Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Índice general

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/~rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Relaciones de Problemas

1.1. Cambios de Varible

Ejercicio 1.1.1. Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas de la forma dada por $x' = p(t)q(x)$, con:

$$\begin{array}{cccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$ y, para que el dominio sea conexo, podemos considerar $J = \mathbb{R}^+$ o $J = \mathbb{R}^-$.

Usamos por tanto el método de variables separadas. En primer lugar, comprobamos que q no tiene raíces en J:

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 = 0$$

Una vez comprobado esto, procedemos a resolver la ecuación usando el método de variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t-5}{x^2} \Longrightarrow x^2 dx = (t-5)dt \Longrightarrow \int x^2 dx = \int (t-5)dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{t^2}{2} - 5t + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

Despejando x obtenemos la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - 15t + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Busquemos ahora su intervalo maximal de definición (llamémoslo $\widehat{I} \subset I$). Necesitamos que $x(t) \in J$ para todo $t \in \widehat{I}$ y que x sea derivable en $\widehat{I}$. Distinguimos casos:

- $\underline{J = \mathbb{R}^+}$: En este caso, necesitamos que $x(t) > 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea positivo:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C > 0$$

  Veamos en qué puntos se anula el radicando:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C = 0 \Longrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 6C}}{3} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

  Distinguimos en función de C:

  $$25 - \frac{2C}{3} = 0 \Longrightarrow C = \frac{75}{2}$$

- $\underline{C > 75/2}$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x, y este es siempre positivo. Por tanto, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$; es decir, $x(t) \in J$ para todo $t \in I$. Además, x es derivable en I, luego el intervalo maximal de definición es I, $\widehat{I} = I$.
- $\underline{C = 75/2}$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, 5[\qquad I_2 =]5, +\infty[$$

En ambos casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.
- $\underline{C < 75/2}$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus [t_1, t_2]$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, t_1[\qquad I_2 =]t_2, +\infty[$$

En todos los casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.

- $\underline{J = \mathbb{R}^-}$: En este caso, necesitamos que $x(t) < 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea negativo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C < 0$$

Distinguimos en función de C:

- $\underline{C > 75/2}$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x. Además, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$, por lo que no hay solución en este caso.
- $\underline{C = 75/2}$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Además, como el intervalo de definición de la solución debe ser abierto y conexo, no hay solución en este caso.
- $\underline{C < 75/2}$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) < 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Como en el abierto es derivable, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} =]t_1, t_2[$.

Ejercicio 1.1.2. En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P' = P(\alpha - \beta P)$$

y la ecuación de Gompertz

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P)$$

siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

Resolvamos en primer lugar la ecuación de Verhulst. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta P) \end{array}$$

donde consideramos $I = J = \mathbb{R}$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, \frac{\alpha}{\beta}$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación son, para todo $t \in I$:

$$P(t) = 0 \qquad P(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \mathbb{R}^-$, $J_2 =]0, {}^{\alpha}/_{\beta}[$ y $J_3 =]{}^{\alpha}/_{\beta}, +\infty[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en el la segunda componente del dominio.

- $\underline{J_1 = \mathbb{R}^-}$:

  Como en este caso no cumple que $P(0) = 100 \in J_1$, no nos interesa este dominio.

- $\underline{J_2 =]0, {}^{\alpha}/_{\beta}[}$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_2$:

  $$100 \in J_2 \Longleftrightarrow 100 < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta < \alpha$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_2$:

  $$P' = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = dt \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt$$

  Para resolver la primera integral, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

  $$\frac{1}{P(\alpha - \beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P} = \frac{A(\alpha - \beta P) + BP}{P(\alpha - \beta P)}$$

- Para $P = 0$: $1 = A \cdot \alpha \Longrightarrow A = {}^1\!/\!_\alpha$.
- Para $P = {}^\alpha\!/\!_\beta$: $1 = B \cdot {}^\alpha\!/\!_\beta \Longrightarrow B = {}^\beta\!/\!_\alpha$.

