Álgebra II
Examen I

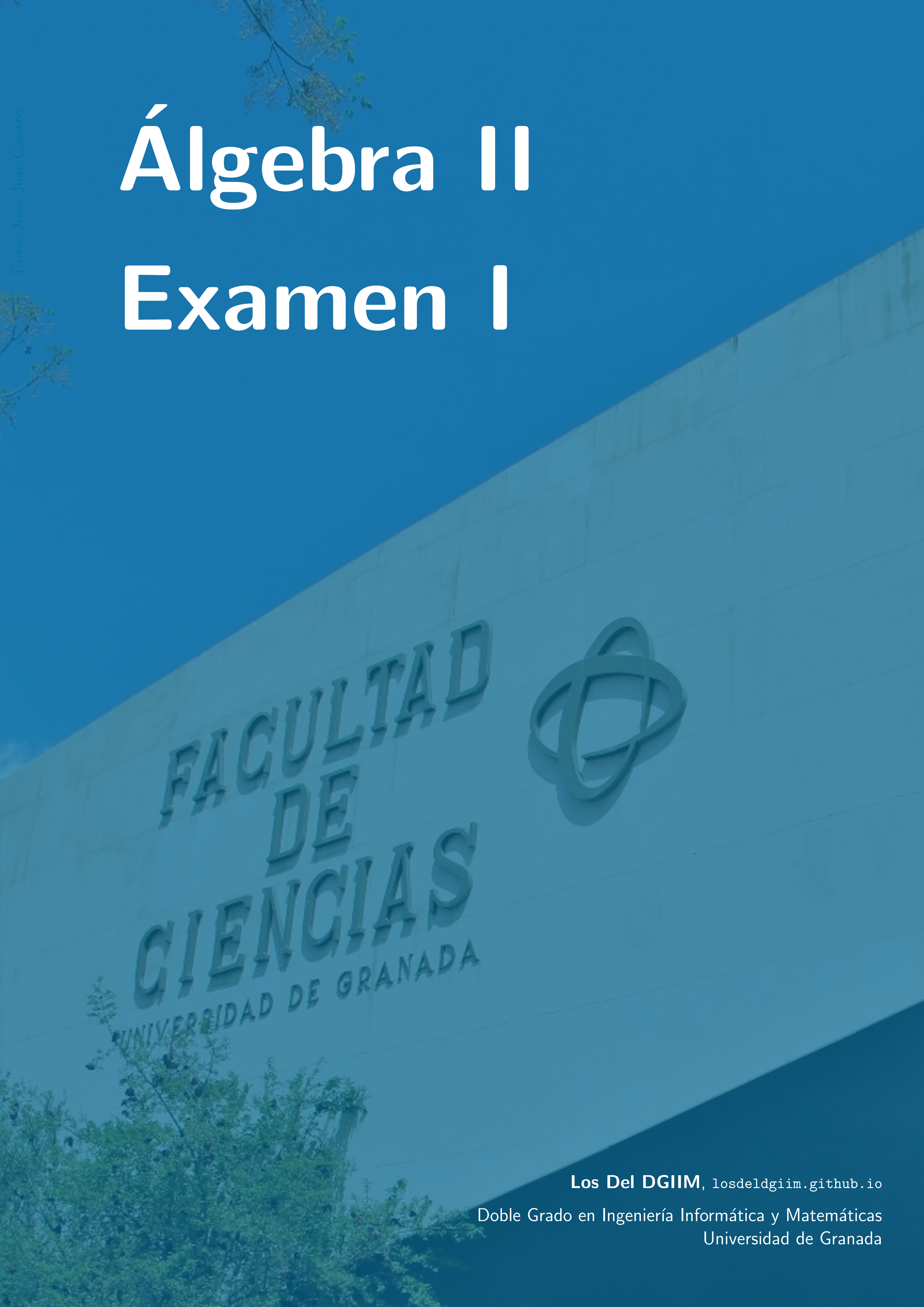

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial I.

Fecha Octubre de 2017.

Ejercicio 1.

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.
2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

Ejercicio 2. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:
   a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
   b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
   c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.
2. Elije la opción correcta:
   a) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
   b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
   c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.
3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces:
   a) $O(x)$ divide a $O(f(x))$ $\forall x \in G$.
   b) $O(f(x))$ divide a $O(x)$ $\forall x \in G$.
   c) $O(x) = O(f(x))$ $\forall x \in G$.
4. Dadas las permutaciones $\alpha = (2\,3\,6)(6\,5\,7\,1\,3\,4)$, $\beta = (2\,4\,7\,3) \in S_{10}$ se tiene que $\beta\alpha\beta^{-1}$:
   a) Es par.
   b) Su orden es 12.
   c) Es un ciclo de longitud 7.
5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:
   a) $\mu_6 \cong C_6$.
   b) $\mu_6 \cong S_3$.
   c) $\mu_6 \cong D_6$.
6. En S_4 se tiene que:
   a) $\{(1\,2), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.
   b) $\{(1\,2\,3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.
   c) $\{(1\,2), (2\,3), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.
7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

a) f es un homomorfismo de grupos.

b) f es un automorfismo.

c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $\varepsilon(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:

   a) $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

   b) $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma^{-1})$.

   c) Ninguna de las anteriores.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

   a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.

   b) Es producto de trasposiciones.

   c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10. El grupo $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:

    a) Es un grupo no abeliano de orden 8.

    b) Es un grupo isomorfo a Z_6.

    c) Es un grupo isomorfo a S_3.

