Geometría III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. El Espacio Afín **5**
1.1. Subespacios afines 8
1.2. Sistemas de referencias afines 14
1.2.1. Cambio de sistema de referencia 17
1.3. Aplicaciones afines 18
1.3.1. Determinación de una aplicación afín 21
1.3.2. Aplicaciones afines notables 25
1.4. Teoremas de Pappus y Desargues Afines 32
1.5. Convexidad 37
1.5.1. Envolvente convexa 38
1.6. Relación de Ejercicios 38

2. Espacios Euclídeos **39**
2.1. Ortogonalidad 39
2.2. Distancia 40
2.3. Ángulos 42
2.4. Isometrías 45
2.5. Clasificación de los movimientos 47
2.5.1. Movimientos en el plano $\mathbb{E}^2$ 47
2.5.2. Movimientos en el espacio $\mathbb{E}^3$ 50
2.6. Triángulos 55
2.6.1. Puntos Notables del Triángulo 56
2.6.2. Incentro 62
2.7. Teorema de Thales 65
2.8. Relación de Ejercicios 66

3. Hipercuádricas afines **67**
3.1. Cambio de sistema de referencia e hipercuádricas 68
3.2. Clasificación de hipercuádricas euclídeas 68
3.2.1. Clasificación de las cónicas 71
3.2.2. Clasificación de las cuádricas 75
3.3. Relación de Ejercicios 79

4. Espacio Proyectivo **81**
4.1. Subespacios Proyectivos 81
4.2. Coordenadas Homogéneas 85
4.3. Proyectividades 86
4.3.1. Determinación de una proyectividad 88

4.4. Relación entre Geometría Proyectiva y Geometría Afín 91
4.4.1. Proyectivización de subespacios afines 92
4.5. Teoremas de Pappus y Desargues Proyectivos 93

5. Relaciones de Ejercicios 95
5.1. El Espacio Afín. 95
5.2. El Espacio Afín Euclídeo. 129
5.3. Hipercuádricas afines. 169

1. El Espacio Afín

Definición 1.1 (Espacio afín)**.** Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$ un conjunto y $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial[1]. Diremos que $\mathcal{A}$ es un espacio afín si

$$\exists \ \overrightarrow{\cdot}: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & V \\ (P, Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

que cumple lo siguiente:

1. $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}$, entonces $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
2. Fijado $P \in \mathcal{A}$, existe una biyección

$$\varphi_p: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & V \\ Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

Esta propiedad, por la definición de biyección tenemos:

a) Inyectividad: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Longrightarrow Q = R$,

b) Sobreyectividad: $\forall v \in V$, $\exists Q \mid \overrightarrow{PQ} = v$.

A los elementos de $\mathcal{A}$ los llamaremos puntos, y a los elementos de V los llamaremos vectores. Al espacio vectorial V lo llamaremos espacio de direcciones de $\mathcal{A}$. Por ello, a veces notaremos $V = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Ejemplo. Los primeros ejemolos de espacios afines son los espacios vectoriales, como vamos a ver a continuación:

1. En $\mathbb{R}^3$, tenemos que la aplicación $\overrightarrow{\cdot}$ es:

$$\overrightarrow{\cdot}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}^3} \\ (P, Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} = Q - P \end{array}$$

2. Para cualquier espacio vectorial $V(\mathbb{K})$, tenemos que la aplicación $\overrightarrow{\cdot}$ es:

$$\overrightarrow{\cdot}: \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & \overrightarrow{uv} = v - u \end{array}$$

Veamos las dos propiedades:

[1]Por norma general, usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. De forma excepcional, podremos usar $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) $\forall u, v, w \in V$, se tiene que:

$$\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$$

b) Fijado $v \in V$, tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v : & V & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & w - v \end{array}$$

Por este ejemplo, tenemos que todo espacio vectorial se puede ver como espacio afín, y decimos que es su <u>estructura afín canónica</u>.

Algunas consecuencias de la definición de espacio afín son:

1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow Q = P$

   Suponemos $Q = P$. Entonces,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \Longrightarrow \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$$

   Como tenemos que φ_P es inyectiva, tenemos que ese punto es único, por lo que se da la doble implicación.

2. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$$

3. Sean los puntos $P_1, \dots, P_k$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \overrightarrow{P_i P_{i+1}} = \overrightarrow{P_1 P_k}$$

   Se demuestra fácilmente por inducción sobre k.

4. Igualdad del paralelogramo: $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \Longrightarrow \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

Cabe destacar que podemos operar entre puntos y vectores considerando la inversa de la biyección descrita para el espacio afín:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p^{-1} : & \overrightarrow{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & v & \longmapsto & \varphi_p^{-1}(v) = Q \end{array}$$

donde tenemos que $\varphi_p^{-1}(v) = Q \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} = v$. De tal forma, notamos $Q = P + v$ o, equivalentemente, $v = Q - P$. De esta notación, deducimos las siguientes propiedades:

1. $\forall P \in \mathcal{A}$, tenemos que $P + \overrightarrow{0} = P$.

$$P + \overrightarrow{0} = P + \overrightarrow{QQ} = P + Q - Q = P \qquad \forall Q \in \mathcal{A}$$

2. $\forall P \in \mathcal{A}, u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, se tiene que $P + (u+v) = (P+u)+v = R \in A$.

   Sean $Q = P + u,\ R = Q + v \in \mathcal{A}$. Entonces, $u = \overrightarrow{PQ},\ v = \overrightarrow{QR}$, por lo que:

$$P + (u+v) = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = P + \overrightarrow{PR} = R = Q + v = (P+u)+v$$

3. Sean $P, Q, R \in \mathcal{A}, u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ cumpliendo que:

$$\begin{array}{rcl} P+u & = & Q \\ P+v & = & R \end{array}$$

   Entonces, se tiene que $\overrightarrow{QR} = v - u$.

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = P + v - P - u = v - u$$

De las siguientes propiedades, podemos obtener el siguiente ejemplo de gran importancia:

Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = \{p\}$ un conjunto con un único punto. Entonces, tenemos que $\mathcal{A}$ es un espacio afín con:

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{\cdot}: & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{A}} \\ & (p,p) & \longmapsto & \overrightarrow{0} \end{array}$$

Veamos las dos propiedades:

1. $\forall p, q, r \in \mathcal{A}$, se tiene que $p = q = r$. Por tanto:

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{pr}$$

2. Fijado $p \in \mathcal{A}$, tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{A}} \\ & q & \longmapsto & \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0} \end{array}$$

Además, como fijado $p \in \mathcal{A}$ tenemos que φ_p es biyectiva y es constante en $\overrightarrow{0}$, tenemos que $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Definición 1.2 (Traslación)**.** Dado un vector $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, definimos la traslación según v de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} t_v: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & p & \longmapsto & p + v \end{array}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1. *Las traslaciones son movimientos biyectivos.*

Demostración. Sea t_v la traslación a considerar.

Demostremos en primer lugar que es inyectiva. Sean $P, Q \in \mathcal{A}$ tal que se cumple que $t_v(P) = t_v(Q)$. Entonces, $P + v = Q + v$, por lo que $P = Q$ y se tiene que es inyectiva.

Veamos ahora que es sobreyectiva. $\forall Q \in \mathcal{A}$, $\exists P \in \mathcal{A}$ tal que $P + v = Q$ definiendo P como $Q - v$. $\square$

Algunas propiedades que se deducen directamente de la definición son:

1. $t_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{A}}$.
2. $t_v \circ t_w = t_w \circ t_v = t_{v+w}$.
3. $t_v \circ t_{-v} = Id_{\mathcal{A}}$
4. $\{t_v\}_{v\in\vec{\mathcal{A}}}$ es un grupo abeliano.

Definición 1.3 (Centro de Gravedad)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín con $\vec{\mathcal{A}}$. Sea una familia de puntos $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{A}$, con $k \in \mathbb{N}$. Definimos el centro de gravedad o baricentro $G \in \mathcal{A}$ como

$$G = O + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OP_i}, \qquad \forall O \in \mathcal{A}$$

Veamos que la definición no depende del punto O escogido. Escogemos ahora $O' \in \mathcal{A}$ en vez de O. Entonces:

$$\begin{aligned} G &= O' + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{O'P_i} = O' + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = O' + \frac{k}{k}\overrightarrow{O'O} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OP_i} \\ &= O' + O - O' + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OP_i} = O + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OP_i} \end{aligned}$$

Veamos el caso particular de $k = 2$, que nos es de gran importancia por su interpretación geométrica.

Definición 1.4 (Punto medio)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Entonces, dados dos puntos $p, q \in \mathcal{A}$, se define el punto medio entre los puntos p y q como el baricentro de dichos puntos. Es decir,

$$m_{pq} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{aq}) \qquad \forall a \in \mathcal{A}$$

Usando $a = p$, o $a = q$, tenemos:

$$m_{pq} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp}$$

Notemos que, en el caso de que $\mathcal{A}$ sea un espacio euclídeo (se introducirá en el Tema 2), esta definición concuerda con la idea intuitiva de punto medio, ya que $d(p, m_{pq}) = d(q, m_{pq})$.

1.1. Subespacios afines

Definición 1.5 (Subespacios afines)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín con $\vec{\mathcal{A}}$ espacio de direcciones. Un subconjunto $S \subseteq \mathcal{A}$ diremos que es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ si $\exists p \in \mathcal{A}$ y un subespacio vectorial $\vec{F} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ tal que

$$S = p + \vec{F} = \left\{p + v \mid v \in \vec{F}\right\}$$

A $\vec{F}$ lo llamaremos espacio de direcciones (o variedad de direcciones) de S.

Algunas propiedades de los subespacios afines son:

1. $\overrightarrow{F} = \left\{\overrightarrow{PQ} \mid \ Q \in S\right\}$.

   $\subset$) Si $v \in \overrightarrow{F}$, entonces definimos $Q := P+v \in S$. Por tanto, $v = Q-P = \overrightarrow{PQ}$, con $Q \in S$.

   $\supset$) Dado $Q \in S$, tenemos que $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in S$, por lo que $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{F}$.

2. $\overrightarrow{F} = \left\{\overrightarrow{P_1P_2} \mid P_1, P_2 \in S\right\}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2} \in \overrightarrow{F}$$

3. (Unicidad del espacio de direcciones) Consideramos F', F'' subespacios vectoriales de $\overrightarrow{F}$. Entonces,

$$Q + F' = P + F'' = S \Longrightarrow F' = F''$$

   de ahí, que denotemos $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{S}$ y, por tanto,

$$S = p + \overrightarrow{S}$$

Veamos el siguiente resultado de gran importancia, que nos permite trabajar con los subespacios afínes con las mismas propiedades que los espacios afínes.

Proposición 1.2. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y sea $S = p + \overrightarrow{S}$ un subespacio afín. Entonces, S es un espacio afín.*

Demostración. Tenemos que todo punto de S se puede escribir como $p + v$ con $v \in \overrightarrow{S}$. Por tanto, se define $\overrightarrow{\cdot}$ como:

$$\begin{array}{rrcl} \overrightarrow{\cdot}: & S \times S & \longrightarrow & \overrightarrow{S} \\ & (p+v, p+w) & \longmapsto & w - v \end{array}$$

Veamos que cumple las propiedades de espacio afín:

1. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

   Sean $P = p + v,\ Q = p + w,\ R = p + z \in S$. Entonces,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = w - v + z - w = z - v = \overrightarrow{PR}$$

2. Fijado $P = p + v \in S$, tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_P: & S & \longrightarrow & \overrightarrow{S} \\ & Q = p + w & \longmapsto & w - v \end{array}$$

   Veamos que es inyectiva. Sean $Q_1 = p + w_1, Q_2 = p + w_2 \in S$ tal que $\varphi_P(Q_1) = \varphi_P(Q_2)$. Entonces, $w_1 - v = w_2 - v$, por lo que $w_1 = w_2$ y se tiene que es inyectiva.

   Veamos ahora que es sobreyectiva. $\forall w \in \overrightarrow{S}$, $\exists Q \in S$ tal que $\varphi_P(Q) = w$ definiendo Q como $p + w$.

□

Definición 1.6. La dimensión de un espacio afín $\mathcal{A}$ es la dimensión de su variedad de direcciones

$$\dim \mathcal{A} := \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

A veces, lo notaremos como $\mathcal{A}^n$, con $n = \dim \mathcal{A}$.

Algunos subespacios afines $S \subset \mathcal{A}$ con determinadas dimensiones tienen nombre concreto, que son:

- $\dim S = 0$: Punto.
- $\dim S = 1$: Recta.
- $\dim S = 2$: Plano.
- $\dim S = \dim \mathcal{A} - 1$: Hiperplano.

Proposición 1.3. *Dados $P, Q \in \mathcal{A}$, $P \neq Q$, tenemos que $\exists_1$ recta r tal que $P, Q \in r$.*

Demostración. El espacio de direcciones es $\overrightarrow{r} = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{PQ}\right)$. Por tanto, tenemos que existe una recta $r = P + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{PQ}\right)$.

Supongamos que existe otra recta $r' = P + \mathcal{L}(v)$. Como $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{r'}$, entonces podemos tomar $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{PQ}\right)$, por lo que tienen la misma variedad de direcciones y, por tanto, es la misma recta. □

Operaciones con subespacios afines

Proposición 1.4 (Intersección)**.** *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\bigcap\limits_{i\in I} S_i \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap\limits_{i\in I} S_i$ es un subespacio afín con variedad de direcciones*

$$\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} S_i} = \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$$

Demostración. Como $\bigcap\limits_{i\in I} S_i \neq \emptyset$, sea $p \in \bigcap\limits_{i\in I} S_i$. Demostremos que $\bigcap\limits_{i\in I} S_i = p + \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$.

$\subset$) Tomamos $q \in \bigcap\limits_{i\in I} S_i$, por lo que $\overrightarrow{pq} \in \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$. Por tanto, queda demostrada esta inclusión.

$\supset$) Sea $q \in p + \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$. Entonces, $q = p + v$ con $v \in \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$. Por tanto, $q \in S_i$, $\forall i \in I$ y, por consiguiente, $q \in \bigcap\limits_{i\in I} S_i$.

□

Definición 1.7 (Suma afín)**.** Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Llamamos suma afín de S y T (o subespacio afín generado por S y T), denotado por $S \vee T$, al subespacio afín más pequeño que contiene a S y T.

De la propia definición se deduce la forma de calcularla:

$$\Gamma = \{F \subset \mathcal{A} \mid F \text{ subespacio afín de } \mathcal{A} \ \land \ (S \cup T) \subset F\}$$

$$\bigcap_{F \in \Gamma} F = S \vee T$$

Además, $S \vee T$ es un espacio afín ya que es una intersección no vacía, ya que $(S \cup T) \subset (S \vee T)$.

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines dados por $S = p + \overrightarrow{S}$, $T = q + \overrightarrow{T}$. Tenemos que*

$$S \vee T = p + \left[\mathcal{L}\left(\overrightarrow{pq}\right) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right]$$

Demostración. Definimos previamente $X := p + \left[\mathcal{L}\left(\overrightarrow{pq}\right) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right] = p + \overrightarrow{X}$. Veamos que $S \vee T = X$.

$\subset$) Como $\overrightarrow{S} \subset \mathcal{L}\left(\overrightarrow{pq}\right) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{X}$ y $p \in S$ (y por tanto en X), tenemos que:

$$S = p + \overrightarrow{S} \subset p + \overrightarrow{X} = X$$

Como $\overrightarrow{T} \subset \mathcal{L}\left(\overrightarrow{pq}\right) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{X}$ y $q \in T$ (y por tanto en X), tenemos que:

$$T = q + \overrightarrow{T} \subset q + \overrightarrow{X} = p + \overrightarrow{X} = X$$

Como $S, T \subset X$, entonces $S \vee T \subset X$ por ser $S \vee T$ el subespacio afín más pequeño que contiene a S y T.

$\supset$) Veamos que $\overrightarrow{X} \subset \overrightarrow{S \vee T}$.

Como $S, T \subset S \vee T$, entonces $\overrightarrow{S}, \overrightarrow{T} \subset \overrightarrow{S \vee T}$, por lo que $\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} \subset \overrightarrow{S \vee T}$.

Además, como $p, q \in S \cup T \subset S \vee T$, tenemos que $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S \vee T}$, por lo que $\mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\} \subset \overrightarrow{S \vee T}$.

Por tanto, $\overrightarrow{X} \subset \overrightarrow{S \vee T}$. Además, como $p \in S$, tenemos que $p \in S \vee T$. Por tanto, se tiene que $X \subset S \vee T$.

□

Notación. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y consideramos $q_0, \ldots, q_k \in \mathcal{A}$. Definimos el subespacio afín generado por los puntos $\{q_i\}$ como:

$$\bigvee_{i=0}^{k} \{q_i\} = \langle q_0, \ldots, q_k \rangle$$

Proposición 1.6. *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines dados por $S = p + \overrightarrow{S}$, $T = q + \overrightarrow{T}$. Tenemos que*

$$S \cap T \neq \emptyset \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} \in \left(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right)$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea $p_0 \in S \cap T$. Entonces, $\overrightarrow{p_0 p} \in \overrightarrow{S}$ y $\overrightarrow{p_0 q} \in \overrightarrow{T}$. Por tanto,

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q} \in (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})$$

$\Longleftarrow$) Como $\overrightarrow{pq} \in (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})$, considerando $u \in \overrightarrow{S}$ y $v \in \overrightarrow{T}$ tenemos que $\overrightarrow{pq} = u + v$. Entonces, $q = p + \overrightarrow{pq} = p + u + v$. Entonces, $q - v \in T$ y $p + u \in S$, por lo que $q - v = p + u \in S \cap T$.

□

Corolario 1.6.1. *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Se tiene que*

$$\overrightarrow{S \vee T} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} \Longleftrightarrow S \cap T \neq \emptyset$$

Teorema 1.7 (Dimensiones)**.** *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines de $\mathcal{A}$ de dimensión finita. Entonces, tenemos que:*

- *Si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces,*

$$\dim(S \vee T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$$

- *Si $S \cap T = \emptyset$, entonces,*

$$\dim(S \vee T) + \dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right) = \dim S + \dim T + 1$$

Demostración. Distinguimos para cada caso:

- Si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces tenemos que es un subespacio afín. Además,

$$\begin{aligned}
\dim(S \cap T) = \dim\left(\overrightarrow{S \cap T}\right) &= \dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right) = \dim \overrightarrow{S} + \dim \overrightarrow{T} - \dim\left(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right) \\
&= \dim S + \dim T - \dim\left(\overrightarrow{S \vee T}\right) = \dim S + \dim T - \dim(S \vee T)
\end{aligned}$$

- Si $S \cap T = \emptyset$, entonces por la definición de $S \vee T$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dim(S \vee T) = \dim\left(\overrightarrow{S \vee T}\right) &= \dim\left(\mathcal{L}(\overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right) = \\
&= 1 + \dim\left(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right) - \cancel{\dim\left[\mathcal{L}(\overrightarrow{pq}) \cap \left(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right)\right]} \\
&= 1 + \dim \overrightarrow{S} + \dim \overrightarrow{T} - \dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right) \\
&= 1 + \dim S + \dim T - \dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right)
\end{aligned}$$

  donde hemos aplicado que $\mathcal{L}(\overrightarrow{pq}) \cap \left(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}\right) = \{0\}$ por la Proposición 1.6.

□

Definición 1.8. Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Decimos que S y T son secantes si tienen intersección no nula:

$$S \text{ y } T \text{ son secantes} \iff S \cap T \neq \emptyset$$

Definición 1.9 (Paralelismo)**.** Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Decimos que

$$S \text{ es paralelo a } T \iff \overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}$$

Por doble inclusión, diremos que son S y T son paralelos, notado como $S \| T$, si y solo si $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$:

$$S \| T \iff \overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$$

Notemos que si S paralelo a T y son secantes ($S \cap T \neq \emptyset$), entonces $S \subset T$. Además, supuesto $S \cap T \neq \emptyset$, se tiene que $S \| T \iff S = T$.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Decimos que S y T se cruzan si se dan a la vez las siguientes condiciones:

1. S no es paralelo a T,
2. T no es paralelo a S,
3. No son secantes ($S \cap T = \emptyset$).

Definición 1.11. Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines. Decimos que S y T son complementarios (o suplementarios) si y solo si:

$$\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$$

Proposición 1.8. *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Consideramos S, T subespacios afines dados por $S = p + \overrightarrow{S}$, $T = q + \overrightarrow{T}$. Si S y T son complementarios, entonces:*

$$S \vee T = \mathcal{A} \quad \wedge \quad S \cap T = \{t\},\ t \in \mathcal{A}$$

Demostración. Calculamos en primer lugar la variedad de direcciones de la suma afín:

$$\overrightarrow{S \vee T} = \mathcal{L}(\overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} = \mathcal{L}(\overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

Por tanto, $S \vee T = p + \overrightarrow{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Veamos ahora el valor de la intersección.

Como $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$, la Proposición 1.6 nos asegura que $S \cap T \neq \emptyset$. Por la fórmula de dimensiones, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dim(S \cap T) &= \dim S + \dim T - \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim \mathcal{A} = \\
&= \dim \overrightarrow{S} + \dim \overrightarrow{T} - \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = \dim \overrightarrow{S} + \dim \overrightarrow{T} - \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) = \\
&= \cancel{\dim \overrightarrow{S}} + \cancel{\dim \overrightarrow{T}} - \cancel{\dim \overrightarrow{S}} - \cancel{\dim \overrightarrow{T}} + \dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right) = 0
\end{aligned}$$

donde he aplicado que $\dim\left(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}\right) = 0$ por ser $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$. Por tanto, como $\dim(S \cap T) = 0$, tenemos que la intersección es un punto. $\square$

1.2. Sistemas de referencias afines

Definición 1.12. Sea $\mathcal{A}$ espacio afín, y consideramos $k \in \mathbb{N}$. Diremos que los puntos $\{p_0, \ldots, p_k\}$, con $p_i \in \mathcal{A}$, son afínmente independientes si y solo si $\langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle$ es un subespacio afín de dimensión k.

Proposición 1.9. *Sea $\mathcal{A}$ espacio afín, y consideramos $k \in \mathbb{N}$. Los puntos $\{p_0, \ldots, p_k\}$, con $p_i \in \mathcal{A}$ $\forall i = 1, \ldots, k$, son afínmente independientes si y solo si se tiene que el conjunto $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Calculemos en primer lugar la suma afín de dichos puntos:

$$\bigvee_{i=0}^{k} \{p_i\} = \langle p_0, \ldots, p_k \rangle = p_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_0p_1}\} + \cdots + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_0p_k}\} = p_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$$

Demostramos ahora por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\{p_0, \ldots, p_k\}$ son afínmente independientes. Entonces:

$$\dim \langle p_0, \ldots, p_k \rangle = \dim \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\} = k$$

Por tanto, conjunto de vectores es linealmente independiente.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ es linealmente independiente, por lo que se tiene $\dim \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\} = k$. Por tanto, $\dim \langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle = k$, por lo que los puntos $\{p_0, \ldots, p_k\}$ son afínmente independientes.

□

Notemos que no es relevante el orden para ser considerados afínmente independientes aunque, como veremos en siguientes definiciones sí será relevante el orden.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{A}$ espacio afín. Si $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ es un conjunto de puntos afínmente independientes, diremos que $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia afín.

Por la Proposición 1.9, dar un sistema de referencia afín es equivalente a dar un punto p_0 y una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, de forma que

$$\mathcal{R} = \{p_0, p_0 + v_1, p_0 + v_2, \ldots, p_0 + v_n\} = \{p_0, \mathcal{B}_\mathcal{R} = \{v_1, \ldots, v_n\}\}$$

Diremos que p_0 es el origen del sistema de referencia, y $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ es la base asociada al sistema de referencia.

Fijado $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}_\mathcal{R}\}$, tenemos que existe una biyección

$$\begin{array}{rccc} f_\mathcal{R}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & q & \longmapsto & \overrightarrow{p_0q}_{\mathcal{B}_\mathcal{R}} \end{array}$$

Diremos que $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de q en $\mathcal{R}$, y lo notaremos de la forma $p_\mathcal{R} = (x_1, \ldots, x_n)$. Es importante notar que, como las coordenadas en $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ son únicas, las coordenadas de un punto en un sistema de referencia también son únicas.

Definición 1.14. Sea $\mathbb{R}^n$. Notamos como sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^n$ a:

$$\mathcal{R}_0 = \{(0, \dots, 0), \mathcal{B}_u\}$$

donde $\mathcal{B}_u$ denota la base usual.

Tenemos que, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\overrightarrow{0x} = x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$$

por tanto, las componentes de un punto de $\mathbb{R}^n$ coinciden con sus coordenadas en el sistema de referencia usual.

Proposición 1.10. *Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en un espacio afín $\mathcal{A}$, con base asociada $\mathcal{B}$. Entonces,*

1. $(p+v)_{\mathcal{R}} = p_{\mathcal{R}} + v_{\mathcal{B}}, \qquad \forall p \in A, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.
2. $(\overrightarrow{pq})_{\mathcal{B}} = q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}}, \qquad \forall p, q \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{R} = \{a_0, \mathcal{B}\}$ el sistema de referencia, con $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Veamos cada apartado:

1. Por definición de coordenadas en un sistema de referencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n) &\Longleftrightarrow p = a_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \\ (p+v)_{\mathcal{R}} = (z_1, \dots, z_n) &\Longleftrightarrow p + v = a_0 + z_1 v_1 + \dots + z_n v_n \end{aligned}$$

Por definición de las coordenadas en un espacio vectorial, tenemos que:

$$v_{\mathcal{B}} = (y_1, \dots, y_n) \Longleftrightarrow v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

Por la igualdad triangular, tenemos que:

$$\overrightarrow{a_0(p+v)} = \overrightarrow{a_0 p} + \overrightarrow{p(p+v)} = \overrightarrow{a_0 p} + (p+v) - p = \overrightarrow{a_0 p} + v$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_0(p+v)} &= \overrightarrow{a_0(a_0 + z_1 v_1 + \dots + z_n v_n)} = z_1 v_1 + \dots + z_n v_n \\ \overrightarrow{a_0 p} + v &= \overrightarrow{a_0(a_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)} + (y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \\ &= (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \\ &= (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_n + y_n) v_n \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{a_0(p+v)} = \overrightarrow{a_0 p} + v$, por la unicidad de coordenadas de un vector en la misma base, tenemos que ambos resultados son iguales. Por tanto, sumando el origen,

$$a_0 + z_1 v_1 + \dots + z_n v_n = a_0 + (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_n + y_n) v_n \Longrightarrow (p+v)_{\mathcal{R}} = p_{\mathcal{R}} + v_{\mathcal{B}}$$

2. Tenemos que $(p+\overrightarrow{pq})_{\mathcal{R}} = p_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{pq}_{\mathcal{B}}$ por el apartado anterior. Por tanto,

$$(\overrightarrow{pq})_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{pq}_{\mathcal{B}} = (p+\overrightarrow{pq})_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}}$$

$\square$

Veamos ahora cómo calcular las ecuaciones de un subespacio afín en un sistema de referencia dado.

Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y sea S un subespacio afín de $\mathcal{A}$, con $\mathcal{B}_{\overrightarrow{S}} = \{w_1, \dots, w_k\}$ base de $\overrightarrow{S}$, y elegimos $p_0 \in S$. Consideramos también $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}$. Tenemos que cualquier punto $p \in S$ es de la forma:

$$p = p_0 + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$$
$$p_{\mathcal{R}} = p_{0\mathcal{R}} + \lambda_1 w_{1\mathcal{B}_{\mathcal{R}}} + \dots + \lambda_k w_{k\mathcal{B}_{\mathcal{R}}}$$

Consideramos las coordenadas de $p_{0\mathcal{R}} = (c_1, \dots, c_n)$ y los vectores de $\mathcal{B}_{\overrightarrow{S}}$ en la base $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ como $(w_i)_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}}} = (d_{1i}, \dots, d_{ni})$ para $i = 1, \dots, k$.

Entonces, si escribo las coordenadas de $p_{\mathcal{R}}$ como $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)$, se obtienen las llamadas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} d_{1k} \\ \vdots \\ d_{nk} \end{pmatrix}$$

Despejando los parámetros y sustituyendo en el resto de ecuaciones, obtenemos las ecuaciones implícitas (o cartesianas) de S en $\mathcal{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & r_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{(n-k)1}x_1 & + & \dots & + & a_{(n-k)n}x_n & = & r_{n-k} \end{array} \right.$$

Es importante notar que habrá $n-k$ ecuaciones.

Ejemplo. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathbb{R}^2$ con origen en $a_0 = (1,0)$ y base $\mathcal{B} = \{(1,1), (-2,2)\}$.

Calculamos las ecuaciones de la recta afín que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene vector director el $(1,0)$.

Si $p \in S$ es un punto arbitrario de la recta, sean sus coordenadas $p_{\mathcal{R}} = (x,y)$. Entonces $p = (1,1) + \lambda(1,0)$, por lo que:

$$p_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Calculamos las coordenadas que me faltan. Sea $(1,1)_{\mathcal{R}} = (c_1, c_2)$. Entonces:

$$(1,1) = (1,0) + c_1(1,1) + c_2(-2,2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = c_1 - 2c_2 \Longrightarrow c_1 = \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 = c_1 + 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

Entonces, $(1,1)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Sea $(1,0)_{\mathcal{B}} = (d_{11}, d_{12})$. Entonces:

$$(1,0) = d_{11}(1,1) + d_{12}(-2,2) \Longrightarrow \begin{cases} 1 = d_{11} - 2d_{12} \Longrightarrow d_{12} = -\dfrac{1}{4} \\ \\ 0 = d_{11} + 2d_{12} \Longrightarrow d_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces, $(1,0)_{\mathcal{B}} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, por lo que sus ecuaciones paramétricas son:

$$p_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Para obtener las ecuaciones cartesianas, tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \lambda \cdot \frac{1}{4} \Longrightarrow \lambda = -4x + 2 \\ y &= \frac{1}{4} + \lambda \cdot \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = 2y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Igualando los valores de λ, obtenemos la ecuación implícita:

$$-4x + 2 = 2y - \frac{1}{2} \Longrightarrow 2y + 4x = \frac{5}{2}$$

1.2.1. Cambio de sistema de referencia

Consideramos dos sistemas de referencia, $\mathcal{R} = \{a_0, \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}' = \{a_0', \mathcal{B}'\}$ en un espacio afín $\mathcal{A}^n$. Entonces, si $p \in \mathcal{A}$, podemos considerar

$$\begin{cases} p_{\mathcal{R}} &= (x_1, \dots, x_n) \\ p_{\mathcal{R}'} &= (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Si $p = a_0 + \overrightarrow{a_0p}$, tenemos que $p_{\mathcal{R}'} = a_{0\mathcal{R}'} + (\overrightarrow{a_0p})_{\mathcal{B}'}$.
Sea la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la siguiente:

$$A = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, si llamamos $a_{0\mathcal{R}'} = (b_1, \dots, b_n)$, entonces,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, podemos expresarlo como:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right)$$

1.3. Aplicaciones afines

Definición 1.15. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines. Diremos que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es una aplicación afín si $\exists a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{f_a}: & \overrightarrow{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \\ & \overrightarrow{aq} & \longmapsto & \overrightarrow{f(a)f(q)} \end{array}$$

es una aplicación lineal.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_a"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, "\varphi_{f(a)}"] \\ \overrightarrow{\mathcal{A}} \arrow[r, "\overrightarrow{f}"] & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diagrama conmutativo de una aplicación lineal.

Veamos que la aplicación lineal asociada a una aplicación afín no depende del punto $a \in \mathcal{A}$ dado:

Proposición 1.11. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines, y sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín. Entonces:*

$$\overrightarrow{f_a} = \overrightarrow{f_b} \qquad \forall b \in \mathcal{A}$$

Demostración. Supongamos que $\exists a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{f_a}: & \overrightarrow{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \\ & \overrightarrow{aq} & \longmapsto & \overrightarrow{f(a)f(q)} \end{array}$$

es una aplicación lineal. Entonces, $\forall b \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{f_b}(\overrightarrow{bx}) = \overrightarrow{f(b)f(x)} = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(x)} = -\overrightarrow{f_a}(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f_a}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{f_a}(\overrightarrow{ax} - \overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f_a}(\overrightarrow{bx})$$

□

Como el resultado anterior es cierto para todo $b \in \mathcal{A}$, tenemos que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_a} = \overrightarrow{f_b}$. Notamos entonces $\overrightarrow{f}$ como la aplicación lineal asociada a f.

Corolario 1.11.1. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines, y sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín. Entonces, se tienen:*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) & = & \overrightarrow{f(x)f(y)} & \forall x, y \in \mathcal{A} \\ f(p+v) & = & f(p) + \overrightarrow{f}(v) & \forall p \in \mathcal{A},\ v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \end{array} \right.$$

Demostración. El primer resultado es evidente. Para el segundo, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{p(p+v)}\right) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} = f(p+v) - f(p) \qquad \forall p \in \mathcal{A},\ v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

□

Ejemplo. Algunos ejemplos de aplicaciones afines son:

1. $Id_{\mathcal{A}}$, con aplicación lineal asociada $Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$
2. Sea S un subespacio afín de $\mathcal{A}$. Entonces, $i_S : S \to A$ aplicación inclusión es afín, con $\overrightarrow{i_S} = i_{\overrightarrow{S}}$, monomorfismo inclusión.
3. Las aplicaciones constantes $f_q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, donde $f_q(p) = q$ para todo $p \in \mathcal{A}$. Tenemos que $\overrightarrow{f_q} = 0$ aplicación lineal nula (constante en 0). Esto se ve debido a que:
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_2}) = \overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} = \overrightarrow{qq} = \overrightarrow{0}$$
4. Sean V, V' son espacios vectoriales (que por consiguiente también tienen estructura de espacio afín). Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces es afín con $\overrightarrow{f} = f$.
5. φ_p es una aplicación afín, con $\overrightarrow{\varphi_p} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$. Veámoslo:
$$\overrightarrow{\varphi_p}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi_p(p)\varphi_p(q)} = \overrightarrow{\overrightarrow{0}\,\overrightarrow{pq}} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{pq} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{pq})$$
6. Fijado $v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, tenemos que la traslación t_{v_0} es una aplicación afín.

   Su aplicación lineal asociada es la identidad en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, ya que:
$$\overrightarrow{t_{v_0}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{(p+v_0)(q+v_0)} = \overrightarrow{pq} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{pq})$$

Teorema 1.12. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines, y consideramos $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicaciones afines. Entonces:*
$$f = g \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g} \quad \wedge \quad \exists a \in \mathcal{A} \mid f(a) = g(a)$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Trivialmente por ser $f = g$.

$\Longleftarrow)$ Sea $a \in \mathcal{A}$ el punto en el que $f(a) = g(a)$. Consideramos el punto $q \in \mathcal{A}$ tal que $q = a + \overrightarrow{aq}$. Entonces:
$$f(q) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{aq}) = g(a) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{aq}) = g(q)$$

□

Respecto a la figura 1.1, se puede ampliar con las aplicaciones inversas de φ, ya que por definición esta es biyectiva.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\varphi_a"] & \mathcal{A}' \arrow[d, shift left, "\varphi_{f(a)}"] \\
\overrightarrow{\mathcal{A}} \arrow[r, "\overrightarrow{f}"] \arrow[u, shift left, "(\varphi_a)^{-1}"] & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \arrow[u, shift left, "(\varphi_{f(a)})^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2: Diagrama conmutativo de una aplicación lineal con inversas.

Tenemos por tanto el siguiente resultado, directo de la definición de aplicación afín:

Proposición 1.13. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines, y consideramos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín. Entonces:*

$$f \text{ inyectiva (sobreyectiva, biyectiva)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \text{ inyectiva (sobreyectiva, biyectiva).}$$

Demostración. En la figura 1.2 vemos claro que $f = (\varphi_{f(a)})^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \varphi_a$, con ambas $\varphi_a, (\varphi_{f(a)})^{-1}$ biyectivas. Entonces, tenemos directamente el resultado. □

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.14. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ tres espacios afines, y consideramos las aplicaciones afines $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}', g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$.*

Entonces, $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ es una aplicación afín con $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_a"] & \mathcal{A}' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_{f(a)}"] & \mathcal{A}'' \arrow[d, "\varphi_{(g\circ f)(a)}"] \\
\overrightarrow{\mathcal{A}} \arrow[r, "\overrightarrow{f}"] & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \arrow[r, "\overrightarrow{g}"] & \overrightarrow{\mathcal{A}''}
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3: Diagrama conmutativo de la composición de aplicaciones lineales.

Corolario 1.14.1. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos espacios afines, y consideramos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín biyectiva, con $f^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ su inversa. Entonces f^{-1} es afín, con $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.*

Demostración. Como f^{-1} es la inversa de f, tenemos que $f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{A}}$, y por tanto, $\overrightarrow{f^{-1}} \circ \overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$, por lo que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$. □

Corolario 1.14.2. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ espacios afines, y consideramos S subespacio afín de $\mathcal{A}$. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín.*

Entonces, $f(S)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}'$, con $\overrightarrow{f(S)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{S}\right)$.

Demostración. Esto se debe a que $f(S) = f_{|S} = f \circ i_S$, con ambas aplicaciones afines. Entonces, como la composición de aplicaciones afines es afín, tenemos que

$$\overrightarrow{f(S)} = \overrightarrow{f \circ i_S} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{i_S} = \overrightarrow{f} \circ i_{\overrightarrow{S}} = \overrightarrow{f}_{|\overrightarrow{S}} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{S}\right)$$

□

Corolario 1.14.3. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ espacios afines, y consideramos S' subespacio afín de $\mathcal{A}'$. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín.*

Si $f^{-1}(S') \neq \emptyset$, entonces, $f^{-1}(S')$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$, con

$$\overrightarrow{f^{-1}(S')} = \overrightarrow{f}^{-1}\left(\overrightarrow{S'}\right)$$

1.3.1. Determinación de una aplicación afín

Veamos en primer lugar que una aplicación afín la podemos definir mediante las imágenes de los puntos que forman un sistema de referencia:

Teorema 1.15 (Fundamental de la Geometría Afín)**.** *Sean $\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}'$ espacios afines. Dado $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$ sistema de referencia en $\mathcal{A}$ y $\{q_0, \dots, q_n\}$ puntos de $\mathcal{A}'$, tenemos que $\exists_1 f$ aplicación afín tal que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}' \\ & p_i & \longmapsto & q_i \qquad \forall i = 0, \dots, n \end{array}$$

Demostración. Como $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ es una base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, y sabemos que una aplicación lineal viene determinada por las imágenes de los elementos de la base, tenemos que:

$$\begin{array}{rccc} \exists_1 \overrightarrow{f}: & \overrightarrow{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \\ & \overrightarrow{p_0p_i} & \longmapsto & \overrightarrow{q_0q_i} \qquad \forall i = 0, \dots, n \end{array}$$

Definimos la aplicación f tal que $f(p) = q_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p})$. Veamos que cumple la condición pedida:

- Para $i = 0$, tenemos que $f(p_0) = q_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = q_0 + \overrightarrow{0}' = q_0$.
- Para $i = 1, \dots, n$, tenemos que $f(p_i) = q_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$.

Veamos ahora que f es afín, con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$. Como $\overrightarrow{f}$ es una aplicación lineal, tan solo falta demostrar que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = f(q) - f(p) = \cancel{q_0} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q}) - \cancel{q_0} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p}) \overset{(*)}{=} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq})$$

donde en $(*)$ he aplicado que $\overrightarrow{f}$ es una aplicación lineal. Por tanto, la existencia está demostrada.

Demostremos ahora la unicidad. Sea $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ otra aplicación afín que cumple la misma condición. Entonces, comprobemos que las imágenes de $\overrightarrow{f}$ y $\overrightarrow{g}$ coinciden para los elementos de la base $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{g(p_0)g(p_i)} = \overrightarrow{q_0q_i} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Por tanto, como coinciden las imágenes para los elementos de la base, tenemos que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$. Además, $\forall i = 0, \dots, n$ se tiene que $f(p_i) = q_i = g(p_i)$. Entonces, por el teorema 1.12, tenemos que $f = g$, y queda demostrada la unicidad. □

Veamos ahora cómo podemos expresar una aplicación afín en función de los sistemas de referencia. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ dos espacios afines con sistemas de referencia dados por $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\} = \{p_0, \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R}' = \{q_0, \dots, q_m\} = \{q_0, \mathcal{B}'\}$ respectivamente. Entonces, dado $q = p_0 + \overrightarrow{p_0q} \in \mathcal{A}$, se tiene que $f(q) = f(p_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q})$. Entonces, en los sistemas de referencia, tenemos:

$$f(q)_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q})_{\mathcal{B}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right)(\overrightarrow{p_0q})_{\mathcal{B}} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) q_{\mathcal{R}}$$

Matricialmente, se tendría que:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline f(q)_{\mathcal{R}'} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline q_{\mathcal{R}} \end{array}\right)$$

Sean $f(q)_{\mathcal{R}'} = (y_1, \dots, y_m)$, $f(p_0)_{\mathcal{R}'} = (b_1, \dots, b_m)$, $q_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)$ y, por último, sean $\overrightarrow{f}(v_i)_{\mathcal{B}'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{q_0 q_i})_{\mathcal{B}'} = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$. Entonces, tenemos que la ecuación anterior se expresa matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, podemos expresarlo como:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right)$$

Notamos $M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$ a dicha matriz:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Con esa notación, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.16. *Sean $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ y $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ dos aplicaciones afines, y sean $\mathcal{R}, \mathcal{R}', \mathcal{R}''$ tres sistemas de referencia en $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$, respectivamente. Se tiene que:*

$$M(g \circ f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'') = M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$$

Demostración. Sean las matrices implicadas en el teorema las siguientes:

$$M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline g(p_0)_{\mathcal{R}''} & M\left(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''\right) \end{array}\right) \qquad M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \end{array}\right)$$

Entonces:

$$M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline g(p_0')_{\mathcal{R}''} + M(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M\left(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''\right) \cdot M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline g(p_0')_{\mathcal{R}''} + M(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') \end{array}\right)$$

Veamos la caja inferior izquierda, que es la que difiere de la matriz buscada:

$$g(p_0')_{\mathcal{R}''} + M(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')f(p_0)_{\mathcal{R}'} = g(p_0')_{\mathcal{R}''} + M(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\overrightarrow{p_0'f(p_0)}_{\mathcal{B}'} =$$
$$= g(p_0')_{\mathcal{R}''} + (\overrightarrow{g(p_0')g(f(p_0))})_{\mathcal{B}''} = \cancel{g(p_0')_{\mathcal{R}''}} + (g\circ f)(p_0)_{\mathcal{R}''} - \cancel{g(p_0')_{\mathcal{R}''}} = (g\circ f)(p_0)_{\mathcal{R}''}$$

Por tanto:

$$M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'')\cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (g\circ f)(p_0)_{\mathcal{R}''} & M(\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') \end{array}\right) := M(g\circ f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'')$$

Por tanto, se tiene lo pedido. □

Proposición 1.17. *Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y consideramos la identidad en $\mathcal{A}$. Sea también $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathcal{A}$. Entonces,*

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = Id_{n+1}$$

Demostración. Tenemos que $M(Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, \mathcal{B}) = Id_n$. Además, tenemos que $f(p_0) = p_0 \equiv 0_{\mathcal{R}}$. Por tanto,

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = Id_{n+1}$$

□

Corolario 1.17.1. *Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín, y sea $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ dos sistemas de referencia en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, respectivamente. Se tiene que:*

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1}$$

Demostración. Por lo visto hasta el momento, tenemos que:

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = M(f^{-1}\circ f, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = Id_{n+1}$$

Por tanto, como el resultado de la multiplicación es la identidad, tenemos que:

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1}$$

□

Corolario 1.17.2. *Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín, y sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ dos sistemas de referencia en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2'$ dos sistemas de referencia en $\mathcal{A}'$. Se tiene que:*

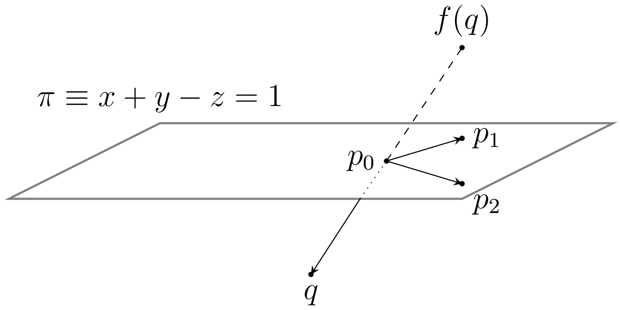
$$M(f, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2') = M(Id_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2') \cdot M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1') \cdot M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

Demostración. Usando el teorema anterior, tenemos que:

$$M(Id_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2') \cdot M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1') \cdot M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$
$$= M(Id_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2') \cdot M(f\circ Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1') = M(Id_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2') \cdot M(f, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1') =$$
$$= M(Id_{\mathcal{A}'}\circ f, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2') = M(f, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2')$$

□

Ejemplo. Sea el espacio afín $\mathbb{R}^3$, y consideramos el plano afín dado por la ecuación $\pi \equiv x + y - z = 1$. Hallar la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(0,0,0) = (1,1,0)$ y $f(p) = p, \ \forall p \in \pi$.



Tenemos que $\overrightarrow{\pi} \equiv x + y - z = 0$. Tomemos como los dos primeros vectores del sistema de referencia dos vectores linealmente independientes del plano:

$$v_1 = (1, -1, 0) \qquad v_2 = (1, 0, 1)$$

Para obtener una base, tenemos que nos falta un vector. Notemos $q = (0,0,0)$, y sea $p_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in \pi$, y tenemos que $v_3 = \overrightarrow{p_0 q} = q - p_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. Entonces, tomando el sistema de coordenadas $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, q\} = \{p_0, \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}\}$, se tiene que $p_{0\mathcal{R}} = (0,0,0)$. Además, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v_i) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)} \overset{(*)}{=} \overrightarrow{p_0 p_i} = v_i \qquad \forall i = 1, 2$$

donde en $(*)$ he aplicado que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{\pi}$, por lo que $p_0, p_1, p_2 \in \pi$. Además,

$$\overrightarrow{f}(v_3) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0 q}) = \overrightarrow{f(p_0) f(q)} = \overrightarrow{p_0 f(q)} = f(q) - p_0 = (1,1,0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = -v_3$$

Por tanto, tenemos que la matriz que describe $\overrightarrow{f}$ es:

$$M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $f(p_0) = p_0$, tenemos que $f(p_0)_\mathcal{R} = (0,0,0)$. Por tanto,

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Buscamos ahora expresarlo en el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0$. Tenemos que $f(0,0,0) = (1,1,0)$. Buscamos ahora $M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u, \mathcal{B}_u)$. Esta es:

$$\begin{aligned}
M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u, \mathcal{B}_u) &= M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_u) \cdot M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}_u, \mathcal{B}) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.3.2. Aplicaciones afines notables

Estas son las traslaciones, homotecias, proyecciones y simetrías. Para clasificarlas, se emplea la noción de punto fijo, descrita a continuación.

Definición 1.16 (Punto fijo)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y consideramos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín. Decimos que $p \in \mathcal{A}$ es un punto fijo de f si y solo si $f(p) = p$.
También decimos que f deja invariante a p.

Denotamos por $\mathcal{P}_f$ al conjunto de puntos fijos de f:

$$\mathcal{P}_f = \{p \in \mathcal{A} \mid f(p) = p\} \subset \mathcal{A}$$

Traslaciones

Recordamos que están descritas en la Definición 1.2.
Veamos este teorema, que es la generalización de un resultado de gran utilidad que veremos más adelante.

Teorema 1.18. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ espacios afines, y consideramos $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicaciones afines. Entonces:*

$$\exists v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{A}'} \mid f = t_{v_0} \circ g \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$$

Además, en ese caso $v_0 = \overrightarrow{g(p)f(p)} \in \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ para todo $p \in \mathcal{A}$ (el vector v no depende de $p \in \mathcal{A}$).

Demostración.

$\Longleftarrow$) Sea $v_0 = \overrightarrow{g(p)f(p)}$ $\forall p \in \mathcal{A}'$. Veamos que no depende del valor de p:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{g(p)f(p)} = \overrightarrow{g(p')f(p')} \Longleftrightarrow f(p) - g(p) = f(p') - g(p') \Longleftrightarrow \\
&\qquad \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(p')f(p)} = \overrightarrow{g(p')g(p)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p'p}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{p'p}) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \overrightarrow{p'p} = \overrightarrow{p'p}
\end{aligned}$$

lo cual es cierto para todo $p, p' \in \mathcal{A}$. Además, en $(*)$ he aplicado que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. Por tanto, tenemos que $v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ no depende del valor de p escogido.

Veamos que $f = t_{v_0} \circ g$:

$$(t_{v_0} \circ g)(p) = t_{v_0}(g(p)) = g(p) + v_0 = g(p) + \overrightarrow{g(p)f(p)} = f(p) \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

$\Longrightarrow$) Se tiene que:

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_{v_0} \circ g} = \overrightarrow{t_{v_0}} \circ \overrightarrow{g} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}'}} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$$

Veamos ahora el valor de v_0. Tenemos que $f(p) = t_{v_0}(g(p)) = g(p) + v_0$, por lo que $v_0 = f(p) - g(p) = \overrightarrow{g(p)f(p)}$.

□

En el teorema anterior, tomando $g = Id_{\mathcal{A}}$, tenemos el siguiente resultado, que nos es de gran utilidad para caracterizar las traslaciones.

Corolario 1.18.1. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces:*

$$\exists v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \mid f = t_{v_0} \Longleftrightarrow f \text{ es afín } \wedge \overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$$

Además, en ese caso $v_0 = \overrightarrow{pf(p)} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ para todo $p \in \mathcal{A}$ (el vector v no depende de $p \in \mathcal{A}$).

Además, es importante notar que:

$$\mathcal{P}_{t_v} \neq \emptyset \Longleftrightarrow v = \overrightarrow{0}.$$

Un aspecto importante de las traslaciones es que llevan rectas en rectas paralelas. Esto se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.19. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una traslación afín según el vector $v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. Entonces, f lleva rectas en rectas paralelas. Es decir,*

$$f(R) \| R \qquad \forall R \subset \mathcal{A}$$

Demostración. Sea $R = p + \overrightarrow{R} \subset \mathcal{A}$ una recta. Entonces, como $\overrightarrow{f} = Id$, tenemos que:

$$f(R) = f(p + \overrightarrow{R}) = f(p) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{R}) = p + v_0 + Id(\overrightarrow{R}) = p' + \overrightarrow{R}$$

Por tanto, $f(R) \| R$. □

Respecto a la composición de traslaciones, tenemos el siguiente resultado, de demostración inmediata.

Proposición 1.20. *Sean $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dos traslaciones afines según los vectores $v_0, v_1 \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, respectivamente. Entonces, se tiene que:*

$$f \circ g = t_{v_0 + v_1}$$

Como la suma en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ es conmutativa, tenemos que $f \circ g = g \circ f$.

Homotecias afines

Definición 1.17 (Homotecia afín)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Definimos la homotecia afín de centro $o \in \mathcal{A}$ y razón (o radio) $k \in \mathbb{R}$, como:

$$\begin{array}{rccc} H_{o,k}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & p & \longmapsto & o + k \cdot \overrightarrow{op} \end{array}$$

Observación. A menudo, se establece la condición de que $k \neq 0, 1$, ya que son casos particulares.

- En el caso de $k = 1$, tenemos que $H_{o,1} = Id_{\mathcal{A}}$.
- En el caso de $k = 0$, tenemos que $H_{o,0} = o$ aplicación constante en o.

El siguiente resultado se estudia para valores de $k \neq 0, 1$, ya que como hemos visto, estos son casos particulares que ya conocemos.

Proposición 1.21. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces, dado $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, tenemos:*

$$\exists o \in \mathcal{A} \mid f = H_{o,k} \Longleftrightarrow f \text{ es afín } \wedge \overrightarrow{f} = kId_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$$

Además, el único punto fijo de f es su centro $o \in \mathcal{A}$, que cumple que

$$o = p + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{pf(p)} \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) En primer lugar, tenemos que:

$$H_{o,k}(o) = o + k\overrightarrow{0} = o \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Veamos cuál es su aplicación lineal asociada:

$$\overrightarrow{H_{o,k}}(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{H_{o,k}(o)H_{o,k}(p)} = \overrightarrow{oH_{o,k}(p)} = o + k\overrightarrow{op} - o = k\overrightarrow{op} = kI_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{op})$$

Por tanto, tenemos que $H_{o,k}$ es una aplicación afín con aplicación afín asociada la identidad de razón k, $kI_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$.

Veamos ahora que el centro cumple dicha expresión:

$$p+\frac{1}{1-k}\overrightarrow{pf(p)} = p+\frac{1}{1-k}[f(p)-p] = p+\frac{1}{1-k}[o+k\overrightarrow{op}-p] = p+\frac{1}{1-k}[(1-k)(o-p)] = o$$

$\Longleftarrow$) Sea $o = p + \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{pf(p)} \in \mathcal{A} \;\; \forall p \in \mathcal{A}$. Veamos que o no depende del valor de p dado. Sea $p' \in \mathcal{A}$. Entonces:

$$p + \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{pf(p)} = p' + \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{p'f(p')} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow p - p' = \frac{\overrightarrow{p'f(p')} - \overrightarrow{pf(p)}}{1-k} = \frac{f(p') - p' - f(p) + p}{1-k} = \frac{p - p' - \overrightarrow{f(p')f(p)}}{1-k} =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\overrightarrow{p'p} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p'p})}{1-k} = \frac{\overrightarrow{p'p} - k \cdot \overrightarrow{p'p}}{1-k} = \overrightarrow{p'p} = p - p'$$

donde en $(*)$ he aplicado el valor de $\overrightarrow{f}$. Veamos que $f(o) = o$, es decir, que f es un punto fijo:

$$\begin{aligned}
f(o) =& f(p) + \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pf(p)}) = f(p) + \frac{1}{1-k} \cdot k \cdot \overrightarrow{pf(p)} = \frac{(1-k)f(p) + kf(p) - kp}{1-k} = \\
=& \frac{f(p) - kp}{1-k} = \frac{f(p) - kp + p - p}{1-k} = \frac{f(p) - p + (1-k)p}{1-k} = p + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{pf(p)} = o
\end{aligned}$$

Veamos ahora que f es una homotecia. Sea $p \in \mathcal{A}$. Tenemos que $p = o + \overrightarrow{op}$.

$$f(p) = f(o) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{op}) = o + k\overrightarrow{op} = H_{o,k}(p) \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

Por tanto, tenemos que $\exists o \in \mathcal{A}$ tal que $f = H_{o,k}$.

Veamos ahora que el único punto fijo es el centro:

$$f(p) = p \Longleftrightarrow o + k\overrightarrow{op} = p \Longleftrightarrow o + kp - ko = p \Longleftrightarrow (1-k)o = (1-k)p \Longleftrightarrow p = o$$

□

Por tanto, hemos demostrado que una homotecia de razón $k \neq 0, 1$ tan solo tiene un punto fijo, que es su centro.

Definición 1.18 (Simetría central)**.** Dado un espacio afín $\mathcal{A}$, y un punto $o \in \mathcal{A}$, definimos la simetría central de centro o como la homotecia de centro o y razón -1, $H_{o,-1}$.

Para la siguiente caracterización, usaremos la definición de punto medio, dada en la Definición 1.4.

