Álgebra II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

1. $G-$conjuntos y p-grupos

Definición 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, una acción[1] de G sobre X es una aplicación:

$$\begin{array}{rccl} ac: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & ac(g,x) \end{array}$$

Que verifica:

i) $ac(1,x) = x \quad \forall x \in X$.

ii) $ac(g, ac(h,x)) = ac(gh,x) \quad \forall x \in X, \quad \forall g,h \in G$.

En dicho caso, diremos que G actúa[2] (o que opera) sobre X.

Si G actúa sobre X, diremos que este conjunto X es un $G-$conjunto a izquierda. A la aplicación ac se le llama aplicación de la $G-$estructura.

Notación. Si $ac : G \times X \to X$ es una acción de G sobre X, es común denotar:

$$ac(g,x) = {}^g x = g \cdot x = g * x$$

En este documento, usaremos la notación $ac(g,x) = {}^g x$. Con esta, las propiedades que ha de cumplir una aplicación $ac : G \times X \to X$ para ser una acción son:

i) ${}^1 x = x \ \forall x \in X$.

ii) ${}^g({}^h x) = {}^{gh} x \ \forall x \in X, \forall g \in G$.

Ejemplo. Si G es un grupo y X es un conjunto no vacío, ejemplos de acciones de G sobre X son:

1. La <u>acción trivial</u>:

$$\begin{array}{rccl} ac: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & x \end{array}$$

2. Si tenemos una acción $ac : G \times X \to X$ y $H < G$, podemos considerar la <u>acción por restricción</u> $ac : H \times X \to X$, dada por:

$$ac(h,x) = ac(i(h),x) \qquad \forall h \in H, x \in X$$

   Donde consideramos la aplicación inclusión $i : H \to G$ dada por $i(h) = h$, para todo $h \in H$.

[1] En realidad esta es la definición de acción por la izquierda, pero no vamos a trabajar con las acciones por la derecha, por lo que hablaremos simplemente de acciones.

[2] En realidad deberíamos decir que "G actúa por la izquierda sobre X".

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, si $X = \{1, \dots, n\}$ y $G = S_n$, la acción natural de S_n sobre X será la acción $ac : S_n \times X \to X$ dada por:

$$ac(\sigma, k) = {}^{\sigma}k = \sigma(k) \qquad \forall \sigma \in S_n, k \in X$$

Proposición 1.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, dar una acción de G sobre X equivale a dar un homomorfismo de grupos de G en* $\mathrm{Perm}(X)$*.*

Demostración. Veamos que es posible:

- Por una parte, dada una acción de G sobre X, $ac : G \times X \to X$, podemos definir la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \longrightarrow & \mathrm{Perm}(X) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) \end{array}$$

  Donde $\phi(g)$ es una aplicación $\phi(g) : X \longrightarrow X$ dada por:

$$\phi(g)(x) = {}^{g}x \qquad \forall x \in X$$

  Veamos en primer lugar que ϕ está bien definida, es decir, que $\phi(g) \in \mathrm{Perm}(X)$ para cada $g \in G$. Para ello, veamos antes que ϕ cumple:

  - $\phi(1) = id_X$, ya que la aplicación $x \mapsto ac(1, x)$ es la aplicación identidad en X, por ser ac una acción de G sobre X.
  - $\phi(g)\phi(h) = \phi(gh)$, ya que al evaluar en cualquier $x \in G$:

$$(\phi(g)\phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(g)({}^{h}x) = {}^{g}({}^{h}x) \overset{(*)}{=} {}^{gh}x = \phi(gh)(x)$$

    Donde en $(*)$ hemos usado que ac es una acción de G sobre X.

  Ahora, veamos que dado $g \in G$, la aplicación $\phi(g)$ es biyectiva (es decir, está en $\mathrm{Perm}(X)$), ya que su aplicación inversa es $\phi(g^{-1})$:

$$\phi(g^{-1})\phi(g) = \phi(g^{-1}g) = \phi(1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

  Y anteriormente vimos que $\phi(1) = id_X$, por lo que $\phi(g) \in \mathrm{Perm}(X)$, para todo $g \in G$ y la aplicación ϕ está bien definida.

  Además, por las dos propiedades anteriores, tenemos que ϕ es un homomorfismo de grupos.

- Sea $\phi : G \to \mathrm{Perm}(X)$ un homomorfismo de grupos, definimos la aplicación $ac : G \times X \to X$ dada por:

$$ac(g, x) = \phi(g)(x) \qquad \forall g \in G, x \in X$$

  Veamos que es una acción:

$$\begin{gathered} ac(1, x) = \phi(1)(x) = id_X(x) = x \qquad \forall x \in X \\ ac(g, ac(h, x)) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = (\phi(g)\phi(h))(x) = \phi(gh)(x) = ac(gh, x) \\ \forall x \in X, \quad \forall g, h \in G \end{gathered}$$

□

Definición 1.2 (Representación por permutaciones)**.** Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, si tenemos una acción de G sobre X, el homomorfismo ϕ dado por esta acción según la Proposición 1.1 recibirá el nombre de representación de G por permutaciones.

Además, llamaremos a $\ker(\phi)$ núcleo de la acción, ya que:

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = id_X\} = \{g \in G \mid {}^g x = x \quad \forall x \in X\}$$

En el caso de que $\ker(\phi) = \{1\}$, diremos que la acción es fiel.

Ejemplo. A continuación, dados varios ejemplos de acciones, consideraremos en cada caso su representación por permutaciones:

1. La representación por permutaciones de la acción trivial es el homomorfismo $\phi : G \to Perm(X)$ dado por:

$$\phi(g) = id_X \qquad \forall g \in G$$

2. Si tenemos un conjunto no vacío X y una acción $ac : G \times X \to X$ sobre un grupo G que tiene asociada una representación por permutaciones ϕ, entonces la acción por restricción $ac : H \times X \to X$ tendrá asociada como representación por permutaciones el homomorfismo $\phi_H : H \to Perm(X)$ dado por:

$$\phi_H = \phi \circ i$$

Siendo $i : H \to G$ la aplicación inclusión.

3. En el caso de la acción natural de S_n sobre $X = \{1, \ldots, n\}$, tenemos que la representación por permutaciones es el homomorfismo $\phi : S_n \to S_n$ dado por:

$$\phi(\sigma) = \sigma \qquad \forall \sigma \in S_n$$

Es decir, $\phi = id_{S_n}$.

4. Sea G un grupo, podemos definir la acción por traslación como:

$$\begin{array}{rccc} ac: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

Y el homomorfismo asociado a la acción como representación por permutaciones será $\phi : G \to \text{Perm}(G)$ dado por:

$$\phi(g)(h) = gh \qquad \forall g, h \in G$$

Como además:

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid gh = h \quad \forall h \in G\} = \{1\}$$

Tenemos que es una acción fiel.

Teorema 1.2 (Cayley)**.** *Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

Demostración. Sea G un grupo, consideramos la acción por traslación:

$$\begin{array}{rccc} ac: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

Y su representación por permutaciones, $\phi : G \to \text{Perm}(G)$ dado por:

$$\phi(g)(h) = gh \qquad \forall g \in G, \forall h \in G$$

Como la acción por traslación es una acción fiel, tendremos que $\ker(\phi) = \{1\}$ y aplicando el Primer Teorema de Isomorfía sobre ϕ, obtenemos que:

$$G \cong G/\{1\} \cong Im(\phi)$$

Donde $Im(\phi) = \phi_*(G)$, que en la Proposición **??** vimos que es un subgrupo de $\text{Perm}(G)$. □

Ejemplo. Podemos considerar las traslaciones de G sobre conjuntos especiales:

- La acción por traslación de G sobre $\mathcal{P}(G)$ será $ac : G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ dada por:
$$ac(g, A) = gA = \{ga \mid a \in A\} \subseteq G \qquad \forall A \in \mathcal{P}(G)$$
- Podemos también considerar la acción por traslación en el cociente por las clases laterales por la izquierda[3]: si $H < G$, consideramos el cociente de G sobre H por la izquierda y la acción $ac : G \times G/_H\sim \to G/_H\sim$ dada por:
$$ac(g, xH) = {}^g(xH) = gxH = \{gxh \mid h \in H\}$$

6. La <u>acción por conjugación</u> se define como $ac : G \times G \to G$ dada por:
$$ac(g,h) = {}^gh = ghg^{-1}$$
Que es una acción, ya que:
$$\begin{array}{l} {}^1h = 1h1^{-1} = h \qquad \forall h \in G \\ {}^g({}^hl) = g\,{}^hlg^{-1} = ghlh^{-1}g^{-1} = ghl(gh)^{-1} = {}^{gh}l \qquad \forall g,h,l \in G \end{array}$$
El homomorfismo asociado es:
$$\begin{array}{c} \phi : G \to \text{Perm}(G) \\ \phi(g)(h) = ghg^{-1} \qquad \forall g,h \in G \end{array}$$
El núcleo en este caso es:
$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\} = Z(G)$$

7. La <u>acción por conjugación en partes de G</u> se define como la aplicación $ac : G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ dada por:
$$ac(g, A) = {}^gA = gAg^{-1} = \{gag^{-1} \mid a \in A\} \subseteq G \qquad \forall A \in \mathcal{P}(G)$$

[3] No es necesario considerar $H \lhd G$, ya que solo consideramos conjuntos no vacíos, por lo que no es necesario que el cociente tenga estructura de grupo.

8. Podemos definir la acción por conjugación de G también sobre $Subg(G)$:

$$Subg(G) = \{H \subseteq G \mid H < G\}$$

Como la aplicación $ac : G \times Subg(G) \to Subg(G)$ dada por:

$$ac(g, H) = {}^gH = gHg^{-1} < G$$

Ya que en la Proposición **??** vimos que gHg^{-1} era un subgrupo de G, al que llamaremos subgrupo conjugado de G.

1.1. Órbitas de un elemento

Definición 1.3 (Órbita)**.** Sea G un grupo y X un $G-$conjunto, definimos en X una relación de equivalencia $\sim$ (se comprueba a continuación) dada por:

$$y \sim x \Longleftrightarrow \exists g \in G \mid y = {}^gx$$

La clase de equivalencia de cada $x \in X$ se llama órbita de x, denotada por:

$$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } y = {}^gx\}$$

Como estamos considerando una acción, será equivalente escribir (gracias a la propiedad simétrica):

$$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } {}^gy = x\}$$

Tenemos de esta forma que el conjunto cociente $X/\sim$ es el conjunto formado por las órbitas de todos los elementos de X:

$$X/\sim\, = \{Orb(x) \mid x \in X\}$$

Proposición 1.3. *La relación $\sim$ de la definición anterior es una relación de equivalencia en X.*

Demostración. Comprobamos la reflexividad, simetría y transitividad de $\sim$:

i) Reflexividad: sea $x \in X$, entonces ${}^1x = x$, por lo que $x \sim x$.

ii) Simetría: sean $x, y \in X$ tales que $y \sim x$, entonces $\exists g \in G$ de forma que $y = {}^gx$. Como G es un grupo, consideramos $g^{-1} \in G$, de forma que:

$$^{g^{-1}}y = {}^{g^{-1}}({}^gx) = {}^{g^{-1}g}x = {}^1x = x$$

Por lo que $x \sim y$.

iii) Transitividad: sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $\exists g, h \in G$ de forma que:

$$y = {}^gx \qquad\qquad z = {}^hy$$

Entonces, tenemos que:

$$z = {}^h({}^gx) = {}^{hg}x$$

Como $hg \in G$, tenemos que $z \sim x$. □

Ejemplo. Sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$: En S_4 consideramos $ac : S_4 \times X \to X$, la acción natural de S_4 sobre X:

$$ac(\sigma, k) = {}^{\sigma}k = \sigma(k)$$

- Si tenemos $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$, queremos calcular las órbitas de los elementos de X. Recordamos que:

  $$Orb(x) = \{y \in X \mid \exists \sigma \in H \text{ con } \sigma(y) = x\}$$

  Es decir, pensamos en $Orb(x)$ como en los elementos de X desde los que podemos llegar a x con una permutación de H (o también como en aquellos elementos de X a los que podemos llegar desde x a través de una permutación de H). De esta forma:

  $$\begin{aligned} Orb(1) &= \{1, 2, 3\} \\ Orb(2) &= \{1, 2, 3\} \\ Orb(3) &= \{1, 2, 3\} \\ Orb(4) &= \{4\} \end{aligned}$$

- En A_4:

  $$\begin{aligned} A_4 = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2\,3), (1\,2\,4), (1\,3\,4), (2\,3\,4), (1\,3\,2), \\ (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 4\ 3)\} \end{aligned}$$

  Como tenemos todos los $3-$ciclos:

  $$Orb(1) = X$$

  Y también tendremos que $Orb(k) = X$, para $k \in X$.