Ejercicio 1.

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.

   En primer lugar, dado un grupo arbitrario G y fijado $k \in \mathbb{N}$, se define el conjunto siguiente:
$$G_k = \{x \in G \mid O(x) = k\}$$

   Sabemos que $G_1 = \{1\}$. Ahora, vamos a ver que el orden de G_k para todo $k \geqslant 3$ es par. Dado $x \in G$ con $O(x) = k$, entonces $O(x^{-1}) = k$ y $x^{-1} = x^{k-1}$. Para $k \geqslant 3$, se tiene además que $x \neq x^{-1}$. Por tanto, para cada $x \in G_k$ con $k \geqslant 3$, se tiene que $x \neq x^{-1}$ y $x^{-1} \in G_k$, por lo que los elementos de G_k van por pares y, por tanto, $|G_k|$ es par.

   Supongamos ahora nuestra hipótesis, G un grupo de orden par (en particular, finito). Por tanto, todo elemento de G tiene orden finito y G se descompone en grupos disjuntos como sigue:
$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \{1\} \cup G_2 \cup \left(\bigcup_{k=3}^{\infty} G_k\right)$$

   Considerando cardinales, puesto que son disjuntos, se tiene que:
$$|G_2| = |G| - 1 - \sum_{k=3}^{\infty} |G_k|$$

   Como $|G|$ es par y $|G_k|$ es par para todo $k \geqslant 3$, se tiene que $|G_2|$ es impar. Por tanto, el número de elementos de orden 2 en un grupo de orden par es impar.

2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

   En un ejercicio, vimos que todo grupo de orden 6 o es cíclico o es isomorfo a D_3. Consideramos por tanto los grupos siguientes:
$$C_6 \not\cong D_3 \cong S_3$$

   Sabemos que C_6 es conmutativo y S_3 no, por lo que $C_6 \not\cong S_3$ y por tanto $D_3 \cong S_3$.

Ejercicio 2. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:

   a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
   No es correcta, pues $D_3 \not\cong C_6$ y ambos tienen orden 6.

b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
Correcta, pues si todo isomorfismo en particular es una biyección. Por tanto, si $G \cong H$ entonces $|G| = |H|$.

c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.
No es correcta, pues $D_3 \ncong D_4$ y ambos se generan por dos elementos.

Por tanto, la opción correcta es la **b)**.

2. Elije la opción correcta:

a) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
Sabemos que $O(1) = 1$, luego es incorrecta.

b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
Falso, pues $|D_4| = 8 \neq 24 = |S_4|$.

c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.
Consideramos el grupo de los cuaternios Q_2. Tenemos que:

$$ij = k \neq -k = ji$$

Por tanto, Q_2 no es abeliano, y $|Q_2| = 8$. Veamos que no es isomorfo a D_4. Los órdenes de los elementos de Q_2 son:

$$O(1) = 1, \quad O(-1) = 2, \qquad O(\pm i) = O(\pm j) = O(\pm k) = 4$$

Los órdenes de los elementos de D_4 son:

$$O(1) = 1, \quad O(r) = O(r^3) = 4$$
$$O(r^2) = O(s) = O(sr) = O(sr^2) = O(sr^3) = 2$$

Por tanto, $Q_2 \ncong D_4$ y ambos son no abelianos y de orden 8. Por tanto, es incorrecta.

Por tanto, no hay ninguna opción correcta.

3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

a) $O(x)$ divide a $O(f(x))$ $\forall x \in G$.

b) $O(f(x))$ divide a $O(x)$ $\forall x \in G$.

c) $O(x) = O(f(x))$ $\forall x \in G$.

4. Dadas las permutaciones $\alpha = (2\,3\,6)(6\,5\,7\,1\,3\,4)$, $\beta = (2\,4\,7\,3) \in S_{10}$ se tiene que $\beta\alpha\beta^{-1}$:

a) Es par.

b) Su orden es 12.

c) Es un ciclo de longitud 7.

5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

a) $\mu_6 \cong C_6$.
b) $\mu_6 \cong S_3$.
c) $\mu_6 \cong D_6$.

6. En S_4 se tiene que:

a) $\{(1\,2),(3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.
b) $\{(1\,2\,3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.
c) $\{(1\,2),(2\,3),(3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

a) f es un homomorfismo de grupos.
b) f es un automorfismo.
c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $\varepsilon(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:

a) $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.
b) $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma^{-1})$.
c) Ninguna de las anteriores.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.
b) Es producto de trasposiciones.
c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10. El grupo $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:

a) Es un grupo no abeliano de orden 8.
b) Es un grupo isomorfo a Z_6.
c) Es un grupo isomorfo a S_3.