Probabilidad
Examen V

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Ordinario

Fecha 21 de enero de 2022.

PARTE 1 (2.5 puntos)

Ejercicio 1 (0.25 puntos)**.** Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, 1/2)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \frac{9}{2^9}$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2, X_3 \sim B(3, 1/2)$$

Por la reproductividad de la distribución binomial, como son independientes, tenemos que:

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim B(9, 1/2)$$

Por tanto, usando la función masa de probabilidad de la distribución binomial, tenemos que:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \binom{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{9}{2^9}$$

Ejercicio 2 (0.25 puntos)**.** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Poisson, $\mathcal{P}(3)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 > 0] = \frac{e^6 - 1}{e^6}$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(3)$$

Por la reproductividad de la distribución de Poisson, por ser independientes tenemos que:

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(6)$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X_1 + X_2 > 0] = 1 - P[X_1 + X_2 = 0] = 1 - \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 1 - e^{-6} = \frac{e^6 - 1}{e^6}$$

Ejercicio 3. Para predecir los valores de una variable aleatoria X a partir de los de otra variable aleatoria Y se considera un modelo lineal:

1. **(0.50 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal considerado.

   Se busca aproximar X como $\widehat{X} = aY + b$. Para ello, se minimiza el error cuadrático medio:

$$\begin{aligned}
\text{E.C.M.}(X \mid Y) &= E[(X - \widehat{X})^2] = E\left[(X - aY - b)^2\right] = \\
&= E\left[X^2 - 2aXY - 2bX + a^2Y^2 + 2abY + b^2\right] = \\
&= E[X^2] - 2aE[XY] - 2bE[X] + a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2
\end{aligned}$$

   Para ello, se busca minizar la siguiente función:

$$L(a, b) = E.C.M.(X \mid Y) = E[X^2] - 2aE[XY] - 2bE[X] + a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2$$

Se tiene demostrado en Teoría que llegamos a la siguiente expresión (donde además, demostramos que se trata de un mínimo):

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]} \\ b = E[X] - aE[Y] \end{cases}$$

2. **(0.75 puntos)** Si $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$ son las dos rectas de regresión para el vector (X, Y), se pide: identificar la recta de regresión del apartado anterior; obtener una medida de la bondad del ajuste y calcular la esperanza del vector (X, Y).

   Suponemos que las rectas de regresión de X sobre Y y de Y sobre X son $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$, respectivamente. Por tanto, tenemos que:

$$x = y + 1 = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]} \cdot y + E[X] - \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]} \cdot E[Y]$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]} \cdot x + E[Y] - \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]} \cdot E[X]$$

   Identificando términos, obtenemos que:

$$\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]} \cdot \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]} = \rho_{X,Y}^2 = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1$$

   Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que la suposición es incorrecta. La recta de regresión de Y sobre X es $y = x - 1$ y la de X sobre Y es $x = {}^2\!/_3 y + {}^1\!/_3$.

   La proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal es el coeficiente de determinación, que en este caso es:

$$\rho_{X,Y}^2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \approx 66{,}667\,\%$$

   Por último, por identificación de términos, tenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E[X] - E[Y] & = & 1 \\ E[Y] - \dfrac{3}{2}E[X] & = & -\dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} E[X] = -1 \\ E[Y] = -2 \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$E[(X,Y)] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (0.75 puntos)**.** Las componentes de un vector aleatorio continuo son variables aleatorias continuas. Sin embargo, en general, un conjunto de variables aleatorias continuas no da lugar a un vector aleatorio continuo. Justificar que este recíproco sí es cierto si consideramos un conjunto X_1, X_2, $\ldots$, X_n de variables aleatorias continuas independientes.

Definimos la siguiente función continua en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccl} f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto & \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \end{array}$$

y probaremos que es la función de densidad de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. En primer lugar, está bien definida por estarlo cada una de las funciones de densidad de las variables aleatorias. Veamos que:

$$F_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)\, dt_1 \cdots dt_n$$

Para ello, como son independientes, tenemos que:

$$P[X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leqslant x_i]$$

Por ser f_{X_i} la función de densidad de X_i, tenemos que:

$$F_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\, dt_i$$

Por tanto, tenemos que la función que hemos definido efectivamente es la función de densidad de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Aunque no sería necesario, veamos que cumple las condiciones de toda función de densidad. En primer lugar, es no negativa, ya que cada término es mayor o igual que 0. Veamos ahora que integra 1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\, dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_{X_i}(x_i)\, dx_i = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \end{aligned}$$

PARTE 2 (7.5 puntos)

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio continuo (X, Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ x, y < 0\}$$

Observación. A tener en cuenta:

- En el **apartado 1.2** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \operatorname{sen}(t)$.

