Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Inducción

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- <u>Para $n = 0$</u>:

  $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

  Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ ees cierto, es decir, que:

  $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

  $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) &\overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. □

Ejercicio 1.1.2. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

- <u>$n = 0$:</u>
$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

- <u>$n = 1$:</u>
$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

- <u>$n > 1$:</u>
$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) n \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

- <u>En el caso base $n = 0$</u>:
$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2$$

  Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n, $P(n)$ se tiene, como se pedía. □

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n, se quiere usar una verdad sobre $n-k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n+1$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

"n tiene un factor primo"

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

  En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- n no es primo: Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$.
  Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p. Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$.

$\square$

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso)**.** Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$
$$p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ \\ p\left(2a, \dfrac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a, b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado del tenor:

"Para todo número natural m, $p(m, n) = mn$."

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- $\underline{n = 0, \text{(sea cual sea } m)}$:
$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$
Luego $P(0)$ vale.

- <u>En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale</u>:

- Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:

  1. $\underline{n \equiv 0 \mod 2}$ (es par):
  $$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \overset{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$
  Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n}{2} < n$.

  2. $\underline{n \equiv 1 \mod 2}$ (es impar):
  $$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \overset{(*)}{=} \left(\cancel{2}m \cdot \frac{n-1}{\cancel{2}}\right) + m =$$
  $$= m(n-1) + m = mn - m + m = mn$$
  donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n, vale $P(n)$. $\square$

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$
Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.
Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:
$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$
Esto se debe a que:
$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$
Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:
$$\begin{aligned} \left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}\right) - \left(5^n + 3^{n-1}\right) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 5^n + 3^{n-1}\right) \end{aligned}$$
Como $2 \mid \left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1})\right)$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. □

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$
Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

  Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

  $$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$

  Esto se debe a que:

  $$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$

  Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

  $$\begin{aligned} \left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + \cancel{1} - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - \cancel{1} = \\ &= 5^n(5-1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4\left(5^n + 3^{n-1}\right) \overset{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he usado que el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid \left[\left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)\right]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.8. Demouestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:

  $$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 2 \geqslant \sqrt{2}$$

  Como $2 \geqslant \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff$$
$$\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \iff$$
$$\iff (2n+1)^2(n+2) \leqslant (2n+2)^2(n+1) \iff$$
$$\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leqslant (n+1)(4n^2+8n+4) \iff$$
$$\iff \cancel{4n^3} + \cancel{4n^2} + n + \cancel{8n^2} + \cancel{8n} + 2 \leqslant \cancel{4n^3} + \cancel{8n^2} + 4n + \cancel{4n^2} + \cancel{8n} + 4 \iff$$
$$\iff 2 + n \leqslant 4 + 4n \iff 0 \leqslant 2 + 3n$$

Como $0 \leqslant 2 + 3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ es cierto, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}(n+1)^2 < n^3\text{”}$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1+1)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} n^3 + 2n + 1 \leqslant n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}n^3 < n!\text{”}$$

- En el caso base, $n = 6$:

$$6^3 \leqslant 6! \iff 6^2 \leqslant 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leqslant 4 \cdot 5$$

  Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \overset{(*)}{<} n^3(n+1) \overset{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}5 \mid 8^n - 3^n\text{”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

  Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$5 \mid 8^n - 3^n$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

  $$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8-1) - 3^n \cdot (3-1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. □

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b, existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b:

- $\underline{a = 0 \text{ o } b = 0}$:

  Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b. Además, es el mínimo múltiplo común de a y b, ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $\underline{a, b > 0}$:

  Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b. Es claro que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b. Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:

  $$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

  Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Así pues, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b.