Proposición 1.22. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces, equivalen:*

1. *f es una simetría central.*
2. *f es afín y $\overrightarrow{f} = -Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$.*
3. *$\exists o \in \mathcal{A} \mid m_{pf(p)} = o \qquad \forall p \in \mathcal{A}$.*

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) se ha demostrado ya, ya que una simetría central es una homotecia de razón -1. Veamos ahora la equivalencia entre 1) y 3). Como $m_{pf(p)} = o + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{op} + \overrightarrow{pf(p)}\right)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\exists o \in \mathcal{A} \mid m_{pf(p)} = o \;\; \forall p \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow \exists o \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{op} + \overrightarrow{of(p)} = \overrightarrow{0} \;\; \forall p \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \exists o \in \mathcal{A} \mid f(p) = o - \overrightarrow{op} \;\; p \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow f = H_{o,-1}
\end{aligned}$$

□

Al igual que con las traslaciones, las homotecias llevan rectas en rectas paralelas. Esto se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.23. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $H_{o,k} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una homtecia afín de centro $o \in \mathcal{A}$ y razón $k \in \mathbb{R}$. Entonces, $H_{o,k}$ lleva rectas en rectas paralelas. Es decir,*

$$H_{o,k}(R) \| R \qquad \forall R \subset \mathcal{A}$$

Demostración. Sea $R = p + \overrightarrow{R} \subset \mathcal{A}$ una recta. Entonces, como $\overrightarrow{f} = k\ Id$, tenemos que:

$$f(R) = f(p + \overrightarrow{R}) = f(p) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{R}) = f(p) + k\ Id(\overrightarrow{R}) \stackrel{(*)}{=} f(p) + \overrightarrow{R}$$

donde en $(*)$ he aplicado que $\overrightarrow{R}$ es cerrado para producto por escalares. Por tanto, $f(R) \| R$. $\square$

Respecto a la composición de homotecias, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.24. *Sean $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dos homotecias afines de razones $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, respectivamente y ambas de centro $o \in \mathcal{A}$. Entonces, se tiene que:*

$$f \circ g = H_{o,k_1 \cdot k_2}$$

Demostración. Sea $p \in \mathcal{A}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(g(p)) = f(o + k_2\overrightarrow{op}) = o + k_1\overrightarrow{o(g(p))} = o + k_1(g(p) - o) = \\ = o + k_1(\cancel{o} + k_2\overrightarrow{op} - \cancel{o}) = o + k_1k_2\overrightarrow{op} = H_{o,k_1k_2}(p) \quad \square \end{aligned}$$

Notemos que, como la multiplicación de números reales es conmutativa, tenemos que $f \circ g = g \circ f$.

Definición 1.19. Una aplicación afín se dice que es una dilatación si y solo si es una homotecia o una traslación.

Proyecciones y Simetrías

Notación. Antes de presentar las proyecciones y las simetrías en el espacio afín, recordamos cómo las notamos en el caso de espacios vectoriales.

Sea $\overrightarrow{V}$ un espacio vectorial, y consideramos $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{V}$ subespacios vectoriales de $\overrightarrow{V}$ tal que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \oplus \overrightarrow{W}$. La proyección sobre $\overrightarrow{U}$ se nota por $\pi_{\overrightarrow{U}}$, mientras que la simetría sobre $\overrightarrow{U}$ se nota por $\sigma_{\overrightarrow{U}}$.

Definición 1.20 (Proyección)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean S, T subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$. Entonces, por la Proposición 1.8, tenemos que $S \cap T = \{p_0\}$. Entonces, definimos la proyección afín en S paralela a T como:

$$\begin{array}{rccl} \pi_{S,T}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & S \\ & q & \longmapsto & p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) \end{array}$$

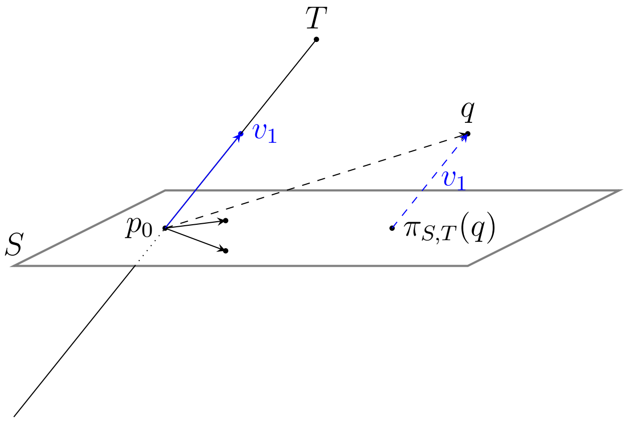


Figura 1.4: Representación gráfica de la proyección afín.

Respecto a las proyecciones, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 1.25. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean S, T subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$. Entonces:*

1. $\pi_{S,T} : \mathcal{A} \to S$ *es una aplicación afín, con* $\overrightarrow{\pi_{S,T}} = \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}$.

2. $\mathcal{P}_{\pi_{S,T}} = Im(\pi_{S,T}) = S$.

3. $\pi_{S,T} \circ \pi_{S,T} = \pi_{S,T}$ *(idempotencia).*

4. $\overrightarrow{q\pi_{S,T}(q)} \in \overrightarrow{T} \qquad \forall q \in \mathcal{A}$.

Demostración. Demostramos cada resultado por separado:

1. Veamos que la dada es la aplicación lineal asociada:
$$\overrightarrow{\pi_{S,T}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\pi_{S,T}(p)\pi_{S,T}(q)} = \overrightarrow{(p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0p}))(p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}))} =$$
$$= \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) - \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0p}) = \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{pq})$$
donde he empleado que las proyecciones vectoriales son aplicaciones lineales.

2. Veamos los puntos fijos de las proyecciones:
$$\pi_{S,T}(q) = q \iff p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = q \iff \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = \overrightarrow{p_0q} \iff \overrightarrow{p_0q} \in \overrightarrow{S} \iff q \in S$$
donde he aplicado que los vectores propios de $\pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}$ con valor propio 1 son los vectores de $\overrightarrow{S}$.

3. Tenemos que $\pi_{S,T}(q) \in S$ para todo $q \in \mathcal{A}$. Por tanto, es un punto fijo, por lo que:
$$(\pi_{S,T} \circ \pi_{S,T})(q) = \pi_{S,T}(\pi_{S,T}(q)) = \pi_{S,T}(q) \qquad \forall q \in \mathcal{A}$$

4. Tenemos que:
$$\overrightarrow{q\pi_{S,T}(q)} = \overrightarrow{q(p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}))} = \overrightarrow{qp_0} + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = -\overrightarrow{p_0q} + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q})$$
Como sabemos que $\overrightarrow{p_0q} = \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) + \pi_{\overrightarrow{T},\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{p_0q})$, tenemos que
$$\overrightarrow{q\pi_{S,T}(q)} = -\pi_{\overrightarrow{T},\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{p_0q}) \in \overrightarrow{T}$$

$\square$

Definición 1.21 (Simetría afín)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean S, T subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$. Entonces, por la Proposición 1.8, tenemos que $S \cap T = \{p_0\}$. Entonces, definimos la simetría (o reflexión) afín en S paralela a T como:

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{S,T}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & q & \longmapsto & p_0 + \sigma_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = p_0 + \pi_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{p_0q}) - \pi_{\vec{T},\vec{S}}(\overrightarrow{p_0q}) \end{array}$$

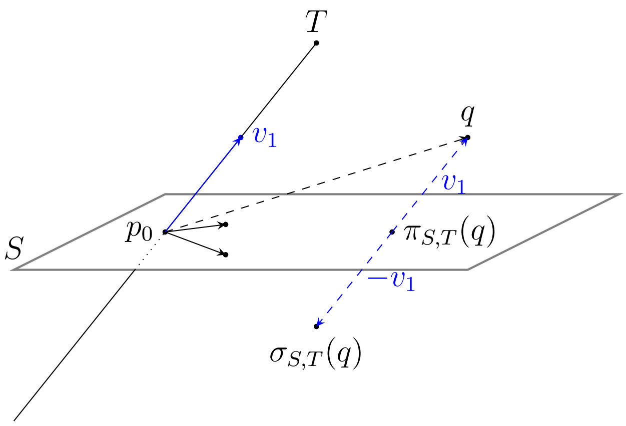


Figura 1.5: Representación gráfica de la simetría afín.

Respecto a las simetrías, tenemos el primer resultado, de gran importancia a la hora de los ejercicios prácticos.

Proposición 1.26. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean S, T subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$. Entonces:*

$$m_{p\ \sigma_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

En particular, $m_{p\ \sigma_{S,T}(p)} \in S$ para todo $p \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\{p_0\} = S \cap T$. Entonces, para todo $p \in \mathcal{A}$, tenemos que:

$$m_{p\ \sigma_{S,T}(p)} = p_0 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p_0p} + \overrightarrow{p_0\sigma_{S,T}(p)}\right) = p_0 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p_0p} - \cancel{p_0} + \cancel{p_0} + \sigma_{\vec{S},\vec{T}}(p_0p)\right) \stackrel{(*)}{=}$$
$$\stackrel{(*)}{=} p_0 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p_0p} + 2\pi_{\vec{S},\vec{T}}(p_0p) - \overrightarrow{p_0p}\right) = p_0 + \pi_{\vec{S},\vec{T}}(p_0p) = \pi_{S,T}(p)$$

donde en $(*)$ he aplicado que $\sigma_{\vec{S},\vec{T}}(p_0p) = 2\pi_{\vec{S},\vec{T}}(p_0p) - \overrightarrow{p_0p}$, como se demostró en Geometría II.

En concreto, como $Im(\pi_{S,T}) = S$, tenemos $m_{p\ \sigma_{S,T}(p)} \in S$ para todo $p \in \mathcal{A}$. $\square$

Además, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 1.27. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean S, T subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$. Entonces:*

1. *$\sigma_{S,T}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una aplicación afín, con $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \sigma_{\vec{S},\vec{T}}$.*

2. $\mathcal{P}_{\sigma_{S,T}} = S$.

3. $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T} = Id_{\mathcal{A}}$ *(involución).*

Demostración. Demostramos cada resultado por separado:

1. Veamos que la dada es la aplicación lineal asociada:

$$\overrightarrow{\sigma_{S,T}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\sigma_{S,T}(p)\sigma_{S,T}(q)} = \overrightarrow{(p_0 + \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0p}))(p_0 + \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}))} =$$
$$= \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) - \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0p}) = \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{pq})$$

donde he empleado que las simetrías vectoriales son aplicaciones lineales.

2. Veamos los puntos fijos de las simetrías:

$$\sigma_{S,T}(q) = q \Longleftrightarrow p_0 + \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = q \Longleftrightarrow \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0q}) = \overrightarrow{p_0q} \Longleftrightarrow \overrightarrow{p_0q} \in \overrightarrow{S} \Longleftrightarrow q \in S$$

donde he aplicado que los vectores propios de $\sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}$ con valor propio 1 son los vectores de $\overrightarrow{S}$.

3. En primer lugar, tenemos que $\overrightarrow{\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T}} = \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}} \circ \sigma_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}} = Id_{\overrightarrow{A}}$.

Además, $\exists a \in \mathcal{A}$ tal que $\sigma_{S,T}(a) = Id_{\mathcal{A}}(a) = a$, ya que $\sigma_{S,T}$ tiene puntos fijos.

Por tanto, por el Teorema 1.12, se tiene.

□

Respecto a las simetrías, hay un caso particular, que es el de las simetrías respecto de un punto. En este caso, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.28. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sea $o \in \mathcal{A}$ un punto. Entonces, se tiene:*

$$\sigma_o = H_{o,-1}$$

Es decir, la simetría respecto de un punto es una simetría central respecto de dicho punto.

Demostración. Tenemos que $\sigma_o(o) = o$. Además, como $\overrightarrow{\{o\}} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, tenemos que $\overrightarrow{\{o\}}^{\perp} = \mathcal{A}$. Por tanto, $\sigma_{\overrightarrow{\{o\}}} = -Id_{\overrightarrow{A}}$. Por el Teorema 1.12, tenemos que $\sigma_o = H_{o,-1}$. □

1.4. Teoremas de Pappus y Desargues Afines

En esta sección, veremos dos teoremas que nos serán de gran utilidad para resolver ejercicios prácticos. Estos son el Teorema de Pappus y el Teorema de Desargues.

Notación. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean $p, q \in \mathcal{A}$ dos puntos distintos. Entonces, se denota la recta que pasa por p, q como:

$$R_{pq} = \{p + t\overrightarrow{pq} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 1.29 ((afín) de Pappus)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un plano afín, y sean R_1, R_2 dos rectas afines distintas de $\mathcal{A}$. Consideramos $a_1, b_1, c_1 \in R_1 \setminus R_1 \cap R_2$, y $a_2, b_2, c_2 \in R_2 \setminus R_1 \cap R_2$. Entonces:*

$$\left.\begin{array}{c} R_{a_1b_2} \| R_{a_2b_1} \\ \wedge \\ R_{b_1c_2} \| R_{b_2c_1} \end{array}\right\} \Longrightarrow R_{a_1c_2} \| R_{a_2c_1}$$

Demostración. Distinguimos entre si las rectas son paralelas o no:

1. Rectas secantes, $R_1 \nparallel R_2$:

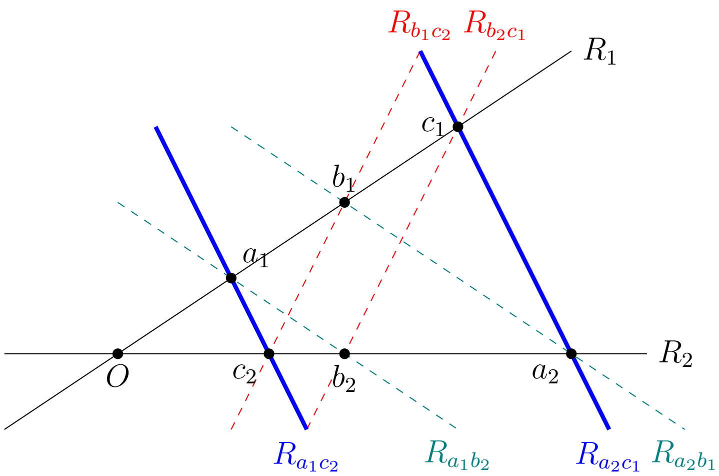


Figura 1.6: Representación gráfica del Teorema de Pappus para $R_1 \nparallel R_2$.

Sea $\{O\} = R_1 \cap R_2$. Consideramos la homotecia h_1 de centro O y que lleva $a_1 \mapsto b_1$. Consideramos también la homotecia h_2 de centro O y que lleva $b_1 \mapsto c_1$.

Como una traslación lleva rectas en rectas paralelas, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{c} R_{a_1b_2} \| R_{a_2b_1} \\ \wedge \\ h_1(a_1) = b_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow h_1(b_2) = a_2 \qquad \left\{\begin{array}{c} R_{b_1c_2} \| R_{b_2c_1} \\ \wedge \\ h_2(b_1) = c_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow h_2(c_2) = b_2$$

Por tanto, tenemos que:

$$a_1 \xmapsto{h_1} b_1 \xmapsto{h_2} c_1$$

$$c_2 \xmapsto{h_2} b_2 \xmapsto{h_1} a_2$$

Es decir, $(h_2 \circ h_1)(a_1) = c_1$ y $(h_1 \circ h_2)(c_2) = a_2$. Como $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$, sea h dicha homotecia de centro O. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{h}(\overrightarrow{a_1c_2}) &= \overrightarrow{h(a_1)h(c_2)} = \overrightarrow{c_1a_2} \\ &= k \cdot \overrightarrow{a_1c_2} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{R_{a_1c_2}} = \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_1c_2}\} = \mathcal{L}\{k\cdot\overrightarrow{a_1c_2}\} = \mathcal{L}\{\overrightarrow{c_1a_2}\} = \overrightarrow{R_{c_1a_2}}$. Por tanto, $R_{a_1c_2}\|R_{c_1a_2}$.

2. Rectas paralelas, $R_1\|R_2$:

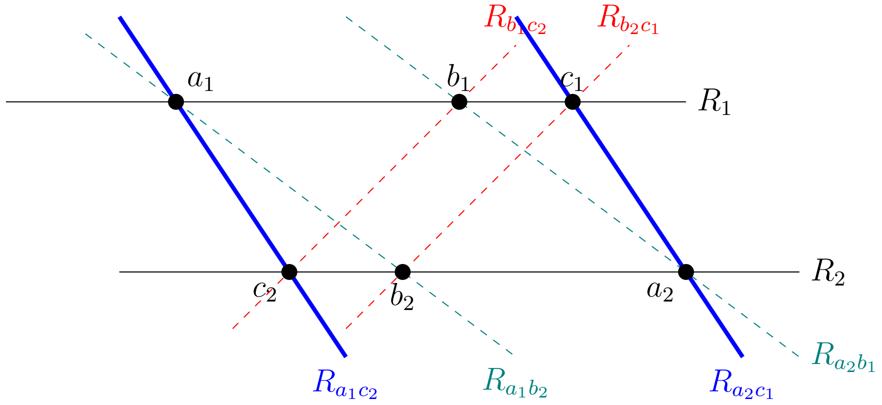


Figura 1.7: Representación gráfica del Teorema de Pappus para $R_1\|R_2$.

Consideramos la traslación t_1 según el vector $\overrightarrow{a_1b_1}$ y la traslación t_2 según el vector $\overrightarrow{b_1c_1}$. Notemos que, como $R_1\|R_2$, ambas rectas quedan fijas por t_1 y t_2.

Como una homotecia lleva rectas en rectas paralelas, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{c} R_{a_1b_2}\|R_{a_2b_1} \\ \wedge \\ t_1(a_1)=b_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow t_1(b_2)=a_2 \qquad \left\{\begin{array}{c} R_{b_1c_2}\|R_{b_2c_1} \\ \wedge \\ t_2(b_1)=c_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow t_2(c_2)=b_2$$

Por tanto, tenemos que:

$$a_1 \xmapsto{t_1} b_1 \xmapsto{t_2} c_1$$

$$c_2 \xmapsto{t_2} b_2 \xmapsto{t_1} a_2$$

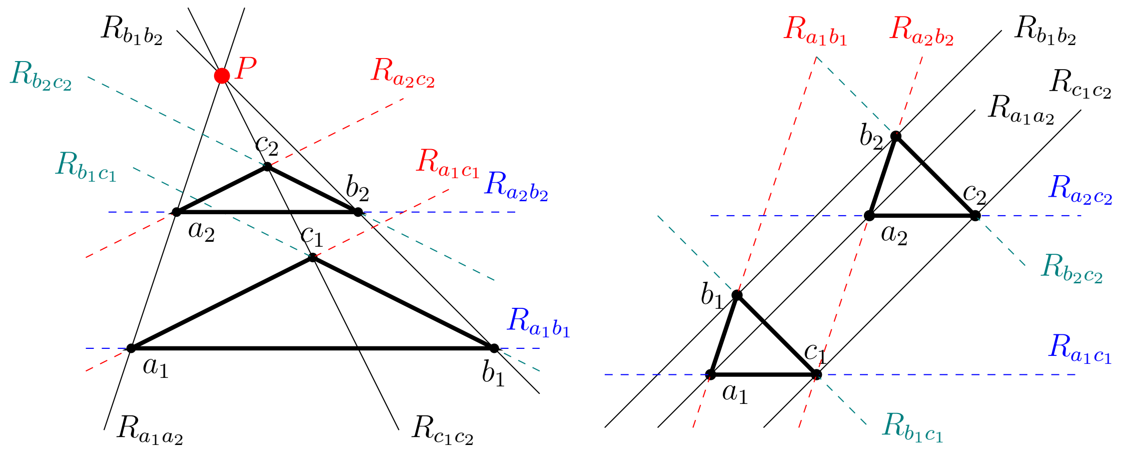
Es decir, $(t_2\circ t_1)(a_1)=c_1$ y $(t_1\circ t_2)(c_2)=a_2$. Como $t_2\circ t_1 = t_1\circ t_2$, sea t dicha traslación según el vector $\overrightarrow{a_1b_1}+\overrightarrow{b_1c_1}=\overrightarrow{a_1c_1}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,(\overrightarrow{a_1c_2}) &= \overrightarrow{t(a_1)t(c_2)} = \overrightarrow{c_1a_2} \\ &= \overrightarrow{a_1c_2} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{R_{a_1c_2}} = \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_1c_2}\} = \mathcal{L}\{\overrightarrow{c_1a_2}\} = \overrightarrow{R_{c_1a_2}}$. Por tanto, $R_{a_1c_2}\|R_{c_1a_2}$. □

Gráficamente, el Teorema de Pappus se puede ver en el siguiente applet de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/dd5s4mgc.

Teorema 1.30 ((afín) de Desargues)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y sean $T_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ $T_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ dos triángulos de $\mathcal{A}$. Si los triángulos no tienen vértices comunes y sus lados son paralelos dos a dos (es decir, $R_{a_1b_1} \| R_{a_2b_2}$, $R_{a_1c_1} \| R_{a_2c_2}$ y $R_{b_1c_1} \| R_{b_2c_2}$), entonces las tres rectas $R_{a_1a_2}$, $R_{b_1b_2}$ y $R_{c_1c_2}$ son, o bien paralelas, o bien secantes en el mismo punto.*



(a) Rectas secantes. (b) Rectas paralelas.

Figura 1.8: Representación gráfica del Teorema de Desargues.

Demostración. Consideramos en primer lugar la traslación según el vector $\overrightarrow{a_1a_2}$, que como los triángulos no tienen vértices comunes, no es nulo. Sea esta traslación $t_{\overrightarrow{a_1a_2}}$.

Como $R_{a_1b_1} \| R_{a_2b_2}$, tenemos que $\overrightarrow{a_2b_2} = \lambda\overrightarrow{a_1b_1}$, para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, como $a_2 \neq b_2$, tenemos que $\lambda \neq 0$. Consideramos la homotecia de centro a_2 y razón λ, notada por $H_{a_2,\lambda}$.

Sea ahora la aplicación $f = H_{a_2,\lambda} \circ t_{\overrightarrow{a_1a_2}}$, que sabemos que es afín con lineal sociada:

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{H_{a_2,\lambda}} \circ \overrightarrow{t_{\overrightarrow{a_1a_2}}} = \lambda Id \circ Id = \lambda Id$$

Por tanto, f es una dilatación, por lo que transforma rectas en rectas paralelas. Notemos además que:

$$\begin{aligned}
f(a_1) &= H_{a_2,\lambda}(t_{\overrightarrow{a_1a_2}}(a_1)) = H_{a_2,\lambda}(a_2) = a_2 \\
f(b_1) &= H_{a_2,\lambda}(t_{\overrightarrow{a_1a_2}}(b_1)) = H_{a_2,\lambda}(b_1 + \overrightarrow{a_1a_2}) = a_2 + \lambda\left(\overrightarrow{a_2\,(b_1 + \overrightarrow{a_1a_2})}\right) = \\
&\qquad = a_2 + \lambda\left(\overrightarrow{b_1 - a_2 + \overrightarrow{a_1a_2}}\right) = a_2 + \lambda\left(\overrightarrow{a_2b_1} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) = \\
&\qquad = a_2 + \lambda\overrightarrow{a_1b_1} \overset{(*)}{=} a_2 + \overrightarrow{a_2b_2} = b_2 \\
f(c_1) &= c_2
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\lambda\overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{a_2b_2}$. Veamos ahora por qué $f(c_1) = c_2$.

Partiendo de que f lleva rectas en rectas paralelas, como $R_{a_1c_1} \| R_{a_2c_2}$ y $f(a_1) = a_2$, tenemos que $f(c_1) \in R_{a_2c_2}$. Análogamente, como $R_{b_1c_1} \| R_{b_2c_2}$ y $f(b_1) = b_2$, tenemos que $f(c_1) \in R_{b_2c_2}$. Por tanto,

$$f(c_1) \in R_{a_2c_2} \cap R_{b_2c_2} \overset{(*)}{=} \{c_2\}$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como $a_2 \neq b_2$ por ser un triángulo, $R_{a_2c_2}$ y $R_{b_2c_2} = \{c_2\}$ no son coincidentes.

En resumen, hemos visto que:

$$f(a_1) = a_2 \qquad f(b_1) = b_2 \qquad f(c_1) = c_2$$

Distinguimos ahora según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

- $\lambda = 1$. En este caso, f es una traslación según un vector $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(a_1) = a_2 = a_1 + v \Longrightarrow v = \overrightarrow{a_1a_2} \\
f(b_1) = b_2 = b_1 + v \Longrightarrow v = \overrightarrow{b_1b_2} \\
f(c_1) = c_2 = c_1 + v \Longrightarrow v = \overrightarrow{c_1c_2}
\end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que:

$$\overrightarrow{R_{a_1a_2}} = \overrightarrow{R_{b_1b_2}} = \overrightarrow{R_{c_1c_2}} = \mathcal{L}\{v\}$$

  Quedando así demostrado que $R_{a_1a_2}$, $R_{b_1b_2}$ y $R_{c_1c_2}$ son paralelas.

- $\lambda \neq 0, 1$. En este caso, f es una homotecia, y $\exists! o \in \mathcal{A}$ tal que $f(o) = o$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(R_{a_1a_2}) = f\left(a_1 + \overrightarrow{R_{a_1a_2}}\right) = f(a_1) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{R_{a_1a_2}}\right) = a_2 + \lambda\overrightarrow{R_{a_1a_2}} = R_{a_2a_1} \\
f(R_{b_1b_2}) = f\left(b_1 + \overrightarrow{R_{b_1b_2}}\right) = f(b_1) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{R_{b_1b_2}}\right) = b_2 + \lambda\overrightarrow{R_{b_1b_2}} = R_{b_2b_1} \\
f(R_{c_1c_2}) = f\left(c_1 + \overrightarrow{R_{c_1c_2}}\right) = f(c_1) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{R_{c_1c_2}}\right) = c_2 + \lambda\overrightarrow{R_{c_1c_2}} = R_{c_2c_1}
\end{aligned}$$

  Veamos ahora que, para toda recta $R \subset \mathcal{A}$ tal que $f(R) = R$, se tiene que el centro de la homotecia $o \in R$. Para todo $p \in \mathcal{A}$, tenemos que:

$$f(p) = f\left(o + \overrightarrow{op}\right) = f(o) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{op}\right) = o + \lambda\overrightarrow{op} = o + \overrightarrow{op} + (\lambda-1)\overrightarrow{op} = p + (\lambda-1)\overrightarrow{op}$$

  Supongamos ahora que $p \in R$, luego $f(p) \in f(R) = R$. Por tanto, se tiene que $\overrightarrow{pf(p)} = (\lambda - 1)\overrightarrow{op} \in \overrightarrow{R}$, y como $\lambda \neq 1$ y $p \in R$, tenemos que $o \in R$.

  Por tanto, como hemos visto que $R_{a_1a_2}$, $R_{b_1b_2}$ y $R_{c_1c_2}$ son fijas por f, tenemos que:

$$o \in R_{a_1a_2} \cap R_{b_1b_2} \cap R_{c_1c_2}$$

  Queda así demostrado que $R_{a_1a_2} \cap R_{b_1b_2} \cap R_{c_1c_2} = \{o\}$; es decir, son secantes en el mismo punto centro de la homotecia.

$\square$

Gráficamente, el Teorema de Desargues se puede ver en el siguiente applet de Geogebra: https://www.geogebra.org/classic/k3vvkyx9.

1.5. Convexidad

Introducimos ahora el concepto de convexidad, que nos será de gran utilidad para definir la envolvente convexa de un conjunto de puntos. La convexidad se estudiará en otras asignaturas, como Topología I o Análisis Matemático I.

Definición 1.22 (Segmento)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Entonces, dados dos puntos $p, q \in \mathcal{A}$, se define el segmento entre los puntos p, q como:

$$[p, q] = \{p + t\overrightarrow{pq} \mid t \in [0, 1]\} = \{q + t\overrightarrow{qp} \mid t \in [0, 1]\}$$

Definición 1.23. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $B \subset \mathcal{A}$. Decimos que B es convexo si:

$$[p, q] \subset B \qquad \forall p, q \in B$$

Notemos que la unión de dos convexos no tiene por qué ser convexa. No obstante, sí que se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 1.31. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $\{X_i\}_{i\in I}$ convexos, con $X_i \subset \mathcal{A}$ $\forall i \in I$. Entonces, se tiene que:*

$$\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{i\in I} X_i \textit{ es convexo}$$

Demostración. Sea $p, q \in \bigcap_{i\in I} X_i$. Entonces, $p, q \in X_i$ $\forall i \in I$. Como X_i es convexo, tenemos que $[p, q] \subset X_i$ $\forall i \in I$. Por tanto, $[p, q] \subset \bigcap_{i\in I} X_i$. □

Es evidente que todo espacio afín $\mathcal{A}$ es convexo, ya que $[p, q] \subset \mathcal{A}$ $\forall p, q \in \mathcal{A}$. Además, como todo subespacio afín es un espacio afín, tenemos que todo subespacio afín es convexo.

Respecto a las aplicaciones afines, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 1.32. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ espacios afines, y sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín. Entonces, se tiene que:*

1. $f([p, q]) = [f(p), f(q)] \qquad \forall p, q \in \mathcal{A}$.
2. *Si $B \subset \mathcal{A}$ es convexo, entonces $f(B) \subset \mathcal{A}'$ es convexo.*
3. *Si $B' \subset \mathcal{A}'$ es convexo y $f^{-1}(B') \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(B')$ es convexo.*

Demostración. Demostramos cada resultado por separado:

1. Sea $p, q \in \mathcal{A}$. Entonces, tenemos que:
$$\begin{aligned} f([p, q]) &= f(\{p + t\overrightarrow{pq} \mid t \in [0, 1]\}) = \{f(p + t\overrightarrow{pq}) \mid t \in [0, 1]\} = \\ &= \{f(p) + t\vec{f}(\overrightarrow{pq}) \mid t \in [0, 1]\} = \{f(p) + t\overrightarrow{f(p)f(q)} \mid t \in [0, 1]\} = [f(p), f(q)] \end{aligned}$$
donde he aplicado que f es afín, y por tanto, $\vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$.
2. Sean $p', q' \in f(B)$. Entonces, $\exists p, q \in B$ tales que $f(p) = p'$, $f(q) = q'$.
Como B es convexo, tenemos que $[p, q] \subset B$. Por tanto, $f([p, q]) \subset f(B)$. Además, por el apartado anterior, $f([p, q]) = [f(p), f(q)] = [p', q']$. Por tanto, $[p', q'] \subset f(B)$, por lo que $f(B)$ es convexo.
3. Sean $p, q \in f^{-1}(B')$. Entonces, $f(p), f(q) \in B'$, por lo que $[f(p), f(q)] \subset B'$. Por tanto, $f([p, q]) \subset B'$, por lo que $[p, q] \subset f^{-1}(B')$.

□

1.5.1. Envolvente convexa

Introducimos ahora el concepto de envolvente convexa:

Definición 1.24 (Envolvente convexa)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y $B \subset \mathcal{A}$. Definimos la envolvente convexa de B como el menor subconjunto convexo que contiene a B. Es decir,

$$\varphi(B) = \bigcap \{X \supset B \mid X \text{ es convexo}\}$$

Algunas propiedades de la envolvente convexa son:

1. $B \subset \varphi(B) \qquad \forall B \subset \mathcal{A}$.
2. $\varphi(\varphi(B)) = \varphi(B) \qquad \forall B \subset \mathcal{A}$.

   Esto se tiene de forma directa, ya que $\varphi(B)$ es convexo.
3. $X \subset Y \Longrightarrow \varphi(X) \subset \varphi(Y) \qquad \forall X, Y \subset \mathcal{A}$.

   Esto se tiene de forma directa también, ya que $\varphi(Y)$ es convexo y $X \subset Y \subset \varphi(Y)$, por lo que $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$.
4. $\varphi(X) \cup \varphi(Y) \subset \varphi(X \cup Y) \qquad \forall X, Y \subset \mathcal{A}$.

   En primer lugar, tenemos que $X \subset X \cup Y$, por lo que $\varphi(X) \subset \varphi(X \cup Y)$. Análogamente, $\varphi(Y) \subset \varphi(X \cup Y)$. Por tanto, $\varphi(X) \cup \varphi(Y) \subset \varphi(X \cup Y)$.

Notemos que $\varphi(X) \cap \varphi(Y)$ no tiene por qué ser igual a $\varphi(X \cap Y)$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de envolvente convexa son:

1. Para $B = \{p\}$, tenemos que $\varphi(B) = \{p\}$.
2. Para $B = \{p, q\}$, tenemos que $\varphi(B) = [p, q]$.
3. Para $B = \{p, q, r\}$ no alineados, tenemos que $\varphi(B)$ es el triángulo formado por los puntos p, q, r, junto con su interior.

1.6. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con este tema, consultar la sección 5.1.

2. Espacios Euclídeos

Definición 2.1 (Espacios euclídeos)**.** Diremos que un espacio afín $\mathbb{E}$ es euclídeo si $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ está dotado de la estructura euclídea. Es decir, $(\overrightarrow{\mathbb{E}}, \langle, \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo dotado de una aplicación producto escalar.

Definición 2.2. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_o, \mathcal{B}\}$ de $\mathbb{E}$ diremos que es <u>euclídeo</u>, rectangular u ortonormal, si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal.

Introducimos el concepto intuitivo de distancia entre dos puntos de un espacio euclídeo.

Definición 2.3 (Distancia)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Definimos la aplicación distancia en $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ como:

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \longmapsto & d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle} \end{array}$$

Tenemos que la aplicación anterior es, efectivamente, una distancia, ya que:

1. $d(p,q) \geqslant 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{E}$. Además, $d(p,q) = 0 \iff p = q$.
2. $d(p,q) = d(q,p) \quad \forall p, q \in \mathbb{E}$.
3. $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q) \quad \forall p, q, r \in \mathbb{E}$.

2.1. Ortogonalidad

Definición 2.4. Sean S, T dos subespacios afines de $\mathbb{E}$ espacio euclídeo. Entonces, diremos que S y T son perpendiculares (o ortogonales), notado por $S \perp T$, si y solo si:

$$S \perp T \iff \overrightarrow{S} \perp \overrightarrow{T}$$

Teorema 2.1. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sea S un subespacio afín de $\mathbb{E}$. Entonces, $\forall q \in \mathbb{E}$, $\exists_1$ T subespacio afín de $\mathbb{E}$ verificando:*

1. $q \in T$,

2. $T \perp S$,

3. $\dim T + \dim S = n = \dim \mathbb{E}$.

Dicho subespacio T se denomina <u>subespacio afín ortogonal a S por q</u>, y se notará por $S_q^\perp = q + \overrightarrow{S}^\perp$.

Demostración. Consideramos $\overrightarrow{S}$, y sabemos que $\overrightarrow{S}^\perp$ es el único subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ con $n = \dim \overrightarrow{S} + \dim \overrightarrow{S}^\perp$ que verifica $\overrightarrow{S} \perp \overrightarrow{S}^\perp$.

Consideramos $T = q + \overrightarrow{S}^\perp$. Entonces, T es un subespacio afín de $\mathbb{E}$, ya que $\overrightarrow{S}^\perp$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Además, $q \in T$, ya que $q \in q + \overrightarrow{S}^\perp$. Por último, tenemos que $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S}^\perp$, por lo que $T \perp S$. Por tanto, T cumple las tres condiciones.

Tenemos por tanto demostrada la existencia. La unicidad se tiene de forma directa, ya que $\overrightarrow{S}^\perp$ es único. Por tanto, para cada $q \in \mathbb{E}$, tenemos que T es único. $\square$

Una vez introducido el concepto de subespacio ortogonal, incluimos las proyecciones y simetrías ortogonales, que serán las que mayoritariamente empleemos.

Definición 2.5 (Proyección ortogonal)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sea $S = p + \overrightarrow{S}$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$. Entonces, definimos la proyección ortogonal respecto de S como la proyección en S paralela a $S_p^\perp$:

$$\begin{array}{rccl} \pi_S^\perp: & \mathcal{A} & \longrightarrow & S \\ & q & \longmapsto & \pi_{S,S_p^\perp}(q) = p + \pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{pq}) \end{array}$$

Hemos de tener en cuenta que $\pi_S^\perp$ también se podrá notar como π_S.

Definición 2.6 (Simetría ortogonal)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sea $S = p + \overrightarrow{S}$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$. Entonces, definimos la simetría ortogonal respecto de S como la simetría en S paralela a $S_p^\perp$:

$$\begin{array}{rccl} \sigma_S^\perp: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & q & \longmapsto & \sigma_{S,S_p^\perp}(q) = p + \sigma_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{pq}) \end{array}$$

Hemos de tener en cuenta que $\sigma_S^\perp$ también se podrá notar como σ_S.

2.2. Distancia

Una vez definida la distancia entre dos puntos, podemos definir la distancia entre subespacios afines de forma general.

Definición 2.7. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean S, T dos subespacios euclídeos de $\mathbb{E}$. Entonces, se define la distancia entre S y T como:

$$d(S,T) = \text{ínf}\{d(p,q) \mid p \in S,\ q \in T\}$$

Veamos los siguientes dos teoremas, que nos facilitan el cálculo de la distancia entre dos subespacios afines:

Teorema 2.2. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean $S = p + \overrightarrow{S}$ y $T = q + \overrightarrow{T}$ dos subespacios euclídeos de $\mathbb{E}$.*

Entonces, $\exists p_0 \in S,\ q_0 \in T$ tal que $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp = (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})^\perp$.

Además, se tiene que p_0, q_0 son únicos si, y solo si, $\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T} = \{0\}$.

Demostración. Consideramos $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Tenemos que $\overrightarrow{\mathbb{E}} = (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) \oplus (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})^\perp$. Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{pq} = u + v + w$, con $u \in \overrightarrow{S}$, $v \in \overrightarrow{T}$, $w \in (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})^\perp$. Definimos $q_0 = q - v \in T$, $p_0 = p + u \in S$, y tenemos que:

$$w = \overrightarrow{pq} - u - v = q - p - u - v = q_0 - p_0 = \overrightarrow{p_0q_0} \in (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})^\perp = \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp$$

Respecto a la unicidad, tenemos que p_0, q_0 son únicos si u, v son únicos. Esto se da si y solo si $\overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$, y esto se da si y solo si $\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T} = \{0\}$. □

Corolario 2.2.1. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean $S = p + \overrightarrow{S}$ y $T = q + \overrightarrow{T}$ dos subespacios euclídeos de $\mathbb{E}$.*

Se tiene que $\exists p_0 \in S,\ q_0 \in T$ tal que $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp$ cumpliendo que:

$$d(S,T) = d(p_0, q_0)$$

Demostración. La demostración de la existencia se ha visto en el teorema anterior. Una vez demostrada la existencia, veamos que cumplen la relación de las distancias. Sean $a \in S, b \in T$. Veamos que $d(p_0, q_0) \leqslant d(a, b)$:

$$\begin{aligned} d^2(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|^2 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ab} \rangle &= \langle \overrightarrow{ap_0} + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0b}, \overrightarrow{ap_0} + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0b} \rangle = \\ &= \|\overrightarrow{ap_0} + \overrightarrow{q_0b}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0q_0}\|^2 + \cancel{2\langle \overrightarrow{ap_0} + \overrightarrow{q_0b}, \overrightarrow{p_0q_0} \rangle} \geqslant \|\overrightarrow{p_0q_0}\|^2 = d^2(p_0, q_0) \end{aligned}$$

donde $\langle \overrightarrow{ap_0} + \overrightarrow{q_0b}, \overrightarrow{p_0q_0} \rangle = 0$, ya que $\overrightarrow{ap_0} \in \overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{q_0b} \in \overrightarrow{T}$, y $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp, \overrightarrow{T}^\perp$.

Por tanto,

$$d(p_0, q_0) \leqslant d(a, b) \qquad \forall a \in S\ b \in T$$

Por tanto, tenemos que $d(p_0, q_0)$ es un minorante de $\{d(p,q) \mid p \in S,\ q \in T\}$. Además, como $p_0 \in S$, $q_0 \in T$, tenemos que pertenece al conjunto. Por tanto, no solo es minorante sino que también es el mínimo, por lo que $d(p_0, q_0)$ es el mínimo y, por consecuente, es el ínfimo. □

Corolario 2.2.2. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean S, T dos subespacios afines de $\mathbb{E}$. Entonces, tenemos que:*

$$d(S,T) = 0 \Longleftrightarrow S \cap T \neq \emptyset$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Tenemos que $\exists p_0 \in S,\ q_0 \in T$ tal que $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp$ cumpliendo que:

$$d(S,T) = d(p_0, q_0)$$

Entonces, si $d(S,T) = d(p_0, q_0) = 0$, entonces $p_0 = q_0$, por lo que $S \cap T \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$) Tenemos que $d(S,T) = \text{ínf}\{d(p,q) \mid p \in S,\ q \in T\}$. Entonces, sea $p_0 \in S \cap T$. Entonces, $d(p_0, p_0) = 0 = d(S,T)$.

□

Corolario 2.2.3. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sea S un subespacio afín de $\mathbb{E}$ y $q_0 \in \mathbb{E}$. Entonces, se tiene que:*

$$d(S, q_0) = d(q_0, \pi_S(q_0))$$

Demostración. Como hemos visto, $\exists p_0 \in S$ tal que $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp$ cumpliendo que:

$$d(S, q_0) = d(p_0, q_0)$$

Veamos ahora que $p_0 = \pi_S(q_0)$. Tenemos que:

$$\pi_S(q_0) = p_0 + \pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{p_0q_0}) = p_0 + \overrightarrow{0} = p_0$$

donde he usado que, como $\overrightarrow{p_0q_0} \in \overrightarrow{S}^\perp$, entonces $\pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{p_0q_0}) = \overrightarrow{0}$. Por tanto, tenemos que:

$$d(S, q_0) = d(p_0, q_0) = d(q_0, \pi_S(q_0))$$

□

Ejemplo. Sea $\mathbb{R}^3$ espacio euclídeo, y consideramos

$$S = (1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\} \qquad T = (1, 1, 0) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 0)\}$$

rectas euclídeas de $\mathbb{R}^3$. Calcular $d(S, T)$.

Un punto arbitrario de la recta S es $p = (1 + \alpha, \alpha, 1)$, y uno de la recta T es $q = (1 - \beta, 1 + \beta, 0)$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\overrightarrow{qp} = (\alpha + \beta, \alpha - \beta - 1, 1)$.

Como $\overrightarrow{qp} \in \overrightarrow{S}^\perp$, entonces:

$$\langle(\alpha + \beta, \alpha - \beta - 1, 1), (1, 1, 0)\rangle = 0 = 2\alpha - 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Como $\overrightarrow{qp} \in \overrightarrow{T}^\perp$, entonces:

$$\langle(\alpha + \beta, \alpha - \beta - 1, 1), (-1, 1, 0)\rangle = 0 = -2\beta - 1 \Longrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $p = (3/2, 1/2, 1)$, $q = (3/2, 1/2, 0)$. Entonces,

$$d(S, T) = d(p, q) = \|q - p\| = \|(0, 0, -1)\| = 1$$

2.3. Ángulos

En esta sección trataremos el concepto de ángulo entre subespacios afines. Es importante notar que este no se define para cualquier par de subespacios afines, sino que se define en casos concretos, como veremos.

Ángulo entre dos rectas

El primer caso particular que trataremos es el ángulo entre dos rectas.

Definición 2.8 (Ángulo entre dos rectas)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Consideramos dos rectas secantes $r_1 = p_1 + \mathcal{L}\{v_1\}$, $r_2 = p_2 + \mathcal{L}\{v_2\}$. Definimos el ángulo entre dos secantes como:

$$\measuredangle(r_1, r_2) := \min\{\measuredangle(v_1, v_2), \measuredangle(v_1, -v_2)\}$$

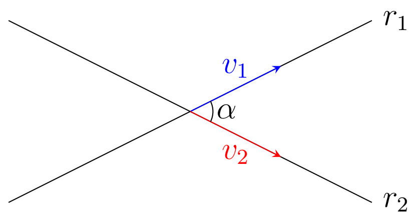


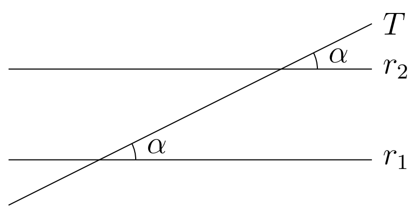
Figura 2.1: Vista gráfica del ángulo α entre dos rectas.

Notemos que la definición con el mínimo se debe a que dos rectas secantes generan dos ángulos, y buscamos el menor ángulo entre ellas.

De esta definición se deduce directamente el siguiente resultado:

Proposición 2.3. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Consideramos dos rectas paralelas $r_1 = p_1 + \mathcal{L}\{v\}$, $r_2 = p_2 + \mathcal{L}\{v\}$, y $T = p_T + \mathcal{L}\{v_p\}$ secante a ambas. Entonces:*

$$\measuredangle(T, r_2) = \measuredangle(T, r_1)$$



Demostración. Tenemos que:

$$\measuredangle(T, r_2) = \min\{\measuredangle(v, v_T), \measuredangle(v, -v_T)\} = \measuredangle(T, r_1)$$

□

Ángulo entre recta e hiperplano

A continuación trataremos el caso particular de un hiperplano y una recta. No obstante, para ello hemos de recordar el concepto de vector normal, introducido en Geometría II.

Definición 2.9 (Vector normal)**.** Sea $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ un espacio vectorial euclídeo, y sea $\overrightarrow{H}$ un hiperplano de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Entonces, diremos que $v_H \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ es un vector normal a $\overrightarrow{H}$ si y solo si:

$$v_H \in \overrightarrow{H}^\perp$$

Notemos que v_H es único salvo factores de proporcionalidad.

Definición 2.10. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sea H un hiperplano de $\mathbb{E}$. Entonces, diremos que $v_H \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ es un vector normal a H si y solo si v_H es un vector normal a $\overrightarrow{H}$.

Proposición 2.4. *Sea $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ un espacio vectorial euclídeo, y sea $v \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Entonces, existe un único hiperplano $\overrightarrow{H}$ de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que v es un vector normal a $\overrightarrow{H}$.*

Demostración. Sea $n = \dim \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Ampliamos $\{v\}$ a una base ortonormal de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$, $\mathcal{B} = \{v, v_2, \dots, v_n\}$. Entonces, $\overrightarrow{H} = \mathcal{L}\{v_2, \dots, v_n\}$ es un hiperplano de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Además, por ser la base ortonormal, tenemos que $v \in \overrightarrow{H}^\perp$, es decir, v es un vector normal a $\overrightarrow{H}$.

Por último, veamos que $\overrightarrow{H}$ es único. Supongamos que $\overrightarrow{H}'$ es otro hiperplano de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que v es un vector normal a $\overrightarrow{H}'$. Entonces, $\overrightarrow{H}' = \mathcal{L}\{v_2', \dots, v_n'\}$, con $\mathcal{B}' = \{v, v_2', \dots, v_n'\}$ base ortonormal de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Entonces, $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}'$. $\square$

Definición 2.11 (Ángulo entre recta e hiperplano)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean $r = p + \mathcal{L}\{v\}$ una recta y H un hiperplano de $\mathbb{E}$ con $v_H \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ vector normal a H. Entonces, definimos el ángulo entre la recta y el hiperplano como:

$$\measuredangle(r, H) := \frac{\pi}{2} - \min\{\measuredangle(v, v_H), \measuredangle(v, -v_H)\}$$

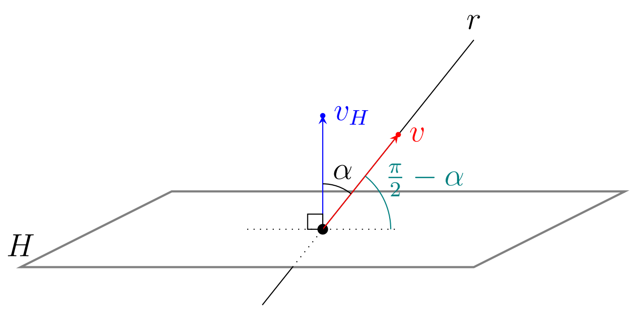


Figura 2.2: Representación gráfica del ángulo entre una recta y un hiperplano.

Ángulo entre dos hiperplanos

El tercer caso particular que trataremos es el ángulo entre dos hiperplanos.

Definición 2.12 (Ángulo entre dos hiperplanos)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo, y sean H_1, H_2 dos hiperplanos de $\mathbb{E}$ con $v_1 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ vector normal a H_1 y $v_2 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ vector normal a H_2. Entonces, definimos el ángulo entre dos dos hiperplanos como:

$$\measuredangle(H_1, H_2) = \min\{\measuredangle(v_1, v_2), \measuredangle(v_1, -v_2)\}$$

Ángulo Orientado

A continuación, recordaremos el concepto de ángulo orientado, introducido en Geometría II. Como podemos ver en la Figura 2.3, tenemos que $\cos\alpha = \cos\alpha'$, por lo que la definición de ángulo no orientado no basta para diferenciar ambos ángulos. Por ello, introducimos el concepto de orientación:

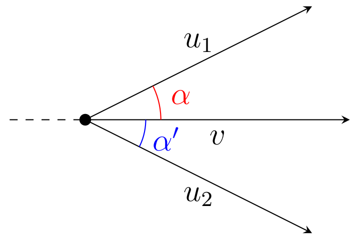


Figura 2.3: Representación del problema de los ángulos no orientados.

Definición 2.13. Dado V un espacio vectorial, diremos que fijamos una orientación en él al fijar una base $\mathcal{B}$, y diremos que V es orientado. Dada otra base $\mathcal{B}'$, diremos que:

1. Tienen la misma orientación (o es positivamente orientada) si $|M(\mathcal{B}', \mathcal{B})| > 0$.
2. Tienen orientación contraria (o es negativamente orientada) si $|M(\mathcal{B}', \mathcal{B})| < 0$.

Teorema 2.5. *Sea V un plano euclídeo orientado. Entonces, $\forall u \in V$, $\exists_1 Ju \in V$ tal que $u \perp Ju$, $\|u\| = \|Ju\|$ y la base $\{u, Ju\}$ es positivamente orientada.*

Definición 2.14. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial euclídeo orientado, definimos el ángulo orientado de u a v, notado por $\measuredangle_o(u, v)$, por el único real $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$\frac{v}{\|v\|} = \cos\theta \frac{u}{\|u\|} + \operatorname{sen}\theta \frac{Ju}{\|Ju\|}$$

Algunas propiedades que se deducen del ángulo orientado son, $\forall u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $\measuredangle_o(u, v) = -\measuredangle_o(v, u)$,
2. $\measuredangle_o(u, -u) = \pi$,
3. $\measuredangle_o(u, v) = \measuredangle_o(-u - v)$,
4. $\measuredangle_o(u, v) = \measuredangle_o(\lambda u, \mu v)$,
5. $\measuredangle_o(u, v) = \measuredangle_o(u, w) + \measuredangle_o(w, v)$.

Una vez recordados los conceptos de ángulo orientado para espacios vectoriales euclídeos, retomamos los espacios afines euclídeos.

Definición 2.15. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Decimos que $\mathbb{E}$ es orientado si $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ tiene fijada una orientación.

2.4. Isometrías

Definición 2.16 (Isometrías)**.** Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ aplicación afín entre espacios euclídeos. Decimos que f es una isometría afín o un movimiento rígido si

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Ejemplo. Sea $\mathbb{E}$ en espacio euclídeo, y sea $v \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Entonces, t_v es una isometría. Veámoslo:

$$d(t_v(p), t_v(q)) = d(p+v, q+v) = \|q-p\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p,q)$$

Es directo pensar que las isometrías afines están relacionadas con las isometrías vectoriales. Veámoslo:

Teorema 2.6. *Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ aplicación afín entre espacios euclídeos con $\overrightarrow{f}$ aplicación lineal asociada. Entonces:*

$$f \text{ isometría afín} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \text{ isometría vectorial}$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que f es una isometría afín. Entonces,

$$d(p,q) = d(f(p), f(q)) \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Como, por definición, $d(p,q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle}$, tenemos:

$$\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle = \left\langle \overrightarrow{f(p)f(q)}, \overrightarrow{f(p)f(q)} \right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Por ser f una aplicación afín, tenemos que:

$$\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) \right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Por tanto, queda demostrado que $\overrightarrow{f}$ es una isometría.

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría vectorial. Por tanto,

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(v) \right\rangle \qquad \forall u, v \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$$

Como, fijado $p_0 \in \mathbb{E}$, todo vector $v \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ se puede poner como $v = \overrightarrow{p_0p}$, con $p \in \mathbb{E}$, entonces:

$$\langle \overrightarrow{p_0p}, \overrightarrow{p_0q} \rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q}) \right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Por ser $\overrightarrow{f}$ la aplicación lineal asociada a f, tenemos que:

$$\langle \overrightarrow{p_0p}, \overrightarrow{p_0q} \rangle = \left\langle \overrightarrow{f(p_0)f(p)}, \overrightarrow{f(p_0)f(q)} \right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Usando la norma en $\overrightarrow{\mathbb{E}}$, tenemos:

$$\|\overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p}\|^2 = \|\overrightarrow{f(p_0)f(q)} - \overrightarrow{f(p_0)f(p)}\|^2 \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Usando la igualdad triangular, tenemos:

$$\|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|^2 \Longrightarrow d(p,q) = d(f(p), f(q)) \qquad \forall p, q \in \mathbb{E}$$

Por tanto, tenemos que f es una isometría afín.

□

Recordemos el siguiente lema, tratado en Geometría II:

Proposición 2.7. *Sea $\varphi : V^n \to V'^m$ una isometría entre espacios vectoriales. Entonces, φ es inyectiva y lineal.*

Corolario 2.7.1. *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ dos espacios euclídeos. Consideramos $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ una isometría afín. Entonces, tenemos que f es inyectiva, afín y $\overrightarrow{f}$ es una isometría vectorial.*

2.5. Clasificación de los movimientos

Sea $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ un movimiento. Tenemos los siguientes tipos de movimientos:

- Directo: Conserva la orientación. $|\overrightarrow{f}| = 1$.
- Inverso: Invierte la orientación. $|\overrightarrow{f}| = -1$.

Para clasificarlas, partimos de la clasificación de las isometrías vectoriales, vista en Geometría II. Recordemos que una aplicación afín viene determinada por su aplicación lineal asociada y la imagen del origen. Es es debido a que, dados dos espacios afines $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ y sus respectivos sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}\}, \mathcal{R}' = \{p_0', \mathcal{B}'\}$, entonces:

$$f(p)_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0 p})_{\mathcal{B}'} \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

Es decir, una vez tengamos determinado $\overrightarrow{f}$, sería necesario obtener un punto de $\mathcal{A}$ que fuese $f(p_0)$.

2.5.1. Movimientos en el plano $\mathbb{E}^2$

Trabajamos con las isometrías $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, y sea $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia ortonormal de $\mathbb{E}$.

Movimientos directos

Tenemos que $\overrightarrow{f}$ puede ser $Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$, $-Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$, o un giro de ángulo $\theta \neq \{0, \pi\}$.

1. $\overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$:

   Entonces es una traslación según el vector $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in \mathcal{A}$. Su matriz asociada es:

$$M(f = t_v, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   donde $(u_1, u_2) = f(p_0)_{\mathcal{R}}$. Por tanto, $(u_1, u_2) = v \in \overrightarrow{\mathbb{E}^2}$.

Por ser una traslación, tenemos los puntos fijos dependen de v.

$$\mathcal{P}_f = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si} \quad v \neq \overrightarrow{0} \\ \mathbb{E}^2 & \text{si} \quad v = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

En el caso de $v = 0$, tenemos que $f = Id_{\mathbb{E}}$.

2. $\overrightarrow{f} = -Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$:

   Tenemos que $\exists o \in \mathbb{E}$ tal que $f = H_{o,-1}$. A esta homotecia se le denomina también <u>simetría central respecto del punto $o \in \mathbb{E}$</u>.

   Además, sabemos que solo tiene un punto fijo,

$$\mathcal{P}_f = \{o\}$$

   Su matriz asociada es:

$$M(f = t_v, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & -1 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   donde $(u_1, u_2) = f(p_0)_{\mathcal{R}}$.

3. $\overrightarrow{f} = G_\theta$ giro de ángulo $\theta \neq \{0, \pi\}$:

   Su matriz asociada es:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ b_2 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

   donde $(b_1, b_2) = f(p_0)_{\mathcal{R}}$.

   Veamos cuántos puntos fijos tiene. El sistema a resolver es:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ b_2 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right)$$

   Equivalentemente,

$$\left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{cc} \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$$

   Veamos si este sistema es SCD; es decir, si es de Cramer:

$$-\left|\begin{array}{cc} \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{array}\right| = -[(\cos\theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta] = -[1 + 1 + -2\cos\theta] = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cos\theta = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0$$

No obstante, $\theta \neq 0$, por lo que el determinante no es nulo y, por tanto, tan solo tiene un punto fijo $q \in \mathbb{E}$.

$$\mathcal{P}_f = \{q\}$$

Esta isometría se denomina giro de centro $q \in \mathbb{E}$ y ángulo θ. Si no hacemos hincapié en la orientación; como la traza de una matriz es invariante para matrices equivalentes, tenemos que:

$$2\cos\theta = tr(M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}'')) \quad \forall \mathcal{B}'' \text{ base de } \overrightarrow{\mathbb{E}^2}$$

Observación. Notemos que el giro de centro q y ángulo $\theta = \pi$ se puede ver como una simetría central respecto del punto $q \in \mathbb{E}$.

Movimientos inversos

Tenemos que $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{L}}$ reflexión axial sobre la recta vectorial $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}\{v_1\}$.