- En V, que contiene a todos los $2-$ciclos, la situación será la misma:

  $$Orb(k) = X \qquad \forall k \in X$$

- En $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$ sucede lo mismo:

  $$Orb(k) = X \qquad \forall k \in X$$

Definición 1.4. Si el conjunto de órbitas $X/\sim$ es unitario, decimos que la acción es transitiva.

Este nombre se debe a que dados $x, y \in X$, siempre $\exists g \in G$ de forma que:

$$y = {}^{g}x$$

Definición 1.5 (Estabilizador)**.** Sea G un grupo y X un $G-$conjunto, definimos el grupo de estabilizadores de $x \in X$ en G como:

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid {}^{g}x = x\}$$

También se le llama grupo de isotropía.

Para justificar por qué a $Stab_G(x)$ le llamábamos grupo de estabilizadores de x en G, es necesaria la siguiente Proposición:

Proposición 1.4. *Sea G un grupo y X un $G-$conjunto:*

$$Stab_G(x) < G \qquad \forall x \in X$$

Demostración. Fijado $x \in X$, es claro que $Stab_G(x) \subseteq G$. Vemos que:

- $1 \in Stab_G(x)$, ya que ${}^1x = x$ por definición de acción.
- Si $g \in Stab_G(x)$, supongamos que $g^{-1} \notin Stab_G(x)$, con lo que ${}^{g^{-1}}x = y \in X$ con $y \neq x$. En dicho caso:

  $$x = {}^1x = {}^{g^{-1}g}x = {}^{g^{-1}}({}^gx) = {}^{g^{-1}}x = y$$

  Llegamos a una contradicción, luego $g^{-1} \in Stab_G(x)$ para todo $g \in Stab_G(x)$.
- Finalmente, si $g, h \in Stab_G(x)$, entonces:

  $${}^{gh}x = {}^g({}^hx) = {}^gx = x$$

  Por lo que $gh \in Stab_G(x)$.

$\square$

Ejemplo. Si nuevamente sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$ volvemos a considerar la acción natural de S_4 sobre X:

- En $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$, recordamos que:

  $$Stab_H(x) = \{\sigma \in H \mid \sigma(x) = x\}$$

  Es decir, el grupo de estabilizadores de x en H son los elementos de H que dejan fijo el elemento x. De esta forma:

  $$\begin{aligned} Stab_H(1) &= \{1\} \\ Stab_H(2) &= \{1\} \\ Stab_H(3) &= \{1\} \\ Stab_H(4) &= H \end{aligned}$$

- En A_4:

  $$\begin{aligned} Stab_{A_4}(1) &= \{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\} = \langle(2\ 3\ 4)\rangle \\ Stab_{A_4}(2) &= \langle(1\ 3\ 4)\rangle \\ Stab_{A_4}(3) &= \langle(1\ 2\ 4)\rangle \\ Stab_{A_4}(4) &= \langle(1\ 2\ 3)\rangle \end{aligned}$$

- En V:

  $$Stab_V(k) = \{1\} \qquad \forall k \in X$$

- En $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$:
$$Stab_H(k) = \{1\} \qquad \forall k \in X$$

Vamos a poder establecer una relación entre el órden de las órbitas y del conjunto cociente.

Proposición 1.5. *Sea G un grupo finito que actúa sobre X, entonces para cada $x \in X$, $Orb(x)$ es un conjunto finito y:*

$$|Orb(x)| = [G : Stab_G(x)]$$

En particular, el cardinal de la órbita es un divisor del orden de G.

Demostración. Fijado $x \in X$, si consideramos $Stab_G(x) < G$ y las clases laterales por la izquierda[4], $G/_{Stab_G(x)}\sim$, definimos la aplicación $\phi : G/_{Stab_G(x)}\sim \longrightarrow Orb(x)$ dada por:
$$\phi(gStab_G(x)) = {}^g x \qquad \forall gStab_G(x) \in G/_{Stab_G(x)}\sim$$

- Veamos que está bien definida. Para ello, sean $g, g' \in G$ de forma que:
$$gStab_G(x) = g'Stab_G(x)$$
Entonces, existirá $h \in Stab_G(x)$ de forma que $g = g'h$. En dicho caso:
$$\phi(gStab_G(x)) = {}^g x = {}^{g'h} x = {}^{g'}({}^h x) = {}^{g'} x = \phi(g'Stab_G(x))$$

- Veamos que es sobreyectiva: sea $y \in Orb(x)$, entonces $\exists g \in G$ de forma que:
$$y = {}^g x$$
Por lo que $y = \phi(gStab_G(x))$.

- Para la inyectividad, sean $g, g' \in G$ de forma que:
$${}^g x = \phi(gStab_G(x)) = \phi(g'Stab_G(x)) = {}^{g'} x$$
Entonces, podemos escribir:
$$x = {}^{g^{-1}}({}^g x) = {}^{g^{-1}}({}^{g'} x) = {}^{g^{-1}g'} x$$
De donde concluimos que $g^{-1}g' \in Stab_G(x)$, por lo que $gStab_G(x) = g'Stab_G(x)$.

En definitiva, acabamos de probar que $Orb(x)$ es biyectivo con $G/_{Stab_G(x)}\sim$, por lo que tienen el mismo cardinal. Además:

- Por ser G finito y $Stab_G(x) < G$, tenemos que:
$$|Orb(x)| = [G : Stab_G(x)] = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}$$
Por lo que $Orb(x)$ es un conjunto finito.

[4] No consideramos el conjunto cociente porque no sabemos si $Stab_G(x)$ es un subgrupo normal en G o no.

- Despejando de la igualdad superior, tenemos que:

$$|Orb(x)||Stab_G(x)| = |G|$$

Por lo que $|Orb(x)|$ es un divisor de $|G|$.

$\square$

Observación. La demostración es cierta sin suponer que G sea un grupo finito, pero entonces solo podemos poner como tesis que $Orb(x)$ es biyectivo con $G/_{Stab_G(x)}\sim$, para todo $x \in X$.

Proposición 1.6. *Sea G un grupo que actúa sobre X, si $x, y \in X$ están en la misma órbita, entonces $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son subgrupos conjugados.*

Demostración. Si x e y están en la misma órbita, entonces $Orb(x) = Orb(y)$, por lo que $\exists g \in G$ de forma que $y = {}^g x$. En dicho caso, también tenemos que $x = {}^{g^{-1}} y$. Veamos que:

$$Stab_G(x) = g^{-1} Stab_G(y) g$$

Para ello:

$\subseteq$) Sea $h \in Stab_G(x)$, queremos ver que $h \in g^{-1} Stab_G(y) g$, para lo que bastará ver que $ghg^{-1} \in Stab_G(y)$:

$$^{ghg^{-1}}y = {}^{gh}x = {}^g x = y$$

$\supseteq$) Sea $h \in Stab_G(y)$, queremos ver que $g^{-1}hg \in Stab_G(x)$:

$$^{g^{-1}hg}x = {}^{g^{-1}h}y = {}^{g^{-1}}y = x$$

$\square$

Definición 1.6. Sea G un grupo y X un $G-$conjunto, un elemento $x \in X$ se dice que es <u>fijo</u> por la acción si ${}^g x = x$, $\forall g \in G$.

Consideramos el conjunto de todos los elementos que se quedan fijos por todos los elementos de G:

$$Fix(X) = \{x \in X \mid {}^g x = x, \quad \forall g \in G\}$$

Proposición 1.7. *Sea G un grupo y X un $G-$conjunto, si $x \in X$, entonces:*

$$x \in Fix(X) \Longleftrightarrow Orb(x) = \{x\} \Longleftrightarrow Stab_G(x) = G$$

Demostración. Si recordamos las definiciones de estos tres conjuntos:

$$\begin{aligned} Orb(x) &= \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ con } {}^g y = x\} \\ Stab_G(x) &= \{g \in G \mid {}^g x = x\} \\ Fix(X) &= \{x \in X \mid {}^g x = x \quad \forall g \in G\} \end{aligned}$$

Veamos todas las implicaciones:

$x \in Fix(X) \Longrightarrow Orb(x) = \{x\}$

Si $y \in Orb(x)$, entonces $\exists g \in G$ con ${}^g y = x$, por lo que:

$$y = {}^{g^{-1}g}y = {}^{g^{-1}}({}^g y) = {}^{g^{-1}}x \overset{(*)}{=} x$$

Donde en $(*)$ usamos que $x \in Fix(X)$. Concluimos que $Orb(x) = \{x\}$.

$Orb(x) = \{x\} \Longrightarrow Stab_G(x) = G$

Sea $g \in G$, si consideramos $y = {}^g x$, entonces $y \in Orb(x) = \{x\}$, de donde $y = x$ y $g \in Stab_G(x)$.

$Stab_G(x) = G \Longrightarrow x \in Fix(x)$

$${}^g x = x \qquad \forall g \in G$$

De donde deducimos que $x \in Fix(X)$.

□

Observación. Si tenemos un grupo G y un $G-$conjunto X, recordamos que tenemos definida sobre X una relación de equivalencia $\sim$, con la que anteriormente definimos los órbitas de los elementos, que nos da una partición de X en clases de equivalencia. Estaremos especialmente interesados en el caso en el que X sea un conjunto finito, ya que podremos obtener una fórmula del cardinal de X a partir de los cardinales de las órbitas de los elementos de X.

De esta forma, si $\Lambda \subseteq X$ contiene un único elemento de cada clase de equivalencia del conjunto cociente $X/\sim$, obtenemos la igualdad:

$$|X| = \sum_{y\in\Lambda} |Orb(y)|$$

Para simplificarla usando propiedades ya vistas, sabemos que puede haber órbitas unitarias:

$$Orb(x) = \{x\} \Longleftrightarrow x \in Fix(x)$$

Por tanto, podemos simplificar la igualdad superior, eliminando de ella todas las órbitas unitarias. Para ello, si $\Gamma = \Lambda \setminus Fix(X)$:

$$|X| = \sum_{y\in\Lambda} |Orb(y)| = |Fix(X)| + \sum_{y\in\Gamma} |Orb(y)|$$

Y aplicando finalmente la Proposición 1.5, llegamos a que:

$$|X| = \sum_{y\in\Lambda} |Orb(y)| = |Fix(X)| + \sum_{y\in\Gamma} |Orb(y)| = |Fix(X)| + \sum_{y\in\Gamma} [G : Stab_G(y)]$$

En lo que sigue, no diremos de forma explícita quién es este conjunto Γ, debido a lo engorrosas que se volverían las explicaciones. Por tanto, cada vez que veamos esta fórmula debemos pensar en que estamos cogiendo un único representante de cada clase de equivalencia no unitaria, y lo estamos metiendo en Γ.

A continuación, lo que haremos será estudiar los conjuntos $Orb(\cdot)$, $Stab_G(\cdot)$ y $Fix(X)$ para ciertos ejemplos comunes de acciones.

1.1.1. Acción por traslación

Sea G un grupo no trivial, la acción por traslación se define como $ac : G \times G \to G$ dada por:

$$ac(g,h) = {}^g h = gh \qquad \forall g,h \in G$$

De esta forma, tenemos que:

$$Orb(h) = \{k \in G \mid \exists g \in G \text{ con } k = {}^g h = gh\} = G \qquad \forall h \in G$$

Ya que fijado $k \in G$ y dado $h \in G$, siempre podemos tomar $g = kh^{-1} \in G$ para tener que ${}^g h = gh = k$.

$$Stab_G(h) = \{g \in G \mid gh = {}^g h = h\} = \{1\} \qquad \forall h \in G$$
$$Fix(G) = \{h \in G \mid gh = {}^g h = h \quad \forall g \in G\} = \emptyset$$

Observación. Observemos que la acción por traslación cuenta con las mismas cualidades que tiene una traslación entre dos espacios vectoriales, pensando en que primero fijamos un vector $v \in V$ para luego definir una aplicación $t_v : V \to V'$. De esta forma:

- Fijado cualquier vector v, t_v siempre será sobreyectiva. Esto se pone de manifiesto al decir que $Orb(h) = G$ para todo $h \in G$.
- La única traslación que mantiene fijo un punto es la correspondiente al vector 0, que deja fijos todos los puntos, $Stab_G(h) = \{1\}$ $\forall h \in G$.
- Como hay traslaciones que no mantienen fijos ningún punto (todas salvo la trivial), no hay ningún punto que permanezca invariante ante todas ellas, $Fix(G) = \emptyset$.

