

# Variable Compleja

## Examen VIII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

## Examen VIII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2017-18.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Prueba Intermedia.

**Fecha** 25 de Abril de 2018.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1** (3.5 puntos). Probar que la serie  $\sum_{n \geq 0} e^{-zn}$  converge absolutamente en todo punto del dominio  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en  $\Omega$ . Deducir que la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$$

es continua en  $\Omega$  y calcular  $\int_{C(2,1)} g(z) dz$ .

**Ejercicio 2** (3.5 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$f(z) = \cos(\bar{z}) \quad g(z) = (z-1)f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Ejercicio 3** (3 puntos). Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Probar que la función  $|f|$  no puede tener ningún máximo relativo estricto. Es decir, no pueden existir  $z_0 \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  con  $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$  de modo que  $|f(z_0)| > |f(z)|$  para cada  $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ .

**Ejercicio 1** (3.5 puntos). Probar que la serie  $\sum_{n \geq 0} e^{-zn}$  converge absolutamente en todo punto del dominio  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en  $\Omega$ . Deducir que la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$$

es continua en  $\Omega$  y calcular  $\int_{C(2,1)} g(z) dz$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia sobre compactos. Sea  $K$  un compacto de  $\Omega$ . Como  $K$  es compacto y la parte real es continua, tenemos que  $\exists M \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$M = \min\{\operatorname{Re}(z) : z \in K\}$$

Por lo tanto, para todo  $z \in K$  se tiene que:

$$|e^{-zn}| = e^{-\operatorname{Re}(zn)} = e^{-n \operatorname{Re}(z)} \leq e^{-nM} = (e^{-M})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $e^{-M} < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-M})^n$  converge. Por el Test de Weierstrass, la serie de partida converge uniformemente en  $K$ .

Para la convergencia absoluta, consideramos  $z \in \Omega$  fijo. Como  $\{z\}$  es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en  $\{z\}$ . Como  $z$  es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de  $\Omega$ .

Para probar que  $g$  es continua, consideramos  $z \in \Omega$ . Como  $\Omega$  es abierto, existe  $R \in \mathbb{R}^+$  tal que  $D(z, R) \subset \Omega$ . Considerando  $R/2$ , tenemos que  $z \in \overline{D}(z, R/2) \subset \Omega$ . Por ser este compacto, la serie converge uniformemente en  $\overline{D}(z, R/2)$ . Como el término general de la serie es continuo para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $g$  es continua en  $z$ . Como  $z$  es arbitrario,  $g$  es continua en  $\Omega$ .

Como el integrando converge uniformemente en el compacto  $C(2, 1) \subset \Omega$ , podemos intercambiar la sumatoria y la integral, algo que nos será de utilidad a la hora de calcular la integral:

$$\int_{C(2,1)} g(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(2,1)} e^{-zn} dz \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

donde en  $(*)$  hemos aplicado que dicha exponencial es entera y está definida en un dominio extrellado, luego por el Teorema Local de Cauchy admite primitiva en dicho dominio. Por lo tanto, la integral es nula.

**Ejercicio 2** (3.5 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$f(z) = \cos(\bar{z}) \quad g(z) = (z-1)f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Estudiamos primero la función  $f$ . En vistas a aplicar el Teorema de Cauchy-Riemann, definimos  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = \cos(x) \cosh(-y) \\v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) = -\operatorname{sen}(x) \sinh(-y)\end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales de  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x) \cosh(-y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\cos(x) \sinh(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\cos(x) \sinh(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \operatorname{sen}(x) \cosh(-y)\end{aligned}$$

La primera condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \iff \operatorname{sen}(x) \cosh(-y) = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0$$

La segunda condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \iff \cos(x) \sinh(-y) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \vee \sinh(-y) = 0 \end{cases}$$

Para que se cumplan ambas condiciones, es necesario que se cumpla que  $y = 0$  y  $\operatorname{sen}(x) = 0$ ; es decir,  $z \in \pi\mathbb{Z}$ . Por tanto,  $f$  es holomorfa en  $\pi\mathbb{Z}$  y no es holomorfa en ningún otro punto de  $\mathbb{C}$ .

Ahora, estudiamos la función  $g$ . Fijado  $z \in \mathbb{C}$ , distinguimos en función del valor de  $z$ :

■ Si  $z \in \pi\mathbb{Z}$ :

En este caso,  $f$  es derivable en  $z$  y por tanto  $g$  también lo es.

■ Si  $z \notin \pi\mathbb{Z}$ :

Distinguimos dos casos:

• Si  $z = 1$ :

$$g'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)f(z)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = f(1) = \cos 1$$

• Si  $z \neq 1$ :

Entonces:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - 1}$$

Supuesto que  $g$  es derivable en  $z$ , entonces  $f$  también lo es. Pero como  $z \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $f$  no es derivable en  $z$ . Por tanto,  $g$  no es derivable en  $z$ .

Por tanto,  $g$  es derivable en  $\pi\mathbb{Z} \cup \{1\}$  y no lo es en ningún otro punto de  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 3** (3 puntos). Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Probar que la función  $|f|$  no puede tener ningún máximo relativo estricto. Es decir, no pueden existir  $z_0 \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  con  $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$  de modo que  $|f(z_0)| > |f(z)|$  para cada  $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que existen  $z_0 \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$  y  $|f(z_0)| > |f(z)|$  para cada  $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ .

Entonces, para cada  $z \in D(z_0, r)$ , por la fórmula de Cauchy para la circunferencia se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

En particular, para  $z_0 \in D(z_0, r)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi|i|} \left| \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{|w - z_0|} : w \in C(z_0, r)^* \right\} \\ &= r \cdot \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{r} : w \in C(z_0, r)^* \right\} = \sup \{ |f(w)| : w \in C(z_0, r)^* \} \\ &\stackrel{(*)}{=} \max \{ |f(w)| : w \in C(z_0, r)^* \} < |f(z_0)| \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos aplicado que  $f$  y el módulo son funciones continuas y  $C(z_0, r)^*$  es compacto, luego dicho máximo se alcanza. La última desigualdad estricta se debe a la hipótesis, puesto que  $C(z_0, r)^* \subset \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ . Por tanto, hemos llegado a una contradicción.