Su matriz asociada, siendo $\mathcal{R}' = \{p_0', \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}\}$ el sistema de referencia con $p_0' \in L$ es:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

donde $(b_1, b_2) = f(p_0')_{\mathcal{R}'}$.

Diferenciamos según los puntos fijos:

1. Si f tiene algún punto fijo:

   Sea $p \in \mathbb{E}$ un punto fijo. Entonces, sea el sistema de referencia $\mathcal{R}'' = \{p, \mathcal{B}'\}$. En ese sistema de referencia, su matriz asociada es:

   $$M(f, \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   Tenemos que, dado $q = p + \overrightarrow{pq} \in \mathbb{E}^2$, entonces $f(q) = p + \sigma_{\overrightarrow{L}}(\overrightarrow{pq})$, por lo que f es la reflexión sobre la recta afín $L = p + \overrightarrow{L}$. Por tanto,

   $$\mathcal{P}_f = L$$

2. Si f no tiene ningún punto fijo:

   Sea $p \in \mathbb{E}^2$ arbitrario, y sea $\mathcal{R}'' = \{p, \mathcal{B}\}$. Entonces, siendo $(b_1, b_2) = f(p)_{\mathcal{R}''}$, tenemos:

   $$M(f, \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   Calculemos los puntos fijos (x, y) asociados a la matriz dada:

   $$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right)$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que f tiene puntos fijos si $b_1 = 0$ e $y = \frac{b_2}{2}$; por lo que $b_1 \neq 0$, y tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La primera matriz que se aplica vemos que es un movimiento inverso y $b_1 = 0$; por lo que acabamos de ver que tiene una recta de puntos fijos. Por tanto, se trata de una simetría respecto de la recta $y = \frac{b_2}{2}$.

La segunda matriz vemos que se trata de la traslación según el vector:

$$\overrightarrow{(0,0)(b_1,0)} = (b_1, 0)_{\mathcal{B}'} = b_1 v_1$$

Por tanto, se trata de una simetría axial con deslizamiento. Como $b_1 \neq 0$, entonces f no tiene puntos fijos.

Tenemos por tanto la siguiente tabla:

$\mathcal{P}_f \ \setminus \ \lvert f\rvert$	1	-1
$\mathbb{E}^2$	Identidad	$\times$
Recta	$\times$	Reflexión axial
Punto	Giro | Reflexión central	$\times$
$\emptyset$	Traslación	Reflexión axial con deslizamiento

2.5.2. Movimientos en el espacio $\mathbb{E}^3$

Movimientos directos

Tenemos que $\overrightarrow{f}$ puede ser $Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$, $\sigma_{\overrightarrow{L}}$ reflexión axial, o un giro sin simetría de ángulo $\theta \neq \{0, \pi\}$.

1. $\overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}$:

   Entonces es una traslación según el vector $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in \mathcal{A}$. Su matriz asociada es:

$$M(f = t_v, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   donde $(u_1, u_2, u_3) = f(p_0)_{\mathcal{R}}$. Por tanto, $(u_1, u_2, u_3) = v \in \overrightarrow{\mathbb{E}^3}$.

   Por ser una traslación, tenemos los puntos fijos dependen de v.

$$\mathcal{P}_f = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad v \neq \overrightarrow{0} \\ \mathbb{E}^3 & \text{si} \quad v = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

   En el caso de $v = 0$, tenemos que $f = Id_{\mathbb{E}}$.

2. $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{L}}$:

Sea $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}\{v_1\}$, y consideramos $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal de $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$. Diferenciamos según el número de puntos fijos:

a) Si f tiene algún punto fijo:
Sea $p \in \mathbb{E}$ un punto fijo, y fijamos el sistema de referencia en $\mathcal{R}' = \{p, \mathcal{B}'\}$. En este sistema de referencia, su matriz asociada es:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, f es la reflexión sobre el eje $p + \overrightarrow{L}$. Por tanto, tenemos que:

$$\mathcal{P}_f = L$$

b) Si f no tiene ningún punto fijo:
Su matriz asociada es:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

donde $(u_1, u_2, u_3) = f(p_0')_{\mathcal{R}'}$. Por tanto, $(u_1, u_2, u_3) = v \in \overrightarrow{\mathbb{E}^3}$.
Veamos cuántos puntos fijos tiene. El sistema a resolver es:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right)$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tenemos por tanto que f tiene puntos fijos si $u_1 = 0$ e $y = \frac{u_2}{2}$, $z = \frac{u_3}{2}$. Como f no tiene puntos fijos, $u_1 \neq 0$.
Por tanto, tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos por tanto que f es una composición de una simetría axial con eje $L \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = u_2/2 \\ z = u_3/2 \end{array} \right.$ junto con la traslación según el vector $(u_1, 0, 0) \in \overrightarrow{\mathbb{E}^3}$.
Por tanto, se trata de una reflexión axial con deslizamiento.

3. $\overrightarrow{f} = G_{\overrightarrow{L},\theta}$, $\theta \neq \{0, \pi\}$.

   Sea $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}\{v_1\}$, y consideramos $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal de $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$. Diferenciamos según el número de puntos fijos:

   a) Si f tiene algún punto fijo:
   Sea $p \in \mathbb{E}$ un punto fijo, y fijamos el sistema de referencia en $\mathcal{R}' = \{p, \mathcal{B}'\}$. En este sistema de referencia, su matriz asociada es:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

   Tenemos que f es un giro con respecto a la recta $L = p + \mathcal{L}\{v_1\}$. Calculemos sus puntos fijos. Esto es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, vemos que hay una recta de puntos fijos; el eje $L = p + \mathcal{L}\{v_1\}$. Si no hacemos hincapié en la orientación; como la traza de una matriz es invariante para matrices equivalentes, tenemos que:

$$2\cos\theta + 1 = tr(M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}'')) \quad \forall \mathcal{B}'' \text{ base de } \overrightarrow{\mathbb{E}^2}$$

   b) Si f no tiene ningún punto fijo:
   Sea $p \in \mathbb{E}$ un punto arbitrario, y fijamos el sistema de referencia en $\mathcal{R}' = \{p, \mathcal{B}'\}$. En este sistema de referencia, su matriz asociada es:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ u_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

   donde $f(p) = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{R}'}$.
   Calculemos sus puntos fijos. Esto es equivalente a:

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, para que haya puntos fijos se ha de cumplir que $u_1 = 0$. Por tanto, tenemos:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ u_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ u_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

Vemos que f se trata de la composición de un giro (ya que tiene puntos fijos) junto con una traslación; por lo que se trata de un giro con deslizamiento. Este movimiento se conoce como movimiento helicoidal. El hecho de que haya deslizamiento de debe a que $u_1 \neq 0$.

Observación. Notemos que una simetría axial se puede ver como un giro de ángulo π; por lo que en muchas bibliografías no se trata como un caso aparte.

Movimientos indirectos

Tenemos que $\overrightarrow{f}$ puede ser una reflexión especular vectorial, $\sigma_{\overrightarrow{\pi}}$, $-Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}^3}}$ o un giro con simetría $\sigma_{\overrightarrow{L}^\perp} \circ G_{\theta,\overrightarrow{L}}$.

1. $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{\pi}}$:

   Sea $\overrightarrow{\pi} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$. Entonces, consideramos $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal.

   Diferenciamos según f tenga o no puntos fijos:

   a) Si f tiene puntos fijos:
   Sea $p \in \mathbb{E}$ el punto fijo. Entonces, su matriz asociada en $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}\}$ es:

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   Tenemos que f es la simetría especular sobre π, por lo que:

$$\mathcal{P}_f = \pi$$

   b) Si f no tiene puntos fijos:
   Sea $p \in \mathbb{E}$ un punto arbitrario. Entonces, su matriz asociada en $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}\}$ es:

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   donde $f(p) = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{R}}$.
   Veamos los puntos fijos de f resolviendo el siguiente sistema:

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

   Por tanto; si $u_1 = u_2 = 0$, tendríamos que hay un plano de puntos fijos $z = \frac{u_3}{2}$. Por tanto, $(u_1, u_2, 0) \neq 0$. Tenemos entonces que:

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Es decir, f es una composición de un una simetría especular respecto del plano $\pi \equiv z = \frac{u_3}{2}$ junto con una traslación respecto del vector $(u_1, u_2, 0) \neq 0$. Es decir, es una simetría especular con deslizamiento. El hecho de que no haya puntos fijos se debe a que el vector de desplazamiento no es nulo.

2. $\overrightarrow{f} = -Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}^3}}$

   Tenemos que $\exists o \in \mathbb{E}$ tal que $f = H_{o,-1}$; es decir f es una homotecia de centro o y razón -1. Análogamente, podemos decir que f es una simetría central respecto del punto o. Tenemos que:

$$\mathcal{P}_f = \{o\}$$

   En el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{o, \mathcal{B}\}$, tenemos:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3. $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{L}^\perp} \circ G_{\theta, \overrightarrow{L}}$, $\theta \neq \{0, \pi\}$:

   Sea $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}\{v_1\}$, y ampliamos a una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dado un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}\}$, tenemos:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline u_1 & -1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ u_3 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

   donde $f(p) = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{R}}$. Veamos si tiene puntos fijos. Esto equivale a resolver el siguiente sistema:

$$-\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(\cos\theta - 1)^2 \operatorname{sen}\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0$$

   No obstante, $\theta \neq 0$, por lo que el determinante no se anula y tenemos que el sistema es de Cramer o SCD, por lo que tan solo tiene un punto fijo. Sea $p_0 \in \mathbb{E}$ dicho punto fijo, $\mathcal{P}_f = \{p_0\}$. Entonces, en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{p_0, \mathcal{B}\}$, tenemos:

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

Es decir, f es la composición de un giro sobre la recta $L = p + \mathcal{L}\{v_1\}$ compuesto con la reflexión especular sobre el plano $\pi = p + \mathcal{L}\{v_2, v_3\} = L_p^\perp$. Este movimiento se denomina un giro con simetría.

Observación. Notemos que el caso de la reflexión central es un caso concreto de giro con simetría de ángulo π.

Tenemos por tanto el siguiente resumen de las isometrías en el espacio:

$P_f \setminus \lvert f \rvert$	1	-1
$\mathbb{E}^3$	Identidad	$\times$
Plano	$\times$	Reflexión especular
Recta	Giro	$\times$
Punto	$\times$	Reflexión central | Giro con simetría
$\emptyset$	Traslación | Helicoidal	Reflexión especular con deslizamiento

2.6. Triángulos

Comencemos por la definición formal de un triángulo:

Definición 2.17 (Triángulo)**.** Un triángulo en un espacio afín $\mathcal{A}$ son tres puntos $\{a, b, c\} \subset \mathcal{A}$ afínmente independientes, que se suelen llamar vértices.

Normalmente, se suele hablar de triángulos $\{a, b, c\}$ en planos afines, ya que sus propiedades se pueden circunscribir al plano $\pi = \langle\{a, b, c\}\rangle \subset \mathcal{A}$ que lo contiene.

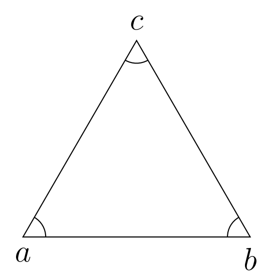
Definición 2.18. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$, se definen los ángulos interiores $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ en los vértices a, b, c respectivamente como los ángulos orientados siguientes:

$$\widehat{A} = \measuredangle_o(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) \qquad \widehat{B} = \measuredangle_o(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) \qquad \widehat{C} = \measuredangle_o(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb})$$

La orientación es la fijada por la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}\}$ del plano afín π que contiene al triángulo.

Teorema 2.8. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo orientado. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$, se tiene que la suma de sus ángulos interiores es π:*

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$



Demostración. Usando las propiedades de los ángulos orientados, tenemos que:

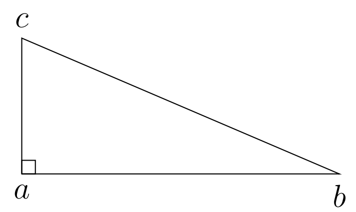
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \measuredangle_o(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac})+\measuredangle_o(\overrightarrow{ca},\overrightarrow{cb})+\measuredangle_o(\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ba}) = \measuredangle_o(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac})+\measuredangle_o(-\overrightarrow{ca},-\overrightarrow{cb})+\measuredangle_o(\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ba}) =$$
$$= \measuredangle_o(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac}) + \measuredangle_o(\overrightarrow{ac},\overrightarrow{bc}) + \measuredangle_o(\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ba}) = \measuredangle_o(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ba}) = \pi$$

□

Recordemos el Teorema de Pitágoras, demostrado en Geometría II.

Teorema 2.9 (de Pitágoras)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dados $a, b, c \in \mathbb{E}$, se tiene que:*

$$\|\overrightarrow{ac}\|^2 + \|\overrightarrow{ab}\|^2 = \|\overrightarrow{cb}\|^2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{ac} \perp \overrightarrow{ab}$$



2.6.1. Puntos Notables del Triángulo

En esta sección vamos a ver el baricentro, el circuncentro, el ortocentro y el incentro. Usaremos la definición de punto medio, dada en la Definición 1.4.

Definición 2.19 (Mediana)**.** Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathcal{A}$, se define la mediana asociada al vértice a como la recta $M_a = \langle a, m_{bc} \rangle$ que pasa por el punto a y el punto medio del segmento $[b, c]$.

Análogamente, se definen las medianas M_b, M_c asociadas a los vértices b, c respectivamente.

Veamos ahora el primer punto notable de los triángulos.

Teorema 2.10 (Baricentro)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathcal{A}$. Entonces, las tres medianas se cortan en un único punto, $B \in \mathcal{A}$, llamado baricentro o centro de masas.*

$$\{B\} = M_a \cap M_b \cap M_c$$

Este cumple la siguiente relación, que no depende del valor de $q \in \mathcal{A}$:

$$B = q + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{qa} + \overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}\right)$$

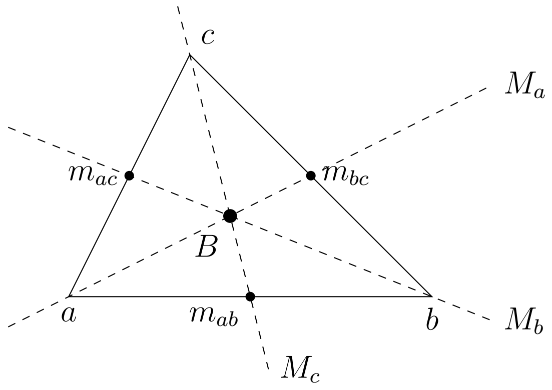


Figura 2.4: Baricentro B de un triángulo $\{a, b, c\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que B no depende de q:

$$q + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{qa} + \overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}\right) = q' + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{q'a} + \overrightarrow{q'b} + \overrightarrow{q'c}\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{q'q} = \frac{1}{3}\left(a + b + c - 3q' - a - b - c + 3q\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{q'q} = \frac{1}{3}\left(-3q' + 3q\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{q'q} = -q' + q = \overrightarrow{q'q}$$

Veamos que $B \in M_a$. Tenemos que $M_a = a + \mathcal{L}\{\overrightarrow{am_{bc}}\}$. Por tanto, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{aB} = \lambda \overrightarrow{am_{bc}}$$

De la definición de punto medio, tenemos:

$$\overrightarrow{am_{bc}} = m_{bc} - a = q + \frac{1}{2}(\overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}) - a = \overrightarrow{aq} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}) \qquad \forall q \in \mathcal{A}$$

De la definición de baricentro, tenemos:

$$\overrightarrow{aB} = B - a = \overrightarrow{aq} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{qa} + \overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{aq} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{qb} + \overrightarrow{qc})$$

Por tanto, vemos claramente que $\overrightarrow{aB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{am_{bc}}$. Por tanto, $B \in M_a$. Análogamente, se demuestra que $B \in M_c, M_b$, por lo que $B \in M_a \cap M_b \cap M_c$.

Por la fórmula de las dimensiones, deducimos que

$$\{B\} = M_a \cap M_b \cap M_c.$$

□

Un importante resultado del baricentro es el siguiente:

Proposición 2.11. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$ con baricentro $B \in \mathbb{E}$, se tiene que:*

$$d(c, B) = \frac{2}{3}d(c, m_{ab}) \qquad d(B, m_{ab}) = \frac{1}{3}d(c, m_{ab})$$

Demostración. Tomando el baricentro con $q = c$, se tiene que:

$$B = c + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb} + \overrightarrow{cc}\right) = c + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\overrightarrow{cB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right)$$

Multiplicando por $3/2$, tenemos que:

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{cB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = \overrightarrow{cm_{ab}} = m_{ab} - c = \overrightarrow{cm_{ab}}$$

Por tanto, se tiene que $d(c, B) = \frac{2}{3}d(c, m_{ab})$. Análogamente, se la expresión para B se tiene que:

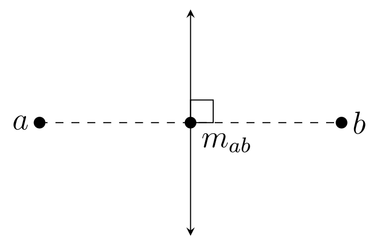
$$\overrightarrow{m_{ab}B} = c+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right)-m_{ab} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = -\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{cm_{ab}}$$

Por tanto, se tiene que $d(B, m_{ab}) = \frac{1}{3}d(c, m_{ab})$. □

Definición 2.20 (Mediatriz)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado $a, b \in \mathbb{E}$, $a \neq b$, definimos la mediatriz del segmento $[a, b]$ como el único subespacio afín perpendicular a la recta $\langle a, b\rangle$ que pasa por el punto medio. Es decir,

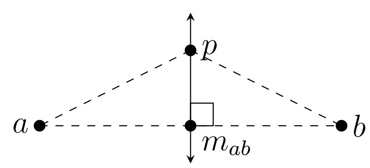
$$L = r_{m_{ab}}^{\perp} = m_{ab} + \overrightarrow{r}^{\perp} = m_{ab} + \mathcal{L}\left(\left\{\overrightarrow{ab}\right\}\right)^{\perp}$$

donde r es la recta que une a, b, es decir, $r = a + \mathcal{L}\{\overrightarrow{ab}\}$.



Proposición 2.12. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado $a, b \in \mathbb{E}$, y dado $p \in \mathbb{E}$, se caracteriza la mediatriz de $a, b \in \mathbb{E}$ como:*

$$p \in r_{m_{ab}}^{\perp} \Longleftrightarrow d(a, p) = d(b, p)$$



Demostración.

$\Longrightarrow$) Si $p \in r_{m_{ab}}^{\perp}$, entonces $\overrightarrow{m_{ab}p} \perp \overrightarrow{ab}$. Los triángulos $\{p, a, m_{ab}\}$ y $\{p, b, m_{ab}\}$ son rectángulos. Por tanto, por el Teorema de Pitágoras,

$$d^2(a,p) = d^2(a, m_{ab}) + d^2(p, m_{ab}) = d^2(b, m_{ab}) + d^2(p, m_{ab}) = d^2(b,p)$$

Por tanto, $d(a,p) = d(b,p)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $p \notin r_{m_{ab}}^{\perp}$, y lleguemos a una contradicción.

Como $p \notin r_{m_{ab}}^{\perp}$, tenemos que $\overrightarrow{m_{ab}p} \notin \overrightarrow{r}^{\perp}$. Por tanto, $\exists v \in \mathcal{L}\{\overrightarrow{ab}\}$ tal que $\langle v, \overrightarrow{m_{ab}p}\rangle \neq 0$. Como $v \in \mathcal{L}\{\overrightarrow{ab}\}$, tenemos que $v = k \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$ para cierto $k \in \mathbb{R}^*$. Por tanto,

$$0 \neq \langle v, \overrightarrow{m_{ab}p}\rangle = \left\langle k \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{m_{ab}p} \right\rangle = k\left\langle \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{m_{ab}p} \right\rangle = k\left\langle \overrightarrow{m_{ab}b}, \overrightarrow{m_{ab}p} \right\rangle = -k\left\langle \overrightarrow{m_{ab}a}, \overrightarrow{m_{ab}p} \right\rangle$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{m_{ab}p} \not\perp \overrightarrow{m_{ab}a}, \overrightarrow{m_{ab}b}$. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\|\overrightarrow{pa}\|^2 \neq \|\overrightarrow{m_{ab}p}\|^2 + \|\overrightarrow{m_{ab}a}\|^2 \overset{(*)}{=} \|\overrightarrow{m_{ab}p}\|^2 + \|\overrightarrow{m_{ab}b}\|^2 \neq \|\overrightarrow{pb}\|^2$$

donde en $(*)$ he aplicado que $\|\overrightarrow{m_{ab}a}\| = \|\overrightarrow{m_{ab}b}\|$. Por tanto, tenemos que $\|\overrightarrow{pa}\| \neq \|\overrightarrow{pb}\|$, por lo que:

$$d(a,p) = \|a - p\| = \|\overrightarrow{pa}\| \neq \|\overrightarrow{pb}\| = \|b - p\| = d(b,p)$$

llegando entonces a una contradicción. Por tanto, $p \in r_{m_{ab}}^{\perp}$.

□

Teorema 2.13 (Circuncentro)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$. Notemos R_a a la mediatriz del segmento $[b, c]$, y análogamente a R_b, R_c.*

Entonces, las tres mediatrices se cortan en un único punto, $C \in \mathbb{E}$, llamado circuncentro.

$$\{C\} = R_a \cap R_b \cap R_c$$

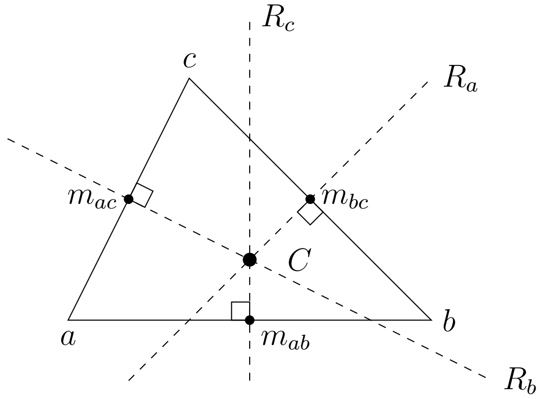


Figura 2.5: Cincuncentro C de un triángulo $\{a, b, c\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $R_a \not\parallel R_b$. Si fuesen paralelas, entones $\overrightarrow{R_a} = \overrightarrow{R_b}$ Es decir, $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp = \mathcal{L}\{\overrightarrow{ac}\}^\perp$. Por tanto, tendríamos que ambas rectas vectoriales serían iguales, por lo que sus vectores directores serían linealmente dependientes, algo que no es posible ya que los tres vértices de un triángulo son afínmente independientes. Por tanto, las mediatrices no son paralelas dos a dos.

Por tanto, $\exists C \in R_a \cap R_b$. Es decir, C es un único punto y como $C \in R_a$, entonces $d(C,b) = d(C,c)$. Además, como $C \in R_b$, entonces $d(C,a) = d(C,c)$. Por tanto, el punto es equidistante de los tres vértices. Como $d(C,a) = d(C,c) = d(C,b)$, tenemos que $C \in R_c$. Por tanto,

$$C \in R_a \cap R_b \cap R_c$$

Por la fórmula de las dimensiones, deducimos que

$$\{C\} = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

□

Notemos que el nombre del circuncentro de sebe a que es el centro de una circunferencia que pasa por a, b y c.

Definición 2.21 (Altura)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a,b,c\} \subset \mathbb{E}$, se define la altura H_a del vértice a como la recta que pasa por a y es ortogonal al lado opuesto $[b,c]$:

$$H_a = a + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp$$

Análogamente se definen las alturas asociadas a los vértices b y c.

Teorema 2.14 (Ortocentro)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a,b,c\} \subset \mathbb{E}$, existe un único punto $O \in \mathbb{E}$ llamado ortocentro tal que:*

$$\{O\} = H_a \cap H_b \cap H_c$$

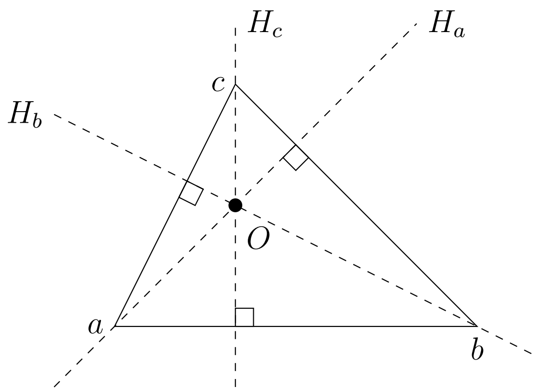


Figura 2.6: Ortocentro O de un triángulo $\{a,b,c\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $H_a \not\parallel H_b$. Si fuesen paralelas, entones $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp = \mathcal{L}\{\overrightarrow{ac}\}^\perp$. Por tanto, tendríamos que ambas rectas vectoriales serían iguales, por lo que sus vectores directores serían linealmente dependientes, algo que no es posible ya que los tres vértices de un triángulo son afínmente independientes. Por tanto, las alturas no son paralelas dos a dos.

Como H_a y H_b son secantes, entonces se cortan en un punto $O \in \mathbb{E}$:

$$O \in H_a \cap H_b$$

Veamos ahora que $O \in H_c$. Para ello, vemos que $\overrightarrow{Oc} \perp \overrightarrow{ab}$:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{Oc}, \overrightarrow{ab} \rangle &= \langle \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{aO} + \overrightarrow{Ob} \rangle = \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{aO} + \overrightarrow{Ob} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{aO} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{aO} + \overrightarrow{Ob} \rangle - \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{ac} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{aO} + \overrightarrow{Ob} - \overrightarrow{ac} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{aO} + \overrightarrow{Ob} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = \langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{cb} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = 0\end{aligned}$$

donde he usado la igualdad triangular, las propiedades de la métrica $\langle , \rangle$ y que $\langle \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{cb} \rangle = \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{Ob} \rangle = 0$ por ser $O \in H_a \cap H_b$.

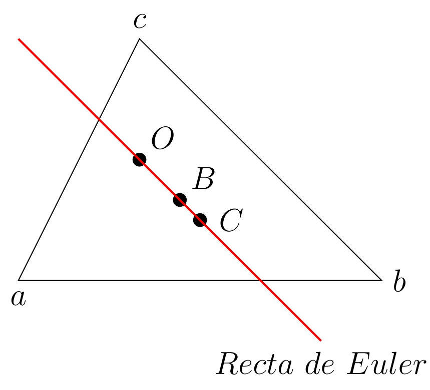
Por tanto, $O \in H_a \cap H_b \cap H_c$. Por la fórmula de las dimensiones, deducimos que

$$\{O\} = H_a \cap H_b \cap H_c.$$

□

Teorema 2.15 (De Euler)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$, el baricentro B, el circuncentro C y el ortocentro O están alineados.*

Si $\{B, C, O\}$ contiene al menos dos puntos distintos, la recta pasando por B, C y O se denomina Recta de Euler.



Demostración. Consideramos la homotecia de razón $k = -\frac{1}{2}$ y centro el baricentro B. Veamos que $H_{B,-1/2}$ lleva cada vértice en el punto medio del segmento opuesto:

$$\begin{aligned}H_{B,-1/2}(a) &= B - \frac{1}{2}\overrightarrow{Ba} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{aB} = \left(a + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{a} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\right)\right) - \cancel{a}\right] = \\ &= \left(a + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\right) = a + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\right) = m_{bc}\end{aligned}$$

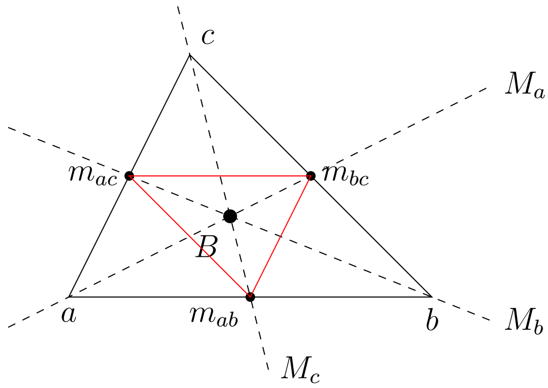


Figura 2.7: Baricentro B de un triángulo $\{a, b, c\}$, junto con el triángulo formado por $H_{B,-1/2}$.

Análogamente se demuestra para b, c, por lo que se tiene que $H_{B,-1/2}$ lleva cada vértice en el punto medio del segmento opuesto. Veamos ahora que h lleva las alturas de $\{a, b, c\}$ en las mediatrices de $\{a, b, c\}$:

$$H_{B,-1/2}(H_a) = H_{B,-1/2}\left(a + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp\right) = H_{B,-1/2}(a) - \frac{1}{2}Id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp\right) =$$
$$= m_{bc} + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{bc}\right\}^\perp = R_a$$

Análogamente, se demuestra para H_b, H_c, por lo que:

$$H_{B,-1/2}(O) = H_{B,-1/2}(H_a) \cap H_{B,-1/2}(H_b) \cap H_{B,-1/2}(H_c) = R_a \cap R_b \cap R_c = C$$

No obstante, se tiene que un punto, su imagen mediante una homotecia de centro o, y el mismo centro o están alineados. Por tanto, $O, C = H_{B,-1/2}(O)$ y B están alineados, como queríamos demostrar. □

2.6.2. Incentro

En este apartado, introducimos el cuarto punto notable del triángulo, el incentro. Separamos este punto del resto por no estar este contenido, de forma general, en la recta de Euler. Para definirlo, hemos de introducir el concepto de bisectriz, seguramente conocido por el lector.

Definición 2.22 (Bisectriz de dos rectas secantes)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Sean dos rectas secantes $R_1, R_2 \subset \mathbb{E}$, con $R_1 = p + \mathcal{L}\{v_1\}$ y $R_2 = p + \mathcal{L}\{v_2\}$. Consideramos los vectores $u_a, u_b \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tales que:

$$u_a := \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|} \qquad u_b := \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

Entonces, las dos bisectrices de R_1 y R_2 son las rectas $B_a, B_b \subset \mathbb{E}$ dadas por:

$$B_a = p + \mathcal{L}\{u_a\} \qquad B_b = p + \mathcal{L}\{u_b\}$$

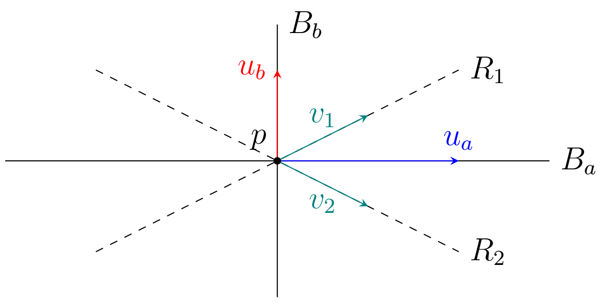


Figura 2.8: Bisectrices de las rectas R_1 y R_2.

Proposición 2.16. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Sean $R_1, R_2 \subset \mathbb{E}$ dos rectas secantes, y sean B_a, B_b sus bisectrices. Entonces:*

$$B_a \perp B_b$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle u_a, u_b \rangle &= \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle = \\ &= \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} - \cancel{\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \, \|v_2\|}} + \cancel{\frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\| \, \|v_2\|}} - \frac{\|v_2\|^2}{\|v_2\|^2} = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

□

Proposición 2.17. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Sean $R_1, R_2 \subset \mathbb{E}$ dos rectas secantes y sea $B \subset \mathbb{E}$ una recta. Entonces:*

$$B \text{ es una bisectriz de } R_1 \text{ y } R_2 \iff \measuredangle(R_1, B) = \measuredangle(R_2, B)$$

Proposición 2.18. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Sean $R_1, R_2 \subset \mathbb{E}$ dos rectas secantes, y sea B una de sus bisectrices. Entonces, dado $q \in \mathbb{E}$, se tiene que:*

$$q \in B \iff d(q, R_1) = d(q, R_2)$$

Observación. Aunque dos rectas tengan dos bisectrices, se suele hablar de la bisectriz de dos rectas. Al igual forma que se vio que dos rectas forman dos ángulos α, β tal que $\alpha + \beta = \pi$, y se definía el ángulo entre dos rectas como el menor de los dos ángulos, cuando se habla de la bisectriz de dos rectas, se refiere a la bisectriz del ángulo menor.

Aunque las bisectrices se definan para las rectas, es común extender el concepto a otros elementos geométricos, como hablar de *bisectriz de un ángulo*, *bisectriz en un vértice*, etc. Ejemplo de esto es la siguiente definición:

Definición 2.23. Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dados tres puntos $a, b, c \in \mathbb{E}$ no alineados, se define la bisectriz del ángulo $\measuredangle(bac)$ en el vértice a como la bisectriz de las rectas $R_b = a + \mathcal{L}\{\overrightarrow{ab}\}$ y $R_c = a + \mathcal{L}\{\overrightarrow{ac}\}$.

Una vez introducido el concepto de bisectriz de forma general, concretamos para el caso de un triángulo, que es el caso que nos interesa. Al igual que en el caso del resto de los puntos notables, el incentro se define como el punto de corte de las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Teorema 2.19 (Incentro)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Dado un triángulo $\{a,b,c\} \subset \mathbb{E}$, notamos por I_a, I_b, I_c a las bisectrices de los ángulos $\measuredangle(bac), \measuredangle(abc), \measuredangle(cba)$ en los vértices a,b,c respectivamente. Es decir:*

$$I_a = a + \mathcal{L}\left\{\frac{\overrightarrow{ab}}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \frac{\overrightarrow{ac}}{\|\overrightarrow{ac}\|}\right\} \qquad I_b = b + \mathcal{L}\left\{\frac{\overrightarrow{ba}}{\left\|\overrightarrow{ba}\right\|} + \frac{\overrightarrow{bc}}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}\right\}$$

$$I_c = c + \mathcal{L}\left\{\frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\left\|\overrightarrow{cb}\right\|}\right\}$$

Entonces, existe un único punto $I \in \mathbb{E}$ llamado incentro tal que:

$$\{I\} = I_a \cap I_b \cap I_c$$

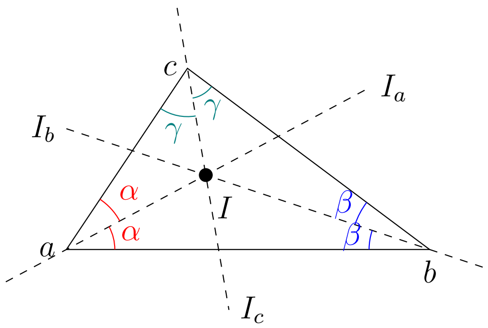


Figura 2.9: Incentro I de un triángulo $\{a,b,c\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que I_a, I_b no son paralelas. Si lo fuesen, entones tendríamos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \frac{\overrightarrow{ac}}{\|\overrightarrow{ac}\|} = \lambda \cdot \left(\frac{\overrightarrow{ba}}{\left\|\overrightarrow{ba}\right\|} + \frac{\overrightarrow{bc}}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{ab}\left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \lambda\right) + \frac{\overrightarrow{ac}}{\|\overrightarrow{ac}\|} = \lambda \cdot \frac{\overrightarrow{bc}}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}$$

Por la igualdad triangular, tenemos que: $\overrightarrow{bc} = -\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}$. Por tanto,

$$\overrightarrow{ab}\left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \lambda + \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}\right) + \frac{\overrightarrow{ac}}{\|\overrightarrow{ac}\|}\left(1 - \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}\right) = 0$$

Como $\left\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\right\}$ son linealmente independientes, entonces:

$$1 - \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|} = 0 = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \lambda + \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{bc}\right\|}$$

De la igualdad de la izquierda, obtenemos que $\lambda = \left\|\overrightarrow{bc}\right\|$. Sustituyendo en la igualdad de la derecha, tenemos que:

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{ab}\right\|} + \left\|\overrightarrow{bc}\right\| + 1 = 0$$

No obstante, esto es imposible, ya que es una suma de términos positivos. Por tanto, I_a y I_b no son paralelas. Como I_a y I_b son secantes, entonces se cortan en un punto $I \in \mathbb{E}$:

$$I \in I_a \cap I_b$$

Veamos ahora que $I \in I_c$. Como $I \in I_a$, entonces $d(I, R_{ab}) = d(I, R_{ac})$. Como $I \in I_b$, entonces $\underset{\cdot}{(}I, R_{bc}) = \underset{\cdot}{(}I, R_{ab})$. Por tanto, tenemos que:

$$\underset{\cdot}{(}I, R_{bc}) = \underset{\cdot}{(}I, R_{ab}) = \underset{\cdot}{(}I, R_{ac}) \Longrightarrow d(I, R_{bc}) = d(I, R_{ac}) \Longrightarrow I \in I_c$$

Por tanto, tenemos que $I \in I_a \cap I_b \cap I_c$. Por la fórmula de las dimensiones, tenemos que:

$$\{I\} = I_a \cap I_b \cap I_c$$

Por tanto, queda también así demostrada la unicidad de I.

□

Observación. Todos los resultados vistos en esta sección se pueden ver de forma interactiva en el siguiente applet de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/k4mcmpsw.

2.7. Teorema de Thales

Concluiremos el tema de espacios afínes euclídeos demostrando el Teorema de Thales (o Tales) (siglo VII A.C.).

Teorema 2.20 (Thales)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo de dimensión $n \geqslant 2$. Sean Π_1, Π_2 y Π_3 tres hiperplanos distintos en $\mathbb{E}$ paralelos y distintos dos a dos. Sean R y S dos rectas distintas en $\mathbb{E}$ no paralelas a los hiperplanos, y llamemos $\{r_i\} = \Pi_i \cap R$, $\{s_i\} = \Pi_i \cap S$, $i = 1, 2, 3$ a los correspondientes puntos de corte entre las rectas y los planos. Entonces:*

$$\frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}$$

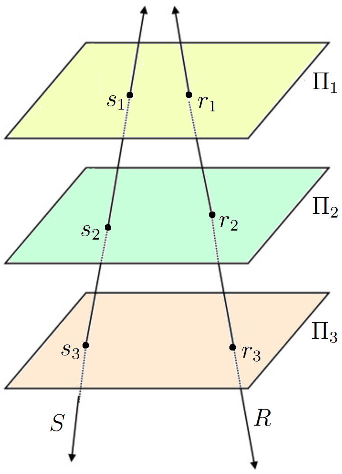


Figura 2.10: Teorema de Thales.

Demostración. Consideramos π_{S,Π_i} la proyección afín sobre S paralela a Π_i para $i = 1,2,3$. Tenemos que:

$$\pi_{S,\Pi_i}(r_j) = s_i + \pi_{\vec{S},\vec{\Pi}}(\overrightarrow{s_i r_j}) = s_i + \overrightarrow{s_i s_j} = s_j \qquad \forall i,j = 1,2,3$$

Como r_1, r_2 y r_3 están alineados, $\exists_1 \lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\overrightarrow{r_1 r_3} = \lambda \overrightarrow{r_1 r_2}$. Por tanto,

$$d(r_1, r_3) = \|\overrightarrow{r_1 r_3}\| = |\lambda| \ \|\overrightarrow{r_1 r_2}\| = |\lambda| d(r_1, r_2).$$

Como π_{S,Π_i} es afín y $\pi_{S,\Pi_i}(r_j) = s_j$ para $i,j = 1,2,3$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{\pi}_{S,\Pi_i}(\overrightarrow{r_1 r_3}) &= \overrightarrow{\pi_{S,\Pi_i}(r_1)\pi_{S,\Pi_i}(r_3)} = \overrightarrow{s_1 s_3} \qquad \forall i = 1,2,3 \\
\vec{\pi}_{S,\Pi_i}(\overrightarrow{r_1 r_2}) &= \overrightarrow{\pi_{S,\Pi_i}(r_2)\pi_{S,\Pi_i}(r_2)} = \overrightarrow{s_1 s_2} \qquad \forall i = 1,2,3
\end{aligned}$$

Además, como $\vec{\pi}_{S,\Pi_i}$ es lineal, tenemos que:

$$\vec{\pi}_{S,\Pi_i}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \vec{\pi}_{S,\Pi_i}(\lambda \overrightarrow{r_1 r_2}) = \lambda \vec{\pi}_{S,\Pi_i}(\overrightarrow{r_1 r_2}) \Longrightarrow \overrightarrow{s_1 s_3} = \lambda \overrightarrow{s_1 s_2} \qquad \forall i = 1,2,3$$

Por tanto,

$$d(s_1, s_3) = \|\overrightarrow{s_1 s_3}\| = |\lambda| \ \|\overrightarrow{s_1 s_2}\| = |\lambda| d(s_{1,2}).$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

□

2.8. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con este tema, consultar la sección 5.2.

3. Hipercuádricas afines

Definición 3.1. Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia. Definimos una hipercuádrica afín real H como:

$$H = \left\{ p \in \mathcal{A} \ : \ (1, p_{\mathcal{R}}^t) \cdot \widehat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

donde $\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, donde $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$ y $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

A la matriz $\widehat{C}$ la llamaremos la matriz asociada a H en $\mathcal{R}$.

Sea ahora $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)^t$, $z = (z_1, \dots, z_n)^t$ y $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, con $c_{ij} = c_{ji}$ por ser $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Veamos en primer lugar que H está muy relacionado con las formas cuadráticas vistas en Geometría II:

$$\begin{aligned} 0 = (1, p_{\mathcal{R}}^t) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} &= (a + p_{\mathcal{R}}^t z, z^t + p_{\mathcal{R}}^t C) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \\ &= a + p_{\mathcal{R}}^t z + z^t p_{\mathcal{R}} + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} = a + 2p_{\mathcal{R}}^t z + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

donde tenemos que $p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}}$ era la forma cuadrática asociada a la métrica definida por la matriz C en la base $\mathcal{B}$.

Análogamente, tenemos que H se corresponde con una ecuación cuadrática[1], que resulta menos abstracto:

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2p_{\mathcal{R}}^t z + p_{\mathcal{R}}^t C p_{\mathcal{R}} = \\ &= a + 2(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= a + 2\sum_{i=1}^n z_i x_i + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $\mathcal{A}^n$ un espacio afín, y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia. Encontrar la ecuación cuadrática de la hipercuádrica H, cuya matriz asociada en $\mathcal{R}$ es la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $H = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A} \mid y^2 + 2xy + 2x + 4y + 1 = 0\}$.

[1] Recordemos que una ecuación cuadrática es, simplemente, un polinomio de grado 2.

3.1. Cambio de sistema de referencia e hipercuádricas

Como hemos visto, las hipercuádricas se han definido según un sistema de referencia $\mathcal{R}$; por lo que es lógico preguntarse cómo se ven modificados si dicho sistema de referencia cambia.

Además del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}\}$ que se ha considerado para definir una hipercuádrica, sea $\mathcal{R}' = \{p_0', \mathcal{B}'\}$ otro sistema de referencia tal que:

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right), \qquad A = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 =&(1, p_{\mathcal{R}}^t) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} a + b^t z & z^t + b^t C \\ \hline A^t z & A^t C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} a + b^t z + z^t b + b^t C b & z^t A + b^t C A \\ \hline A^t z + A^t C b & A^t C A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \\
=&(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{a} & \widetilde{z}^t \\ \hline \widetilde{z} & A^t C A \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{a} = a + b^t z + z^t b + b^t C b \\ \widetilde{z} = A^t (Cb + z) \end{array}\right.$$

3.2. Clasificación de hipercuádricas euclídeas

Dada una hipercuádrica euclídea, nuestro objetivo es encontrar un sistema de referencia en el que la ecuación cuadrática sea fácil de identificar, pudiendo entonces clasificarla.

Definición 3.2. Sean C_1, C_2 dos hipercuádricas de $\mathbb{R}^n$. Decimos que C_1 y C_2 son *equivalentes* si existe una biyección $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C_1) = C_2$.

La siguiente proposición es de demostración sencilla, ya que la composición de biyecciones es una biyección, y la inversa de una biyección es una biyección.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. En el conjunto de todas las hipercuádricas de $\mathcal{A}$, la relación "ser equivalente a" es una relación de equivalencia.*

En esta sección nos vamos a centrar en clasificar las hipercuádricas euclídeas mediante cambios de sistema de referencia, que son biyecciones.

Por el Teorema de Sylvester visto en Geometría II, como C es simétrica, tenemos que $\exists \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ tal que $A^tCA = D$, con D diagonal:

$$D = A^tCA = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} r_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & r_{n_1} & & & & & & \\ \hline & & & -r_{n_1+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Además, veamos que se puede elegir b de la forma que $\widetilde{z}$ (que también define la hipercuádrica) tenga sus primeras $n_1 + n_2$ coordenadas nulas.

Por tanto, hay un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}'$ tal que H viene dada por:

$$0 = (1, p^t_{\mathcal{R}'}) \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} \widetilde{a} & & 0 & & & 0 & & \widetilde{z}_{n_1+n_2+1} & \cdots & \widetilde{z}_n \\ \hline & r_1 & & & & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & & & & \\ & & & r_{n_1} & & & & & & \\ \hline & & & & -r_{n_1+1} & & & & & \\ 0 & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\ \hline \widetilde{z}_{n_1+n_2+1} & & & & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ \widetilde{z}_n & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Distinguimos ahora en función de si $\widetilde{z}$ es nulo o no:

1. <u>El vector columna $\widetilde{z}$ es nulo, $\widetilde{z} = \overrightarrow{0}$:</u>

   En este caso, si $p^t_{\mathcal{R}'} = (s_1, \ldots, s_n)$, los puntos de H cumplen:

   $$r_1 s_1^2 + \cdots + r_{n_1} s_{n_1}^2 - r_{n_1+1} s_{n_1+1}^2 - r_{n_1+n_2} s_{n_1+n_2}^2 = -\widetilde{a}$$

   donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$. Además, podemos suponer que el número de coeficientes positivos es mayor o igual que el número de valores negativos, cambiando de signo la igualdad si hiciese falta. Además, si $\widetilde{a} \neq 0$, podemos dividir entre $\widetilde{a}$ de forma que esté igualado a ± 1. Por tanto, haciendo esos cambios tenemos que:

   $$R_1 s_1^2 + \cdots + R_m s_m^2 - R_{m+1} s_{m+1}^2 - R_l s_l^2 = \varepsilon$$

   donde los R_i son números positivos, $m \geqslant {}^l\!/_2$ y $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$.

   Por último, veamos que si $\varepsilon = 0$, podemos dividir entre R_l de manera que el coeficiente de s_l^2 sea 1.

2. <u>El vector columna $\widetilde{z}$ no es nulo, $\widetilde{z} \neq \overrightarrow{0}$:</u>

   Ya que $\widetilde{w}^t = (\widetilde{z}_{n_1+n_2+1}, \dots, \widetilde{z}_n)_{\mathcal{B}'} \neq \overrightarrow{0}$, ampliamos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n-(n_1+n_2)}$ dada por $\mathcal{B}''_{\widetilde{w}} = \{e_{n_1+n_2+1}, \dots, e_n\}$, con $e_n = \frac{\widetilde{w}}{\|\widetilde{w}\|}$. Por tanto, consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R}''$ tal que:

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}'', \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{array}\right)$$

   donde $B = M(\mathcal{B}''_{\widetilde{w}}, \mathcal{B}'_{\widetilde{w}})$ y $\mathcal{B}'_{\widetilde{w}}$ son los $n-(n_1+n_2)$ últimos vectores de $\mathcal{B}'$.

   Como en este caso $\widetilde{b} = 0$, tenemos que $\widetilde{\widetilde{z}} = B^t\widetilde{w} = (0, \dots, 0, \|w\|)^t$. Por tanto, en $\mathcal{R}''$ tenemos que H viene dada por:

$$0 = (1, p^t_{\mathcal{R}''}) \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} \widetilde{\widetilde{a}} & & 0 & & & 0 & & 0 & \cdots & \|w\| \\ \hline & r_1 & & & & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & & & & \\ & & & r_{n_1} & & & & & & \\ \hline & & & & -r_{n_1+1} & & & & & \\ 0 & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -r_{n_1+n_2} & & & \\ \hline 0 & & & & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ \|w\| & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix}$$

   Por último, veamos que hay un cambio de origen del sistema de referencia de manera de manera que la matriz es idéntica a excepción de que $\widetilde{\widetilde{a}} = 0$.

   Sea el sistema de referencia $\mathcal{R}'''$ tal que:

$$M(Id_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}''', \mathcal{R}'') = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} & 0 \\ b_n & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Tenemos que $\widetilde{\widetilde{\widetilde{z}}} = \widetilde{\widetilde{z}}$, pero $\widetilde{\widetilde{\widetilde{a}}} \neq \widetilde{\widetilde{a}}$. Veamos su nuevo valor:

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{a}}} = \widetilde{\widetilde{a}} + (0, \dots, b_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \|w\| \end{pmatrix} + (0, \dots, \|w\|) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \cancel{(0, \dots, b_n) C \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \widetilde{\widetilde{a}} + 2b_n\|w\| = 0 \iff b_n = \frac{-\widetilde{\widetilde{a}}}{2\|w\|}$$

   Por tanto, si $p^t_{\mathcal{R}''''} = (t_1, \dots, t_n)$, los puntos de H cumplen:

$$r_1 t_1^2 + \cdots + r_{n_1} t_{n_1}^2 - r_{n_1+1} t_{n_1+1}^2 - r_{n_1+n_2} t_{n_1+n_2}^2 + 2\|w\| t_n = 0$$

donde $r_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Además, podemos suponer que el número de coeficientes positivos es mayor o igual que el número de valores negativos, cambiando de signo la igualdad si hiciese falta.

Por último, pasamos el término $\pm 2\|w\|t_n$ al término de la derecha, y dividimos entre $\mp\|w\|$. De tal forma, tenemos que queda:

$$R_1t_1^2 + \dots + R_mt_m^2 - R_{m+1}t_{m+1}^2 - R_lt_l^2 = 2t_n$$

donde los R_i son números positivos, $m \geqslant l/2$ y $l < n$.

Por tanto, de toda la discusión en esta sección tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Sea H una hipercuádrica de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}^n$. Entonces existe un sistema de referencia euclídeo en el cual la ecuación cuadrática que define a H en ese sistema de referencia es de una de las siguientes formas:*

1. $R_1x_1^2 + \dots + R_mx_m^2 - R_{m+1}x_{m+1}^2 - R_lx_l^2 = \varepsilon$, *donde* $R_i > 0$ $\forall i$, $m \geqslant l/2$ *y* $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$. *Además, si* $\varepsilon = 0$ *se tiene que* $R_l = 1$.

2. $R_1x_1^2 + \dots + R_mx_m^2 - R_{m+1}x_{m+1}^2 - R_lx_l^2 = 2x_n$, *donde* $R_i > 0$ $\forall i$, $m \geqslant l/2$ *y* $l < n$.

3.2.1. Clasificación de las cónicas

En esta sección, vamos a clasificar las hipercuádricas en el plano euclídeo, también llamadas **cónicas**. Estas son las conocidas elipses, hipérbolas, etc[2].

Todas las cónicas se pueden visulizar gráficamente en el siguiente applet de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/wpacurtc.

Usando el Teorema 3.2, podemos hacer la distinción de los posibles casos. Notemos que, como $R_i > 0$ para todo i, y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es biyectiva, notemos que es indiferente poner R_i que $\frac{1}{(R_i')^2}$. Por tanto, los distintos casos son:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

   Tenemos que no es posible, por lo que $H = \emptyset$.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

   Se trata de una elipse con semiejes a y b. Tenemos que sus puntos de corte con los ejes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Longrightarrow y = \pm b \\ y = 0 \Longrightarrow x = \pm a \end{array}\right.$$

   Su representación se puede ver en la Figura 3.1.

[2]El lector posiblemente las conozca de dibujo técnico, etc. No obstante, estas figuras del plano matemáticamente simplemente se definen como los puntos del plano que cumplen cada ecuación. Más adelante veremos que existen determinados elementos de importancia, como puede ser los focos, ejes, etc; aunque posiblemente el lector ya conozca de su existencia.

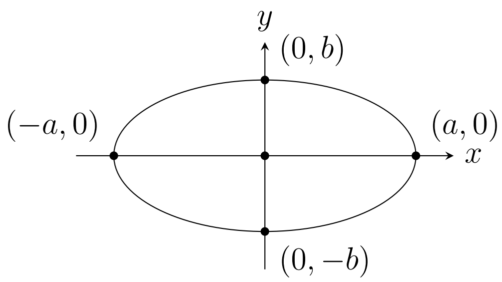


Figura 3.1: Elipse.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

   Tenemos que es un único punto, el origen: $H = \{(0, 0)\}$.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

   Se trata de una hipérbola. Calculemos sus puntos de corte:

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = \pm b \\ y = 0 \Longrightarrow \nexists \end{cases}$$

   Por tanto, tan solo corta al eje Y. Calculemos sus asíntotas oblicuas[3]. Tenemos que $y = f(x) = \pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$. Si la asíntota oblicua es $y = mx + n$, calculamos m, n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \pm b\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \mp \frac{bx}{a} &= \lim_{x\to\infty} \pm b\left[\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a}\right] = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\pm b\left[1 + \cancel{\frac{x^2}{a^2}} - \cancel{\frac{x^2}{a^2}}\right]}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}} = 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que tiene dos asíntotas oblicuas, $y = \pm\frac{b}{a}x$. Está representada en la Figura 3.2.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

   Se trata también de una hipérbola. Calculemos sus puntos de corte:

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \nexists \\ y = 0 \Longrightarrow x = \pm a \end{cases}$$

   Por tanto, tan solo corta al eje X. Además, tiene las dos mismas dos asíntotas oblicuas, $y = \pm\frac{b}{a}x$. Está representada en la Figura 3.3.

[3]Aunque este concepto no se haya introducido en la carrera de Matemáticas, se da por conocido de Bachillerato solo con el objeto de hacer ver que se trata de una hipérbola

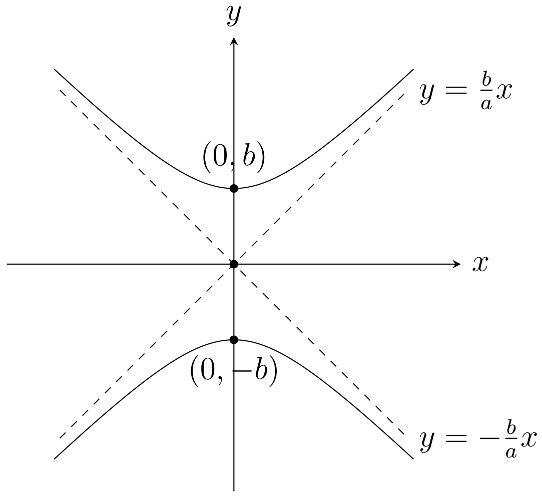


Figura 3.2: Hipérbola que corta al eje Y.

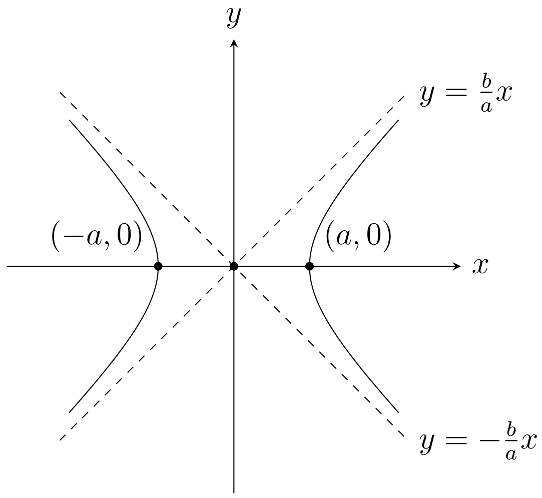


Figura 3.3: Hipérbola que corta al eje X.

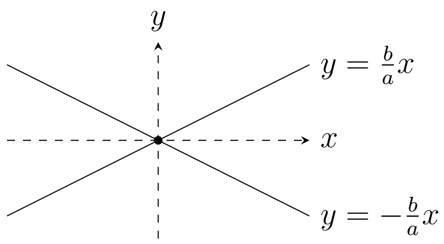


Figura 3.4: Par de rectas secantes.

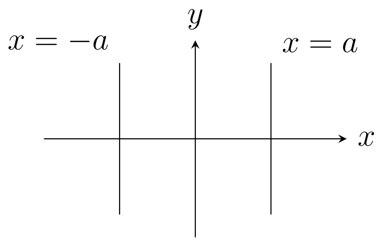


Figura 3.5: Par de rectas paralelas.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

   Tenemos que:
   $$0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$
   Por tanto, se trata de un par de rectas secantes; representadas en la Figura 3.4.

7. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$

   Tenemos que no es posible, por lo que $H = \emptyset$.

8. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$

   Tenemos que:
   $$x^2 = a^2 \Longrightarrow x = \pm a$$
   Por tanto, se trata de un par de rectas paralelas; representadas en la Figura 3.5.

