

MN I

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

MN I

Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Lidia Fernández Rodríguez.

Descripción Prueba 1. Temas 1 y 2.

Ejercicio 1 (1.5 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

¿Qué debe cumplir el parámetro α para que se pueda resolver el sistema usando el método de Gauss sin intercambio de filas?

Como este método es equivalente a la descomposición LU, basta con que todos sus menores principales sean no nulos.

$$|2| = 2 \neq 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{array} \right| = 2\alpha - 6 \neq 0 \implies \alpha \neq 3$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 6 & \alpha & 10 \\ 4 & 6 & 8 \end{array} \right| = 16\alpha + 40 + 108 - 12\alpha - 120 - 48 = 4\alpha - 20 \neq 0 \implies \alpha \neq 5$$

Por tanto, se puede resolver siempre que $\alpha \neq \{3, 5\}$.

Alternativamente, se puede siempre que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Veamos:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & \alpha & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow[F'_3 = F_3 - 2F_1]{F'_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha - 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right) \longrightarrow \\ & \xrightarrow[F'_3 = F_3 + m_{3,2}F_2]{m_{3,2} = \frac{-4}{\alpha-3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha - 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{4}{\alpha-3} & 3 - \frac{8}{\alpha-3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$$

$$a_{22}^{(2)} = \alpha - 3 \neq 0 \iff \alpha \neq 3$$

$$a_{33}^{(3)} = 2 - \frac{4}{\alpha-3} \neq 0 \iff 2\alpha - 6 \neq 4 \iff \alpha \neq 5$$

Podemos ver que, efectivamente, se cumple que se puede resolver si $\alpha \neq \{3, 5\}$

Ejercicio 2 (2 puntos). Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 0,0300x_1 + 58,9x_2 = 59,2 \\ 5,31x_1 - 6,10x_2 = 47,0 \end{cases}$$

utilizando el método de Gauss con pivote parcial y aritmética de tres dígitos. Realiza los cálculos uno a uno indicando claramente el redondeo a tres dígitos en cada paso.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 0,03 & 58,9 & 59,2 \\ 5,31 & -6,10 & 47,0 \end{array} \right) & \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5,31 & -6,10 & 47,0 \\ 0,03 & 58,9 & 59,2 \end{array} \right) \longrightarrow \\ & \xrightarrow[m_{2,1} = -\frac{0,03}{5,31} \approx -0,00565]{F'_2 = F_2 + m_{2,1}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5,31 & -6,10 & 47,0 \\ 0 & 58,9 & 58,9 \end{array} \right) \\ x_2 \approx \frac{58,9}{58,9} = 1 & \quad x_1 \approx \frac{47 + 6,1x_2}{5,31} \approx \frac{47 + 6,1}{5,31} \approx \frac{53,1}{5,31} = 10 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (1.5 puntos). Pon un ejemplo de matriz simétrica que admita factorización de Cholesky y otra que no la admita. Justifica tu respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz admita factorización de Cholesky es que sea simétrica y definida positiva. Como A y B son simétricas, una de ellas debe ser definida positiva y la otra no.

Es fácil ver que A es definida positiva, ya que:

$$|2| = 2 \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 3 \quad |A| = 10 - 6 = 4$$

Por tanto, A sí admite factorización de Cholesky. Sin embargo, B no es definida positiva ya que su menor principal de orden 1 es negativo, por lo que B no admite factorización de Cholesky.

Ejercicio 4 (1.5 puntos). Se considera una norma vectorial $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n y la correspondiente norma matricial inducida $\|\cdot\|_S$. Dada una matriz cuadrada regular S de orden n , se define la norma vectorial $\|\cdot\|_S$ por:

$$\|x\|_S = \|Sx\|$$

1. Prueba que así definida es una norma en \mathbb{R}^n

- $\|x\|_S = \|Sx\| \geq 0$ por ser $\|\cdot\|$ una norma vectorial. Además, se comprueba que $\|x\|_S = 0 \iff x = 0$

$$\|x\|_S = 0 \iff \|Sx\| = 0 \iff Sx = 0 \iff x = S^{-1} \cdot 0 = 0$$

- $\|cx\|_S = \|S(cx)\| = \|c(Sx)\| = |c| \cdot \|Sx\| = |c| \cdot \|x\|_S$
- $\|x + y\|_S = \|S(x + y)\| = \|Sx + Sy\| \leq \|Sx\| + \|Sy\| = \|x\|_S + \|y\|_S$

