Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Cambios de Variable **9**

1.1. Cálculo de primitivas 16

1.2. Ecuaciones de variables separadas 17

1.3. Ecuaciones homogéneas 22

1.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas 32

1.5. Ecuaciones lineales 34

1.5.1. Ecuaciones lineales homogeneas 35

1.5.2. Ecuaciones lineales completas 36

1.6. Ecuación de Riccati 39

1.7. Relación con Teoría de Grupos 44

1.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales 51

1.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias 52

2. Relaciones de Problemas **53**

2.1. Ecuaciones y sistemas 53

2.2. Cambios de Varible 63

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/~rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

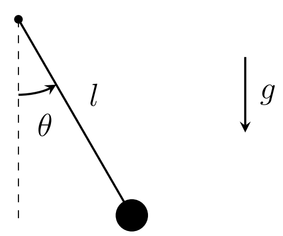
Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área "Ecuaciones Funcionales", pero gracias a que en física $F = m \cdot a$, podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

Ejemplo. Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos l.
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos g.
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos θ.



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo (t), y ver ahora la variable θ como una variable dependiente en función de t:

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si $\theta(t)$ es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación[1]:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) = 0 \tag{1}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones θ que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

[1]De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad\qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente (t, que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función (x, en función de t), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La Φ que aparece en (2) será una función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & \Phi(t, x, y) \end{array}$$

Donde trataremos de ver x como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de t: $x = x(t)$, siendo y su derivada.

Ejemplo. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función Φ en cuestión es:

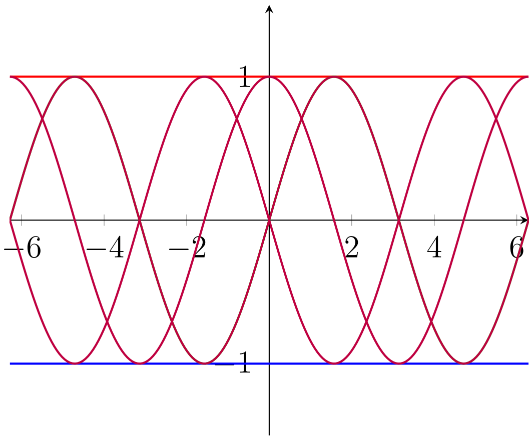
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D = \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{array}{ll} x(t) = \operatorname{sen} t & x(t) = \cos t \\ x(t) = 1 & x(t) = -1 \end{array}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \operatorname{sen}(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geqslant 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en $\mathbb{R}^*$ por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{array}{rccc} f: & C \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para x': $x'(t) = h(t)$, a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \qquad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \operatorname{sen} t$
- $x'(t) = \operatorname{sen} x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} t$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} t$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} x$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} x$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

1. Cambios de Variable

Dada una ecuación diferencial de primer orden en forman normal

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t,x)$$

mediante una función

$$\begin{array}{rrcl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, nuestro objetivo será, dado un cambio de variable por dos ecuaciones

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{cases}$$

con

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1, \varphi_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x) \end{array}$$

cambiar tanto la expresión de la ecuación diferencial como el dominio para facilitar la resolución del mismo, mediante una aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

con $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo, que nos lleve a una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$$

para cierta función

$$\begin{array}{rrcl} \hat{f}: & D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s,y) & \longmapsto & \hat{f}(s,y) \end{array}$$

Y será de nuestro interés buscar la expresión de dicha $\hat{f}$.

Nos preguntamos también por las condiciones que tenemos que exigirle a dicha φ para que el cambio de variable sea bueno:

1. Que φ sea biyectiva, o equivalentemente, que tenga inversa $\psi = \varphi^{-1}$, para poder deshacer el cambio de variable.

2. Que podamos hacer cálculo diferecial en ambos lados y que podamos transportarlo, es decir, que tanto φ como ψ sean de clase C^1.

3. Además, también tendremos que buscar cómo poner y en función de s, y exigir hipótesis para que podamos hacerlo.

Definición 1.1 (Difeomorfismo)**.** Sea $r \in \mathbb{N}$, una aplicación $f : A \to B$ es un C^r-difeomorfismo si f es de clase $C^r(A)$, biyectiva y su inversa f^{-1} es de clase $C^r(B)$.

De esta forma, nos interesará que φ sea un C^1-difeomorfismo, para que se cumplan los dos primeros puntos de la enumeración anterior[1].

A continuación, realizaremos un razonamiento informal con la finalidad de comprobar qué pasará al realizar el cambio de variable, para luego formalizar el mismo.

Volviendo a la situación inicial, nos encontrábamos ante una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

y nos disponíamos a realizar un cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{array} \right.$$

De esta forma, suponiendo que $x = x(t)$ es solución de la ecuación, tenemos las variables s y y en función de t.

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = \varphi_1(t, x(t)) \\ y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \end{array} \right.$$

Suponiendo ahora que podemos expresar y en función de s: $y = y(s)$, buscamos calcular:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}$$

Primero, calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)x'(t) \overset{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que x era solución de la ecuación diferencial. Posteriormente:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Así, llegamos a que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)}$$

[1] Recordamos que una función de $\mathbb{R}^2$ sea de clase C^1 significa que podemos hacer sus derivadas parciales respecto a las dos variables y que ambas son continuas.

Pero todavía no hemos terminado, ya que ahora tenemos la ecuación diferencial en función de las variables s, y, t y x, por lo que tenemos que terminar de librarnos de las variables t y x. Para ello, usamos la función ψ, ya que:

$$\varphi(t, x) = (s, y) \Longrightarrow \psi(s, y) = (t, x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

En caso de que el denominador sea distinto de 0, tendremos ya la nueva expresión de la ecuación diferencial, definiendo:

$$\hat{f}(s, y) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

llegamos a que

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

buscamos aplicarle un cambio de variable.

La ecuación diferencial así no tiene sentido, pues nos falta darle un dominio de definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(t, x) = \frac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

Buscamos un conjunto D abierto y conexo que haga que f sea continua.

f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ salvo en los que se anula su denominador, y esto sucede en la recta

$$x - 2t + 1 = 0$$

que divide el plano en dos componentes conexas. Para el dominio de la función f, hemos de quedarnos con un semiplano. Elegimos el de la izquierda[2], por lo que nos quedamos con

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2t + 1 > 0\}$$

Vamos a aplicarle a esta ecuación diferencial un cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{lll} y & = x + t - 3 & = \varphi_2(t, x) \\ s & = x - 2t + 1 & = \varphi_1(t, x) \end{array} \right.$$

Primero, veamos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ es un difeomorfismo de todo el plano en todo el plano:

[2]Sin ningún motivo, podría hacerse con el de la derecha.

1. φ es biyectiva, ya que se puede despejar de manera única (es un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado).
2. φ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, ya que sus dos componentes son polinomios.
3. φ^{-1} es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$: ya que al despejar para hallar la expresión de φ^{-1}, sale que es un polinomio también.

Por tanto, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un C^1-difeomorfismo. Sin embargo, nos interesa verlo como un difeomorfismo de D. Buscamos su codominio D_1 para conseguirlo:

Primero, buscamos qué imagen tiene la recta $x - 2t + 1 = 0$, y es la recta $s = 0$, que nos divide del plano en dos semiplanos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Ahora, la imagen de nuestro conjunto D es el plano de la derecha, ya que tiene que cumplir que:

$$x - 2t + 1 = s > 0$$

En definitiva:

$$D_1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$$

Además, sabemos que D_1 es abierto y conexo.

