Ecuaciones Diferenciales I

Examen XIV

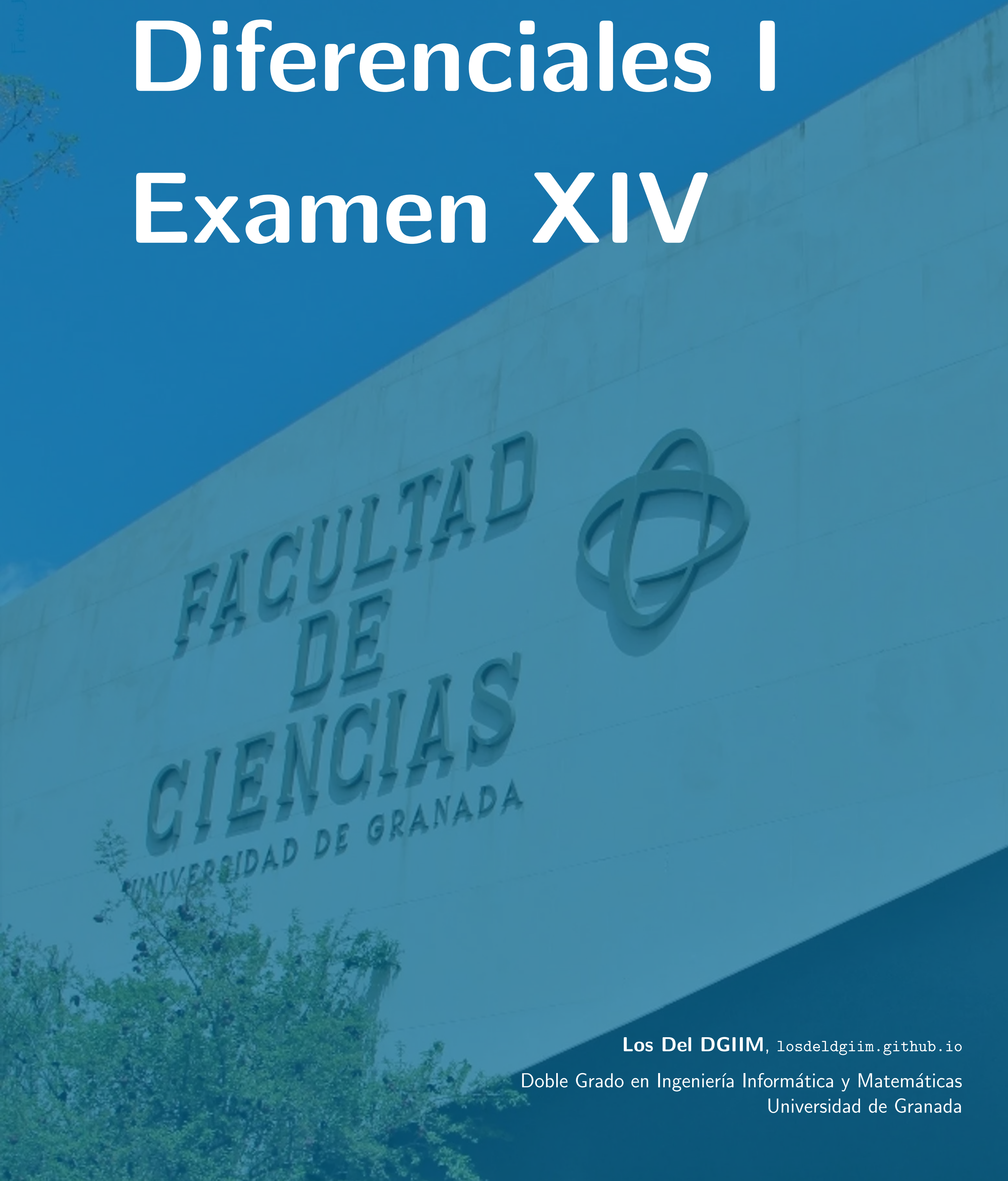

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 2.

Fecha 19 de Diciembre de 2023.

Ejercicio 1. Se consideran las funciones $f_1, f_2 :]0,1[\to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(t) = 1 \quad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left]0, \frac{2}{3}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]\frac{2}{3}, 1\right[. \end{cases}$$

¿Son estas funciones linealmente independientes en el intervalo $]0,1[$?

Ejercicio 2. Se considera la ecuación diferencial

$$ax + by + (cx + dy)y' = 0,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. ¿En qué casos se puede afirmar que $\mu(x, y) = e^{x+y}$ es un factor integrante?

Ejercicio 3. Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$, se supone que φ_1, φ_2 son las soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ que cumplen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Demuestra que la función

$$x(t) = \varphi_2(t) \int_0^t e^s \varphi_1(s)\, ds - \varphi_1(t) \int_0^t e^s \varphi_2(s)\, ds + 2024\varphi_2(t)$$

pertenece a $C^2(\mathbb{R})$ y encuentra una ecuación diferencial de la que es solución.

Ejercicio 4. Encuentra todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las desigualdades

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$.

Ejercicio 5. El espacio vectorial de soluciones de la ecuación $x'' + 4x = 0$ se denota por Z_x. De igual modo, Z_y será el espacio vectorial de soluciones de $y'' + 2y' + 5y = 0$. Demuestra que la transformación

$$\Psi : Z_x \to Z_y, \quad x \mapsto y, \quad y(t) = e^{-t} x(t)$$

define un isomorfismo. Encuentra bases de Z_x y Z_y y calcula la matriz que representa a Ψ en esas bases.