1.1.2. Acción por conjugación

Sea G un grupo, la acción por conjugación se define como $ac : G \times G \to G$ dada por:

$$ac(g,h) = {}^g h = ghg^{-1} \qquad \forall g,h \in G$$

Preliminares

Antes de estudiar los subconjuntos notables de esta acción, definimos ciertos conjuntos y vemos propiedades de estos que nos ayudarán a entender la acción.

Definición 1.7 (Centralizador)**.** Sea G un grupo y $S \subseteq G$, llamamos centralizador de S en G al conjunto:

$$C_G(S) = \{x \in G \mid xs = sx \quad \forall s \in S\}$$

Definición 1.8 (Normalizador)**.** Sea G un grupo y $S \subseteq G$, llamamos normalizador de S en G al conjunto:

$$N_G(S) = \{x \in G \mid xS = Sx\}$$

Proposición 1.8. *Sea G un grupo y $S \subseteq G$, se verifica:*

i) $N_G(S) < G$.

ii) $C_G(S) \lhd N_G(S)$.

iii) *Si $S < G$, entonces $S \lhd N_G(S)$.*

Demostración. Demostramos cada apartado:

i) Sean $x, y \in N_G(S)$, entonces tendremos que:

$$xS = Sx \Longrightarrow xSx^{-1} = S$$
$$yS = Sy \Longrightarrow S = y^{-1}Sy$$

En dicho caso:

$$(xy^{-1})S(xy^{-1})^{-1} = (xy^{-1})S(yx^{-1}) = x(y^{-1}Sy)x^{-1} = xSx^{-1} = S$$

De donde deducimos que $(xy^{-1})S = S(xy^{-1})$, por lo que $xy^{-1} \in N_G(S)$ y $N_G(S) < G$.

ii) Hemos de ver primero que $C_G(S) < N_G(S)$:

- En primer lugar, si $x \in C_G(S)$:

$$xS = \{xs \mid s \in S\} = \{sx \mid s \in S\} = Sx$$

Por lo que $x \in N_G(S)$ y se tiene que $C_G(S) \subseteq N_G(S)$.

- Ahora, si $x, y \in C_G(S)$, entonces:

$$xs = sx \Longrightarrow xsx^{-1} = s$$
$$ys = sy \Longrightarrow s = y^{-1}sy \qquad \forall s \in S$$

Lo que nos permite escribir:

$$(xy^{-1})s(xy^{-1})^{-1} = x(y^{-1}sy)x^{-1} = xsx^{-1} = s \qquad \forall s \in S$$

De donde deducimos que $xy^{-1} \in C_G(S)$, por lo que $C_G(S) < N_G(S)$.

Para la normalidad, dado $x \in C_G(S)$ y $g \in N_G(S)$, queremos ver que se cumple $y = gxg^{-1} \in C_G(S)$. Para ello, dado $s \in S$, vemos que:

$$ys = (gxg^{-1})s \overset{(*)}{=} gxs'g^{-1} = gs'xg^{-1} \overset{(**)}{=} s(gxg^{-1}) = sy$$

Donde en $(*)$ usamos que como $g \in N_G(S)$, también tenemos que $g^{-1} \in N_G(S)$, con lo que $\exists s' \in S$ de forma que:

$$g^{-1}s = s'g^{-1}$$

Y en $(**)$ deshacemos este proceso, ya que multiplicando la igualdad superior por derecha e izquierda por g, llegamos a que:

$$g^{-1}s = s'g^{-1} \Longrightarrow gg^{-1}sg = gs'g^{-1}g \Longrightarrow sg = gs'$$

En definitiva, de $ys = sy$ deducimos que $y = gxg^{-1} \in C_G(S)$, para todo $x \in C_G(S)$ y todo $g \in N_G(S)$, de donde $C_G(S) \lhd N_G(S)$.

iii) Si suponemos además que $S < G$, por una parte tenemos que:

$$sS = S = Ss \qquad \forall s \in S$$

De donde deducimos que $S \subseteq N_G(S)$ y por ser $S < G$, tenemos que $S < N_G(S)$. Para la normalidad, si $g \in N_G(S)$, tendremos entonces que:

$$gS = Sg \Longrightarrow gSg^{-1} = S$$

De donde deducimos que $S \lhd N_G(S)$.

□

Proposición 1.9. *Sea G un grupo, $H, K < G$ con $H \subseteq K$, entonces:*

$$H \lhd K \Longleftrightarrow K < N_G(H)$$

De esta forma, el normalizador $N_G(H)$ se caracteriza como el mayor subgrupo de G en el que H es normal.

Demostración. Por ser $H, K < G$ con $H \subseteq K$, tenemos ya que $H < K$. Por una caracterización que vimos de los subgrupos normales:

$$H \lhd K \Longleftrightarrow kHk^{-1} = H \quad \forall k \in K \Longleftrightarrow kH = Hk \quad \forall k \in K \Longleftrightarrow K \subseteq N_G(H)$$

Y por ser $K < G$, $K \subseteq N_G(H) \Longleftrightarrow K < N_G(H)$. □

Ejercicio. Para terminar de comprender las propiedades del centralizador y del normalizador, se pide probar que si G es un grupo y $H < G$:

$$H \lhd G \Longleftrightarrow G = N_G(H)$$
$$H \subseteq Z(G) \Longleftrightarrow G = C_G(H)$$

Subconjuntos notables

Estudiadas ya las propiedades del centralizador y del normalizador, estamos ya en condiciones de estudiar los conjuntos notables de la acción por conjugación:

$$Orb(h) = \{k \in G \mid \exists g \in G \text{ con } k = {}^gh = ghg^{-1}\} = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} := Cl_G(h) \qquad \forall h \in G$$

De esta forma, llamaremos a la órbita de h por la acción por conjugación la clase de conjugación de h en G, notada por $Cl_G(h)$.

$$Stab_G(h) = \{g \in G \mid {}^gh = ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\} = C_G(h)$$

El estabilizador de h en G coincide con el centralizador de h en G, y como la órbita de h coincidía con la clase de conjugación de h en G, por la Proposición 1.5, tenemos que:

$$|Cl_G(h)| = |Orb(h)| = [G : Stab_G(h)] = [G : C_G(h)] \qquad \forall h \in G$$

Y en el caso de que G sea finito:

$$|Cl_G(h)||C_G(h)| = |G|$$

Para los puntos fijos:

$$Fix(G) = \{h \in G \mid ghg^{-1} = {}^gh = h \quad \forall g \in G\} = \{h \in G \mid gh = hg \quad \forall g \in G\} = Z(G)$$

Ejemplo. Calcular las clases de conjugación de los elementos de D_4:

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} = \{s^i r^j \mid i \in \{0,1\}\ j \in \{0,1,2,3\}\}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}
Cl_{D_4}(1) &= \{s^i r^j 1 (s^i r^j)^{-1}\} = \{1\} \\
Cl_{D_4}(r) &= \{s^i r^j r (s^i r^j)^{-1}\} = \{s^i r^j r r^{-j} s^{-i}\} = \{s^i r s^i\} = \{r, srs\} = \{r, r^3\} \\
Cl_{D_4}(r^2) &= \{s^i r^2 s^i\} = \{r^2\} \\
Cl_{D_4}(s) &= \{s, sr^2\} \\
Cl_{D_4}(sr) &= \{sr, sr^3\}
\end{aligned}$$

Fórmula de clases

Podemos particularizar la fórmula anteriormente obtenida:

$$|X| = |Fix(X)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : Stab_G(y)]$$

Para la acción por conjugación, obteniendo la **fórmula de clases**:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : C_G(y)]$$

Esta última podemos generalizarla para cualquier subgrupo $H \lhd G$, obteniendo la fórmula de clases general:

$$|H| = |H \cap Z(G)| + \sum_{y \in \Gamma} [G : C_G(y)]$$

Aunque no será de gran relevancia en esta asignatura.

1.1.3. Acción por conjugación sobre subgrupos

Sea G un grupo, la acción por conjugación sobre sus subgrupos viene definida[5] por $ac : G \times Subg(G) \to Subg(G)$ dada por:

$$ac(g, H) = {}^gH = gHg^{-1} \qquad \forall g \in G, \qquad \forall H \in Subg(G)$$

Veamos que:

$$Orb(H) = \{K \in Subg(G) \mid \exists g \in G \text{ con } gHg^{-1} = {}^gH = K\} = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

Es decir, la órbita de un subgrupo está formado por todos sus conjugados.

Observación. Sea G un grupo, $H \in Subg(G)$, si consideramos la acción por conjugación sobre subgrupos, tenemos que:

$$Orb(H) = \{H\} \Longleftrightarrow H \lhd G$$

Esto se debe a que:

$$Orb(H) = \{H\} \Longleftrightarrow \{gHg^{-1} \mid g \in G\} = \{H\} \Longleftrightarrow H \lhd G$$

Donde la última equivalencia se tiene gracias a la Proposición **??**, donde vimos una caracterización de los subgrupos normales.

[5] está bien definida gracias a la Proposición **??**

El estabilizador:

$$Stab_G(H) = \{g \in G \mid {}^gH = H\} = \{g \in G \mid gH = Hg\} = N_G(H)$$

Vemos finalmente los subgrupos que quedan fijos mediante la acción (resultado que debemos tener claro después de la observación anterior):

$$Fix(Subg(G)) = \{H < G \mid gHg^{-1} = {}^gH = H \quad \forall g \in G\} = \{H < G \mid H \lhd G\}$$

Coincide con el conjunto de subgrupos normales de G.

Y tendremos que:

$$|Orb(H)| = [G : N_G(H)]$$

1.2. $p-$grupos

Definición 1.9 ($p-$grupo)**.** Si p es un número primo, un grupo G se dice que es un $p-$grupo si todo elemento de G distinto del neutro tiene orden una potencia de p. Si G es un grupo, diremos que $H < G$ es un $p-$subgrupo de G si H es un $p-$grupo.

Ejemplo. $\mathbb{Z}_8$ es un ejemplo de $2-$grupo, ya que sus elementos son:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Calculamos los órdenes de todos los elementos, sabiendo que (Proposición **??**):

$$O(x) = \frac{n}{\text{mcd}(x, n)} \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_n$$

Por lo que:

$$\begin{array}{llll} O(1) = 8 = 2^3 & O(2) = 4 = 2^2 & O(3) = 8 = 2^3 & O(4) = 2 \\ O(5) = 8 = 2^3 & O(6) = 4 = 2^2 & O(7) = 8 = 2^3 & \end{array}$$

Teorema 1.10 (de Cauchy)**.** *Si G es un grupo finito y p es un primo que divide a $|G|$, entonces G tiene un elemento de orden p, y por tanto tendrá un $p-$subgrupo de orden p.*

Demostración. Si consideramos:

$$X = \{(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in G^p \mid a_1 a_2 \ldots a_p = 1\}$$

Si $|G| = n$, entonces $|X| = n^{p-1}$, ya que elegimos libremente las $p - 1$ primeras coordenadas (variación con repetición):

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1} \in G \quad \text{arbitrarios}$$

Y la última viene condicionada:

$$a_p = (a_1 a_2 \ldots a_{p-1})^{-1}$$

Sea $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ p) \in S_p$, consideramos $H = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{p-1}\} \subseteq S_p$. Consideramos también la acción $ac : H \times X \to X$ dada por (compruébese que es una acción):

$$ac(\sigma^k, (a_1, a_2, \ldots, a_p)) = \left(a_{\sigma^k(1)}, a_{\sigma^k(2)}, \ldots, a_{\sigma^k(p)}\right) \qquad \forall (a_1, \ldots, a_p) \in X, \forall \sigma^k \in H$$

Por la Proposición 1.5, tenemos que:

$$|Orb(z)| = [H : Stab_H(z)] = \frac{|H|}{|Stab_H(z)|} \qquad \forall z \in X$$

De donde tenemos que $|Orb(a_1, \ldots, a_p)|$ es un divisor de $|H|$, $\forall (a_1, \ldots, a_p) \in X$. En dicho caso, $|Orb(a_1, \ldots, a_p)| \in \{1, p\}$, por ser $|H| = p$. Por tanto, las órbitas de un elemento serán unitarias o bien tendrán cardinal p.