□

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de n para el que

$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden)**.** Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (o que S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea

$$M(S) = \{m \in \omega \mid \text{ para todo } x \in S, x \leqslant m\}$$

Se cumple lo siguiente:

- $n \in M(S)$
- $M(S) \neq \emptyset$
- Por el principio del buen orden, existe el mínimo de $M(S)$, denotado como m_0.
- $m_0 \neq 0$, porque m_0 es un mayorante de $S \setminus \{0\}$ que es no vacío.
- Si para todo $x \in S$ se cumpliera que

$$x < m_0$$

entonces, para todo $x \in S$ se cumpliría que

$$x \leqslant m_0 - 1$$

y por tanto $m_0 - 1 \in M(S)$ y además

$$0 \leqslant m_0 - 1 < m_0$$

de donde m_0 no sería el mínimo de $M(S)$, en contra de lo supuesto.
- Existe $x_0 \in S$ tal que

$$m_0 \leqslant x_0$$

- Como m_0 es un un mayorante de S se cumplirá que

$$x_0 \leqslant m_0$$

- Por las dos desigualdados anteriores, $m_0 = x_0$
- $m_0 \in S \cap M(S)$
- El mínimo de $M(S)$ es un elemento de S, luego es el máximo de S.

□

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leqslant n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. A continuación, daremos las ideas de la demostración para que el lector termine el desarrollo de la misma.

El razonamiento es por el principio de inducción matemática

$$P(n) \text{ es ``} 2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{''}$$

- Caso base: $n = 2$

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\Rightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

  Luego $P(2)$ es cierto.

- Hipótesis de inducción: supongamos que $n \in \omega$ y que vale $P(n)$, es decir

$$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- paso de inducción:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

  Entonces:

$$\begin{aligned} n + 1 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ (\sqrt{n+1})^2 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ \sqrt{n+1} &< \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &< \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \omega$ con $n \leqslant 2$, $P(n)$ vale.

$\square$

1.2. Recurrencia

Ejercicio 1.2.1. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geqslant 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geqslant 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz $r = 2$ de multiplicidad $m = 2$. La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n$$

Y ahora buscar los valores de c_1 y c_2 usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 3$, entonces:

$$\begin{aligned}
&1 = (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\
&3 = (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right)2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Ejercicio 1.2.2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0$$

El orden k de la recurrencia es 2 ($k = 2$). La ecución característica:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

En definitiva

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_1 = 1 \\
r_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_2 = 1
\end{aligned}$$

y se tiene: $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$
Si $\{x_n\}$ es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\
&= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

para ciertos valores de c_1 y c_2.

Ejercicio 1.2.3. Reuelva el problema de recurrencia

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 0$ y $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = -c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1\sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Ejercicio 1.2.4. Calcular la solución del problema de recurrencia

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que si:
Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 2$ y $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned}
2 &= x_0 \\
&= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\
&= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 2 - c_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= x_1 \\
&= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\
&= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (2-c_1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \cancel{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right) \\
&= c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\
&\Longrightarrow 1 = c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\
&\Longrightarrow 0 = c_1\sqrt{5} - \sqrt{5} \\
&\Longrightarrow c_1\sqrt{5} = \sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = 1 \Longrightarrow c_2 = 1
\end{aligned}$$

La solución es:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ejercicio 1.2.5. Resuelva el siguiente problema de recurrencia:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_1 &= 3 \\
u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n
\end{aligned}$$

De orden: $k = 2$
Ecuación característica: $x^2 - 4x + 4 = 0$
Soluciones:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

$$r_1 = 2 \qquad m_1 = 2$$

Solución general:

$$x_n = (c_1 + c_2)2^n$$

Pasamos ahora a buscar los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 1 &= u_0 \\ &= x_0 \\ &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 \\ &= c_1 \cdot 1 \\ &= c_1 \Longrightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= u_1 \\ &= x_1 \\ &= (1 + c_2 \cdot 1)2^1 \\ &= (1 + c_2) \cdot 2 \\ &= 2 + 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La solución

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right)2^n = \frac{2+n}{2}2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Ejercicio 1.2.6. De el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como "Torres de Hanoi", en función del número de discos n con los que cuente.

Para $n \geqslant 0$ sea u_n el número de pasos solicitado. Si el puzzle tuviese $n+1$ discos entonces (Intuimos que es mover $n-1$ piezas, mover la base y mover $n-1$ piezas):

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 1 + u_n \\ &= 2u_n + 1 \end{aligned}$$

Así pues recurrentemente:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

que resolveremos esquemáticamente:

$k = 1$.

Ecuación característica: $x - 2$.

Función de ajuste: $f(n) = 1^n = 1$.

Multiplicidad de 1 como solución de la ecución característica: $m = 0$.

