unidimensional. En este capítulo, vamos a estudiar variables aleatorias multidimensionales, es decir, vectores aleatorios. Para ello, al igual que como hicimos con las variables aleatorias unidimensionales, hemos de definir en primer lugar la $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n. La $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, notada por $\mathcal{B}^n$, es la $\sigma-$álgebra generada por todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$.

En particular, en Análisis Matemático II vimos que esta $\sigma-$álgebra está formada por los intervalos:

$$]-\infty, x] :=]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_n], \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos ahora el equivalente a variable aleatoria en el caso multidimensional.

Definición 2.2 (Vector aleatorio)**.** Un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se define como una función medible:

$$X \ : \ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

tal que se cumple que:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Es decir:

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leqslant x_1, \ldots, X_n(\omega) \leqslant x_n\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, considerando cada una de las componentes por separado, como cada componente de una función medible es medible, se tiene la siguiente caracterización de forma directa.

Teorema 2.1. *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Entonces:*

$$X \text{ es un vector aleatorio} \iff X_i \text{ es una variable aleatoria } \forall i = 1, \ldots, n.$$

Introducimos ahora la función de distribución de un vector aleatorio, que será el equivalente a función de distribución (o función masa de probabilidad) en el caso unidimensional.

Definición 2.3 (Distribución de probabilidad)**.** Sea X un vector aleatorio. La distribución de probabilidad de X es la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$\begin{array}{rrcl} P_X : & \mathcal{B}^n & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}^n. \end{array}$$

Notación. Al igual que en el caso unidimensional, dado $B \in \mathcal{B}^n$, tenemos:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Por tanto, denotaremos $P_X(B)$ por $P[X \in B]$.

Proposición 2.2. *Sea X un vector aleatorio. Entonces, la distribución P_X es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.*

Demostración. Veamos que se cumplen las tres propiedades de la Axiomática de Kolmogorov:

1. No negatividad: $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geqslant 0, \qquad \forall B \in \mathcal{B}^n$ ya que P es una medida de probabilidad.
2. Suceso seguro: $P_X(\mathbb{R}^n) = P(X^{-1}(\mathbb{R}^n)) = P(\Omega) = 1$.
3. $\sigma-$aditividad: Sean $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}^n$ disjuntos dos a dos. Entonces, como $X^{-1}(B_1), X^{-1}(B_2), \ldots$ son disjuntos dos a dos, se tiene:

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right) \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i).$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad de $\sigma-$aditividad de la medida de probabilidad P.

□

Así, tenemos que todo vector aleatorio X transforma el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$.

Al igual que en el caso unidimensional, definimos la función de distribución de un vector aleatorio a partir de la distribución de probabilidad.

Definición 2.4 (Función de distribución)**.** Sea X un vector aleatorio. La función de distribución de X es la función:

$$\begin{array}{rccl} F_X: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & F_X(x) = P[X \leqslant x] = P_X(]-\infty, x]) \end{array}$$

Si $X = (X_1, \ldots, X_n)$, entonces denotaremos:

$$F_X(x) = P[X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n].$$

Algunas de las propiedades que cumple esta son:

1. Es monótona no decreciente en cada una de sus componentes. Es decir, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ y $\forall\ x_1, \ldots, x_{i-i}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$x_i \leqslant x_i' \Longrightarrow F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

2. Es continua por la derecha en cada una de sus componentes. Es decir, $\forall\ i = 1, \dots, n$ y $\forall\ x_1, \dots, x_{i-i}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\forall x_i \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lim_{x \to x_i^+} F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

3. $\forall i = 1, \dots, n$ y $\forall x_1, \dots, x_{i-i}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$$

4. Tenemos que:

$$\lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ i=1,\dots,n}} F_X(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

5. $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
&F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n + \varepsilon_n) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \dots, x_n + \varepsilon_n) + \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \dots \\
&\qquad\qquad \dots, x_{j-1} + \varepsilon_{j-1}, x_j, x_{j+1} + \varepsilon_{j+1}, \dots, x_n + \varepsilon_n) + \\
&\quad + \dots + (-1)^n F_X(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Estas propiedades caracterizan la función de distribución de los vectores aleatorios. Es decir, dada una función que cumple estas propiedades, es la función de distribución de un vector aleatorio.

Al igual que ocurría con variables aleatorias unidimensionales, puesto que P_X es una medida de probabilidad, podemos calcular de forma sencilla la probabilidad de intervalos bidimensionales.

- $P[a < X_1 \leqslant b, X_2 \in I] = P[X_1 \leqslant b, X_2 \in I] - P[X_1 \leqslant a, X_2 \in I]$.
- $P[a < X_1 < b, X_2 \in I] = P[X_1 < b, X_2 \in I] - P[X_1 \leqslant a, X_2 \in I]$.
- $P[X_1 \leqslant b, c < X_2 \leqslant d] = P[X_1 \leqslant b, X_2 \leqslant d] - P[X_1 \leqslant b, X_2 \leqslant c]$.
- $P[X_1 \leqslant b, c \leqslant X_2 < d] = P[X_1 \leqslant b, X_2 < d] - P[X_1 \leqslant b, X_2 < c]$.

2.1. Clasificación de vectores aleatorios

Al igual que en el caso unidimensional, podemos clasificar los vectores aleatorios en discretos y continuos. Esto se hace en función de la naturaleza de los valores que toma el vector aleatorio.

Definición 2.5 (Recorrido de un vector aleatorio)**.** Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio. El recorrido de X es el conjunto de valores que toma el vector aleatorio:

$$E_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \omega \in \Omega \text{ tal que } X(\omega) = x\} = Img(X).$$

Usando el recorrido de una variable aleatoria unidiensional, tenemos que:

$$E_X = \prod_{i=1}^{n} E_{X_i}.$$

2.1.1. Vectores aleatorios discretos

Definición 2.6. Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ es discreto si su recorrido es finito o numerable. Es decir,

$$P[X \in E_X] = 1.$$

Veamos ahora la siguiente caracterización de vectores aleatorios discretos.

Teorema 2.3. *Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ es discreto si y solo si cada una de sus componentes X_i es discreta.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X es discreto. Entonces, su recorrido es finito o numerable. Por tanto, el recorrido de cada una de sus componentes también es finito o numerable.

$\Longleftarrow$) Supongamos que cada una de las componentes de X es discreta. Entonces, el recorrido de X es el producto cartesiano de los recorridos de sus componentes, que es finito o numerable.

□

Como en el caso de variables unidimensionales, los vectores de tipo discreto se manejan a partir de su función masa de probabilidad, y el tratamiento de este tipo de vectores es totalmente análogo al de las variables discretas.

Definición 2.7. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto. La función masa de probabilidad de X es la función:

$$\begin{array}{rccl} p_X: & E_X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & p_X(x) = P[X = x] \end{array}$$

Esta satisface:

1. $p_X(x) \geqslant 0$.
2. $\sum\limits_{x \in E_X} p_X(x) = 1$.

La función de distribución de un vector aleatorio discreto se define por tanto como:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \sum_{\substack{t \in E_X \\ t \leqslant x}} P[X = t]$$

Ejemplo. Sea el experimento aleatorio de lanzar un dado, y sean las siguientes variables aleatorias:

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{si sale impar} \\ 1 & \text{si sale par} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} -2 & \text{si sale 1, 2, 3} \\ 0 & \text{si sale 4} \\ 3 & \text{si sale 5, 6} \end{cases}$$

Considerado el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$, se pide:

1. Calcular la función masa de probabilidad de X.

   Tenemos que:

   $$E_{X_1} = \{-1, 1\},$$
   $$E_{X_2} = \{-2, 0, 3\},$$

   Por tanto,

   $$E_X = E_{X_1} \times E_{X_2} = \{(-1,-2), (-1,0), (-1,3), (1,-2), (1,0), (1,3)\}.$$

   Tenemos por tanto que:

   - $P[X = (-1,-2)] = P[\text{sale impar y 1, 2, 3}] = 2/6$.
   - $P[X = (-1,0)] = P[\text{sale impar y 4}] = 0/6 = 0$.
   - $P[X = (-1,3)] = P[\text{sale impar y 5, 6}] = 1/6$.
   - $P[X = (1,-2)] = P[\text{sale par y 1, 2, 3}] = 1/6$.
   - $P[X = (1,0)] = P[\text{sale par y 4}] = \frac{1}{6}$.
   - $P[X = (1,3)] = P[\text{sale par y 5, 6}] = 1/6$.

   Podemos resumir esta información como

$X_1 \backslash X_2$	-2	0	3	
-1	$2/6$	0	$1/6$	
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	

2. Calcular la función de distribución de X.

   Tenemos que:

   $$F_X(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 < -1 \text{ o } x_2 < -2 \\ 2/6 & x_1 \in [-1, 1[\,, x_2 \in [-2, 3[\\ 3/6 & x_1 \in [-1, 1]\,, x_2 \geqslant 3 \\ 3/6 & x_1 \geqslant 1, x_2 \in [-2, 0[\\ 4/6 & x_1 \geqslant 1, x_2 \in [0, 3[\\ 1 & x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 3 \end{cases}$$

3. Calcular $P[X_1 + X_2 \leqslant 1]$.

   En este caso, los valores de $X_1 + X_2$ que cumplen que $X_1 + X_2 \leqslant 1$ son:

$$B = \{(-1,-2), (1,-2), (1,0)\}.$$

   Por tanto,

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 \leqslant 1] &= P[X \in B] = P[X = (-1,-2)] + P[X = (1,-2)] + P[X = (1,0)] = \\ &= {}^2/_6 + {}^1/_6 + {}^1/_6 = {}^4/_6. \end{aligned}$$

2.1.2. Vectores aleatorios continuos

Definición 2.8. Un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ es continuo si existe una función integrable no negativa $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que su función de distribución es:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \ldots, t_n) dt_n \cdots dt_1, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

A la función f_X se le llama función de densidad de probabilidad de X.