Ahora, buscamos la fórmula para nuestra aplicación $\hat{f}$. Podríamos usar la fórmula pero vamos a repetir los cálculos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{{}^{dy}\!/_{dt}}{{}^{ds}\!/_{dt}}$$

Pensando que tanto y como x dependen de t:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = x' + 1 \\ \dfrac{ds}{dt} = x' - 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{x'+1}{x'-2}$$

Ahora, usamos que x es solución de la ecuación diferencial, luego se cumplirá que $x' = f(t, x)$:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{x'+1}{x'-2} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2} - 2}$$

A continuación, falta poner la ecuación en función de (s, y). Para ello, componemos con la ψ:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} - 2} = \frac{\operatorname{sen} y + s^2}{\operatorname{sen} y - 2s^2} = \hat{f}(s, y)$$

Finalmente, surge que tenemos que poner la y en función de s. La ecuación diferencial no está definida en todo el semiplano: el denominador de la expresión no puede anularse. Los puntos que cumplan:

$$\operatorname{sen} y - 2s^2 = 0$$

no pueden entrar en el dominio de la ecuación diferencial.

Lo que sucede es que los difeomorfismos transladan curvas en curvas, pero no necesariamente curvas en explícitas a curvas en explícitas, luego puede que una curva que en D se expresaba en explícitas no se pueda expresar en D_1 con ecuaciones explícitas, con lo que nos daría una singularidad (en este caso, se anularía dicho denominador). Próximamente, veremos la interpretación gráfica de que esto es lo que realmente sucede.

Ahora, precedemos a realizar una teoría formal que sustente todas las cuentas realizadas hasta el momento.

Definición 1.2 (Cambio de variable admisible)**.** Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$x' = f(t, x)$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo, un cambio de variable admisible es una transformación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con D, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos y conexos, φ es C^1-difeomorfismo, y además cumple la condición de admisibilidad[3]:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) f(t, x) \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in D \tag{1.1}$$

Observación. La condición de admisibilidad de un cambio admisible tiene un sentido geométrico, y es que estaremos interesados en dar solución a una ecuación diferencial mediante una curva en explícitas. Sin embargo, al realizar un cambio de variable con cualquier difeomorfismo nada nos garantiza que al pasar la curva en explícitas por el difeomorfismo su imagen siga siendo una curva en explícitas (lo que sí nos garatiza es que siga siendo una curva).

Veamos qué condición nos garantiza que al pasar una curva en explícitas $x = x(t)$ por un difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

sigamos teniendo una curva en explícitas $y = y(s)$.

Dada una función $x = x(t)$, la curva que esta función describe viene dada por la gráfica de dicha función (suponiendo que el dominio de x es I):

$$G = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

[3]Esta última condición nos permite que podamos llevar curvas en explícitas $x = x(t)$ que son solución de la ecuación diferencial en D a curvas en explícitas $y = y(s)$ que son solución de la ecuación diferencial en D_1.

Si ahora aplicamos el difeomorfismo a G:

$$\varphi(G) = \{(\varphi_1(t, x(t)), \varphi_2(t, x(t))) \mid t \in I\}$$

Dicha curva se podrá poner en explícitas si existe una función y tal que $y = y(s)$. Es decir, que podamos expresar la segunda coordenada en función de la primera. Para ello, necesitamos que cada primera coordenada tenga una única coordenada segunda, para poder construir una función. Esto se garantiza si la función que lleva cada t en $\varphi_1(t, x(t))$ es inyectiva. Llamaremos a dicha función g:

$$g(t) = \varphi_1(t, x(t)) \qquad t \in I$$

Si exigimos que su derivada sea distinta de cero en todos los puntos de I, entonces g será estrictamente creciente o estrictamente decreciente, garantizando su inyectividad y que podamos pasar curvas en explícitas a curvas en explícitas. Para ello:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))x'(t) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x) \neq 0 \qquad \forall t \in I\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que estábamos trabajando con x, una función solución de nuestra ecuación diferencial en cuestión.

Por tanto, la condición de admisibilidad nos garantiza que podemos pasar curvas en explícitas en curvas en explícitas.

Proposición 1.1. *Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x)$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Dado un cambio de variable admisible mediante una transformación

$$\begin{array}{rrcl}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y)\end{array}$$

Entonces, $\psi = \varphi^{-1}$ es un cambio de variable admisibile para la ecuación diferencial

$$y' = \hat{f}(s, y)$$

Teorema 1.2 (Cambio de variable para ecuaciones diferenciales)**.** *Dado una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x) \tag{1.2}$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Sea $\varphi : D \to D_1$ un cambio de variable admisible.

Entonces, la ecuación 1.2 es equivalente[4] *a la ecuación*

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) \tag{1.3}$$

[4]Quiere decir, que siempre que tengamos una curva en D que sea solución de la ecuación diferencial, podamos ir a D_1 aplicando φ y tendremos una solución de la ecuación diferencial definida en D_1, así como este mismo procedimiento al revés.

donde

$$\hat{f}(s,y) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))} \qquad \forall (s,y) \in D_1$$

Demostración. Supongamos que $x = x(t)$ es solución de la ecuación 1.2 definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, y queremos realizar el cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{array} \right.$$

Defino

$$\begin{array}{rccc} S: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi_1(t, x(t)) \end{array}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con derivada distinta de 0:

$$S'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)x'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

ya que el cambio era admisible. Defino $J = S(I)$ intervalo abierto, y podemos ahora aplicar el Teorema de la función inversa sobre S, obteniendo una función

$$\begin{array}{rccc} T: & J & \longrightarrow & I \\ & t & \longmapsto & T(s) \end{array}$$

de forma que cumpla

$$\begin{array}{ll} T(S(t)) = t & \forall t \in I \\ S(T(s)) = s & s \in J \end{array}$$

Teníamos s en función de t y ahora hemos puesto t en función de s utilizando la primera ecuación del cambio de variable. Ahora, podemos definir (usando la segunda ecuación del cambio) la siguiente función, para expresar y en función de s, gracias a que hemos expresado t en función de s:

$$\begin{array}{rccc} y: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \varphi_2(T(s), x(T(s))) \end{array}$$

Nos falta derivar y respecto a s para comprobar que sea solución de la ecuación diferencial 1.3:

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) \cdot T'(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \cdot T'(s) \\ &= T'(s) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \right) \\ &= T'(s) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot f(T(s), x(T(s))) \right) \end{aligned}$$

Ahora, usamos que φ tiene de inversa a ψ, para así poder expresar

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

y eliminar t y x de la expresión, dejándolo todo en función de s e y:

$$y'(s) = T'(s) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y(s))) \cdot f(\psi(s, y(s))) \right)$$

Falta ver que $T'(s)$ es el denominador de la expresión 1.3. Para ello, aplicamos la regla de derivación de la función inversa:

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))f(T(s), x(T(s)))}$$

Ahora, volvemos a usar que

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

para obtener

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y(s)))f(\psi(s, y(s)))}$$

Finalmente, falta ver que si tenemos una solución en D_1, volvemos a tener una solución en D. Bastaría aplicar el mismo proceso pero al revés. Sin embargo, debemos comprobar que si φ es admisible para la ecuación 1.2, entonces ψ lo es para la ecuación 1.3.

Faltaría comprobar la expresión análoga a 1.1 para ψ, esto es:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(s, y)\hat{f}(s, y) \neq 0 \qquad \forall (s, y) \in D_1$$

Usando que:

$$\varphi'(\psi(s, y))\psi'(s, y) = Id$$

□

Nos falta ahora aprender estrategias para buscar el cambio de variable adecuado en cada caso. Para ello, aprenderemos primero a resolver las ecuaciones diferenciales más sencillas para así cuando se nos presente una más complicada, aplicar un cambio de variable para obtener una ecuación sencilla que sí sepamos resolver.

1.1. Cálculo de primitivas

Buscamos resolver ecuaciones diferenciales sencillas. Las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos encontrarnos son el cálculo de primitivas, es decir, cuando la derivada de x sólo está en función de t.

Pensamos en la ecuación diferencial:

$$x' = p(t) \tag{1.4}$$

con $p : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, el dominio de la ecuación diferencial es $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sabemos que dicha ecuación diferencial tiene solución, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $p : I \to \mathbb{R}$ una funcion continua, fijado $t_0 \in I$, entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds \qquad t \in I$$

es una función de clase $C^1(I)$ que cumple $P'(t) = p(t)$.