2. Prueba que la norma matricial inducida es

$$\|A\|_S = \|SAS^{-1}\|$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|A\|_S &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_S} = \max_{x \neq 0} \frac{\|SAx\|}{\|Sx\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|SAS^{-1}Sx\|}{\|Sx\|} = \\ &= \stackrel{(*)}{=} \max_{Sx \neq 0} \frac{\|SAS^{-1}Sx\|}{\|Sx\|} = \|SAS^{-1}\| \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ he usado que, por ser S regular,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Sx \neq 0\}$$

Como ambos conjuntos son los mismos, el máximo se alcanzará en el mismo valor. \square

3. Si denotamos por $\kappa(A)$ y $\kappa_S(A)$ el número de condición de la matriz A respecto de las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_S$ respectivamente, prueba que:

$$\kappa_S(A) \leq \kappa(S)^2 \kappa(A)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \kappa_S(A) &= \|A\|_S \|A^{-1}\|_S = \|SAS^{-1}\| \cdot \|SA^{-1}S^{-1}\| \leq \\ &\leq \|S\|^2 \|S^{-1}\|^2 \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(S)^2 \kappa(A) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5. [3 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \end{pmatrix}$$

se pretende resolver el sistema $Ax = b$.

1. ¿Se puede garantizar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel? Justifica la respuesta.

Sí, ya que la matriz A es E.D.D., ya que $2 > 1/2$ y $2 > 1/2$.

Alternativamente, y solo para el caso del método de Jacobi, se demuestra de manera general.

La matriz de descomposición del método de Jacobi es:

$$Q = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$$

Por tanto, el sistema de punto fijo de Jacobi $x = B_J x + c$ tiene como B_J a la matriz:

$$B_J = I - Q^{-1}A = I + \frac{1}{2}A = I + \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $\|B_J\|_1 < 1 \implies$ este método iterativo converge.

2. Escribe las ecuaciones de los métodos y realiza dos iteraciones del método de Gauss-Seidel partiendo de $x^{(0)} = (0, 0)$.

Las ecuaciones del método de Jacobi son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x_2^{(k)} + 8 \right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x_1^{(k)} + 32 \right) = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - 16 \end{cases}$$

Las ecuaciones del método de Gauss-Seidel son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - 16 \end{cases}$$

Realizamos ahora dos iteraciones del método de Gauss-Seidel:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	-4	-15
2	$-\frac{31}{4}$	$-\frac{225}{16}$

3. Se propone el método iterativo

$$x^{k+1} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b$$

Prueba que para $\omega = -\frac{1}{2}$ el método converge a la solución del sistema para cualquier valor inicial $x^{(0)}$. ¿Que debe cumplir ω para que el método sea convergente? Indica algún otro valor para el que así sea.

$$I - \omega A = \begin{pmatrix} 1 + 2\omega & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1 + 2\omega \end{pmatrix}$$

$$P_{I-\omega A}(\lambda) = \lambda^2 - (2 + 4\omega)\lambda + (1 + 2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4}$$

Los valores propios de dicha matriz son:

$$\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 - (2 + 4\omega)\lambda + (1 + 2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 + 4\omega \pm \sqrt{(2 + 4\omega)^2 - 4(1 + 2\omega)^2 - \omega^2}}{2} \\ &= \frac{2 + 4\omega \pm \sqrt{\cancel{2^2(1+2\omega)^2} - \cancel{4(1+2\omega)^2} - \omega^2}}{2} \\ &= 1 + 2\omega \pm \frac{|\omega|}{2}i = 1 + 2\omega \pm \frac{\omega}{2}i \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios son: $\{1 + 2\omega \pm \frac{\omega}{2}i\}$. Para que el método iterativo converga, necesitamos que

$$\max \left\{ \left| 1 + 2\omega + \frac{\omega}{2}i \right|, \left| 1 + 2\omega - \frac{\omega}{2}i \right| \right\} < 1$$

Como $|1 + 2\omega - \frac{\omega}{2}i| = |1 + 2\omega + \frac{\omega}{2}i|$, la inecuación a resolver es:

$$\begin{aligned} \left| 1 + 2\omega + \frac{\omega}{2}i \right| < 1 &\iff \sqrt{(1 + 2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4}} < 1 \iff 1 + 4\omega + 4\omega^2 + \frac{\omega^2}{4} < 1 \iff \\ &\iff \omega \left(4 + 4\omega + \frac{\omega}{4} \right) < 0 \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se cumple solo si uno de los dos términos es negativos.

$$\omega < 0 \qquad 4 + 4\omega + \frac{\omega}{4} = 4 + \frac{17}{4}\omega < 0 \iff \omega < \frac{-16}{17}$$

Por tanto, el método iterativo converge si:

$$\omega \in \left] -\frac{16}{17}, 0 \right[$$