Además, si f_X es continua en un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces la función de distribución F_X es derivable en ese punto y se tiene que:

$$\frac{\partial^n F_X}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x) = f_X(x).$$

Esta función f_X, por definición, cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geqslant 0$.
2. Es integrable en $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\ dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) \stackrel{(*)}{=} 1.$$

   donde en $(*)$ hemos usado una de las propiedades de la función de distribución.

La función de densidad determina la función de distribución de un vector aleatorio continuo, y por tanto su distribución de probabilidad.

$$P_X(B) = P[X \in B] = \int_B f_X(x)\ dx, \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Debido a lo estudiado en Análisis Matemático II, sabemos que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto numerable, entonces $P[X \in E] = 0$.

Al igual que en el caso de vectores discretos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sea vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ continuo. Entonces, cada una de sus componentes X_i es continua.*

Demostración. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$, y sea F_{X_i} la función de distribución de X_i. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= P[X_i \leqslant x_i] = P[X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}]. = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x_i} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_i dt_{i-1} \cdots dt_1. = \\
&= \int_{-\infty}^{x_i} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_{i-1} \cdots dt_1 \cdot dt_i
\end{aligned}$$

Definimos por tanto:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_{i-1} \cdots dt_1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\ dt_i.$$

Como f_i es integrable y no negativa, tenemos que es la función de densidad de probabilidad de X_i. Por tanto, X_i es una variable aleatoria continua. □

2.2. Distribuciones marginales

Dado un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$, podemos estudiar las distribuciones de sus componentes por separado. Estas se conocen como distribuciones marginales.

Definición 2.9. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio. La distribución marginal de X_i es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X_i. A la distribución de probabilidad de X se le llama distribución conjunta de X.

Veamos cómo obtener la función de distribución de una variable aleatoria a partir de la función de distribución de un vector aleatorio.

Proposición 2.5. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con función de distribución F_X. Entonces, la función de distribución de X_i es:*

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} F_X(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Demostración. Esta propiedad se deduce de la continuidad de las funciones de probabilidad (Axiomática de Kolmogorov) y del hecho de que:

$$\mathbb{R} = \lim_{t \to \infty}]-\infty, t].$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= P[X_i \leqslant x_i] = P[X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}] \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} P_X\left( ]-\infty, t_1] \times \ldots \times]-\infty, t_{i-i}] \times]-\infty, x_i] \times]-\infty, t_{i+1}] \times \ldots \times]-\infty, t_n] \right) = \\
&= \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} F_X(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n).
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad de continuidad de la función de probabilidad. □

Caso discreto

En el caso de vectores aleatorios discretos, la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria se obtiene a partir de la función de masa de probabilidad del vector aleatorio.

Proposición 2.6. *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio discreto con función de masa de probabilidad p_X. Entonces, la función de masa de probabilidad de X_i es:*

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{\substack{t=(t_1,\ldots,t_n)\in E_X \\ t_i=x_i}} p_X(t).$$

Caso continuo

En el caso de vectores aleatorios continuos, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria se obtiene a partir de la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio.

Proposición 2.7. *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad de probabilidad f_X. Entonces, la función de densidad de probabilidad de X_i es:*

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\ dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

Notemos que esta demostración se ha hecho en el Teorema 2.4.

2.3. Distribuciones condicionadas

Dado un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$, podemos estudiar la distribución de una de sus componentes condicionada a que otra de sus componentes tome un valor concreto.

Caso discreto

Definición 2.10. Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio discreto, X_i una de sus componentes y $x_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $P[X_i = x_i^*] > 0$. La distribución condicionada de $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ a $X_i = x_i^*$ es la distribución con función de masa de probabilidad:

$$\begin{aligned} &P[X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n \mid X_i = x_i^*] = \\ &\quad = \frac{P[X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i^*, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n]}{P[X_i = x_i^*]}, \\ &\quad \forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_X. \end{aligned}$$

Comprobemos que esta definición efectivamente es una función masa de probabilidad.

Demostración.

1. En primer lugar, toma valores no negativos, puesto que es el cociente de dos valores no negativos.
2. Veamos ahora que suma 1. Para ello, por la Proposición 2.6, tenemos que la siguiente sumatoria es la distribución marginal de X_i:

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)| \\ (x_1,\dots,x_{i-1},x_i^*,x_{i+1},\dots,x_n)\in E_X}} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i^*, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n] = P[X_i = x_i^*].$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)| \\ (x_1,\dots,x_{i-1},x_i^*,x_{i+1},\dots,x_n)\in E_X}} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n \mid X_i = x_i^*] = 1$$

□

Caso continuo

Definición 2.11. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio continuo, X_i una de sus componentes y $x_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $f_{X_i}(x_i^*) > 0$. La distribución condicionada de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ a $X_i = x_i^*$ es la distribución con función de densidad de probabilidad:

$$f_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n|X_i=x_i^*}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)}.$$

Comprobemos que efectivamente dicha función se trata de una función de densidad.

Demostración.

1. $f_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n|X_i=x_i^*}$ es no negativa, por ser cociente de funciones de densidad.
2. Es integrable (se deja como ejercicio al lector).
3. Veamos que integra 1:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)} \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{f_{X_i}(x_i^*)}{f_{X_i}(x_i^*)} = 1$$

donde en $(*)$ hemos usado la Proposición 2.7, ya que es la función de densidad de la marginal de X_i.

□

3. Relaciones de problemas

3.0. Introducción

Ejercicio 1. Se estudian las plantas de una determinada zona donde ha atacado un virus. La probabilidad de que cada planta esté contaminada es 0,35.

1. ¿Cuál es el número esperado de plantas contaminadas en 5 analizadas?
   Sea X la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 5 análisis. Como la probabilidad de que una planta esté contaminada es 0,35, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$X \sim B(5, 0{,}35)$$
   En este caso, como nos piden el número esperado de plantas contaminadas, tenemos que calcular la esperanza:
   $$E[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}35 = 1{,}75$$
   Por tanto, y como el número de plantas contaminadas ha de ser un número entero, el número esperado de plantas contaminadas en 5 análisis es 2.

2. Calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas en 9 exámenes.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 9 análisis. De igual forma que en el apartado anterior, sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 9$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$Y \sim B(9, 0{,}35)$$
   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas. Es decir:
   $$P[2 \leqslant Y \leqslant 5] = F_Y(5) - F_Y(1) = P[Y \leqslant 5] - P[Y \leqslant 1] \overset{(*)}{=} 0{,}9464 - 0{,}1211 = 0{,}8253$$
   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución binomial.

3. Hallar la probabilidad de encontrar 4 plantas no contaminadas en 6 análisis.

   Sea Z la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 6 análisis. De igual forma que en los apartados anteriores, sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 6$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$Z \sim B(6, 0{,}35)$$

En este caso, nos piden calcular la probabilidad de encontrar 4 plantas no contaminadas. Es decir, la probabilidad de que 2 plantas estén contaminadas. Es decir:

$$P[Z = 2] = \binom{6}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^4 = 0{,}328$$

Ejercicio 2. Cada vez que una máquina dedicada a la fabricación de comprimidos produce uno, la probabilidad de que sea defectuoso es 0,01.

1. Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de comprimidos correctos en un tubo de 25. Como la probabilidad de que un comprimido sea defectuoso es 0,01, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 25$ y $p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Es decir:

   $$X \sim B(25, 0{,}99)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que en un tubo de 25 comprimidos todos sean buenos. Es decir:

   $$P[X = 25] = \binom{25}{25} \cdot 0{,}99^{25} \cdot 0{,}01^0 \approx 0{,}7778$$

2. Si los tubos se colocan en cajas de 10, ¿cuál es la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso?

   En primer lugar, obtenemos cuál es la probabilidad de que un tubo tenga un comprimido defectuoso. Tenemos que:

   $$P[X = 24] = \binom{25}{24} \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01^1 = \frac{25!}{24!1!} \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01 = 25 \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01 \approx 0{,}1964$$

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de tubos con un comprimido defectuoso en una caja de 10. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 10$ y $p = 0{,}1964$. Es decir:

   $$Y \sim B(10, 0{,}1964)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso. Es decir:

   $$P[Y = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}1964^5 \cdot (1 - 0{,}1964)^5 \approx 0{,}02467$$

Ejercicio 3. Un pescador desea capturar un ejemplar de sardina que se encuentra siempre en una determinada zona del mar con probabilidad 0,15. Hallar la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de:

1. Pescar la sardina buscada.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de peces de especies distintas de la deseada que el pescador tiene que pescar antes de pescar la sardina buscada. Como la probabilidad de que la sardina buscada se encuentre en la zona es 0,15, tenemos que sigue una distribución de probabilidad geométrica con $p = 0{,}15$. Es decir:
   $$X \sim G(0{,}15)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de pescar la sardina buscada. Es decir:

   $$\begin{aligned} P[X = 10] &= P[X \leqslant 10] - P[X \leqslant 9] = (1 - (1 - 0{,}15)^{11}) - (1 - (1 - 0{,}15)^{10}) = \\ &= (1 - 0{,}15)^{10} - (1 - 0{,}15)^{11} = 0{,}85^{10} \cdot (1 - 0{,}85) \approx 0{,}029 \end{aligned}$$

2. Pescar tres ejemplares de la sardina buscada.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de peces de especies distintas de la deseada que el pescador tiene que pescar antes de pescar tres ejemplares de la sardina buscada. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad negativa binomial con $k = 3$ y $p = 0{,}15$. Es decir:

   $$Y \sim BN(3, 0{,}15)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de pescar tres ejemplares de la sardina buscada. Es decir:

   $$\begin{aligned} P[Y = 10] &= \frac{(10 + 3 - 1)!}{10!(3 - 1)!} \cdot (1 - 0{,}15)^{10} \cdot 0{,}15^3 = \frac{12!}{10!2!} \cdot 0{,}85^{10} \cdot 0{,}15^3 = \\ &= \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 0{,}85^{10} \cdot 0{,}15^3 \approx 0{,}0438 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Un científico necesita 5 monos afectados por cierta enfermedad para realizar un experimento. La incidencia de la enfermedad en la población de monos es siempre del 30 %. El científico examinará uno a uno los monos de un gran colectivo, hasta encontrar 5 afectados por la enfermedad.