Por tanto, fijado $t_0 \in I$, las soluciones de la ecuación diferencial 1.4 son de la forma:

$$x(t) = k + \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds \qquad k \in \mathbb{R}$$

Tenemos una primera clase de ecuaciones diferenciales que sabemos resolver, al menos a nivel teórico, ya que hay integrales que no pueden calcularse.

1.2. Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de variables separadas es una ecuación de la forma

$$x' = p(t)q(x)$$

con funciones

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & p(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & q(x) \end{array}$$

continuas con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos. De esta forma, estamos manejando la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

con

$$\begin{array}{rccc} f: & D = I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & p(t)q(x) \end{array}$$

Observación. Notemos que el cálculo de primitivas es caso particular de las ecuaciones de variables separadas, ya que tomando $q(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$p(t)q(x) = p(t) \qquad \forall t \in I$$

Para su resolución, comenzaremos primero con unos cálculos informales que luego formalizaremos. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Primero, buscaremos los valores $a \in J$ que hagan que $q(a) = 0$. En dicho caso, podemos definir la función

$$x(t) = a \quad t \in I$$

que es solución de la ecuación diferencial.

Una vez localizados todos los ceros de la ecuación, tendremos ya todas las soluciones constantes localizadas. Ahora, haremos separación de variable, que precisamente busca las soluciones que no son constantes. Hacemos la siguiente operación, que por ahora carece de rigor:

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t)\ dt$$

Posteriormente, tomaremos primitivas en ambos lados:

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\ dt$$

Notando por Φ a una primitiva para $\frac{1}{q}$ y por P a una primitiva de p, tendremos que:

$$\Phi(x) + c_1 = P(t) + c_2$$

Para ciertas constantes arbitrarias $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, como la diferencia de constantes sigue siendo una constante, podemos escribir simplemente:

$$\Phi(x) = P(t) + c$$

Si ahora podemos calcular una inversa de Φ (en caso de que esta sea biyectiva), podemos deducir que:

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

Ejemplo. En este ejemplo, mostraremos que el procedimiento anterior parece funcionar ante las ecuaciones diferenciales de variables separadas, pese a carecer de sentido aparente. Para ello, trataremos de resolver la ecuación

$$x' = e^{t+x}$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$, que es una ecuación en variables separadas, ya que:

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x$$

En este caso, no encontramos soluciones constantes, ya que $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Resolvámosla con la receta que acabamos de aprender:

$$\frac{dx}{dt} = e^t e^x$$
$$e^{-x}\ dx = e^t\ dt$$
$$\int e^{-x}\ dx = \int e^t\ dt$$
$$-e^{-x} = e^t + c$$

La última igualdad nos da la función x de manera implícita, buscamos ahora la forma de dar la función x de forma explícita:

$$e^{-x} = -e^t - c$$

y tomamos logaritmos, pensando en que esto nos va a determinar luego el dominio de la solución (de forma implícita, suponemos que la cantidad de la derecha es positiva).

$$\begin{aligned} -x(t) &= \ln(-e^t - c) \\ x(t) &= -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora por qué constantes c nos sirven y por el dominio de la función x:

- Cuando c tome valores positivos o 0, no va a tener sentido la expresión, por lo que exigimos $c < 0$.
- A continuación, buscamos el intervalo abierto en el que esté definida x. Nos interesa que $-e^t - c > 0$ para cierta constante negativa c, luego nos interesa que t sea chico, para que la cantidad sea positiva. Por tanto, el intervalo de definición de x será de la forma $I_c =]-\infty, a_c[$, para cierto $a_c \in \mathbb{R}$, que dependerá del valor de la constante c escogida para la solución.

Buscamos ahora dicha a_c, sea $c \in \mathbb{R}^-$:

$$-e^t - c > 0 \iff -c > e^t \iff \ln(-c) > \ln(e^t) = t$$

donde hemos usado que ln es una función estrictamente creciente, obteniendo que:

$$t \in I_c =]-\infty, \ln(-c)[$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación planteada al inicio son

$$\begin{array}{rccl} x: & I_c & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & -\ln\left(-e^t - c\right) \end{array}$$

Dado que hemos hecho una cuenta que a priori carece de sentido, la única forma de comprobar que lo que hemos hecho está bien es derivar x y comprobar que, efectivamente, es una solución de la ecuación diferencial.

De forma alternativa, veamos ahora que en realidad la receta que usamos tiene un fundamento teórico, que nos permite usarla bajo unas ciertas hipótesis, obteniendo siempre unos resultados fiables.

De esta forma, supongamos que $q(x) \neq 0 \ \forall x \in J$ (para los valores en los que se anule q, tenemos soluciones constantes, luego falta comprobar qué ocurre donde q no se anula). Vamos a intentar hacer un cambio de variable que transforme la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \tag{1.5}$$

en un cálculo de primitivas de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(s) \tag{1.6}$$

En vez de dar el cambio, vamos a buscarlo. Dada una función

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

Exigimos que $\varphi_1 = Id_I$ y notaremos $\phi = \varphi_2$ por comodidad, con lo que queremos realizar el cambio

$$\left\{\begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \phi(x) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

por lo que tendremos que buscar dicha función ϕ. Para que φ sea un difeomorfismo, es necesario que la función

$$\phi : J \to \mathbb{R}$$

sea de clase C^1, así como que $\phi'(x) \neq 0\ \forall x \in J$. No es necesario exigir que sea biyectiva, ya que luego tomaremos como codominio $\hat{J} = \phi(J)$, intervalo abierto.
De esta forma, la ecuación diferencial tras el cambio de variable tendrá como dominio $D_1 = I \times \hat{J}$.

Ahora, buscamos que φ sea admisible, es decir, que cumpla la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D$$

Lo cual es inmediato, ya que $\varphi_1(t,x) = t$, luego:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \neq 0$$

La interpretación geométrica de que la condición de admisiblidad sea cierta siempre bajo un cambio del tipo 1.7 cuenta con una interpretación geométrica, ya que al ser $t = s$, cualquier curva que escribamos de forma explícita en D, al aplicarle el difeomorfismo podrá seguir escribiéndose de forma explícita en D_1, y viceversa.

Sea $x = x(t)$ una solución de 1.5, aplicamos ahora el cambio de variable, tal y como aprendimos al inicio de este Capítulo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} \overset{(*)}{=} \phi'(x)x' = \phi'(x)p(t)q(x)$$

donde en $(*)$ hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

y en la segunda igualdad que x es solución de 1.5.

Todavía no tenemos la ecuación cambiada, ya que seguimos teniendo los parámetros t y x. Para quitarlos, basta con usar $\psi = \phi^{-1}$, que sabemos que existe según las condiciones que hemos impuesto[5] sobre ϕ:

$$\phi(x) = y \Longrightarrow x = \psi(y) \quad \forall x \in J$$
$$\frac{dy}{ds} = p(t)\phi'(\psi(y))q(\psi(y))$$

Sin embargo, no hemos terminado, ya que queríamos buscar un cambio de variable que nos llevase a:

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Por lo que tenemos que exigir finalmente a ϕ que:

$$\phi'(x)q(x) = 1$$

Por tanto, fijado $x_0 \in J$, defino

$$\begin{array}{rccc} \phi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array}$$

Para que:

$$\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \Longrightarrow \phi'(x)q(x) = 1$$

Resumiendo, dada una ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Si aplicamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array} \right. \qquad x_0 \in J$$

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Que teóricamente sabemos resolver, ya que se trata de un cálculo de primitiva.

Ejemplo. Volvemos a la ecuación con la que empezamos el curso, con el fin de aplicarle la regla que acabamos de aprender:

$$x' = \lambda x$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$. Es de variables separadas. Las soluciones constantes de la ecuación son:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

[5] Hasta ahora, que ϕ sea de clase $C^1(J)$ y que tenga derivada no nula.