9. $\dfrac{x^2}{a^2} = 0.$

   Tenemos que:
   $$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$
   Por tanto, se trata de una recta (doble); representada en la Figura 3.6.

10. $\dfrac{x^2}{a^2} = 2y.$

    Tenemos que:
    $$y = \frac{x^2}{2a^2}$$

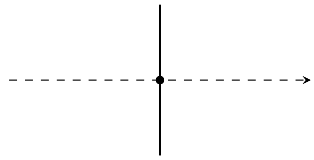


Figura 3.6: Recta (doble).

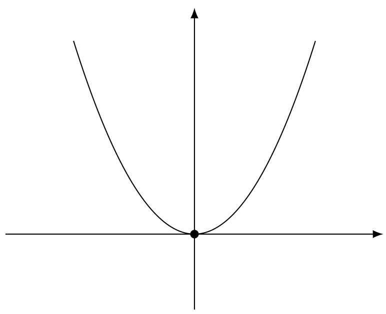


Figura 3.7: Parábola.

Por tanto, se trata de una parábola; representada en la Figura 3.7.

3.2.2. Clasificación de las cuádricas

En esta sección, vamos a clasificar las hipercuádricas en el espacio euclídeo, también llamadas **cuádricas**[4].

Todas las cuádricas se pueden visulizar gráficamente en el siguiente applet de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/bvgwetxk.

Usando el Teorema 3.2, podemos hacer la distinción de los posibles casos. Notemos que, como $R_i > 0$ para todo i, y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es biyectiva, notemos que es indiferente poner R_i que $\frac{1}{(R_i')^2}$. Por tanto, los distintos casos son:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

   Se trata de un punto, el origen. $H = \{(0, 0, 0)\}$.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

   Se trata de un <u>elipsoide de semiejes a, b y c</u>.

   Vemos fácilmente que los cortes con cada plano son elipses.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

   No es posible, por lo que $H = \emptyset$.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

[4] Estas posiblemente serán menos conocidas para el lector, pero son las equivalentes en el espacio.

Se trata de un cono elíptico. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Por tanto, para cada valor de z, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z = 0$ tenemos un único punto, el origen.

Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \pm\frac{b}{c}z \\ x = 0 \end{array} \right.$$

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm\frac{a}{c}z \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que son dos rectas en cada caso.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Se trata de un hiperboloide reglado o de una hoja. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

Por tanto, para cada valor de z, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z = 0$ también tenemos una elipse.

Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Por tanto, tenemos que en cada caso es una hipérbola que no corta al eje Z.

Veamos ahora por qué se llama "reglado". Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Longrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \Longrightarrow \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)}{\left(1 - \frac{y}{b}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{y}{b}\right)}{\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)} := \mu$$

Por tanto, tenemos la siguiente familia de rectas:

$$r_\lambda \equiv \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \left(1 + \frac{y}{b}\right) = \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \end{array} \right.$$

Por ello, se llama hiperboloide reglado, ya que está formado por una familia de rectas.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

Se trata de un hiperboloide elíptico o de dos hojas. Tenemos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{z^2}{c^2}$$

Por tanto, para cada valor de z tal que $|z| > c$, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace $|z|$. Además, para $z = \pm c$, tenemos un único punto. Para $z \in]-c, c[$, tenemos que no existe ningún punto de la cuádrica.

Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Por tanto, tenemos que en cada caso es una hipérbola que corta al eje Z y no corta a los otros ejes.

7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

   Tenemos que $H \equiv x = y = 0$, por lo que se trata de una recta.

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

   Para cada valor de z tenemos la misma elipse, por lo que se trata de un cilindro elíptico.

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

   No es posible[5], por lo que $H = \emptyset$.

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

    Tenemos que:

    $$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{a}{b}y$$

    Por tanto, tenemos que son dos planos. Además, su intersección es la recta $x = y = 0$; es decir, el eje Z.

    Por tanto, son dos planos secantes.

11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

    Por tanto, para cada valor de z, tenemos la misma hipérbola que no corta al eje Y.

    Se denomina cilindro hiperbólico.

[5]Esta cuádrica también se denomina cilindro imaginario

12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

    Por tanto, para cada valor de z, tenemos la misma hipérbola que no corta al eje X.

    En este caso también se denomina cilindro hiperbólico.

13. $\dfrac{x^2}{a^2} = 0.$

    En este caso tengo $x = 0$; por lo que es un plano (doble).

14. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1.$

    En este caso tengo $x = \pm a$; por lo que es un par de planos paralelos.

15. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$

    No es posible, por lo que $H = \emptyset$.

16. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

    Se trata de un paraboloide elíptico.

    Para cada valor de $z > 0$, tenemos una elipse que crece de tamaño conforme lo hace z. Para $z = 0$ tenemos un único punto, el origen; y para $z < 0$ tenemos que no es posible.

    Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{y^2}{2b^2}$$

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{x^2}{2a^2}$$

    Por tanto, tenemos que son dos parábolas en cada caso.

17. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

    Se trata de un paraboloide hiperbólico.

    Para cada valor de $z > 0$, tenemos una hipérbola que corta al plano $y = 0$ que con valores de los semiejes distintos.

    Para $z = 0$, tenemos dos rectas secantes, $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ y = \pm \frac{b}{a} x \end{cases}$

    Para cada valor de $z < 0$, tenemos una hipérbola que corta al plano $x = 0$ que con valores de los semiejes distintos.

    Veamos ahora los cortes con los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$x = 0 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = -2z \Longrightarrow z = -\frac{y^2}{2b^2}$$

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2z \Longrightarrow z = \frac{x^2}{2a^2}$$

Por tanto, tenemos que son dos parábolas en cada caso, una cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo.

18. $\dfrac{x^2}{a^2} = 2z.$

    Para cualquier y, se tiene que:

$$z = \frac{x^2}{2a^2}$$

    Es decir, tenemos que es siempre la misma parábola. Se denomina cilindro parabólico.

3.3. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con este tema, consultar la sección 5.3.

4. Espacio Proyectivo

En el presente tema, vamos a estudiar el espacio proyectivo, que es de gran utilidad para trabajar con perspectiva.

En lo que sigue, $V(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión $\dim V = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, y consideramos $V^* = V \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Definición 4.1 (Espacio Proyectivo)**.** En V^* definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$v_1 \sim v_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid v_1 = \lambda v_2$$

Definimos el espacio proyectivo de dimensión n, notado por $P^n(V)$, como el espacio vectorial cociente mediante la relación de equivalencia $\sim$ descrita:

$$P^n(V) = V^*/\sim = \{[v] \mid v \in V^*\}$$

Consideramos además la proyección al cociente, denotada por π:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V^* & \longrightarrow & P^n(V) \\ & v & \longmapsto & [v] \end{array}$$

Veamos qué puntos forman la clase de equivalencia de $v \in V^*$:

$$[v] = \{v_0 \in V^* \mid v \sim v_0\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} = (\mathcal{L}\{v\})^*$$

Por esta razón, los puntos $[v]$ de $P(V)$ son referidos como rectas vectoriales o direcciones de V.

Notación. En el caso de $V = \mathbb{R}^{n+1}$, el espacio $P(\mathbb{R}^{n+1})$ se denota por $\mathbb{P}^n$.

Observación. En la asignatura de Topología I, se ha visto que $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n/\mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia que identifica los antípodas de $\mathbb{S}^n$:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y = \pm x$$

Aunque en Geometría no se van a tratar homeomorfismos, si el lector conoce dicho concepto es de utilidad entender que $\mathbb{P}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n/\mathcal{R}$.

4.1. Subespacios Proyectivos

En esta sección, dado $X \subset P(V)$, notaremos por $\widetilde{X}$ al conjunto

$$\widetilde{X} := \pi^{-1}(X) \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\}.$$

Definición 4.2 (Subespacio Proyectivo)**.** Sea el espacio proyectivo $P(V)$ y un subconjunto $X \subset P(V)$. Diremos que X es un subespacio proyectivo (o una variedad proyectiva) si el conjunto $\widetilde{X}$ es un subespacio vectorial.

La dimensión de X se define por:

$$\dim X = \dim \widetilde{X} - 1.$$

Observación. Por convenio, $\dim \emptyset = -1$.

Al igual que ocurría con la geometría afín o vectorial, los subespacios proyectivos de dimensión $0, 1, 2$ y $n-1$ tienen un nombre especial. Sea $X \subset P(V)$ un subespacio proyectivo, tenemos que:

- $\dim X = 0$: Punto proyectivo.
- $\dim X = 1$: Recta proyectiva.
- $\dim X = 2$: Plano proyectivo.
- $\dim X = \dim P(V) - 1$: Hiperplano proyectivo.

Veamos la dimensión de $P(V)$. Puesto que $\pi^{-1}(P(V)) \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\} = V$, tenemos que:

$$\dim P(V) = \dim V - 1$$

Como la aplicación π es sobreyectiva, tenemos que $\pi(\widetilde{X}^*) = \pi(\pi^{-1}(X)) = X$ para cualquier $X \subset P(V)$. Por tanto, cualquier subespacio proyectivo X es de la forma $X = \pi(\widetilde{X}^*)$ para cierto $\widetilde{X}^* \subset V^*$.

Proposición 4.1. *Sea $U \subset V$ un subespacio vectorial de V de dimensión $\dim U \geqslant 1$. Entonces, $\pi(U^*)$ es un subespacio proyectivo de $P(V)$.*

Demostración. Probaremos que $\pi^{-1}(\pi(U^*)) \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\} = U$.

$\supset$) De forma directa, tenemos que $U^* \subset \pi^{-1}(\pi(U^*))$, por lo que:

$$U = U^* \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \subset \pi^{-1}(\pi(U^*)) \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$$

$\subset$) Sea $v \in \pi^{-1}(\pi(U^*)) \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$. Si $v \neq \overrightarrow{0}$, entonces $[v] = [w]$ para cierto $w \in U^*$. Por tanto, $v = \lambda w$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, $v \in U^*$.

Por tanto, $\pi^{-1}(\pi(U^*)) \cup \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \subset U$.

□

Observación. En esta sección, hemos visto que cada subespacio proyectivo X tiene asociado un único subespacio vectorial $\widetilde{X}$ tal que $X = \pi(\widetilde{X}^*)$. Por tanto, de ahora en adelante será habitual referirse a $\widetilde{X}$ como el subespacio vectorial asociado a X, y determinar $\widetilde{X}$ será equivalente a determinar X.

Operaciones entre espacios proyectivos

En esta sección vamos a definir, al igual que en el caso vectorial y afín, las operaciones de intersección y suma de subespacios proyectivos.

Proposición 4.2 (Intersección)**.** *Sea $P^n(V)$ un espacio proyectivo, y sean $X, Y \subset P(V)$ dos subespacios proyectivos. Entonces, $X \cap Y$ es vacío, o bien es un subespacio proyectivo de $P(V)$ con:*

$$\widetilde{X \cap Y} = \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$$

Demostración. Tenemos que:

$$\widetilde{X \cap Y} = \pi^{-1}(X \cap Y) \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\} = \left(\pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}(Y)\right) \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\} = \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$$

□

Definición 4.3. Sea $C \subset P(V)$. Llamamos subespacio proyectivo generado por C, notado por $\langle C \rangle$, al menor subespacio proyectivo que lo contenga. Es decir,

$$\langle C \rangle = \bigcap \{X \supset C \mid X \text{ es un subespacio proyectivo}\}$$

Proposición 4.3. *Sea $C \subset P(V)$ un subconjunto no vacío de $P(V)$. Entonces:*

$$\widetilde{\langle C \rangle} = \mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(C)\right\}$$

Demostración. Probaremos que $\langle C \rangle = \pi\left(\mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(C)\right\}^*\right)$:

$\subset$) Como $\pi^{-1}(C) \subset \mathcal{L}\{\pi^{-1}(C)\}$, tenemos que $C \overset{(*)}{=} \pi(\pi^{-1}(C)) \subset \pi\left(\mathcal{L}\{\pi^{-1}(C)\}^*\right)$, donde en $(*)$ se ha empleado que π es sobreyectiva. Por tanto, como $\langle C \rangle$ es el menor subespacio proyectivo que contiene a C, tenemos que

$$\langle C \rangle \subset \pi\left(\mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(C)\right\}^*\right)$$

$\supset$) Sea X un subespacio proyectivo que contiene a C, es decir, $C \subset X$. Entonces, $\pi^{-1}(C) \subset \pi^{-1}(X) \subset \widetilde{X}$, por lo que $\mathcal{L}\{\pi^{-1}(C)\} \subset \widetilde{X}$, ya que $\widetilde{X}$ es un subespacio vectorial y contiene a $\pi^{-1}(C)$. Por tanto, $\pi\left(\mathcal{L}\{\pi^{-1}(C)\}^*\right) \subset \pi(\widetilde{X}^*) = X$, y como X es un subespacio proyectivo arbitrario que contiene a C, tenemos que:

$$\pi\left(\mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(C)\right\}^*\right) \subset \langle C \rangle$$

□

Definimos entonces la suma de subespacios proyectivos como sigue:

Definición 4.4 (Suma)**.** Sean $X, Y \subset P(V)$ dos subespacios proyectivos. Definimos la suma de X e Y como:

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle$$

Proposición 4.4. *Sean $X, Y \subset P(V)$ dos subespacios proyectivos. Entonces:*

$$\widetilde{X + Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$$

Demostración. Tenemos que:

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle = \bigcap \{Z \supset (X \cup Y) \mid Z \text{ es un subespacio proyectivo}\}$$

Por tanto, $\widetilde{X+Y} = \bigcap \{\widetilde{Z} \supset (\widetilde{X} \cup \widetilde{Y}) \mid \widetilde{Z} \text{ es un subespacio vectorial}\}$. Por tanto, $\widetilde{X+Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$. Otra forma de verlo es como sigue:

$$\widetilde{X+Y} = \mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(X \cup Y)\right\} = \mathcal{L}\left\{\pi^{-1}(X) \cup \pi^{-1}(Y)\right\} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$$

□

Una vez definida la suma y la intersección, tenemos la siguiente fórmula de las dimensiones, análoga al caso vectorial:

Proposición 4.5 (Fórmula de las dimensiones)**.** *Sean $X, Y \subset P(V)$ dos subespacios proyectivos. Entonces:*

$$\dim(X + Y) + \dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y$$

Recordamos de que si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $\dim(X \cap Y) = -1$.

Demostración. Usando la fórmula de las dimensiones vectoriales, tenemos:

$$\begin{aligned}
\dim(X + Y) + \dim(X \cap Y) = & \\
&= \dim(\widetilde{X+Y}) - 1 + \dim(\widetilde{X \cap Y}) - 1 = \\
&= \dim(\widetilde{X} + \widetilde{Y}) - 1 + \dim(\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}) - 1 = \\
&= \dim \widetilde{X} + \dim \widetilde{Y} - \cancel{\dim(\widetilde{X} \cap \widetilde{Y})} - 1 + \cancel{\dim(\widetilde{X} \cap \widetilde{Y})} - 1 = \\
&= \dim X + \dim Y
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos es útil para determinar cuándo dos subespacios proyectivos son iguales:

Proposición 4.6. *Sean $X, Y \subset P(V)$ dos subespacios proyectivos. Si $X \subset Y$, entonces $\dim X \leqslant \dim Y$.*

Además, si $\dim X = \dim Y$, entonces $X = Y$.

Demostración. Sea $X \subset Y$. Entonces, $\pi^{-1}(X) \subset \pi^{-1}(Y)$, por lo que, $\widetilde{X} \subset \widetilde{Y}$. Por tanto, $\dim \widetilde{X} \leqslant \dim \widetilde{Y}$, por lo que:

$$\dim X = \dim \widetilde{X} - 1 \leqslant \dim \widetilde{Y} - 1 = \dim Y$$

Si $\dim X = \dim Y$, entonces $\dim \widetilde{X} = \dim \widetilde{Y}$. Por tanto, $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$, por lo que $X = Y$. □

Ejemplo. Sean dos rectas proyectivas $X, Y \subset P^2(V)$ en un plano proyectivo. Entonces:

$$\dim(X + Y) + \dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y = 1 + 1 = 2$$

Además, como $X + Y \subset P^2(V)$, tenemos que $\dim(X + Y) \leqslant 2$. Por tanto:

$$\dim(X \cap Y) = 2 - \dim(X + Y) \geqslant 2 - 2 = 0$$

Por tanto, como $\dim(X \cap Y) \geqslant 0$, tenemos que $X \cap Y \neq \emptyset$. Es decir, *dos rectas proyectivas en un plano proyectivo siempre se cortan.* Vemos que la geometría proyectiva es un ejemplo de geometría no-euclídea.

4.2. Coordenadas Homogéneas

Sea $\mathcal{B}$ una base de V^{n+1}, y consideramos $v \in V^*$. Sea $v = (x_0, \dots, x_n)_\mathcal{B}$.

Definimos las coordenadas homogéneas de $[v] \in P(V)$ en la base $\mathcal{B}$ de V como las coordenadas de dicho v en $\mathcal{B}$:

$$[v] \equiv (x_0 : \dots : x_n)_\mathcal{B}$$

Notemos que, como $[v] = [\lambda v],\ \lambda \in \mathbb{R}^*$, dichas coordenada son únicas salvo factores de proporcionalidad, por lo que:

$$[v] = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} \equiv \{(\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n)_\mathcal{B} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$$

Además, como $v \neq \overrightarrow{0}$, tenemos que las coordenadas homogéneas no son todas nulas.

Definición 4.5. Llamaremos coordenadas homogéneas usuales (o canónicas) de un punto $[v] \in \mathbb{P}^n$ a las coordenadas de v en la base usual $\mathcal{B}_u$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Una vez se han definido las coordenadas homogéneas, se pueden entonces definir las ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio proyectivo:

Definición 4.6 (Ecuaciones Paramétricas e Implícitas)**.** Sea $X \subset P(V)$ un subespacio proyectivo y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces, las ecuaciones parmétricas (respectivamente implícitas) de X en la base $\mathcal{B}$ son las ecuaciones parmétricas (respectivamente implícitas) que definen al subespacio vectorial $\widetilde{X}$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo. Sea $p = (1 : 2 : 3),\ q = (0 : 1 : 2) \in \mathbb{P}^2$. Calcular la recta proyectiva que une ambos puntos.

Tenemos que $p = [(1, 2, 3)]$, $q = [(0, 1, 2)]$. Entonces:

$$p + q = \pi((\mathcal{L}\{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\})^*)$$

Por tanto, tenemos que:

$$(x : y : z) \in p + q \Longleftrightarrow (x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(0, 1, 2)$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas de $p + q$ son:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha + 2\beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 = x + 2y - z$$

4.3. Proyectividades

En esta sección, vamos a estudiar un tipo de aplicaciones entre espacios proyectivos, llamadas proyectividades, que son análogas a las aplicaciones lineales en el caso vectorial o a las afinidades en el caso afín. En lo que sigue, sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales reales, y consideramos $P(V_1), P(V_2)$ los espacios proyectivos asociados. Notamos por π_1, π_2 a las proyecciones al cociente de V_1^* y V_2^* respectivamente.

Definición 4.7 (Proyectividad)**.** Diremos que una aplicación $f : P(V_1) \to P(V_2)$ es una proyectividad si y solo si existe $\widetilde{f} : V_1 \to V_2$ lineal e inyectiva tal que

$$f([v]) = \left[\widetilde{f}(v)\right]$$

Diremos que $\widetilde{f}$ es la lineal asociada a f.

$$\begin{array}{ccc} V_1^* & \xrightarrow{\widetilde{f}} & V_2^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ P(V_1) & \xrightarrow{f} & P(V_2) \end{array}$$

Notemos que se pide que sea inyectiva para poder proyectar, ya que para $v \neq \overrightarrow{0}$, entonces $\widetilde{f}(v) \neq \overrightarrow{0}$. Además, como el proyectivo es el conjunto de rectas vectoriales, necesitamos que $\widetilde{f}$ lleve rectas vectoriales en rectas vectoriales, por lo que $\widetilde{f}$ debe ser inyectiva.

Además, la lineal asociada a una proyectividad f es única salvo factores de proporcionalidad, como se ve en el siguiente resultado:

Proposición 4.7. *Sea $f : P(V_1) \to P(V_2)$ una proyectividad con lineal asociada $\widetilde{f}$. Entonces, si $\widetilde{g}$ es otra lineal asociada a f, entonces $\widetilde{g} = \lambda\widetilde{f}$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*

Demostración. Sea $v \in V^*$. Entonces, por ser $\widetilde{f}$ una lineal asociada a f, tenemos que $f([v]) = \left[\widetilde{f}(v)\right]$. Por ser $\widetilde{g}$ otra lineal asociada a f, tenemos que $f([v]) = [\widetilde{g}(v)]$. Por tanto,

$$\left[\widetilde{f}(v)\right] = [\widetilde{g}(v)] \Longrightarrow \exists \lambda_v \in \mathbb{R}^* \mid \widetilde{f}(v) = \lambda_v \widetilde{g}(v)$$

Escogemos ahora $w \in V^*$ linealmente independiente de v. Entonces,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(v+w) &= \widetilde{f}(v) + \widetilde{f}(w) = \lambda_v \widetilde{g}(v) + \lambda_w \widetilde{g}(w) \\ &= \lambda_{v+w} \widetilde{g}(v+w) = \lambda_{v+w}(\widetilde{g}(v) + \widetilde{g}(w)) \end{aligned}$$

Por ser $\widetilde{g}$ lineal tenemos que, como $\{v, w\}$ son linealmente independientes, sus imágenes $\{\widetilde{g}(v), \widetilde{g}(v)\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $\lambda_{v+w} = \lambda_v = \lambda_w$. Repitiendo este proceso para una base de V, tenemos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \widetilde{f} = \lambda\widetilde{g}$. □

Veamos nuestro primer ejemplo de proyectividad:

Ejemplo. Sea $P(V)$ un espacio proyectivo. La identidad $Id : P(V) \to P(V)$ es una proyectividad, con lineal asociada $Id : V \to V$. Veámoslo:

$$Id([v]) = [v] = [Id(v)] \qquad \forall v \in V^*$$

Proposición 4.8. *Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales reales, y consideramos una proyectividad $f : P(V_1) \to P(V_2)$. Entonces, f es inyectiva.*

Demostración. Sea $[v_1], [v_2] \in P(V_1)$ tales que $f([v_1]) = f([v_2])$. Entonces, por definición de proyectividad, $\left[\widetilde{f}(v_1)\right] = \left[\widetilde{f}(v_2)\right]$, por lo que $\widetilde{f}(v_1) = \lambda \widetilde{f}(v_2)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Como $\widetilde{f}$ es lineal, tenemos que $\widetilde{f}(v_1) = \widetilde{f}(\lambda v_2)$, y como $\widetilde{f}$ es inyectiva, tenemos que $v_1 = \lambda v_2$. Por tanto, $[v_1] = [v_2]$, demostrando así que f es inyectiva. □

La siguiente proposición afirma que las proyectividades conservan la dimensión:

Proposición 4.9. *Sea $f : P(V_1) \to P(V_2)$ una proyectividad, y sea $X \subset P(V_1)$ un subespacio proyectivo. Entonces, $f(X)$ es un subespacio proyectivo de $P(V_2)$ con:*

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right) = \widetilde{f(X)}$$

Además, $\dim f(X) = \dim X$.

Demostración. Tenemos que:

$$f(X) = \{f([v]) \mid [v] \in X\} = \left\{\left[\widetilde{f}(v)\right] \mid v \in \widetilde{X}^*\right\} = \pi_2\left(\widetilde{f}\left(\widetilde{X}^*\right)\right) = \pi_2\left(\left(\widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right)\right)^*\right)$$

Como $\widetilde{X}$ es un subespacio vectorial, tenemos que $\widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right)$ es un subespacio vectorial, por lo que $f(X)$ es un subespacio proyectivo de $P(V_2)$ con $\widetilde{f(X)} = \widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right)$.

Respecto a las dimensiones, tenemos que:

$$\dim f(X) = \dim \widetilde{f(X)} - 1 = \dim \widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right) - 1 \overset{(*)}{=} \dim \widetilde{X} - 1 = \dim X$$

donde en $(*)$ se ha empleado que $\dim \widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right) = \dim \widetilde{X}$. Veamos esto último. Como $\widetilde{f}$ es inyectiva y estamos restringiendo el codominio a la imagen, tenemos que tamién es sobreyectiva. Por tanto, $\dim \widetilde{f}\left(\widetilde{X}\right) = \dim \widetilde{X}$. □

Observación. El contrarrecíproco es también de gran utilidad, ya que si dos lineales asociadas a proyectividades no son proporcionales, entonces dichas proyectividades no son iguales.

Introducimos ahora el concepto de homografía, equivalente al de isomorfismo en el caso vectorial:

Definición 4.8 (Homografía)**.** Sea $f : P(V_1) \to P(V_2)$ una proyectividad. Diremos que f es una homografía si y solo si $\widetilde{f}$ es un isomorfismo.

Usando que $\widetilde{f}, f$ son inyectivas, haciendo uso del diagrama de composición de las proyectividades, la siguiente caracterización de las homografías es de inmediata comprobación:

Proposición 4.10. *Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales reales, y consideramos una proyectividad $f : P(V_1) \to P(V_2)$. Equivalen:*

1. *f es una homografía.*

2. *f es una proyectividad biyectiva.*

3. $\dim P(V_1) = \dim P(V_2)$.

Veamos que la composición de proyectividades es una proyectividad:

Proposición 4.11. *Sean V_1, V_2, V_3 tres espacios vectoriales reales, y consideramos proyectividades $f : P(V_1) \to P(V_2)$ y $g : P(V_2) \to P(V_3)$. Entonces, $g \circ f$ es una proyectividad.*

Demostración. Sea $\widetilde{f}$ la lineal asociada a f, y sea $\widetilde{g}$ la lineal asociada a g. Entonces, $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ es lineal. Veamos que $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ es la lineal asociada a $g \circ f$:

$$(g \circ f)([v]) = g(f([v])) = g\left(\left[\widetilde{f}(v)\right]\right) = \left[\widetilde{g}(\widetilde{f}(v))\right] = \left[(\widetilde{g} \circ \widetilde{f})(v)\right] \qquad \forall v \in V_1^*$$

□

4.3.1. Determinación de una proyectividad

En esta sección, vamos a ver cómo determinar una proyectividad. En primer lugar, es evidente que determinar f es equivalente a determinar $\widetilde{f}$, ya que $f([v]) = \left[\widetilde{f}(v)\right]$. Por tanto, nos centraremos en determinar $\widetilde{f}$.

Definición 4.9 (Independencia Proyectiva)**.** Sea $P(V)$ un espacio proyectivo, y sea $X = \{[v_1], \dots [v_{k+1}]\} \subset P(V)$ un conjunto de $k+1$ puntos proyectivos. Diremos que X es un conjunto de puntos proyectivamente independientes si y solo si $\dim\langle X\rangle = k$. Equivalentemente, esto es si:

$$\dim \widetilde{\langle X\rangle} = k + 1 = \dim \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$$

Esto es equivalente a que $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ sea un conjunto de vectores linealmente independientes.

En caso contrario, diremos que X es un conjunto de puntos proyectivamente dependientes o alineados.

Buscamos ahora demostrar el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, que nos informa de la unicidad de una proyectividad dada una serie de puntos proyectivos independientes. Para ello, antes demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 4.12. *Considerenos $P^n(V)$ y $P^m(V')$ dos espacios proyectivos con dimensiones $\dim P^n(V) = n \leqslant m = \dim P^m(V')$, y sean $\{p_0, \dots, p_n\} \subset P^n(V)$ y $\{p'_0, \dots, p'_n\} \subset P^m(V')$ dos conjuntos de puntos proyectivamente independientes.*

Entonces, existe una proyectividad $f : P^n(V) \to P^m(V')$ tal que:

$$f(p_i) = p'_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

Si además $n = m$, entonces f es una homografía.

Demostración. Como π, π' son sobreyectivas, sean $v_0, \dots, v_n \in V^*$ y $v'_0, \dots, v'_n \in V'^*$ tales que:

$$\pi(v_i) = p_i, \qquad \pi'(v'_i) = p'_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

Por ser ambos conjuntos de puntos proyectivamente independientes, tenemos que $\{v_0, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Además, como $\dim V = n + 1$, tenemos que $\{v_0, \dots, v_n\}$ es una base de V. Por tanto, por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, $\exists! \widetilde{f} : V \to V'$ lineal tal que:

$$\widetilde{f}(v_i) = v'_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

No obstante, como $\left[\widetilde{f}(v_i)\right] = [v'_i] = [\lambda_i v'_i]$, tenemos que, para cada elección de $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$, $i = 1, \dots, n$, tenemos que existe una única lineal $\widetilde{f}$ que cumple que:

$$\widetilde{f}(v_i) = \lambda_i v'_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

Por último, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_0 = 1$, ya que, en caso contrario, dividimos por λ_0 y obtenemos:

$$\widetilde{f}(v_0) = v'_0 \qquad \widetilde{f}(v_i) = \lambda_i v'_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Además, como por hipótesis $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que $\widetilde{f}$ es inyectiva, por lo que existe f una proyectividad con lineal asociada $\widetilde{f}$.

Si $n = m$, entonces $\dim V = \dim V'$, por lo que $\widetilde{f}$ es sobreyectiva, por lo que f es una homografía. □

No obstante, esta no tiene por qué ser única, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sean $P^1(\mathbb{R})$ y $P^1(\mathbb{R})$ dos espacios proyectivos. Sean $[v_0], [v_1] \in P^1(\mathbb{R})$ dos puntos proyectivamente independientes y sean $[v'_0], [v'_1] \in P^1(\mathbb{R})$ otros dos puntos proyectivamente independientes.

Sea $f : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ una proyectividad tal que:

$$f([v_i]) = [v'_i] = \left[\widetilde{f}(v_i)\right] \qquad i = 0, 1$$

Por tanto, f es una proyectividad. No obstante, veamos que estas dos son lineales asociadas a dicha proyectividad:

$$\widetilde{f}(v_0) = v'_0 \qquad \widetilde{f}(v_1) = v'_1 \widetilde{g}(v_0) = 2v'_0 \qquad \widetilde{g}(v_1) = 3v'_1$$

Veamos que ambas lineales no son proporcionales:

$$\widetilde{f}(v_0 + v_1) = v'_0 + v'_1 \qquad \widetilde{g}(v_0 + v_1) = 2v'_0 + 3v'_1$$

Por tanto, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ no son proporcionales, por lo que sus proyectividades asociadas no son iguales. Por tanto, la proyectividad f no es única.

Veamos ahora el siguiente teorema de gran importancia, que nos informa también de la unicidad. No obstante, para ello necesitamos definir el concepto de sistema de referencia proyectivo:

Definición 4.10 (Sistema de Referencia Proyectivo)**.** Sea $P(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Dados $n+2$ puntos proyectivos $\{[v_0], \dots, [v_{n+1}]\} \subset P(V)$, diremos que es un sistema de referencia proyectivo si y solo si todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente.

Teorema 4.13 (Fundamemtal de la Geometría Proyectiva)**.** *Sean $P^n(V)$ y $P^n(V')$ dos espacios proyectivos $n-$dimensionales. Sean también $\{[v_0], \dots, [v_{n+1}]\} \subset P^n(V)$ y $\{[v_0'], \dots, [v_{n+1}']\} \subset P^n(V')$ dos sistemas de referencia proyectivos. Entonces, existe una única homografía $f : P^n(V) \to P^n(V')$ tal que:*

$$f([v_i]) = [v_i'], \qquad i = 0, \dots, n+1$$

Demostración. Por la demostración del teorema anterior, tenemos que una proyectividad f tal que $f([v_i]) = [v_i']$, $i = 0, \dots, n+1$, viene asociada a una lineal inyectiva $\widetilde{f}$ tal que:

$$\widetilde{f}(v_0) = v_0' \qquad \widetilde{f}(v_i) = \lambda_i v_i', \qquad i = 1, \dots, n$$

donde:

- $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ es una base de V, ya que son $n+1$ vectores, y por ser parte de un sistema de referencia proyectivo, son linealmente independientes.
- $\mathcal{B}' = \{v_0', \dots, v_n'\}$ es una base de V', ya que son $n+1$ vectores, y por ser parte de un sistema de referencia proyectivo, son linealmente independientes.
- $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$, $i = 1, \dots, n$.

Demostrar que existe una única elección de λ_i, $i = 1, \dots, n$ equivaldría a demostrar que f es única. Para ello, como $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ son bases de V, V' respectivamente, tenemos que:

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i \qquad v_{n+1}' = \sum_{i=0}^{n} \mu_i' v_i' \qquad \mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}$$

Además, como todo subconjunto de $n+1$ vectores es linealmente independiente por ser sistemas de referencia, tenemos que $\mu_i, \mu_i' \neq 0$, $\forall i = 0, \dots, n$, ya que en caso contrario podríamos obtener una combinación lineal de $n+1$ vectores que fuera nula, contradiciendo la independencia lineal. Por tanto, tenemos que $\mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}^*$, $\forall i = 0, \dots, n$. Como $f([v_{n+1}]) = [v_{n+1}'] = [\widetilde{f}(v_{n+1})]$, tenemos que:

$$\widetilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i\right) = \mu \left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i' v_i'\right) \qquad \mu \in \mathbb{R}^*$$

Además, podemos super sin pérdida de generalidad que $\mu_0 = \mu_0'$, ya que se tiene que $[v_{n+1}'] = \left[\frac{\mu_0}{\mu_0'} v_{n+1}\right]$. Entonces, uniendo el resultado anterior junto con la definición de $\widetilde{f}$, tenemos que:

$$\widetilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \widetilde{f}(v_i) = \mu_0 v_0' + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i v_i' = \mu \left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i' v_i'\right) \qquad \mu \in \mathbb{R}^*$$

Por tanto, en coodenadas en $\mathcal{B}'$ tenemos que:

$$(\mu_0, \mu_1\lambda_1, \dots, \mu_n\lambda_n)_{\mathcal{B}'} = \mu\,(\mu'_0, \mu'_1, \dots, \mu'_n)_{\mathcal{B}'}$$

Por la unicidad de las coordenadas en una base vectorial, igualando la primera coordenada tenemos que $\mu = \mu_0/\mu'_0$, y por tanto $\mu = 1$. Por tanto, usando que $f([v_{n+1}]) = [v'_{n+1}] = [\widetilde{f}(v_{n+1})]$, tenemos que:

$$\mu_0 v'_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\lambda_i v'_i = \sum_{i=0}^{n} \mu'_i v'_i$$

Expresándolo en coordenadas homogéneas respecto de $\mathcal{B}'$, tenemos que:

$$(\mu_0 : \mu_1\lambda_1 : \dots : \mu_n\lambda_n)_{\mathcal{B}'} = (\mu'_0 : \mu'_1 : \dots : \mu'_n)_{\mathcal{B}'}$$

Por tanto, los valores de λ_i quedan fijados a las coordenadas de v'_{n+1}, v_{n+1}, teniendo que:

$$\lambda_i = \frac{\mu'_i}{\mu_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

Como esta es la única elección posible de λ_i, $i = 1, \dots, n$, tenemos que f es única. $\square$

4.4. Relación entre Geometría Proyectiva y Geometría Afín

En esta sección, vamos a ver cómo relacionar la geometría proyectiva con la geometría afín. Lo estudiaremos en concreto para el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ y el espacio afín $\mathbb{R}^{n+1}$, aunque el resultado es análogo para cualquier espacio proyectivo y afín de dimensión n y $n+1$ respectivamente.

Sea la aplicación afín inyectiva dada por:

$$\begin{array}{rrcl} i: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (1, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

y la aplicación proyección natural $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{P}^n$. Consideramos ahora la aplicación $\varphi = \pi \circ i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$ dada por:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \pi(1, x_1, \dots, x_n) = [(1, x_1, \dots, x_n)] = (1 : x_1 : \dots : x_n)_{\mathcal{B}_u}$$

Veamos que φ es una aplicación inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Entonces, por definición de φ, $[(1, x_1, \dots, x_n)] = [(1, y_1, \dots, y_n)]$, por lo que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $(1, x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, y_1, \dots, y_n)$, y como las primeras coordenadas son 1, tenemos que $\lambda = 1$, por lo que $x = y$. Por tanto, φ es inyectiva, e incluye $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{P}^n$.

Proposición 4.14 (Hiperplano del infinito)**.** *Haciendo uso de la aplicación φ, podemos definir el siguiente conjunto, notado por H_∞:*

$$H_\infty := \mathbb{P}^n \setminus \varphi(\mathbb{R}^n) = \{(y_0 : y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^n \mid y_0 = 0\}$$

Tenemos que H_∞ es un hiperplano proyectivo de $\mathbb{P}^n$, denominado <u>hiperplano del infinito</u>.

Demostración. Veamos en primer lugar que dicha igualdad es cierta. Calculemos $\varphi(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi(\mathbb{R}^n) = \{(1 : y_1 : \cdots : y_n)_{\mathcal{B}_u} \mid (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}\}$$

Como las coordenadas son únicas salvo factores de proporcionalidad, multiplicando por $y_0 \in \mathbb{R}^*$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{R}^n) &= \{(y_0 : y_1 : \cdots : y_n)_{\mathcal{B}_u} \mid (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \\ &= \{(y_0 : y_1 : \cdots : y_n) \in \mathbb{P}^n \mid y_0 \neq 0\}\end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad es cierta, y tenemos que la ecuación implícita de H_∞ es $y_0 = 0$. Por tanto, H_∞ es un hiperplano proyectivo de $\mathbb{P}^n$. $\square$

Proposición 4.15. *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio afín de dimensión $k \geqslant 1$, se tiene que:*

$$\widehat{S} := \varphi(S) \cup \left\{(0 : v_1 : \cdots : v_n) \in \mathbb{P}^n \mid (v_1, \ldots, v_n) \in \overrightarrow{S}^*\right\}$$

es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^n$ de dimensión k. Además,

$$\widehat{S}_\infty := \widehat{S} \cap H_\infty = \left\{(0 : v_1 : \cdots : v_n) \in \mathbb{P}^n \mid (v_1, \ldots, v_n) \in \overrightarrow{S}^*\right\}$$

es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^n$ de dimensión $k-1$.

De manera intuitiva, esta proposición nos dice que, dado un subespacio afín $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $k \geqslant 1$, el subespacio proyectivo $\widehat{S}$ se puede ver como S ($\varphi(S)$ es simplemente una inclusión en el proyectivo) junto con todas las direcciones de $\overrightarrow{S}$. Además, $\widehat{S}_\infty$ se puede ver como todas las direcciones de $\overrightarrow{S}$. En particular, para $S = \mathbb{R}^n$, tenemos que $\mathbb{P}^n$ se puede ver como $\mathbb{R}^n$ junto con todas las direcciones de $\mathbb{R}^n$.

4.4.1. Proyectivización de subespacios afines

En esta sección, veremos cómo, dado un subespacio afín $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $k \geqslant 1$, obtener el subespacio proyectivo $\widehat{S}$. Sea $S = p + \overrightarrow{S}$, con $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de $\overrightarrow{S}$.

Sean las ecuaciones paramétricas de S en la base $\mathcal{B}$ las siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de $\widehat{S}$ en la base $\mathcal{B}$ son:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_0 \in \mathbb{R}^*$$

De igual forma, si las ecuaciones implícitas de S en la base $\mathcal{B}$ son:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{(n-k)1}x_1 + \cdots + a_{(n-k)n}x_n = b_{n-k} \end{cases}$$

entonces, las ecuaciones implícitas de $\widehat{S}$ en la base $\mathcal{B}$ son:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1x_0 \\ \vdots \\ a_{(n-k)1}x_1 + \cdots + a_{(n-k)n}x_n = b_{n-k}x_0 \end{cases}$$

4.5. Teoremas de Pappus y Desargues Proyectivos

Ambos teoremas vistos en la Sección 1.4 tienen su versión proyectiva, que trataremos en esta sección. Para tratar el Teorema de Desargues, es necesario antes dar la siguiente definición:

Definición 4.11 (Triángulo Proyectivo)**.** Sea $P(V)$ un espacio proyectivo. Dados $A, B, C \in P(V)$, diremos que $\{A, B, C\} \subset P(V)$ es un triángulo proyectivo si y solo si $\{A, B, C\}$ es un conjunto de puntos proyectivamente independientes.

Recordamos también que una familia de rectas $\{R_1, \dots, R_n\} \subset P(V)$ se dicen *concurrentes* si y solo si $\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i \neq \emptyset$.

El Teorema de Desargues trata sobre triángulos perspectivos desde un punto y desde una recta, por lo que introduzcamos ambos conceptos:

Definición 4.12. Sea $P(V)$ un espacio proyectivo. Dados dos triángulos proyectivos $T = \{A_1, A_2, A_3\} \subset P(V)$ y $T' = \{A_1', A_2', A_3'\} \subset P(V)$, diremos que T y T' son triángulos proyectivamente (o perspectivamente) equivalentes desde un punto $O \in P(V)$ si y solo si:

$$O, A_i, A_i' \text{ están alineados } \forall i = 1, 2, 3$$

Definición 4.13. Sea $P(V)$ un espacio proyectivo. Dados dos triángulos proyectivos $T = \{A_1, A_2, A_3\} \subset P(V)$ y $T' = \{A_1', A_2', A_3'\} \subset P(V)$, diremos que T y T' son triángulos proyectivamente (o perspectivamente) equivalentes desde una recta $R \subset P(V)$ si y solo si:

$$\{A_i + A_j, A_i' + A_j', R\} \text{ son concurrentes } \forall i, j = 1, 2, 3 \ i \neq j.$$

TERMINAR

5. Relaciones de Ejercicios

5.1. El Espacio Afín.

Ejercicio 5.1.1. Sea $\mathcal{A} = \{p\}$ un conjunto con un único elemento. Encuentra qué ha de cumplir un espacio vectorial V para que $\mathcal{A}$ pueda dotarse de estructura de espacio afín de forma que V sea su espacio de direcciones.

Por la segunda condición de espacio afín, es necesario que exista una biyección $\varphi_p : \mathcal{A} \to V$. Por tanto, es necesario que $1 = |\mathcal{A}| = |V|$. Por tanto, se tiene que

$$\overrightarrow{A} = V = \{0\}.$$

Esto también está demostrado en el ejemplo de la página 7.

Ejercicio 5.1.2. Sea V un espacio vectorial real. Se considera la siguiente aplicación $\Phi : V \times V \to V$ dada por $\Phi(u, v) = 2u - v$, que denotaremos por $\Phi(u, v) = \overrightarrow{uv}$. Estudiar si Φ induce o no una estructura de espacio afín en V.

Consideramos $u, v, w \in V$. Veamos que para dicha aplicación no se cumple la igualdad triangular:

$$\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = 2u - v + 2v - w = 2u + v - w \neq 2u - w = \overrightarrow{uw}$$

Por tanto, no induce una estructura de espacio afín.

Ejercicio 5.1.3. En el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado 2 con coeficientes reales, justifica si los siguientes subconjuntos son subespacios afines de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. En caso afirmativo, encuentra el subespacio afín paralelo que pasa por el polinomio $p_0(x) = 1 + x^2$.

1. $S = \{a_0^3 + a_1x - x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$.

   $$S = -x^2 + \{a_0^3 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \overset{(*)}{=} -x^2 + \{b_0 + a_1x \mid b_0, a_1 \in \mathbb{R}\} = -x^2 + \mathcal{L}\{1, x\}$$

   donde en $(*)$ he aplicado que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 f$ es una biyección, por lo que $\forall\ a_0^3 \in \mathbb{R},\ \exists_1 b_0 \in \mathbb{R} \mid a_0^3 = b_0$.

   Por tanto, sí es un plano afín con variedad de direcciones $\mathcal{L}\{1, x\}$.

   El subespacio afín paralelo que pasa por el polinomio $p_0(x) = 1 + x^2$ es:

   $$S' = p_0 + \mathcal{L}\{1, x\} = \{1 + x^2 + b_0 + a_1x \mid b_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

2. $T = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 2, p'(0) = 1\}$.

   Notando $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, se tiene que las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{aligned} &p'(0) = 1 = a_1 \\ &p(1) = 2 = a_0 + a_1 + a_2 \Longrightarrow a_0 = 1 - a_2 \end{aligned}$$

   Por tanto, $p(x) = 1 - a_2 + x + a_2x^2 = 1 + x + a_2(x^2 - 1)$, por lo que:

$$T = \{1 + x + a_2(x^2 - 1) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = 1 + x + \mathcal{L}\{x^2 - 1\}$$

   Por tanto, se trata de una recta afín con variedad de direcciones $\mathcal{L}(x^2 - 1)$.

   El subespacio afín paralelo que pasa por el polinomio $p_0(x) = 1 + x^2$ es:

$$T' = p_0 + \mathcal{L}\{x^2 - 1\} = \{1 + x^2 + a_2(x^2 - 1) \mid a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio 5.1.4. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos, justifica si los siguientes subconjuntos son subespacios afines de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ y, en caso afirmativo, encuentra el subespacio afín paralelo que pasa por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

1. $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid tr(A) = 1 + i\}$,

   Empezamos con el primer subconjunto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid z_1 + z_4 = 1 + i \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, sí es un subespacio afín. El subespacio afín paralelo pedido es:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

2. $T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid det(A) = 1\}$.

   Supongamos que sí lo es, y por consiguiente que es un espacio afín. Fijada $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in T$, tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \; & T \longrightarrow \overrightarrow{T} \\ & B \longmapsto \overrightarrow{AB} = B - A \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\varphi_A \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $v = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \overrightarrow{T}$; y como $\overrightarrow{T}$ es un espacio vectorial, tiene que $7v \in \overrightarrow{T}$. Como φ_A es una biyección, tenemos que $\exists C \in T$ tal que $7v = C - A \Longrightarrow C = 7v + A$. Veamos el valor de C:

$$C = 7v + A = \begin{pmatrix} 7 & 7i \\ 7i & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7i \\ 7i & 6 \end{pmatrix}$$

No obstante, $|C| = 36 - 49i^2 \neq 1$, por lo que $C \notin T$, llegando a una contradicción. Por tanto, no es un subespacio afín.

Ejercicio 5.1.5. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Definimos los siguientes conjuntos:

$$V = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f'(x) + a(x)f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{A} = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f'(x) + a(x)f(x) = b(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$

donde $C^1(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial real de las funciones de clase C^1 sobre los reales. Se pide lo siguiente:

1. Demostrar que V es un espacio vectorial real.

   Como tenemos que $C^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial, comprobemos que V es un subespacio vectorial suyo. Sean $f, g \in V$:

   a) Veamos si $f + g \in V$:

   $$(f+g)'(x)+a(x)(f+g)(x) = f'(x)+g'(x)+a(x)f(x)+a(x)g(x) = 0+0 = 0$$

   b) Veamos si, dado $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $cf \in V$:

   $$(cf')(x) + a(x)(cf')(x) = c[f'(x) + a(x)f(x)] = 0$$

   Por tanto, V es un subespacio vectorial real, y por tanto es un espacio vectorial real.

2. Supongamos sabido que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Ver si $\mathcal{A}$ es un espacio afín sobre V cuando, para cada par de funciones $f, g \in A$, definimos $\overrightarrow{fg} = g(x)f(x)$.

   En primer lugar, se ha de dar la igualdad triangular:

   $$\overrightarrow{fg} + \overrightarrow{gh} = g(x)f(x) + g(x)h(x) \neq h(x)f(x) = \overrightarrow{fh}$$

   Por tanto, como no se da la igualdad triangular, tenemos que no es un espacio afín sobre V. Para que lo fuese, tendría que ser $\overrightarrow{fg} = g(x) - f(x)$.

Ejercicio 5.1.6 (Producto de espacios afines)**.** Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos espacios afines sobre espacios vectoriales reales V_1 y V_2. Se pide lo siguiente:

1. Demostrar que el producto cartesiano $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ es un espacio afín sobre $V_1 \times V_2$ cuando definimos:

   $$\overrightarrow{(p_1, p_2)(q_1, q_2)} = (\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}).$$

   Veamos que $\overrightarrow{\cdot}$ cumple las dos condiciones necesarias para que sea un espacio afín:

a) Comprobamos la igualdad triangular:

$$\overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)}+\overrightarrow{(q_1,q_2)(t_1,t_2)} = (\overrightarrow{p_1q_1},\overrightarrow{p_2q_2}) + (\overrightarrow{q_1t_1},\overrightarrow{q_2t_2}) =$$
$$= (\overrightarrow{p_1q_1}+\overrightarrow{q_1t_1},\overrightarrow{p_2q_2}+\overrightarrow{q_2t_2}) \overset{(*)}{=} (\overrightarrow{p_1t_1},\overrightarrow{p_2t_2}) = \overrightarrow{(p_1,p_2)(t_1,t_2)}$$

donde en $(*)$ he aplicado que V_1, V_2 son, en concreto, espacios afines.

b) Comprobamos ahora que, fijado $p_1 \in \mathcal{A}_1, p_2 \in \mathcal{A}_2$, se tiene que la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{p_1,p_2}: & \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & V_1 \times V_2 \\ & (q_1,q_2) & \longmapsto & \overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} \end{array}$$

Vemos ahora que, para $i = 1, 2$, la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{p_i}: & \mathcal{A}_i & \longrightarrow & V_i \\ & q_i & \longmapsto & \overrightarrow{p_iq_i} \end{array}$$

Tenemos además lo siguiente:

$$\overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} = (q_1,q_2) - (p_1,p_2) = (q_1-p_1, q_2-p_2) = (\overrightarrow{p_1q_1},\overrightarrow{p_2q_2})$$

Por tanto, tenemos que la función queda como:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{p_1,p_2}: & \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & V_1 \times V_2 \\ & (q_1,q_2) & \longmapsto & (\overrightarrow{p_1q_1},\overrightarrow{p_2q_2}) \end{array}$$

Esta es claramente biyectiva, por serlo en cada una de las variables.

2. Supongamos que $\dim(\mathcal{A}_1) = m$ y $\dim(\mathcal{A}_2) = n$. Sea $\mathcal{R}_i = \{o_i, \mathcal{B}_i\}$ un sistema de referencia en $\mathcal{A}_i,\ i = 1, 2$. Pongamos $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = v_1, \dots, v_n$. Demostrar que el par $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = \{(o_1, o_2), \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2\}$, donde

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)\},$$

es un sistema de referencia en $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. A partir de aquí concluir el siguiente resultado: $\dim(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = n + m$.

Para ver que es un sistema de referencia, hemos de ver dos aspectos. En primer lugar, es necesario que el origen $(o_1, o_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, lo cual es evidente ya que $o_i \in \mathcal{A}_i$ para $i = 1, 2$. Veamos ahora que $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ es una base:

$$(0,0) = a_1(u_1,0) + \dots a_m(u_m,0) + b_1(0,v_1) + \dots b_n(0,v_n) =$$
$$= (a_1u_1 + \dots + a_mu_m, b_1v_1 + \dots b_nv_n) \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Por tanto, como ambas son una base en el respectivo espacio vectorial, tenemos que $a_i, b_j = 0,\ \forall i, j$, es decir, $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ es una base de $V_1 \times V_2$.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ es un sistema de referencia. Además, como la base asociada tiene $n + m$ vectores linealmente independientes, implica que $\dim \overrightarrow{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} = n + m$ y, por tanto, $\dim \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = n + m$.

3. Sea $(p_1, p_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. ¿Cómo se relacionan las coordenadas de (p_1, p_2) en $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ con las coordenadas de p_i en $\mathcal{R}_i,\ i = 1, 2$?

   Sea $p_{1\mathcal{R}_1} = (a_1, \dots, a_m)$ y $p_{2\mathcal{R}_2} = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces, por definición de coordenadas tenemos que $p_1 = o_1 + a_1u_1 + \cdots + a_mu_m$. Análogamente, tenemos que $p_2 = o_2 + b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}(p_1, p_2) &= (o_1 + a_1u_1 + \cdots + a_mu_m, o_2 + b_1v_1 + \dots b_nv_n) = \\ &= (o_1, o_2) + a_1(u_1, 0) + \dots a_m(u_m, 0) + b_1(0, v_1) + \dots b_n(0, v_n)\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que $(p_1, p_2)_{\mathcal{R}_1\times\mathcal{R}_2} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$. Como podemos ver, se concatenan las coordenadas.

Ejercicio 5.1.7. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto $\mathcal{R} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ formado por los puntos:

$$a_0 = (1, 2, 1), \qquad a_1 = (2, 1, 0), \qquad a_2 = (0, 1, 0), \qquad a_3 = (1, -1, 2).$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas afines del punto $p = (0, 0, 0)$ en este sistema de referencia.

Consideramos los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{a_0a_1} = (1, -1, -1) \qquad \overrightarrow{a_0a_2} = (-1, -1, -1) \qquad \overrightarrow{a_0a_3} = (0, -3, 1)$$

Para ver que esos tres vectores son linealmente independientes, comprobamos que el siguiente determinante no es nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1 - 1) = -8 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que esos tres vectores son linealmente independientes, por lo que los puntos de $\mathcal{R}$ son afínmente independientes, teniendo entonces efectivamente que forman un sistema de referencia, con origen a_0 y base asociada la siguiente: $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \overrightarrow{a_0a_3}\}$.

Veamos ahora las coordenadas de p en $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_0(0,0,0)} = (-1, -2, -1) &= b_1\overrightarrow{a_0a_1} + b_2\overrightarrow{a_0a_2} + b_3\overrightarrow{a_0a_3} = \\ &= b_1(1, -1, -1) + b_2(-1, -1, -1) + b_3(0, -3, 1) = \\ &= (b_1 - b_2, -b_1 - b_2 - 3b_3, -b_1 - b_2 + b_3)\end{aligned}$$

Por tanto, quedan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 - b_2 &=& -1 \\ -b_1 - b_2 - 3b_3 &=& -2 \\ -b_1 - b_2 + b_3 &=& -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} b_1 = 1/8 \\ b_2 = 9/8 \\ b_3 = 1/4 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que $p_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 5.1.8. Consideremos el punto $p = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ de forma que $p_\mathcal{R} = (1, 0, 2)$. ¿Es el sistema de referencia anterior único?

Sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Buscamos un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, \mathcal{B}\}$ tal que $p_\mathcal{R} = (1, 0, 2)$. Tenemos que la fórmula de cambio de sistema de referencia es:

$$p_\mathcal{R} = (0)_\mathcal{R} + M(\mathcal{B}_u, \mathcal{B}) \cdot p_{\mathcal{R}_0}$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x & a_1 & b_1 & c_1 \\ y & a_2 & b_2 & c_2 \\ z & a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right)$$

Por tanto, tengo 12 incógnitas y 3 ecuaciones linealmente independientes. Por tanto, el sistema de referencia no es único. Una posible solución es usar $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$, y calcular el nuevo origen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + Id_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De forma que obtenemos $x = 0, y = -2, z = -1$. El sistema de referencia pedido es:

$$\mathcal{R} = \{(0, -2, -1), \mathcal{B}_u\}$$

Otra posible solución es usar como matriz de cambio de base, $-Id_3$. De esta forma, si $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$, tenemos que $\mathcal{B} = \{-e_1, -e_2, -e_3\}$. Así, se tiene que el nuevo origen tiene de coordenadas $(2, 2, 5)$, por lo que otro posible sistema de coordenadas que cumpla lo pedido es:

$$\mathcal{R} = \{(2, 2, 5), \{-e_2, -e_2, -e_3\}\}$$

Ejercicio 5.1.9. En $\mathbb{R}^2$ consideremos los conjuntos $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, -1), (2, 1)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(1, 2), (2, 2), (2, 0)\}$.

1. Comprueba que son sistemas de referencia de $\mathbb{R}^2$.

   Para que $\mathcal{R}$ sea un sistema de referencia, es necesario que $\{\overrightarrow{(1, 1)(1, -1)}, \overrightarrow{(1, 1)(2, 1)}\}$ sea una base:

   $$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{(1, 1)(1, -1)}, \overrightarrow{(1, 1)(2, 1)}\} = \{(0, -2), (1, 0)\}$$

   Como $\mathcal{B}$ es una base, tenemos que $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia.

   Para $\mathcal{R}'$, es necesario que $\{\overrightarrow{(1, 2)(2, 2)}, \overrightarrow{(1, 2)(2, 0)}\}$ sea una base:

   $$\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{(1, 2)(2, 2)}, \overrightarrow{(1, 2)(2, 0)}\} = \{(1, 0), (1, -2)\}$$

   Como $\mathcal{B}'$ es una base, tenemos que $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia.