1. Calcular el número medio de exámenes requeridos.

   Consideraremos como éxito encontrar un mono afectado por la enfermedad. Sea X la variable aleatoria que representa el número de monos sanos que el científico tiene que examinar antes de encontrar 5 afectados. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad negativa binomial con $k = 5$ y $p = 0{,}3$. Es decir:
   $$X \sim BN(5, 0{,}3)$$

   En este caso, nos piden calcular el número medio de exámenes requeridos. Es decir:
   $$5 + E[X] = 5 + \frac{k(1 - p)}{p} = 5 + \frac{35}{3} = 16.\overline{6}$$

Por tanto, se espera que se tengan que examinar 17 monos para encontrar 5 afectados.

2. Calcular la probabilidad de que encuentre 10 monos sanos antes de encontrar los 5 afectados.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X=10] &= \frac{(10+5-1)!}{10!(5-1)!}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10} = \frac{14!}{10!45!}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10} = \\ &= \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10} \approx 0{,}0687 \end{aligned}$$

3. Calcular la probabilidad de que tenga que examinar por lo menos 20 monos.

   Como 5 de ellos serían afectados, se pide la probabilidad de que tenga que examinar al menos 15 monos sanos. Es decir:

$$P[X \geqslant 15] = 1 - P[X \leqslant 14] = 1 - 0{,}3^5 \cdot \sum_{i=0}^{14} \binom{i+4}{4} 0{,}7^i \approx 0{,}2822$$

Ejercicio 5. Se capturan 100 peces de un estanque que contiene 10000. Se les marca con una anilla y se devuelven al agua. Transcurridos unos días se capturan de nuevo 100 peces y se cuentan los anillados.

1. Calcular la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de peces anillados en la segunda captura. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10000$, $N_1 = 100$ y $n = 100$. Es decir:

$$X \sim H(10000, 100, 100)$$

   La probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado es:

$$\begin{aligned} P[X \geqslant 1] &= 1 - P[X=0] = 1 - \frac{\binom{100}{0}\cdot\binom{9900}{100}}{\binom{10000}{100}} = \\ &= 1 - \frac{1\cdot \dfrac{9900!}{100!9800!}}{\dfrac{10000!}{100!9900!}} = 1 - \frac{9900!\cdot 100!\cdot 9900!}{10000!\cdot 100!\cdot 9800!} \end{aligned}$$

   Como podemos ver, calcular dicha probabilidad de esta forma es complicado debido a la cantidad de factoriales que hay que calcular. Por ello, aproximaremos la distribución hipergeométrica a una binomial, tomando $n = 100$ y $p = \dfrac{N_1}{N} = \dfrac{100}{10000} = 0{,}01$. Es decir:

$$X \sim B(100, 0{,}01)$$

Por lo que la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado es:

$$P[X \geqslant 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{100}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{100} \approx 1 - 0{,}366 = 0{,}634$$

2. Calcular el número esperado de peces anillados en la segunda captura.

   El número esperado de peces anillados en la segunda captura es:

$$E[X] = n \cdot \frac{N_1}{N} = 100 \cdot \frac{100}{10000} = 1$$

   Usando la aproximaxión a la binomial, tenemos que:

$$E[X] = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}01 = 1$$

   Efectivamente vemos que el resultado en ambos casos coincide.

Ejercicio 6. Cada página impresa de un libro tiene 40 líneas, y cada línea tiene 75 posiciones de impresión. Se supone que la probabilidad de que en cada posición haya error es $^1/_{6000}$.

1. ¿Cuál es la distribución del número de errores por página?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de errores por página. Tenemos que hay $n = 40 \cdot 75 = 3000$ posiciones de impresión por página; y la probabilidad de que en cada posición haya error es $p = {^1/_{6000}}$. Por lo que sigue una distribución de probabilidad binomial con:

$$X \sim B(3000, {^1/_{6000}})$$

   Tenemos además que X se puede aproximar a una distribución de Poisson con $\lambda = np = 3000 \cdot {^1/_{6000}} = 0{,}5$. Es decir:

$$X \sim \mathcal{P}(0{,}5)$$

2. Calcular la probabilidad de que una página no contenga errores y de que contenga como mínimo 5 errores.

   En primer lugar, calculamos la probabilidad de que una página no contenga errores. Es decir:

$$P[X = 0] = e^{-0{,}5} \cdot \frac{0{,}5^0}{0!} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$$

   Por otro lado, calculamos la probabilidad de que una página contenga como mínimo 5 errores. Es decir:

$$P[X \geqslant 5] = 1 - P[X \leqslant 4] \overset{(*)}{=} 1 - 0{,}998 = 0{,}002$$

   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución de Poisson.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores?

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de páginas sin errores en un capítulo de 20 páginas. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 20$ y $p = 0{,}6065$ (calculada en el apartado anterior). Es decir:
$$Y \sim B(20, 0{,}6065)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores. Es decir:

$$P[Y = 20] = \binom{20}{20} \cdot 0{,}6065^{20} \cdot (1 - 0{,}6065)^0 \approx 4{,}53 \cdot 10^{-5}$$

Ejercicio 7. En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. La probabilidad de que cada unidad sea defectuosa es 0,05.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de unidades correctas inspeccionadas hasta encontrar la segunda defectuosa. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial negativa con $k = 2$ y $p = 0{,}05$. Es decir:
$$X \sim BN(2, 0{,}05)$$

   Como buscamos la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa, hemos de calcular la probabilidad de encontrar 18 unidades no defectuosas antes de encontrar la segunda defectuosa. Es decir:

$$\begin{aligned} P[X = 18] &= \frac{(18 + 2 - 1)!}{18!(2 - 1)!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} = \frac{19!}{18!1!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} = \\ &= 19 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx 0{,}0188 \end{aligned}$$

2. ¿Cuántas unidades deben inspeccionarse por término medio hasta encontrar cuatro defectuosas?

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de unidades correctas inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial negativa con $k = 4$ y $p = 0{,}05$. Es decir:
$$Y \sim BN(4, 0{,}05)$$

   En este caso, nos piden calcular el número medio de unidades que deben inspeccionarse hasta encontrar cuatro defectuosas. Es decir:

$$4 + E[Y] = 4 + \frac{k(1 - p)}{p} = 4 + \frac{4 \cdot 0{,}95}{0{,}05} = 4 + 76 = 80$$

3. Calcular la desviación típica del número de unidades inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas.

   Tenemos que:

$$\mathrm{Var}[Y+4] \overset{(*)}{=} \mathrm{Var}[Y] = \frac{k(1-p)}{p^2} = \frac{4\cdot 0{,}95}{0{,}05^2} = 1520$$

   donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X] \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

   Por tanto:

$$\sigma_{Y+4} = \sqrt{1520} \approx 38{,}98$$

Ejercicio 8. Los números $1,2,3,...,10$ se escriben en diez tarjetas y se colocan en una urna. Las tarjetas se extraen una a una y sin devolución. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. Hay exactamente tres números pares en cinco extracciones.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de números pares en cinco extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N=10$, $N_1=5$ y $n=5$. Es decir:

$$X \sim H(10,5,5)$$

   La probabilidad de que haya exactamente tres números pares en cinco extracciones es:

$$\begin{aligned}P[X=3] &= \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{(5!)^4}{10!(3!)^2(2!)^2} = \frac{5^4\cdot 4^4\cdot 3^4\cdot 2^4}{10!\cdot 3^2\cdot 2^4} = \\ &= \frac{5^4\cdot 3^4\cdot 2^{12}}{5^2\cdot 3^6\cdot 2^{12}\cdot 7} = \frac{5^2}{7\cdot 3^2} = \frac{25}{63} \approx 0{,}3968\end{aligned}$$

2. Se necesitan cinco extracciones para obtener tres números pares.

   Definimos dos sucesos distintos:

   - A: Sacar 2 números pares en las primeras cuatro extracciones.
   - B: Sacar un número par en la quinta extracción.

   Nos piden calcular la probabilidad de que ocurra tanto A como B, es decir, $P(A\cap B)$. Tenemos que:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\mid A)$$

   Calculemos ambas probabilidades por separado:

- Para calcular $P(A)$, sea Y la variable aleatoria que representa el número de números pares en las primeras cuatro extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10$, $N_1 = 5$ y $n = 4$. Es decir:

$$Y \sim H(10, 5, 4)$$

La probabilidad de que haya exactamente dos números pares en las primeras cuatro extracciones es:

$$P(A) = P[Y = 2] = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \approx 0{,}476$$

- Para calcular $P(B \mid A)$, usamos la Regla de Laplace. Como se habrán sacado 2 números pares en las primeras cuatro extracciones, en la quinta extracción habrá 3 números pares de un total de 6 candidatos, es decir:

$$P(B \mid A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Por tanto, la probabilidad de que se necesiten cinco extracciones para obtener tres números pares es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 0{,}476 \cdot 0{,}5 = 0{,}238$$

3. Obtener el número 7 en la cuarta extracción.

Definimos los siguientes sucesos:

- C: No sacar un número 7 en las tres primeras extracciones.
- D: Sacar el número 7 en la cuarta extracción.