- $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

1. **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   En primer lugar, y debido a que lo usaremos con mucha frecuencia, resolveremos la siguiente integral de forma genérica. Dados $a, b \in [0,1], a < b$, resolveremos la siguiente integral:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$$

   Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\operatorname{arc\,sen}(a)}^{\operatorname{arc\,sen}(b)} \cos(t)\cos(t)\,dt = \int_{\operatorname{arc\,sen}(a)}^{\operatorname{arc\,sen}(b)} \cos^2(t)\,dt = \qquad (1)\\
&= \int_{\operatorname{arc\,sen}(a)}^{\operatorname{arc\,sen}(b)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\operatorname{arc\,sen}(a)}^{\operatorname{arc\,sen}(b)} 1+\cos(2t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(a)}^{\operatorname{arc\,sen}(b)} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(b) - \operatorname{arc\,sen}(a) + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(b))}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(a))}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(b) - \operatorname{arc\,sen}(a) + \frac{2b\sqrt{1-b^2}}{2} - \frac{2a\sqrt{1-a^2}}{2}\right] \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(b) - \operatorname{arc\,sen}(a) + b\sqrt{1-b^2} - a\sqrt{1-a^2}\right]
\end{aligned}$$

   donde en $(*)$ hemos empleado, en primer lugar, el seno del ángulo doble, por lo que:

$$\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x))\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

   y ahí hemos empleado el valor de $\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))$. Como $\operatorname{arc\,sen}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, su coseno es positivo. Por tanto:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

   Una vez hecha esta integral (que usaremos en varios casos), procedemos con el ejercicio. Veamos en primer lugar la forma de C, que se muestra en la Figura 1.

   La función de densidad conjunta es constante, por lo que:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in C \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

   Hay dos opciones:

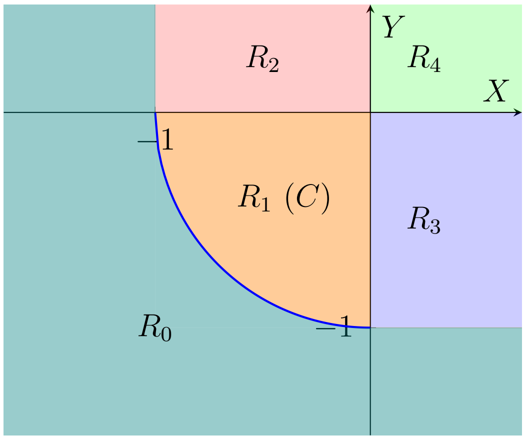

Figura 1: Recinto C.

Integrando de la forma usual: Es necesario que:

$$1 = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} k\,dy\,dx = k \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{(1)}{=} \frac{k}{2}\left[0+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{k\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

Razonando la forma de C: Sabemos que C es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x,y) = k \int_C 1 = k \cdot \lambda(C) = k \cdot \frac{\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

2. **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribuición de probabilidad conjunta.

Distinguimos en función de los valores de (x,y):

- <u>Si $(x,y) \in R_0$:</u> $(x < -1$ o $y < -1$ o $-1 < x, y < 0, x^2+y^2 \geqslant 1)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = 0$$

- <u>Si $(x,y) \in R_1$:</u> $(-1 < x, y < 0$ y $x^2+y^2 < 1)$

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \frac{4}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} y + \sqrt{1-u^2}\,du \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{4}{\pi}\left[[yu]_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-1+y^2}\right]\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[yx + y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2}\right]\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[yx + \frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + x\sqrt{1-x^2}\right]\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[2xy + y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right) + x\sqrt{1-x^2}\right]
\end{aligned}$$

- Si $(x,y)\in R_2$: $(-1<x<0$ y $0<y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{0}\frac{4}{\pi}\,dv\,du=\frac{4}{\pi}\int_{-1}^{x}\sqrt{1-u^2}\,du\overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=}\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,sen}(x)+\frac{\pi}{2}+x\sqrt{1-x^2}\right]$$