Ahora, como J debemos tomar tanto $\mathbb{R}^+$ como $\mathbb{R}^-$. En este ejemplo, tomaremos $J = \mathbb{R}^-$, y el resultado debe repetirse en $\mathbb{R}^+$ de forma análoga.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \lambda \; dt$$
$$\ln(-x) = \lambda t + c$$

y despejamos x:

$$-x(t) = e^{\lambda t + c}$$
$$x(t) = -e^{\lambda t + c} = -e^{c} e^{\lambda t}$$

En definitiva, las soluciones son:

$$x(t) = k \cdot e^{\lambda t} \quad k < 0$$

1.3. Ecuaciones homogéneas

Siguiendo con un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales que aprenderemos a resolver reduciéndolas a un tipo de ecuaciones diferenciales que ya sabemos resolver, ahora es el turno de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

con $h : J \to \mathbb{R}$ una funcion continua, siendo J un intervalo abierto.

Cómo identificarlas

Anteriormente estudiamos las ecuaciones de variables separadas, las cuales eran fáciles de identificar. Sin embargo, las ecuaciones homogéneas ya empiezan a ser algo más difíciles de identificar.

Mostraremos ahora varios ejemplos de ecuaciones diferenciales que son homogénas, aunque no sea fácil verlo:

1. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{x+t}{t}$$
es homogénea, para la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & u+1 \end{array}$$
Ya que
$$h\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + 1 = \frac{x}{t} + \frac{t}{t} = \frac{x+t}{t}$$

2. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2 + x^2}$$
es homogénea, ya que si dividimos el numerador y el denominador entre t^2, llegamos a que:
$$x' = \frac{\dfrac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2}}{\dfrac{t^2 + x^2}{t^2}} = \frac{1 + 2\left(\dfrac{x}{t}\right) + 3\left(\dfrac{x}{t}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}$$
Luego la función h en este caso es la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1 + 2u + 3u^2}{1 + u^2} \end{array}$$

Esta última ecuación diferencial parece haber sido identificada mediante una idea feliz (dividir todo entre t^2). Sin embargo, existe una teoría sobre funciones homogéneas, la cual pasamos a desarrollar brevemente ahora. Esta nos permitirá darnos cuenta de forma rápida de si una ecuación diferencial es o no homogénea.

Definición 1.3 (Función homogénea)**.** Dada una función $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que es homogénea de grado r si se verifica que
$$f(\lambda \cdot v) = \lambda^r f(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \forall v \in V$$

Proposición 1.4. *Dado un polinomio en n variables, este es una función homogénea de grado r si, y solo si todos sus monomios son de grado r*

A dichos polinomios, los llamamos polinomios homogéneos de grado r.

Se verifica que si tenemos una ecuación diferencial que venga dada por un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado r, entonces estamos ante una ecuación diferencial homogénea:
$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}$$
Para comprobarlo, tendríamos que dividir el numerador y denominador del cociente entre t^r, obteniendo así la función h.

Observemos que lo que sucedía en el ejemplo anterior es que teníamos un cociente de polinomios homogéneos de grado 2 (por estar formados únicamente por monomios de grado 2), por lo que dividiendo entre t^2 pudimos sacar al función h.

Ejemplo. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$
es homogénea, ya que tengo dos funciones homogéneas de grado 1 divididas. Si dividimos numerador y denominador por t, conseguimos verlo más fácil. Sin embargo, hemos de distinguir casos:

- Si $t > 0$:

$$x' = \frac{t+\sqrt{x^2+t^2}}{2x-t} = \frac{\dfrac{t+\sqrt{x^2+t^2}}{t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t}+\sqrt{\dfrac{x^2+t^2}{t^2}}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{1+\sqrt{\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+1}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right)-1}$$

- Si $t < 0$:

$$x' = \frac{\dfrac{t}{t}+\dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t}-\dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{-t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t}-\sqrt{\dfrac{x^2+t^2}{t^2}}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{1-\sqrt{\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+1}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right)-1}$$

Dominio de la ecuación diferencial

Ahora, trabajamos con una ecuación que es de la forma:

$$x' = f(t,x)$$

para cierta función $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo[6] de forma que

$$f(t,x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta función $h : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto y continua.

En primer lugar, observamos que f es continua, por ser composición de funciones continuas:

$$(t,x) \longmapsto \frac{x}{t} \longmapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Ahora, queremos ver cuál es dicho dominio D en el que está definida nuestra ecuación diferencial.

- Como primera observación, debemos excluir de D la recta $t = 0$, para que la definición de f tenga sentido.

- Suponiendo que[7] $J =]\alpha, \beta[$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

  Dado un punto $(t,x) \in D$ de nuestro dominio, este punto debería cumplir que $\frac{x}{t} \in J$ para que la definición de f tenga sentido. Decir que $\frac{x}{t} \in J$ es equivalente a que

  $$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

  Por lo que los puntos $(t,x) \in D$ de nuestro dominio deberían cumplir dicha condición. Notemos que $\frac{x}{t}$ es la pendiente de un punto (t,x) de $\mathbb{R}^2$, por lo que todos los puntos que cumplen la ecuación superior son los que se encuentran en un sector angular, delimitado por las rectas $x = \alpha t$ y $x = \beta t$:

[6] Por la definición de ecuación diferencial.
[7] En el caso de que sea un intervalo no acotado, se razonaría de forma similar.

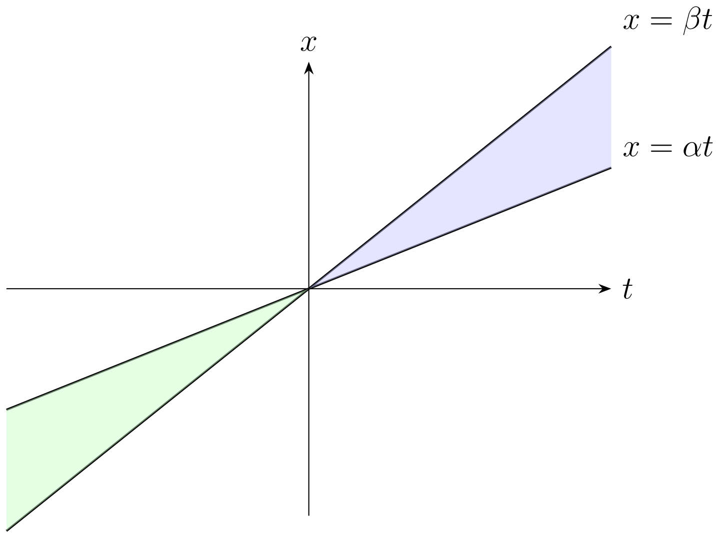


Figura 1.1: Sector angular, sin incluir el punto $(0, 0)$.

Como D ha de ser conexo, hemos de quedarnos con la parte de la izquierda o con la parte de la derecha del sector angular. Algebraicamente, estos dos son los conjuntos:

$$D_+ = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$
$$D_- = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$

Observación. Notemos que en el ejemplo superior de la ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

distinguíamos los casos en los que t era positivo y en los que t era negativo. Esto tiene todo el sentido, ya que en realidad no estamos trabajando con una ecuación diferencial, sino con 2, ya que no habíamos tenido en cuenta el dominio de la ecuación diferencial. Esta puede estar definida o bien en D_+ o bien en D_-, por lo que estaríamos trabajando o bien con $t > 0$ o bien con $t < 0$, respectivamente.

Posicionamiento de las ecuaciones homogéneas

Nos preguntamos ahora por las relaciones que hay entre las ecuaciones homogéneas y las ya vistas hasta el momento: cálculo de primitivas y de variables separadas. ¿Son todas las ecuaciones de variables separadas homogéneas?

Respondemos a esta y a muchas más preguntas con los siguientes ejemplos:

- El cálculo de primitivas no está incluido en las ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo la ecuación $x' = 0$.
- $x' = xt$ es de variables separadas pero no es homogénea.
- $x' = \frac{x}{t}$ es homogénea y es de variables separadas.