Nos piden calcular la probabilidad de que ocurra tanto C como D, es decir, $P(C \cap D)$. Tenemos que:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D \mid C)$$

Calculemos ambas probabilidades por separado:

- Para calcular $P(C)$, sea Z la variable aleatoria que representa el número de extracciones distintas a 7 en las tres primeras extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10$, $N_1 = 9$ y $n = 3$. Es decir:

$$Z \sim H(10, 9, 3)$$

La probabilidad de que no haya un número 7 en las tres primeras extracciones es:

$$P(C) = P[Z = 3] = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{1}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{10}$$

- Para calcular $P(D \mid C)$, usamos la Regla de Laplace. Como no se ha sacado un número 7 en las tres primeras extracciones, en la cuarta extracción habrá un número 7 de un total de 7 candidatos, es decir:
$$P(D \mid C) = \frac{1}{7}$$

Por tanto, la probabilidad de obtener el número 7 en la cuarta extracción es:
$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D \mid C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Ejercicio 9. Supongamos que el número de televisores vendidos en un comercio durante un mes se distribuye según una Poisson de parámetro 10, y que el beneficio neto por unidad es 30 euros.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de televisores vendidos en un mes. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad de Poisson con $\lambda = 10$. Es decir:
$$X \sim \mathcal{P}(10)$$

   Sabemos que el beneficio neto por unidad es de 30 euros, por lo que para obtener un beneficio neto de al menos 360 euros, el comerciante debe vender al menos 12 televisores. Por lo que la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros es:
$$P[X \geqslant 12] = 1 - P[X \leqslant 11] \overset{(*)}{=} 1 - 0{,}6968 = 0{,}3032$$

   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución de Poisson.

2. ¿Cuántos televisores debe tener el comerciante a principio de mes para tener al menos probabilidad 0,95 de satisfacer toda la demanda?

   Se pide el menor valor de $\widehat{x} \in \mathbb{N}$ tal que:
$$P[X \leqslant \widehat{x}] \geqslant 0{,}95$$

   Para resolverlo, buscamos el valor en la tabla de la distribución de Poisson que cumpla la condición. En este caso, el valor que cumple la condición es 15. Por tanto, el comerciante debe tener al menos 15 televisores a principio de mes para tener al menos probabilidad 0,95 de satisfacer toda la demanda.

Ejercicio 10. Sea el experimento de lanzar un dado de 6 caras. Obtener:

1. Función masa de probabilidad. Sea X la variable aleatoria que representa el número de la cara que sale en el dado. El espacio muestral del experimento es:
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Entonces, la función masa de probabilidad de X, notada por $P_X : \Omega \to [0, 1]$, es:
$$P_X(x) = P[X = x] = \frac{1}{6}, \quad x \in \Omega$$

2. Función de distribución.

   La función de distribución de X, notada por $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, es:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{6}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 6 \end{cases}$$

3. Función generatriz de momentos.

   La función generatriz de momentos de X, notada por $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} e^{tx}$$

4. Valor esperado.

   El valor esperado de X, también conocido como la esperanza, es:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P[X = i] = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

   También se podría calcular como la primera derivada de la función generatriz de momentos evaluada en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E[X] = M_X'(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} e^{tx}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} \frac{d}{dt}\left(e^{tx}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} xe^{tx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{7}{2} = 3{,}5 \end{aligned}$$

   Como podemos ver, ambos métodos coinciden.

5. Varianza.

   La varianza de X es:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \approx 2{,}9167$$

6. La distribución de probabilidad que sigue el experimento.

   Tenemos que la variable aleatoria X sigue una distribución uniforme discreta.

$$X \sim \mathcal{U}(1, \ldots, 6)$$

Ejercicio 11. Consideramos la variable aleatoria X que representa el número de caras menos número de cruces obtenidas al lanzar tres monedas. Se pide:

1. Espacio muestral del experimento.

   El espacio muestral del experimento es, representando con C a una cara y X a una cruz:
   $$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$
   Además, tenemos que:
   $$X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$$

2. Función masa de probabilidad.

   Usando la Regla de Laplace, y procesando cada una de las $8 = 2^3$ opciones, tenemos:
   $$\begin{aligned} P[X=-3] = P[X=3] &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \\ P[X=-1] = P[X=1] &= \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

3. Valor esperado.

   El valor esperado de X es:
   $$E[X] = \sum_{x\in\Omega} x \cdot P[X=x] = -3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} - 1\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} = 0$$

4. Varianza.

   Tenemos que:
   $$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{x\in\Omega} x^2 \cdot P[X=x] - 0 = 2\cdot 3^2\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot 1^2\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

5. Función de distribución.

   La función de distribución de X es:
   $$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/8, & -3 \leqslant x < -1 \\ 1/2, & -1 \leqslant x < 1 \\ 7/8, & 1 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

6. Probabilidad de que X sea positiva.

   Tenemos que:
   $$P[X > 0] = 1 - P[X \leqslant 0] = 1 - 1/2 = 1/2$$

Ejercicio 12. Dado $k \in \mathbb{R}$, sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:
$$f_X(x) = \begin{cases} k/x^2 & 1 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener:

1. El valor de k.

   Para obtener el valor de k, tenemos que:

   $$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^8 \frac{k}{x^2}dx = k \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^8 = k \cdot \left(-\frac{1}{8} + 1\right) = k \cdot \frac{7}{8}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$k = \frac{8}{7}$$

   Además, con dicho valor de k, tenemos que $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que la función de densidad es válida.

2. La función de distribución:

   La función de distribución de X es:

   $$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{8}{7x^2}dx = \left[-\frac{8}{7x}\right]_1^x = -\frac{8}{7x} + \frac{8}{7}, & 1 \leqslant x < 8 \\ 1, & x \geqslant 8 \end{cases}$$

3. Valor esperado.

   El valor esperado de X es:

   $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_1^8 x \cdot \frac{8}{7x^2}dx = \frac{8}{7}\int_1^8 \frac{1}{x}dx = \frac{8}{7}\left[\ln|x|\right]_1^8 = \frac{8}{7}\ln(8)$$

4. Varianza.

   En primer lugar, calculamos $E[X^2]$:

   $$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_1^8 x^2 \cdot \frac{8}{7x^2}dx = \frac{8}{7}\int_1^8 dx = \frac{8}{7} \cdot 7 = 8$$

   Por tanto, la varianza de X es:

   $$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 8 - \frac{64}{49} \cdot \ln(8)^2 \approx 2{,}352$$

Ejercicio 13. Una gasolinera vende una cantidad X (medida en miles) de litros de gasolina en un día. Supongamos que X tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} {}^3\!/\!_8 \cdot x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las ganancias de la gasolinera son 100 euros por cada mil litros de gasolina vendidos si la cantidad vendida es menor o igual a 1000 litros. Además, gana 40 euros extra (por cada 1000 litros) si vende por encima de dicha cantantidad. Calcule la ganancia esperada de la gasolinera en un día.

Tenemos que la función que mide la ganancia de la gasolinera en función de la cantidad de litros vendidos es:

$$G(x) = \begin{cases} 100 \cdot x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 140 \cdot x & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Calculamos el valor esperado de la ganancia de la gasolinera en un día:

$$\begin{aligned} E[G(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 G(x) \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \\ &= \int_0^1 100x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx + \int_1^2 140x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 100x^3 dx + \frac{3}{8}\int_1^2 140x^3 dx = \frac{3}{8}\left[25x^4\right]_0^1 + \frac{3}{8}\left[35x^4\right]_1^2 = \\ &= \frac{3}{8} \cdot 25 + \frac{3}{8} \cdot 35 \cdot 15 = \frac{825}{4} = 206{,}25 \end{aligned}$$

Observación. Notemos que piden el valor esperado de la ganancia, no la ganancia del valor esperado. Para calcular este último, habría que calcular el valor esperado de X y luego aplicar la función G.

Calculemos el valor esperado de X, que es la cantidad de litros vendidos en un día:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{3}{2}$$

Tenemos por tanto que la ganancia del valor esperado es:

$$G(E[X]) = \frac{3}{2} \cdot 140 = 210$$

Notemos que ambos conceptos no son iguales.

3.1. Distribuciones de Probabilidad Continua

Ejercicio 3.1.1. La llegada de viajeros a una estación de tren se distribuye uniformemente en el tiempo. Cada 20 minutos se produce la salida del tren. Hallar:

1. La función de distribución de la variable aleatoria tiempo de espera, su media y su varianza.

   Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de espera de un viajero. Entonces, $X \sim \mathcal{U}(0, 20)$. La función de distribución de X es:

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{20} \text{ si } 0 \leqslant x < 20 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 20 \end{cases}$$

   La media de X es:

   $$E[X] = \int_0^{20} \frac{x}{20}\, dx = \left[\frac{x^2}{40}\right]_0^{20} = 10$$

   Para hallar la varianza de X, primero calculamos la esperanza de X^2:

   $$E[X^2] = \int_0^{20} \frac{x^2}{20}\, dx = \left[\frac{x^3}{60}\right]_0^{20} = \frac{400}{3}$$

   Por tanto, la varianza de X es:

   $$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{400}{3} - 100 = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$$

2. La probabilidad de que un viajero espere al tren menos de 7 minutos.

   Queremos calcular entonces $P[X < 7]$. Tenemos que:

   $$P[X < 7] = F_X(7) = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Ejercicio 3.1.2. La temperatura media diaria en una región se distribuye según una normal con media 25 grados centígrados y desviación típica 10 grados centígrados.

1. Calcular la probabilidad de que en un día elegido al azar la temperatura media esté comprendida entre 20 y 32 grados centígrados.