Por tanto, tenemos que:

$$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha-\beta P)} = \int dt \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\int \frac{dP}{P} + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dP}{\alpha-\beta P} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha-\beta P) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

donde en la última implicación hemos usado que $P \in J_2$.

Operando con la solución obtenida, llegamos a:

$$\ln\left(\frac{P}{\alpha-\beta P}\right) = \alpha(t+C) \Longrightarrow \frac{P}{\alpha-\beta P} = e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(1+\beta e^{\alpha(t+C)}) = \alpha e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow P = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}$$

Por tanto, para $P \in J_2$, la familia de soluciones es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{1+\beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(1+\beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)$$

- $J_3 =]{}^\alpha\!/\!_\beta, +\infty[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_3$:

$$100 \in J_3 \Longleftrightarrow 100 > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta > \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_3$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\beta P - \alpha) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Operando con la solución obtenida, llegamos a que la familia de soluciones para $P \in J_3$ es:

$$P(t) = \frac{-\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 - \beta e^{\alpha(t+C)}} = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{-1 + \beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(-1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{-100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Verhulst con condición inicial $P(0) = 100$ son, en función de los parámetros α, β:

- $\underline{100 = \alpha/\beta}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad t \in I$$

- $\underline{100 < \alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

- $\underline{100 > \alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_3, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Resolvamos ahora la ecuación de Gompertz. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta \ln P) \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}^+$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta \ln P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, e^{\alpha/\beta}$$

La solución $P = 0$ no es válida, puesto que no pertenece al dominio J. Por tanto, la única solución constante es:

$$P(t) = e^{\alpha/\beta} \qquad t \in I$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \left]0, e^{\alpha/\beta}\right[$ y $J_2 = \left]e^{\alpha/\beta}, +\infty\right[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en el la segunda componente del dominio.

- <u>$J_1 = \left]0, e^{\alpha/\beta}\right[$:</u>

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_1$:

  $$100 \in J_1 \Longleftrightarrow 100 < e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow \ln 100 < \frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_1$:

  $$\begin{aligned} P' = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = dt \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int dt \end{aligned}$$

  Para resolver la integral del logaritmo, aplicamos el cambio de variable $P = e^u$, luego $dP = e^u du$:

  $$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int \frac{e^u du}{e^u(\alpha - \beta u)} = \int \frac{du}{\alpha - \beta u} = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta u) + C' = \\ = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln P) + C' \qquad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  donde hemos hecho uso de que:

  $$\alpha - \beta u > 0 \Longleftrightarrow u < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \ln P < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 0 < P < e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow P \in J_1$$

Operando, llegamos a que:

$$-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln P)=t+C\Longrightarrow \alpha-\beta\ln P=e^{-\beta(t+C)}\Longrightarrow \ln P=\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}$$

Por tanto, la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_1 es:

$$P(t)=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right)\qquad C\in\mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0)=100$, obtenemos:

$$P(0)=100=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta C}}{\beta}\right)\Longrightarrow \ln(100)=\frac{\alpha-e^{-\beta C}}{\beta}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{-\beta C}=\alpha-\beta\ln(100)\Longrightarrow C=-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln(100))$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

$$P(t)=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right)\qquad t\in I,\qquad C=-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln(100))$$

- $J_2=\left]e^{\alpha/\beta},+\infty\right[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0)=100\in J_2$:

  $$100\in J_2\Longleftrightarrow 100>e^{\alpha/\beta}\Longleftrightarrow \ln 100>\frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I\times J_2$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

  $$-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln P-\alpha)=t+C\qquad C\in\mathbb{R}$$

  donde hemos hecho uso de que:

  $$\alpha-\beta u<0\Longleftrightarrow u>\frac{\alpha}{\beta}\Longleftrightarrow \ln P>\frac{\alpha}{\beta}\Longleftrightarrow P>e^{\alpha/\beta}\Longleftrightarrow P\in J_2$$