Por tanto, sean r el número de órbitas con un elemento y s el número de órbitas con p elementos, entonces ($|\Gamma| = s$):

$$n^{p-1} = |X| = |Fix(X)| + \sum_{y \in \Gamma} |Orb(y)| = r + \sum_{y \in \Gamma} p = r + sp$$

Veamos ahora cómo son los elementos de $Orb(a_1, \ldots, a_p)$:

$$\begin{aligned} Orb(a_1, \ldots, a_p) &= \left\{{}^{\sigma^k}(a_1, \ldots, a_p) \mid k \in \{0, \ldots, p-1\}\right\} \\ &= \{(a_1, \ldots, a_p), (a_2, \ldots, a_p, a_1), \ldots, (a_p, a_1, \ldots, a_{p-1})\} \end{aligned}$$

Por tanto, la órbita será unitaria si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_p$. Además, sabemos de la existencia de órbitas con un elemento ($r \geqslant 1$), como $Orb(1, 1, \ldots, 1)$. Busquemos más: por hipótesis, $p \mid n$ y además $r = n^{p-1} - sp$, de donde $p \mid r$, por lo que $r \geqslant 2$ (ya que lo divide un primo).

En conclusión, $\exists a \in G \setminus \{1\}$ de forma que $Orb(a, a, \ldots a)$ es unitaria, de donde $a^p = 1$, por lo que $O(a) \mid p$ y sabemos que $O(a) \neq 1$. La única posibilidad es que $O(a) = p$.

Finalmente, sea $x \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$, tenemos entonces que $1 \neq O(x) \mid p$, por lo que $O(x) = p$ y tenemos que todo elemento del subgrupo $\langle a \rangle$ es de orden p. En definitiva, $\langle a \rangle$ es un $p-$subgrupo de G de orden p. □

Corolario 1.10.1. *Sea G un grupo finito y p un número primo:*

$$G \textit{ es un } p-\textit{grupo} \iff \exists n \in \mathbb{N} \textit{ con } |G| = p^n$$

Demostración. Veamos la doble implicación.

$\Longleftarrow$) Si $|G| = p^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces tendremos que $O(x) | p^n$ para todo $x \in G$, de donde $O(x) = p^k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, luego G es un $p-$grupo.

$\Longrightarrow$) Suponemos que q es un primo que divide al orden de $|G|$, luego por el Teorema de Cauchy debe existir $x \in G$ de forma que $O(x) = q$. En dicho caso, como G es un $p-$grupo, $q = p^r$ para cierto $r \in \mathbb{N}$, de donde (q y p son primos) $r = 1$ y $q = p$.

De esta forma, el único primo que divide a $|G|$ es p, luego $|G| = p^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.11 (de Burnside)**.** *Si G es un $p-$grupo finito no trivial, entonces $|Z(G)| \geqslant p$, y en particular, $|Z(G)| \neq \{1\}$.*

Demostración. Distinguimos casos:

- Si G es abeliano, $Z(G) = G$ y tenemos que $|Z(G)| = |G| = p^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, por lo que $|Z(G)| \geqslant p$. En particular, $Z(G) = G$ no es trivial.

- Si G es no abeliano, entonces $Z(G) < G$ y por la fórmula anterior de clases:

$$p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{h \in \Gamma} [G : C_G(h)]$$

Como G es finito, $[G : C_G(h)]$ divide a $|G| = p^n$ para cualquier $h \in \Gamma$ y para cierto $n \in \mathbb{N}$. Es decir:

$$[G : C_G(h)] = p^k \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \quad \forall h \in \Gamma$$

En ningún caso puede ser $k = 0$, ya que diríamos que $C_G(h) = G$ y:

$$C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$$

De donde $h \in Z(G)$, por lo que h no estaría en $\Gamma \subseteq G \setminus Z(G)$.

En dicho caso, $p \mid [G : C_G(h)]$ para todo $h \in \Gamma$, $p \mid |Z(G)|$ (despejar $|Z(G)|$ de la anterior igualdad), de donde $|Z(G)| \geqslant p$.

□

Lema 1.12. *Si G es un grupo y $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.*

Demostración. Como $G/Z(G)$ es cíclico, existirá $z \in G$ de forma que:

$$G/Z(G) = \langle zZ(G) \rangle$$

Sean $x, y \in G$, si consideramos su proyección al cociente, tendremos que $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$xZ(G) = z^n Z(G) \qquad yZ(G) = z^m Z(G)$$

Es decir, $\exists a, b \in Z(G)$ de forma que $x = z^n a$ y $y = z^m b$. Por tanto:

$$xy = z^n a z^m b = z^n z^m ab = z^{n+m} ba = z^m z^n ba = z^m b z^n a = yx$$

□

Corolario 1.12.1. *Si G es un grupo y p es un número primo, si $|G| = p^n$, entonces:*

$$|Z(G)| \neq p^{n-1}$$

En particular, todos los grupos de orden p^2 son abelianos.

Demostración. Supongamos que $|G| = p^n$ y que $|Z(G)| = p^{n-1}$. De esta forma:

$$|G/Z(G)| = p$$

En dicho caso, $G/Z(G)$ es cíclico, luego G es abeliano (por el Lema anterior). Por tanto, G coincide con su centro, $G = Z(G)$, luego $p^n = p^{n-1}$, <u>contradicción</u>.

En particular, si G es un grupo con $|G| = p^2$ con p primo, como $Z(G) < G$, $|Z(G)|$ a de dividir a p^2, luego:

- Si $|Z(G)| = 1$, entonces $Z(G) = 1$, que contradice a Burnside.
- $|Z(G)| = p$ no puede ser, por lo que acabamos de probar.
- La única posibilidad es que $|Z(G)| = p^2$, de donde $Z(G) = G$.

□

Observación. Notemos que ahora sabemos que todos los grupos de orden un primo al cuadrado son resolubles, por ser abelianos.

Teorema 1.13. *Sea G un grupo finito con $|G| = n$ y sea p un número primo, entonces, para toda potencia p^k que divida a n, existe un subgrupo $H < G$ con orden $|H| = p^k$.*

Demostración. Por inducción sobre k:

- <u>Si $k = 1$</u>: tenemos el Teorema de Cauchy.
- <u>Primera hipótesis de inducción</u>: el resultado es cierto para todo $l < k$: si p^l divide a $|G|$, entonces $\exists H < G$ con $|H| = p^l$.
  Veamos qué ocurre con k, es decir, si $|G| = p^k r = n$ para cierto $r \in \mathbb{N}$.

  Por inducción sobre r:

  - <u>Si $r = 1$</u>: tomamos $H = G$.
  - <u>Segunda hipótesis de inducción</u>: si $r > 1$, suponemos el resultado cierto para todo grupo G de orden $p^k m$ con $m < r$, es decir, $\exists H < G$ con $|H| = p^k$, veamos qué ocurre para $|G| = p^k r$:

    Para ello, distinguimos casos:

    - Si existe $K < G$, $K \neq G$ de forma que $p \nmid [G : K]$. En dicho caso: $|G| = [G : K]|K|$ y $p^k \mid |G|$, entonces p^k dividirá a $|K|$, luego $\exists s \in \mathbb{N}$ de forma que $|K| = p^k s$ con $s < r$ (ya que $|K| < |G|$). Usando la Segunda Hipótesis de inducción, tendremos que existe un subgrupo $H < K < G$ de forma que $|H| = p^k$.

- Si para cualquier $K < G$, $K \neq G$ se tiene que $p \mid [G : K]$, entonces usando la fórmula de las clases:

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{h \in \Gamma} [G : C_G(h)]$$

Y como p divide a $[G : C_G(h)]$ para todo $h \in \Gamma$ (y además p^k divide a $|G|$), concluimos que $p \mid |Z(G)|$. Por el Teorema de Cauchy, podemos encontrar $K < Z(G)$ de forma que $|K| = p$.
Por ser $K \subseteq Z(G)$, entonces $K \lhd G$ (basta pensar en la definición de subgrupo normal) y podemos considerar el conjunto cociente G/K, con orden:

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{p} = \frac{p^k r}{p} = p^{k-1} r$$

De donde p^{k-1} divide a $|G/K|$.
Por la Primera Hipótesis de inducción, existe un subgrupo $L < G/K$ con $|L| = p^{k-1}$. Por el Tercer Teorema de Isomorfía, si tomamos $H = p^*(L)$, tenemos que $K \lhd H < G$, con:

$$L = H/K$$

De donde:

$$|H| = |H/K||K| = p^{k-1} p = p^k$$

□

Ejemplo. Por ejemplo, si G es un grupo con orden $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$, sabemos que G tendrá subgrupos de orden 2, 4, 8 y 3.

1.2.1. $p-$subgrupos de Sylow

En 1872, un noruego llamado Peter LM Sylow (1832-1918) definió unos grupos y llegó a unos resultados sobre ellos. En este documento, sus Teoremas no tendrán demostraciones muy elaboradas, como consecuencia de la teoría que venimos ya desarrollando desde el inicio.

Definición 1.10 ($p-$subgrupos de Sylow)**.** Si G es un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$, un $p-$subgrupo de Sylow de G es un $p-$subgrupo de G cuyo orden es la máxima potencia de p que divide a $|G|$.

Es decir, si $|G| = p^k m$ con $\mathrm{mcd}(p, m) = 1$ y p primo, un $p-$subgrupo $H < G$ es de Sylow si $|H| = p^k$.

Corolario 1.13.1 (Primer Teorema de Sylow)**.** *Para todo grupo finito G y todo divisor primo p de su orden, existe al menos un $p-$subgrupo de Sylow de G.*

Demostración. Si p divide a $|G|$, existirán $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ con $\mathrm{mcd}(p, m) = 1$ de forma que $|G| = p^k m$, por lo que también p^k divide a $|G|$. El Teorema 1.13 nos dice que $\exists H < G$ con $|H| = p^k$, luego H será un $p-$subgrupo de Sylow de G. □

Ejemplo. Si tenemos un grupo G con $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$, vamos a tener:

- $P < G$ un $2-$subgrupo de Sylow, con $|P| = 8$.
- $Q < G$ un $3-$subgrupo de Sylow, con $|Q| = 3$.

Observación. Si G es un grupo y p es un número primo con:

$$|G| = p^k m \quad \text{mcd}(p, m) = 1$$

Si $H < G$ y P es un $p-$subgrupo de Sylow con $P < H < G$, entonces usando la fórmula de los índices:

$$[G : P] = [G : H][H : P]$$

En dicho caso, $[H : P] \mid [G : P] = m$. Si suponemos que p divide a $[H : P]$, entonces p dividirá a $[G : P] = m$, pero $\text{mcd}(p, m) = 1$, por lo que p no puede dividir a $[H : P]$.

Es decir, si encontramos un subgrupo H de G que contiene a P como subgrupo, entonces p no dividirá a $[H : P]$.

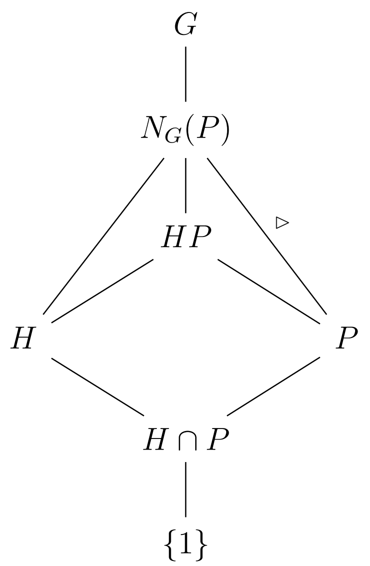
El siguiente Lema también recibe el nombre de Segundo Teorema de Sylow, aunque nos reservamos este nombre para el resultado que se demuestra a partir del Lema.

Lema 1.14. *Si P es un $p-$subgrupo de Sylow de un grupo finito G y H es un $p-$subgrupo de $N_G(P)$, entonces H está contenido en P.*

Es decir, los $p-$subgrupos del normalizador de un $p-$subgrupo de Sylow estarán contenidos en dicho $p-$subgrupo de Sylow.

Demostración. Como $P \lhd N_G(P)$ (gracias a la Proposición 1.8) y $H < N_G(P)$, podemos aplicar el Segundo Teorema de Isomorfía, obteniendo que:

- $HP < N_G(P)$.
- $P \lhd HP$.
- $H \cap P \lhd H$.



Así como que:

$$HP/P \cong H/H \cap P$$

Llamando $r = [HP : P] = [H : H \cap P]$, distinguimos casos:

- Si $r = 1$, entonces $HP = P$, de donde $H < P$, como queríamos demostrar.
- Si $r > 1$, estamos en la situación de la observación anterior:

  $$H < HP < N_G(P) \qquad [N_G(P) : P] = [N_G(P) : HP][HP : P]$$

  Si suponemos que p divide a $[HP : P]$, entonces p dividirá a $[N_G(P) : P]$, contradicción (puesto que P era un $p-$*subgrupo* de Sylow de G, luego lo será de $N_G(P)$, por ser $|N_G(P)| \leqslant |G|$). Tenemos entonces que $p \nmid [HP : P] = r$.