Śolución particular:

$$x_n^{(p)} = n^m q(n)1^n \qquad \deg(g(n)) \leqslant \deg(p(n)) = 0$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_2 1^n = c_2 \\ x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 2^n + c_2 \end{aligned}$$

Calcularemos c_2 sin contar con valores de la sucesión. Sabemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} \\ &= c_2 - 2c_2 \\ &= c_2(1-2) = -c_2 \Longrightarrow c_2 = -1 \end{aligned}$$

Luego

$$x_n = c_1 2^n - 1$$

y como $x_0 = u_0 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 2^0 - 1 \\ &= c_1 - 1 \Longrightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$x_n = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned} n = 0; &\quad x_n = 0 \\ n = 1; &\quad x_1 = 2^1 - 1 = 1 \\ n = 2; &\quad x_2 = 2^2 - 1 = 3 \\ n = 3; &\quad x_3 = 2^3 - 1 = 7 \\ n = 4; &\quad x_4 = 2^4 - 1 = 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. Sea

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n.
2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n.

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= \sum_{k=0}^{n} k2^k \quad n \geqslant 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k2^k \right) + n2^n \\ &= u_{n-1} + n2^n \end{aligned}$$

   O sea, $u_n = u_{n-1} + n2^n$

2. Resolvemos el problema

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= u_{n-1} + n2^n \end{aligned}$$

Orden: $k = 1$.

Ecuación característica: $x - 1$.

Solución homogénea: $x_n^{(h)} = c_1$.

Función de ajuste: $f(n) = p(n)s^n = n2^n$.

$\Longrightarrow p(n) = n, \deg(p(n)) = 1$. $S = 2$, que no es solución de la ecuación característica, luego $m = 0$.

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= x^0(c_2 + c_3 n)2^n \\ &= (c_2 + c_3 n)2^n \end{aligned}$$

Calculemos $x_n^{(p)}$, o sea, los valores de c_2 y c_2.

$$(n+1)2^{n+1} = x_{n+1}^{(p)} - x_n^{(p)}$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (c_2 + c_3 n)2^n \\ x_{n+1}^{(p)} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} \\ (n+1)2^{n+1} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} - (c_2 + c_3 n)2^n \\ 2(n+1)2^n &= 2(c_2 + c_3(n+1))2^n - (c_2 + c_3 n)2^n \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3(n+1) - c_2 - c_3 n) \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3 n + 2c_3 - c_2 - c_3 n) \\ &= 2^n(c_2 + (2c_3 - c_3)n + 2c_3) \\ &= 2^n(c_2 + 2c_3 + c_3 n) \end{aligned}$$

luego

$$2n + 2 = 2(n+1) = c_3 n + c_2 + 2c_3$$

basta con que

$$\begin{aligned} 2 &= c_3 \\ 2 &= c_2 + 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto $c_3 = 2$ y

$$\begin{aligned} 2 &= c_2 + 2 \cdot 2 \\ &= c_2 + 4 \Longrightarrow c_2 = -2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (-2 + 2n)2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$

En definitiva

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 + (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$

y como $x_0 = u_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + (0-1)2^{0+1} \\ &= c_2 - 2 \end{aligned}$$

luego $c_1 = 2$ y por tanto:

$$x_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Respuesta:

$$u_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Ejercicio 1.2.8. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe hacer al final de cada plazo?

u_n es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del $n-$ésimo plazo, es decir, a continuación del $n-$ésimo pago. Entonces, para todo $0 \leqslant n \leqslant T-1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1+I)u_n - P \end{aligned}$$

y el problema de recurrencia a resolver es:

$$\begin{aligned} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1+I)u_n - P \qquad 0 \leqslant n \leqslant T-1 \end{aligned}$$

lo cual hacemos.

$k = 1$.

Ecuación característica: $x - (1+I) = 0 = 0$.

Solución homogénea: $x_n^{(h)} = c(1+I)^n$.

Función de ajuste: $f(n) = -P = -P \cdot 1^n$.