  Operando, llegamos a que la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_2 es:

  $$P(t)=\exp\left(\frac{-\alpha+e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right)\qquad C\in\mathbb{R}$$

  Estableciendo la condición inicial $P(0)=100$, y repitiendo los cálculos del apartado anterior, llegamos a:

  $$P(0)=100\Longrightarrow C=-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100)-\alpha)$$

  Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

  $$P(t)=\exp\left(\frac{-\alpha+e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right)\qquad t\in I,\qquad C=-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100)-\alpha)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Gompertz con condición inicial $P(0) = 100$ son, en función de los parámetros α, β:

- $\underline{100 = e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = e^{\alpha/\beta} \qquad t \in I$$

- $\underline{100 < e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_1, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta\ln(100))$$

- $\underline{100 > e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100) - \alpha)$$

Ejercicio 1.1.3. Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t - x)$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

Al no indicarnos nada sobre la primera variable, suponemos que esta no varía, luego el cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{cases} s = t, \\ y = t - x. \end{cases}$$

Al no especificar dominio de la ecuación, suponemos que está definida en $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{array}{cccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, t - x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \psi = (\psi_1, \psi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, s - y) \end{array}$$

Para emplear el cambio de variable, en primer lugar hemos de comprobar que φ es un difeomorfismo. Para ello, hemos demostrar que φ es biyectiva y que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demostraremos en primer lugar que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$:

$$\varphi \circ \psi(s, y) = \varphi(s, s - y) = (s, s - (s - y)) = (s, y) = Id_{\mathbb{R}^2}(s, y) \qquad \forall (s, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\psi \circ \varphi(t, x) = \psi(t, t - x) = (t, t - (t - x)) = (t, x) = Id_{\mathbb{R}^2}(t, x) \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, hemos demostrado que φ es biyectiva y que $\varphi^{-1} = \psi$. Además, como ambas componentes de φ, ψ son de clase 1, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, luego φ es un difeomorfismo.

A continuación, hemos de comprobar que el cambio es admisible. Aunque lo sabemos puesto que no varía la primera variable, lo demostramos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t,x) = 1 + 0 \cdot \cos(t-x) = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que el cambio de variable es admisible. Procedemos a aplicarlo a la ecuación dada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = 1 - \cos(t-x) = 1 - \cos y$$

Usando la notación usual, la nueva ecuación diferencial, con dominio $\mathbb{R}^2$, es:

$$y' = 1 - \cos y$$

Esta es de la forma $y' = p(s)q(y)$, con:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto 1 - \cos y \end{aligned}$$

Buscamos en primer lugar los valores en los que se anula q:

$$q(y) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \cos y = 0 \Longleftrightarrow \cos y = 1 \Longleftrightarrow y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fijado ahora $k \in \mathbb{Z}$, restringimos ahora el dominio de q a $J =]2\pi k, 2\pi(k+1)[$. En J tenemos que q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{ds} = 1 - \cos y \Longrightarrow \frac{dy}{1-\cos y} = ds \Longrightarrow \int \frac{dy}{1-\cos y} = \int ds$$

Ejercicio 1.1.4. Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que

$$v' + \frac{k}{m} v^2 = g,$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k > 0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0) = 0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $v' = p(t)q(v)$, con:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\frac{k}{m} v^2 + g \end{aligned}$$

Comprobamos las raíces de q en $\mathbb{R}$:

$$q(v)=0 \Longleftrightarrow -\frac{k}{m}v^2+g=0 \Longleftrightarrow v^2=\frac{gm}{k} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1=-\sqrt{\dfrac{gm}{k}}, \\ v_2=\sqrt{\dfrac{gm}{k}}. \end{cases}$$