- $x' = \frac{x+t}{t}$ es homogénea pero no es de variables separadas.

Por tanto, vemos que hay ecuaciones homogéneas que son de cálculo de primitivas (aunque pocas), que hay algunas ecuaciones homogéneas que son a su vez de variables separadas y que hay ecuaciones homogéneas que no son de variables separadas. La situación es similar a la del diagrama 1.2.

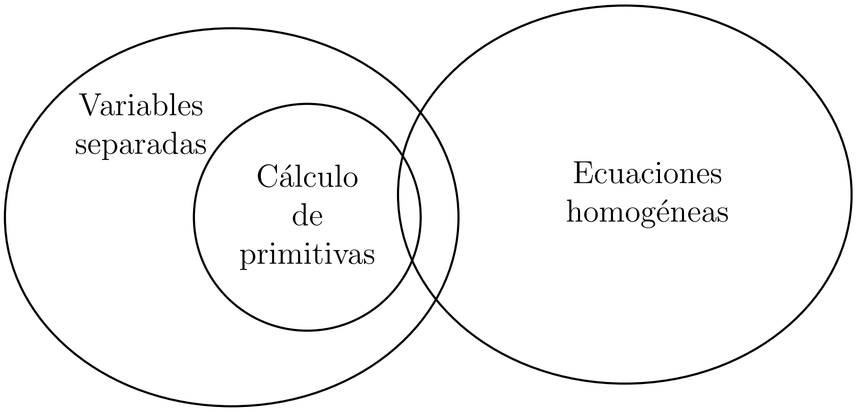


Figura 1.2: Diagrama de los tipos de ecuaciones diferenciales.

Resolución de ecuaciones homoǵeneas

Hay un cambio de variable que nos permite llevar ecuaciones diferenciales homogénes a ecuaciones diferenciales de variables separadas, que ya sabemos resolver. Por comodidad, supondremos que[8] el dominio elegido para la ecuación diferencial es D_+.

El cambio viene dado por la función

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array} \right.$$

- Podemos despejar de manera única las variables t y x, luego es biyectiva, con inversa:
$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} t & = s \\ x & = sy \end{array} \right.$$
- Las componentes φ_1 y φ_2 de φ son polinomios, luego es de clase $C^1(D_+, \mathbb{R}^2)$.
- Y además, como las componentes ψ_1 y ψ_2 de ψ también son polinomios, tenemos que ψ es de clase $C^1(\varphi(D_+), \mathbb{R}^2)$.

Por tanto, hemos comprobado que φ es un C^1-difeomorfismo, luego falta comprobar la condición de admisibilidad para comprobar que sea un cambio de variable admisible. Sin embargo, esta propiedad estará garantizada, ya que no hemos cambiado la variable t, por lo que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in D_+$$

[8]En caso contrario, es análogo.

Una vez comprobado que φ es un cambio de variable admisible, vemos cuál será el nuevo dominio de la ecuación diferencial una vez hecho el cambio de variable:

$$\varphi(D_+) = \varphi\left(\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}\right) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, y \in J\right\} =]0,+\infty[\times J$$

Por tanto, el sector angular D_+ que teníamos como dominio de la ecuación diferencial original, se aplica mediante φ en una banda horizontal, tal y como vemos en la figura 1.3.

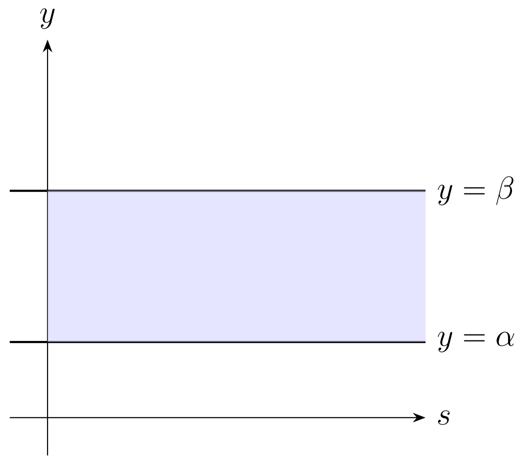


Figura 1.3: Banda horizontal, sin incluir la recta $s = 0$.

Procederemos ahora a realizar el cambio de variable, para ver qué forma adopta la ecuación. Teníamos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

a la que le aplicamos el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \dfrac{x}{t} \end{cases}$$

Pensando que x está en función de t y que y está en función de s:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cancelto{1}{\frac{dt}{ds}} \overset{(*)}{=} \frac{t\cdot\dfrac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t}\cdot\frac{x}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right)$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que $y = \frac{x}{t}$, junto con la regla de derivación de un cociente. Tenemos ya la ecuación diferencial, pero sigue estando en función de las variables x y t. Falta aplicar que $y = \frac{x}{t}$ otra vez, que $s = t$ y que x era solución de la ecuación diferencial, por lo que se verifica:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Aplicando esto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

Que es una ecuación de variables separadas, para las funciones[9] $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $q : J \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$p(s) = \frac{1}{s}$$
$$q(y) = h(y) - y$$

Luego acabamos de ver que toda ecuación homogénea puede llevarse a una ecuación de variables separadas.

Recordamos que en variables separadas podíamos encontrarnos dos tipos de soluciones, constantes y no constantes. Observemos que cuando $q(b) = h(b) - b = 0$ para cierto b, encontramos soluciones constantes de la ecuación diferencial de variables separadas, que serán las funciones:

$$z(s) = b \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

Que al deshacer el cambio de variable, nos darán una semirrecta en el dominio original:

$$x(t) = b \cdot t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Resumiendo, dada una ecuación diferencial en un dominio D_+ por:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta $h : J \to \mathbb{R}$ continua, podemos aplicar el cambio de variable

$$\left\{\begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array}\right.$$

para llegar a la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

que ya sabemos resolver.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial (en la que usamos la notación geométrica en lugar de la física):

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Se pide hallar su dominio de definición, así como encontrar una solución de dicha ecuación, cogiendo como condición de dicha solución que ha de cumplir:

$$y(-1) = -1$$

[9] El dominio de la primera es $\mathbb{R}^+$ porque es el mismo dominio en el que se mueve t y el de la segunda es el dominio en el que se mueve $\frac{x}{t}$.

Se trata de una ecuación diferencial homogénea, ya que se trata de un cociente de dos polinomios homogéneos de grado 1. Podemos comprobarlo dividiendo numerador y denominador entre x:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y+x}{x}} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

Por lo que la función h a escoger sería:

$$h(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

Y debemos elegir bien el dominio de definición de dicha función. Podría ser o bien $J_- =]-\infty, -1[$ o bien $J_+ =]-1, +\infty[$.
Como queremos que $y(-1) = -1$, buscamos tener $\frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$, luego tomaremos $J = J_+$, ya que contiene el 1.

Una vez conocido el dominio de h, podemos ya escoger el dominio de definición de la ecuación diferencial. Este será D_+ o D_-. Como ha de cumplir que $(-1,-1) \in D$ siendo D el dominio de la ecuación diferencial, nos quedaremos con $D = D_-$, ya que es la opción que nos contiene las abscisas negativas. De esta forma:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \frac{y}{x} > -1\right\}$$

Gráficamente, el dominio de definición D es el sector angular de la figura 1.4.

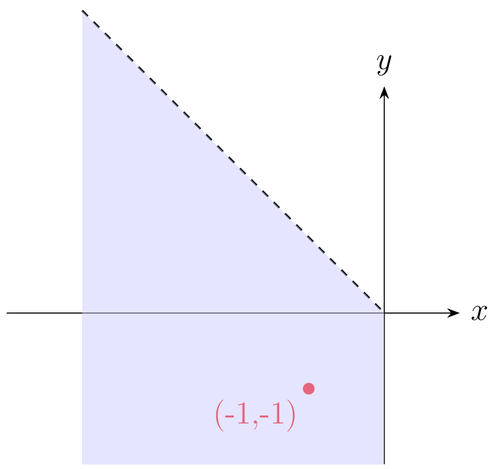


Figura 1.4: El sector angular D.