  Por otro lado, como la intersección de $p-$grupos sigue siendo un $p-$grupo (basta aplicar la definición de $p-$grupo) y el cociente de $p-$grupos sigue siendo un $p-$grupo (gracias al Corolario 1.10.1), tendremos que $H/(H \cap P)$ es un $p-$grupo, con $|H/(H \cap P)| = r > 1$, por lo que si $1 \neq x \in H/(H \cap P)$, tendremos que $\exists k \in \mathbb{N}$ de forma que $O(x) = p^k$, con $p^k \mid r$. Por tanto, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

  $$r = p^k m$$

  De donde $p \mid r$, <u>contradicción</u>, ya que habíamos visto antes que $p \nmid r$.

Como vemos, la única posibilidad es $r = 1$. □

Teorema 1.15 (Segundo Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito, p un número primo, supongamos que $|G| = p^k m$ con $\mathrm{mcd}(p, m) = 1$ y n_p denota el número de $p-$subgrupos de Sylow de G, entonces:*

i) *Todo $p-$subgrupo de G está contenido (como subgrupo) en un $p-$subgrupo de Sylow de G.*

ii) *Cualesquiera dos $p-$subgrupos de Sylow de G son conjugados.*

iii) $n_p \mid m$ *y* $n_p \equiv 1 \mod p$.

Demostración. Demostramos cada apartado:

i) Si llamamos $S = Syl_p(G) = \{P \mid P \text{ es un } p-\text{subgrupo de Sylow de } G\}$, consideramos la acción por conjugación $G \times S \to S$ dada por:

$$ac(g, P) = {}^gP = gPg^{-1} \in S$$

Que estará bien definida, ya que:

- Sabemos por la Proposición **??** que $gPg^{-1} < G$, para todo $g \in G$.
- Si $gxg^{-1} \in gPg^{-1}$, entonces:

  $$O(gxg^{-1}) = O(x) = p^k$$

  Para cierto $k \in \mathbb{N}$, por ser P un $p-$grupo, por lo que $ac(g, P) = gPg^{-1}$ seguirá siendo un $p-$grupo.

- Además, fijado $g \in G$, la aplicación
$$\begin{array}{rccc} \phi_g: & P & \longrightarrow & gPg^{-1} \\ & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$
Es biyectiva:
  - Si $gxg^{-1} \in gPg^{-1}$, entonces $\phi_g(x) = gxg^{-1}$, luego ϕ_g es sobreyectiva.
  - Si $gxg^{-1} = gyg^{-1}$, entonces $x = y$, por lo que ϕ_g es inyectiva.

  Por lo que $|P| = |gPg^{-1}|$, luego gPg^{-1} seguirá siendo un $p-$subgrupo de Sylow de G.

Es evidente que es una acción. Sea $P_1 \in S$, estudiemos su órbita y estabilizador:
$$Orb(P_1) = \{gP_1g^{-1} \mid g \in G\}$$
$$Stab_G(P_1) = \{g \in G \mid gP_1g^{-1} = P_1\} = N_G(P_1)$$

Tenemos:

- $|Orb(P_1)| = [G : N_G(P_1)]$.
- $P_1 \lhd N_G(P_1) < G$.
- $[G : P_1] = [G : N_G(P_1)][N_G(P_1) : P_1]$.

Por lo que $|Orb(P_1)|$ divide a $[G : P_1] = m$, existirá $t \in \mathbb{N}$ de forma que $m = |Orb(P_1)|t$. Además, como $P_1 \in S$, $\text{mcd}(m, p) = 1$. Se tiene por tanto que:
$$\text{mcd}(|Orb(P_1)|t, p) = 1 \Longrightarrow \text{mcd}(|Orb(P_1)|, p) = 1$$

Propiedad que usaremos luego. Ahora, veamos que todo $p-$subgrupo está contenido en un $p-$subgrupo de Sylow. Para ello, sea H un $p-$subgrupo de G, consideramos la acción sobre la órbita de $P_1 \in S$, $ac : H \times Orb(P_1) \to Orb(P_1)$, dada por:
$$ac(h, P) = {}^hP = hPh^{-1} \in Orb(P_1)$$
Que estará bien definida gracias a la definición de $Orb(P_1)$. Si tomamos $P \in Orb(P_1)$, tendremos que:
$$Stab_H(P) = \{h \in H \mid hPh^{-1} = P\} = H \cap N_G(P) < H$$

Además, también tendremos que $H \cap N_G(P) < P$, por ser $H \cap N_G(P) < N_G(P)$ un $p-$subgrupo y aplicar el Lema anterior. En definitiva, $H \cap N_G(P) < H \cap P$ y como tenemos $P \lhd N_G(P)$, llegamos a:
$$Stab_H(P) = H \cap N_G(P) < H \cap P < H \cap N_G(P)$$

De donde tenemos que $H \cap N_G(P) = H \cap P$. Usando la fórmula de clases:
$$|Orb(P_1)| = \sum_{P \in \Gamma} |Orb(P)| = \sum_{P \in \Gamma} [H : Stab_H(P)] = \sum_{P \in \Gamma} [H : H \cap P]$$

Y como cada sumando $[H : H \cap P]$ con $P \in \Gamma$ divide a $|H|$, que es una potencia de p (H era un $p-$subgrupo) y teníamos que $p \nmid |Orb(P_1)|$ (demostramos anteriormente que $\text{mcd}(|Orb(P_1)|, p) = 1$), ha de existir $P \in Orb(P_1) \subseteq S$ de forma que:

$$[H : H \cap P] = 1$$

De donde $H = H \cap P$, por lo que $H < P$.

ii) Veamos ahora que cualesquiera dos $p-$subgrupos de Sylow de G son conjugados. Para ello, sean P_1, P_2 dos $p-$subgrupos de Sylow de G, hemos visto en el apartado anterior que si $H = P_2 < G$ es un $p-$subgrupo de G, entonces H está contenido en un subgrupo de Sylow, por lo que $\exists P$, un $p-$subgrupo de Sylow de G, conjugado de P_1 (por lo que hemos demostrado en el apartado anterior), de forma que $P_2 < P$, pero $|P| = |P_2|$, luego $P_2 = P$ y llegamos a que P_1 y P_2 son conjugados.

iii) Veamos ahora que $n_p \mid m$ y que $n_p \equiv 1 \mod p$.

En el apartado *ii)* hemos visto que $Orb(P_1) = S$, luego:

$$n_p = |S| = |Orb(P_1)| = [G : N_G(P_1)]$$

Y tenemos que:

$$m = [G : P_1] = [G : N_G(P_1)][N_G(P_1) : P_1] = n_p[N_G(P_1) : P_1]$$

Por lo que $n_p \mid m$.

Si en el apartado *i)* tomamos $H = P_1$ (el de la demostración anterior), llegamos a que:

$$n_p = |Orb(P_1)| = \sum_{P \in \Gamma} [P_1 : P_1 \cap P]$$

Y los índices $[P_1 : P_1 \cap P]$ pueden ser múltiplos de p o 1, por ser cociente de $p-$subgrupos:

- Si $[P_1 : P_1 \cap P] = 1$, entonces $P_1 = P_1 \cap P$, por lo que $P < P_1$, pero como $|P| = |P_1|$, tenemos que $P = P_1$.

Por lo que:

$$n_p = 1 + \sum_{P \in \Gamma \setminus \{P_1\}} [P_1 : P_1 \cap P]$$

Con $[P_1 : P_1 \cap P]$ múltiplos de p para todo $P \in \Gamma \setminus \{P_1\}$, por lo que $\exists k \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$n_p = 1 + pn$$

Es decir, $n_p \equiv 1 \mod p$.

□

Ejemplo. Vamos a calcular grupos de Sylow:

- En $C_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$ para $n \in \mathbb{N}$, por el Primer Teorema de Sylow tendremos grupos de Sylow de las potencias máximas de los primos que aparecen en la factorización de n. Es decir, si n se descompone como:

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_m^{t_m}$$

Para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe un p_k-subgrupo de Sylow, que será cíclico y tendrá orden $p_k^{t_k}$, luego los subgrupos de Sylow serán de la forma: $C_{p_k^{t_k}}$.

- En S_3, como $|S_3| = 6 = 2 \cdot 3$, tendremos $2-$subgrupos de Sylow y $3-$subgrupos de Sylow. Veamos cuántos tenemos a partir del Segundo Teorema de Sylow:

  - $2-$subgrupos de Sylow, es decir, subgrupos de orden 2 de S_3. Como $n_2 \mid 3$ y ha de ser $n_2 \equiv 1 \mod 2$, tendremos que n_2 valdrá 1 o 3.

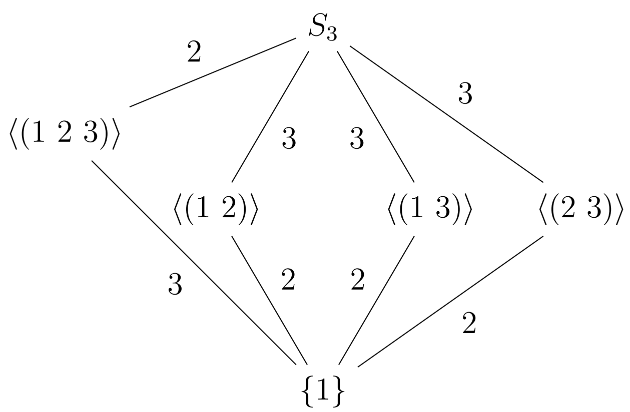


Figura 1.1: Diagrama de Hasse para los subgrupos de S_3.

  Si observamos el retículo de subgrupos de S_3, observamos que hay 3 subgrupos distintos de orden 2, por lo que tendremos que $n_2 = 3$.

  - Los $3-$subgrupos de Sylow será un subgrupo de orden 3 de S_3, que será el único que hay: $\langle (1\ 2\ 3) \rangle = A_3 \lhd S_3$.

  Si queremos verlo por el Segundo Teorema de Sylow:

$$\left.\begin{array}{r} n_3 \mid 2 \\ n_3 \equiv 1 \mod 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = 1$$

- En A_4, tenemos $|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$. Tendremos:

  - $2-$subgrupo de Sylow de orden 4. Busquemos por el Segundo Teorema de Sylow:

$$\left.\begin{array}{r} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \mod 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_2 \in \{1, 3\}$$

  Observando el retículo de A_4, concluimos que $n_2 = 1$, ya que el único subgrupo de orden 4 de A_4 es V, que es normal en A_4.

- $3-$subgrupo de Sylow de orden 3:

$$\left.\begin{array}{r} n_3 \mid 4 \\ n_3 \equiv 1 \mod 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, 4\}$$

Y observando el retículo de A_4, serán los 4 subgrupos de A_4 generados por los $3-$ciclos:

$$\langle (1\ 2\ 3) \rangle \qquad \langle (1\ 2\ 4) \rangle \qquad \langle (1\ 3\ 4) \rangle \qquad \langle (2\ 3\ 4) \rangle$$

- En S_4, $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$:

  - Para los $2-$subgrupos:

$$\left.\begin{array}{r} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \mod 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_2 \in \{1, 3\}$$

Si suponemos que $n_2 = 1$, sea $Q < S_4$ un subgrupo con $|Q| = 8$, será el único $2-$subgrupo de Sylow. En dicho caso, todas las trasposiciones de S_4 deben estar contenidas en Q, ya que $\langle (x\ y) \rangle$ es un $2-$grupo (es un grupo de orden 2) y todo $2-$grupo está contenido en un $2-$grupo de Sylow (gracias al Segundo Teorema de Sylow), por lo que Q contiene todas las trasposiciones. Sin embargo, como $S_4 = \langle \{(x\ y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\} \rangle$, tendremos que $Q = S_4$, contradicción.