Como buscamos la solución que cumple $v(0)=0$, consideramos el dominio dado por $J=]v_1,v_2[$. En este dominio, q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v^2+g \Longrightarrow \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2+g}=dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2+g}=\int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow m\int \frac{dv}{-kv^2+gm}=t+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

Para resolver la integral, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{-kv^2+gm}=\frac{A}{v-v_1}+\frac{B}{v-v_2}=\frac{A(v-v_2)+B(v-v_1)}{(v-v_1)(v-v_2)}$$

- <u>Para $v=v_1$</u>: $1=A(v_1-v_2)\Longrightarrow A=\dfrac{1}{v_1-v_2}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.
- <u>Para $v=v_2$</u>: $1=B(v_2-v_1)\Longrightarrow B=\dfrac{1}{v_2-v_1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} m\int \frac{dv}{-kv^2+gm} &= m\int\left(\frac{A}{v-v_1}+\frac{B}{v-v_2}\right)dv= \\ &= m\left(A\ln(v-v_1)+B\ln(v_2-v)\right)+C'= \\ &= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left(\ln(v_2-v)-\ln(v-v_1)\right)+C'= \\ &= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{v_2-v}{v-v_1}\right)+C'=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v}\right)+C' \end{aligned}$$

Por tanto, la famlia de soluciones en J es:

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v}\right)=t+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

Operando, llegamos a:

$$\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v} = \exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)$$

$$-v\left[1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right] = \sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

$$v = -\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}}}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}$$

$$v = \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0)=0$ es:

$$v(0)=0=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \Longrightarrow 1=\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}=0\Longrightarrow C=0$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0)=0$ es:

$$v(t)=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left(t\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left(t\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Estudiemos ahora el comportamiento a largo plazo de la solución. Para ello, consideramos el límite cuando $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = -\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

Ejercicio 1.1.5. Calcule la solución de la ecuación

$$y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}$$

que verifica $y(0)=1$.

En este caso, se trata de una ecuación reducible a homogénea. Estudiemos qué cambio de variable hemos de emplear:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$$

Por tanto, hemos de emplear una traslación según el vector $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$. En primer lugar, el dominio de la ecuación diferencial ha de ser una de las componentes conexas de:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 \neq 0\right\}$$

Para que el punto $(0, y(0)) = (0, 1)$ esté en el dominio, el dominio será:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\right\}$$

Consideramos entonces el cambio de variable:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & (u, v) = (x - x_*, y - y_*) \end{array}$$

donde el codominio, D_1, es:

$$\begin{aligned} D_1 = \varphi(D) &= \left\{\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\right\} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u + x_*, v + y_*) \in D\right\} = \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + x_* - v - y_* - 1 < 0\right\} \end{aligned}$$

La inversa de φ, puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^{-1}: & D_1 & \longrightarrow & D \\ & (u, v) & \longmapsto & (x, y) = (u + x_*, v + y_*) \end{array}$$

Por tanto, φ, φ^{-1} son biyectivas. Como además son continuas por ser ambas componentes polinómicas, tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' = 1 + 0 \cdot y' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1} = \frac{u + x_* + v + y_* - 3}{u + x_* - v - y_* - 1}$$

Buscamos ahora resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{cases} x_* + y_* = 3, \\ x_* - y_* = 1. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_* = 2, \\ y_* = 1. \end{cases}$$

Por tanto, tras haber aplicado el cambio de variable según la traslación de $(2, 1)$, la ecuación diferencial se convierte en:

$$v' = \frac{u + v}{u - v}$$

Como buscamos que $y(0) = 1$, tenemos que $v(-2) = 0$. Esta es una ecuación homogénea, con dominio:

$$\begin{aligned} D_1' &= \{(u, v) \in D_1 \mid u < 0\} = \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0,\ u - v < 0\right\} \end{aligned}$$

El cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{array}{rrcl}\varphi' = (\varphi_1', \varphi_2') : & D_1' & \longrightarrow & D_2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (t,s) = (u, {}^{v}\!/\!{}_{u})\end{array}$$

donde el codominio, D_2, es:

$$\begin{aligned} D_2 = \varphi'(D_1') &= \left\{\varphi'(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u,v) \in D_1'\right\} = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, s\cdot t) \in D_1'\right\} = \\ &= \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0,\ t - s\cdot t < 0\right\}\end{aligned}$$

La inversa de φ', puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{array}{rrcl}(\varphi')^{-1} : & D_2 & \longrightarrow & D_1' \\ & (t,s) & \longmapsto & (u,v) = (t, s\cdot t)\end{array}$$

Por tanto, $\varphi', (\varphi')^{-1}$ son biyectivas. Como además son continuas por ser ambas componentes polinómicas, tenemos que φ' es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que la primera componente no varía. La demostración de que es admisible es:

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_1'}{\partial v} v' = 1 + 0\cdot v' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}\cdot \overbrace{\cancel{\frac{du}{dt}}}^{1} = -\frac{v}{u^2} + \frac{v'}{u} = -\frac{1}{u}\cdot\frac{v}{u} + \frac{1}{u}\cdot\frac{1 + {}^{v}\!/\!{}_{u}}{1 - {}^{v}\!/\!{}_{u}} = -\frac{s}{t} + \frac{1}{t}\cdot\frac{1+s}{1-s}$$

Por tanto, la ecuación homogénea se convierte en:

$$s' = \frac{1}{t}\left(\frac{1+s}{1-s} - s\right) \qquad \text{con dominio } D_2 = \mathbb{R}^- \times \left]-\infty, 1\right[$$

Esta es una ecuación de variables separadas, luego procedemos a resolverla. Buscamos las raíces de la función con variable s:

$$\frac{1+s}{1-s} - s = 0 \Longleftrightarrow 1 + s = s(1-s) = s - s^2 \Longleftrightarrow s^2 + 1 = 0$$

Vemos que no tiene soluciones constantes, luego aplicamos el método de resolución:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{\frac{1+s}{1-s} - s} = \frac{dt}{t} &\Longrightarrow \int \frac{1-s}{1+s^2}\, ds = \int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \int \frac{1}{1+s^2}\, ds - \int \frac{s}{1+s^2}\, ds = \ln(-t) + C' \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \arctan(s) - \frac{1}{2}\ln(1+s^2) = \ln(-t) + C\end{aligned}$$

Por la teoría vista de cambio de variable, tenemos que esto define una función implícita $s(t)$ en $\mathbb{R}^-$. Deshacemos el segundo cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \ln(-u) + C$$

Esto define una función implícita $v(u)$ en $\mathbb{R}^-$. Por último, deshacemos el primer cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln(-x+2)+C$$

Esta ecuación define una función implícita $y(x)$ en el dominio $]-\infty, 1[$. Estableciendo la condición inicial $y(0) = 1$, obtenemos:

$$\arctan\left(\frac{1-1}{0-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{1-1}{0-2}\right)^2\right) = \ln(-0+2)+C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \arctan(0) - \frac{1}{2}\ln(1+0) = \ln(2)+C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C = -\ln(2)$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $y(0) = 1$ es la función implícita $y(x)$ definida por la ecuación siguiente en el dominio $]-\infty, 1[$:

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln(-x+2)-\ln(2)$$

Ejercicio 1.1.6. Resuelva los siguientes problemas lineales

1. $x' + 3x = e^{-3t}$, $x(1) = 5$
2. $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{1+t^2}$, $x(2) = 0$
3. $x' = \cosh t \cdot x + \sinh t$, $x(0) = 1$

Ejercicio 1.1.7. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $a(t) \geqslant c > 0$ para todo t y

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes)

Ejercicio 1.1.8. La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problemas de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

Ejercicio 1.1.9. Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

Ejercicio 1.1.10. Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

Ejercicio 1.1.11. Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t$, $y = \lambda^2 x$, con $\lambda > 0$.

Ejercicio 1.1.12. Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.