2. Calcula las ecuaciones que representan el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y las de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

   Dado $p \in \mathcal{A}$, sean las coordenadas en ambos sistemas de referencia los siguientes:

$$p_{\mathcal{R}} = (x, y) \qquad p_{\mathcal{R}'} = (s, t)$$

   Entonces, por definición de sistema de referencia, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{lllll} p & = & (1,1) + x(0,-2) + y(1,0) & = & (1+y, 1-2x) \\ p & = & (1,2) + s(1,0) + t(1,-2) & = & (1+s+t, 2-2t) \end{array}\right.$$

   Igualando componentes, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{lll} 1+y & = & 1+s+t \\ 1-2x & = & 2-2t \end{array}\right.$$

   Por tanto, tenemos que el cambio de variable de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{1}{2}(-1+2t) \\ y & = & s+t \end{array}\right.$$

   Matricialmente, tenemos que el cambio de variable de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

   El cambio de variable de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es:

$$\left\{\begin{array}{lll} s & = & -\frac{1}{2} - x + y \\ t & = & \frac{1}{2}(1+2x) \end{array}\right.$$

3. Calcula las coordenadas del punto $(0, 1)$ en los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

   Sea $(0, 1)_{\mathcal{R}} = (x, y)$. Entonces, tenemos que:

$$(0,1) = (1,1) + x(0,-2) + y(1,0) = (1+y, 1-2x)$$

   Por tanto, $x = 0, y = -1$. Es decir, $(0, 1)_{\mathcal{R}} = (0, -1)$.

   Aplicando el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, tenemos las coordenadas que nos faltan: $(0, 1)_{\mathcal{R}'} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 5.1.10. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ y el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(1, -1), (1, 0), (2, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcula la ecuación de C en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Sea $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, y consideramos sus coordenadas en $\mathcal{R}$, $p_{\mathcal{R}} = (s, t)$. Entonces,

$$p = (x, y) = (1, -1) + s\overrightarrow{(1, -1)(1, 0)} + t\overrightarrow{(1, -1)(2, 0)} = (1, -1) + s(0, 1) + t(1, 1)$$

Por tanto,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & -1+s+t \end{array}\right.$$

Tenemos por tanto que:

$$p \in C \Longleftrightarrow x^2+y^2=1 \Longleftrightarrow (1+t)^2+(-1+s+t)^2=1$$

Es decir,

$$C=\{(s,t)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid (1+t)^2+(-1+s+t)^2=1\}$$

Ejercicio 5.1.11. En un plano afín $\mathcal{A}$ se consideran dos puntos $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ y una base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$. Sea también $\mathcal{B}'=\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$. Considérense los sistemas de referencia $\mathcal{R}=\{a_1,\mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}'=\{a_2,\mathcal{B}'\}$. Si el vector $(\overrightarrow{a_1a_2})_{\mathcal{B}}=(1,1)$, calcula:

1. Las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

   Como $(\overrightarrow{a_1a_2})_{\mathcal{B}}=(1,1)$, tenemos que $\overrightarrow{a_1a_2}=a_2-a_1=e_1+e_2$. Por tanto, tenemos que las coordenadas de a_1, a_2 en respectivos sistemas de referencia son::

$$\begin{gathered} a_2=a_1+e_1+e_2 \Longrightarrow (a_2)_{\mathcal{R}}=(1,1) \\ a_1=a_2-e_1-e_2 \Longrightarrow (a_1)_{\mathcal{R}'}=(-1,0) \end{gathered}$$

   Además, las matrices de cambio de base son:

$$M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, dado $p \in \mathcal{A}$, con $p_{\mathcal{R}}=(x,y)$, $p_{\mathcal{R}'}=(s,t)$, tenemos que las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

   Las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ son:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Las coordenadas de a_1 y a_2 en cada sistema de referencia.

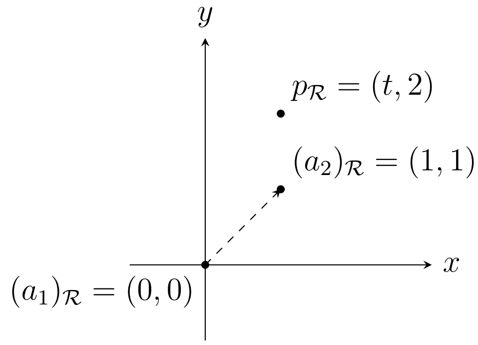
   Como hemos visto antes, tenemos que $(a_2)_{\mathcal{R}}=(1,1)$, $(a_1)_{\mathcal{R}'}=(-1,0)$. Además, tenemos que $a_2=a_2+0$ y $a_1=a_1+0$, por lo que $(a_2)_{\mathcal{R}'}=(0,0)$, $(a_1)_{\mathcal{R}}=(0,0)$. Es decir,

$$\begin{array}{ll} (a_1)_{\mathcal{R}}=(0,0) & (a_2)_{\mathcal{R}}=(1,1) \\ (a_1)_{\mathcal{R}'}=(-1,0) & (a_2)_{\mathcal{R}'}=(0,0) \end{array}$$

3. El valor de $t \in \mathbb{R}$ para que el punto p de coordenadas $p_{\mathcal{R}} = (t, 2)$ esté alineado con a_1 y a_2. ¿Cuáles son las coordenadas de este punto respecto de $\mathcal{R}'$?

   Tenemos que $p_{\mathcal{R}} - (a_1)_{\mathcal{R}} = (t, 2) = (\overrightarrow{a_1p})_{\mathcal{B}}$. Además, $(\overrightarrow{a_1a_2})_{\mathcal{B}} = (1, 1)$. Para que los tres puntos estén alineados, ambos vectores han de ser proporcionales, por lo que $t = 2$.

   Usando las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, tenemos que $p_{\mathcal{R}'} = (1, 0)$.



Ejercicio 5.1.12. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de un espacio afín tridimensional $\mathcal{A}$. Demuestra que $\mathcal{R}' = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ con

$$(a_0)_{\mathcal{R}} = (1, 0, 1), \quad (a_1)_{\mathcal{R}} = (-1, 0, 1), \quad (a_2)_{\mathcal{R}} = (1, 1, 1), \quad (a_3)_{\mathcal{R}} = (2, 1, 2),$$

es otro sistema de referencia. ¿Cuáles son las coordenadas del origen de $\mathcal{R}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$?

Notemos $\mathcal{R} = \{b_0, b_1, b_2, b_3\} = \{b_0, \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R}' = \{a_0, \mathcal{B}'\}$.

Veamos los vectores de la base asociada a $\mathcal{R}'$, para saber si sus vectores son linealmente independientes.Tenemos que:

$$\begin{aligned}
(a_1)_{\mathcal{R}} - (a_0)_{\mathcal{R}} &= (-2, 0, 0) = (\overrightarrow{a_0a_1})_{\mathcal{B}} \\
(a_2)_{\mathcal{R}} - (a_0)_{\mathcal{R}} &= (0, 1, 0) = (\overrightarrow{a_0a_2})_{\mathcal{B}} \\
(a_3)_{\mathcal{R}} - (a_0)_{\mathcal{R}} &= (1, 1, 1) = (\overrightarrow{a_0a_3})_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Como esos tres vectores son linealmente independientes, tenemos que $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia. La ecuación de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es:

$$\begin{aligned}
p_{\mathcal{R}'} &= (b_0)_{\mathcal{R}'} + M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')p_{\mathcal{R}} = (b_0)_{\mathcal{R}'} + M(\mathcal{B}', \mathcal{B})^{-1}p_{\mathcal{R}} = \\
&= (b_0)_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} p_{\mathcal{R}} = (b_0)_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

Usando $p = a_0$ (podríamos usar cualquier otro punto), tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (b_0)_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (b_0)_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(b_0)_{\mathcal{R}'} = -(0, -1, 1) = (0, 1, -1)$.

Ejercicio 5.1.13. Demuestra que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$, para cualquier $n \geqslant 4$?

Sea la recta afín $r = p + \mathcal{L}\{u\}$. Extendemos la base de $\overrightarrow{r}$ a una base del espacio; es decir, $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\{u, v, w\}$, con los tres vectores linealmente independientes. Sean ahora los siguientes planos:

$$\pi_1 = p + \mathcal{L}\{u, v\} \qquad \pi_2 = p + \mathcal{L}\{u, w\}$$

Entonces $\pi_1 \cap \pi_2 = p + \mathcal{L}\{u\}$, por lo que se tiene.

Este razonamiento también es válido para $\mathbb{R}^n$, con $n \geqslant 4$. Esto se debe a que, al extender a una base del espacio, tomamos $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}\{u, v, w, e_4, \ldots, e_n\}$, donde tan solo usaremos los tres primeros vectores para construir los dos planos descritos anteriormente.

Ejercicio 5.1.14. Sean $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de un espacio afín $\mathcal{A}$ y $S \subset \mathcal{A}$ un subespacio afín. Si S está definido por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, entonces demuestra que las ecuaciones de $\overrightarrow{S}$ vienen dadas por

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{array}\right.$$

en coordenadas respecto de la base asociada a $\mathcal{R}$.

Sea $\mathcal{B}$ la base asociada a $\mathcal{R}$. Por ser S un espacio afín, tenemos que fijado un punto $p \in S$, existe una biyección $\varphi_p : S \to \overrightarrow{S}$ dada por $\varphi_p(q) = \overrightarrow{pq}$. Por tanto, dado $v \in \overrightarrow{S}$, se tiene que $\exists q \in S$ tal que $v = \overrightarrow{pq}$. Buscamos demostrar que, si $v_\mathcal{B} = (\overrightarrow{pq})_\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces cumple las ecuaciones cartesianas descritas.

Tenemos que $(x_1, \ldots, x_n) = (\overrightarrow{pq})_\mathcal{B} = q_\mathcal{R} - p_\mathcal{R}$. Sean las coordenadas de $p, q \in S$ las siguientes: $q_\mathcal{R} = (c_1, \ldots, c_n)$, $p_\mathcal{R} = (d_1, \ldots, d_1)$. Entonces, como ambos puntos pertenecen a S, sus coordenadas en $\mathcal{R}$ cumplen las ecuaciones cartesianas dadas:

$$q \in S,\ q_\mathcal{R} = (c_1, \ldots, c_n) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m, \end{array}\right.$$

$$p \in S,\ p_\mathcal{R} = (d_1, \ldots, d_n) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \cdots + a_{1n}d_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \cdots + a_{mn}d_n = b_m, \end{array}\right.$$

Igualando los valores de b_i para todo $i \in \{1, \ldots m\}$, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \cdots + a_{1n}d_n, \\ \cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \cdots + a_{mn}d_n, \end{array}\right.$$

Llevando todo al término de la izquierda y sacando factor común, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}(c_1-d_1)+a_{12}(c_2-d_2)+\cdots+a_{1n}(c_n-d_n)=0, \\ \dots \\ a_{m1}(c_1-d_1)+a_{m2}(c_2-d_2)+\cdots+a_{mn}(c_n-d_n)=0, \end{array}\right.$$

Precisamente, tenemos que

$$(x_1,\dots,x_n)=(\overrightarrow{pq})_{\mathcal{B}}=q_{\mathcal{R}}-p_{\mathcal{R}}=(c_1-d_1,\dots,c_n-d_n)$$

Por tanto, se tiene demostrado que las ecuaciones dadas son las ecuaciones cartesianas de $\overrightarrow{S}$ respecto a $\mathcal{B}$.

Ejercicio 5.1.15. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín con sistema de referencia $\mathcal{R}$ y S el conjunto de puntos $p\in\mathcal{A}$ tales que $p_{\mathcal{R}}=(x_1,\dots,x_n)$ es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}\right.$$

Demuestra que S es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{B}$ la base asociada a $\mathcal{R}$. Supongamos $S\neq 0$ (no se puede probar por falta de información en el enunciado). Sea por tanto $p\in S$ con $p_{\mathcal{R}}=(d_1,\dots,d_n)$, que cumple las ecuaciones dadas. Consideramos $q\in S$. Entonces, tenemos que:

$$q_{\mathcal{R}}-p_{\mathcal{R}}=(\overrightarrow{pq})_{\mathcal{B}}\in\overrightarrow{\mathcal{A}}$$

Sean las coordenadas de $\overrightarrow{pq}$ las siguientes:

$$(\overrightarrow{pq})_{\mathcal{B}}=(x'_1,\dots,x'_n):=(x_1,\dots,x_n)-(d_1,\dots,d_n)$$

Veamos ahora que $a_{i1}x'_1+a_{i2}x'_2+\cdots+a_{in}x'_n=0$ para todo $i\in\{0,\dots,m\}$:

$$\begin{aligned} &a_{i1}x'_1+a_{i2}x'_2+\cdots+a_{in}x'_n= \\ &\quad =a_{i1}(x_1-d_1)+a_{i2}(x_2-d_2)+\cdots+a_{in}(x_n-d_n)= \\ &\quad =b_i-b_i=0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} S&=\left\{(x_1,\dots,x_n)\;\middle|\;\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}\right\}= \\ &=(d_1,\dots,d_n)+\left\{(x'_1,\dots,x'_n)\;\middle|\;\begin{array}{c} a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+\cdots+a_{1n}x'_n=0, \\ \dots \\ a_{m1}x'_1+a_{m2}x'_2+\cdots+a_{mn}x'_n=0, \end{array}\right\} \end{aligned}$$

Hemos deducido que S es un subespacio afín, y tenemos las ecuaciones cartesianas de $\overrightarrow{S}$.

Ejercicio 5.1.16. Calcula la suma e intersección de los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^3$:

1. $S_1 = (1, 2, -1) + \mathcal{L}\{(1, 0, -2)\}$ y $S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 1, \\ 4x + y + 2z = 4. \end{array} \right.$

   Calculamos en primer lugar un vector director de S_2. Sea $\overrightarrow{S_2} = \mathcal{L}\{(1, 0, -2)\}$. Además, $(1, 2, -1) \in S_2$, por lo que $S_2 = (1, 2, -1) + \mathcal{L}\{(1, 0, -2)\}$.

   Por tanto, $S_1 = S_2$, y deducimos que:

   $$S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2 \qquad S_1 \vee S_2 = S_1 = S_2$$

2. $S_1 \equiv 2x - y + 3z = 1$ y $S_2 = (1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1)\}$.

   Tenemos que $\overrightarrow{S_1} = \mathcal{L}\{(-1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$. Además, $(1, 2, 1) \in S_1$. Por tanto,

   $$S_1 = (1, 2, 1) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$$

   Veamos si $\overrightarrow{(1, 2, 1)(1, 2, 0)} \in \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}$. Tenemos que $\overrightarrow{(1, 2, 1)(1, 2, 0)} = (0, 0, -1)$, y $\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{S_1} = \mathcal{L}\{(-1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$. Como los tres vectores son linealmente independientes, tenemos que $\overrightarrow{(1, 2, 1)(1, 2, 0)} \notin \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}$, por lo que

   $$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

   Gráficamente, esto era esperable, ya que S_2 es paralelo a S_1 pero difieren en un punto $(1, 2, 0) \in S_2 \setminus S_1$, por lo que no se cortan.

   Calculemos ahora la suma:

   $$S_1 \vee S_2 = (1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(0, 0, -1), (-1, 1, 1), (1, 2, 0)\} = (1, 2, 0) + \overrightarrow{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3$$

   Por tanto,

   $$S_1 \cap S_2 = \emptyset \qquad S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^3$$

3. $S_1 = (-1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y $S_2 = (1, 1, 1) + \mathcal{L}\{(-1, -1, -1)\}$.

   En primer lugar, notemos que $\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{S_2}$, por lo que $S_1 \| S_2$.

   Tenemos que $\overrightarrow{(-1, 0, 1)(1, 1, 1)} = (2, 1, 0) \notin \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{S_1}$. Por tanto, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

   Calculemos ahora la suma:

   $$S_1 \vee S_2 = (1, 1, 1) + \mathcal{L}\{(2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

   Por tanto,

   $$S_1 \cap S_2 = \emptyset \qquad S_1 \vee S_2 = (1, 1, 1) + \mathcal{L}\{(2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

   Gráficamente, estos resultados eran de esperar. Son dos rectas paralelas y no coincidentes, por lo que su intersección es nula y la suma es el plano que las contiene.

4. $S_1 \equiv 2x - y + z = 1$ y $S_2 = (1, 2, 3) + \mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}$.

   Calculamos unas ecuaciones cartesianas de S_2 en $\mathcal{R}_0$. Sea $(x, y, z) \in S_2$ un punto arbitrario de la recta, por lo que:

   $$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, -1) = (1 + \lambda, 2, 3 - \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, tenemos que $S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 3 - z, \\ y = 2. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x + z = 4, \\ y = 2. \end{array} \right.$

   Como estamos trabajando en el mismo sistema de referencia $\mathcal{R}_0$, tenemos que:

   $$S_1 \cap S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1, \\ x + z = 4, \\ y = 2. \end{array} \right.$$

   Resolviendo el sistema, llegamos a que $S_1 \cap S_2 = \{(-1, 2, 5)\}$.

   Para calcular la suma, usamos la fórmula de las dimensiones, sabiendo que la intersección es no nula:

   $$\dim(S_1 \vee S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) = 2 + 1 - 0 = 3$$

   Por tanto, $S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^3$.

5. $S_1 \equiv x + y + z = 1$ y $S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2, \\ 2y - z = 3. \end{array} \right.$

   Directamente de las ecuaciones cartesianas vemos que $\overrightarrow{S_2} \subset \overrightarrow{S_1}$, pero no hay puntos comunes a los subespacios afines; es decir, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

   Aplicamos la fórmula de las dimensiones para calcular la suma:

   $$\dim(S_1 \vee S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\overrightarrow{S_1} \cap \overrightarrow{S_2}) + 1 = 2 + 1 - 1 + 1 = 3$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$S_1 \cap S_2 = \emptyset \qquad\qquad S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^3$$

Ejercicio 5.1.17. Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^3$:

1. La recta r_1 que pasa por los puntos $(1, 2, 1)$ y $(1, 0, 2)$.

   Tenemos que el vector director es $\overrightarrow{(1, 2, 1)(1, 0, 2)} = (0, -2, 1)$. Por tanto, la recta es $r_1 = (1, 2, 1) + \mathcal{L}\{(0, -2, 1)\}$.

   Las ecuaciones paramétricas son:

   $$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Despejando λ e igualando, tenemos que $\dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. Por tanto, las ecuaciones cartesianas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases}$$

2. El plano π_1 que pasa por los puntos $(-1,-2,1)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$.

   Buscamos dos vectores linealmente independientes que pertenezcan al plano. Sean estos vectores los siguientes:

$$\overrightarrow{(-1,-2,1)(0,1,1)} = (1,3,0)$$
$$\overrightarrow{(-1,-2,1)(1,0,2)} = (2,2,1)$$

   Por tanto, el plano es $\pi_1 : (0,1,1) + \mathcal{L}\{(1,3,0),(2,2,1)\}$.

   Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   Para obtener las ecuaciones cartesianas, hay dos opciones:

   Opción 1 Despejamos en primer lugar α e igualamos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{cases} x - 2\beta = \frac{1}{3}(y - 1 - 2\beta) \\ z = 1 + \beta \end{cases} \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

   Despejamos ahora β e igualamos, obteniendo entonces la ecuación cartesiana del plano:

$$\frac{1}{4}(3x - y + 1) = z - 1 \Longrightarrow 3x - y + 1 = 4z - 4$$

   Por tanto, la ecuación cartesiana del plano es $\pi_1 \equiv 3x - y - 4z + 5 = 0$.

   Opción 2 Usando una manera similar a la que usábamos para obtener las ecuaciones cartesianas de un plano vectorial, usamos que cualquier tercer vector del plano $\overrightarrow{(0,1,1)(x,y,z)} = (x, y-1, z-1)$ ha de ser linealmente dependiente a los otros dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & y-1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 = 2(z-1) + 3x - (y-1) - 6(z-1) = 3x - y - 4z + 5$$

   Por tanto, la ecuación cartesiana del plano es $\pi_1 \equiv 3x - y - 4z + 5 = 0$.

   Como podemos ver, esta forma es más cómoda, ya que solo hay que calcular un determinante.

3. El plano π_2 que pasa por el punto $(1,2,1)$ y contiene la recta $r_2 = (1,1,1) + \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$.

   Al contener a la recta, tenemos que $(1,1,1) \in \pi_2$ y $(0,1,1) \in \overrightarrow{\pi_2}$. El otro vector que buscamos es $\overrightarrow{(1,1,1)(1,2,1)} = (0,1,0)$. Por tanto, el plano es $\pi_2 = (1,1,1) + \mathcal{L}\{(0,1,1),(0,1,0)\}$.

   Sus ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   Para la ecuación cartesiana, aunque en este caso es fácil ver que es $\pi_2 \equiv y - z = 0$, calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 = x - 1 \Longleftrightarrow x = 1$$

   Como hemos visto, la ecuación cartesiana es $\pi_2 \equiv x = 1$.

4. La recta r_3 intersección entre los planos $\pi_3 = (1,1,1) + \mathcal{L}\{(-1,0,2),(-1,-2,1)\}$ y $\pi_4 \equiv x + y + z = 1$.

   En primer lugar, obtengo la ecuación cartesiana de π_3:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & -2 & y-1 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & -2 & y-1 \\ 0 & -1 & 2x+z-3 \end{vmatrix} = 0 =$$
$$= 2(2x+z-3) - (y-1) = 4x + 2z - y - 5 = 0$$

   Por tanto, tenemos que $\pi_3 \equiv 4x - y + 2z = 5$, por tanto, tenemos que la recta pedida es:

$$r_3 = \pi_3 \cap \pi_4 \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema, tenemos que un punto de la recta es $(0,-1,2)$, y su vector director es $(3,2,-5)$. Por tanto, tenemos que $r_3 = (0,-1,2) + \mathcal{L}\{(3,2,-5)\}$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 - 5\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.1.18. Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios afines $S = \langle\{(1,1,0,1),(1,-1,1,0)\}\rangle$ y $T = \langle\{(1,1,0,1),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}\rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Calcula $S \cap T$ y $S \vee T$.

Tenemos que S es la recta que une ambos puntos. Su vector director es

$$\overrightarrow{(1,1,0,1)(1,-1,1,0)} = (0,-2,1,-1)$$

Entonces, $S = (1, 1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(0, -2, 1, -1)\}$.

Las ecuaciones paramétricas de S son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \\ t = 1 - \lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sus ecuaciones cartesianas son:

$$S \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ \\ \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-0}{1} = \dfrac{t-1}{-1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ \\ \dfrac{1-y}{2} = z = 1 - t \end{array}\right.$$

Trabajemos ahora con T. Tenemos que es el plano que contiene a los 3 puntos. Dos vectores de $\overrightarrow{T}$ son:

$$\overrightarrow{(1,1,0,1)(1,0,1,0)} = (0, -1, 1, -1)$$
$$\overrightarrow{(1,1,0,1)(0,1,0,1)} = (-1, 0, 0, 0)$$

Por tanto, $T = (1, 1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(0, -1, 1, -1), (-1, 0, 0, 0)\}$.

Las ecuaciones paramétricas de T son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \beta \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \\ t = 1 - \alpha \end{array}\right. \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Sus ecuaciones cartesianas son:

$$T \equiv 1 - y = z = 1 - t$$

Calculamos ahora la intersección, que sabemos que es no nula ya que el punto $(1, 1, 0, 1) \in S \cap T$. Las ecuaciones cartesianas de la intersección son:

$$S \cap T \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ 1 - y = z = 1 - t = \dfrac{1-y}{2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ z + y = 1 \\ z + t = 1 \\ 2z + y = 1 \end{array}\right\}$$

Veamos si esas 4 ecuaciones son linealmente independientes. Tenemos que el rango de la matriz de coeficientes es:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Por tanto, las 4 son linealmente independientes y el sistema es de Cramer, es decir, SCD. Por tanto, tan solo hay un punto que cumple el sistema, por lo que

$$S \cap T = \{(1, 1, 0, 1)\}$$

Calculemos el valor de la suma:

$$\dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 1 + 2 - 0 = 3$$

Tenemos que:

$$S \vee T = (1, 1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(0, -2, 1, -1), (0, -1, 1, -1), (-1, 0, 0, 0)\}$$

Las ecuaciones paramétricas de $S \vee T$ son:

$$\begin{cases} x = 1 - \gamma \\ y = 1 - 2\alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta \\ t = 1 - \alpha - \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones de cartesianas de $S \vee T$ son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & x-1 \\ -2 & -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & 0 & z \\ -1 & -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 0 = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & z+t-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(z + t - 1)(-2 + 1) = z + t - 1 = 0$$

Por tanto, $S \vee T \equiv z + t = 1$.

Ejercicio 5.1.19. Sea L la recta de $\mathbb{R}^2$ que tiene por ecuación cartesiana $x - y = 1$ en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(1, -1), (2, 1), (0, 2)\}$. Calcula su ecuación cartesiana en el sistema de referencia usual.

Tenemos que la base asociada a $\mathcal{R}$ es $\mathcal{B} = \{(1, 2), (-1, 3)\}$. Consideraos ahora el punto $p = (x, y)_{\mathcal{R}} = (s, t)_{\mathcal{R}_0}$. Tenemos que las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_0$ son:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x - y \\ -1 + 2x + 3y \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación, tenemos que $s = 1 + x - y = 2$.

Por tanto, como una recta en $\mathbb{R}^2$ viene determinada por una única ecuación cartesiana, tenemos que es:

$$L = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = 2\}.$$

Ejercicio 5.1.20. Calcula las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^4$:

1. La recta r que pasa por los puntos $(0,-1,1,1)$ y $(1,1,0,2)$.

   Tenemos que el vector director es $(1,2,-1,1)$. Por tanto, la recta es:

$$r = (0,-1,1,1) + \mathcal{L}\{(1,2,-1,1)\}$$

   Para obtener las ecuaciones cartesianas, sea (x,y,z,t) un punto arbitrario de la recta. Entonces, necesitamos que:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & x-0 \\ 2 & y+1 \\ -1 & z-1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} = 1$$

   Para ello, necesitamos que estos tres determinantes sean nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y+1 \end{vmatrix} = 0 = y+1-2x \Longrightarrow -2x+y+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 = z-1+x \Longrightarrow x+z-1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = 0 = t-1-x \Longrightarrow -x+t-1=0$$

   Por tanto, las ecuaciones cartesianas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} -2x+y+1=0 \\ x+z-1=0 \\ -x+t-1=0 \end{cases}$$

2. El plano π que pasa por los puntos $(0,-1,0,-1)$, $(1,0,1,1)$ y $(2,1,0,2)$.

   Tenemos que dos vectores de la variedad de direcciones son $(1,1,1,2)$ y $(2,2,0,3)$.

   Por tanto, tenemos que el plano es

$$\pi = (0,-1,0,-1) + \mathcal{L}\{(1,1,1,2),(2,2,0,3)\}.$$

   Para obtener las ecuaciones cartesianas, sea (x,y) un punto arbitrario del plano. Entonces, necesitamos que:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & x-0 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 0 & z-0 \\ 2 & 3 & t+1 \end{pmatrix} = 2$$

   Para ello, necesitamos que estos dos determinantes sean nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-0 \\ 1 & 0 & z-0 \\ 2 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = 0 = 4z+3x-3z-2(t+1) = 3x+z-2t-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-0 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 0 & z-0 \end{vmatrix} = 0 = 2z + 2(y+1) - 2x - 2z \Longrightarrow 0 = -x + y + 1$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas de π son:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x + z - 2t - 2 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

3. El hiperplano S que contiene al plano $(0,1,1,0)+\mathcal{L}(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\})$ y pasa por el punto $(2,0,2,0)$.

   Tenemos que el siguiente vector pertenece a la variedad de direcciones:

$$\overrightarrow{(0,1,1,0)(2,0,2,0)} = (2,-1,1,0)$$

   Por tanto, tenemos que:

$$S = (0,1,1,0) + \mathcal{L}(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(2,-1,1,0)\})$$

   Para obtener las ecuaciones cartesianas, necesitamos que el siguiente determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x-0 \\ -1 & 0 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & 1 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 & t-0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x-0 \\ 0 & 0 & 1 & y-1+x \\ 0 & 1 & 1 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 & t-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & y-1+x \\ 1 & 1 & z-1 \\ -1 & 0 & t-0 \end{vmatrix} =$$
$$= (1-z) + (y-1+x) - t = x + y - z - t = 0$$

   Por tanto, la ecuación cartesiana del hiperplano es:

$$S \equiv x + y - z - t = 0$$

4. El subespacio afín T que pasa por los puntos $(1,1,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0)$ y $(0,2,-2,1)$.

   Tenemos los siguientes vectores del espacio de direcciones:

$$\overrightarrow{(0,0,0,1)(1,1,-1,0)} = (1,1,-1,-1)$$
$$\overrightarrow{(0,0,0,1)(1,0,0,0)} = (1,0,0,-1)$$
$$\overrightarrow{(0,0,0,1)(0,2,-2,1)} = (0,2,-2,0)$$

   Por tanto, tenemos que el subespacio afín buscado es:

$$T = (0,0,0,1) + \mathcal{L}\{(1,1,-1,-1),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$$

   No obstante, el primer vector del sistema de generadores es combinación lineal de los otros dos, por lo que:

$$T = (0,0,0,1) + \mathcal{L}\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$$

Para las ecuaciones cartesianas del plano, necesitamos que:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-0 \\ 0 & 1 & y-0 \\ 0 & -1 & z-0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = 2$$

Para ello, necesitamos que estos dos determinantes sean nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-0 \\ 0 & 1 & y-0 \\ 0 & -1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 = z+y$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-0 \\ 0 & -1 & z-0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 0 = -t-1-x$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas del plano son:

$$T \equiv \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ x+t+1=0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 5.1.21 (Producto de aplicaciones afines)**.** Sean $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}'_i$ espacios afines y $f_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}'_i$ aplicaciones afines para cada $i = 1, 2$. Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_1 \times f_2 : & \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & \mathcal{A}'_1 \times \mathcal{A}'_2 \\ & (p_1, p_2) & \longmapsto & (f_1(p_1), f_2(p_2)) \end{array}$$

es una aplicación afín y $\overrightarrow{f_1 \times f_2} = \overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2}$.

Para que sea una aplicación afín, es necesario encontrar una aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f_1 \times f_2}$ que cumpla que:

$$\overrightarrow{f_1 \times f_2}[\overrightarrow{(p_1, p_2)(q_1, q_2)}] = \overrightarrow{(f_1 \times f_2)(p_1, p_2)\ (f_1 \times f_2)(q_1, q_2)} = \overrightarrow{(f_1(p_1), f_2(p_2))(f_1(q_1), f_2(q_2))}$$

Veamos que $\overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2}$ cumple lo pedido:

$$(\overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2})[\overrightarrow{(p_1, p_2)(q_1, q_2)}] = (\overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2})[(q_1, q_2) - (p_1, p_2)] = (\overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2})(q_1 - p_1, q_2 - p_2) =$$
$$= (\overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2})(\overrightarrow{p_1 q_1}, \overrightarrow{p_2 q_2}) = (\overrightarrow{f_1(p_1) f_1(q_1)}, \overrightarrow{f_2(p_2) f_2(q_2)}) = (f_1(q_1) - f_1(p_1), f_2(q_2) - f_2(p_2)) =$$
$$= (f_1(q_1), f_2(q_2)) - (f_1(p_1), f_2(p_2)) = \overrightarrow{(f_1(p_1), f_2(p_2))(f_1(q_1), f_2(q_2))}$$

Por tanto, hemos visto que, efectivamente, $f_1 \times f_2$ es una aplicación afín con $\overrightarrow{f_1 \times f_2} = \overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2}$.

Ejercicio 5.1.22. Dadas $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín, $q \in \mathcal{A}$ y $h : \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ aplicación lineal, probar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}' \\ & p & \longmapsto & f(p) + h(\overrightarrow{qp}) \end{array}$$

es la única aplicación afín con $g(q) = f(q)$ y $\overrightarrow{g} = h + \overrightarrow{f}$.

Veamos en primer lugar que g cumple dichos resultados. Es directo ver que $g(q) = f(p) + h(\overrightarrow{0}) = f(p)$. Comprobemos ahora que la aplicación lineal asociada es la correcta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{g}(\overrightarrow{p_1p_2}) &= \overrightarrow{g(p_1)g(p_2)} = \overrightarrow{[f(p_1) + h(\overrightarrow{qp_1})][f(p_2) + h(\overrightarrow{qp_2})]} = \\
&= f(p_2) + h(\overrightarrow{qp_2}) - f(p_1) - h(\overrightarrow{qp_1}) = \overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} + h(\overrightarrow{qp_2} + \overrightarrow{p_1q}) = \\
&= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_2}) + h(\overrightarrow{p_1p_2}) = (h + \overrightarrow{f})(\overrightarrow{p_1p_2})
\end{aligned}$$

Por tanto, como esto es válido para todo $p_2, p_2 \in \mathcal{A}$, tenemos que $\overrightarrow{g} = h + \overrightarrow{f}$. Por tanto, g cumple las dos condiciones dadas. Veamos ahora que es única.

Opción 1) De forma rutinaria.

Supongamos que existe una aplicación afín $g' : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ con $g'(q) = f(q)$ y $\overrightarrow{g'} = h + \overrightarrow{f}$, y busquemos el valor de $g'(p)$, para cualquier $p \in \mathcal{A}$. De la definición de aplicación afín asociada, tenemos que:

$$\overrightarrow{g'}(\overrightarrow{qp}) = \overrightarrow{g'(q)g'(p)} = \overrightarrow{f(q)g'(p)} = g'(p) - f(q)$$

Ahora, como hemos supuesto que $\overrightarrow{g'} = h + \overrightarrow{f}$, tenemos que:

$$\overrightarrow{g'}(\overrightarrow{qp}) = (h+\overrightarrow{f})(\overrightarrow{qp}) = h(\overrightarrow{qp})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{qp}) = h(\overrightarrow{qp})+\overrightarrow{f(q)f(p)} = h(\overrightarrow{qp})+f(p)-f(q)$$

Igualando ambos resultados, tenemos que:

$$g'(p) - \cancel{f(q)} = h(\overrightarrow{qp}) + f(p) - \cancel{f(q)} \Longrightarrow g'(p) = f(p) + h(\overrightarrow{qp}) \qquad \forall p \in \mathcal{A}$$

Por tanto, podemos ver que $g'(p) = g(p)$ $\forall p \in \mathcal{A}$, por lo que $g' = g$.

Opción 2) Usando el Teorema 1.12.

Como $\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{g}$, y $g(q) = f(p) = g'(q)$, tenemos que $q = g'$.

Por tanto, queda demostrado que g es la única aplicación que cumple dichos resultados.

Ejercicio 5.1.23. Dada la siguiente aplicación afín:

$$\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
& (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + z - 1, x + y + z + 1)
\end{array}$$

Calcular:

1. La imagen de la recta $L_1 = (1, 1, 2) + \mathcal{L}\{(2, 0, 1)\}$.

Opción 1) Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2+\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

La imagen de L_1 por f tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (1+2\lambda) - 2(1) + (2+\lambda) - 1 = 3\lambda \\ y = (1+2\lambda) + 1 + (2+\lambda) + 1 = 5+3\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $f(L_1) = (0,5) + \mathcal{L}\{(3,3)\} = (0,5) + \mathcal{L}\{(1,1)\}$.

Opción 2) Tenemos que todos los puntos de L_1 son de la forma $p = p_0 + \lambda v$, con $p_0 = (1,1,2)$ y $v = (2,0,1)$. Por tanto, y usando que $\overrightarrow{f}$ es lineal, tenemos que $f(p) = f(p_0) + \lambda \overrightarrow{f}(v)$. Por tanto, $f(L_1) = f(p_0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{f}(v)\}$. Expresando f de forma matricial, tenemos que:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow M(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, deducimos que $\overrightarrow{f}(2,0,1) = (3,3)$ y $f(1,1,2) = (0,5)$, por lo que:

$$f(L_1) = (0,5) + \mathcal{L}\{(3,3)\} = (0,5) + \mathcal{L}\{(1,1)\}$$

Es decir, es una recta.

Optaremos por la opción 2, ya que se puede realizar de forma mecánica sin necesidad de escribir tantos pasos.

2. La imagen de la recta $L_2 = (0,1,1) + \mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$.

Tenemos que $f(0,1,1) = (-2,3)$ y $\overrightarrow{f}(1,0,-1) = (0,0)$. Por tanto, tenemos que:

$$f(L_2) = (-2,3) + \mathcal{L}\{0\} = (-2,3)$$

Es decir, la imagen de L_2 es un punto.

3. La preimagen del punto $(1,3)$.

Tenemos que $f^{-1}(1,3) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = (1,3)\}$. Es decir, son las soluciones de este sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = x - 2y + z - 1 \\ 3 = x + y + z + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = x - 2y + z \\ 2 = x + y + z \end{array}\right\}$$

Restando, tenemos que $0 = -3y$, por lo que $y = 0$. La solución del sistema es:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2-\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es decir, $f^{-1}(1,3) = (0,0,2) + \mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$.

Ejercicio 5.1.24. Demuestra que la siguiente aplicación afín es una homotecia y calcula su centro.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (1-2x, 3-2y) \end{array}$$

Veamos cual es su aplicación lineal asociada:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{(x,y)(x',y')}\right) &= \overrightarrow{f(x,y)f(x',y')} = \overrightarrow{(1-2x,3-2y)(1-2x',3-2y')} = \\ &= (1-2x',3-2y')-(1-2x,3-2y) = (-2(x'-x),-2(y'-y)) = -2[(x',y')-(x,y)] = \\ &= -2\overrightarrow{(x,y)(x'y')} = -2Id_{\overrightarrow{\mathbb{R}^2}}\left(\overrightarrow{(x,y)(x',y')}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f} = -2Id_{\overrightarrow{\mathbb{R}^2}}$; es decir, es una homotecia de razón -2. Veamos cuál es su centro o:

$$\begin{aligned} o = (x,y) + \frac{1}{1+2}\overrightarrow{(x,y)f(x,y)} &= (x,y) + \frac{1}{3}[(1-2x,3-2y)-(x,y)] = \\ &= (x,y) + \frac{1}{3}[(1,3)-(3x,3y)] = \frac{1}{3}(1,3) = \left(\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que f es una homotecia de razón -2 y centro $o = \left(\frac{1}{3},1\right)$.

Ejercicio 5.1.25. Calcula el subespacio afín de los puntos fijos de la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = \left(x+3y+\frac{3}{2}, -2y-\frac{3}{2}, -4x-4y-z-2\right)$.

Calculamos los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(x,y,z)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+\frac{3}{2} = x \\ -2y-\frac{3}{2} = y \\ -4x-4y-z-2 = z \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-2\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{P}_f$ son las dadas. Entonces, tenemos que:

$$\mathcal{P}_f = \left(0,-\frac{1}{2},0\right) + \mathcal{L}\{(1,0,-2)\}$$

Ejercicio 5.1.26. En $\mathbb{R}^2$ consideremos el sistema de referencia dado por los puntos $\mathcal{R}=\{(0,-1),(3,0),(-2,1)\}$ y la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que en coordenadas (x,y) respecto de $\mathcal{R}$ se escribe como $f(x,y)=(x-2y,-x+y)$. Escribe la matriz asociada a f en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$.

Calculamos la matriz asociada a f en $\mathcal{R}$:

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

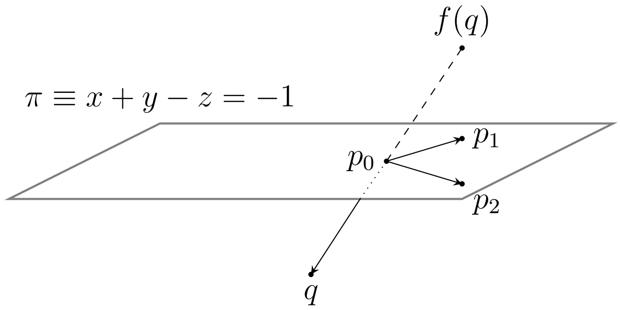
Además, la matriz de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_0$, sabiendo que $\mathcal{R}=\{(0,-1),\mathcal{B}=\{(3,1),(-2,2)\}\}$, es:

$$M(\mathcal{R},\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\
&= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} \\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & 0 \\ \hline -7 & 9 & -7 \\ -5 & -1 & -1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.1.27. Calcula la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos a los del plano $x+y-z=-1$ y tal que $f(0,0,0)=(1,1,1)$. ¿Es f biyectiva?



Consideramos dos vectores de $\overrightarrow{\pi}$ linealmente independientes:

$$v_1=(1,0,1)\qquad v_2=(0,1,1)$$

Sea ahora $p_0=(-1,-1,-1)\in\pi$ y $q=(0,0,0)\in\mathbb{R}^2$. Sea entonces el tercer vector de la base $v_3=\overrightarrow{p_0q}=(1,1,1)$. Comprobemos que los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1-1=-1\neq 0$$

Por tanto, forman base. Tomamos el sistema de referencia $\mathcal{R}=\{p_0,\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}\}$. Tenemos que $f(p_0)=p_0$ por ser un punto fijo, por lo que $f(p_0)=(0,0,0)_{\mathcal{R}}$. Calculamos ahora las imágenes mediante $\overrightarrow{f}$ de los vectores de la base.

Tenemos que $v_i=\overrightarrow{p_0p_i}$, con $p_i\in\pi$ para $i=1,2$. Entonces,

$$\overrightarrow{f}(v_i)=\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)}=\overrightarrow{p_0p_i}=v_i\qquad i=1,2$$

Además, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v_3)=\overrightarrow{f(p_0)f(q)}=\overrightarrow{p_0(1,1,1)}=(2,2,2)=2v_3$$

Entonces, la matriz asociada a f es:

$$M(f,\mathcal{R})=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Como la matriz asociada a $\overrightarrow{f}$ es regular, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es biyectiva; y por tanto f también lo es.

Para obtener la matriz asociada a f en $\mathcal{R}_0$, usamos que:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1.28. Consideremos los sistemas de referencia de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}' = \{(1,0), (0,0), (-1,-1)\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la única aplicación afín tal que

$$f(1,1) = (3,3), \qquad f(2,1) = (3,-1), \qquad f(2,2) = (2,0).$$

Calcula las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ (en el dominio) y $\mathcal{R}'$ (en el codominio), y las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia usuales. ¿Cuál es la imagen del punto $(5,5)$?

Sea $\mathcal{R} = \{(1,1), \mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\}\}$, $\mathcal{R}' = \{(1,0), \mathcal{B}' = (-1,0), (-2,-1)\}$. De forma directa, podemos obtener $M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(1,0) &= \overrightarrow{f(1,1)f(2,1)} = \overrightarrow{(3,3)(3,-1)} = (0,-4) \\ \overrightarrow{f}(1,1) &= \overrightarrow{f(1,1)f(2,2)} = \overrightarrow{(3,3)(2,0)} = (-1,-3) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

Para obtener las ecuaciones en los sistemas de referencia pedidos, calculamos las matrices de cambio de base necesarias:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}') &= M(Id_{\mathcal{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}')\cdot M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) =\\
&= M(Id_{\mathcal{R}^2},\mathcal{R}',\mathcal{R}_0)^{-1}\cdot M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) =\\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 3 & 0 & -1\\ 3 & -4 & -3 \end{array}\right) =\\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 4 & -8 & -5\\ -3 & 4 & 3 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Para las ecuaciones en los sistemas de referencia usuales, tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_0) &= M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathcal{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) =\\
&= M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathcal{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} =\\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 3 & 0 & -1\\ 3 & -4 & -3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} =\\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 4 & 0 & -1\\ 6 & -4 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.1.29. Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín, $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ una aplicación afín y el subespacio $S = p_0 + \mathcal{L}\{v_0\}$ una recta en $\mathcal{A}$. Demuestra que $f(S) = S$ si y solo si $\overrightarrow{p_0\, f(p_0)} \in \mathcal{L}\{v_0\}$ y v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ de valor propio no nulo.

$\Longrightarrow$) Suponemos que f deja invariante a la recta. Entonces, como $p_0 \in S$, entonces $f(p_0) \in S$, por lo que $\overrightarrow{p_0\, f(p_0)} \in \overrightarrow{S} = \mathcal{L}\{v_0\}$. Veamos ahora que v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ de valor propio no nulo.

Para ver esto, veamos en primer lugar que $\exists p \in S$ tal que $f(p) \neq f(p_0)$. Si fuese $f(p) = f(p_0)$ para todo $p \in S$, tendríamos que $f(S) = f(p_0)$ un único punto, que no es posible ya que $f(S)$ es una recta. Por tanto, $\exists p \in S$ tal que $f(p) \neq f(p_0)$.

Como $f(p) \neq f(p_0)$, entonces $p \neq p_0$. Entonces, $\overrightarrow{pp_0} \in S$ no es nulo, por lo que $\overrightarrow{pp_0} = \lambda_1 v_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pp_0}) &\overset{(1)}{=} \overrightarrow{f}(\lambda_1 v_0) = \lambda_1 \overrightarrow{f}(v_0)\\
&\overset{(2)}{=} \overrightarrow{f(p)f(p_0)} = \lambda_2 v_0
\end{aligned}$$

Donde en (1) he aplicado lo visto anteriormente, y en (2) he aplicado la definición de aplicación lineal asociada y que, como $p, p_0 \in S$, sus imágenes pertenecen a S y, por tanto, dicho vector a $\overrightarrow{S}$. Además, como $f(p) \neq f(p_0)$, no es nulo, por lo que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.

Entonces, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_0$$

con $\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}^*$ valor propio, que no es nulo ya que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

$\Longleftarrow$) Veamos en primer lugar que $f(p_0) \in S$. Tenemos que $\overrightarrow{p_0\, f(p_0)} = \lambda v_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $f(p_0) = p_0 + \lambda v_0 \in S$, por lo que se tiene.

Además, por hipótesis v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ con valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$, por lo que $\overrightarrow{f}(v_0) = \lambda_1 v_0$.

Demostramos la doble inclusión:

$\subset$) Sea $p \in S$. Si $p = p_0$, tenemos que $f(p) \in S$, por lo que descartamos este caso inicial. Si $p \neq p_0$, entonces $p = p_0 + \lambda_2 v_0$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$. Entonces,

$$f(p) = f(p_0) + \lambda_2 \overrightarrow{f}(v_0) = f(p_0) + \lambda_2\lambda_1 v_0 \in S$$

Por tanto, tengo que $f(S) \subset S$.

$\supset$) Sea $q \in S$. Veamos que $\exists p \in S$ tal que $f(p) = q$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} q &= p_0 + \lambda_2 v_0 + f(p_0) - f(p_0) = -\overrightarrow{p_0 f(p_0)} + \lambda_2 v_0 + f(p_0) = \\ &= \lambda_3 v_0 + f(p_0) = \lambda_3 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \cdot v_0 + f(p_0) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \overrightarrow{f}(v_0) + f(p_0) = \\ &= f\left(p_0 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_0\right) \end{aligned}$$

Definiendo $p = p_0 + \frac{\lambda_3}{\lambda} \cdot v_0 \in S$, tenemos que $f(p) = q$. Por tanto, $q \in f(S)$.

Entonces, $f(S) = S$.

Ejercicio 5.1.30. Sean $\mathcal{A}$ un plano afín, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín y R_1, R_2, R_3 tres rectas distintas donde no hay dos paralelas. Prueba que si $f(R_i) \| R_i,\ i = 1, 2, 3$, entonces f es una traslación o una homotecia.

Sean las rectas $R_i = p_i + \mathcal{L}\{v_i\}$ para $i = 1, 2, 3$. Sea $R_1 \cap R_2 = \{p_{12}\}$, que sabemos que se cortan por no ser paralelas. Análogamente, sean $R_1 \cap R_3 = \{p_{13}\}$, $R_2 \cap R_3 = \{p_{23}\}$. Para todo $i = 1, 2, 3$, sea ahora $v_i \in \overrightarrow{R_i}$, de forma que $\overrightarrow{R_i} = \mathcal{L}\{v_i\}$. Entonces, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v_i) \in \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{R_i}\right) = \overrightarrow{R_i} \Longrightarrow \overrightarrow{f}(v_i) = \lambda_i v_i \qquad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R}^*$$

Consideramos ahora los vectores $\overrightarrow{p_{12}p_{13}} \in \overrightarrow{R_1}$, $\overrightarrow{p_{12}p_{23}} \in \overrightarrow{R_2}$, $\overrightarrow{p_{13}p_{23}} \in \overrightarrow{R_3}$. Entonces, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{12}p_{13}}) = \lambda_1\ \overrightarrow{p_{12}p_{13}} \qquad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{12}p_{23}}) = \lambda_2\ \overrightarrow{p_{12}p_{23}} \qquad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{13}p_{23}}) = \lambda_3\ \overrightarrow{p_{13}p_{23}}$$

Además, por la igualdad triangular, tenemos que $\overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \overrightarrow{p_{13}p_{23}} = \overrightarrow{p_{12}p_{23}}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{12}p_{23}}) &= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \overrightarrow{p_{13}p_{23}}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{12}p_{13}}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_{13}p_{23}}) = \\ &= \lambda_1\ \overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \lambda_3\ \overrightarrow{p_{13}p_{23}} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lambda_1\ \overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \lambda_3\ \overrightarrow{p_{13}p_{23}} = \lambda_2\ \overrightarrow{p_{12}p_{23}} = \lambda_2\ \overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \lambda_2\ \overrightarrow{p_{13}p_{23}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\ \overrightarrow{p_{12}p_{13}} + (\lambda_3 - \lambda_2)\ \overrightarrow{p_{13}p_{23}} = 0$$

Como $R_1 \not\parallel R_3$, tenemos que $\{\overrightarrow{p_{12}p_{13}}, \overrightarrow{p_{13}p_{23}}\}$ son linealmente independientes, por lo que: $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_2 = 0$, y entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Como $\{\overrightarrow{p_{12}p_{13}}, \overrightarrow{p_{13}p_{23}}\}$ forman base de $\mathcal{A}$ y $\overrightarrow{f}$ es lineal, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}\ (\alpha_1\overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \alpha_2\overrightarrow{p_{13}p_{23}}) = \alpha_1\lambda\overrightarrow{p_{12}p_{13}} + \alpha_2\lambda\overrightarrow{p_{13}p_{23}} = \lambda v$$

Es decir, $\overrightarrow{f} = \lambda Id$, por lo que f es una homotecia o una traslación.

Ejercicio 5.1.31. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín y biyectiva que lleva rectas de $\mathcal{A}$ en rectas paralelas, es decir:

$$r \| f(r) \qquad \forall r \subset \mathcal{A},\ \ \dim r = 1$$

Demostrar que f es una dilatación.

Por el ejercicio anterior, tan solo es necesario ver que es posible tomar tres rectas R_1, R_2, R_3 distintas tales que no haya dos paralelas. Para ello, tomamos R_1 cualquiera, y R_2 y R_3 tales que $R_2 \cap R_1 = \{p_1\}$ y $R_3 \cap R_1 = \{p_2\}$, con $p_1 \neq p_2$. Entonces, $R_2 \cap R_3 = \{p_3\}$, con $p_3 \neq p_1, p_2$.

Ejercicio 5.1.32. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín de un espacio afín $\mathcal{A}$ en sí mismo. Consideremos el subespacio vectorial $\mathcal{W} = \left\{v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \mid \overrightarrow{f}(v) = v\right\}$. Demuestra que

1. El conjunto de puntos fijos de f es vacío o un subespacio afín cuyo espacio de direcciones es $\mathcal{W}$.

   Supongamos $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$, y sea $q \in \mathcal{P}_f$. Entonces, dado $p \in \mathcal{A}$, tenemos que:

   $$p \in \mathcal{P}_f \Longleftrightarrow f(p) = p \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{f(p)q} = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f}\ (\overrightarrow{pq}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} \in \mathcal{W}$$

   Por tanto, $\mathcal{P}_f = q + \mathcal{W}$, por lo que es un subespacio afín de espacio de direcciones $\mathcal{W}$.

2. Si $\mathcal{W} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ entonces f tiene un único punto fijo.

   Supongamos demostrado la existencia, y veamos la unicidad. Supongamos que f tiene dos puntos fijos p_1, p_2. Entonces, tenemos que $\overrightarrow{p_1p_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_f} = \mathcal{W} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, por lo que $p_1 = p_2$, quedando demostrada la unicidad.

Veamos ahora la existencia del punto fijo. Fijado $p \in \mathcal{A}$, supongamos que existe $q \in \mathcal{A}$ tal que $f(q) = q$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(q) = q \Longleftrightarrow \overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{qp}) + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) - Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)p} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\right)(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)p} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} = \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(p)p}\right) \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow q = p + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(p)p}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, mediante este razonamiento heurístico[1], hemos obtenido que, fijado $p \in \mathcal{A}$, el siguiente punto es un punto fijo de f:

$$q := p + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(p)p}\right)$$

Por tanto, queda también demostrada la existencia.

Ejercicio 5.1.33. Consideremos $k+1$ puntos $p_0, p_1, \dots, p_k$ de un espacio afín $\mathcal{A}$. Definimos el baricentro de estos puntos como

$$b = p_0 + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{p_0p_i}.$$

Demuestra que b no depende del punto inicial p_0 elegido. (Cuando $k=1$ el punto b se le denomina el punto medio de p_0 y p_1).

Sea $p_0' \in \{p_0, \dots, p_k\}$ otro punto. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p_0 + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{p_0p_i} = p_0' + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{p_0'p_i} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow p_0 - p_0' = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\left(\overrightarrow{p_0'p_i} - \overrightarrow{p_0p_i}\right) \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow p_0 - p_0' = \frac{1}{k+0}\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{p_0'p_0} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \overrightarrow{p_0'p_0} = \frac{k+1}{k+1}\overrightarrow{p_0'p_0} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \overrightarrow{p_0'p_0} = \overrightarrow{p_0'p_0}
\end{aligned}$$

[1]Este razonamiento se denomina heurístico porque hemos comenzado suponiendo lo que buscábamos demostrar. Otras veces, este tipo de razonamientos se encuentran dando directamente el punto, y viendo que cumple que es un punto fijo. Es análogo, pero se ha optado por esta forma, para que así el lector vea que ese valor de q no es suerte ni "magia".

Por tanto, hemos obtenido que b no depende del punto inicial elegido. Como observación, siempre podemos reordenar los puntos para que p_0' sea el primer punto, de forma que la sumatoria empiece en $i = 1$.

Ejercicio 5.1.34. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín entre dos espacios afines. Si $b \in A$ es el baricentro de los puntos $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathcal{A}$, demuestra que $f(b)$ es el baricentro de los puntos $f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_k)$.

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(p_0 + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{p_0p_i}\right) = f(p_0) + \overrightarrow{f}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{p_0p_i}\right) = \\ &= f(p_0) + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) = f(p_0) + \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)} \end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido que $f(b)$ es el baricentro de los puntos $f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_k)$.

Ejercicio 5.1.35. Un triángulo en un espacio afín son tres puntos afínmente independientes. Prueba que las tres medianas de un triángulo se cortan en el baricentro de sus vértices, donde se llama mediana a cada recta que pasa por un vértice y el punto medio de los otros dos.

Demostrado en el Teorema 2.10.

Ejercicio 5.1.36. Sea T_1 un triángulo en un plano afín $\mathcal{A}$ y T_2 el triángulo cuyos vértices son los tres puntos medios de los vértices de T_1. Prueba que T_1 y T_2 tienen lados paralelos e igual baricentro. Calcula el centro y razón de la homotecia en $\mathcal{A}$ que transforma T_2 en T_1.

En el Teorema 2.15, se demostró que el centro de homotecia es el baricentro, y la razón es $-\frac{1}{2}$. Como una homotecia lleva rectas en rectas paralelas, tenemos que los lados de T_1 y T_2 son paralelos.

Ejercicio 5.1.37. Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín y $a_0, a_1, a_2 \in A$ los vértices de un triángulo con baricentro $b \in \mathcal{A}$. Sean $a_3, a_4 \in \mathcal{A}$ los puntos intersección del lado que contiene a a_1 y a_2 con las rectas paralelas a los otros dos lados pasando por b. Demuestra que, salvo reordenación de los puntos a_3, a_4, se tiene que

$$\overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{a_3a_4} = \overrightarrow{a_4a_2} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{a_1a_2}$$

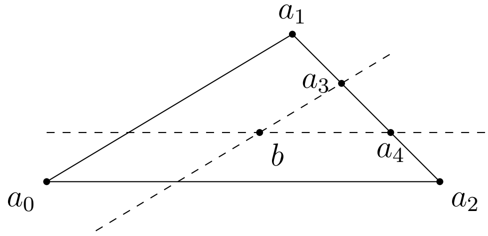


Figura 5.1: Ejercicio del ejercicio 5.1.37.