Por tanto, tenemos $n_2 = 3$, tenemos tres $2-$subgrupos de Sylow: Q_1, Q_2 y Q_3. El grupo de Klein V es un $2-$subgrupo, por lo que va a estar contenido en algún Q_k (para $k \in \{1, 2, 3\}$). Supongamos que $V < Q_1$. Como todos ellos son conjugados, $\exists \alpha, \beta \in S_4$ de forma que:

$$Q_2 = \alpha Q_1 \alpha^{-1}$$
$$Q_3 = \beta Q_1 \beta^{-1}$$

Y si multiplicamos (como $V \lhd S_4$):

$$V = \alpha V \alpha^{-1} < \alpha Q_1 \alpha^{-1} = Q_2$$
$$V = \beta V \beta^{-1} < \beta Q_1 \beta^{-1} = Q_3$$

De donde deducimos que $V < Q_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$. Los Q_k contendrán a V y deben repartirse entre ellos a las trasposiciones. Realizando las cuentas pertinentes, podemos llegar a deducir que:

$$Q_1 = V\langle (1\ 2) \rangle$$
$$Q_2 = V\langle (1\ 3) \rangle$$
$$Q_3 = V\langle (1\ 4) \rangle$$

  - Para los $3-$subgrupos de Sylow:

$$\left.\begin{array}{r} n_3 \mid 8 \\ n_3 \equiv 1 \mod 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, 4\}$$

Como sabemos de la existencia de varios elementos de orden 3, los $3-$subgrupos de Sylow de S_4 serán:

$$\langle (1\ 2\ 3) \rangle, \langle (1\ 2\ 4) \rangle, \langle (1\ 3\ 4) \rangle, \langle (2\ 3\ 4) \rangle$$

Corolario 1.15.1. *Sea P un $p-$subgrupo de Sylow de un grupo finito G. Entonces:*

$$P \text{ es el único } p-\text{subgrupo de Sylow} \Longleftrightarrow P \lhd G$$

Demostración. Como en el Segundo Teorema de Sylow vimos que el conjugado de un $p-$subgrupo de Sylow es un $p-$subgrupo de Sylow y que todos los $p-$subgrupos de Sylow son conjugados entre sí, acabamos de justificar $(*)$ en:

$$P \text{ es el único } p-\text{subgrupo de Sylow de } G \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} gPg^{-1} = P \quad \forall g \in G \Longleftrightarrow P \lhd G$$

La segunda equivalencia se tiene por una caracterización vista de los subgrupos normales. □

Ejemplo. Todo grupo de orden 35 es resoluble.

Demostración. Sea G un grupo con $|G| = 35 = 5 \cdot 7$, vemos que:

$$\left.\begin{array}{r} n_7 \mid 5 \\ n_7 \equiv 1 \mod 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_7 = 1$$

En dicho caso, tenemos un único $7-$subgrupo de Sylow $H < G$, que tendrá orden 7 y por el Corolario anterior será normal en G. En dicho caso, sabemos que será isomorfo a $\mathbb{Z}_7$. Como los grupos abelianos son resolubles, tenemos que H es resoluble. Si consideramos el cociente:

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{5 \cdot 7}{7} = 5$$

Por lo que $G/H \cong \mathbb{Z}_5$ y G/H será resoluble por ser isomorfo a un grupo abeliano. Deducimos que G es resoluble, por ser H y G/H resolubles. □

Esta estrategia que hemos seguido para demostrar que cualquier grupo de orden 35 es resoluble puede seguirse de forma análoga para demostrar que otros grupos de cierto orden son siempre resolubles.

Teorema 1.16. *Sea G un grupo finito en el que todos sus subgrupos de Sylow son normales, entonces G es el producto directo interno de sus subgrupos de Sylow:*

$$G \cong \prod_{H \in Syl(G)} H$$

Demostración. En la caracterización de producto directo interno para una cantidad finita de subgrupos (Teorema **??**), vimos que G era producto directo interno de todos ellos (los llamaremos H_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$) si y solo si:

- $H_i \lhd G$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $H_1 H_2 \ldots H_n = G$.
- $(H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\}$, para todo $i \in \{2, \ldots, k\}$

Basta pues, demostrar estos 3 puntos. Supuesto que $|G| = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$, llamamos P_i al único p_i-subgrupo de Sylow, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

- Por hipótesis, tendremos que $P_i \lhd G$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.
- También:
$$|P_1P_2 \ldots P_K| = |P_1||P_2| \ldots |P_k| = |G|$$
Y como tenemos siempre que $P_1P_2 \ldots P_k < G$, deducimos que $P_1P_2 \ldots P_k = G$.
- Fijado $i \in \{2, \ldots, k\}$, veamos que $(P_1 \ldots P_{i-1}) \cap P_i = \{1\}$. Para ello, sea $x \in (P_1 \ldots P_{i-1}) \cap P_i$, tenemos:
$$\left.\begin{array}{l} O(x) \mid |P_1 \ldots P_{i-1}| = p_1^{n_1} \ldots p_{i-1}^{n_{i-1}} \\ O(x) \mid |P_i| = p_i^{n_i} \end{array}\right\} \Longrightarrow O(x) = 1 \Longrightarrow x = 1$$

$\square$

Observación. Notemos que cualquier grupo abeliano finito es producto directo interno de sus subgrupos de Sylow, ya que el Primer Teorema de Sylow nos garantiza su existencia y por ser el grupo abeliano siempre tendremos que dichos subgrupos son normales.

2. Clasificación de grupos abelianos finitos

El objetivo final del tema es demostrar los teoremas de estructura de los grupos abelianos finitos, que permiten clasificar todos los grupos de este tipo según su orden. De esta forma, dado un grupo abeliano finito, la clasificación que realizaremos en este tema nos permitirá encontrar un grupo abeliano finito bien conocido al que el grupo dado sea isomorfo.

2.1. Descomposiciones como producto de grupos cíclicos

Como toma de contacto, serán de especial relevancia dos resultados que ya vimos en Capítulos anteriores, como:

1. En la Proposición **??** vimos que:

$$C_n \oplus C_m \cong C_{nm} \Longleftrightarrow \mathrm{mcd}(n, m) = 1$$

2. En el Teorema 1.16 vimos que si G es un grupo finito en el que todos sus subgrupos de Sylow son únicos, entonces G es producto directo interno de todos ellos:

$$G \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_k$$

Como trabajaremos con subgrupos abelianos, será usual usar la notación de $\oplus$ en lugar de la de $\times$.

Teorema 2.1 (Estructura de los $p-$grupos abelianos finitos)**.**
Sea A un $p-$grupo abeliano finito con orden $|A| = p^n$ para $n \geqslant 1$, entonces existen enteros $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_t \geqslant 1$ de forma que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_t = n \quad y \quad A \cong C_{p^{\beta_1}} \oplus C_{p^{\beta_2}} \oplus \ldots \oplus C_{p^{\beta_t}}$$

Además, esta expresión es única, es decir, si existen $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_s \geqslant 1$ de forma que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = n \quad y \quad A \cong C_{p^{\alpha_1}} \oplus C_{p^{\alpha_2}} \oplus \ldots \oplus C_{p^{\alpha_s}}$$

entonces $s = t$ y $\alpha_k = \beta_k$, para todo $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Observación. Notemos que lo que estamos haciendo es tomar particiones de n de la forma β_i, y este Teorema nos dice que el $p-$grupo puede escribirse de forma única salvo isomorfismos como producto de ciertos grupos cíclicos.
Es decir, existen tantos $p-$grupos abelianos de orden p^n como particiones tengamos del número n, salvo isomorfismos. Por tanto, conocemos ya cómo son todos los $p-$grupos abelianos finitos.

Ejemplo. Por ejemplo:

- Para saber los grupos abelianos finitos de orden $8 = 2^3$ que hay (salvo isomorfismos), calculamos cada una de las posibles particiones del número 3 (el exponente del 2):

$$\begin{aligned} 3 &\longrightarrow A \cong C_8 \\ 2,1 &\longrightarrow A \cong C_4 \oplus C_2 \\ 1,1,1 &\longrightarrow A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \end{aligned}$$

- Para saber los grupos abelianos finitos de orden $81 = 3^4$, calculamos cada una de las particiones de 4:

$$\begin{aligned} 4 &\longrightarrow A \cong C_{81} \\ 3,1 &\longrightarrow A \cong C_{27} \oplus C_3 \\ 2,2 &\longrightarrow A \cong C_9 \oplus C_9 \\ 2,1,1 &\longrightarrow A \cong C_9 \oplus C_3 \oplus C_3 \\ 1,1,1,1 &\longrightarrow A \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \end{aligned}$$

2.1.1. Descomposición cíclica primaria

Teorema 2.2 (Estructura de los grupos abelianos finitos)**.**
Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$ siendo p_i primo $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, entonces existen $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ de forma que para el $i-$ésimo entero t_i existen

$$n_{i1} \geqslant n_{i2} \geqslant \dots \geqslant n_{it_i} \geqslant 1$$

Con:

$$n_{i1} + n_{i2} + \dots + n_{it_i} = \gamma_i$$

Para dichos n_{ij} con $j \in \{1, \dots, t_i\}$ y $i \in \{1, \dots, k\}$ podremos escribir:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{n_{ij}}} \right)$$

Y la descomposición es única.

Demostración. Si A es abeliano y finito, entonces todos sus $p-$subgrupos de Sylow son normales, luego podemos escribir:

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k$$

Siendo $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ el conjunto de todos sus $p-$subgrupos de Sylow, de forma que $|P_i| = p_i^{r_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como cada P_i es un p_i-subgrupo abeliano finito, aplicando el Teorema 2.1, podemos encontrar:

$$n_{i1} \geqslant n_{i2} \geqslant \ldots \geqslant n_{it_i} \geqslant 1 \qquad n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{it_i} = \gamma_i$$

De forma que podamos escribir:

$$P_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{n_{ij}}} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

De donde tenemos la expresión de la tesis. □

Definición 2.1. Sea A un grupo abeliano finito, el Teorema 2.2 motiva las siguientes definiciones:

- La única descomposición obtenida para A en dicho teorema recibirá el nombre de descomposición cíclica primaria de A.
- A las potencias $p_i^{n_{ij}}$ obtenidas (usando la notación del Teorema), las llamaremos divisores elementales de A.
- A cada $p-$subgrupo de Sylow de A lo llamaremos componente $p-$primaria de A.

Ejemplo. Si tenemos un grupo finito abeliano A con $|A| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, buscamos las posibles descomposiciones cíclicas primarias de A, que obtenemos fácilmente tras combinar todas las particiones posibles de los exponentes de los primos que aparecen en la descomposición de $|A|$, es decir, las particiones de 3, 2 y 1:

Divisores elementales	Descomposición cíclica primaria
$2^3\ 3^2\ 5$	$C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2^2\ 2\ 3^2\ 5$	$C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2\ 2\ 2\ 3^2\ 5$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$
$2^3\ 3\ 3\ 5$	$C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus C_8$
$2\ 2^2\ 3\ 3\ 5$	$C_2 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$
$2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 5$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$

Estas sería todas las descomposiciones cíclicas primarias de A. Es decir, dado cualquier grupo de orden 360, sabemos que será isomorfo a alguno de los grupos que aparecen a la derecha de la tabla.