Ahora, haremos el cambio de variable, usando como nuevas variables u y v:

$$\varphi : \begin{cases} u &= x \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto D pasa a:

$$\varphi(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, v > -1\} =]-\infty, 0[\times]-1, +\infty[$$

Y el punto $(-1,-1)$ pasa a:

$$\varphi(-1,-1) = \left(-1, \frac{-1}{-1}\right) = (-1,1)$$

Gráficamente, vemos $\varphi(D)$ en la figura 1.5.

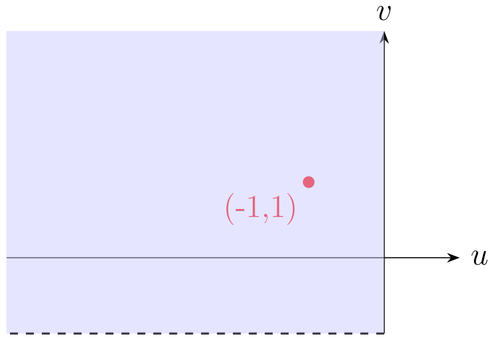


Figura 1.5: Dominio tras hacer el cambio de variable

Buscamos ahora la ecuación diferencial tras el cambio de variable, la cual resulta en:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx}\overset{1}{\cancel{\frac{dx}{du}}} = \frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{u}(h(v) - v) = \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1} - v\right) \\ &= \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1} - \frac{v^2+v}{v+1}\right) = \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v}\end{aligned}$$

Y tenemos nuestra ecuación de variables separadas, que pasamos a resolver. Lo primero a observar es que nos interesa la solución concreta v tal que $v(-1) = 1$.

Observamos que la ecuación anterior no tienen soluciones constantes, por ser:

$$\frac{1+v^2}{1+v} > 0$$

Luego resolvemos por variables separadas:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v} \\ \int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv &= -\int\frac{du}{u}\end{aligned}$$

Como estamos trabajando con $u < 0$:

$$-\int\frac{du}{u} = -\ln(-u) + k$$

Y la primera integral la partimos en dos para resolverla, llegando a que:

$$\int\frac{1+v}{1+v^2}\,dv = \int\frac{1}{1+v^2}\,dv + \int\frac{v}{1+v^2}\,dv = \operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2)$$

Por tanto:
$$\operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = -\ln(-u) + k$$
Y por el desarrollo teórico visto en la sección de ecuaciones de variables separables, sabemos que dicha expresión define de forma implícita una función v en función de u, para cierto $k \in \mathbb{R}$.
Ahora, volveremos al dominio original, deshaciendo el cambio de variable:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = -\ln(-x) + k$$

Que define y como función de x de forma implícita. Usando que ($x < 0$):

$$\ln(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right)$$

Podemos darle otra forma a la expresión, para verla de forma más clara:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = k$$

Es la familia de soluciones que nos resuelven la ecuación diferencial. Buscamos k para $y(-1) = -1$, sustituyendo y y x por -1:

$$k = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

Para ver que esto define una ecuación implícita, deberíamos aplicar el Teorema, pero gracias a la teoría que venimos desarrollando hasta ahora, lo tenemos visto. Tenemos visto que dicha fórmula dos define una ecuación implícita en un entorno del punto $(-1,-1)$.

Sin embargo, estamos ante un problema específico en el que podemos llegar a ver algo más. Se trata de una curva que en cartesianas tiene una expresión compleja, pero en coordenadas polares puede intuirse la gráfica de la función de forma más fácil, por lo que cambiamos a coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos\theta \\ y & = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$

Y como:
$$\frac{y}{x} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$
Buscamos θ de forma que $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Como estamos trabajando con la solución que pasa por el $(-1,-1)$, estamos trabajando en el tercer cuadrante, por lo que tendremos $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Como la función arctan es la inversa de tan sólo en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, desplazamos θ, usando que la tangente es π-periódica:

$$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Longrightarrow \theta - \pi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\arctan(\tan\theta) = \arctan(\tan(\theta-\pi)) = \theta - \pi$$

Luego:

$$\arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta - \pi$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Y también:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, llegamos a que la expresión en polares es:

$$\theta + \ln r = k + \pi$$

Se trata de la espiral logarítmica o de Arquímedes, que se entiende mejor tomando exponenciales:

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$

Fijado un r, conforme movemos θ, se va formando una especie de circunferencia pero con r disminuyendo, luego se forma una espiral.

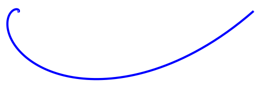


Figura 1.6: Espiral logarítmica.

Observación. Notemos que las espirales son curvas de la forma

$$r = f(\theta)$$

con f creciente o decreciente, escritas en coordenadas polares.

1.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

A continuación, estudiaremos otro tipo de ecuaciones diferenciales, las reducibles a homogéneas. Estas son similares a las homogéneas, pero en vez de ser una función en función de $\frac{x}{t}$, es una función en función de un cociente de polinomios en dos variables, ambos de grado 1, luego son de la forma:

$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \qquad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$$

con $h : I \to \mathbb{R}$ una función continua con I un intervalo abierto.

Ejercicio. Dar un dominio de definición para una ecuación reducible a homogénea.

Estaremos trabajando por tanto con una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(t, x)$$

con

$$f(t, x) = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \qquad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad \forall (t, x) \in D$$

Y buscamos el dominio D en el que la función f está definida. Este tiene que ser un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, nos interesa:

- Primero, que el cociente anterior tenga sentido, es decir, que $At+Bx+C \neq 0$. Por tanto, esta recta estará excluida de D.
- Que podamos aplicar h al cociente anterior, es decir, que
$$\frac{at+bx+c}{At+Bx+C} \in I$$

El conjunto más grande en el que podemos definir f será un conjunto de la forma:

$$D = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid At+Bx+C \neq 0, \frac{at+bx+c}{At+Bx+C} \in I\right\}$$

Finalmente, falta comprobar que el conjunto sea abierto y conexo. Como el conjunto excluye a una recta del plano, sabemos por tanto que este contendrá como mínimo dos componentes conexas[10].

Resolución de ecuaciones reducibles a homogéneas

El truco que funciona casi siempre es realizar una traslación. Fijado $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, defino

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t - t_* \\ y & = x - x_* \end{array} \right. \qquad (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$$

que es fácil ver que es un cambio de variable admisible.
El cambio de variable es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

Y hay que quitar las variables t y x:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s+t_*)+b(y+x_*)+c}{A(s+t_*)+B(y+x_*)+C}\right)$$

Si conseguimos hacer:

$$\left\{ \begin{array}{ll} at_* + bx_* + c & = 0 \\ At_* + Bx_* + C & = 0 \end{array} \right.$$

Nos quedaría que:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s+t_*)+b(y+x_*)+c}{A(s+t_*)+B(y+x_*)+C}\right) = h\left(\frac{as+by}{As+By}\right)$$

Que se trata de una ecuación homogénea, por ser un cociente de polinomios homogéneos de grado 1.

[10] Si algún lector termina el ejercicio, solicitamos que se nos envíe para completar los aputnes.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$
Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo que existe una solución del sistema. Para realizar el cambio de variable, tomamos (t_*, x_*) de forma que sea solución del sistema, y al realizar el cambio de variable, podremos seguir el razonamiento superior, llegando a una ecuación homogénea.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$
Entonces, se trata de un sistema incompatibles, por lo que no podremos realizar el razonamiento anterior.

  Sin embargo, lo que sucederá en dicho caso es que los vectores (a, b) y (A, B) serán linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$, luego podemos hacer:
$$(A, B) = \lambda(a, b) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
De esta forma, podemos escribir:
$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) = h\left(\frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + c}\right)$$
Que no es una ecuación homogénea, pero nos permite hacer el cambio de variable (suponiendo que $b \neq 0$):
$$y = at + bx$$

1.5. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma
$$x' = a(t)x + b(t)$$
para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ continuas definidas en un intervalo abierto J.

