

Lógica y Métodos Discretos



*Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación*

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Problemas de sesiones prácticas	5

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. \square

Ejercicio 1.1.2. Demuestre que para todo número natural n :

$$\left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■ $n = 0$:

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■ $n = 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■ $n > 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n , $P(n)$ se tiene, como se pedía. \square

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n , se quiere usar una verdad sobre $n-k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n+1$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

“ n tiene un factor primo”

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- n no es primo: Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v < n$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p . Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$.

□

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$

$$p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b , $p(a, b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado del tenor:

“Para todo número natural m , $p(m, n) = mn$.”

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leq k < n$. Distinguiamos los siguientes casos:

- $n = 0$, (sea cual sea m):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego $P(0)$ vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale:

- Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:

1. $n \equiv 0 \pmod{2}$ (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n}{2} < n$.

2. $n \equiv 1 \pmod{2}$ (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n , vale $P(n)$. □

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“2 \mid (5^n + 3^{n-1})”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. \square

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado que el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.8. Demuestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como $2 \geq \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como $0 \leq 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $P(n)$ es cierto, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“n^3 < n!”$$

- En el caso base, $n = 6$:

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“5 \mid 8^n - 3^n”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. \square

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b :

- $a = 0$ o $b = 0$:

Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b . Además, es el mínimo múltiplo común de a y b , ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $a, b > 0$:

Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b . Es claro que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b . Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Así pues, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b . \square

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de n para el que

$$100^n < n!$$