Por la definición de baricentro, como b es el baricentro de a_0, a_1, a_2, y no depende del punto inicial elegido, tenemos que:

$$b = a_1 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1a_0} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) = a_2 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_2a_0} + \overrightarrow{a_2a_1}\right)$$

Como $a_3 \in a_1 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_1a_2}\}$, entonces $\overrightarrow{a_1a_3} = \mu\overrightarrow{a_1a_2}$, con $\mu \in \mathbb{R}$. Además, como $a_3 \in b + \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_0a_1}\}$, entonces $a_3 = b + \lambda\overrightarrow{a_0a_1}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. De la definición de b, tenemos que $a_3 = a_1 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1a_0} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) + \lambda\overrightarrow{a_0a_1}$, por lo que $\overrightarrow{a_1a_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1a_0} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) + \lambda\overrightarrow{a_0a_1}$. Igualando con lo obtenido anteriormente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mu\overrightarrow{a_1a_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1a_0} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) + \lambda\overrightarrow{a_0a_1} \Longrightarrow& \\
\Longrightarrow \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1a_0} + \overrightarrow{a_1a_2}\right) - \lambda\overrightarrow{a_1a_0} - \mu\overrightarrow{a_1a_2} = 0 \Longrightarrow& \\
\Longrightarrow \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\overrightarrow{a_1a_0} + \left(\frac{1}{3} - \mu\right)\overrightarrow{a_1a_2} = 0&
\end{aligned}$$

Como a_0, a_1, a_2 son afínmente independientes, tenemos que $\overrightarrow{a_1a_0}, \overrightarrow{a_1a_2}$ son linealmente independientes, por lo que:

$$\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) = \left(\frac{1}{3} - \mu\right) = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $\overrightarrow{a_1a_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1a_2}$. Trabajemos ahora con a_4.

Como $a_4 \in a_2 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_1a_2}\}$, entonces $\overrightarrow{a_4a_2} = \mu'\overrightarrow{a_1a_2}$, con $\mu' \in \mathbb{R}$. Además, como $a_4 \in b + \mathcal{L}\{\overrightarrow{a_0a_2}\}$, entonces $a_4 = b + \lambda'\overrightarrow{a_0a_2}$, con $\lambda' \in \mathbb{R}$. De la definición de b, tenemos que $a_4 = a_2 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_2a_0} + \overrightarrow{a_2a_1}\right) + \lambda'\overrightarrow{a_0a_2}$, por lo que $\overrightarrow{a_2a_4} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_2a_0} + \overrightarrow{a_2a_1}\right) + \lambda'\overrightarrow{a_0a_2}$. Igualando con lo obtenido anteriormente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mu'\overrightarrow{a_1a_2} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_2a_0} + \overrightarrow{a_2a_1}\right) - \lambda'\overrightarrow{a_0a_2} \Longrightarrow& \\
\Longrightarrow -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_2a_0} + \overrightarrow{a_2a_1}\right) + \lambda'\overrightarrow{a_2a_0} + \mu'\overrightarrow{a_2a_1} = 0 \Longrightarrow& \\
\Longrightarrow \left(\lambda' - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{a_2a_0} + \left(\mu' - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{a_2a_1} = 0&
\end{aligned}$$

Como a_0, a_1, a_2 son afínmente independientes, tenemos que $\overrightarrow{a_2a_0}, \overrightarrow{a_2a_1}$ son linealmente independientes, por lo que:

$$\left(\lambda' - \frac{1}{3}\right) = \left(\mu' - \frac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \lambda' = \mu' = \frac{1}{3}$$

De esta forma, vemos también que $\overrightarrow{a_4a_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1a_2}$. Por tanto:

$$\overrightarrow{a_1a_2} \overset{(*)}{=} \overrightarrow{a_1a_3} + \overrightarrow{a_3a_4} + \overrightarrow{a_4a_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_3a_4} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1a_2} \Longrightarrow \overrightarrow{a_4a_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_1a_2}$$

donde en $(*)$ he aplicado la igualdad triangular.

Por tanto, hemos obtenido que $\overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{a_3a_4} = \overrightarrow{a_4a_2} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{a_1a_2}$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 5.1.38. Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín de dimensión mayor o igual a dos y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación biyectiva (no necesariamente afín) que lleva rectas en rectas paralelas. Demuestra que

1. Toda recta que pasa por un punto fijo es una recta fija.

   Sea $r = p + \overrightarrow{r}$ una recta, es decir, $\dim \overrightarrow{r} = 1$ y $p \in \mathcal{A}$. Entonces, como f lleva rectas en rectas paralelas, tenemos que

   $$f(r) = f(p) + \overrightarrow{r} \qquad \forall p \in r$$

   Sea ahora p_0 el punto fijo, es decir, $f(p_0) = p_0$. Entonces:

   $$f(r) = f(p_0) + \overrightarrow{r} = p_0 + \overrightarrow{r} = r$$

   Por tanto, como $f(r) = r$, tenemos que f es una recta fija.

2. La recta que pasa por un punto y su imagen es una recta fija.

   Sea ahora $r = p + \overrightarrow{r}$ una recta con $p_0, f(p_0) \in r$. Entonces, como ambos puntos están en la recta, tenemos que:

   $$r = p_0 + \overrightarrow{r} \qquad r = f(p_0) + \overrightarrow{r}$$

   Calculemos ahora $f(r)$ para ver si es fija. Como $p_0 \in r$ y $\overrightarrow{f(r)} = \overrightarrow{r}$:

   $$f(r) = f(p_0) + \overrightarrow{r} = r$$

   Por tanto, como $f(r) = r$, tenemos que f es una recta fija.

3. Si f tiene dos puntos fijos ha de ser la identidad.

   Sean $p_0, p_1 \in \mathcal{A}$, $p_0 \neq p_1$, los puntos fijos; es decir, $f(p_0) = p_0$ y $f(p_1) = p_1$. Consideramos ahora $q \in \mathcal{A}$. Realizamos distinción entre si los tres puntos están o no alineados:

   a) Supongamos que no están alineados:

   Sean entonces $\overrightarrow{p_1q}, \overrightarrow{p_2q} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ dos vectores linealmente independientes (lo son ya que no están alineados). Consideramos las rectas $L_1 = q + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_1q}\}$, $L_2 = q + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_2q}\}$.

   Como $p_1 \in L_1$ y p_1 es un punto fijo, tenemos que $f(L_1) = L_1$. Análogamente, $f(L_2) = L_2$.

   Además, tenemos que $q \in L_1, L_2$, por lo que $\{q\} = L_1 \cap L_2$. Como se tiene que $q \in L_1$, entonces $f(q) \in L_1$, y análogamente $f(q) \in L_2$. Por tanto, $f(q) \in L_1 \cap L_2 = \{q\}$, por lo que $f(q) = q$.

   Es decir, $f(q) = q$ para todo $q \in \mathcal{A} \setminus (p_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_0p_1}\})$, es decir, que no esté alineado con los puntos fijos p_0, p_1.

   b) Supongamos que están alineados:

   Consideramos $q' \in \mathcal{A}$ no alineado con p_0, p_1, q. Entonces, por lo visto anteriormente, $f(q') = q'$. Aplicamos ahora el razonamiento anterior a q usando los puntos fijos p_0, q', de forma que llegamos a que $f(q) = q$.

Por tanto, $f(q) = q$ para todo $q \in \mathcal{A}$, es decir, f es la identidad.

4. Si f tiene un único punto fijo ha de ser una homotecia.

   Sea $q \in \mathcal{A}$, $q \neq p_0$. Tenemos que la recta $r = q + \mathcal{L}\{\overrightarrow{p_0q}\}$ pasa por p_0 (punto fijo), por lo que es una recta fija.

   Buscamos saber el valor de $\overrightarrow{f}$ en un vector cualquiera. Como fijado p_0 tenemos que $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ es biyectivo a $\mathcal{A}$, lo comprobamos con $\overrightarrow{p_0q}$, que es un vector cualquiera. Entonces, tenemos que:

   $$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q}) = \overrightarrow{f(p_0)f(q)} = \overrightarrow{p_0f(q)} \in \overrightarrow{r} \Longrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_0q}) = \lambda\overrightarrow{p_0q} \qquad \forall q \in \mathcal{A}$$

   Es decir, tenemos que $\overrightarrow{f}(v) = \lambda v$ para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. Como f es biyectiva, tenemos que $f(q) \neq f(p_0)$, por lo que $\lambda \neq 0$. Además, como f tiene un único punto fijo, $f(q) \neq q$, por lo que $\lambda \neq 1$. Es decir, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, por lo que f es una homotecia.

5. Si f no tiene ningún punto fijo ha de ser una traslación.

   Sean $p, q \in \mathcal{A}$, $p \neq q$, y consideramos la recta $r = p + \mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\}$.

   Tenemos que:

   $$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} \in \overrightarrow{f(r)} = \overrightarrow{r} \Longrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = \lambda\overrightarrow{pq} \qquad \forall p, q \in \mathcal{A}$$

   Es decir, tenemos que $f(v) = \lambda v$ para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. Veamos que $\lambda = 1$:

   a) Si $\lambda = 0$, entonces $f(q) = f(p)$ para todo $p, q \in \mathcal{A}$, por lo que f no es biyectiva, contradicción.

   b) Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, entonces f es una homotecia, por lo que tiene un punto fijo (el centro), contradicción.

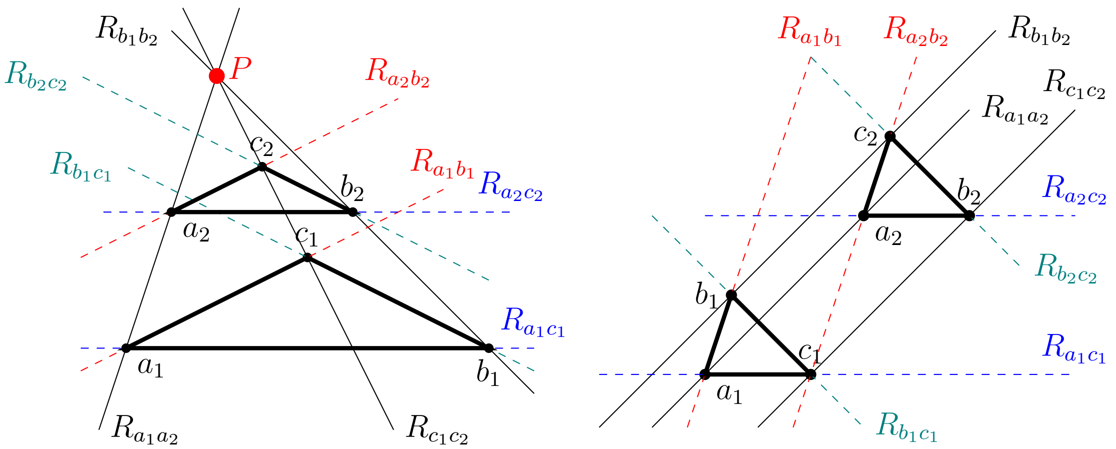
   Por tanto, $\lambda = 1$, es decir, $\overrightarrow{f} = Id$. Como f no tiene ningún punto fijo, entonces f es una traslación.

Ejercicio 5.1.39. Sean T_1, T_2 dos triángulos de un espacio afín $\mathcal{A}$, con vértices respectivos a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2. Supongamos que los triángulos no tienen vértices comunes y las tres rectas $R_{a_1a_2}$, $R_{b_1b_2}$ y $R_{c_1c_2}$ son paralelas o se cortan en el mismo punto. Demuestra que si

$$R_{a_1b_1} \| R_{a_2b_2} \quad \text{y} \quad R_{a_1c_1} \| R_{a_2c_2}$$

entonces $R_{b_1c_1} \| R_{b_2c_2}$.

Estamos ante un resultado similar al Teorema de Desargues, por lo que tenemos la siguiente figura:



(a) Rectas secantes. (b) Rectas paralelas.

Figura 5.2: Representación gráfica del Ejercicio 5.1.39.

En el caso de que las rectas $R_{a_1a_2}$, $R_{b_1b_2}$ y $R_{c_1c_2}$ sean paralelas, consideramos la traslación según el vector $\overrightarrow{a_1a_2}$, En el caso de que se corten en el mismo punto $P \in \mathcal{A}$, consideramos la homotecia de centro P que lleva a_1 en a_2.

En ambos casos, tenemos que $f(a_1) = a_2$, y como f lleva rectas en rectas paralelas y $R_{a_1b_1} \| R_{a_2b_2}$, entonces $f(b_1) = b_2$. Análogamente, $f(c_1) = c_2$.

Sea ahora $\overrightarrow{b_1c_1} \in \overrightarrow{R_{b_1c_1}}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{b_1c_1}\right) &= \lambda\overrightarrow{b_1c_1} = \\ &= \overrightarrow{f(b_1)f(c_1)} = \overrightarrow{b_2c_2}\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad he aplicado que $\overrightarrow{f} = \lambda Id$, con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, y en la segunda igualdad he aplicado la definición de lineal de una aplicación afín.

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{b_1c_1} \in \mathcal{L}\{\overrightarrow{b_2c_2}\}$, es decir, $R_{b_1c_1} \| R_{b_2c_2}$.

Ejercicio 5.1.40. Demuestra que la composición de dos simetrías respecto de dos puntos distintos es una traslación.

Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean $p, q \in \mathcal{A}$ dos puntos distintos. Por el Lema 1.28, tenemos que:

$$\sigma_p \circ \sigma_q = H_{p,-1} \circ H_{q,-1}$$

Tenemos por tanto que la composición es afín, y su lineal asociada es:

$$\overrightarrow{\sigma_p \circ \sigma_q} = -Id_{\mathcal{A}} \circ -Id_{\mathcal{A}} = Id_{\mathcal{A}}$$

Por tanto, por la caracterización de las traslaciones, tenemos que $\sigma_p \circ \sigma_q$ es una traslación.

5.2. El Espacio Afín Euclídeo.

Ejercicio 5.2.1. Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo y S un subespacio afín suyo. Dado un punto $p \in \mathcal{A}$ demuestra que existe $q_0 \in S$ tal que

$$d(p, q_0) = d(p, S) := \text{ínf}\{d(p, q) : q \in S\}.$$

Demostramos en primer lugar que existe $q_0 \in S$ tal que $\overrightarrow{pq_0} \in \overrightarrow{S}^\perp$. Notemos el subespacio S como $S = q + \overrightarrow{S}$.

Como se tiene que $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{S}^\perp$, entonces $\exists_1 u \in \overrightarrow{S}, v \in \overrightarrow{S}^\perp$ tal que:

$$\overrightarrow{pq} = u + v$$

Sea $q_0 = q - u \in S$. Entonces:

$$v = \overrightarrow{pq} - u = q - p - u = q_0 - p = \overrightarrow{pq_0} \in \overrightarrow{S}^\perp$$

Veamos ahora que $d(p, q_0) \leqslant d(p, q)\ \forall q \in S$:

$$\begin{aligned} d^2(p,q) = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle = \langle \overrightarrow{pq_0} + \overrightarrow{q_0q}, \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{q_0q} \rangle = \|\overrightarrow{pq_0}\|^2 + \|\overrightarrow{q_0q}\|^2 + 2\cancel{\langle \overrightarrow{pq_0}, \overrightarrow{q_0q} \rangle} = \\ = \|\overrightarrow{pq_0}\|^2 + \|\overrightarrow{q_0q}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{pq_0}\|^2 = d^2(p, q_0) \qquad \forall q \in S \end{aligned}$$

Por tanto, $d(p, q_0)$ es un minorante del conjunto. Como además $q_0 \in S$, pertenece al conjunto, por lo que es el ínfimo. Por tanto, se tiene.

Ejercicio 5.2.2 (Hiperplano afín de puntos equidistantes)**.** Dados tres puntos $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, demostrar que se cumple la igualdad

$$d(p, q)^2 - d(q, r)^2 = 2\langle \overrightarrow{rm_{pq}}, \overrightarrow{qp} \rangle,$$

donde m_{pq} es el punto medio entre p y q. Utilizar esta igualdad para probar lo siguiente: si $p \neq q$, entonces el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que se encuentran a la misma distancia de p y de q coincide con el hiperplano $m_{pq} + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{pq}\})^\perp$.

Demostrado en la Proposición 2.12, ya que el hiperplano descrito es la mediatriz de p y q.

Ejercicio 5.2.3. Dados los siguientes pares de rectas de $\mathbb{R}^2$, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo que forman; en otro caso, calcula la distancia entre ellas.

1. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$.

   Tenemos que $R = (0, 0) + \mathcal{L}\{(1, 1)\}$, $S = (0, 0) + \mathcal{L}(1, 2)$.

   Por tanto, son secantes. El origen $(0, 0) \in S \cap R$ está en la intersección. Veamos el ángulo entre las rectas:

   $$\frac{\langle (1,1), (1,2) \rangle}{\|(1,1)\|\ \|(1,2)\|} = \frac{1+2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \frac{\langle (1,1), -(1,2) \rangle}{\|(1,1)\|\ \|-(1,2)\|} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

   Por tanto, tenemos que el ángulo es:

   $$\alpha = \measuredangle(S, R) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}32 \text{ rad}$$

2. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$, $S = \{(2\lambda, 1 + 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Tenemos que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = -1\}$. Por tanto, como las ecuaciones cartesianas de $S \cap R$ forman un SI, tenemos que $S \cap R = \emptyset$. Calculamos la distancia entre ambas rectas.

   Tenemos que $R = \{(\mu, \mu - 1) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = (0, -1) + \mathcal{L}\{(1, 1)\}$. Además, $S = (0, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1)\}$. Por tanto, un vector arbitrario que una ambas rectas es $v = \overrightarrow{(\mu, \mu - 1)(2\lambda, 1 + 2\lambda)} = (2\lambda - \mu, 2\lambda - \mu + 2)$. Como $v \in \overrightarrow{R}^\perp$, entonces:

$$\langle(2\lambda - \mu, 2\lambda - \mu + 2), (1, 1)\rangle = 0 \Longleftrightarrow 4\lambda - 2\mu + 2 = 0$$

   Por ejemplo, para $\lambda = 0$, $\mu = 1$ se tiene que $v \in \overrightarrow{R}^\perp = \overrightarrow{S}^\perp$, tenemos que:

$$d(R, S) = \|v\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{2}$$

Ejercicio 5.2.4. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, consideramos el producto escalar definido como $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$. Dotamos $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de la estructura afín canónica (que lo convierte en un espacio afín euclídeo) y consideramos las siguientes rectas afines:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = 5, p''(8) = 4\} \qquad \text{y} \qquad T = \langle\{5x^2 - 2x, 2x^2 - x + 1\}\rangle.$$

Comprueba si S y T se cortan en un punto, y en dicho caso calcula el ángulo que forman.

Buscamos obtener las ecuaciones cartesianas de S. Tenemos que $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ arbitrario es $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Además, $p'(x) = a_1 + 2a_2x$ y $p''(x) = 2a_2$. Por tanto, las condiciones dadas son $a_0 = 5,\ a_2 = 2$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{0, \mathcal{B}_u = \{1, x, x^2\}\}$ son:

$$S = \{(a_0, a_1, a_2)_\mathcal{R} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0 = 5,\ a_2 = 2\}$$

Respecto a T, tenemos que el vector director es:

$$\overrightarrow{(5x^2 - 2x)(2x^2 - x + 1)} = (2x^2 - x + 1) - (5x^2 - 2x) = -3x^2 + x + 1$$

Por tanto, $T = 5x^2 - 2x + \mathcal{L}\{-3x^2 + x + 1\}$. Para calcular las ecuaciones cartesianas en $\mathcal{R}$, el siguiente determinante ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 - a_0 \\ 1 & -2 - a_1 \\ -3 & 5 - a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Para ello, ha de ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 - a_0 \\ 1 & -2 - a_1 \end{vmatrix} = 0 = -2 - a_1 + a_0 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 - a_0 \\ -3 & 5 - a_2 \end{vmatrix} = 0 = 5 - a_2 - 3a_0 = 0$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas en $\mathcal{R}$ son:

$$T = \{(a_0, a_1, a_2)_\mathcal{R} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0 - a_1 = 2,\ 3a_0 + a_2 = 5\}$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas de $S\cap T$ en $\mathcal{R}$ son:

$$S\cap T=\{(a_0,a_1,a_2)_{\mathcal{R}}\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\mid a_0=5,\ a_1=3,\ a_2=2,\ 3a_0+a_2=5\}$$

Por tanto, $S\cap T=\emptyset$, por lo que no se cortan.

Ejercicio 5.2.5. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, consideramos el producto escalar definido como $\langle M,N\rangle=tr(M^tN)$. Dotamos $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de la estructura afín canónica (que lo convierte en un espacio afín euclídeo). Calcula el ángulo que forman los siguientes hiperplanos afines:

$$S=\{M\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\mid tr(M)=2\}\quad \text{y}\quad T=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\mid a=1\right\}$$

Tenemos que S viene dado por:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\mid a+d=2\right\}$$

Tenemos que los vectores normales a S y T, que son:

$$n_S=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad n_T=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces $\measuredangle(S,T)=\measuredangle(n_S,n_T)$, por lo que:

$$\measuredangle(S,T)=\arccos\left(\frac{tr(n_S^tn_T)}{tr(n_S^tn_S)\cdot tr(n_T^tn_T)}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2\cdot 1}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Ejercicio 5.2.6. En $\mathbb{R}^2$ consideramos dos triángulos $T_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ y $T_2=\{b_1,b_2,b_3\}$. Demuestra que:

1. Existen seis aplicaciones afines de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que llevan T_1 en T_2.

   Son las distintas formas de reordenar el conjunto de 3 elementos; es decir, las permutaciones, que son $3!=6$. Estas son:

$$\begin{array}{lll}
f_1(a_1)=b_1, & f_1(a_2)=b_2, & f_1(a_3)=b_3\\
f_2(a_1)=b_1, & f_2(a_2)=b_3, & f_2(a_3)=b_2\\
f_3(a_1)=b_2, & f_3(a_2)=b_1, & f_3(a_3)=b_3\\
f_4(a_1)=b_2, & f_4(a_2)=b_3, & f_4(a_3)=b_1\\
f_5(a_1)=b_3, & f_5(a_2)=b_1, & f_5(a_3)=b_2\\
f_6(a_1)=b_3, & f_6(a_2)=b_2, & f_6(a_3)=b_1
\end{array}$$

2. Una de las aplicaciones afines anteriores $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es isometría si y sólo si

$$d(a_i,a_j)=d(f(a_i),f(a_j)),\qquad \forall i,j\in\{1,2,3\},$$

   donde $d(\cdot,\cdot)$ es la función distancia de $\mathbb{R}^2$.

   $\Longrightarrow$) Por ser isometría, se tiene de forma directa.

$\Longleftarrow$) Supongamos que se cumple la igualdad. Entonces, tenemos que:

$$d(a_i, a_j) = d(f(a_i), f(a_j)) \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Por tanto, f es una aplicación afín que preserva la distancia entre los vértices del triángulo. Veamos que f preserva la distancia entre dos puntos cuales quiera $p, q \in \mathbb{R}^2$. Para ello, usamos que $\mathcal{R} = \{a_1, \{\overrightarrow{a_1a_2}, \overrightarrow{a_1a_3}\}\}$ es un sistema de referencia de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, por lo que:

$$\begin{aligned} p &= a_1 + \alpha_1\overrightarrow{a_1a_2} + \alpha_2\overrightarrow{a_1a_3} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ q &= a_1 + \beta_1\overrightarrow{a_1a_2} + \beta_2\overrightarrow{a_1a_3} \qquad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \|q - p\| &= \|(\beta_1 - \alpha_1)\overrightarrow{a_1a_2} + (\beta_2 - \alpha_2)\overrightarrow{a_1a_3}\| \leqslant \\ &\leqslant |\beta_1 - \alpha_1| \cdot \|\overrightarrow{a_1a_2}\| + |\beta_2 - \alpha_2| \cdot \|\overrightarrow{a_1a_3}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= \left\|\overrightarrow{f(p)f(q)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{pq})\right\| = \\ &= \left\|(\beta_1 - \alpha_1)\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{a_1a_2}) + (\beta_2 - \alpha_2)\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{a_1a_3})\right\| \leqslant \\ &\leqslant |\beta_1 - \alpha_1| \cdot \left\|\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{a_1a_2})\right\| + |\beta_2 - \alpha_2| \cdot \left\|\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{a_1a_3})\right\| \end{aligned}$$

Además, como $d(a_i, a_j) = d(f(a_i), f(a_j))\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces:

$$\left\|\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{a_ia_j})\right\| = \left\|\overrightarrow{f(a_i)f(a_j)}\right\| = d(f(a_i), f(a_j)) = d(a_i, a_j) = \|\overrightarrow{a_ia_j}\|$$

Por tanto, tenemos que:

$$d(p, q) \leqslant d(f(p), f(q)) \leqslant d(p, q) \Longrightarrow d(p, q) = d(f(p), f(q)) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, f es una isometría.

Ejercicio 5.2.7. En $\mathbb{R}^3$, considera el plano afín $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = -1\}$. Sea $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría respecto de Π. Calcula la imagen mediante s de la recta dada por las ecuaciones $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = z - 1$.

Sabemos que $r = (1, -1, 1) + \mathcal{L}(2, -3, 1)$. Como el vector director de la recta no es un vector de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$, tenemos que son secantes. Además, como son complementarios entonces su intersección es un único punto.

En este caso, da la casualidad de que $p_0 = (1, -1, 1) \in \Pi$, por lo que:

$$r \cap \Pi = \{(1, -1, 1)\} = \{p_0\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$s(q) = p_0 + \sigma_{\overrightarrow{\Pi}}(\overrightarrow{p_0q}) \qquad \forall q \in \mathbb{R}^3$$

Como tan solo piden la imagen de la recta dada, tenemos que $q = p_0 + \lambda v$, con $v = (2, -3, 1)$, $\lambda = \mathbb{R}$. La imagen pedida es:

$$s(r) = s(p_0 + \lambda v) = p_0 + \sigma_{\vec{\Pi}}(\overrightarrow{p_0(p_0 + \lambda v)}) = p_0 + \sigma_{\vec{\Pi}}(\lambda v) = p_0 + \lambda\sigma_{\vec{\Pi}}(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tan solo es necesario calcular $\sigma_{\vec{\Pi}}(v)$. Para ello, lo descomponemos como $v = v_t + v_n$, con $v_t \in \vec{\Pi}$, $v_n \in \vec{\Pi}^\perp$. Veamos dos formas para hacerlo:

Forma 1: Más rápida y con menos cálculos, pero con un razonamiento más complejo.

Como $\vec{\Pi}^\perp = \mathcal{L}\{(1, 1, -1)\} = \mathcal{L}\{N\}$, tenemos que $v_n = \alpha N$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculemos el valor de α:

$$\langle v, N\rangle = \langle v_t, N\rangle + \alpha\langle N, N\rangle \Longrightarrow \alpha = \frac{\langle v, N\rangle}{\langle N, N\rangle} = \frac{\langle v, N\rangle}{\|N\|^2} = \frac{-2}{3}$$

Además, tenemos que $v_t = v - \alpha N$. Entonces, sabiendo la definición de simetría vectorial, tenemos que:

$$\sigma_{\vec{\Pi}}(v) = \sigma_{\vec{\Pi}}(v_t + \alpha N) = v_t - \alpha N = v - 2\alpha N = (2, -3, 1) + \frac{4}{3}(1, 1, -1) = \frac{1}{3}(10, -5, -1)$$

Forma 2: Forma usual, resolviendo un sistema de ecuaciones con 3 ecuaciones. Unos cálculos bastante más complejos (hay que resolver un sistema 3×3), pero razonamiento más sencillo.

Tenemos que $\vec{\Pi}^\perp = \mathcal{L}\{(1, 1, -1)\}$ y $\vec{\Pi} = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$. Buscamos las coordenadas de v en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 1, -1)\}$:

$$(2, -3, 1) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(1, 1, -1)$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\beta + \gamma = -3 \\ \alpha - \gamma = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/3 \\ \beta = 7/3 \\ \gamma = -2/3 \end{array}\right.$$

Por tanto, $v = \frac{1}{3}(1, 0, 1) + \frac{7}{3}(1, -1, 0) - \frac{2}{3}(1, 1, -1)$. Entonces:

$$\sigma_{\vec{\Pi}}(v) = \frac{1}{3}(1, 0, 1) + \frac{7}{3}(1, -1, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, -1) = \frac{1}{3}(10, -5, -1)$$

Por tanto, y sabiendo el valor de $\sigma_{\vec{\Pi}}(v)$, tenemos que:

$$s(r) = (1, -1, 1) + \mathcal{L}\left\{(10, -5, -1)\right\}$$

Ejercicio 5.2.8. Una aplicación afín $f : (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \to (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ entre espacios afines euclidianos se dice que preserva la ortogonalidad si para cualesquiera rectas secantes R, S en $\mathcal{A}$ tales que $R \perp S$, entonces $f(R) \perp f(S)$.

Probar que si $f : (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \to (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ es una aplicación afín biyectiva, entonces f es una semejanza (composición de un movimiento rígido y una homotecia) si, y sólo si, f preserva la ortogonalidad.

$\Longrightarrow$) Supongamos $R \perp S$, por lo que $\vec{R} \perp \vec{S}$; es decir, $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $u \in \vec{R}$, $v \in \vec{S}$. Veamos si $f(R) \perp f(S)$, o equivalentemente $\vec{f}(\vec{R}) \perp \vec{f}(\vec{S})$.

Sean $u_f \in \vec{f}(\vec{R}), v_f \in \vec{f}(\vec{S})$. Como f es una biyección, tenemos que $\vec{f}$ también lo es, por lo que $\exists_1\ u \in \vec{R}, v \in \vec{S} \mid \vec{f}(u) = u_f,\ \vec{f}(v) = v_f$.

Veamos si $\langle u_f, v_f\rangle = 0$:

$$\langle u_f, v_f\rangle = \left\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v)\right\rangle$$

Veamos ahora el valor de $\vec{f}$. Como f es la composición de un movimiento rígido con una homotecia, sea $f = g \circ h$, con h homotecia y g movimiento rígido. Entonces, tenemos que $\vec{h} = kId_{\vec{\mathcal{A}}}$, mientras que $\vec{f}$ es una isometría vectorial. Por tanto:

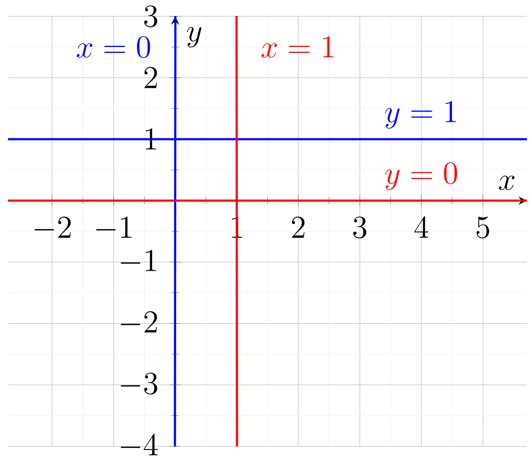
$$\langle u_f, v_f\rangle = \left\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v)\right\rangle = \left\langle \vec{g}(\vec{h}(u)), \vec{g}(\vec{h}(v))\right\rangle = \langle \vec{g}(ku), \vec{g}(kv)\rangle \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \langle ku, kv\rangle = k^2 \langle u, v\rangle = 0 \qquad \forall u_f \in \vec{R},\ v_f \in \vec{S}$$

donde en $(*)$ he aplicado que $\vec{g}$ es una isometría vectorial.

Por tanto, hemos demostrado que si f es una semejanza, entonces preserva la ortogonalidad.

$\Longleftarrow$) Supongamos que f preserva la ortogonalidad. Entonces, tenemos que $\vec{f}(\vec{R}) \perp \vec{f}(\vec{S})$ para todo $R \perp S$ rectas secantes. Veamos que $\vec{f} = k\vec{g}$, con $\vec{g}$ isometría vectorial y $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5.2.9. Encuentra, si existe, un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que lleve la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ en la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$, y también lleve la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ en la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$.



Opción 1: Composición de un giro con una traslación.

Sean las las siguientes rectas, con sus respectivas imágenes:

$$r = (0, 0) + \mathcal{L}\{(0, 1)\} \longrightarrow f(r) = (1, 1) + \mathcal{L}\{(-1, 0)\}$$
$$s = (0, 0) + \mathcal{L}\{(1, 0)\} \longrightarrow f(s) = (1, 1) + \mathcal{L}\{(0, 1)\}$$

Podemos ver que una posible solución es que f sea la composición de un giro de 90 grados centrado en el origen junto con una traslación según el vector $(1, 1)$.

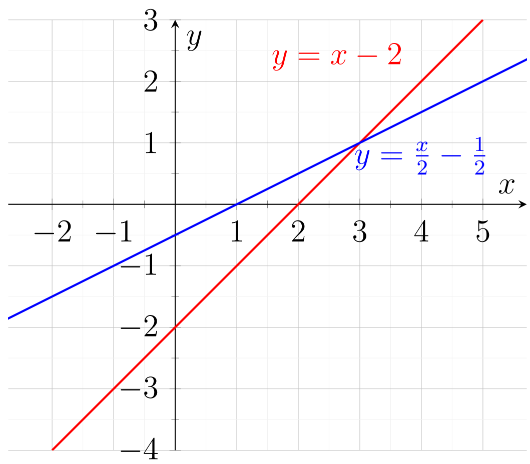
Opción 2: Simetría axial.

También podemos ver las rectas, con sus respectivas imágenes, de la siguiente forma:

$$r = (0,1) + \mathcal{L}\{(0,1)\} \longrightarrow f(r) = (0,1) + \mathcal{L}\{(-1,0)\}$$
$$s = (1,0) + \mathcal{L}\{(1,0)\} \longrightarrow f(s) = (1,0) + \mathcal{L}\{(0,-1)\}$$

Podemos ver que hay dos puntos fijos, $(0,1), (1,0)$. Tenemos que se trata de la reflexión axial respecto de $L = (0,1) + \mathcal{L}\{(1,-1)\}$; es decir, $L \equiv y = -x + 1$.

Ejercicio 5.2.10. Sean f_1, f_2 las simetrías (ortogonales) de $\mathbb{R}^2$ respecto de las rectas $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2\}$ y $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$, respectivamente. Calcula $f_1 \circ f_2$ y descríbela geométricamente.



En primer lugar, como la composición de isometrías es una isometría, tenemos que $f_1 \circ f_2$ es una isometría. Además, como f_1, f_2 son simetrías (movimientos inversos), tenemos que $|f_1 \circ f_2| = |f_1||f_2| = 1$, por lo que se trata de un movimiento directo. Además, $p = (3,1) \in R_1 \cap R_2$. Por lo que $p \in \mathcal{P}_{f_1 \circ f_2}$.

Tenemos que $R_1 = p + \mathcal{L}\{(1,1)\}$ y $R_2 = p + \mathcal{L}\{(2,1)\}$, por lo que:

$$R_{1_p}^{\perp} = p + \mathcal{L}\{(1,-1)\} \qquad\qquad R_{2_p}^{\perp} = p + \mathcal{L}\{(2,-1)\}$$

Por tanto, sea $\mathcal{R}_1 = \{p, \mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,-1)\}\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{p, \mathcal{B}_2 = \{(2,1),(-1,2)\}\}$ sistemas de referencia ortogonales de $\mathbb{R}^2$. Entonces, tenemos que:

$$M(f_1, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad\qquad M(f_2, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Buscamos expresar las matrices de f_1 y f_2 en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}_u\}$. Tenemos que:

$$M(f_1, \mathcal{R}) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}) \cdot M(f_1, \mathcal{R}_1) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_1) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$M(f_2, \mathcal{R}) = M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}) \cdot M(f_2, \mathcal{R}_2) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_2) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(f_1 \circ f_2, \mathcal{R}) = M(f_1, \mathcal{R}) \cdot M(f_2, \mathcal{R}) = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Por tanto, tenemos que es un movimiento directo con puntos fijos en el plano. Como $f_1 \circ f_2 \neq Id_{\mathbb{R}^2}$, entonces se trata de un giro de centro su punto fijo, $p = (3, 1)$. Para calcular el ángulo no orientado, sabemos que el ángulo de giro cumple que:

$$2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f_1 \circ f_2}, \mathcal{B}_u\right)\right) = \frac{8}{5} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0{,}64 \text{ rad}$$

Ejercicio 5.2.11. Considera un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ de dimensión 3, y sea f un movimiento rígido de $\mathbb{E}$ tal que $f(1, 0, 1) = (2, -3, 1)$ en coordenadas de un sistema de referencia euclídeo fijo. Si sabemos que f es la simetría respecto de un plano, calcula dicho plano.

Consideramos en primer lugar el punto medio entre $p = (1, 0, 1)$ y su imagen $f(p) = (2, -3, 1)$, $m_{pf(p)} = (3/2, -3/2, 1)$. Por tanto, el plano buscado es el que pasa por $m_{pf(p)}$ y es perpendicular a $\overrightarrow{pf(p)}$; es decir, $\pi = m_{pf(p)} + \mathcal{L}\{\overrightarrow{pf(p)}\}^\perp$.

Buscamos ahora los vectores directores del plano. Tenemos que $\overrightarrow{pf(p)} = (1, -3, 0)$ es ortogonal al plano, por lo que buscamos dos vectores perpendiculares a él. Como $(0, 0, 1)$ y $(3, 1, 0)$ son ortogonales a $\overrightarrow{pf(p)}$ y los tres vectores forman base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathcal{L}\{\overrightarrow{pf(p)}\}^\perp = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (3, 1, 0)\}$. Por tanto, el plano buscado es:

$$\pi = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 1\right) + \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (3, 1, 0)\}$$

Ejercicio 5.2.12. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión 2, y sean R_1 y R_2 dos rectas de $\mathcal{A}$. Prueba que siempre es posible encontrar un movimiento rígido $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que lleve R_1 en R_2. Estudia de qué tipo es f, según la posición relativa de R_1 y R_2. ¿Se puede elegir siempre directo? ¿E inverso?

Hay tres opciones, según la posición relativa de R_1 y R_2:

1. $R_1 \cap R_2 = R_1 = R_2$. Es decir, las rectas son coincidentes.

   En este caso, hay muchas posibilidades. El caso más sencillo es que $f = Id_{\mathcal{A}}$, siendo f un movimiento directo. También puede ser la simetría respecto de R_1, siendo f un movimiento inverso.

2. $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Es decir, las rectas son paralelas.

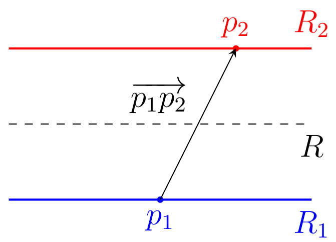
   

   Figura 5.3: Distintas opciones en el caso de que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

   En este caso tenemos que no hay puntos fijos.

   Sea $p_1 \in R_1$ y $p_2 \in R_2$. Entonces, el caso más sencillo es $f = t_{\overrightarrow{p_1p_2}}$, siendo f un movimiento directo. Tenemos que:

   $$f(R_1) = t_{\overrightarrow{p_1p_2}}\left(p_1 + \overrightarrow{R_1}\right) = p_2 + \overrightarrow{R_1} = R_2$$

   También puede ser la simetría respecto de la recta R, recta que se encuentra entre R_1 y R_2 (movimiento inverso). Si $p = m_{p_1p_2}$, entonces $R = p + \overrightarrow{R_1}$.

3. $R_1 \cap R_2 = \{p\}$. Es decir, las rectas son secantes.

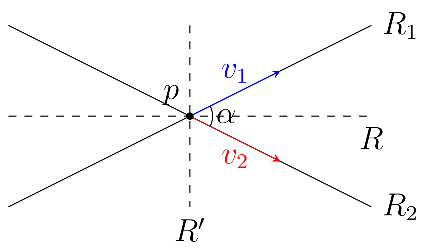
   

   Figura 5.4: Distintas opciones en el caso de que $R_1 \cap R_2 = \{p\}$.

   En este caso, como movimiento directo, la única opción es el giro de centro p y ángulo orientado $\alpha = \measuredangle_o(R_1, R_2)$.

   Como movimientos inversos, podemos considerar cualquiera de la simetría respecto de cualquiera de las dos bisectrices entre R_1 y R_2 (estas son, en el dibujo, R y R').

Por tanto, siempre se puede elegir una isometría directa y otra inversa que lleve R_1 en R_2.

Ejercicio 5.2.13. Sea $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo, y sean $p, q \in \mathbb{E}$, con $p \neq q$. Demuestra que existe una única simetría σ_H respecto de un hiperplano $H \subset \mathbb{E}$ tal que $\sigma_H(p) = q$.

Sea el vector $\overrightarrow{pq}$. Entonces, el hiperplano buscado es el que pasa por m_{pq} y es perpendicular a $\overrightarrow{pq}$; es decir, $H = m_{pq} + \mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\}^\perp$.

Efectivamente, tenemos que:

$$\sigma_H(p) = \sigma_H\left(m_{pq} + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp}\right) = m_{pq} - \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = q$$

Veamos ahora que es única. Supongamos que existe otro hiperplano H' tal que $\sigma_{H'}(p) = q$. Veamos que $H = H'$. Como $\sigma_{H'}(p) = q$, tenemos que $m_{pq} = \pi_{H'}(p)$, por lo que $\overrightarrow{p\,m_{pq}} \perp \overrightarrow{H'}$ y $m_{pq} \in H'$. No obstante, $\overrightarrow{p\,m_{pq}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$, por lo que $\overrightarrow{pq} \perp \overrightarrow{H'}$, y por tanto $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{H'}^\perp$. Como H' es un hiperplano, entonces $\overrightarrow{H'}^\perp = \mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\}^\perp$. Por tanto, $H' = m_{pq} + \mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\}^\perp = H$.

Ejercicio 5.2.14. Sean R_1 y R_2 dos rectas que se cruzan en un espacio afín euclídeo tridimensional $\mathbb{E}$. Demuestra que existe una única recta afín R que interseca de manera ortogonal a R_1 y R_2. Prueba además que la distancia de R_1 a R_2 es exactamente la distancia entre los puntos dados por $R_1 \cap R$ y $R_2 \cap R$.

Sea $R_1 = p_1 + \mathcal{L}\{v_1\}$ y $R_2 = p_2 + \mathcal{L}\{v_2\}$. En el Teorema 2.2, hemos visto que existen $q_1 \in R_1$ y $q_2 \in R_2$ tales que $\overrightarrow{q_1q_2} \perp \overrightarrow{R_1}$ y $\overrightarrow{q_1q_2} \perp \overrightarrow{R_2}$. Además, como $\overrightarrow{R_1} \cap \overrightarrow{R_2} = \{0\}$, tenemos que dichos puntos son únicos.

Por tanto, la recta buscada es $R = q_1 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{q_1q_2}\} = q_2 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{q_1q_2}\}$.

En el corolario de dicho Teorema, el Corolario 2.2.1, se vio que $d(R_1, R_2) = d(q_1, q_2)$.

Ejercicio 5.2.15. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que viene dada por $f(x, y) = (y - 2, x + 1)$. ¿Es f un movimiento rígido? En tal caso, clasifícalo.

Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(2)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Por tanto, f es una isometría. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = -1$, tenemos que f es una isometría inversa en el plano. Calculemos sus puntos fijos:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, tenemos que:

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, no hay puntos fijos, por lo que se trata de una simetría axial con desplazamiento. Calculemos en primer lugar el eje de simetría, $\overrightarrow{L}$. Como $\overrightarrow{f}=\sigma_{\overrightarrow{L}}$, tenemos que $\overrightarrow{L}=V_1$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)-Id\right)(x,y)^t=0\right\} = \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)\right\} = \mathcal{L}\{(1,1)\}
\end{aligned}$$

Calculamos ahora un punto de $\overrightarrow{L}$. Tenemos que $m_{pf(p)}\in L$ para todo $p\in\mathbb{R}^2$. En particular, para $p=(0,0)$, tenemos que $f(p)=(-2,1)$, por lo que:

$$m_{0f(0)}=\left(\frac{-2}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)\in L$$

Por tanto, tenemos que el eje de la simetría es:

$$L=\left(-1,\frac{1}{2}\right)+\mathcal{L}\{(1,1)\}$$

Por último, calculamos el desplazamiento. Para ello, tomamos un punto cualquiera de L, por ejemplo, $p=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, y tenemos que $f(p)=(-3/2,0)$. Por tanto, el vector de desplazamiento es:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{pf(p)}=\left(\frac{-3}{2}-(-1),0-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}(1,1)$$

Ejercicio 5.2.16. Demostrar que si p y q son dos puntos de un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$, entonces siempre existe un movimiento rígido $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ tal que $f(p)=q$. De forma más general, probar que si $\mathbb{E}$ tiene dimensión finita y S, S' son dos subespacios afines de $\mathbb{E}$ de dimensión m, entonces existe un movimiento rígido $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ tal que $f(S)=S'$.

Dados dos puntos $p,q\in\mathbb{E}$, consideramos el vector $\overrightarrow{pq}$. Entonces, el movimiento buscado es la traslación según el vector $\overrightarrow{pq}$, ya que:

$$t_{\overrightarrow{pq}}(p)=p+\overrightarrow{pq}=q$$

En el caso general, si $S=p+\mathcal{L}\{v_1,\dots,v_m\}$ y $S'=p'+\mathcal{L}\{v_1',\dots,v_m'\}$, ambas bases ortonormales, entonces buscamos un movimiento rígido f tal que $f(p)=p'$ y $\overrightarrow{f}(v_i)=v_i'$ para todo $i=1,\dots,m$.

Consideramos los siguientes sistemas de referencia euclídeos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{p,\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n\}\} \\
\mathcal{R}' &= \{p',\mathcal{B}'=\{v_1',\dots,v_m',v_{m+1}',\dots,v_n'\}\}
\end{aligned}$$

donde v_i, v_i' para $i = m+1, \dots, n$ son vectores ortonormales que completan las bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ respectivamente. Entonces, sea la aplicación $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ cuya matriz asociada en dichos sistemas de referencia es:

$$M(\overrightarrow{f}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Id_n \end{array}\right)$$

Tenemos que $f(p) = f(0_\mathcal{R}) = 0_{\mathcal{R}'} = p'$. Además, $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{S}\right) = \overrightarrow{S'}$, y por tanto tenemos que $f(S) = S'$, como queríamos demostrar.

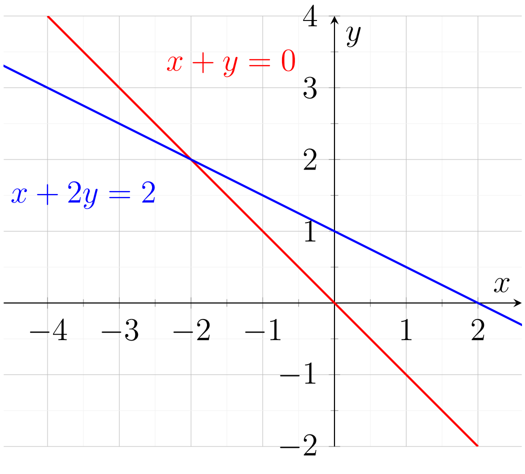
Ejercicio 5.2.17. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que viene dada por $f(x, y) = (2y - 1, -2x + 3)$. ¿Es f un movimiento rígido? En tal caso, clasifícalo.

Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(2)$. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = 4 \neq \pm 1$, tenemos que f no es una isometría.

Ejercicio 5.2.18. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las isometrías dadas, respectivamente, por las simetrías respecto de las rectas de ecuación $x + y = 0$ y $x + 2y = 2$.



1. Calcula explícitamente f_1 y f_2 en coordenadas usuales.

   Sea $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2\}$.

   Tenemos que $R_1 = (-2, 2) + \mathcal{L}\{(1, -1)\}$ y $R_2 = (-2, 2) + \mathcal{L}\{(2, -1)\}$, por lo que:

   $$R_1{}^{\perp}_{(-2,2)} = (-2, 2) + \mathcal{L}\{(1, 1)\} \qquad R_2{}^{\perp}_{(-2,2)} = (-2, 2) + \mathcal{L}\{(1, 2)\}$$

   Por tanto, sea $\mathcal{R}_1 = \{(-2, 2), \mathcal{B}_1 = \{(1, -1), (1, 1)\}\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(-2, 2), \mathcal{B}_2 = \{(2, -1), (1, 2)\}\}$ sistemas de referencia ortogonales de $\mathbb{R}^2$. Entonces, tenemos que:

$$M(f_1,\mathcal{R}_1)=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&-1\end{array}\right)=M(f_2,\mathcal{R}_2)$$

Para calcular las matrices de f_1 y f_2 en el sistema de referencia $\mathcal{R}_0=\{(0,0),\mathcal{B}_u\}$, tenemos:

$$\begin{aligned}M(f_1,\mathcal{R}_0)&=M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(f_1,\mathcal{R}_1)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_1)=\\&=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline -2&1&1\\2&-1&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline -2&1&1\\2&-1&1\end{array}\right)^{-1}=\\&=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&0&-1\\0&-1&0\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(f_2,\mathcal{R}_0)&=M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)\cdot M(f_2,\mathcal{R}_2)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_2)=\\&=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline -2&2&1\\2&-1&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline -2&2&1\\2&-1&2\end{array}\right)^{-1}=\\&=\frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 4&3&-4\\8&-4&-3\end{array}\right)\end{aligned}$$

2. Clasifica el movimiento rígido $g=f_1\circ f_2$.

   En primer lugar, como la composición de isometrías es una isometría, tenemos que $g=f_1\circ f_2$ es una isometría. Por tanto:

$$M(g,\mathcal{R}_0)=M(f_1\circ f_2,\mathcal{R}_0)=M(f_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(f_2,\mathcal{R}_0)=\frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline -8&4&3\\-4&-3&4\end{array}\right)$$

   Además, como $|g|=|f_1\circ f_2|=|f_1|\cdot|f_2|=1$, tenemos que g es una isometría directa en el plano. Además, como $(-2,2)\in R_1\cap R_2$, tenemos que $(-2,2)\in\mathcal{P}_g$, por lo que g es un movimiento directo con puntos fijos en el plano. Como $g\neq Id_{\mathbb{R}^2}$, entonces se trata de un giro de centro su punto fijo, $p=(-2,2)$. Para calcular el ángulo no orientado, sabemos que el ángulo de giro cumple que:

$$2\cos\theta=tr\left(M\left(\overrightarrow{g},\mathcal{B}_u\right)\right)=\frac{1}{5}(4+4)=\frac{8}{5}\Longrightarrow\theta=\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\approx 0{,}64 \text{ rad}$$

Ejercicio 5.2.19. Demuestra que las siguientes aplicaciones son movimientos rígidos del plano y clasifícalos.

1. $f(x,y)=\left(3-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4y}{5},1-\dfrac{4x}{5}-\dfrac{3y}{5}\right).$

   Tenemos que:
   $$M(f,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & -4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

   Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\in O(2)$. Tenemos que:
   $$M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)^t=\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Id_2$$

   Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es una isometría y por tanto, también lo es f. Como $|f|=1$, tenemos que f es una isometría directa en el plano. Calculamos sus puntos fijos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
   $$\begin{pmatrix} -3/5-1 & 4/5 \\ -4/5 & -3/5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8/5 & 4/5 \\ -4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Equivalentemente,
   $$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que solo hay un punto fijo, el punto $o=\frac{1}{4}(7,-1)$. Por tanto, se traza de un giro en el plano centrado en el punto o. Para calcular el ángulo no orientado sabemos que:
   $$2\cos\theta=tr\left(M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\right)=-\frac{6}{5}\Longrightarrow\cos\theta=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}\Longrightarrow\theta\approx 2{,}21\text{ rad}$$

   Por tanto, se trata de un giro en el plano centrado en el punto $o=\frac{1}{4}(7,-1)$ y de ángulo $\theta\approx 2{,}21$ rad.

2. $f(x,y)=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}y}{2}+1,\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\dfrac{y}{2}+2\right).$

   Tenemos que:
   $$M(f,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

   Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\in O(2)$. Tenemos que:
   $$M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)^t=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Id_2$$

Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es una isometría y por tanto, también lo es f. Como $|f| = 1$, tenemos que f es una isometría directa en el plano. Calculamos sus puntos fijos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 - 1 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que solo hay un punto fijo, el punto

$$o = \frac{1}{2}(-2\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 2)$$

Por tanto, se traza de un giro en el plano centrado en el punto o. Para calcular el ángulo no orientado sabemos que:

$$2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right) = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Por tanto, se trata de un giro en el plano de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad y centrado en el punto $o = \frac{1}{2}(-2\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 2)$.

3. $f(x, y) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + 1, \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} - 1\right)$.

   Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

   Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(2)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

   Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es una isometría y por tanto, también lo es f. Como $|f| = -1$, tenemos que f es una isometría inversa en el plano. Calculamos sus puntos fijos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} -1/2 - 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que f no tiene puntos fijos, ya que ese sistema es un SI. Por tanto, tenemos que es una simetría axial con deslizamiento.

Calculamos en primer lugar su eje de simetría L, buscando primero $\overrightarrow{L}$. Como $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{L}}$, tenemos que $\overrightarrow{L} = V_1$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) - Id)(x,y)^t = (0,0)^t\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1/2 - 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{\sqrt{3}}{3}y \right\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)\right\}
\end{aligned}$$

Falta ahora calcular un punto $(x,y) \in S$. Para ello, hay dos opciones:

Opción 1: Método General. Este método también es válido para los movimientos helicoidales.

Sea $(x,y) \in L$, por lo que $\overrightarrow{(x,y)f(x,y)} \in \overrightarrow{L}$. Aplicando esta condición, tenemos que:

$$\overrightarrow{(x,y)f(x,y)} = f(x,y) - (x,y) = \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}y}{2} + 1, \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} - 1\right) \in \overrightarrow{L} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}y}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} - 1\right) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}y}{2} + 1 = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}y - \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -2x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación implícita del eje en el sistema de referencia $\mathcal{R}_0$. Por tanto, tenemos que un punto del eje es $(1/2, -1/2)$.

Opción 2 : Método concreto para las reflexiones con deslizamiento.

Tenemos que $m_{pf(p)} \in L$ por ser una simetría con desplazamiento. Por tanto, dado $p = (0,0)$, tenemos que $f(p) = (1,-1)$, por lo que:

$$m_{pf(p)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in S$$

Es decir,

$$L = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \mathcal{L}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)\right\}$$

Falta ahora por calcular el vector de desplazamiento, tenemos que este se calcula como $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in L$.

$$v = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{-3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

4. $f(x,y) = \left(\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} + 2, \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} + 5\right)$.

Tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3/5 & 4/5 \\ 5 & 4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) \in O(2)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es una isometría y por tanto, también lo es f. Como $|f| = -1$, tenemos que f es una isometría inversa en el plano. Calculamos sus puntos fijos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3/5 - 1 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que f no tiene puntos fijos, ya que ese sistema es un SI. Por tanto, tenemos que es una simetría axial con deslizamiento.

Sea L el eje de simetría, y calculemos $\overrightarrow{L}$. Como $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{L}}$, tenemos que $\overrightarrow{L} = V_1$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) - Id)(x,y)^t = (0,0)^t\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 2y = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{(2,1)\right\}
\end{aligned}$$

Busquemos ahora un punto de L. tenemos que $m_{pf(p)} \in L$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Sea $p = (0,0)$, $f(p) = (2,5)$. Tenemos que:

$$m_{pf(p)} = (1, 5/2) \in L$$

Por tanto, el eje es $L = (1, 5/2) + \mathcal{L}\left\{(2,1)\right\}$. El vector de desplazamiento es $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para todo $p \in L$. Entonces:

$$v = \overrightarrow{pf(p)} = f(1, 5/2) - (1, 5/2) = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Ejercicio 5.2.20. Demuestra que las siguientes aplicaciones son movimientos rígidos del espacio y clasifícalos.

1. $f(x, y, z) = (2 + y, x, 1 + z)$.

   Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(3)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

   Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría, y por tanto f lo es también. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = -1$, tenemos que se trata de una isometría inversa. Calculemos los puntos fijos:

$$-\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, f no tiene puntos fijos, por lo que se trata de una simetría especular con deslizamiento. Calculemos el plano de simetría π. Obtenemos en primer lugar $\overrightarrow{\pi}$, que como $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{\pi}}$, tenemos que es V_1:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\pi} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\right\} \end{aligned}$$

   Busquemos ahora un punto de π. tenemos que $m_{pf(p)} \in \pi$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Sea $p = (0, 0, 0)$, $f(p) = (2, 0, 1)$. Tenemos que:

$$m_{pf(p)} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \in \pi$$

   Por tanto, el plano de simetría es $\pi = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) + \mathcal{L}\left\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\right\}$. El vector de desplazamiento es $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para todo $p \in \pi$. Entonces:

$$v = \overrightarrow{pf(p)} = f\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) - \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right) - \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) = (1, 1, 1)$$

2. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}z}{2} + 2, y+2, \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{z}{2} + 2\right).$

Tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) \in O(3)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = Id_3$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría, y por tanto f lo es también. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = 1$, tenemos que se trata de una isometría directa. Calculemos los puntos fijos:

$$-\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, f no tiene puntos fijos, por lo que se trata de una traslación o de un movimiento helicoidal. Como $\overrightarrow{f} \neq Id_{\mathbb{R}^3}$, tenemos que f es un movimiento helicoidal. Busquemos el eje de giro L, el ángulo de giro θ, y el vector de deslizamiento v.

Como $\overrightarrow{f} = G_{\theta,\overrightarrow{L}}$, tenemos que $\overrightarrow{L} = V_1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right) - Id)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}\{(0,1,0)\} \end{aligned}$$

Para obtener un punto del eje, sabemos que dado $(x,y,z) \in L$, entonces $\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} \in \overrightarrow{L}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} &= f(x,y,z) - (x,y,z) = \\ &= \left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}z}{2} + 2, 2, \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{z}{2} + 2\right) \in \overrightarrow{L} \iff \\ &\iff -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}z}{2} + 2 = 0 = \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{z}{2} + 2 \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{3} \\ z = 1+\sqrt{3} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que el eje es:

$$L = (1-\sqrt{3}, 0, 1+\sqrt{3}) + \mathcal{L}\{(0,1,0)\}$$

Para calcular el ángulo de giro, sabemos que:

$$2\cos\theta + 1 = tr\left(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right) = 2 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por último, tan solo falta calcular el vector de desplazamiento. Tenemos que $v = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in L$. Tomando $p = (1-\sqrt{3}, 0, 1+\sqrt{3})$, tenemos que $f(p) = (1-\sqrt{3}, 2, 1+\sqrt{3})$. Por tanto,

$$v = (0, 2, 0)$$

3. $f(x,y,z) = \left(-\dfrac{4x}{5} + \dfrac{3z}{5} + 3, y, \dfrac{3x}{5} + \dfrac{4z}{5} - 1\right)$.

Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3/5 & 0 & 4/5 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(3)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = Id_3$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría, y por tanto f lo es también. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = -1$, tenemos que se trata de una isometría inversa. Calculemos los puntos fijos:

$$-\begin{pmatrix} -9/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}z$$

Es decir, f tiene un plano de puntos fijos, por lo que se trata de una simetría especular. El plano es:

$$\pi = \left(\frac{5}{3}, 0, 0\right) + \mathcal{L}\{(0,1,0), (1,0,3)\}$$

4. $f(x,y,z) = \left(-\dfrac{4x}{5} + \dfrac{3z}{5} + 3, y+4, \dfrac{3x}{5} + \dfrac{4z}{5} - 1\right)$.

Tenemos que $f(x,y,z) = f'(x,y,z) + (0,4,0)$, donde f' es la reflexión especular del apartado anterior.

Por tanto, tenemos que se trata una reflexión especular en el plano $\pi = \left(\frac{5}{3}, 0, 0\right) + \mathcal{L}\{(0,1,0), (1,0,3)\}$ con deslizamiento según el vector $v = (0,4,0)$.

5. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{2y}{\sqrt{5}} + \dfrac{z}{\sqrt{5}}, \dfrac{\sqrt{5}x}{3} - \dfrac{2y}{3\sqrt{5}} + \dfrac{4z}{3\sqrt{5}}, -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{2z}{3}\right)$.

 Tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

 Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(3)$. Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

 Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría, y por tanto f lo es también. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = -1$, tenemos que se trata de una isometría inversa. Además, como $f(0,0,0) = (0,0,0)$, sabemos que al menos hay un punto fijo. Veamos si hay más:

$$-\begin{pmatrix} -1 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} - 1 & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 Como el rango de la matriz de coeficientes es 3, tenemos que el sistema es SCD, por lo que tan solo hay una solución, que sabemos que es el origen. Por tanto, se trata de un giro con simetría. Sabemos que el ángulo de giro θ cumple la siguiente condición:

$$2\cos\theta - 1 = tr(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{25 - 2\sqrt{5}}{30} \Longrightarrow \theta \approx 0{,}817 \text{ rad.}$$

 Calculemos ahora el eje L. Sabemos que $\overrightarrow{f}$ es un giro con simetría vectoriales, y $\overrightarrow{L} = V_{-1}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) + Id)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} + 1 & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}\left\{\left(\sqrt{5}+4, -2\sqrt{5}-3, 1\right)\right\} \end{aligned}$$

 Por tanto, tenemos que el eje de giro es:

$$L = (0,0,0) + \mathcal{L}\left\{\left(\sqrt{5}+4, -2\sqrt{5}-3, 1\right)\right\}$$

6. $f(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{5}x}{3} - \frac{2y}{3\sqrt{5}} + \frac{4z}{3\sqrt{5}}, \frac{2y}{\sqrt{5}} + \frac{z}{\sqrt{5}}, -\frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3}\right).$

Tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, para ver si f es una isometría (equivalentemente vemos que $\overrightarrow{f}$ lo es) basta con probar que $M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) \in O(3)$. Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 & 0 & -2/3 \\ -2/3\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -1/3 \\ 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Por tanto, tenemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría, y por tanto f lo es también. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = 1$, tenemos que se trata de una isometría directa. Además, como $f(0,0,0) = (0,0,0)$, sabemos que al menos hay un punto fijo. Veamos si hay más:

$$-\begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 - 1 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} - 1 & 1/\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-\sqrt{5}-3}{2} \cdot \lambda \\ y = (\sqrt{5}+2) \cdot \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que hay una recta de puntos fijos,

$$L = (0,0,0) + \mathcal{L}\left\{\left(\frac{-\sqrt{5}-3}{2}, \sqrt{5}+2, 1\right)\right\}$$

Veamos ahora el ángulo de giro θ. Tenemos que:

$$2\cos\theta + 1 = tr\left(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right) = \frac{10 + 11\sqrt{5}}{15} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{-5 + 11\sqrt{5}}{30} \Longrightarrow \theta \approx 0{,}86 \text{ rad.}$$

Ejercicio 5.2.21. Calcula en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ el giro centrado en el punto $c = (1,2)$ y de ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

Sea el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{c, \mathcal{B}_u\}$, y sea $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Entonces, tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Para expresarlo en coordenadas usuales, tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\
&= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2\sqrt{3}+3/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}+6/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.2.22. Calcula la simetría con deslizamiento respecto de la recta dada por la ecuación $L \equiv x - y = 1$ de $\mathbb{R}^2$ y vector de desplazamiento $v = (-2,-2)$.

Tenemos que $L = (1,0)+\mathcal{L}\{(1,1)\}$, por lo que $\overrightarrow{L}^\perp = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$. Sea entonces el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(1,0),\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}\}$. Además, $f(1,0) = (1,0) + (-2,-2) = (-1,-2)$. Calculamos sus coordenadas en $\mathcal{R}$:

$$(-1,-2) = (1,0) + \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (1+\alpha+\beta, \alpha-\beta)$$

Por tanto, $\alpha = -2$, $\beta = 0$, por lo que $f(1,0) = (-2,0)_\mathcal{R}$. Entonces,

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Para expresarlo en coordenadas usuales (aunque en este caso no lo piden), tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\
&= M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)^{-1} = \\
&= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.2.23. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín dada por

$$f(-1,-1) = (0,0), \qquad f(-1,-2) = (1,0), \qquad f(0,-1) = (0,1).$$

Demuestra que f es un movimiento rígido y clasifícalo.

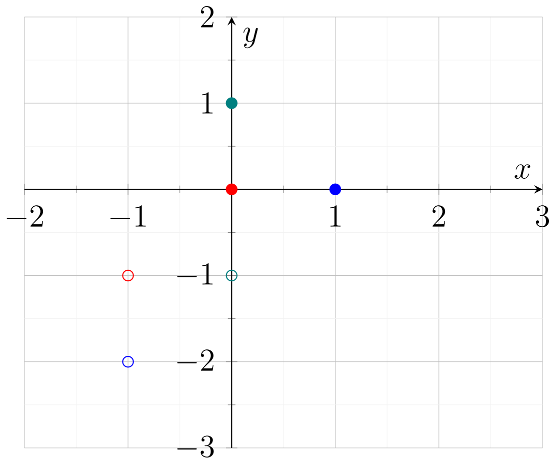


Figura 5.5: Representación de los puntos dados por el enunciado.

Definimos en primer lugar el sistema de referencia dado por:

$$\mathcal{R} = \{(-1,-1), (-1,-2), (0,-1)\}.$$

Tenemos que su base asociada es $\mathcal{B} = \{(0,-1), (1,0)\}$. Calculemos las imágenes de los vectores de la base mediante $\overrightarrow{f}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}(0,-1) &= \overrightarrow{f(-1,-1)f(-1,-2)} = \overrightarrow{(0,0)(1,0)} = (1,0)\\ \overrightarrow{f}(1,0) &= \overrightarrow{f(-1,-1)f(0,-1)} = \overrightarrow{(0,0)(0,1)} = (0,1)\end{aligned}$$

Tenemos que su matriz asociada es:

$$M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En el sistema de referencia usual, tenemos que es:

$$\begin{aligned}M(f,\mathcal{R}_0) &= M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) =\\ &= M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} =\\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que cumple las tres condiciones dadas por el enunciado. Como $\mathcal{R}_0$ es un sistema de referencia ortonormal, tenemos que para comprobar que f es un movimiento rígido basta con comprobar que $M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\in O(2)$. Tenemos que:

$$M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Id_2$$

Por tanto, tenemos que es una isometría. Como $\left|\overrightarrow{f}\right| = 1$, tenemos que f es una isometría directa. Calculemos los puntos fijos:

$$-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Es decir, es una isometría directa con un único punto fijo, por lo que se trata de un giro de ángulo $\theta \neq 0$. Calculemos su ángulo de giro:

$$2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right) \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Es decir, se trata de giro centrado en el punto $(-1, 0)$ y de ángulo $\frac{\pi}{2}$ rad.

Ejercicio 5.2.24. Sea $\mathcal{R}$ el sistema de referencia de $\mathbb{R}^2$ con origen en el punto $(1, 1)$ y base asociada $\{(1, 1), (-1, 1)\}$. Consideremos la aplicación afín f tal que, si (x, y) son las coordenadas de un punto genérico p en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, entonces las coordenadas de $f(p)$ en el sistema de referencia usual vienen dadas por

$$f(p)_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

¿Es f un movimiento rígido? En caso afirmativo, clasifícalo.

Tenemos que $\mathcal{R} = \{(1, 1), \mathcal{B}\}$, con $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. La matriz asociada de f viene dada por:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En el sistema de referencia usual, tenemos que es:

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_0) &= M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \\ &= M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Claramente, $\overrightarrow{f}$ es una isometría; y como $\left|\overrightarrow{f}\right| = -1$, tenemos que es una isometría inversa. Calculemos sus puntos fijos:

$$-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que hay una recta de puntos fijos: $L \equiv x - y = -2$. Es decir, $L = (-1, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1)\}$. Como f es una isometría inversa, tenemos que f es una reflexión axial sobre la recta L.

Ejercicio 5.2.25. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las isometrías dadas respectivamente por las simetrías respecto de los planos de ecuaciones $x + y = 1$ y $x - z = 2$.

1. Calcula explícitamente f_1 y f_2 en coordenadas usuales.

   Sea f_1 la simetría especular respecto de $\pi_1 = (0, 1, 1) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$. Tenemos que $\overrightarrow{\pi_1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}$; por lo que consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(0, 1, 1), \mathcal{B}\}$, con $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Tenemos que:

   $$M(f_1, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

En las coordenadas usuales, esta es:

$$M(f_1,\mathcal{R}_0)=M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)M(f_1,\mathcal{R})M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R})=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&1\\1&-1&0&1\\1&0&1&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&1\\1&-1&0&1\\1&0&1&0\end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

Sea f_2 la simetría especular respecto de $\pi_2=(1,0,-1)+\mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Tenemos que $\overrightarrow{\pi_2}^{\perp}=\mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$; por lo que consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R}'=\{(1,0,-1),\mathcal{B}'\}$, con $\mathcal{B}'=\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}$. Tenemos que:

$$M(f_2,\mathcal{R}')=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

En las coordenadas usuales, esta es:

$$M(f_2,\mathcal{R}_0)=M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}',\mathcal{R}_0)M(f_2,\mathcal{R}')M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}')=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&0&1\\0&0&1&0\\-1&1&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 1&1&0&1\\0&0&1&0\\-1&1&0&-1\end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 2&0&0&1\\0&0&1&0\\-2&1&0&0\end{array}\right)$$

2. Clasifica el movimiento rígido $g=f_1\circ f_2$.

   Tenemos que $|g|=|f_1|\cdot|f_2|=1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio. Además, tenemos que la recta dada por la intersección de ambos planos es una recta de puntos fijos. Es decir, la recta L dada por:

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{l}x+y=1\\x-z=2\end{array}\right\}=(0,1,-2)+\mathcal{L}\{(1,-1,1)\}$$

   es una recta de puntos fijos. Como $\overrightarrow{f}\neq Id_{\mathbb{R}^3}$, tenemos que no hay más puntos fijos, por lo que se trata de un giro sobre el eje L. Para obtener el ángulo de giro, obtenemos $M(\overrightarrow{g},\mathcal{B}_u)$:

$$M(\overrightarrow{g},\mathcal{B}_u)=M(\overrightarrow{f_1\circ f_2},\mathcal{B}_u)=M(\overrightarrow{f_1}\circ\overrightarrow{f_2},\mathcal{B}_u)=M(\overrightarrow{f_1},\mathcal{B}_u)\cdot M(\overrightarrow{f_2},\mathcal{B}_u)=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Por tanto, si θ es el ángulo de giro, tenemos que:

$$1 + 2\cos\theta = tr(M(\overrightarrow{g}, \mathcal{B}_u)) = 0 \Longrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Ejercicio 5.2.26. Calcula en coordenadas usuales la isometría de $\mathbb{R}^3$ dada por el movimiento helicoidal alrededor de la recta $R = (1,2,1) + \mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$ con giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ y vector de traslación $v = (-2,0,2)$.

Sea $\overrightarrow{R}^\perp = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,0,1)\}$. Consideramos entonces el sistema de referencia dado por $\mathcal{R} = \{(1,2,1),\mathcal{B}\}$, con $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$. Calculemos las coordenadas de v en $\mathcal{B}$:

$$v = (-2,0,2) = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

Entonces, $\alpha = -2\sqrt{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, por lo que $v = (-2\sqrt{2},0,0)_\mathcal{B}$. Entonces, tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para calcular las coordenadas usuales, tenemos que:

$$\begin{aligned} M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0) \cdot M(f,\mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\ &= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0) \cdot M(f,\mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \\ &\qquad \cdot \sqrt{2}\left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{2}-2 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 2\sqrt{2}+4 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}+6 & -1 & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.2.27. Clasifica el siguiente movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x+2y+z+2, x-2y+2z-2, 2x-y-2z-4)$$

y calcula sus elementos notables (o geométricos).

Tenemos que su matriz asociada en el sistema de referencia usual es:

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|f| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Calculemos sus puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que f es una isometría directa en el espacio con una recta de puntos fijos, por lo que se trata de un giro. Tenemos que el eje de giro es la recta L dada por:

$$L = (2, 0, 0) + \mathcal{L}\left\{(3, 1, 1)\right\}$$

Calculemos ahora el ángulo de giro no orientado $\theta \in [0, \pi]$. Como la traza de la matriz queda invariantes por semejanza, tenemos que:

$$1 + 2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right) = \frac{1}{3}(2 - 2 - 2) \Longrightarrow \cos\theta = -\frac{5}{6} \Longrightarrow \theta \approx 2{,}55 \text{ rad}$$

Ejercicio 5.2.28. Calcula la simetría con deslizamiento respecto del plano de ecuación $x + y + z = 1$ de $\mathbb{R}^3$ y con vector de traslación $v = (2, -1, -1)$.

Tenemos que el plano de simetría es $\pi = (1, 0, 0) + \mathcal{L}\left\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\right\}$. Entonces, $\overrightarrow{\pi}^\perp = \mathcal{L}\left\{(1, 1, 1)\right\}$. Consideramos entonces el sistema de referencia dado por:

$$\mathcal{R} = \left\{(1, 0, 0), \mathcal{B}\right\}, \text{ con } \mathcal{B} = \left\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\right\}$$

Calculamos las coordenadas de v en $\mathcal{B}$:

$$v = (2, -1, -1) = \alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (1, 0, -1) + \gamma \cdot (1, 1, 1)$$

Igualando cada componente, tenemos que $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. Por tanto, $v = (1, 1, 0)_\mathcal{B}$. Entonces, tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Para calcular la matriz en el sistema de referencia usual (aunque no nos lo piden), tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\
&= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.2.29. Clasifica el movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2x+2y+z+3}{3}, \frac{-2x+y+2z}{3}, \frac{-x+2y-2z-3}{3}\right)$$

Tenemos que su matriz asociada en el sistema de referencia usual es:

$$M(f,\mathcal{R}_0) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|f| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa. Calculemos sus puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que f es una isometría inversa en el espacio con un único punto fijo, por lo que se trata de un giro con simetría. Calculemos el eje de giro:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L} = V_{-1} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)+Id\right)(x,y,z)^t = 0\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \\
&= \mathcal{L}\,(0,1,-2)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que el eje es la recta L dada por:

$$L = (0,-1,-1) + \mathcal{L}\,(0,1,-2)$$

Calculemos ahora el ángulo de giro no orientado $\theta \in [0,\pi]$. Como la traza de la matriz queda invariantes por semejanza, tenemos que:

$$-1+2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\right) = \frac{1}{3}(2+1-2) \Longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Longrightarrow \theta \approx 0{,}84 \text{ rad}$$

Ejercicio 5.2.30. Calcula la isometría de $\mathbb{R}^3$ dada por la composición de un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ respecto del eje $R \equiv (1,2,0) + \mathcal{L}(\{(0,1,0)\})$ y la simetría respecto del plano $y = -1$.

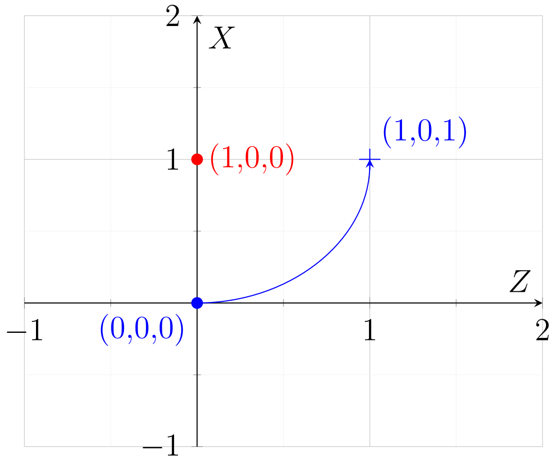


Figura 5.6: Giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en el plano $R^{\perp}_{(1,0,0)}$, es decir, el plano $y = 0$ (XZ).

Calculamos en primer lugar la matriz asociada al giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ respecto del eje R. Como $\overrightarrow{R}^{\perp} = \mathcal{L}\{e_1, e_3\}$, tenemos que:

$$G_{\theta,\overrightarrow{L}}(e_1) = -e_3, \quad G_{\theta,\overrightarrow{L}}(e_2) = e_2, \quad G_{\theta,\overrightarrow{L}}(e_3) = e_1 \qquad G_{\theta,L}(0,0,0) = (1,0,1)$$

Por tanto, la matriz asociada en el sistema de referencia usual es:

$$M(G_{\theta,L}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos ahora la matriz asociada a la simetría respecto del plano $\pi \equiv y = -1$. Tenemos que:

$$\sigma_{\overrightarrow{\pi}}(e_1) = e_1, \quad \sigma_{\overrightarrow{\pi}}(e_2) = -e_2, \quad \sigma_{\overrightarrow{\pi}}(e_3) = e_3 \qquad \sigma_{\pi}(0,0,0) = (0,-2,0)$$

Por tanto, la matriz asociada en el sistema de referencia usual es:

$$M(\sigma_{\pi}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz asociada a la composición de ambas isometrías es:

$$\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}_0) &= M(\sigma_\pi,\mathcal{R}_0)\cdot M(G_{\theta,L},\mathcal{R}_0) = \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.2.31. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x+2y+2z+2, 2x+2y-z-1, 2x-y+2z-\alpha).$$

Clasificar, según los valores de α, qué tipo de movimiento es f_α, calculando en cada caso el conjunto de puntos fijos.

Tenemos que su matriz asociada en el sistema de referencia usual es:

$$M(f_\alpha,\mathcal{R}_0) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -\alpha & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|f_\alpha| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa. Calculemos sus puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Realizamos una distinción de casos en función del parámetro α:

- Si $\alpha \neq 1$:

  Tenemos que el sistema es SI, por lo que $\mathcal{P}_f = \emptyset$. Se trata de una simetría especular con deslizamiento.

- Si $\alpha = 1$:

  Tenemos que el sistema es SCI, y hay un plano de puntos fijos. Por tanto, se trata de una simetría especular respecto del plano π dado por:

  $$\pi \equiv 2x - y - z = 1 \equiv (1,1,0) + \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$$

Ejercicio 5.2.32. Sea $\mathcal{R}$ es el sistema de referencia con origen en el punto $(1,0,1)$ y base asociada $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Determina si la siguiente aplicación afín $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que en coordenadas respecto del sistema de referencia afín $\mathcal{R}$ está dada por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$$

es un movimiento rígido y, en caso afirmativo, clasifícalo.

Tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}) = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -9 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 0 & 7 & 8 \\ -7 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $\mathcal{R}$ no es ortonormal, por lo que calcularemos su matriz en el sistema de referencia usual para determinar si es un movimiento rígido.

$$\begin{aligned} M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R}) = \\ &= M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f,\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -9 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 0 & 7 & 8 \\ -7 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$|f| = \frac{1}{5^4}\cdot 5^2\cdot(9+16) = 1$$

Por tanto, se trata de una isometría directa. Calculemos sus puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda\in\mathbb{R} \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}\right. \Longrightarrow \mathcal{P}_f = \left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)+\mathcal{L}\left(1,0,0\right)$$

Por tanto, tenemos que hay una recta de puntos fijos, por lo que se trata de un giro respecto de dicha recta. Calculemos el ángulo de giro no orientado $\theta\in[0,\pi]$.

$$1+2\cos\theta = tr\left(M\left(\overrightarrow{f},\mathcal{B}_u\right)\right) = \frac{1}{5}(5+3+3) \Longrightarrow \cos\theta = \frac{3}{5} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0{,}927 \text{ rad}$$

Ejercicio 5.2.33. Decide de forma razonada qué tipo de movimiento rígido es:

1. La composición de dos simetrías ortogonales en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

   Sea f dicha composición. Como $|f| = 1$, tenemos que se trata de una isometría directa. Distinguimos en función de la posición relativa de ambas rectas:

   - Si $R_1 = R_2$ (son coincidentes), entonces veamos que $f = Id_{\mathbb{R}^2}$.

     Tenemos que $f = \sigma_{R_1}\circ\sigma_{R_2} = \sigma_{R_1}\circ\sigma_{R_1} \overset{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^2}$, donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías.

- Si $R_1 \| R_2$, $R_1 \neq R_2$ (son paralelas), entonces veamos que f es una traslación según un vector no nulo. Tenemos que:

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\sigma_{R_1}} \circ \overrightarrow{\sigma_{R_2}} = \sigma_{\overrightarrow{R_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{R_1}} \stackrel{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^2}$$

  donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías vectoriales. Veamos ahora que el vector no es nulo. Sea $p \in R_2$, entonces $\sigma_{R_2}(p) = p$. Por tanto, $f(p) = \sigma_{R_1}(p)$. Como $R_1 \neq R_2$, tenemos que $\sigma_{R_1}(p) \neq p$, por lo que:

$$\overrightarrow{p\ f(p)} = \overrightarrow{p\ \sigma_{R_1}(p)} \neq \overrightarrow{0}$$

  Además, sabemos que $\overrightarrow{p\ f(p)} = \overrightarrow{p\ \sigma_{R_1}(p)} \in \overrightarrow{R_1}^{\perp}$. Por tanto, como su lineal asociada es la identidad y su vector de traslación es no nulo, se trata de una traslación sin puntos fijos.

- Si $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, $R_1 \not\| R_2$ (son secantes), entonces veamos que f es un giro de ángulo $\theta \in]0, \pi]$.

  En primer lugar, veamos que f tiene tan solo un punto fijo. Veamos en primer lugar la existencia de dicho punto. Sea $R_1 \cap R_2 = \{p\}$. Entonces, $\sigma_{R_1}(p) = p$ y $\sigma_{R_2}(p) = p$. Por tanto, $f(p) = \sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}(p) = p$.

  Veamos ahora la unicidad. Como f es un movimiento directo en el plano, basta con que haya algún punto que no sea fijo para que no haya más. Sea $q \in R_2$, $q \neq p$. Entonces, $\sigma_{R_2}(q) = q$. Por tanto, $f(q) = \sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}(q) = \sigma_{R_1}(q)$. Como $q \notin R_1$, entonces $f(q) \neq q$.

  Por tanto, sabemos que se trata de un giro de centro p de ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$.

2. La composición de dos simetrías ortogonales con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

   Sea $f_1 = t_{v_1} \circ \sigma_{R_1}$ y $f_2 = t_{v_2} \circ \sigma_{R_2}$, con $v_1 \in \overrightarrow{R_1} \setminus \{0\}$ y $v_2 \in \overrightarrow{R_2} \setminus \{0\}$. Por tanto, tenemos que:

$$f = f_1 \circ f_2 = t_{v_1} \circ \sigma_{R_1} \circ t_{v_2} \circ \sigma_{R_2} = t_{v_1} \circ t_{v_2} \circ \sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2} = t_{v_1+v_2} \circ \sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}$$

   Por tanto, haremos uso del apartado anterior para clasificar la composición de las simetrías ortogonales $\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}$.

   - Si $v_1 + v_2 = 0$, entonces la clasificación es la misma que en el apartado anterior.
   - Si $v_1 + v_2 \neq 0$, entonces tenemos que:
     - Si $R_1 = R_2$ (son coincidentes), entonces sabemos que $\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2} = Id_{\mathbb{R}^2}$, por lo que $f = t_{v_1+v_2}$, que se trata de una traslación sin puntos fijos.
     - Si $R_1 \| R_2$, $R_1 \neq R_2$ (son paralelas), entonces sabemos que $\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2} = t_v$, con $v \in \overrightarrow{R_1}^{\perp} \setminus \{0\}$. Como $v \in \overrightarrow{R_1}^{\perp}$ y $v_1 + v_2 \in \overrightarrow{R_1}$, tenemos que $v \perp v_1 + v_2$, por lo que $v_1 + v_2 + v \neq 0$. por lo que $f = t_{v_1+v_2+v}$, que se trata de una traslación sin puntos fijos.

- Si $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, $R_1 \not\parallel R_2$ (son secantes), sabemos que $\sigma_{R_1} \circ \sigma_{R_2}$ es un giro de centro p de ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$.
  Por tanto, tenemos que:

  $$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_{v_1+v_2}} \circ \overrightarrow{G_{\theta,p}} = Id_{\mathbb{R}^2} \circ G_\theta = G_\theta$$

  Como $\theta \neq 0$, tenemos que f es un giro de ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$.

3. La composición de un giro y una simetría en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

   En este caso, tenemos que $f = G_{\theta,p} \circ \sigma_R$, con $p \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in]0, \pi]$ y $R \subset \mathbb{R}^2$. Tenemos que $|f| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa. Según la posición de p respecto de R, tenemos:

   - Si $p \in R$, veamos que se trata de una reflexión axial. Como p es un punto fijo tanto de $G_{\theta,p}$ como de σ_R, tenemos que $f(p) = p$, por lo que hay al menos un punto fijo. Como se trata de una isometría inversa, se trata de una reflexión axial.
   - Si $p \notin R$, veamos que se trata de una reflexión axial con deslizamiento.

4. La composición de un giro y una simetría con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

5. La composición de dos simetrías ortogonales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

   Sean $f_1 = \sigma_{\pi_1}$ y $f_2 = \sigma_{\pi_2}$, con π_1 y π_2 dos planos. Sea $f = f_1 \circ f_2$, y tenemos que $|f| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Distinguimos en función de la posición relativa de ambos planos:

   - Si $\pi_1 = \pi_2$ (son coincidentes), entonces veamos que $f = Id_{\mathbb{R}^3}$.

     Tenemos que $f = \sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2} = \sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_1} \overset{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^3}$, donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías.
   - Si $\pi_1 \| \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$ (son paralelos), entonces veamos que f es una traslación según un vector no nulo. Tenemos que:

     $$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\sigma_{\pi_1}} \circ \overrightarrow{\sigma_{\pi_2}} = \sigma_{\overrightarrow{\pi_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{\pi_1}} \overset{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^3}$$

     donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías vectoriales. Veamos ahora que el vector no es nulo. Sea $p \in \pi_2$, entonces $\sigma_{\pi_2}(p) = p$. Por tanto, $f(p) = \sigma_{\pi_1}(p)$. Como $\pi_1 \neq \pi_2$, tenemos que $\sigma_{\pi_1}(p) \neq p$, por lo que:

     $$\overrightarrow{p\ f(p)} = \overrightarrow{p\ \sigma_{\pi_1}(p)} \neq \overrightarrow{0}$$

     Además, sabemos que $\overrightarrow{p\ f(p)} = \overrightarrow{p\ \sigma_{\pi_1}(p)} \in \overrightarrow{\pi_1}^\perp$. Por tanto, como su lineal asociada es la identidad y su vector de traslación es no nulo, se trata de una traslación sin puntos fijos.

- Si $\dim \pi_1 \cap \pi_2 = 0$, veamos que no es posible. Por la fórmula de las dimensiones, como la intersección no es nula, tenemos que:

  $$\dim \pi_1 + \dim \pi_2 = \dim(\pi_1 \cap \pi_2) + \dim(\pi_1 \vee \pi_2) \Longrightarrow 4 = 0 + \dim(\pi_1 \vee \pi_2)$$

  No obstante, esto es una contradicción, ya que $\dim(\pi_1 \vee \pi_2) \leqslant 3$.

- Si $\dim \pi_1 \cap \pi_2 = 1$, entonces hay una recta de puntos fijos. Veamos que hay algún punto que no es fijo. Sea $p \in \pi_2$, entonces $\sigma_{\pi_2}(p) = p$. Por tanto, $f(p) = \sigma_{\pi_1}(p)$. Como $\pi_1 \neq \pi_2$, $p \notin \pi_1$, por lo que $\sigma_{\pi_1}(p) \neq p$. por tanto, $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$, y por ser f un movimiento directo tenemos que f es un giro de eje $\pi_1 \cap \pi_2$ y ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$.

6. La composición de un giro y una simetría en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

   Sea $f = G_{\theta,L} \circ \sigma_\pi$, con L una recta, $\theta \in]0, \pi]$ y π un plano. Tenemos que $|f| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa. Según la posición relativa de L respecto de π, tenemos:

   - Si $L \subset \pi$, entonces veamos que se trata de una reflexión especular.

     Sea $p \in L$, entonces $G_{\theta,L}(p) = p$. Por tanto, $f(p) = \sigma_\pi(p)$. Como $p \in \pi$, entonces $\sigma_\pi(p) = p$, por lo que $f(p) = p$. Por tanto, al menos hay una recta de puntos fijos. Como se trata de una isometría inversa, se trata de una reflexión especular.

   - Si $L \not\subset \pi$, entonces veamos que se trata de una reflexión especular con deslizamiento.

7. La composición de un giro y una traslación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

   Sea $f = G_{\theta,L} \circ t_v$, con L una recta, $\theta \in]0, \pi]$ y $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Tenemos que $|f| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Según el valor de v, tenemos:

   a) Si $v \in \overrightarrow{L}$, tenemos por definición que se trata de un giro con deslizamiento, es decir, un movimiento helicoidal.

   b) Si $v \notin \overrightarrow{L}$, veamos que se trata de un giro:

   $$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{G_{\theta,L}} \circ \overrightarrow{t_v} = G_{\theta,\overrightarrow{L}} \circ Id_{\mathbb{R}^3} = G_{\theta,\overrightarrow{L}}$$

   Como $\theta \neq 0$, tenemos que f es un giro de ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$.

8. La composición de dos simetrías centrales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

   Sea $f = \sigma_{p_1} \circ \sigma_{p_2}$, con $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$. Tenemos que $|f| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Distinguimos en función de la posición relativa de ambos puntos:

   - Si $p_1 = p_2$, entonces veamos que $f = Id_{\mathbb{R}^3}$.

     Tenemos que $f = \sigma_{p_1} \circ \sigma_{p_2} = \sigma_{p_1} \circ \sigma_{p_1} \overset{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^3}$, donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías.

- Si $p_1 \neq p_2$, entonces veamos que f es una traslación según un vector no nulo. Tenemos que:

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\sigma_{p_1}} \circ \overrightarrow{\sigma_{p_2}} = \sigma_{\overrightarrow{p_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{p_1}} \overset{(*)}{=} Id_{\mathbb{R}^3}$$

donde en $(*)$ he aplicado la propiedad de involución de las simetrías vectoriales. Veamos ahora que el vector no es nulo. Tenemos que $\sigma_{p_2}(p_2) = p_2$. Por tanto, $f(p_2) = \sigma_{p_1}(p_2)$. Como $p_1 \neq p_2$, tenemos que $\sigma_{p_1}(p_2) \neq p_2$, por lo que:

$$\overrightarrow{p_2\ f(p_2)} = \overrightarrow{p_2\ \sigma_{p_1}(p_2)} \neq \overrightarrow{0}$$

Por tanto, como su lineal asociada es la identidad y su vector de traslación es no nulo, se trata de una traslación sin puntos fijos.

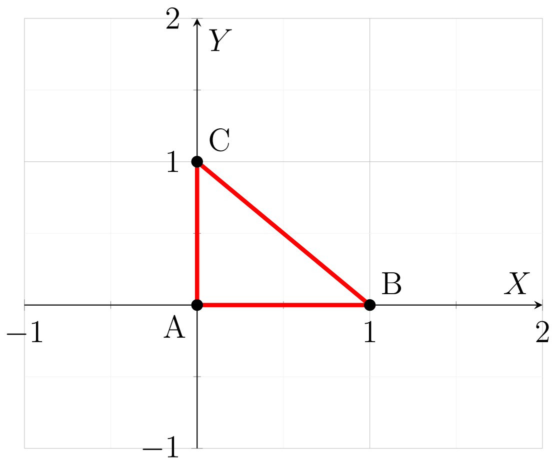
Ejercicio 5.2.34. Sea T un triángulo en un espacio afín euclídeo $\mathbb{E}$ con vértices $a, b, c \in \mathbb{E}$. La recta que pasa por el vértice a y con vector director

$$v_a = \frac{1}{\|\overrightarrow{ab}\|}\overrightarrow{ab} + \frac{1}{\|\overrightarrow{ac}\|}\overrightarrow{ac}$$

la llamamos bisectriz que pasa por a. Si se definen de manera análoga las bisectrices que pasan por los vértices b y c, prueba que las tres rectas se cortan en un mismo punto, que llamaremos incentro del triángulo.

Está demostrado en el Teorema 2.19.

Ejercicio 5.2.35. Calcula el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro del triángulo de $\mathbb{R}^2$ que tiene por vértices a los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.



Tenemos que dos de sus medianas son:

$$M_a \equiv y = x \equiv (0,0) + \mathcal{L}\{(1,1)\}$$
$$M_b \equiv y = -\frac{x}{2} + 1 \equiv (1,0) + \mathcal{L}\{(2,-1)\}$$

Por tanto, el baricentro es el punto de intersección de ambas rectas:

$$B = M_a \cap M_b = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Tenemos que dos de sus alturas son:

$$H_c \equiv x = 0 \equiv (0,0) + \mathcal{L}\{(0,1)\}$$
$$H_b \equiv y = 0 \equiv (0,0) + \mathcal{L}\{(1,0)\}$$

Por tanto, el ortocentro es el punto de intersección de ambas rectas:

$$O = H_c \cap H_b = (0,0)$$

Tenemos que dos de sus mediatrices son:

$$R_c \equiv x = \frac{1}{2} \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \mathcal{L}\{(0,1)\}$$
$$R_b \equiv y = \frac{1}{2} \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,0)\}$$

Por tanto, el circuncentro es el punto de intersección de ambas rectas:

$$C = R_c \cap R_b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Para el incentro, no se ve de forma directa. Una de sus bisectrices es la recta $B_a \equiv y = x \equiv (0,0) + \mathcal{L}\{(1,1)\}$ Calculamos ahora B_c. Tenemos que $\overrightarrow{ca} = (0,-1)$ y $\overrightarrow{cb} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Por tanto:

$$v_c = \frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\left\|\overrightarrow{cb}\right\|} = (0,-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto, la bisectriz B_c es:

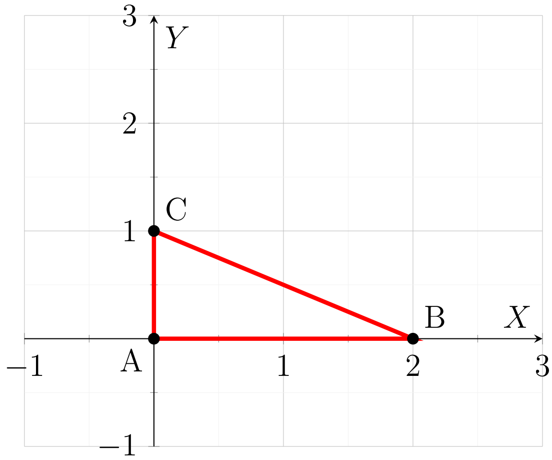
$$B_c = (0,1) + \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Tenemos que:

$$I = B_a \cap B_c = \left\{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, 1 - \lambda - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 1 - \lambda - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right\} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ejercicio 5.2.36. ¿Está el incentro de cualquier triángulo alineado con el baricentro, ortocentro y circuncentro?

No, no tiene por qué. Como contraejemplo, veamos el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$.



Se ve de forma directa que el circuncentro es el punto $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, y el ortocentro es el origen $O = (0, 0)$. Calculemos el incentro.

Una de sus bisectrices es la recta $B_a \equiv y = x \equiv (0, 0) + \mathcal{L}\{(1, 1)\}$ Calculamos ahora B_c. Tenemos que $\overrightarrow{ca} = (0, -1)$ y $\overrightarrow{cb} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$. Por tanto:

$$v_c = \frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\left\|\overrightarrow{cb}\right\|} = (0, -1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Por tanto, la bisectriz B_c es:

$$B_c = (0, 1) + \mathcal{L}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Tenemos que:

$$I = B_a \cap B_c = \left\{\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{5}}, 1 - \lambda - \frac{\lambda}{\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2\lambda}{\sqrt{5}} = 1 - \lambda - \frac{\lambda}{\sqrt{5}}\right\} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

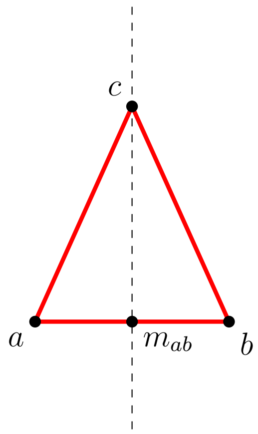
Supongamos ahora que el incentro está alineado con el circuncentro y con el ortocentro. Entonces, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{OI} = \lambda \overrightarrow{OC} \Longrightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \lambda \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Al igualar la primera coordenada, tenemos que $\lambda = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Sin embargo, al igualar la segunda coordenada, tenemos que $\lambda = 3 - \sqrt{5}$, lo cual es un absurdo, por lo que no pueden estar alineados.

Por tanto, aunque el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo siempre están alineados en la Recta de Euler, el incentro no tiene por qué estarlo. En el siguiente ejercicio veremos que, en un triángulo isósceles, los 4 puntos notables de un triángulo están alineados.

Ejercicio 5.2.37 (Ejercicio de Examen 2022-23)**.** Demostrar que, en un triángulo isósceles, los 4 puntos notables de un triángulo están alineados.



Sea $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo, y sea $T = \{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$ un triángulo isósceles con vértices a, b, c. Supongamos sin pérdida de generalidad que es isósceles por el lado $[a, b]$. Es decir, que $d(a, c) = d(b, c)$.

Veamos en primer lugar que la mediatriz del lado $[a, b]$ coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{c}$. Es decir, que $R_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c$. Además, como el triángulo es isósceles, tenemos que $d(a, c) = d(b, c)$, por lo que $c \in R_c$. De forma similar, es directo ver que $m_{ab} \in R_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in B_c$:

$$\overrightarrow{cm_{ab}} = m_{ab} - c = \cancel{c} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) - \cancel{c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\overrightarrow{ca}\|}{\|\overrightarrow{ca}\|} \cdot \left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{ca}\| \left(\frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\|\overrightarrow{ca}\|}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{ca}\| \left(\frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\left\|\overrightarrow{cb}\right\|}\right) \in \overrightarrow{B_c}$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c, a) = d(b, c)$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in R_c \cap B_c$, con $m_{ab} \neq c$, por lo que $R_c = B_c$. Veamos ahora que la altura respecto del vértice c coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{c}$, es decir, que $H_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c \cap H_c$. Además, ya hemos visto que $m_{ab} \in B_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in H_c$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{cm_{ab}}, \overrightarrow{ab} \right\rangle &= \left\langle m_{ab} - c, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \left\langle \cancel{c} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) - \cancel{c}, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left\langle -\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\|\overrightarrow{ac}\|^2 + \left\|\overrightarrow{cb}\right\|^2 - \cancel{\left\langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{cb} \right\rangle} + \cancel{\left\langle \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ac} \right\rangle} \right] \overset{(*)}{=} 0
\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c, a) = d(b, c)$. Por tanto, $\overrightarrow{cm_{ab}} \perp \overrightarrow{ab}$ y, por tanto, $m_{ab} \in H_c$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in H_c \cap B_c \cap R_c$, con $m_{ab} \neq C$, por lo que $R_c = B_c = H_c$. Como $C, O, I \in R_c = B_c = H_c$, tenemos que C, O, I están alineados en dicha recta. Es decir, como coinciden la altura, la bisectriz y la mediatriz asociadas al vértice C, entonces el circuncentro, el ortocentro y el incentro están alineados.

Como además el baricentro siempre está alineado con el circuncentro y el ortocentro por el Teorema de Euler en la Recta de Euler, tenemos que los 4 puntos notables de un triángulo isósceles están alineados en la Recta de Euler.

Ejercicio 5.2.38. Construye explícitamente, si es posible, un movimiento rígido directo f del espacio afín euclídeo que cumpla $f(2,0,0) = (1,1,1)$, no tenga puntos fijos, y no sea una traslación.

Como es un movimiento rígido directo en el espacio y no tiene puntos fijos, ha de ser un movimiento helicoidal. Sea el giro respecto de la recta L de ángulo no orientado $\theta \in]0,\pi]$ y vector de traslación $v \in \overrightarrow{L} \setminus \{0\}$.

Supongamos $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$, y $v = (0,0,1)$. Entonces, el giro es $G_{\theta,L}$, y la traslación es t_v. Necesitamos entonces que $G_{\theta,L}(2,0,0) = (1,1,0)$. Veámoslo gráficamente:

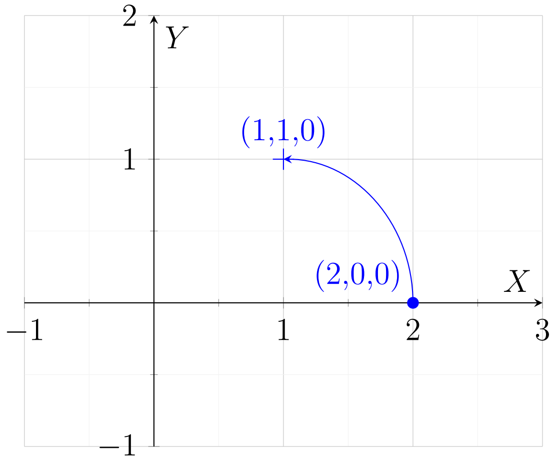


Figura 5.7: Plano $L^{\perp}_{(2,0,0)}$.

Por tanto, gráficamente vemos que se trata de un giro de ángulo no orientado $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto del eje $L = (1,0,0) + \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$, y una traslación según el vector $v = (0,0,1)$.

5.3. Hipercuádricas afines.

Ejercicio 5.3.1. Clasifica las hipercuádricas de un espacio afín euclídeo de dimensión 1.

Tenemos que la forma cuadrática de toda hipercuádrica en cierto sistema de referencia euclídeo $\mathcal{R}$ es una de las siguientes:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} = 0.$

   Es un único punto doble, el origen.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1.$

   Son dos puntos, $x = \pm a$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1.$

   No es posible, por lo que es el vacío.

Ejercicio 5.3.2. En el semiplano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geqslant 0\}$ tomamos una circunferencia C de centro $(c, 0, 0)$ y radio $r > 0$ con $c > r > 0$. Se llama toro de revolución generado por C a la superficie T obtenida al rotar C alrededor del eje z. Dibujar T y describir la superficie como el conjunto de soluciones de una ecuación con 3 incógnitas. ¿Es dicha ecuación la de una cuádrica?

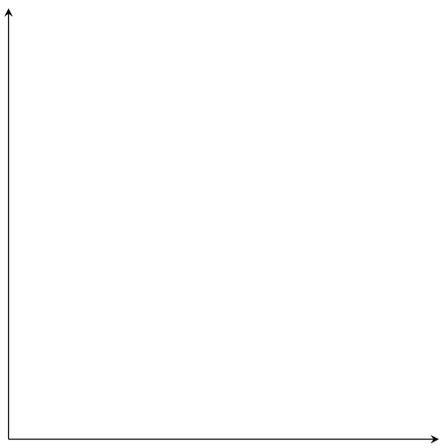
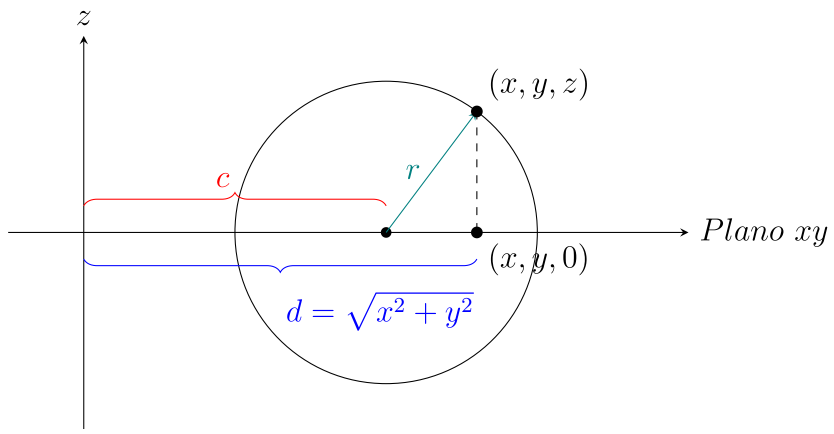


Figura 5.8: Toro.

Veamos cuál es su ecuación. Para ello, fijado un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezca al toro, realizamos un corte al toro por el plano que pasa por dicho punto y es perpendicular al plano de ecuación $z = 0$. Es decir, por el plano dado por $\pi : (x, y, z) + \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}^{\perp}$, y tenemos lo siguiente:



donde sabemos que, por el teorma de Pitágoras, la distancia de $(x, y, 0)$ al origen es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ estará en el toro de rotación de la circunferencia de radio r a una distancia c del eje de rotación z si y solo si cumple el Teorema de Pitágoras del triángulo inscrito. Es decir:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c\right)^2 + z^2 = 1$$

Desarrollamos dicha ecuación para ver si se trata o no de una cuádrica:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c\right)^2 + z^2 &= 1 \\
x^2 + y^2 - 2c\sqrt{x^2 + y^2} + c^2 + z^2 &= 1 \\
x^2 + y^2 + z^2 - 2c\sqrt{x^2 + y^2} + c^2 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, como la ecuación asociada al Toro no es polinómica, no se trata de una cuádrica.

Ejercicio 5.3.3. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín de dimensión n y S un subespacio afín suyo de dimensión $m > 0$. Demuestra que:

1. Existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ tal que las ecuaciones implícitas de S en dicho sistema son $x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0$.

   Sea $S = p_0 + \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathcal{A}$, con $p_0 \in \mathcal{A}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de $\overrightarrow{S}$. Sea entonces el sistema de referencia buscado $\mathcal{R} = (p_0, \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\})$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}$, donde $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ se han escogido extendiendo la base de $\overrightarrow{S}$ a una base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

   Las coordenadas en $\mathcal{R}$ de un punto $p \in \mathcal{A}$ son las coordenadas de $\overrightarrow{p_0p}$ en la base $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Por tanto, si $p \in S$, entonces $\overrightarrow{p_0p} \in \overrightarrow{S}$, y por tanto es combinación lineal de los vectores de la base de $\overrightarrow{S}$. Es decir,

   $$\overrightarrow{p_0p} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, las coordenadas de p en $\mathcal{R}$ son $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0)$, es decir, $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$. Debido a la unicidad de las coordenadas de un punto en un sistema de referencia, tenemos que las ecuaciones implícitas de S en $\mathcal{R}$ son $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$.

2. Si H es una hipercuádrica de $\mathcal{A}$, entonces $H \cap S$ es una hipercuádrica de S o bien vacío o todo S.

   Sea H una hipercuádrica de $\mathcal{A}$, y sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}$ tal que las ecuaciones implícitas de S en $\mathcal{R}$ son $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$ (en el apartado anterior hemos visto que dicho sistema existe). Por tanto, si suponemos que la ecuación asociada a H en $\mathcal{R}$ es $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$, tenemos que la ecuación asociada a $H \cap S$ en $\mathcal{R}$ es:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{m} b_ix_i + c = 0$$

   Por tanto, por norma general, $H \cap S$ es una hipercuádrica de S. Veamos en qué casos no lo es distinguiendo:

   - Por norma general, $H \cap S$ será una hipercuádrica de $\mathcal{S}$, ya que es una hipercuádrica de $\mathcal{A}$ y cumple las ecuaciones implícitas de S.
   - Si $a_{ij} = b_i = 0\ \forall i, j \leqslant m$, $c \neq 0$, tenemos que la ecuación de la hipercuádrica es $c = 0$, que es un absurdo, por lo que $H \cap S = \emptyset$.
   - Si $a_{ij} = b_i = 0\ \forall i, j \leqslant m$, $c = 0$, tenemos que la ecuación de $H \cap S$ es $0 = 0$, que es trivial, por lo que $H \cap S = S$.

Ejercicio 5.3.4. Sean H una hipercuádrica y R una recta de un espacio euclídeo $\mathcal{A}$. Prueba que $R \cap H$ puede ser vacío, un punto, dos puntos o toda la recta. Da un ejemplo conocido de cada uno de los casos cuando $\mathcal{A}$ tiene dimensión dimensión 2 y dimensión 3.

En el Ejercicio 5.3.3.2 hemos visto que $H \cap R$ es o bien el vacío, o bien R, o bien una hipercuádrica de R. Además, en el Ejercicio 5.3.1 hemos visto que las hipercuádricas de un espacio afín de dimensión 1 (R) son, o bien un punto, o bien dos puntos. Por tanto, tenemos que $H \cap R$ puede ser vacío, un punto, dos puntos o toda la recta, como queríamos demostrar.

Veamos ahora un ejemplo de cada caso. En el caso de dimensión 2, fijemos $\mathcal{R}$ como sistema de referencia, y todas las ecuaciones implícitas vendrán dadas en dicho sistema $\mathcal{R}$. Consideremos el par de rectas secantes $H \equiv x^2 - y^2 = 0$, que es una hipercuádrica. En el caso de $R_1 \equiv y = 0$, tenemos que $H \cap R_1 = \{(0,0)_{\mathcal{R}}\}$, que es un punto. En el caso de $R_2 \equiv y = 1$, tenemos que $H \cap R_2 = \{(1,1)_{\mathcal{R}}, (1,-1)_{\mathcal{R}}\}$, que son dos puntos. En el caso de $R_3 \equiv x = y$, tenemos que $R_3 \subset H$, por lo que $H \cap R_3 = R_3$, que es toda la recta. Para el caso de intersección vacía, basta con tomar $H' \equiv y = x^2$ parábola y $R_4 \equiv y = -1$, y tenemos que $H' \cap R_4 = \emptyset$.

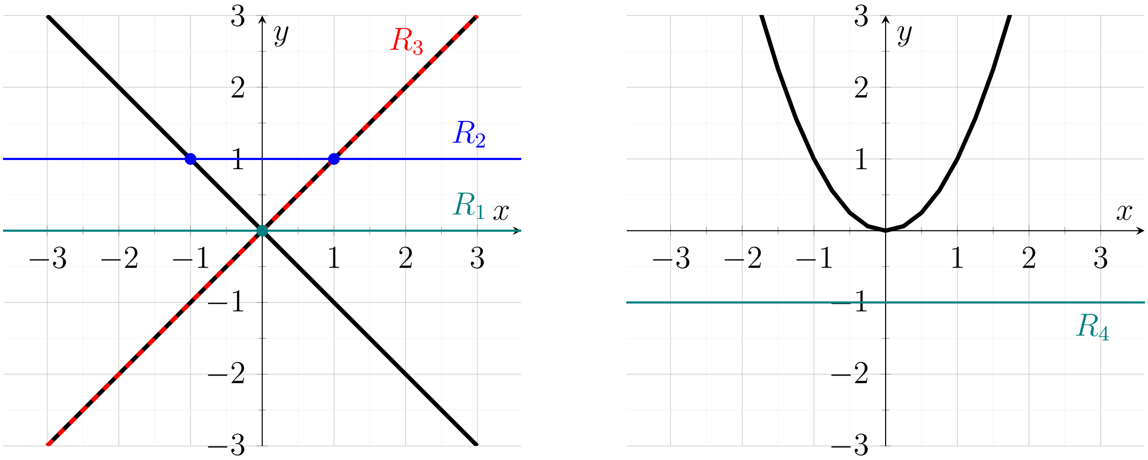


Figura 5.9: Ejemplos de intersecciones de hipercuádricas con rectas en $\mathcal{A}^2$.

En el caso de dimensión 3, fijemos $\mathcal{R}$ como sistema de referencia, y todas las ecuaciones implícitas vendrán dadas en dicho sistema $\mathcal{R}$. Consideremos el par de planos secantes $H \equiv x^2 - y^2 = 0$, que es una hipercuádrica. En el caso de $R_1 \equiv x = z = 0$, tenemos que $H \cap R_1 = \{(0,0,0)_\mathcal{R}\}$, que es un punto. En el caso de $R_2 \equiv x = z = 1$, tenemos que $H \cap R_2 = \{(1,1,1)_\mathcal{R}, (1,-1,1)_\mathcal{R}\}$, que son dos puntos. En el caso de $R_3 \equiv x = y = 0$, el eje Z, tenemos que $R_3 \subset H$, por lo que $H \cap R_3 = R_3$, que es toda la recta. Para el caso de intersección vacía, basta con tomar $H' \equiv y = x^2$ cilindro parabólico y $R_4 \equiv y = x = -1$, y tenemos que $H' \cap R_4 = \emptyset$.

Ejercicio 5.3.5. Construir explícitamente un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C) = C'$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $n = 2$, $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

   En este caso, C es una elipse y C' una hipérbola. Como sabemos que estas no son equivalentes, tenemos que $\nexists f$ isomorfismo afín tal que $f(C) = C'$.

2. $n = 3, C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, C' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

   En ambos casos se trata de ellipsoides, por lo que es posible. Para ello, consideremos el isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x,y,z) = (ax, bx, cz)$$

   Veamos que $f(C) = C'$:

   $\subset$) Sea $(x,y,z) \in C$, y veamos que $f(x,y,z) \in C'$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (ax, bx, cz) \in C' \iff \\ \iff \frac{(ax)^2}{a^2} + \frac{(bx)^2}{b^2} + \frac{(cz)^2}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

   Y tenemos que es cierto, ya que $(x,y,z) \in C$.