   Sea X la variable aleatoria que representa la temperatura media diaria en una región. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(25, 10^2)$. Queremos calcular entonces la siguiente probabilidad:

   $$\begin{aligned} P[20 \leqslant X \leqslant 32] &= P[X \leqslant 32] - P[X \leqslant 20] = \\ &= P\left[Z \leqslant \frac{32-25}{10}\right] - P\left[Z \leqslant \frac{20-25}{10}\right] = \\ &= P\left[Z \leqslant 0{,}7\right] - P\left[Z \leqslant -0{,}5\right] = P[Z \leqslant 0{,}7] - 1 + P[Z \leqslant 0{,}5] \approx \\ &\approx 0{,}75804 - 1 + 0{,}69146 \approx 0{,}4495 \end{aligned}$$

2. Calcular la probabilidad de que en un día elegido al azar la temperatura media difiera de la media de las temperaturas medias diarias más de 5 grados centígrados.

   Queremos calcular entonces $P[|X-\mu|>5]$. Resolvamos primero dicha inecuación:

$$\begin{aligned}|X-\mu|>5 &\iff X-\mu>5 \vee X-\mu<-5\\ &\iff X>30 \vee X<20\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}P[|X-\mu|>5] &= P[X>30]+P[X<20] =\\ &= 1-P[X\leqslant 30]+P[X\leqslant 20] =\\ &= 1-P\left[Z\leqslant \frac{30-25}{10}\right]+P\left[Z\leqslant \frac{20-25}{10}\right] =\\ &= 1-P[Z\leqslant 0{,}5]+P[Z\leqslant -0{,}5] =\\ &= 1-P[Z\leqslant 0{,}5]+1-P[Z\leqslant 0{,}5] =\\ &= 2\cdot(1-P[Z\leqslant 0{,}5]) =\\ &= 2\cdot(1-0{,}69146) = 2\cdot 0{,}30854 = 0{,}61708\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.3. De una variable aleatoria uniformemente distribuida se conoce su esperanza, μ, y su desviación típica, σ. Hallar el rango de valores de la variable, en función de μ y σ.

Sea $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a<b$. Entonces, la variable aleatoria X que se distribuye uniformemente en el intervalo $[a,b]$, notada por $X\sim\mathcal{U}(a,b)$, tiene esperanza y varianza:

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{a+b}{2} = \mu\\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2\end{aligned}$$

Por tanto, para hallar el rango de valores de la variable en función de μ y σ, despejamos a y b de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases}a+b=2\mu\\ b-a=\sqrt{12}\sigma\end{cases}$$

Sumándolas, vemos que:

$$\begin{aligned}b&=\mu+\sqrt{3}\sigma\\ a&=\mu-\sqrt{3}\sigma\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.4. Los precios de venta de un artículo se distribuyen según una ley normal. Se sabe que el 20 % son superiores a 1000 euros y que el 30 % no superan los 800 euros. Hallar la ganancia media y su desviación típica, si las ganancias (Y)

están relacionadas con los precios (X) según la expresión $Y = 350 + 0{,}15X$.

Sea X la variable aleatoria que representa el precio de venta de un artículo. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$. Calculemos μ_X y σ_X^2 a partir de los datos proporcionados.

Por un lado, tenemos que:

$$P[X > 1000] = 0{,}2 \Longrightarrow 1 - P[X \leqslant 1000] = 0{,}2 \Longrightarrow P[X \leqslant 1000] = 0{,}8 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P\left[Z \leqslant \frac{1000 - \mu_X}{\sigma_X}\right] = 0{,}8$$

Consultando la tabla, vemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} P[Z \leqslant 0{,}84] = 0{,}79955 \\ P[Z \leqslant 0{,}85] = 0{,}80234 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0{,}84 + \frac{0{,}85 - 0{,}84}{0{,}80234 - 0{,}79955} \cdot (0{,}8 - 0{,}79955) = 0{,}8416 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1000 - \mu_X}{\sigma_X} = 0{,}8416$$

Por otro lado, tenemos que:

$$P[X \leqslant 800] = 0{,}3 \Longrightarrow 1 - P[X \leqslant 800] = 0{,}3 \Longrightarrow P[X > 800] = 0{,}7 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P\left[Z \geqslant \frac{800 - \mu_X}{\sigma_X}\right] = 0{,}7 \Longrightarrow P\left[Z \leqslant \frac{\mu_X - 800}{\sigma_X}\right] = 0{,}7 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{\mu_X - 800}{\sigma_X} = 0{,}53$$

Resolvemos por tanto el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 1000 - \mu_X = 0{,}8416\sigma_X \\ \mu_X - 800 = 0{,}53\sigma_X \end{array}\right.$$

Sumando, vemos que:

$$\sigma_X = \frac{1000 - 800}{0{,}8416 + 0{,}53} \approx 145{,}815\mu_X \qquad = 800 + 0{,}53 \cdot 145{,}815 \approx 877{,}28$$

La ganancia media por tanto es:

$$E[Y] = E[350 + 0{,}15X] = 350 + 0{,}15 \cdot E[X] = 350 + 0{,}15 \cdot 877{,}28 \approx 481{,}59$$

Y la varianza de la ganancia es:

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[350 + 0{,}15X] = 0{,}15^2 \cdot \mathrm{Var}[X] = 0{,}15^2 \cdot 145{,}815^2$$

Por tanto, la desviación típica de la ganancia es:

$$\sigma_Y = \sqrt{0{,}15^2 \cdot 145{,}815^2} \approx 21{,}8722$$

Ejercicio 3.1.5. Se clasifican los cráneos en dolicocéfalos (si el índice cefálico, anchura/longitud, es menor que 75), mesocéfalos (si el índice está entre 75 y 80), y braquicéfalos (si el índice es superior a 80). Suponiendo que la distribución de los índices es normal, hallar la media y la desviación típica en una población en la que el 65 % de los individuos son dolicocéfalos, el 30 % mesocéfalos y el 5 % braquicéfalos.

Sea X la variable aleatoria que representa el índice cefálico de un individuo. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que:

$$\begin{aligned} P[X < 75] &= 0{,}65 \\ P[75 \leqslant X \leqslant 80] &= 0{,}30 \\ P[X > 80] &= 0{,}05 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X < 75] = P\left[Z < \frac{75-\mu}{\sigma}\right] = 0{,}65$$

$$P[75 \leqslant X \leqslant 80] = P[X \leqslant 80] - P[X < 75] = P[X \leqslant 80] - 0{,}65 = 0{,}30 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P[X \leqslant 80] = P\left[Z \leqslant \frac{80-\mu}{\sigma}\right] = 0{,}95$$

$$P[X > 80] = 1 - P[X \leqslant 80] = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

Consultando la tabla, veamos qué valores de Z cumplen lo pedido.

- Buscamos $\hat{z}$ tal que $P[Z < \hat{z}] = 0{,}65$. Tras consultar la tabla, vemos:

  $$P[Z < 0{,}38] = 0{,}64803 \qquad P[Z < 0{,}39] = 0{,}65173$$

  Interpolamos por tanto de forma lineal entre amos valores:

  $$0{,}38 + \frac{0{,}39 - 0{,}38}{0{,}65173 - 0{,}64803} \cdot (0{,}65 - 0{,}64803) \approx 0{,}3853$$

  Por tanto, la ecuación que obtenemos es:

  $$\frac{75-\mu}{\sigma} = 0{,}3853$$

- Buscamos $\hat{z}$ tal que $P[Z \leqslant \hat{z}] = 0{,}95$. Tras consultar la tabla, vemos que $\hat{z} = 1{,}65$. Por tanto, tenemos que:

  $$\frac{80-\mu}{\sigma} = 1{,}65$$

Establecemos por tanto el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}3853\sigma + \mu = 75 \\ 1{,}65\sigma + \mu = 80 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda, obtenemos:

$$\sigma = \frac{5}{1{,}65 - 0{,}3853} \approx 3{,}95 \Longrightarrow \mu \approx 75 - 0{,}3853 \cdot 3{,}95 \approx 73{,}47$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu &\approx 73{,}47 \\ \sigma &\approx 3{,}95 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.6. La probabilidad de contagio por unidad de tiempo viene dada por:

$$P[T \leqslant 1] = 1 - e^{-\lambda}, \qquad \lambda = 5$$

Calcular:

1. El número medio de nuevas infecciones, sobre la población de susceptibles, cuyo tamaño observado es de 50 individuos, e indicar la distribución aleatoria de la variable que contabiliza las nuevas infecciones en dicha población.

   Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre dos contagios consecutivos. Entonces, $T \sim \exp(5)$. Sea X la variable aleatoria que representa el número de nuevas infecciones en una población de susceptibles de tamaño 50. La probabilidad de contagio la desconocemos, por lo que sea esta $p \in]0, 1[$. Tenemos que $X \sim B(50, p)$, por lo que:

   $$E[X] = 50 \cdot p$$

   Como podemos ver, este resultado no es concluyente, ya que no conocemos el valor de p, nos faltan datos en el enunciado.

2. Calcular la probabilidad de que se produzcan 10 contagios en un intervalo de tiempo de longitud 10 unidades temporales. Determinar la distribución de probabilidad de dicha variable aleatoria, así como El número medio de contagios en dicho intervalo temporal.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de contagios en un intervalo de tiempo de longitud 10 unidades temporales. Entonces, $Y \sim \mathcal{P}(10 \cdot 5) = \mathcal{P}(50)$.