Sin embargo, si recordamos la Proposición **??**, podemos escribir (multiplicando aquellos cíclicos de mayor orden que sean primos relativos):

$$\begin{gathered} C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{360} \\ C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{180} \oplus C_2 \\ C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 \cong C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2 \\ C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus C_8 \cong C_{120} \oplus C_3 \\ C_2 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \cong C_{60} \oplus C_6 \\ C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 \cong C_{30} \oplus C_6 \oplus C_2 \end{gathered}$$

Corolario 2.2.1. *Si A es un grupo abeliano finito con $|A| = p_1 p_2 \dots p_k = n$, entonces salvo isomorfismo, el único grupo abeliano de orden n es el cíclico C_n.*

Demostración. Utilizando el Teorema 2.2, podemos escribir:

$$A \cong C_{p_1} \oplus C_{p_2} \oplus \dots \oplus C_{p_k}$$

Y como $\operatorname{mcd}(p_i, p_j) = 1$ para cada $i, j \in \{1, \dots, k\}$ con $i \neq j$, tenemos que:

$$C_{p_1} \oplus C_{p_2} \oplus \dots \oplus C_{p_k} = C_{p_1 p_2 \dots p_k} = C_n$$

□

2.1.2. Descomposición cíclica

Teorema 2.3 (Descomposición cíclica de un grupo abeliano finito)**.**
Si A es un grupo abeliano finito, entonces existen unos únicos $d_1, d_2, \dots, d_t \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$d_1 d_2 \dots d_t = |A| \qquad y \qquad d_i \mid d_j, \quad \forall j \leqslant i$$

Para los que se tiene que:

$$A \cong C_{d_1} \oplus C_{d_2} \oplus \dots \oplus C_{d_t}$$

Demostración. Supuesto que $|A| = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ es la descomposición de $|A|$ en primos, si usamos la descomposición que nos da el Teorema 2.2, existen $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} m_{i1} \geqslant m_{i2} \geqslant \dots \geqslant m_{it_i} \geqslant 1 \\ m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{it_i} = r_i \\ \forall i \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

De forma que:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{m_{ij}}} \right)$$

Sea $t = \max\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, definimos:

$$n_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} m_{ij} & \text{si } j \leqslant t_i \\ 0 & \text{si } j > t_i \end{array} \right. \qquad \forall j \in \{1, \dots, t\}, \in i\{1, \dots, k\}$$

Observemos que no hemos hecho mas que extender la anterior tabla dentada $(m_{ij})_{\substack{j \in \{1,\dots,t_i\} \\ i \in \{1,\dots,k\}}}$ a la tabla $k \times t$ $(n_{ij})_{\substack{j \in \{1,\dots,t\} \\ i \in \{1,\dots,k\}}}$, rellenando con ceros los huecos que no teníamos. De esta forma, si consideramos la matriz que en la entrada (i, j) tiene $p_i^{n_{ij}}$:

$$\begin{pmatrix} p_1^{n_{11}} & p_1^{n_{12}} & \dots & p_1^{n_{1t}} \\ p_2^{n_{21}} & p_2^{n_{22}} & \dots & p_2^{n_{2t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k^{n_{k1}} & p_k^{n_{k2}} & \dots & p_k^{n_{kt}} \end{pmatrix}$$

Tenemos que A es el producto directo de los grupos cíclicos de órdenes las entradas de la tabla anterior (ya que $A \cong A \oplus C_1 = A \oplus \{1\}$). Si tomamos el producto de los elementos de cada columna:

$$\begin{aligned}
d_1 &= p_1^{n_{11}} p_2^{n_{21}} \dots p_k^{n_{k1}} \\
d_2 &= p_1^{n_{12}} p_2^{n_{22}} \dots p_k^{n_{k2}} \\
&\vdots \\
d_t &= p_1^{n_{1t}} p_2^{n_{2t}} \dots p_k^{n_{kt}}
\end{aligned}$$

Efectivamente, tendremos que:

$$d_1 d_2 \dots d_t = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} = |A|$$

Fijado $i \in \{1, \dots, k\}$, como $n_{ij} \geqslant n_{ij+1}$ (por la construcción realizada) para todo $j \in \{1, \dots, t-1\}$, tendremos entonces que si $u, v \in \{1, \dots, t\}$ con $u \leqslant v$, los exponentes de los primos en d_u serán mayores que los exponentes de los primos en d_v, por lo que $d_v \mid d_u$, lo que se verifica para todo $u \leqslant v$. Además, tendremos que:

$$\begin{aligned}
C_{d_1} &\cong C_{p_1^{n_{11}}} \oplus C_{p_2^{n_{21}}} \oplus \dots \oplus C_{p_k^{n_{k1}}} \\
&\vdots \\
C_{d_t} &\cong C_{p_1^{n_{1t}}} \oplus C_{p_2^{n_{2t}}} \oplus \dots \oplus C_{p_k^{n_{kt}}}
\end{aligned}$$

De donde $A \cong C_{d_1} \oplus C_{d_2} \oplus \dots \oplus C_{d_t}$. La unicidad de la descomposición viene de la unicidad de la descomposición del Teorema 2.2 más la construcción de los d_j realizada. □

Definición 2.2. Sea A un grupo abeliano finito, el Teorema 2.3 motiva las siguientes definiciones:

- La única descomposición obtenida para A en dicho teorema recibirá el nombre de descomposición cíclica de A.
- Los enteros d_j obtenidos recibirán el nombre de factores invariantes.

Ejemplo. Recuperando el ejemplo anterior, si tenemos A, un grupo abeliano finito con $|A| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, buscaremos escribir para cada conjunto de divisores elementales las respectivas descomposiciones cíclicas:

- Para la partición $\{2^3, 3^2, 5\}$, teníamos la descomposición cíclica primaria:

  $$A \cong C_8 \oplus C_9 \oplus C_5$$

  Que siguiendo con la construcción realizada en la demostración anterior, nos da la tabla:

  $$\begin{pmatrix} 2^3 \\ 3^2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, obtenemos el factor invariante:

  $$d_1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

  Por lo que la descomposición cíclica de A será $A \cong C_{360}$.

- Para la partición $\{2^2, 2, 3^2, 5\}$, la descomposición cíclica primaria fue:

$$A \cong C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$$

En este caso, tendremos $t = \max\{2, 1, 1\} = 2$, por lo que tendremos dos factores invariantes, que podemos calcular de forma fácil a partir de la tabla:

$$\left(\begin{array}{cc} 2^2 & 2 \\ 3^2 & 1 \\ 5 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que tendremos (los productos de las columnas):

$$\begin{aligned} d_1 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \\ d_2 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Y la descomposición cíclica es:

$$A \cong C_{180} \oplus C_2$$

- Para la descomposición $\{2, 2, 2, 3^2, 5\}$, teníamos:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$$

Y tendremos $t = 3$, con:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 3^2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que:

$$A \cong C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2$$

- Para $\{2^3, 3, 3, 5\}$, teníamos:

$$A \cong C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Y tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc} 2^3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{array}\right)$$

La descomposición cíclica será:

$$A \cong C_{120} \oplus C_3$$

- Para $\{2^2, 2, 3, 3, 5\}$, teníamos:

$$A \cong C_4 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Y tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc} 2^2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que tenemos la descomposición cíclica:

$$A \cong C_{60} \oplus C_6$$

- Para $\{2, 2, 2, 3, 3, 5\}$ teníamos:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$$

Y tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la descomposición cíclica será:

$$A \cong C_{30} \oplus C_6 \oplus C_2$$

Ejemplo. Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, buscamos hayar sus posibles descomposiciones cíclicas y descomposiciones cíclicas primarias:

Divisores elementales	desc. cíclica primaria	factores invariantes	desc. cíclica
$\{2^2, 3^2, 5\}$	$C_4 \oplus C_9 \oplus C_5$	$d_1 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$	C_{180}
$\{2, 2, 3^2, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5$	$d_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ $d_2 = 2$	$C_{90} \oplus C_2$
$\{2^2, 3, 3, 5\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ $d_2 = 3$	$C_{60} \oplus C_3$
$\{2, 2, 3, 3, 5\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5$	$d_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ $d_2 = 2 \cdot 3 = 6$	$C_{30} \oplus C_6$

Ejemplo. Listar los órdenes de todos los elementos de un grupo abeliano de orden 8.

Sea A un grupo abeliano finito de orden $8 = 2^3$, entonces lo podemos clasificar en:

- C_8, donde usaremos la Proposición **??** y el Corolario **??**:
  - $O(0) = 1$.
  - Los elementos $1, 3, 5$ y 7 tienen orden 8.
  - $O(2) = {}^8/_{\text{mcd}(2,8)} = 4$.
  - $O(4) = {}^8/_{\text{mcd}(4,8)} = 2$.
  - $O(6) = {}^8/_{\text{mcd}(6,8)} = 4$.
- $C_4 \oplus C_2$, aplicamos que $O(a, b) = \text{mcm}(O(a), O(b))$: Como los órdenes de los elementos en C_4 son $\{1, 2, 4\}$ y en C_2 son $\{1, 2\}$, las posibilidades que tenemos son: $\{1, 2, 4\}$. Si primero listamos los órdenes de los elementos en C_4:
  - $O(0) = 1$.
  - $O(1) = 4$.
  - $O(3) = 4$.
  - $O(2) = 2$.

  Podemos ver de forma fácil que:
  - $O(0, 0) = 1$.

- $O(0,1) = 2$.
- $O(1,b) = 4 = O(3,b)$, $\forall b \in C_2$
- $O(2,b) = 2$, $\forall b \in C_2$.

- $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$, los órdenes son $\{1,2\}$ y todos tienen orden 2 salvo el elemento $(0,0,0)$, que tiene orden 1.

Ejemplo. Listar los órdenes de todos los elementos de un grupo abeliano de orden 12.

Sea A con $|A| = 12 = 2^2 \cdot 3$, tenemos entonces que $A \cong \mathbb{Z}_{12}$ o $A \cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$.

- En $\mathbb{Z}_{12}$:
  - $O(0) = 1$.
  - $1, 5, 7$ y 11 tienen orden 12.
  - $O(2) = {}^{12}/_{\text{mcd}(2,12)} = 6$.
  - $O(3) = {}^{12}/_{\text{mcd}(3,12)} = 4$.
  - $O(4) = {}^{12}/_{\text{mcd}(4,12)} = 3$.
  - $O(6) = {}^{12}/_{\text{mcd}(6,12)} = 2$.
  - $O(8) = {}^{12}/_{\text{mcd}(8,12)} = 3$.
  - $O(9) = {}^{12}/_{\text{mcd}(9,12)} = 4$.
  - $O(10) = {}^{12}/_{\text{mcd}(12,10)} = 6$.
- En $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$:

  $$O(a,b) \in \text{mcm}(Div(6), Div(2)) = \text{mcm}(\{1,2,3,6\}, \{1,2\}) = \{1,2,3,6\} \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$$

  El orden de los elementos de $\mathbb{Z}_6$ son:
  - $O(0) = 1$.
  - 1 y 5 tienen orden 6.
  - $O(2) = {}^{6}/_{\text{mcd}(2,6)} = 3$.
  - $O(3) = {}^{6}/_{\text{mcd}(3,6)} = 2$.
  - $O(4) = {}^{6}/_{\text{mcd}(4,6)} = 3$.

  Ahora:
  - $O(0,0) = 1$.
  - $O(0,1) = 2$, ya que $(0,1)^2 = (0,0)$.
  - $O(1,b) = O(5,b) = 6 \ \forall b \in \mathbb{Z}_2$.
  - $O(3,b) = 2 \ \forall b \in \mathbb{Z}_2$.
  - $O(2,0) = O(4,0) = 3$.
  - $O(2,1) = O(4,1) = 6$.

2.2. Clasificación de grupos abelianos no finitos

Buscamos ahora tratar de clasificar los grupos abelianos no finitos. Para ello, recordaremos lo que es un grupo finitamente generado, e introduciremos nuevos conceptos.

Definición 2.3. Un grupo abeliano A se dice que es finitamente generado si existe un conjunto:

$$X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq A$$

De forma que para todo $a \in A$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$a = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

En dicho caso, diremos que X es un sistema de generadores de A, y notaremos:

$$A = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$$

Definición 2.4 (Base)**.** Sea A un grupo abeliano, un conjunto de generadores $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ de A es una base si los elementos de X son $\mathbb{Z}-$linealmente independientes. Es decir, que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Z}$ con:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0$$

Entonces, ha de ser $\lambda_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$. En dicho caso, diremos que A es un grupo abeliano libre de rango r.

Proposición 2.4. *Si A es un grupo abeliano libre de rango r, entonces:*

$$A \cong \mathbb{Z}^r$$

Demostración. Como A es un grupo abeliano libre de rango r, para dar un homomorfismo de A en cualquier otro grupo basta dar las imágenes de los elementos de la base de A.

De esta forma, si $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ es una base de A, definimos el homomorfismo $\phi : A \to \mathbb{Z}^r$ de la forma más canónica posible sobre los elementos de la base de A:

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \phi(x_2) &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \phi(x_r) &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Dado $a \in A$, como X es una base de A, existirán $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$a = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Por lo que:

$$\phi(a) = \phi\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \phi(\lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \phi(x_k)$$

Es fácil ver que ϕ es biyectiva, por lo que ϕ nos da un isomorfismo entre A y $\mathbb{Z}^r$. $\square$

2.2.1. Proceso de clasificación

Una vez entendidas las definiciones básicas necesarias para comenzar el estudio de los grupos abelianos no finitos procederemos ahora a explicar el procedimiento por el cual somos capaces de clasificar cualquier grupo abeliano no finito. Esto es, dar un isomorfismo estándar para cualquier grupo abeliano no finito dado.

Este procedimiento requiere de una gran cantidad de resultados que tienen que ver con cómo son los subrupos y los cocientes de grupos como $\mathbb{Z}^r$ para $r \in \mathbb{N}$, que ya hemos visto que es el único grupo libre de rango r, salvo isomorfismo. Como esta intención escapa al interés de la asignatura y como seremos capaces de clasificar los grupos abelianos no finitos mediante un procedimiento algorítmico, mostraremos ahora los resultados que nos permiten realizarlo, la mayoría de ellos sin demostración.