$\supset$) Sea $(x', y', z') \in C'$, y veamos que $\exists (x, y, z) \in C$ tal que su imagen es dicho punto, es decir, $f(x, y, z) = (x', y', z')$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(x', y', z') \in C' &\Longleftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \in C\end{aligned}$$

3. $n = 2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y = 0\}$, $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x - y^2 = 0\}$.

   En este caso, ambos conjuntos son parábolas, por lo que es posible. Para ello, consideremos el isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$f(x, y) = (y, x)$$

   Veamos que $f(C) = C'$:

   $\subset$) Sea $(x, y) \in C$, y veamos que $f(x, y) \in C'$. Tenemos que:

$$f(x, y) = (y, x) \in C' \Longleftrightarrow y - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - y = 0$$

   Y tenemos que es cierto, ya que $(x, y) \in C$.

   $\supset$) Sea $(x', y') \in C'$, y veamos que $\exists (x, y) \in C$ tal que su imagen es dicho punto, es decir, $f(x, y) = (x', y')$. Tenemos que:

$$(x', y') \in C' \Longleftrightarrow x' - (y')^2 = 0 \Longleftrightarrow (y')^2 - x = 0 \Longleftrightarrow (y', x') \in C$$

4. $n = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|ax^2 + by^2 = 1\}$, $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 = 1\}$.

   Suponemos que $a, b \in \mathbb{R}^+$, ya que si no, C no es un cilindro elíptico y, como C' sí lo es, no existiría tal isomorfismo afín. Por tanto, en dicha suposición, consideremos el isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y, z\right)$$

   Veamos que $f(C) = C'$:

   $\subset$) Sea $(x, y, z) \in C$, y veamos que $f(x, y, z) \in C'$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) = \left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y, z\right) \in C' &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (\sqrt{a}x)^2 + (\sqrt{b}y)^2 = ax^2 + by^2 = 1\end{aligned}$$

   Y tenemos que es cierto, ya que $(x, y, z) \in C$.

   $\supset$) Sea $(x', y', z') \in C'$, y veamos que $\exists (x, y, z) \in C$ tal que su imagen es dicho punto, es decir, $f(x, y, z) = (x', y', z')$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(x', y', z') \in C' &\Longleftrightarrow (x')^2 + (y')^2 = 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \left(x' \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(y' \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{x'}{\sqrt{a}}, \frac{y'}{\sqrt{b}}, z'\right) \in C\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.6. Cuestiones sobre elipses:

1. Dados dos puntos distintos p_1, p_2 de un plano afín euclídeo $\mathbb{E}$ y $r > d(p_1, p_2)$, demuestra que $H = \{p \in \mathbb{E} \mid d(p, p_1) + d(p, p_2) = r\}$ es una elipse. Los puntos p_1, p_2 reciben el nombre de focos de la elipse. Se llama centro de la elipse al punto medio de sus focos y vértices a los puntos de intersección de la elipse con la recta que pasa por sus focos.

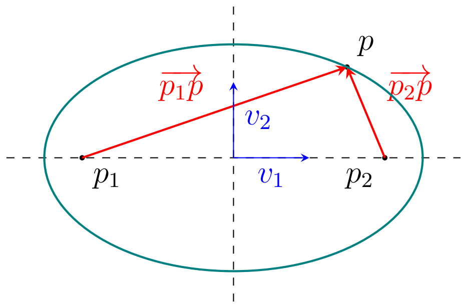


Figura 5.10: Elipse de focos p_1 y p_2.

Sea el vector unitario $v_1 = \dfrac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$, y sea $v_2 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.10). Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_1p_2}, \mathcal{B}\}$. Calculamos las coordenadas de p_1 y p_2 en $\mathcal{R}$:

$$p_1 = m_{p_1p_2} - \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{2} = m_{p_1p_2} - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} = \left(-\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$$
$$p_2 = m_{p_1p_2} + \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{2} = m_{p_1p_2} + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} = \left(\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$$

Sea entonces $p \in H$, con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$. Tenemos que:

$$p \in H \Longleftrightarrow d(p, p_1) + d(p, p_2) = r \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = r \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = r - \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2 = \left(r - \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + \cancel{y^2} =$$
$$= r^2 - 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + \cancel{y^2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 = r^2 - 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2}$$

Usando la identidad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p\in H &\Longleftrightarrow 2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| = r^2 - 2r\sqrt{\left(x-\frac{\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|}{2}\right)^2+y^2} \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow r^2 - 2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| = 2r\sqrt{\left(x-\frac{\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|}{2}\right)^2+y^2} \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 - 4r^2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| = 4r^2\left(x-\frac{\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|}{2}\right)^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 - 4r^2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| =\\
&\qquad = 4r^2x^2 - 4r^2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| + r^2\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\left(\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 - r^2\right) - \cancel{4r^2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|} =\\
&\qquad = -\cancel{4r^2x\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|} + r^2\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow 4x^2\left(r^2 - \left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2\right) + 4r^2y^2 = r^2\left(r^2 - \left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2\right)
\end{aligned}$$

Para que sea una alipse, es necesario que:

$$r^2 - \left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 > 0 \Longleftrightarrow r^2 > \left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|^2 \Longleftrightarrow r > \left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|$$

que es cierto por hipótesis. Tenemos por tanto que, efectivamente, H es una elipse.

Notando $r=2a$, $c=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p\in H &\Longleftrightarrow 4x^2\left(4a^2-4c^2\right) + 4\cdot 4a^2y^2 = 4a^2(4a^2-4c^2) \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow 4x^2b^2 + 4a^2y^2 = 4a^2b^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

El valor c recibe el nombre de distancia focal de la elipse, y el valor de a se denomina semieje mayor de la elipse. El valor de b se denomina semieje menor de la elipse.

2. Prueba que toda elipse se puede escribir como en el apartado anterior, para ciertos puntos $p_1,p_2\in\mathbb{E}$.

Sabemos que toda elipse, en cierto sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ dado por $\mathcal{R}=\ \{p_0,\{v_1,v_2\}\}$, tiene como ecuación asociada en $\mathcal{R}$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{con } a,b\in\mathbb{R}^+,\ a\geqslant b$$

Sea $c=\sqrt{a^2-b^2}$, y sea $p_1=p_0-c\cdot v_1=(-c,0)_{\mathcal{R}}$ y $p_2=p_0+c\cdot v_1=(c,0)_{\mathcal{R}}$. Tenemos que:

$$\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\| = \|p_2-p_1\| = \|2c\cdot v_1\| = 2c \Longrightarrow c=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{p_1p_2}\right\|$$

Por tanto, definiendo $r=2a$, y como en el apartado anterior eran dobles implicaciones, tenemos que:

$$p\in H \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longleftrightarrow d(p,p_1)+d(p,p_2)=r$$

3. Demuestra que toda elipse H es simétrica con respecto a la recta $R_{p_1p_2}$ que pasa por sus focos (denominada eje mayor) y con respecto a la mediatriz de sus focos (denominado eje menor).

   Sea el vector unitario $v_1 = \dfrac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$, y sea $v_2 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.10). Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_1p_2}, \mathcal{B}\}$. Tenemos que las coordenadas de p_1 y p_2 en $\mathcal{R}$ son:

$$p_1 = \left(-\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}} \qquad p_2 = \left(\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$$

   Sea entonces $p \in \mathbb{E}$, con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$. Tenemos que:

$$\sigma_{R_{p_1p_2}}(p) = (x, -y)_{\mathcal{R}}$$

   donde he usado que $R_{p_1p_2} = p_1 + \mathcal{L}\{v_1\}$ por la definición de v_1.

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(p,p_1) + d(p,p_2) &= d((x,y),p_1) + d((x,y),p_2) \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + (-y)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + (-y)^2} = \\
&= d((x,-y),p_1) + d((x,-y),p_2) = d(\sigma_{R_{p_1p_2}}(p),p_1) + d(\sigma_{R_{p_1p_2}}(p),p_2)
\end{aligned}$$

   Por tanto, $p \in H \iff \sigma_{R_{p_1p_2}}(p) \in H$, es decir, H es simétrica con respecto a $R_{p_1p_2}$. De forma análoga, notando por $M_{p_1p_2} = R_{p_1p_2}{}^{\perp}_{m_{p_1p_2}}$ a la mediatriz del segmento $[p_1, p_2]$, tenemos que:

$$\sigma_{M_{p_1p_2}}(p) = (-x, y)_{\mathcal{R}}$$

   donde he usado que $M_{p_1p_2} = m_{p_1p_2} + \mathcal{L}\{v_2\}$ por la definición de v_2. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(p,p_1) + d(p,p_2) &= d((x,y),p_1) + d((x,y),p_2) \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= \sqrt{\left[-\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)\right]^2 + y^2} + \sqrt{\left[-\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)\right]^2 + y^2} = \\
&= \sqrt{\left(-x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= d((-x,y),p_1) + d((-x,y),p_2) = d(\sigma_{M_{p_1p_2}}(p),p_1) + d(\sigma_{M_{p_1p_2}}(p),p_2)
\end{aligned}$$

   Por tanto, $p \in H \iff \sigma_{M_{p_1p_2}}(p) \in H$, es decir, H es simétrica con respecto a $M_{p_1p_2}$.

4. Prueba que, para cada punto p de una elipse H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con las rectas que pasan por p y cada uno de sus focos.

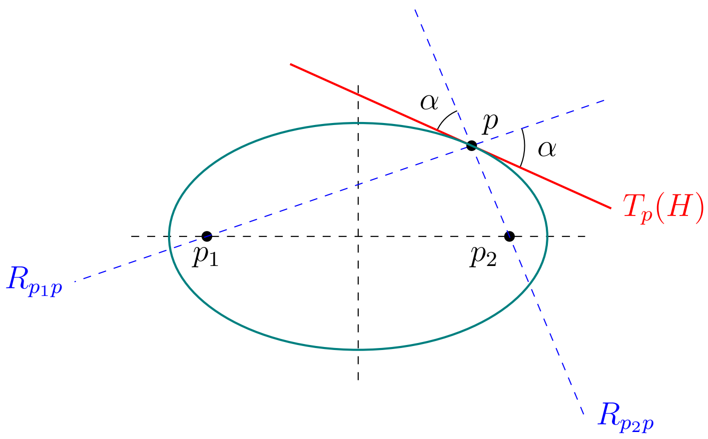


Figura 5.11: Tangente a una elipse de focos p_1 y p_2.

Ejercicio 5.3.7. Cuestiones sobre hipérbolas:

1. Dados dos puntos distintos p_1, p_2 de un plano afín euclídeo $\mathbb{E}$ y $r < d(p_1, p_2)$, demuestra que $H = \{p \in \mathbb{E} \mid |d(p, p_1) - d(p, p_2)| = r\}$ es una hipérbola. Los puntos p_1, p_2 reciben el nombre de focos de la hipérbola. Se llama centro de la hipérbola al punto medio de sus focos y vértices a los puntos de intersección de la hipérbola con la recta que pasa por sus focos.

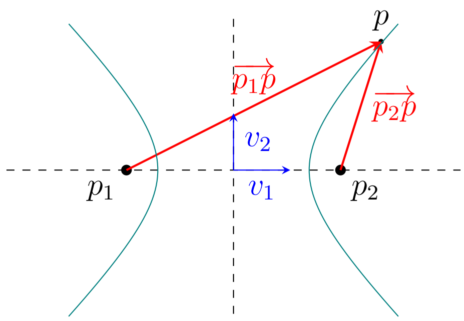


Figura 5.12: Hipérbola de focos p_1 y p_2.

Sea el vector unitario $v_1 = \dfrac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$, y sea $v_2 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.12). Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_1p_2}, \mathcal{B}\}$. Calculamos las coordenadas de p_1 y p_2 en $\mathcal{R}$:

$$p_1 = m_{p_1p_2} - \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{2} = m_{p_1p_2} - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} = \left(-\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$$
$$p_2 = m_{p_1p_2} + \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{2} = m_{p_1p_2} + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} = \left(\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$$

Sea entonces $p \in H$, con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$. Tenemos que:

$$p \in H \Longleftrightarrow d(p, p_1) - d(p, p_2) = \pm r \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \pm r \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \pm r + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\pm r + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + \cancel{y^2} =$$

$$= r^2 \pm 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + \cancel{y^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 = r^2 \pm 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2}$$

Usando la identidad notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, tenemos que:

$$p \in H \Longleftrightarrow 2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = r^2 \pm 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow r^2 - 2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \mp 2r\sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 - 4r^2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = 4r^2\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 - 4r^2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| =$$

$$= 4r^2x^2 - 4r^2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| + r^2\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow r^4 + 4x^2\left(\|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 - r^2\right) - \cancel{4r^2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} =$$

$$= -\cancel{4r^2x\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} + r^2\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 + 4r^2y^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2\left(r^2 - \|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2\right) + 4r^2y^2 = r^2\left(r^2 - \|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2\right)$$

Para que sea una hipérbola, es necesario que:

$$r^2 - \|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 < 0 \Longleftrightarrow r^2 < \|\overrightarrow{p_1p_2}\|^2 \Longleftrightarrow r < \|\overrightarrow{p_1p_2}\|$$

que es cierto por hipótesis. Tenemos por tanto que, efectivamente, H es una hipérbola.

Notando $r = 2a$, $c = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, tenemos que:

$$p \in H \Longleftrightarrow 4x^2\left(4a^2 - 4c^2\right) + 4 \cdot 4a^2y^2 = 4a^2(4c^2 - 4a^2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -4x^2b^2 + 4a^2y^2 = -4a^2b^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El valor c recibe el nombre de distancia focal de la hipérbola, y el valor de a se denomina semieje real (o mayor) de la hipérbola. El valor de b se denomina semieje imaginario (o menor) de la hipérbola.

2. Prueba que toda hipérbola se puede escribir como en el apartado anterior, para ciertos puntos $p_1, p_2 \in \mathbb{E}$.

   Sabemos que toda hipérbola, en cierto sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ dado por $\mathcal{R} = \{p_0, \{v_1, v_2\}\}$, tiene como ecuación asociada en $\mathcal{R}$:

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+$$

   Sea $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, y sea $p_1 = p_0 - c \cdot v_1 = (-c, 0)_\mathcal{R}$ y $p_2 = p_0 + c \cdot v_1 = (c, 0)_\mathcal{R}$. Tenemos que:

   $$\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \|p_2 - p_1\| = \|2c \cdot v_1\| = 2c \Longrightarrow c = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\|$$

   Por tanto, definiendo $r = 2a$, y como en el apartado anterior eran dobles implicaciones, tenemos que:

   $$p \in H \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow d(p, p_1) - d(p, p_2) = \pm r$$

3. Demuestra que toda hipérbola H es simétrica con respecto a la recta $R_{p_1p_2}$ que pasa por sus focos y con respecto a la mediatriz de sus focos.

   Sea el vector unitario $v_1 = \dfrac{\overrightarrow{p_1p_2}}{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$, y sea $v_2 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.12). Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_1p_2}, \mathcal{B}\}$. Tenemos que las coordenadas de p_1 y p_2 en $\mathcal{R}$ son:

   $$p_1 = \left(-\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_\mathcal{R} \qquad p_2 = \left(\frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}, 0\right)_\mathcal{R}$$

   Sea entonces $p \in \mathbb{E}$, con $p = (x, y)_\mathcal{R}$. Tenemos que:

   $$\sigma_{R_{p_1p_2}}(p) = (x, -y)_\mathcal{R}$$

   donde he usado que $R_{p_1p_2} = p_1 + \mathcal{L}\{v_1\}$ por la definición de v_1.

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned} d(p, p_1) + d(p, p_2) &= d((x, y), p_1) + d((x, y), p_2) \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + (-y)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + (-y)^2} = \\ &= d((x, -y), p_1) + d((x, -y), p_2) = d(\sigma_{R_{p_1p_2}}(p), p_1) + d(\sigma_{R_{p_1p_2}}(p), p_2) \end{aligned}$$

Por tanto, $p \in H \iff \sigma_{R_{p_1p_2}}(p) \in H$, es decir, H es simétrica con respecto a $R_{p_1p_2}$. De forma análoga, notando por $M_{p_1p_2} = R_{p_1p_2}{}^{\perp}_{m_{p_1p_2}}$ a la mediatriz del segmento $[p_1, p_2]$, tenemos que:

$$\sigma_{M_{p_1p_2}}(p) = (-x, y)_{\mathcal{R}}$$

donde he usado que $M_{p_1p_2} = m_{p_1p_2} + \mathcal{L}\{v_2\}$ por la definición de v_2. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(p,p_1) + d(p,p_2) &= d((x,y),p_1) + d((x,y),p_2) \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= \sqrt{\left[-\left(x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)\right]^2 + y^2} + \sqrt{\left[-\left(x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)\right]^2 + y^2} = \\
&= \sqrt{\left(-x + \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= d((-x,y),p_1) + d((-x,y),p_2) = d(\sigma_{M_{p_1p_2}}(p),p_1) + d(\sigma_{M_{p_1p_2}}(p),p_2)
\end{aligned}$$

Por tanto, $p \in H \iff \sigma_{M_{p_1p_2}}(p) \in H$, es decir, H es simétrica con respecto a $M_{p_1p_2}$.

4. Prueba que, para cada punto p de una hipérbola H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con las rectas que pasan por p y cada uno de sus focos.

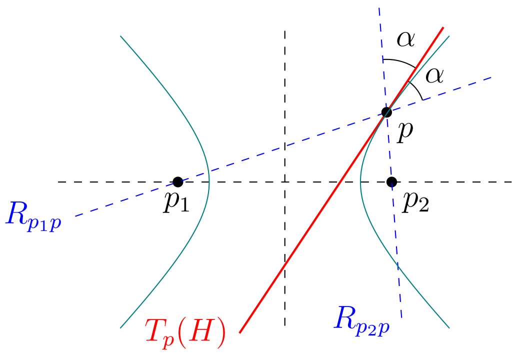


Figura 5.13: Tangente a una hipérbola de focos p_1 y p_2.

Sea $T_p(H)$ la recta tangente a H en p. Sea R_{p_1p} la recta que pasa por p_1 y p, y sea R_{p_2p} la recta que pasa por p_2 y p. Demostrar que $T_p(H)$ forma ángulos iguales con R_{p_1p} y R_{p_2p}, $\measuredangle(T_p(H), R_{p_1p}) = \measuredangle(T_p(H), R_{p_2p})$, equivale, por la Proposición 2.17 a demostrar que $T_p(H)$ es la bisectriz de R_{p_1p} y R_{p_2p}.

Sea B la bisectriz de R_{p_1p} y R_{p_2p}, y por la Proposición 2.18 tenemos que:

$$B = \{q \in \mathbb{E} \mid d(q, R_{p_1p}) = d(q, R_{p_2p})\}$$

Claramente, como $d(p, R_{p_1p}) = 0 = d(p, R_{p_2p})$, tenemos que $p \in B$. Sea ahora $q \in B$, $q \neq p$. Veamos que $q \notin H$. Notemos por $p_2' = \sigma_B(p_2)$ al simétrico de p_2

con respecto a B. De esta forma, como $p, q \in B$, tenemos que $d(q, p_2) = d(q, p_2')$ y $d(p, p_2) = d(p, p_2')$. Por la desigualdad triangular, tenemos que:

$$d(q, p_2) - d(q, p_1) = d(q, p_2') - d(q, p_1) < d(p_1, p_2')$$

Como $p \in H$, tenemos que:

$$d(p_1, p_2) = |d(p, p_1) - d(p, p_2)| = |d(p, p_1) - d(p, p_2')|$$

Además, como $p_2 \in R_{p_2p}$ y B es la bisectriz de R_{p_1p} y R_{p_2p}, tenemos que $p_2' \in R_{p_1p}$. Por tanto, como p, p_1, p_2' están alineados en R_{p_1p}, tenemos que:

$$d(p_1, p_2) = |d(p, p_1) - d(p, p_2')| = \left| \|\overrightarrow{pp_1}\| - \left\|\overrightarrow{pp_2'}\right\| \right| \overset{(*)}{=} \left\|\overrightarrow{p_1'p_2'}\right\| = d(p_1, p_2')$$

donde en $(*)$ he aplicado que $p_2' \in [p_1, p]$. Por tanto, tenemos que:

$$d(q, p_2) - d(q, p_1) < d(p_1, p_2') = d(p_1, p_2)$$

Mediante un razonamiento análogo, se demuestra que $d(q, p_1) - d(q, p_2) < d(p_1, p_2)$. Por tanto, $q \notin H$. Es decir, hemos demostrado que $B \cap H = \{p\}$, y como la recta tangente a una curva en un punto es única, tenemos que $B = T_p(H)$.

Ejercicio 5.3.8. Cuestiones sobre parábolas:

1. Sean p_0 un punto de un plano afín euclídeo $\mathbb{E}$ y R una recta de $\mathbb{E}$ que no contiene a p_0. Demuestra que $H = \{p \in \mathbb{E} \mid d(p, p_0) = d(p, R)\}$ es una parábola. El punto p_0 recibe el nombre de foco de la parábola y R se llama directriz de la parábola. Se llama vértice de la parábola al punto de la parábola más próximo al foco o, equivalentemente, a la directriz.

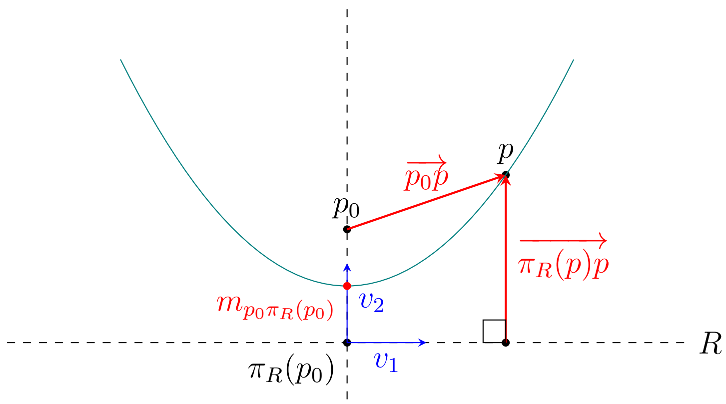


Figura 5.14: Parábola de foco p_0 y directriz R.

Sea el vector unitario $v_2 = \dfrac{\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}}{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|} \in \overrightarrow{R}^\perp \subset \overrightarrow{\mathbb{E}}$ y sea $v_1 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.14). Como $v_2 \in \overrightarrow{R}^\perp$, tenemos que $v_1 \in \overrightarrow{R}$.

Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_0\pi_R(p_0)}, \mathcal{B}\}$. Las coordenadas de p_0 en $\mathcal{R}$ son:

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0\pi_R(p_0)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} = m_{p_0\pi_R(p_0)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} \cdot \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|} =$$

$$= \left(0, \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

Además, dado $p \in \mathbb{E}$ con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$, calculamos las coordenadas en $\mathcal{R}$ de $\pi_R(p)$:

$$\pi_R(p) = \pi_R(m_{p_0\pi_R(p_0)} + xv_1 + yv_2) = \pi_R\left(\pi_R(p_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} + xv_1 + yv_2\right) =$$

$$= \pi_R(\pi_R(p_0)) + \pi_{\overrightarrow{R}}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} + xv_1 + yv_2\right) = \pi_R(p_0) + xv_1 =$$

$$= m_{p_0\pi_R(p_0)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} + xv_1 = \left(x, -\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

donde he hecho uso de que $v_1 \in \overrightarrow{R}$, $\;v_2, \overrightarrow{p_0\pi_R(p_0)} \in \overrightarrow{R}^\perp$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p \in H &\Longleftrightarrow d(p, p_0) = d(p, R) \Longleftrightarrow d(p, p_0) = d(p, \pi_R(p)) \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2 + \cancel{y^2} - y\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|^2}{4}} = \\
&\qquad\qquad = \cancel{y^2} + y\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|^2}{4}} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2y = \frac{x^2}{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}
\end{aligned}$$

Por tanto, H es una parábola.

2. Prueba que toda parábola se puede escribir como en el apartado anterior, para cierto punto p_0 y cierta recta R de $\mathbb{E}$.

Sabemos que toda parábola, en cierto sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ dado por $\mathcal{R} = \{q_0, \{v_1, v_2\}\}$, tiene como ecuación asociada en $\mathcal{R}$:

$$2y = \frac{x^2}{a^2} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}^+$$

Sea $p_0 = \left(0, \frac{a^2}{2}\right)_{\mathcal{R}}$, y sea $p_0' = (0, -\frac{a^2}{2})_{\mathcal{R}}$. Tenemos que $\overrightarrow{p_0p_0'} \in \mathcal{L}\{v_2\}$. Sea $R = p_0' + \mathcal{L}\{v_1\}$, y como $v_1 \perp v_2$, entonces $p_0' = \pi_R(p_0)$. Por tanto, tenemos que:

$$\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0} = \overrightarrow{p_0'p_0} = \left(0, \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(0, a^2\right)_{\mathcal{B}} \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\| = a^2$$

Además, veamos que $q_0 = m_{p_0\pi_R(p_0)}$. Tenemos que:

$$m_{p_0\pi_R(p_0)} = p_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0\pi_R(p_0)} = \left(0, \frac{a^2}{2}\right)_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}\left(0, a^2\right)_{\mathcal{B}} = (0,0)_{\mathcal{R}} = q_0$$

Por tanto, como las implicaciones eran dobles, tenemos que:

$$p \in H \Longleftrightarrow 2y = \frac{x^2}{a^2} \Longleftrightarrow d(p, p_0) = d(p, R)$$

3. Demuestra que toda parábola H es simétrica con respecto a la recta que pasa por su foco y es perpendicular a su directriz (esta recta se llama eje de la parábola).

   Sea el vector unitario $v_2 = \dfrac{\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}}{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|} \in \overrightarrow{R}^\perp \subset \overrightarrow{\mathbb{E}}$ y sea $v_1 \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente (estos vectores están representados también el la Figura 5.14). Como $v_2 \in \overrightarrow{R}^\perp$, tenemos que $v_1 \in \overrightarrow{R}$. Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{p_0\pi_R(p_0)}, \mathcal{B}\}$. Tenemos que las coordenadas de p_0 en $\mathcal{R}$ son:

$$p_0 = \left(0, \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

   Además, dado $p \in \mathbb{E}$ con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$, calculamos las coordenadas en $\mathcal{R}$ de $\pi_R(p)$:

$$\pi_R(p) = \left(x, -\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

   Sea entonces $p \in \mathbb{E}$, con $p = (x, y)_{\mathcal{R}}$. Tenemos que:

$$\sigma_{R^\perp_{p_0}}(p) = (-x, y)_{\mathcal{R}}$$

donde he usado que $v_1 \in \overrightarrow{R}, v_2 \in \overrightarrow{R}^\perp$. Por tanto, tenemos que:

$$d(p,p_0) = d(p,R) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(y + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(-x)^2 + \left(y - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(y + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_R(p_0)p_0}\right\|}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d(\sigma_{R^\perp_{p_0}}(p), p_0) = d(\sigma_{R^\perp_{p_0}}(p), R)$$

Por tanto, $p \in H \Longleftrightarrow \sigma_{R^\perp_{p_0}}(p) \in H$, es decir, H es simétrica con respecto a $R^\perp_{p_0}$, que es el eje de la parábola.

4. Prueba que, para cada punto p de una parábola H, la recta tangente a H en p forma ángulos iguales con la recta que pasa por p y su foco y con la recta que pasa por p y es paralela al eje de la parábola.

Ejercicio 5.3.9. Consideremos las siguientes rectas de $\mathbb{R}^3$:

$$R_1 = (1,0,0) + \mathcal{L}\{(0,1,1)\} \qquad R_2 = (1,0,0) + \mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$$

1. Demuestra que la superficie generada al rotar R_1 (o bien R_2) alrededor del eje z es el hiperboloide de una hoja que tiene ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   Tenemos que:

$$R_1 = \{(1,\lambda,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad R_2 = \{(1,-\lambda,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   Sea $\overrightarrow{f}$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z. Su matriz asociada en la base canónica es:

$$M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(R_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in [0,2\pi[, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ (\cos\theta - \lambda \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta + \lambda\cos\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in [0,2\pi[, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overrightarrow{f}(R_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in [0,2\pi[, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ (\cos\theta + \lambda \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta - \lambda\cos\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in [0,2\pi[, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   Sea $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Veamos que $\overrightarrow{f}(R_1) = H$:

$\subset$) Veamos que todo punto de $\overrightarrow{f}(R_1)$ está en H:

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta - \lambda\operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta + \lambda\cos\theta)^2 - \lambda^2 = \\
&\quad = \cos^2\theta - \cancel{2\lambda\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \lambda^2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2\lambda\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \\
&\qquad + \lambda^2\cos^2\theta - \lambda^2 = \\
&\quad = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \lambda^2\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - \lambda^2 = \\
&\quad = 1 + \lambda^2 - \lambda^2 = 1
\end{aligned}$$

$\supset$) Veamos que todo punto de H está en $\overrightarrow{f}(R_1)$. Como $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, tenemos que $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Por tanto:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = 1$$

Por tanto, existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$\frac{x}{\sqrt{1+z^2}} = \cos\theta \qquad \frac{y}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{sen}\theta$$

Veamos ahora que $\overrightarrow{f}(R_2) = H$:

$\subset$) Veamos que todo punto de $\overrightarrow{f}(R_2)$ está en H:

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta + \lambda\operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \lambda\cos\theta)^2 - \lambda^2 = \\
&\quad = \cos^2\theta + \cancel{2\lambda\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \lambda^2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cancel{2\lambda\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \\
&\qquad + \lambda^2\cos^2\theta - \lambda^2 = \\
&\quad = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \lambda^2\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - \lambda^2 = \\
&\quad = 1 + \lambda^2 - \lambda^2 = 1
\end{aligned}$$

$\supset$) Veamos que todo punto de H está en $\overrightarrow{f}(R_2)$. Como $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, tenemos que $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Por tanto:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = 1$$

Por tanto, existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$\frac{x}{\sqrt{1+z^2}} = \cos\theta \qquad \frac{y}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{sen}\theta$$

2. Deduce que si H es cualquier hiperboloide de una hoja de $\mathbb{R}^3$ y $p \in H$ entonces existen dos rectas distintas contenidas en H que pasan por p.

Ejercicio 5.3.10. Prueba que cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ corta al hiperboloide de una hoja que tiene ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Ejercicio 5.3.11. Encuentra, si existe, una parábola de $\mathbb{R}^2$ que pase por los puntos $(2,0),(0,1),(3,1)$ y $(0,0)$.

Tenemos que una hipercuádrica es del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Establecemos las condiciones de contorno dadas:

$$\begin{aligned}
&(2,0) \longrightarrow 4A + 2D + F = 0\\
&(0,1) \longrightarrow B + E + F = 0\\
&(3,1) \longrightarrow 9A + B + 3C + 3D + E + F = 0\\
&(0,0) \longrightarrow F = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a revolver queda:

$$\left\{\begin{array}{l} F=0\\ 2A+D=0\\ B+E=0\\ 9A+B+3C+3D+E=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F=0\\ D=-2A\\ E=-B\\ 9A+B+3C-6A-B=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F=0\\ D=-2A\\ E=-B\\ C=-A \end{array}\right\}$$

Por tanto, nuestra hipercuádrica queda:

$$Ax^2 + By^2 - Axy - 2Ax - By = 0 \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Por tanto, hay gran cantidad de hipercuádricas que pasan por los 4 puntos. Clasifiquémoslas en función de $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
0 &= Ax^2 + By^2 - Axy - 2Ax - By =\\
&= A[x^2 - x(y+2)] + By^2 - By =\\
&= A\left[x - \frac{y+2}{2}\right]^2 - A\cdot\frac{(y+2)^2}{4} + By^2 - By =\\
&= A\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{A}{4}\right)y^2 - (A+B)y - A
\end{aligned}$$

Como en una parábola existe un sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tal que su ecuación reducida en dicho sistema es $\widetilde{x}^2 = 2\widetilde{y}$, entonces necesito que la segunda coordenada no esté elevado al cuadrado. Por tanto,

$$B - \frac{A}{4} = 0 \Longleftrightarrow A = 4B$$

Tenemos entonces que la hipercuádrica queda:

$$0 = 4B\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 - 5By - 4B = 4B\left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{5By + 4B}{2}$$

Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{B} & 2\sqrt{B} & -\sqrt{B} \\ 2B & 0 & 5B \end{array}\right)$$

Tenemos que se trata de un sistema de referencia para todo $B \in \mathbb{R}^*$, por lo que $B \neq 0$. En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 = 2\widetilde{y}^2$$

Es decir, se trata de una parábola. Por tanto, tenemos que las parábolas que pasan por dichos puntos son de la forma:

$$4Bx^2 + By^2 - 4Bxy - 8Bx - By = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - y = 0$$

Y por tanto, hemos determinado de forma única dicha parábola. Notemos que hemos simplificado porque $B \neq 0$.

Ejercicio 5.3.12. Clasifica euclídeamente las siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$ y obtén, en cada caso, un sistema de referencia euclídeo en el cual su expresión sea reducida:

1. $-125 - 220x - 14x^2 - 40y - 96xy + 14y^2 = 0$.

   Tenemos que la matriz asociada a dicha cónica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} -125 & -110 & -20 \\ \hline -110 & -14 & -48 \\ -20 & -48 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

   Diagonalizamos A. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 2500 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 50$$

   Sus vectores propios asociados son:

$$V_{50} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -64 & -48 \\ -48 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}(-3, 4)\right\}$$

$$V_{-50} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 36 & -48 \\ -48 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}(4, 3)\right\}$$

   Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} -14 & -48 \\ -48 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -110 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} -14 & -48 \\ -48 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 20 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = (-1, -2)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{c, \left\{\dfrac{1}{5}(-3,4), \dfrac{1}{5}(4,3)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -62500 = \widetilde{a} \cdot 50 \cdot -50 \Longrightarrow \widetilde{a} = 25$$

Por tanto, la matriz asociada a la hipercuádrica en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 25 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$50\widetilde{x}^2 - 50\widetilde{y}^2 = -25 \Longleftrightarrow 2\widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 = -1$$

Por tanto, se trata de una hipérbola que corta al eje Y de ese nuevo sistema de referencia. Sus ejes son:

$$e_1 = (-1,-2) + \mathcal{L}\{(-3,4)\} \qquad e_2 = (-1,-2) + \mathcal{L}\{(4,3)\}$$

Su centro es el punto $(-1,-2)$. La longitud de los semiejes (que son iguales, por ser equilátera) es $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La mitad de la distancia focal es $c = 1$. Como corta al eje Y de dicho sistema de referencia, tenemos que sus focos son:

$$F_1 = (0,1)_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (0,-1)_{\mathcal{R}'}$$

Las ecuaciones de las asíntotas en $\mathcal{R}'$ son:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Longrightarrow y = -\frac{b}{a}x = -x \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Longrightarrow y = \frac{b}{a}x = x$$

2. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 2 = 0$.

Tenemos que la matriz asociada a dicha cónica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \hline 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

Diagonalizamos A. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$$

Sus vectores propios asociados son:

$$V_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$$

$$V_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$$

Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{c, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -16 = \widetilde{a} \cdot 4 \cdot 2 \Longrightarrow \widetilde{a} = -2$$

Por tanto, su matriz asociada en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$4\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{y}^2 = 2 \Longleftrightarrow 2\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 1$$

Por tanto, se trata de una elipse. Sus ejes son:

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,1)\} \qquad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}$$

Su centro es el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La longitud de los semiejes es $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = 1$. La mitad de la distancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces, los focos son:

$$F_1 = (0, {}^{-1}/\sqrt{2})_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (0, {}^{1}/\sqrt{2})_{\mathcal{R}'}$$

3. $-2\sqrt{2} + 12x + 3\sqrt{2}x^2 + 4y + 2\sqrt{2}xy + 3\sqrt{2}y^2 = 0$.

   Tenemos que la matriz asociada a dicha cónica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} -2\sqrt{2} & 6 & 2 \\ \hline 6 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

Diagonalizamos A. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 6\sqrt{2}\lambda + 16 = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 4\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Sus vectores propios asociados son:

$$V_{4\sqrt{2}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$$

$$V_{2\sqrt{2}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$$

Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \left(-\sqrt{2}, 0\right)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{c, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -128\sqrt{2} = \widetilde{a} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \Longrightarrow \widetilde{a} = -8\sqrt{2}$$

Por tanto, su matriz asociada en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -8\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$4\sqrt{2}\widetilde{x}^2 + 2\sqrt{2}\widetilde{y}^2 = 8\sqrt{2} \Longleftrightarrow \frac{\widetilde{x}^2}{2} + \frac{\widetilde{y}^2}{4} = 1$$

Por tanto, se trata de una elipse. Sus ejes son:

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(1,1)\} \qquad e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathcal{L}\{(-1,1)\}$$

Su centro es el punto $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$. La longitud de los semiejes es $b = \sqrt{2}$, $a = 2$. La mitad de la distancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$. Entonces, los focos son:

$$F_1 = (0, -\sqrt{2})_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (0, \sqrt{2})_{\mathcal{R}'}$$

4. $4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$.

Tenemos que la matriz asociada a dicha cónica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

Diagonalizamos A. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, se trata de una parábola. Sus vectores propios asociados son:

$$V_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) \right\}$$

$$V_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \right\}$$

El eje entonces de la parábola es:

$$\begin{aligned} e &= \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid (0, 2, 1)\widehat{A}(1, x, y)^t = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid (0, 2, 1) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 2 + 10x + 5y = 0 \right\} = \\ &= (-6/5, 2) + \mathcal{L}\{(-1, 2)\} \end{aligned}$$

Para calcular el vértice de la parábola, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 10x + 5y = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow v = \left(\frac{-29}{50}, \frac{19}{25} \right)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{ v, \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \right\} \right\}$.

En $\mathcal{R}'$, su matriz asociada queda:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \lambda \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para calcular el valor de λ, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = -1 = -5\lambda^2 \Longrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$5x^2 = -2\lambda y \Longleftrightarrow \frac{5}{-\lambda}x^2 = 2y$$

Como el coeficiente de x^2 es positivo, tenemos que $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Si la distancia del vértice al foco es c, entonces:

$$\frac{1}{2c} = -\frac{\lambda}{5} \Longrightarrow c = -\frac{\lambda}{10} = \frac{1}{10\sqrt{5}}$$

Por tanto, consideramos los siguientes puntos:

$$P_1 = \left(\frac{-29}{50}, \frac{19}{25}\right) + \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(\frac{-14}{25}, \frac{18}{25}\right)$$
$$P_2 = \left(\frac{-29}{50}, \frac{19}{25}\right) - \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Por tanto, supongamos que la directriz pasa por P_2 es decir, $d' = P_2 + \mathcal{L}\{(2,1)\}$. Su ecuación cartesiana es:

$$\begin{vmatrix} 2 & x + 3/5 \\ 1 & y - 4/5 \end{vmatrix} = 0 = 2y - \frac{8}{5} - x - \frac{3}{5} = 2y - x - \frac{11}{5}$$

Comprobemos si lo que hemos supuesto como directriz corta a la parábola o no:

$$\left\{\begin{array}{l} 2y - x - \frac{11}{5} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Como dicho sistema *tiene dos soluciones* reales, entonces no era la directriz. Por tanto, la directriz es $d = \left(\dfrac{-14}{25}, \dfrac{18}{25}\right) + \mathcal{L}\{(2,1)\}$; y el foco es $P_2 = F = \left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

5. $-3 + 2x + x^2 - 6y - 6xy + y^2 = 0$.

   Tenemos que la matriz asociada a dicha cónica es:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

   Diagonalizamos A. Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right.$$

   Sus vectores propios asociados son:

$$V_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right\}$$

$$V_{-2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$$

Además, para que el vector $\widetilde{z}$ (primera columna) sea entero nulo, buscamos que:

$$Ac + z = 0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto se da si y solo si:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = (-1,0)$$

Por tanto, definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \left\{(-1,0), \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}\right\}$.

Para calcular el nuevo valor de $\widetilde{a}$, sabemos que el determinante es invariante mediante semejanzas.

$$|\widehat{A}| = 32 = \widetilde{a} \cdot 4 \cdot -2 \Longrightarrow \widetilde{a} = -4$$

Por tanto, la matriz asociada a la hipercuádrica en $\mathcal{R}'$ es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Por tanto, su ecuación en dicho sistema de referencia es:

$$4\widetilde{x}^2 - 2\widetilde{y}^2 = 4 \Longleftrightarrow \widetilde{x}^2 - \frac{1}{2}\widetilde{y}^2 = 1$$

Por tanto, se trata de una hipérbola que corta al eje X de ese nuevo sistema de referencia. Sus ejes son:

$$e_1 = (-1,0) + \mathcal{L}\{(1,-1)\} \qquad e_2 = (-1,0) + \mathcal{L}\{(1,1)\}$$

Su centro es el punto $(-1,0)$. La longitud de los semiejes es $a = \sqrt{2}$, $b = 1$. La mitad de la distancia focal es $c = \sqrt{3}$. Entonces, los focos son:

$$F_1 = (\sqrt{3},0)_{\mathcal{R}'} \qquad F_2 = (-\sqrt{3},0)_{\mathcal{R}'}$$

Las ecuaciones de las asíntotas en $\mathcal{R}'$ son:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0 \Longrightarrow y = -\sqrt{2}x \qquad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{2}x$$

Ejercicio 5.3.13. Clasifica euclídeamente las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$ y obtén, en cada caso, un sistema de referencia euclídeo en el cual su expresión sea reducida:

1. $3x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz - 6x - 6y + 3 = 0$.
2. $3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz + 2\sqrt{2}x + 2y + 2\sqrt{2}z + 2 = 0$.

Ejercicio 5.3.14. Clasifica las siguientes cónicas afines de $\mathbb{R}^2$ y determina un sistema de referencia donde su expresión sea reducida:

1. $4x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 3y - 3 = 0$.
2. $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x - 18y + 11 = 0$.
3. $2x^2 + 12xy + 18y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$
4. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 9y + 2 = 0$.
5. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.
6. $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x - 11y + 11 = 0$.

Ejercicio 5.3.15. Clasifica las siguientes cuádricas afines de $\mathbb{R}^3$ y determina un sistema de referencia donde su expresión sea reducida:

1. $3x^2 + 4y^2 + 21z^2 + 6xy + 12xz + 18yz - 12x - 14y - 29z + 14 = 0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= 3x^2 + 4y^2 + 21z^2 + 6xy + 12xz + 18yz - 12x - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3x^2 + 6x(y + 2z - 2) + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3[x^2 + 2x(y + 2z - 2)] + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 - 3(y + 2z - 2)^2 + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 - 3(y^2 + 4z^2 + 4 + 4yz - 4y - 8z) + \\
&\qquad\qquad + 4y^2 + 21z^2 + 18yz - 14y - 29z + 14 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 2y - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + y^2 + 2y(3z - 1) + 9z^2 - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + [y + (3z - 1)]^2 - (3z - 1)^2 + 9z^2 - 5z + 2 = \\
&= 3(x + y + 2z - 2)^2 + [y + 3z - 1]^2 + z + 1 = \\
&= [\sqrt{3}(x + y + 2z - 2)]^2 + [y + 3z - 1]^2 - 2\left[-\frac{z+1}{2}\right]
\end{aligned}$$

   Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

   Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3}/3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{(0,4,-1), \left\{\left(\sqrt{3}/3, 0, 0\right), (-1,1,0), (-2,6,-2)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 2\widetilde{z}$$

Por tanto, se trata de un paraboloide elíptico.

2. $3x^2 + 2y^2 + 7z^2 + 6xy + 12xz + 6yz - 12x - 10y - 10z + 12 = 0$.
3. $x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + 4y - 12z = 0$.
4. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz + 2x - 3y + 4 = 0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz + 2x - 3y + 4 = \\
&= x^2 + 2x(-2y + z + 1) + 4y^2 + z^2 - 4yz - 3y + 4 = \\
&= (x - 2y + z + 1)^2 - (-2y + z + 1)^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 3y + 4 = \\
&= (x - 2y + z + 1)^2 - (4y^2 + z^2 + 1 - 4yz - 4y + 2z) + 4y^2 + z^2 - 4yz - 3y + 4 = \\
&= (x - 2y + z + 1)^2 + y + 3 - 2z \\
&= (x - 2y + z + 1)^2 - 2 \cdot \frac{-y - 3 + 2z}{2}
\end{aligned}$$

Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-3/2 & 0 & -1/2 & 1
\end{array}\right)$$

Notemos que hemos usado $\widetilde{y} = y$, aunque bastaría con poner valores de $\widetilde{y}$ de forma que la matriz anterior fuese regular, para que fuese un cambio de sistema de referencia.

Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-3/2 & 0 & -1/2 & 1
\end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-5/2 & 1 & 3/2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
3/2 & 0 & 1/2 & 1
\end{array}\right)$$

Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{\left(-\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}\right), \left\{(1,0,0), \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), (-1,0,1)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 = 2\widetilde{z}^2$$

Por tanto, se trata de un cilindro hiperbólico.

5. $x^2 + 11y^2 + 9z^2 - 6xy + 4xz - 8yz + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + 11y^2 + 9z^2 - 6xy + 4xz - 8yz + 2x - 2y + 2z + 3 = \\
&= x^2 + 2x(-3y + 2z + 1) + 11y^2 + 9z^2 - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= [x + (1 - 3y + 2z)]^2 - (1 - 3y + 2z)^2 + 11y^2 + 9z^2 - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 - (1 + 9y^2 + 4z^2 - 6y + 4z - 12yz) + 11y^2 + 9z^2 - \\
&\qquad - 8yz - 2y + 2z + 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 4y - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2y^2 + 4y(z + 1) + 5z^2 - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2[y + (z + 1)]^2 - 2(z + 1)^2 + 5z^2 - 2z + 2 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3z^2 - 6z = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3(z^2 - 2z + 1) - 3 = \\
&= (x + 1 - 3y + 2z)^2 + 2(y + z + 1)^2 + 3(z - 1)^2 - 3 = \\
&= \frac{1}{3}(x + 1 - 3y + 2z)^2 + \frac{2}{3}(y + z + 1)^2 + \frac{3}{3}(z - 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

   Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right)$$

   Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{c|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right)\right]^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -9 & \sqrt{3} & 3\sqrt{6}/2 & -5 \\ -2 & 0 & \sqrt{6}/2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{(-9, -2, 1), \left\{\left(\sqrt{3}, 0, 0\right), \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right), (-5, -1, 1)\right\}\right\}$$

   En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 = 1$$

   Por tanto, se trata de un elipsoide.

6. $xy + xz + yz - 1 = 0$.

Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= xy + xz + yz - 1 = \\
&= x(y+z) + yz - 1 = \\
&= x(y+z) + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= (y+z)\left[x + \frac{1}{4}(y+z)\right] - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(y+z+x+\frac{1}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y+z-x-\frac{1}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(x+\frac{5}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(-x+\frac{3}{4}(y+z)\right)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - 1 = \\
&= \frac{1}{4}\left(-x+\frac{3}{4}(y+z)\right)^2 + \frac{1}{4}(y-z)^2 - \frac{1}{4}\left(x+\frac{5}{4}(y+z)\right)^2 + 1
\end{aligned}$$

Aplicamos entonces el cambio de sistema de referencia a $\mathcal{R}'$, de forma que:

$$M(Id, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 \end{array}\right)$$

Para hallar el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, tenemos que:

$$M(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) = \left[\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 \end{array}\right)\right]^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -5/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Es decir, si $\mathcal{R}_0 = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, entonces:

$$\mathcal{R}' = \left\{O, \left\{\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 1, -1), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right\}$$

En dicho sistema, si las coordenadas de un punto son $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})_{\mathcal{R}'}$, tenemos que:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 - \widetilde{z}^2 = -1$$

Por tanto, se trata de un hiperboloide de dos hojas. Vemos que corta a la recta $\widetilde{x} = \widetilde{y} = 0$ (eje $\widetilde{z}$).

Ejercicio 5.3.16. Clasifica, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$:

1. $x^2 + ay^2 + 2xy - 2x + a = 0$.

Empleamos el método de completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + ay^2 + 2xy - 2x + a = \\
&= x^2 + 2x(y-1) + ay^2 + a = \\
&= (x+y-1)^2 - (y-1)^2 + ay^2 + a = \\
&= (x+y-1)^2 - (y^2 - 2y + 1) + ay^2 + a = \\
&= (x+y-1)^2 + (a-1)y^2 - 2y + a - 1 =
\end{aligned}$$

Distinguimos en función de a:

- Si $a - 1 = 0$, entonces:

  $$0 = (x+y-1)^2 - 2y$$

  Es decir, se trata de una parábola.

- Si $a - 1 > 0$, entonces:

  $$\begin{aligned}
  0 &= (x+y-1)^2 + (a-1)y^2 - 2y + a - 1 = \\
  &= (x+y-1)^2 + \left(\sqrt{a-1}y - \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)^2 - \frac{1}{a-1} + a - 1
  \end{aligned}$$

  Por tanto, se puede tratar de una elipse, un punto o el vacío.

  - $\dfrac{1}{a-1} + 1 - a = 0$:

    $$\frac{1}{a+1} + 1 - a = 0 \iff 1 = (a+1)(a-1) = a^1 - 1 \iff a = 2$$

    Por tanto, para $a = 2$, se trata de un punto.

  - $\dfrac{1}{a-1} + 1 - a > 0$:

    $$\frac{1}{a-1} + 1 - a > 0 \iff 1 > (a-1)^2 \iff 1 > a - 1 \iff 2 > a$$

    Por tanto, para $1 < a < 2$, se trata de una elipse.

  - $\dfrac{1}{1-a} + 1 - a < 0$:

    $$\frac{1}{a-1} + 1 - a < 0 \iff 1 < (a-1)^2 \iff 1 < a - 1 \iff 2 < a$$

    Por tanto, para $a > 2$, se trata del vacío.

- Si $a - 1 < 0$, entonces:

  $$\begin{aligned}
  0 &= (x+y-1)^2 + (a-1)y^2 - 2y + a - 1 = \\
  &= (x+y-1)^2 - \left[(1-a)y^2 + 2y\right] + a - 1 = \\
  &= (x+y-1)^2 - \left(\sqrt{1-a}y + \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2 + \frac{1}{1-a} + a - 1
  \end{aligned}$$

  Por tanto, se puede tratar de una hipérbola o de dos rectas secantes. Para ello, distinguimos en función de a:

- $-\dfrac{1}{1-a}+1-a=0$:

  $$-\frac{1}{a+1}+1-a=0 \Longleftrightarrow -1=(a+1)(a-1)=a^1-1 \Longleftrightarrow a=0$$

  Por tanto, para $a=0$, se trata de dos rectas secantes.
- $-\dfrac{1}{1-a}+1-a>0$:

  $$-\frac{1}{a-1}+1-a>0 \Longleftrightarrow -1<(a-1)^2 \Longleftrightarrow -1<a-1 \Longleftrightarrow a<0$$

  Por tanto, para $a<0$, se trata de una hipérbola que corta al eje $\widetilde{X}$.
- $-\dfrac{1}{1-a}+1-a<0$:

  $$-\frac{1}{a-1}+1-a<0 \Longleftrightarrow -1>(a-1)^2 \Longleftrightarrow -1>a-1 \Longleftrightarrow a>0$$

  Por tanto, para $1>a>0$, se trata de una hipérbola que corta al eje $\widetilde{Y}$.

2. $x^2+axy+y^2+1=0$.

   Empleamos el método de completar cuadrados:

   $$\begin{aligned}0&=x^2+axy+y^2+1=\\&=x^2+2x\left(\frac{a}{2}y\right)+y^2+1=\\&=\left(x+\frac{a}{2}y\right)^2+y^2-\frac{a^2}{4}y^2+1=\\&=\left(x+\frac{a}{2}y\right)^2+\left(1-\frac{a^2}{4}\right)y^2+1\end{aligned}$$

   Distinguimos en función de a:

   - Si $1-\dfrac{a^2}{4}=0$, entonces:

     $$1-\frac{a^2}{4}=0 \Longleftrightarrow 1=\frac{a^2}{4} \Longleftrightarrow a=\pm 2$$

     Es decir, para $a=\pm 2$, se trata del vacío.
   - Si $1-\dfrac{a^2}{4}>0$, entonces:

     $$1-\frac{a^2}{4}>0 \Longleftrightarrow 1>\frac{a^2}{4} \Longleftrightarrow a^2<4 \Longleftrightarrow |a|<2$$

     Por tanto, para $|a|<2$, es decir, si $a\in]-2,2[$, se trata del vacío.

- Si $1 - \frac{a^2}{4} < 0$, entonces:

$$1 - \frac{a^2}{4} < 0 \Longleftrightarrow 1 < \frac{a^2}{4} \Longleftrightarrow a^2 > 4 \Longleftrightarrow |a| > 2$$

  Por tanto, para $|a| > 2$, es decir, si $a \in]-\infty, -2[\ \cup\ ]2, +\infty[$, se trata de una hipérbolaelipse.

Ejercicio 5.3.17. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $F = (0, 0, 1)$ y el plano afín S de ecuación $x - z = 0$. Definimos el conjunto:

$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid d(p, F) = d(p, S)\}.$$

Demostrar que C es una cuádrica y clasificarla.

Sea el vector unitario $v_3 = \frac{\overrightarrow{\pi_S(F)F}}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} \in \overrightarrow{S}^\perp \subset \mathbb{R}^3$ y sea $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Como $v_3 \in \overrightarrow{S}^\perp$, tenemos que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{S}$.

Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{F\pi_S(F)}, \mathcal{B}\}$. Las coordenadas de F en $\mathcal{R}$ son:

$$\begin{aligned}F &= F + \frac{1}{2}\overrightarrow{F\pi_S(F)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} = m_{F\pi_S(F)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} \cdot \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} = \\ &= \left(0, 0, \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

Además, dado $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$, calculamos las coordenadas en $\mathcal{R}$ de $\pi_S(p)$:

$$\begin{aligned}\pi_S(p) &= \pi_S(m_{F\pi_S(F)} + xv_1 + yv_2 + zv_3) = \\ &= \pi_S\left(\pi_S(F) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 + zv_3\right) = \\ &= \pi_S(\pi_S(F)) + \pi_{\overrightarrow{R}}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 + zv_3\right) = \pi_S(F) + xv_1 + yv_2 = \\ &= m_{F\pi_S(F)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 = \left(x, y, -\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

donde he hecho uso de que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{S}$, $v_3, \overrightarrow{F\pi_S(F)} \in \overrightarrow{S}^\perp$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p \in H &\Longleftrightarrow d(p,F) = d(p,S) \Longleftrightarrow d(p,F) = d(p,\pi_S(p)) \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2} = \\
&\qquad = \sqrt{(x-x)^2+(y-y)^2+\left(z+\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2 = \left(z+\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2+y^2+\cancel{z^2} - z\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|^2}{4}} = \\
&\qquad = \cancel{z^2} + z\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|^2}{4}} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2z = \frac{x^2+y^2}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un paraboloide elíptico.

Una vez resuelto el ejercicio desde un enfoque más teórico y abstracto, vamos a obtener los resultados numéricos, sabiendo el valor de F y de S. Tenemos que $S = (0,0,0) + \mathcal{L}\left\{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$. Por tanto, $\overrightarrow{S}^\perp = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\}$. Veamos si tomando $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, tenemos que la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Es directo ver que es ortonormal, por lo que comprobemos si es positivamente orientada:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Calculamos ahora $\pi_S(F)$, para lo cual nos definimos un sistema de referencia auxiliar (no es el buscado) para realizar de forma más sencilla los cálculos. Sea este $\mathcal{R}_{aux} = \{0, \mathcal{B}\}$:

$$\pi_S(0,0,1) = (0,0,0) + \pi_{\overrightarrow{S}}(0,0,1) = (0,0,0) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}_{aux}}$$

para lo cual he tenido que calcular que $(0,0,1) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}}$. Por tanto, calculamos ahora $m_{F\pi_S(F)}$:

$$m_{F\pi_S(F)} = (0,0,1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{F\pi_S(F)} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{R}_{aux}} + \frac{1}{2}\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \\ = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{\mathcal{R}_{aux}}$$

Calculamos ahora las coordenadas de $m_{F\pi_S(F)}$ en el sistema de referencia usual:

$$m_{F\pi_S(F)} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{\mathcal{R}_{aux}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \\ = \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{4}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

Sea entonces $\mathcal{R}' = \{m_{F\pi_S(F)}, \mathcal{B}\}$ el sistema de referencia buscado. Tenemos entonces que, en dicho sistema la ecuación asociada a C es:

$$2z = \frac{x^2+y^2}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} \Longrightarrow 2z = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}/2} \Longleftrightarrow \sqrt{2}z = x^2+y^2$$

Vemos que, efectivamente, es un paraboloide elíptico.