   La probabilidad de que se produzcan 10 contagios en un intervalo de tiempo de longitud 10 unidades temporales es:

   $$P[Y = 10] = \frac{e^{-50} \cdot 50^{10}}{10!} \approx 5{,}19 \cdot 10^{-12}$$

   Además, El número medio de contagios en dicho intervalo temporal es:

   $$E[Y] = 50$$

3. Calcular la probabilidad de que no se produzcan contagios en un intervalo de longitud 20 unidades temporales, así como el tiempo medio transcurrido entre contagios.

   Tenemos que la probabilidad pedida es:

   $$P[T \geqslant 20] = 1 - P[T \leqslant 20] = 1 - (1 - e^{-100}) = e^{-100} \approx 3{,}72 \cdot 10^{-44}$$

   Además, el tiempo medio transcurrido entre contagios es:

   $$E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Ejercicio 3.1.7. La probabilidad de que un individuo sufra reacción al inyectarle un determinado suero es 0,1. Usando la aproximación normal adecuada, calcular la probabilidad de que al inyectar el suero a una muestra de 400 personas, sufran reacción entre 33 y 50.

Sea X la variable aleatoria que representa el número de personas que sufren reacción al inyectarles el suero. Entonces, $X \sim B(400, 0{,}1)$. Como $n = 400 > 30$ y $p \geqslant 0{,}1$, podemos aproximar la distribución binomial a una normal de media de valor $\mu = np = 400 \cdot 0{,}1 = 40$ y varianza $np(1-p) = 400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 36$. Por tanto, $X \sim \mathcal{N}(40, 36)$. Tenemos que:

$$P[33 \leqslant X \leqslant 50] = P\left[X \leqslant 50\right] - P\left[X \leqslant 32\right]$$

Usando la corrección por continuidad de la aproximación normal a la binomial, tenemos que:

$$P\left[X \leqslant 50\right] = P\left[X \leqslant 50{,}5\right]$$
$$P\left[X \leqslant 32\right] = P\left[X \leqslant 32{,}5\right]$$

Sea Z la variable aleatoria X tipificada, es decir, $Z = \dfrac{X-40}{6}$. Entonces, se tiene $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, y tenemos que:

$$P\left[X \leqslant 50{,}5\right] = P\left[Z \leqslant \frac{50{,}5-40}{6}\right] = P\left[Z \leqslant 1{,}75\right] \approx 0{,}95994$$
$$P\left[X \leqslant 32{,}5\right] = P\left[Z \leqslant \frac{32{,}5-40}{6}\right] = P\left[Z \leqslant -1{,}25\right] = 1 - P\left[Z \leqslant 1{,}25\right] \approx$$
$$\approx 1 - 0{,}89435 = 0{,}10565$$

Por tanto, $P[33 \leqslant X \leqslant 50] \approx 0{,}95994 - 0{,}10565 = 0{,}85429$.

Ejercicio 3.1.8. El tiempo de duración de una pieza de un cierto equipo, medido en horas, se distribuye según una ley exponencial de parámetro 0,2. Si el equipo deja de funcionar cuando fallan 3 piezas, determinar:

1. Probabilidad de que el equipo funcione más de 10 horas.

   Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de duración de una pieza del equipo. Entonces, $X \sim \mathcal{E}(3, 0{,}2)$. Queremos calcular entonces $P[X > 10]$. Tenemos que:

$$P[X > 10] = 1 - P[X \leqslant 10] = 1 - \int_0^{10} \frac{0{,}2^3}{\Gamma(3)} x^{3-1} e^{-0{,}2x}\,dx =$$
$$= 1 - \frac{0{,}2^3}{\Gamma(3)} \int_0^{10} x^2 e^{-0{,}2x}\,dx$$

Calculemos ahora dicha integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} x^2 e^{-0,2x}\,dx &= \left[\begin{array}{cc} u(x)=x^2 & u'(x)=2x \\ v'(x)=e^{-0,2x} & v(x)=-5e^{-0,2x} \end{array}\right] = \\
&= \left[-5x^2 e^{-0,2x}\right]_0^{10} + 10\int_0^{10} x e^{-0,2x}\,dx = \\
&= \left[\begin{array}{cc} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{-0,2x} & v(x)=-5e^{-0,2x} \end{array}\right] = \\
&= -500e^{-2} + 10\left(\left[-5xe^{-0,2x}\right]_0^{10} + 5\int_0^{10} e^{-0,2x}\,dx\right) = \\
&= -500e^{-2} + 10\left(-50e^{-2} + 5\left[-5e^{-0,2x}\right]_0^{10}\right) = \\
&= -500e^{-2} - 500e^{-2} - 250e^{-2} + 250 = 250 - 1250e^{-2}
\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}
P[X>10] &= 1 - \frac{0{,}2^3}{\Gamma(3)}\cdot(250-1250e^{-2}) = 1 - \frac{0{,}2^3}{2}\cdot(250-1250e^{-2}) = \\
&= 1 - \frac{1}{250}\cdot(250-1250e^{-2}) = 1-(1-5e^{-2}) = 5e^{-2} \approx 0{,}67667
\end{aligned}$$

2. Probabilidad de que el equipo funcione entre 10 y 15 horas.

   Queremos calcular entonces $P[10 \leqslant X \leqslant 15]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[10 \leqslant X \leqslant 15] &= \int_{10}^{15} \frac{0{,}2^3}{\Gamma(3)} x^{3-1} e^{-0,2x}\,dx = \\
&= \frac{0{,}2^3}{2}\int_{10}^{15} x^2 e^{-0,2x}\,dx
\end{aligned}$$

   Reutilizando el cálculo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{10}^{15} x^2 e^{-0,2x}\,dx &= \left[-5x^2 e^{-0,2x}\right]_{10}^{15} + 10\left(\left[-5xe^{-0,2x}\right]_{10}^{15} + 5\left[-5e^{-0,2x}\right]_{10}^{15}\right) = \\
&= -5(225e^{-3}-100e^{-2}) + 10\left[-5(15e^{-3}-10e^{-2}) - 25(e^{-3}-e^{-2})\right] = \\
&= e^-3(-1125-750-250) + e^{-2}(500+500+250) = \\
&= 1250e^{-2} - 2125e^{-3}
\end{aligned}$$

   Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}
P[10 \leqslant X \leqslant 15] &= \frac{0{,}2^3}{2}\cdot(1250e^{-2}-2125e^{-3}) = \frac{1}{250}\cdot(1250e^{-2}-2125e^{-3}) = \\
&= 5e^{-2} - 8{,}5e^{-3} \approx 0{,}2535
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.9. El número de piezas defectuosas diarias en un proceso de fabricación se distribuye según una Poisson. Sabiendo que El número medio de piezas defectuosas diarias es 25, calcular mediante la aproximación normal:

1. Probabilidad de que El número de defectuosas durante un día oscile entre 24 y 28.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de piezas defectuosas diarias. Entonces, $X \sim \mathcal{P}(25)$. Además, como $n = 25 > 10$, podemos aproximar la distribución de Poisson a una normal de media 25 y varianza 25. Por tanto, $X \sim \mathcal{N}(25, 25)$. Además, como se trata de una aproximación normal, podemos usar la corrección por continuidad. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[24 \leqslant X \leqslant 28] &= P[X \leqslant 28] - P[X \leqslant 23] = \\
&= P[X \leqslant 28{,}5] - P[X \leqslant 23{,}5] = \\
&= P\left[Z \leqslant \frac{28{,}5 - 25}{\sqrt{25}}\right] - P\left[Z \leqslant \frac{23{,}5 - 25}{\sqrt{25}}\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 0{,}7\right] - P\left[Z \leqslant -0{,}3\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 0{,}7\right] - 1 + P\left[Z \leqslant 0{,}3\right] = \\
&= 0{,}75804 - 1 + 0{,}61791 = 0{,}37595
\end{aligned}$$

2. Número máximo de defectuosas que con probabilidad 0,97725 se fabrican al día.

   Queremos calcular entonces a tal que $P[X \leqslant a] = 0{,}97725$. Tenemos que:

$$P[X \leqslant a] = P\left[Z \leqslant \frac{a + 0{,}5 - 25}{5}\right] = 0{,}97725$$

   Tenemos por tanto que:

$$\frac{a + 0{,}5 - 25}{5} = 2 \Longrightarrow a = 34{,}5$$

   Por tanto, el número máximo de defectuosas que con probabilidad 0,97725 se fabrican al día es 34, ya que este debe ser un número entero.

3. Número mínimo de defectuosas que con probabilidad 0,15866 se fabrican al día.

   Queremos calcular entonces b tal que $P[X \geqslant b] = 0{,}15866$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X \geqslant b] = 1 - P[X \leqslant b - 1] \cong 1 - P\left[Z \leqslant \frac{b - 1 + 0{,}5 - 25}{5}\right] = 0{,}15866 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P\left[Z \leqslant \frac{b - 1 + 0{,}5 - 25}{5}\right] = 0{,}84134
\end{aligned}$$

   Tenemos por tanto que:

$$\frac{b - 1 + 0{,}5 - 25}{5} = 1 \Longrightarrow b = 30{,}5$$

   Por tanto, el número mínimo de defectuosas que con probabilidad 0,15866 se fabrican al día es 31, ya que este debe ser un número entero.