Por tanto, la ecuación diferencial vendrá dada por una función $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que
$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t) \qquad (t, x) \in J \times \mathbb{R}$$
Observemos que el dominio de f se trata de una banda vertical.

Las ecuaciones lineales pueden clasificarse en dos tipos:

- Si $b(t) = 0\ \forall t \in J$, entonces estamos ante una ecuación lineal homogénea[11].
- Si b no es la función constantemente igual a cero, decimos que es una ecuación lineal completa.

Observación. Observemos que $x' = \frac{x}{t}$ es de variables separadas, homogénea, reducible a homogenea y lineal homogénea.

[11] no tiene nada que ver con las ecuaciones homogéneas

1.5.1. Ecuaciones lineales homogeneas

Como hemos comentado antes, se tratan de ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x$$

para $a : J \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo abierto J. Este tipo de ecuaciones sabemos ya resolverlas, pues son ecuaciones de variables separadas:

$$x' = p(t)q(x)$$

Para las funciones $p : J \to \mathbb{R}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) \qquad t \in J \\ q(x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, tenemos que sólo hay una solución constante:

$$x(t) = 0 \qquad t \in J$$

Para sacar el resto, hacemos separación de variables:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = a(t)x \\ \int \frac{dx}{x}\ dx = \int a(t)\ dt \end{gathered}$$

Y dependerá de que x sea positivo o negativo para calcular la primera integral:

$$\int \frac{dx}{x}\ dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y notando por:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\ ds$$

para cierto $t_0 \in I$, tenemos que:

- Suponiendo que $x > 0$:

$$\begin{gathered} \ln x = A(t) + c \\ x(t) = e^c e^{A(t)} \qquad t \in J \end{gathered}$$

  Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^+, \quad t \in J$$

- Suponiendo que $x < 0$:

$$\begin{gathered} \ln(-x) = A(t) + c \\ x(t) = -e^c e^{A(t)} \qquad t \in J \end{gathered}$$

  Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^-, \quad t \in J$$

En definitiva, dada una ecuacion de la forma

$$x' = a(t)x \qquad t \in J$$

Entonces, sus soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\; ds \qquad t \in J$$

para cierto $t_0 \in J$.

Ejemplo. Resolvamos

$$x' = \frac{x}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

Trabajaremos por tanto en el semiplano en el que $t < 0$.

En este caso, tenemos $a(t) = \frac{1}{t}$, por lo que:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\; ds = \ln(-t)$$

para cierto $t_0 \in \mathbb{R}^-$. Las soluciones de dicha ecuación serán:

$$x(t) = k \cdot e^{\ln(-t)} = -k \cdot t \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

1.5.2. Ecuaciones lineales completas

Son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.8}$$

para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto de forma que la función b no es constantemente igual a 0. Notaremos a su dominio $D = J \times \mathbb{R}$.

Resolveremos este tipo de ecuaciones mediante un cambio de variable, el cual pasamos a buscar. Dada una función $l : J \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0\ \forall t \in J$ y $l \in C^1(J)$, definimos el cambio de variable:

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= l(t)x \end{cases}$$

Que tenemos que ver que es admisible:

- φ es de clase $C^1(D)$, ya que sus componentes φ_1 y φ_2 son de clase $C^1(D)$ (φ_2 es productor de funciones de clase $C^1(D)$).
- Despejando las variables t y x (gracias a que $l(t) \neq 0\ \forall t \in J$), podemos dar una inversa ψ de φ, por lo que es biyectiva:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \dfrac{y}{l(s)} \end{cases}$$

Es fácil ver que ψ es inversa de φ.

- Observando las componentes ψ_1 y ψ_2, vemos que estas son de clase C^1, luego ψ es de clase C^1. Tenemos ya probado que φ es un difeomorfismo.
- Por ser $s = t$, tenemos garantizada la condición de admisibilidad, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall t \in J$$

- Finalmente, observemos que si $(t, x) \in D$, entonces $\varphi(t, x) \in D$, por lo que $\varphi(D) = D$:

$$\varphi(t, x) = (t, l(t)x) \in J \times \mathbb{R} = D$$

A continuación, aplicaremos dicha familia de cambios de variable (ya que por cada función l tenemos un cambio de variable distinto) a la ecuación 1.8:

$$\begin{cases} s & = t \\ y & = lx \end{cases}$$

entendiendo que todo son funciones dependientes de t:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l(ax + b)$$

sustituimos x por $\frac{y}{l}$:

$$y' = \frac{l'}{l}y + l\left(a\frac{y}{l} + b\right)$$

Y obtenemos otra ecuación diferencial lineal:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + a\right)y + bl$$

Sin embargo, podemos convertirlo en un cálculo de primitivas, buscando que:

$$\frac{l'}{l} + a = 0$$

Que podemos pensarlo como una ecuación diferencial para l:

$$l' = -a(t)l$$

Que es una ecuación lineal homogénea, cuyas soluciones sabemos ya que son de la forma:

$$l(t) = k \cdot e^{-A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

Escogemos la solución $l(t) = e^{-A(t)}$.

Por tanto, el resultado tras aplicar el cambio de variable con la función l ahora conocida resulta en la ecuación diferencial

$$y' = b(t)l(t)$$

que la resolvemos mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)l(s)\; ds + k$$

con nuestra función l:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)} \ ds + k$$

Una vez obtenida y, sacamos las soluciones de las ecuaciones lineales completas, deshaciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{l}$:

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s) \ ds$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x}{t} + 1$$

con $t < 0$.

Hacemos el cambio $y = l(t)x$, luego:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \frac{l'}{l}y + l\left(\frac{y/l}{t} + 1\right)$$

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right) y + l$$

Buscamos una solución que cumpla:

$$\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$$

Es decir:

$$l' = -\frac{l}{t}$$

No nos hacen falta todas las soluciones, simplemente una. Cogemos:

$$l(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

tenemos que $l(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^-$.

Por tanto, tenemos:

$$y' = l(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y(t) = k - \ln(-t) \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Luego:

$$x(t) = -t \cdot (k - \ln(-t)) \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

1.6. Ecuación de Riccati

Podemos entender la ecuación lineal como una ecuación diferencial que simula ser un polinomio de primer grado. Riccati intentó solucionar aquella ecuación diferenial que simula ser un polinomio de segundo grado:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{1.9}$$

para ciertas $a, b, c : J \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto J.

La ecuación diferencial estará, por tanto, definida en un conjunto abierto y conexo $D = J \times \mathbb{R}$ y vendrá dada por la función

$$\begin{array}{rrcl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \end{array}$$

A diferencia de la ecuación lineal, la ecuación de Riccati no puede resolverse a no ser que se conozca de antemano una solución de la misma[12]. En dicho caso, podremos hayar todas las demás soluciones.

Suponemos, por tanto, que conocemos una solución $\phi : I \to \mathbb{R}$ de (1.9) en forma explícita definida en cierto intervalo abierto $I \subseteq J$ (ya que la solución no tiene por qué estar definida en todo el intervalo J).

Conocida dicha función ϕ, trataremos de resolverla aplicando el siguiente cambio de variable

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t \\ y & = & \dfrac{1}{x - \phi(t)} \end{array} \right.$$

Por tanto, de nuestro dominio D tendremos que quitar la recta $x - \phi(x) = 0$, para que podamos considerar dicho cambio de variable. Para garantizar que el nuevo dominio a considerar siga siendo un conjunto conexo, tenemos dos posibles dominios a elegir:

$$D_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x > \phi(t)\}$$
$$D_- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x < \phi(t)\}$$

Se verifica que si tenemos una solución de (1.9), entonces esta estará definida bien en D_+ o bien en D_-, por lo que no perdemos (o partimos en dos) ninguna solución de la ecuación diferencial, salvo la solución $x = \phi(t)$, que no está presente en ninguno de los dos dominios.