- Si $(x,y)\in R_3$: $(0<x$ y $-1<y<0)$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y}\frac{4}{\pi}\,dv\,du=\frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}y+\sqrt{1-u^2}\,du\overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=}\frac{4}{\pi}\left[[yu]_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(0)-\operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,0\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-1+y^2}\right]\right]=$$
$$=\frac{4}{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)-y\sqrt{1-y^2}\right]\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2}+\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\right]$$

- Si $(x,y)\in R_4$: $(0<x$ y $0<y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=1$$

Por tanto, la función de distribución conjunta es:

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in R_0\\ {}^{2}/_{\pi}\left[2xy+y\sqrt{1-y^2}+\operatorname{arc\,sen}(x)+\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)+x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y)\in R_1\\ {}^{2}/_{\pi}\left[\operatorname{arc\,sen}(x)+\frac{\pi}{2}+x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y)\in R_2\\ {}^{2}/_{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2}+\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\right], & (x,y)\in R_3\\ 1, & (x,y)\in R_4\end{cases}$$

3. **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

Para ello, calculamos en primer lugar las marginales. Tenemos que:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{4}{\pi}\,dy=\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}\qquad\forall x\in[-1,0]$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4}{\pi}\,dx=\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}\qquad\forall y\in[-1,0]$$

Por tanto, dado $y^*\in[-1,0]$, tenemos que:

$$f_{X|Y=y^*}(x)=\frac{f_{X,Y}(x,y^*)}{f_Y(y^*)}=\frac{{}^{4}/_{\pi}}{{}^{4}/_{\pi}\cdot\sqrt{1-y^{*2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^{*2}}}\qquad\forall x\in\left[-\sqrt{1-y^{*2}},0\right]$$

De forma análoga, dado $x^*\in[-1,0]$, tenemos que:

$$f_{Y|X=x^*}(y)=\frac{f_{X,Y}(x^*,y)}{f_X(x^*)}=\frac{{}^{4}/_{\pi}}{{}^{4}/_{\pi}\cdot\sqrt{1-x^{*2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{*2}}}\qquad\forall y\in\left[-\sqrt{1-x^{*2}},0\right]$$

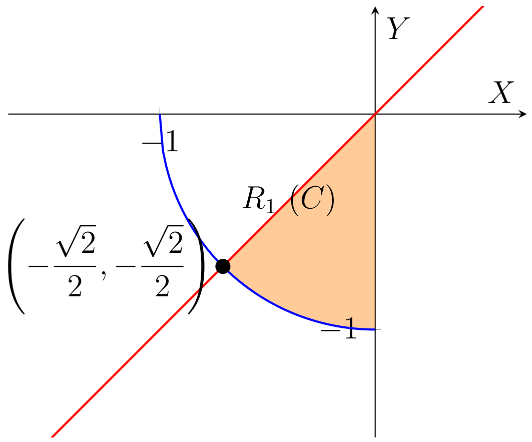

Figura 2: Conjunto en el que se insersecan C y $X-Y>0$.

4. **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X-Y>0$.

   Veamos gráficamente este conjunto en la Figura 2, en el que el punto de corte es:

$$-\sqrt{1-x^2}=x \Longrightarrow 1-x^2=x^2 \Longrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X-Y>0] &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x}\frac{4}{\pi}\,dy\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{2}/2}^{0} x+\sqrt{1-x^2}\,dx = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{2}/2}^{0} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(0) - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 0\sqrt{1-0^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2/4}\right]\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2/4}\right]\right] = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]\right] = \\
&= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{\pi}} + \frac{1}{2} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{\pi}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5. **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.

   La mejor aproximación por mínimos cuadrados es la curva de regresión de Y sobre X:

$$\begin{aligned}
E[Y \mid X=x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{Y|X=x}(y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[0-\frac{1-x^2}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[-\frac{1-x^2}{2}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \qquad \forall x\in[-1,0]
\end{aligned}$$

   Por tanto, la mejor aproximación por mínimos cuadrados es:

$$E[Y \mid X] = -\frac{\sqrt{1-X^2}}{2}$$

El error cuadrático medio de esta aproximación es:

$$\text{E.C.M.}(E[Y \mid X]) = E[\text{Var}[Y \mid X]] = E[Y^2] - E\left[E^2[Y \mid X]\right]$$