Ejercicio 3.1.10. Un grupo de investigadores ha determinado que el 3 % de los individuos afectados por cierto virus fallece. Determinar:

1. La probabilidad de que en una población de 10000 afectados fallezcan más de 100.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de individuos fallecidos en una población de 10^4 afectados. Entonces, $X \sim B(10^4, 0{,}03)$. Como $n = 10^4 > 30$ y $p = 0{,}03 \geqslant 0{,}01$, podemos aproximar la distribución binomial a una normal de media $\mu = np = 300$ y varianza $\sigma^2 = np(1-p) = 291$. Por tanto, $X \sim \mathcal{N}(300, 291)$. Además, como se trata de una aproximación normal, podemos usar la corrección por continuidad. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X > 100] = 1 - P[X \leqslant 100] = 1 - P[X \leqslant 100{,}5] = 1 - P\left[Z \leqslant \frac{100{,}5 - 300}{\sqrt{291}}\right] = \\ = 1 - P\left[Z \leqslant -11{,}7\right] = P[Z \leqslant 11{,}7] \approx 1 \end{aligned}$$

2. El número esperado de fallecidos en dicha población. Tenemos que:

$$E[X] = np = 10^4 \cdot 0{,}03 = 300$$

Ejercicio 3.1.11. La experiencia ha demostrado que las calificaciones obtenidas en un test de aptitud por los alumnos de un determinado centro siguen una distribución normal de media 400 y desviación típica 100. Si se realiza el test a un determinado grupo de alumnos, calcular:

1. El porcentaje de alumnos que obtendrán calificaciones comprendidas entre 300 y 500.

   Sea X la variable aleatoria que representa la calificación obtenida por un alumno. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(400, 100^2)$. Queremos calcular entonces la probabilidad $P[300 \leqslant X \leqslant 500]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[300 \leqslant X \leqslant 500] &= P\left[X \leqslant 500\right] - P\left[X \leqslant 300\right] = \\ &= P\left[Z \leqslant \frac{500-400}{100}\right] - P\left[Z \leqslant \frac{300-400}{100}\right] = \\ &= P\left[Z \leqslant 1\right] - P\left[Z \leqslant -1\right] = \\ &= P\left[Z \leqslant 1\right] - 1 + P\left[Z \leqslant 1\right] = \\ &= 2 \cdot P\left[Z \leqslant 1\right] - 1 \approx 2 \cdot 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268 \end{aligned}$$

   Por tanto, el porcentaje de alumnos que obtendrán calificaciones comprendidas entre 300 y 500 es del 68,268 %.

2. La probabilidad de que, elegido un alumno al azar, su calificación difiera de la media en 150 puntos como máximo.

   Queremos calcular entonces $P[|X - 400| \leqslant 150]$. Veamos qué valores de X cumplen lo pedido.

$$|X - 400| \leqslant 150 \Longrightarrow 250 \leqslant X \leqslant 550$$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}
P[|X-400| \leqslant 150] &= P[250 \leqslant X \leqslant 550] = P\left[X \leqslant 550\right] - P\left[X \leqslant 250\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant \frac{550-400}{100}\right] - P\left[Z \leqslant \frac{250-400}{100}\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 1{,}5\right] - P\left[Z \leqslant -1{,}5\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 1{,}5\right] - 1 + P\left[Z \leqslant 1{,}5\right] = \\
&= 2 \cdot P\left[Z \leqslant 1{,}5\right] - 1 \approx 2 \cdot 0{,}93319 - 1 = 0{,}86638
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.12. En un parking público se ha observado que los coches llegan, aleatoria e independientemente, a razón de 360 coches por hora.

1. Utilizando la distribución exponencial, encontrar la probabilidad de que una vez que llega un coche, el próximo no llegue antes de medio minuto.

   Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo que transcurre entre la llegada de dos coches consecutivos (en minutos). Entonces, como los coches llegan a razón de 360 coches por hora, tenemos que $\lambda = {}^{360}/_{6} = 6$ coches por minuto. Por tanto, $X \sim \exp(6)$. Queremos calcular entonces $P[X > 0{,}5]$. Tenemos que:

   $$P[X > 0{,}5] = 1 - P[X \leqslant 0{,}5] = 1 - (1 - e^{-6 \cdot 0{,}5}) = e^{-3} \approx 0{,}04978$$

2. Utilizando la distribución de Poisson, obtener la misma probabilidad anterior.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de coches que llegan en un intervalo de tiempo de longitud 0,5 minutos. Entonces, $Y \sim \mathcal{P}\left(\lambda \cdot 0{,}5\right)$, donde $\lambda = 6$ coches por minuto. Por tanto, $Y \sim \mathcal{P}(3)$. Queremos calcular entonces $P[Y = 0]$. Tenemos que:

   $$P[Y = 0] = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = e^{-3}$$

   Por tanto, la probabilidad de que una vez que llega un coche, el próximo no llegue antes de medio minuto es e^{-3}, que coincide con el resultado obtenido en el apartado anterior.

Ejercicio 3.1.13. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus: A, B y C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos tubos con el virus B y cinco con el virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $P(|X| < 4)$, siendo $X \sim \mathcal{N}(3, 25)$. La probabilidad de que el virus B produzca la enfermedad es $P(Y \geqslant 3)$, siendo $Y \sim B(5, 0{,}7)$. Por último, la probabilidad de que el virus C produzca la enfermedad es $P(Z \leqslant 5)$, siendo $Z \sim \mathcal{P}(4)$. Se elige un tubo al azar y al inocular el virus a un animal, contrae la enfermedad. Hallar la probabilidad de que el virus inoculado sea del tipo C.

Sean los siguientes sucesos:

- A: El virus inoculado es del tipo A.

- B: El virus inoculado es del tipo B.
- C: El virus inoculado es del tipo C.
- E: El animal contrae la enfermedad.

Tenemos que, según el enunciado:

$$P[E \mid A] = P[|X| < 4] \qquad P[E \mid B] = P[Y \geqslant 3] \qquad P[E \mid C] = P[Z \leqslant 5]$$

Calculemos cada una de estas probabilidades:

$$\begin{aligned}
P[E \mid A] = P[|X| < 4] = P[-4 < X < 4] = P\left[\frac{-4-3}{5} < Z < \frac{4-3}{5}\right] = P[-1{,}4 < Z < 0{,}2] = \\
= P[Z < 0{,}2] - P[Z < -1{,}4] = P[Z < 0{,}2] - 1 + P[Z < 1{,}4] = \\
= 0{,}57926 - 1 + 0{,}91924 = 0{,}4985
\end{aligned}$$

$$P[E \mid B] = P[Y \geqslant 3] = 1 - P[Y \leqslant 2] = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} 0{,}7^k 0{,}3^{5-k} = 0{,}83692$$

$$P[E \mid C] = P[Z \leqslant 5] = 0{,}7821$$

Calculemos ahora la probabilidad de que el virus inoculado sea de cada tipo mediante la Regla de Laplace. Sabiendo que hay 3 tubos con el virus A, 2 con el virus B y 5 con el virus C, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[A] &= \frac{3}{3+2+5} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \\
P[B] &= \frac{2}{3+2+5} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \\
P[C] &= \frac{5}{3+2+5} = \frac{5}{10} = 0{,}5
\end{aligned}$$

Nos piden por tanto calcular $P[C \mid E]$. Por la fórmula de Bayes, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[C \mid E] &= \frac{P[E \mid C] \cdot P[C]}{P[E]} = \frac{P[E \mid C] \cdot P[C]}{\sum\limits_{i=A,B,C} P[E \mid i] \cdot P[i]} = \\
&= \frac{0{,}7821 \cdot 0{,}5}{0{,}4985 \cdot 0{,}3 + 0{,}83692 \cdot 0{,}2 + 0{,}7821 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}39105}{0{,}14955 + 0{,}167384 + 0{,}39105} \approx \\
&\approx 0{,}5523
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.14. Una máquina fabrica tornillos cuyas longitudes se distribuyen según una ley normal con media 20 mm y desviación típica 0,25 mm. Un tornillo se considera defectuoso si su longitud no está comprendida entre 19,5 y 20,5 mm. Los tornillos se fabrican de forma independiente.

1. ¿Cuál es la probabilidad de fabricar un tornillo defectuoso?

   Sea X la variable aleatoria que representa la longitud de un tornillo. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(20, 0{,}25^2)$. Queremos calcular entonces $1 - P[19{,}5 \leqslant X \leqslant 20{,}5]$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[19{,}5 \leqslant X \leqslant 20{,}5] &= P\left[X \leqslant 20{,}5\right] - P\left[X \leqslant 19{,}5\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant \frac{20{,}5-20}{0{,}25}\right] - P\left[Z \leqslant \frac{19{,}5-20}{0{,}25}\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 2\right] - P\left[Z \leqslant -2\right] = \\
&= P\left[Z \leqslant 2\right] - 1 + P\left[Z \leqslant 2\right] = \\
&= 2 \cdot P\left[Z \leqslant 2\right] - 1
\end{aligned}$$

Por tanto, si A es el suceso de que un tornillo sea defectuoso, tenemos que:

$$P[A] = 1 - P[19{,}5 \leqslant X \leqslant 20{,}5] = 1 - 2 \cdot P\left[Z \leqslant 2\right] + 1 = 2 - 2 \cdot 0{,}97725 = 0{,}0455$$

2. Calcular la probabilidad de que en 10 tornillos fabricados no haya más de dos defectuosos.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de tornillos defectuosos en 10 tornillos fabricados. Entonces, $Y \sim \mathcal{B}(10, 0{,}0455)$. Queremos calcular entonces $P[Y \leqslant 2]$. Tenemos que:

$$P[Y \leqslant 2] = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0{,}0455^k (1 - 0{,}0455)^{10-k} \approx 0{,}99112$$

3. Cuántos tornillos se fabricarán por término medio hasta obtener el primero defectuoso?

   Sea Z la variable aleatoria que representa el número de tornillos fabricados hasta obtener el primero defectuoso. Entonces, $Z \sim \mathcal{G}(0{,}0455)$. Queremos calcular entonces $E[Z]$. Tenemos que:

$$E[Z] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0{,}0455}{0{,}0455} \approx 20{,}98$$

Ejercicio 3.1.15. Si la proporción de personas que consumen una determinada marca de aceite de oliva sigue una distribución beta de parámetros 2 y 3, determinar la probabilidad de que dicha proporción esté comprendida entre el 0,1 y 0,5.

