Geometría I

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Miguel Ángel De la Vega Rodríguez
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 23 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

[1]El examen lo pone el departamento

1. [**2 puntos**] Enuncia y demuestra el Teorema del Rango.

Demostración. Tomemos una base $B_{\mathrm{Ker} f} = \{v_1, ..., v_{n(f)}\}$ y ampliémosla a una base de $V(K)$. $B = \{v_1, ..., v_{n(f)}, v_{n(f)+1}, ..., v(n)\}$. Sabemos que $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ y, puesto que los vectores v_i con $i \leqslant n(f)$ se aplican en 0, el conjunto $\{f(v_{n(f)+1}), ..., f(v_n)$ es también un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Como este conjunto tiene $n - n(f)$ vectores, bastará ver que los vectores del conjunto son linealmente independientes. Para ello tomamos una combinación lineal suya igualada a 0:

$$0 = a_{n(f)+1}f(v_{n(f)+1}) + ... + a_n f(v_n) = f(a_{n(f)+1}v_{n(f)+1} + ... + a_n v_n)$$

La expresión anterior claramente implica que $a_{n(f)+1}v_{n(f)+1} + ... + a_n v_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Pero entonces ese vector se puede expresa como combinación lineal de elementos de $B_{\mathrm{Ker} f}$. Esto es, para ciertos escalares $a_1, ..., a_{n(f)}$ se tiene:

$$a_{n(f)+1}v_{n(f)+1} + ... + a_n v_n = a_1 v_1 + ... + a_{n(f)} v_{n(f)}$$

Pasando los términos del segundo miembro al primero, se tiene una combinación lineal de la base B igualada al vector 0. Por tanto, todso los coeficientes de la combinación deben ser nulos, y en particular, $a_n(f) + 1 = ... = a_v = 0$ como se queria demostrar. □

2. Sea $U = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) [**2 Puntos**] Demostrar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ y calcular un complementario.

   Para ello, en primer lugar veamos que:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} a = a + c \\ a = b + d \\ c = 0 \end{array} \right\}$$

   que es el conjunto de soluciones de un SEL homogéneo por tanto un subespacio vectorial, Y como $\dim U = \dim M_2(\mathbb{R}) - 2 = 2$ y resolviendo el sistema obtenemos la siguiente base de U:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Y como el complementario de U, W está generado por dos vectores más, tomamos dos vectores linealmente independientes:

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) **[1 Punto]** Hallar una base de $M_2(\mathbb{R})/U$ y las coordenadas en esa base de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U$

Como W es un subespacio complementario de U, y $B_W = \{w_1, ..., w_k\}$ es una base de W entonces

$$\pi(B_W) = \{w_1 + U, ..., w_k + U\}$$

es una base de V/U. Por tanto, $\dim_K(V/U) = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} U = \dim(M_2(\mathbb{R})/U) = \dim(M_2(\mathbb{R}) - \dim U = 4 - 2 = 2$. y tomando

$$B_{V/U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U \right\}$$

Vamos a calcular ahora las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U$ Para ello, calculamos sus coordenadas en la siguiente base de V:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para ello, sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, b = 0, c = -1, d = 0$$

Por tanto obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U = 0 + U - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + U = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + U$$

c) **[2 Puntos]** Construir una aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}_3[x]$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen tenga por sistema de generadores $\{1+x, 1-x\}$

Para que la aplicación lineal tenga $\mathrm{Ker}(f) = U$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\{(1+x), (1-x)\}$ podemos hacer uso de lo ya obtenido y tomar los vectores de U y W:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + x$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - x$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= 1 - x \\
f(e_1 + e_2) = 0 \Rightarrow f(e_1) &= -f(e_2) \Rightarrow f(e_2) = -1 + x \\
f(e_3) &= 1 + x \\
f(e_1 + e_4) = 0 \Rightarrow f(e_1) &= -f(e_4) \Rightarrow f(e_4) = -1 + x
\end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación lineal f es:

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= a(1-x) + b(-1+x) + c(1+x) + d(-1+x) \\
&= a - b + c - d + x(-a + b + c + d)
\end{aligned}$$

d) **[1 Punto]** Calcular una matriz de f respecto a las bases usuales $B_U = \{E_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ (con la ordenación que se escoja) de $M_2(\mathbb{R})$ y $B_U^{'} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

Para ello, calcularemos la imágen de cada uno de los vectores de la base de $M_2(\mathbb{R})$, y lo expresaremos en la base $B_U^{'}$:

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= 1 - x = 1 \cdot 1 + -1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \Rightarrow (1, -1, 0, 0) \\
f(E_{12}) &= -1 + x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \Rightarrow (-1, 1, 0, 0) \\
f(E_{21}) &= 1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \Rightarrow (1, 1, 0, 0) \\
f(E_{22}) &= -1 + x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \Rightarrow (-1, 1, 0, 0)
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que la matriz de f es:

$$M(f : B_U^{'} \leftarrow B_U) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) **[1 Punto]** Encontrar, si es posible, bases B de $M_2(\mathbb{R})$ y $B^{'}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que:

$$M(f : B^{'} \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $B_U = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ y $B_U^{'} = \{1, x, x^2, x^3\}$ son bases de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_3[x]$ respectivamente,

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= (1, 0, 0, 0) = e_1 \\
f(E_{12}) &= (0, 1, 0, 0) = e_2 \\
f(E_{21}) &= (0, 0, 0, 0) = 0 \\
f(E_{22}) &= (0, 0, 0, 0) = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, si $B' = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, entonces:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$
$$v_3 \in \mathrm{Nuc}(f) \Rightarrow f(v_3) = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_4 \in \mathrm{Nuc}(f) \Rightarrow f(v_4) = 0 \Rightarrow v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y
$B' = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

f) [**1 Punto**] Hallar bases de $\mathrm{an}(U)$ y $\ker(f^t)$

- $\mathrm{an}(U)$

  Para calcular una base de $\mathrm{an}(U)$ construimos una base de U (ya la tenemos) y la ampliamos a una base de $M_2(\mathbb{R})$:

  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  Sea ahora $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$ la base dual de B, entonces, deducimos que $\{\varphi^3, \varphi^4\}$ es una base de $\mathrm{an}(U)$, por tanto:

  $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  De donde se obtiene que:

  $$\varphi^3\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = c \quad \varphi^4\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - b - d$$

- $\ker(f^t)$

  Para ello hacemos uso de la propiedad $\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) = \ker(f^t)$, en primer lugar, sabemos que

  $$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\{(1+x),(1-x)\} = \mathcal{L}(1,x)$$

  Que en coordenadas cartesianas es

  $$\mathrm{Im}(f) = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_2 = a_3 = 0\right\}$$

  Por tanto obtenemos que una base de $\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) = \ker(f^t)$ es $\{\varphi^1, \varphi^2\}$, donde:

  $$\varphi^1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 \quad \varphi^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_3$$