Tenemos que:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{0} y^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{0} y^2 \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy$$

Aplicamos ahora el cambio de variable $y = \text{sen}(t)$, por lo que:

$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \text{sen}^2(t) \cdot \sqrt{1-\text{sen}^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \text{sen}^2(t) \cdot \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1-\cos(2t)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} 1-\cos^2(2t)\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} 1 - \frac{1+\cos(4t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(4t)}{8}\right]_{-\pi/2}^{0} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(4t)}{8}\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
E\left[E^2[Y \mid X]\right] &= E\left[\left(-\frac{\sqrt{1-X^2}}{2}\right)^2\right] = E\left[\frac{1-X^2}{4}\right] = \frac{1}{4}E[1-X^2] = \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - E[X^2]\right] \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{4}\right] = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado que, como las funciones de densidad de X y Y son iguales, $E[X^2] = E[Y^2]$. Por tanto, tenemos que:

$$\text{E.C.M.}(E[Y \mid X]) = E[Y^2] - E\left[E^2[Y \mid X]\right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4-3}{16} = \frac{1}{16}$$

6. **(0.50 puntos)** Obtener una media de la bondad del ajuste del apartado anterior.

La media de la bondad del ajuste es el valor de $\eta^2_{Y|X}$:

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\text{Var}[E[Y \mid X]]}{\text{Var}[Y]} = 1 - \frac{\text{E.C.M.}(E[Y \mid X])}{\text{Var}[Y]}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{0} y \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{0} y \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{1}{4} - \left(-\frac{4}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{\text{E.C.M.}(E[Y \mid X])}{\text{Var}[Y]} = 1 - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}} = 1 - \frac{9\pi^2}{4(9\pi^2-64)} = \frac{36\pi^2 - 256 - 9\pi^2}{4(9\pi^2-64)} =$$
$$= \frac{27\pi^2 - 256}{4(9\pi^2-64)} \approx 0{,}10553$$

Por tanto, vemos que el ajuste no es adecuado.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio (X, Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{2t_1 + 4t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$

1. **(0.75 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X, Y).

   La función generatriz de momentos de una normal bivariante es:

   $$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2}{2}\right)$$

   Vemos por tanto que (X, Y) sigue una distribución normal bivariante con parámetros:

   $$\begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = 0 \\ \sigma_1^2 = 4 \\ \sigma_2^2 = 9 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 = 3 \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con:

   $$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, el coeficiente de correlación lineal es:

   $$\rho_{X,Y} = \rho = \frac{3}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

   Por otro lado, sabemos que las curvas de regresión coinciden con las rectas de regresión, luego la razón de correlación es:

   $$\eta^2_{Y/X} = \eta^2_{X/Y} = \rho^2_{X,Y} = \frac{1}{4}$$

2. **(0.75 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y \mid X = 1$ y $X \mid Y = 0$.

Sabemos que, dados $x^*, y^* \in \mathbb{R}$, las distribuciones condicionadas son:

$$Y \mid X = x^* \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x^* - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$
$$X \mid Y = y^* \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y^* - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$Y \mid X = 1 \sim \mathcal{N}\left(0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-1), 9\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) = \mathcal{N}\left(0, {}^{27}/_{4}\right)$$
$$X \mid Y = 0 \sim \mathcal{N}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(0-0), 4\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) = \mathcal{N}\left(1, 3\right)$$

3. **(1 punto)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y-X)$. Justificar que las variabes aleatorias $2X$ y $Y-X$ tienen cierta asociación lineal en sentido negativo.

   Tenemos que:

$$(2X, Y-X) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} A, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, notando $X' = 2X$ y $Y' = Y-X$, tenemos que $(X', Y') \sim \mathcal{N}(\mu A, A^t\Sigma A)$, donde:

$$\mu A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^t\Sigma A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\rho_{X',Y'} = \frac{-2}{\sqrt{16}\sqrt{7}} \approx -0{,}18$$
$$\rho^2_{X',Y'} = \frac{2^2}{16\cdot 7} = \frac{1}{28} = 0{,}03$$

   Por tanto, como $\rho^2_{X',Y'}$ es muy cercano a 0, no tienen apenas asociación. No obstante, de tenerla, como $\rho_{X',Y'}$ es negativo, es en sentido negativo.