Sea X la variable aleatoria que representa la proporción de personas que consumen una determinada marca de aceite de oliva. Entonces, $X \sim \beta(2, 3)$.

Queremos calcular entonces $P[0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5] &= \int_{0{,}1}^{0{,}5} \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2)\Gamma(3)} x^{2-1}(1-x)^{3-1}\,dx = \frac{4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3)}{1 \cdot \Gamma(3)} \int_{0{,}1}^{0{,}5} x(1-x)^2\,dx = \\
&= 12 \int_{0{,}1}^{0{,}5} x(1-2x+x^2)\,dx = 12 \int_{0{,}1}^{0{,}5} x - 2x^2 + x^3\,dx = \\
&= 12 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{0{,}1}^{0{,}5} \approx 0{,}6352
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.16. La proporción diaria de piezas defectuosas en determinada fábrica tiene distribución beta, y el segundo parámetro es 4. Sabiendo que la proporción media diaria es 0,2, calcular la probabilidad de que un día resulte una proporción de defectuosas superior a la media.

Sea X la variable aleatoria que representa la proporción diaria de piezas defectuosas. Entonces, $X \sim \beta(p, 4)$.

Para calcular el valor de p, usamos que $E[X] = 0{,}2$.

$$E[X] = \frac{p}{p+4} = 0{,}2 \Longrightarrow p = 0{,}2p + 0{,}8 \Longrightarrow 0{,}8p = 0{,}8 \Longrightarrow p = 1$$

Por tanto, $X \sim \beta(1, 4)$. Queremos calcular entonces $P[X > 0{,}2]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X > 0{,}2] &= 1 - P[X \leqslant 0{,}2] = 1 - \int_0^{0{,}2} \frac{\Gamma(1+4)}{\Gamma(1)\Gamma(4)} x^{1-1}(1-x)^{4-1}\,dx = \\
&= 1 - \frac{4\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(1)\Gamma(4)} \int_0^{0{,}2} (1-x)^3\,dx = 1 - 4\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^{0{,}2} = \\
&= 1 + \left[(1-x)^4\right]_0^{0{,}2} = (0{,}8)^4 \approx 0{,}4096
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.17. El Instituto de Estadística de una determinada comunidad autónoma convoca unas pruebas selectivas para cubrir vacantes. La puntuación obtenida por cada candidato se calcula mediante el promedio de las calificaciones obtenidas en las pruebas realizadas, y se sabe, de experiencias previas, que dichas puntuaciones tienen media 100, se distribuyen de forma normal y que el 44,04 % de los aspirantes que realizan la prueba supera la puntuación 100,6.

1. La convocatoria de las pruebas establece una nota mínima de 105 puntos para superar la oposición. ¿Qué porcentaje de opositores consiguen una plaza?

   Sea X la variable aleatoria que representa la puntuación obtenida por un candidato. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(100, \sigma^2)$. Sabemos que $P[X > 100{,}6] = 0{,}4404$. Por tanto, $P[X \leqslant 100{,}6] = 1 - 0{,}4404 = 0{,}5596$. Sea Z la variable aleatoria X tipificada, es decir, $Z = \dfrac{X-100}{\sigma}$. Entonces, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, y tenemos que:

   $$P\left[Z \leqslant \frac{100{,}6 - 100}{\sigma}\right] = 0{,}5596 = P\left[Z \leqslant \frac{0{,}6}{\sigma}\right]$$

   Usando la tabla de la distribución normal estándar, buscamos el valor de z tal que $P[Z \leqslant z] = 0{,}5596$. Dicho valor, tras consultar la tabla, es $z = 0{,}15$. Por tanto,

   $$\frac{0{,}6}{\sigma} = z = 0{,}15 \Longrightarrow \sigma = 4 \Longrightarrow \sigma^2 = 16$$

   Tenemos por tanto que $X \sim \mathcal{N}(100, 16)$. Ahora, queremos calcular el valor de $P[X > 105]$. Tenemos que:

   $$\begin{aligned}
   P[X > 105] &= 1 - P[X \leqslant 105] = 1 - P\left[Z \leqslant \frac{105-100}{4}\right] = 1 - P\left[Z \leqslant 1{,}25\right] \approx \\
   &\approx 1 - 0{,}89435 = 0{,}10565
   \end{aligned}$$

2. No obstante, se sabe que en ocasiones el tribunal decide, dependiendo de las necesidades de personal, rebajar las condiciones para que un candidato sea admitido. ¿Cuál sería la nota mínima necesaria para que la probabilidad de superar la prueba de selección sea 0,33?

   Sea a la nota mínima necesaria para que la probabilidad de superar la prueba de selección sea 0,33; es decir, el valor buscado. Buscamos a tal que $P[X > a] = 0{,}33$. Tenemos que:

$$P[X > a] = 1 - P[X \leqslant a] = 1 - P\left[Z \leqslant \frac{a-100}{4}\right] = 0{,}33 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P\left[Z \leqslant \frac{a-100}{4}\right] = 0{,}67$$

   Usando la tabla de la distribución normal estándar, buscamos el valor de z tal que $P[Z \leqslant z] = 0{,}67$. Dicho valor, tras consultar la tabla, es $z = 0{,}44$. Por tanto,

$$\frac{a-100}{4} = z = 0{,}44 \Longrightarrow a = 100 + 4 \cdot 0{,}44 = 101{,}76$$

   Por tanto, la nota mínima necesaria para que la probabilidad de superar la prueba de selección sea 0,33 es 101,76.

3. El instituto decide crear una bolsa de interinos para cubrir temporalmente posibles eventualidades. A esa bolsa pertenecerán todos los candidatos cuyas puntuaciones estén entre la media de las puntuaciones y la nota establecida en el apartado anterior. ¿Qué porcentaje de candidatos estarán en dicha situación?

   En este caso, nos piden que calculemos $P[100 \leqslant X \leqslant 101{,}76]$. Tenemos que:

$$P[100 \leqslant X \leqslant 101{,}76] = P\left[0 \leqslant Z \leqslant \frac{101{,}76-100}{4}\right] = P\left[0 \leqslant Z \leqslant 0{,}44\right] =$$
$$= P\left[Z \leqslant 0{,}44\right] - P\left[Z \leqslant 0\right] \overset{(*)}{=} 0{,}67 - 0{,}5 = 0{,}17$$

   donde en $(*)$ hemos usado que $P[Z \leqslant 0] = 0{,}5$ por ser esta la distribución normal estándar y $P[Z \leqslant 0{,}44] = 0{,}67$ tras consultar la tabla de la distribución normal estándar.

3.2. Vectores Aleatorios

Ejercicio 3.2.1. Asociadas al experimento aleatorio de lanzar un dado y una moneda no cargados, se define la variable X como el valor del dado y la variable Y, que toma el valor 0 si sale cara en la moneda, y 1 si sale cruz. Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución del vector aleatorio (X, Y).

Ejercicio 3.2.2. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$1/3$	$1/12$	$1/24$
1	$1/6$	$1/24$	$1/48$
2	$5/22$	$5/88$	$5/176$

Calcular la función de distribución del vector (X, Y) en los puntos $(0, 0)$; $(0, 2)$; $(1, 1)$ y $(2, 1)$, y la probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles.

Ejercicio 3.2.3. La función de densidad del vector aleatorio (X, Y), donde X denota los Kg. de naranjas, e Y los Kg. de manzanas vendidos al día en una frutería está dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{400}; \quad 0 < x < 20; \quad 0 < y < 20.$$

Determinar la función de distribución de (X, Y) y la probabilidad de que en un día se vendan entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos.

Ejercicio 3.2.4. La renta, X, y el consumo, Y, de los habitantes de una población, tienen por funciones de densidad

$$f_X(x) = 2 - 2x; \quad 0 < x < 1; \quad f(y/x) = \frac{1}{x}; \quad 0 < y < x.$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

Ejercicio 3.2.5. Una gasolinera tiene Y miles de litros en su depósito de gasóleo al comienzo de cada semana. A lo largo de una semana se venden X miles de litros del citado combustible, siendo la función de densidad conjunta de (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{1}{8}; \quad 0 < x < y < 4.$$

Se pide:

1. Probar que $f(x, y)$ es función de densidad y obtener la función de distribución.

2. Probabilidad de que en una semana se venda más de la tercera parte de los litros de que se dispone al comienzo de la misma.

3. Si en una semana se han vendido 3.000 litros de gasóleo, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana hubiese entre 3.500 y 3.750 litros de combustible?

Ejercicio 3.2.6. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x, y) = k, \quad (x, y) \in R,$$

siendo R el rombo de vértices $(3, 0)$; $(0, 2)$; $(-3, 0)$; $(0, -2)$. Calcular k para que f sea una función de densidad. Hallar las distribuciones marginales y condicionadas.

Ejercicio 3.2.7. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x, y) = k, \quad x^2 \leqslant y \leqslant 1,$$

anulándose fuera del recinto indicado. Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad. Calcular $P(X \geqslant Y)$. Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

Ejercicio 3.2.8. Sea la función de densidad de probabilidad

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy^2 + 1, & 0 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución de probabilidad y las marginales.

Ejercicio 3.2.9. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con función de densidad de probabilidad

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < x + y < 1, |y| < 1, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad y calcular la función de distribución de probabilidad. Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

Ejercicio 3.2.10. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con distribución de probabilidad uniforme sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 1)$. Determinar la función de densidad de probabilidad, la función de distribución de probabilidad y las distribuciones marginales y condicionadas.

Ejercicio 3.2.11. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1; x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

Calcular:

1. La función de distribución conjunta.
2. Las funciones de densidad marginales.
3. Las funciones de densidad condicionadas.