Animamos al lector a profundizar más en estos teoremas de clasificación, que seguro se encuentran en algún libro de la bibliografía de la asignatura.

El primer problema con el que nos encontramos es con el de cómo conocer un grupo abeliano no finito, ya que al tener infinitos elementos no nos es posible listar todos sus elementos para conocerlo bien. Como puede adivinarse, lo que haremos será trabajar con grupos abeliano finitamente generados, y las relaciones entre los elementos del grupo las deduciremos a partir de las relaciones entre los generadores del grupo. Esto nos conlleva a pensar que la forma en la que describiremos un grupo abeliano no finito será mediante su **presentación**.

Como a lo largo de este capítulo siempre conoceremos un grupo por su presentación, impondremos ahora varias reglas para tratar de estandarizar la forma en la que nos den las presentaciones, con el fin también de hacer los razonamientos abstractos y genéricos con una notación más fácil y cómoda. Estas reglas las crearemos a partir de la clasificación de un ejemplo de grupo abeliano no finito.

Ejemplo. Se pide clasificar el grupo:

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4, x^2z = z^{-1}y, xy = yx, xz = zx, yz = zy \rangle$$

Este grupo nos viene dado con la notación multiplicativa, algo habitual en grupos y que venimos haciendo durante toda la asignatura, pero podemos tratar de escribir el grupo con notación aditiva, algo que nos será más cómodo en estos casos:

$$G = \langle x, y, z \mid 3x = 4y, 2x + z = -z + y, x + y = y + x, x + z = z + x, y + z = z + y \rangle$$

Además, como nuestro objetivo es trabajar con grupos abelianos esta notación estará más que justificada, aprovechando la intuición de que es mucho más natural que una suma sea abeliana antes que un producto lo sea (podemos pensar en las matrices, por ejemplo). De esta forma, convenimos en eliminar de la presentación del grupo todas las relaciones que nos indiquen la conmutatividad entre los generadores del grupo, por simplicidad:

$$G = \langle x, y, z \mid 3x = 4y, 2x + z = -z + y \rangle$$

Finalmente, convenimos estandarizar la forma en la que damos las ecuaciones, tratando de expresar estas siempre como una combinación lineal de los generadores igualadas a ceros:

$$G = \langle x, y, z \mid 3x - 4y = 0, 2x + 2z - y = 0 \rangle$$

Con las tres reglas de notación introducidas en el ejemplo superior, cualquier grupo abeliano finitamente generado vendrá dado a nosotros como una presentación del estilo:

$$G = \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\rangle$$

Notemos que, de esta forma, dar un grupo es equivalente a dar una matriz. Es decir, dada una matriz $m \times n$, podemos pensar que hay un grupo asociado a dicha matriz que tendrá n elementos que generen el grupo y que dichos elementos cumplan m relaciones entre sí. Así, la presentación superior nos da la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz recibirá el nombre de matriz de relaciones del grupo.

Una vez introducida la matriz de relaciones de un grupo a partir de su presentación, si volvemos a la presentación del grupo, podemos observar que dar una presentación de un grupo G generado por los elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es equivalente a dar un epimorfismo $\phi : \mathbb{Z}^n \to G$ de forma que la base canónica[1] de $\mathbb{Z}^n$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ tenga como imágenes:

$$\phi(e_k) = x_k \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

Y que además el conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n, \\ \vdots \\ a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n \end{array} \right\}$$

Sea un sistema de generadores de $\ker(\phi)$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfía sobre ϕ obtenemos que:

$$\mathbb{Z}^r / \ker(\phi) \cong A$$

Por lo que parece que vamos por buen camino si queremos clasificar todos los grupos no abelianos finitamente generados, nos falta estudiar cómo son los grupos cocientes de $\mathbb{Z}^r$. Como dijimos anteriormente, no vamos a hacerlo, por lo que mostraremos ahora una serie de resultados sin demostración que nos ayudarán a seguir en nuestra tarea.

Observemos ahora que podemos hacer los siguientes cambios en una base de un grupo libre y que tras ellos seguiremos teniendo una base del mismo:

[1]Podemos trasladar el concepto de "base canónica de $\mathbb{R}^n$" que teníamos en Álgebra Lineal a este ámbito de clasificación de grupos.

1. Sustituir un elemento de una base por su opuesto.
2. Reordenar los elementos de la base.
3. Sumarle a un elemento de la base otro elemento de la base distinto a él.

Estos cambios en la base de un grupo libre dan lugar a las siguientes transformacioens elementales sobre las columnas de una matriz e relaciones:

1. Cambiar una columna por su opuesta.
2. Reordenar las columnas de la matriz.
3. Sumar a todos los elementos de la columna $i-$ésima un múltiplo de los elementos de la columna $j-$ésima, con $j \neq i$.

Como las columnas de una matriz no tienen nada de especial, de forma análoga pueden justificarse estas operaciones sobre las filas de una matriz, sustituyendo la palabra “columna” por “fila”. Estas transformaciones dan lugar al siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Si M es la matriz de relaciones de una presentación de un grupo abeliano G, es decir:*

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid MX = 0 \rangle$$

Donde:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Y M' es una matriz obtenida mediante transformaciones elementales del tipo 1, 2 o 3 sobre filas o columnas de M, entonces M' también es una matriz de relaciones de una presentación de G.

Teorema 2.6. *Dada $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, podemos realizar transformaciones elementales en M del tipo 1, 2 o 3 en las filas y/o columnas de M hasta llegar a una matriz diagonal de la forma[2]:*

$$M' = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $d_i \mid d_{i+1}$ para $i \in \{1, \dots, r-1\}$ y r es el rango de M. Además, si M' es la matriz de relaciones de un grupo G generado por n generadores, entonces:

$$G \cong \mathbb{Z}^{n-r} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$$

[2] Puede que la matriz no tenga filas de ceros y que en su lugar tenga columnas de ceros, o que no tenga ni filas ni columnas de ceros, todo dependerá del orden y del rango de la matriz.

Definición 2.5. Si G es un grupo abeliano finitamente generado, este tendrá su matriz de relaciones $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, sobre la que podemos aplicar las transformaciones pertinentes para conseguir la matriz M' del Teorema anterior, obteniendo que:

$$G \cong \mathbb{Z}^{n-r} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$$

Para ciertos enteros $n, r, d_1, d_2, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}$, con $d_i \mid d_{i+1}\ \forall i \in \{1, \ldots, r-1\}$

- La matriz M' obtenida a partir de M recibirá el nombre de forma normal de Smith de M.
- A los elementos d_i obtenidos en M' los llamaremos factores invariantes de M.
- Diremos que G tiene rango $n - r$.
- Diremos que $\mathbb{Z}^{n-r}$ es la parte libre de G.
- Diremos que $\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$ es la parte de torsión de G, o grupo de torsión de G, denotado por $T(G)$.

2.2.2. Ejemplos

Una vez explicado el procedimiento teórico, mostraremos varios ejemplos de cómo conseguir la forma normal de Smith de una matriz dada, así como ejemplos sobre cómo podemos clasificar los grupos abelianos no finitos finitamente generados.

Ejemplo. Se pide calcular la forma normal de Smith de:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Aplicaremos a continuación un algoritmo similar al que usábamos en Geometría I para calcular la forma normal de Hermite de una matriz, por lo que los pasos mediante los que "intentamos tener un número en una cierta posición de una matriz" nos los explicaremos, confiando en que el lector es suficientemente habilidoso como para conseguirlo por él mismo. Sin embargo, explicaremos algunos pasos clave en el algoritmo a aplicar que sí debemos tener en cuenta.

En primer lugar, calcularemos el máximo común divisor de los elementos que aparecen en las entradas de la matriz, en este caso, tenemos que es 1, por lo que buscamos escribir un 1 en la posición[3] $(1,1)$ de la matriz. Como consejo, diremos que es recomendable no hacer ceros en los elementos hasta no tener algún 1 disponible. Una forma de conseguir un 1 en la posición $(1,1)$ es (usaremos una notación informal para describir las operaciones, $F_4 - F_3$ debe entenderse como "a la fila 4 le restamos la 3"):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] La esquina superior izquierda.

Una vez tenemos el 1 en la posición deseada, tratamos de rellenar la primera fila y la primera columna entera con ceros (salvo el 1 que acabamos de colocar), algo que ya sabíamos hacer de otras asignaturas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1-C_3]{F_1-2F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora el máximo común divisor de todos los elementos es 2, por lo que tratamos de poner un 2 en la siguiente posición de la diagonal de la matriz, tras el 1 de antes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Ahora, hacemos ceros debajo de este 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+2F_2]{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

El máximo común divisor de los elementos que nos quedan es 6, que ya está en la posición deseada, por lo que solo nos queda hacer ceros en la última fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos ya la forma normal de Smith de la matriz original.

Ejemplo. Calcular la forma normal de Smith de:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Como no está en forma normal de Smith porque el primer elemento no se corresponde con el máximo común divisor de todos los demás (que es 2), veamos cómo podemos añadir este 2 a la posición $(1,1)$ de la matriz. Mostraremos solo las operaciones a realizar sobre M, entendiendo que el algoritmo que explicamos en el ejemplo anterior está ya claro

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-C_1} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+C_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[-C_3]{C_3-4C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea A el grupo:

$$A = \left\langle x,y,z,t \mid \begin{array}{r} 14x+4y+4z+14t=0 \\ -6x+4y+4z+10t=0 \\ -16x-4y-4z-20t=0 \end{array} \right\rangle$$

Se pide calcular el rango de A y todos los grupos abelianos del mismo orden que el grupo de torsión de A que no sean isomorfos al grupo de torsión de A.

Sea:

$$M = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 & 14 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la forma normal de Smith de M, con el fin de clasificar A para conocer su rango y grupo de torsión. ($-(F_1+F_3)$ significa que primero a la fila 1 le sumamos la 3 y que luego consideramos los opuestos de los elementos de la fila 1 como la nueva fila 1).

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 & 14 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(F_1+F_3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 4 & 4 & 10 \\ -16 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4-3C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 & 28 \\ -16 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+3F_1 \\ F_3+8F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 28 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2'=-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3+7C_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3-C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3\leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tendremos que:

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56}$$

Por lo que el rango de A es 1 y su grupo de torsión es:

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{56}$$

Un grupo de orden $2 \cdot 4 \cdot 56 = 448 = 2^6 \cdot 7$. Esta de arriba es su descomposición cíclica, de la que podemos sacar fácilmente su descomposición cíclica primaria:

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7$$

Que como vemos, corresponde a la partición $\{2, 2^2, 2^3, 7\}$. Para calcular todos los grupos abelianos de orden 448 no isomorfos a $T(A)$, calculamos las distintas particiones de 6 (el exponente del 2):

$$\begin{gathered} 6 \\ 5,1 \\ 4,1,1 \\ 4,2 \\ 3,1,1,1 \\ 3,2,1 \\ 3,3 \\ 2,1,1,1,1 \\ 2,2,1,1 \\ 2,2,2 \\ 1,1,1,1,1,1 \end{gathered}$$

Calculamos para cada una de ellas el grupo correspondiente en descomposición cíclica primaria (no nos especifican una o la otra, luego elegimos la que queramos):

Divisores elementales	Descomposición cíclica primaria
$2^6, 7$	$C_{64} \oplus C_7$
$2^5, 2, 7$	$C_{32} \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^4, 2, 2, 7$	$C_{16} \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^4, 2^2, 7$	$C_{16} \oplus C_4 \oplus C_7$
$2^3, 2, 2, 2, 7$	$C_8 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^3, 2^2, 2, 7$	$C_8 \oplus C_4 \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^3, 2^3, 7$	$C_8 \oplus C_8 \oplus C_7$
$2^2, 2, 2, 2, 2, 7$	$C_4 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^2, 2^2, 2, 2, 7$	$C_4 \oplus C_4 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$
$2^2, 2^2, 2^2, 7$	$C_4 \oplus C_4 \oplus C_4 \oplus C_7$
$2, 2, 2, 2, 2, 2, 7$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$

Si quitamos el grupo correspondiente a $\{2^3, 2^2, 2, 7\}$, tenemos todos los grupos no isomorfos a $T(A)$ de orden $|T(A)|$.

Podemos hacernos más preguntas que sabemos responder sobre A, como:

- ¿Hay algún elemento de orden infinito en A?

  Sí, $(1, 0, 0, 0)$.

- ¿Hay algún elemento de orden 56?
  Sí, $(0, 0, 0, 1)$.
- ¿Hay algún elemento de orden 8?
  Sí, $(0, 0, 0, 7)$, o también $(0, 1, 1, 7)$.