Los casos son los siguientes:

- $I = 0$;

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c \\ x_n^{(p)} &= n^m \cdot A \cdot 1^n \\ &\overset{m=1}{=} nA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -P &= (n+1) - nA \\ &= A(n+1-n) = A \end{aligned}$$

$$x_n = c - nP$$

como $x_0 = u_0 = S$ entonces:

$$S = x_0 = C - 0 \cdot P = C$$

luego

$$x_n = S - nP$$

Como $x_T = 0$, entonces

$$0 = S - T \cdot P$$

luego

$$P = \frac{S}{P}$$

- $I \neq 0$;

$$x_n^{(p)} = A$$

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} \\ &= A - (1+I)A \\ &= A(1-(1+I)) = -AI \Longrightarrow A = \frac{P}{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Pero

$$S = x_0 = c(1+I)^0 + \frac{P}{I} \Longrightarrow c = S - \frac{P}{I}$$

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Sabemos que

$$0 = x_T = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I}$$

y entonces

$$\frac{P}{I} = \left(\frac{P}{I} - S\right)(1+I)^T$$

$$\begin{aligned} P &= (p - SI)(1+I)^T \\ &= P(1+I)^T - SI(1+I)^T \end{aligned}$$

$$P(1-(1+I)^T) = -SI(1+I)^T$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - 1} \\ &= SI(1-(1+I)^{-T})^{-1} \end{aligned}$$

Respuesta

$$P = SI(1-(1+I)^{-T})^{-1}$$

Ejercicio 1.2.9. Orden: $k = 2$ porque

$$u_n = 0 \cdot u_{n-1} + u_{n-2} + 2^n + (-1)^n$$

Ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 & &= (x+1)(x-1) \\ r_1 &= -1 m_1 & &= 1 \\ r_2 &= 1 m_2 & &= 1 \end{aligned}$$

Solución homogénea

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_3 2^n + n^1 c_4 (-1)^n \\ &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

Para el cálculo de c_3 y c_4

$$u_{n+2} = u_n + 2^{n+2} + (-1)^n$$

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3 2^{n+2} + (n+2) c_4 (-1)^n \\ x_n^{(p)} &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + (-1)^n &= x_{n+2} - x_n^{(p)} \\ &= c_3 2^{n+2} + (n+2) c_4 (-1)^n \\ &- c_3 2^n - n c_4 (-1)^n \\ &= 2^n (2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n ((n+2) c_4 - n c_4) \\ &= 2^n \cdot 3 c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

y en definitiva tenemos:

$$4 \cdot 2^n + (-1)^n = (3c_3) 2^n + (-1)^n 2 c_4$$

basta con que

$$\begin{aligned} 3c_3 = 4 &\Longrightarrow c_3 = \frac{1}{3} \\ 2c_4 = 1 &\Longrightarrow c_4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \frac{4}{3} 2^n + n \frac{1}{2} (-1)^n \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \end{aligned}$$

Calculamos x_n

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2}$$

y como $x_0 = u_0 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \\ &\Longrightarrow c_1 + c_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y como $x_1 = u_1 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_1 \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{16-3}{6} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$c_1 - c_2 = \frac{13}{6} - 2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 &= \dfrac{1}{6} \\ \\ c_1 + c_2 &= \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$2c_1 = \frac{5}{6} \Longrightarrow c_1 = \frac{5}{12}$$

$$c_2 = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n\left(\frac{5}{12} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}2^{n+2} + \left(\frac{5+6n}{12}\right)(-1)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Respuesta

$$x_n = \frac{1}{3}2^{n+2} + \left(\frac{5+6n}{12}\right)(-1)^n + \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.2.10. Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

- Orden: $k = 2$.

- Ecuación característica: $x^2 + 4x + 16 = 0$ que tiene como raíces

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -2 + 2\sqrt{3}i \\
r_2 &= -2 - 2\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

forma polar:

$$
\begin{aligned}
|r_1| &= 4 \\
\frac{Im(z)/|z|}{1+Re(z)/|z|} &= \frac{\sqrt{3}/2}{1 - 1/2} \\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi/3}{2}\right)
\end{aligned}
$$

y así

$$
2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Im(z)/|z|}{1+Re(z)/|z|}\right) = \frac{2\pi}{3}
$$

Solución homogénea:

$$
x_n^{(h)} = 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)
$$

Solución particular:

$$
x_n^{(p)} = 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left(c_3 \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right) \\
&= 4^n \left(-16c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
x_{n+1}^{(p)} &= 4^n \left(4c_4 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4c_3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$