La situación es la que representamos en la Figura 1.7.

[12] O que pueda obtenerse una a simple vista, por la sencillez de la ecuación.

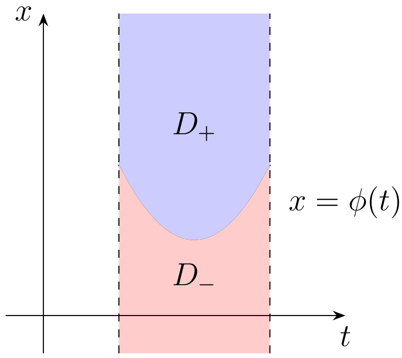


Figura 1.7: Componentes conexas de $I \times \mathbb{R}$ divididas por $x = \phi(t)$.

Veamos qué codominio tiene el cambio φ:

- Si nos encontramos en el dominio D_+, tenemos que $x > \phi(t)$, luego:

$$x - \phi(t) > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x - \phi(t)} > 0$$

  Y como t no varía, su codominio será $\mathcal{D}_+ = I \times \mathbb{R}^+$.

- Si nos encontramos en el dominio D_-, tenemos que $x < \phi(t)$, luego:

$$x - \phi(t) < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x - \phi(t)} < 0$$

  Y como t no varía, su codominio será $\mathcal{D}_- = I \times \mathbb{R}^-$.

- Finalmente, de forma intuitiva podemos decir que la curva $x = \phi(t)$ se va a infinito y que el infinito del dominio D se va a la recta $y = 0$ tras el cambio.

Por tanto, el codominio del cambio de variable será el representado en la Figura 1.8.

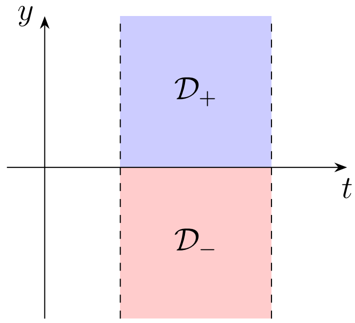


Figura 1.8: Componentes conexas de $I \times \mathbb{R}$ divididas por $y = 0$.

Finalmente, veamos que φ es un cambio de variable admisible para la ecuación(1.9):

- En primer lugar, veamos que es un difeomorfismo. Si miramos sus componentes:

$$\varphi(t, x) = \left(t, \frac{1}{x - \phi(t)}\right) = (s, y)$$

  Como ϕ era solución de la ecuación diferencial, entonces es de clase C^1. Por tanto, las dos componentes de φ son de clase C^1, luego φ es de clase C^1.

- Buscamos ahora la inversa:
$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & s \\ x & = & \dfrac{1}{y} + \phi(t) \end{array} \right.$$
Con lo que tenemos la función
$$\psi(s,y) = \left(s, \frac{1}{y} + \phi(s) \right)$$
Que también es de clase C^1.
- Finalmente, como $s = t$, el cambio es admisible.

Buscamos ahora expresar la ecuación diferencial tras realizar el cambio de variable. En lugar de derivar en la expresión de y en la fórmula de φ, preferimos derivar x en la fórmula de ψ para no tener que derivar un cociente:
$$x = \frac{1}{y} + \phi$$
Pensando que tanto x, y y ϕ son funciones dependientes de t:
$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' \tag{1.10}$$
Por otra parte, sustituyendo x en la ecuación (1.9), tenemos que:
$$\begin{aligned} x' = ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{1}{y} + \phi\right)^2 + b\left(\frac{1}{y} + \phi\right) + c \\ &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned}$$
Y como ϕ era solución de la ecuación (1.9):
$$\phi' = a\phi^2 + b\phi + c$$
Sustituyendo en (1.10):
$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' = \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c$$
En definitiva:
$$\left. \begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c \\ x' & = & \dfrac{a}{y^2} + \dfrac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \dfrac{b}{y} + b\phi + c \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{-y'}{y^2} = \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + \frac{b}{y}$$
Y multiplicando por y^2, llegamos a que:
$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Que es una ecuación lineal, la cual pasaremos a resolver tanto en $\mathcal{D}_+$ como en $\mathcal{D}_-$. Puede pasar por tanto, que alguna solución corte $y = 0$, por lo que tengamos que tratarla como dos soluciones, una de una ecuación diferencial y otra de la otra.

Además, tendremos que agregar al conjunto final de soluciones la solución inical $x = \phi(t)$, la cual despreciamos al realizar el cambio de variable.

En resumen, dada una ecuación de Riccati de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Conocida una solución $x = \phi(t)$, podemos aplicar el cambio de variable

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t \\ y & = & \dfrac{1}{x - \phi(t)} \end{array} \right.$$

Para llegar a una ecuación lineal, que tendrá la forma:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Ejemplo. Veamos un ejemplo de resolución de una ecuación Riccati (posiblemente una de las más sencillas de resolver), aunque se trate también de una ecuación de variables separadas.

$$x' = x^2$$

Tenemos por tanto que el dominio en el que está definida es $D = \mathbb{R}^2$.

A simple vista, observamos que una solución particular es $x(t) = 0$. Se deja como ejercicio tratar de resolver la ecuación con dicha solución inicial.

En este ejemplo, tomaremos como solución la función $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) = \frac{-1}{t} \qquad t \in I$$

Para el intervalo $I = \mathbb{R}^-$ (también lo podríamos haber hecho en $\mathbb{R}^+$). Teníamos por tanto que la variable t se movía en $J = \mathbb{R}$ y ahora se mueve en $I = \mathbb{R}^-$.

Trabajaremos ahora en los dominios:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x > \frac{-1}{t} \right\}$$
$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x < \frac{-1}{t} \right\}$$

El cambio de variable escogido es, por tanto:

$$y = \frac{1}{x - \phi(t)} = \frac{1}{x + \dfrac{1}{t}}$$

que también lo podemos escribir como:

$$x = \frac{1}{y} + \phi(t) = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \tag{1.11}$$

Esta función φ nos transforma ambos dominios en:

$$\varphi(D_+) = \mathcal{D}_+ = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$
$$\varphi(D_-) = \mathcal{D}_- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$$

Derivamos la ecuación (1.11) pensando que tanto x como y dependen de t:

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{t^2}$$

Como inicialmente teníamos:

$$x' = x^2 = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty} + \frac{1}{t^2}$$

Llegamos a que:

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty}$$

Multiplicamos por y^2 y:

$$y' = \frac{2}{t}y - 1$$

Llegamos a una ecuación lineal que pasamos a resolver, mediante otro cambio de variable:

$$z = l(t)y$$

que también podemos escribir por comodidad como

$$l(t)z = y$$

para distinta función[13] l. Derivamos:

$$y' = l'z + lz'$$
$$y' = \frac{2}{t}lz - 1$$

Y tenemos

$$lz' = y' - l'z = \frac{2}{t}lz - 1 - l'z = \left(\frac{2l}{t} - l'\right)z - 1$$

Buscamos que el paréntesis sea 0:

$$l' = \frac{2l}{t}$$

Y cogemos como solución:

$$l(t) \overset{(*)}{=} e^{2\ln(-t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2 \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

[13]A partir del cambio anterior, estamos trabajando con $\frac{1}{l(t)}$.

Teniendo en cuenta que en $(*)$ debemos considerar que $t < \mathbb{R}^-$. Luego:

$$lz' = t^2 z' = -1 \Longrightarrow z' = \frac{-1}{t^2}$$

Luego tenemos como soluciones:

$$z(t) = \frac{1}{t} + k \qquad k \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Deshaciendo un cambio de variable $y = lz = t^2 z$:

$$y(t) = t + kt^2 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$ por ejemplo, sucede que tenemos la mitad de la solución en $\mathcal{D}_+$ y la otra mitad en $\mathcal{D}_-$.
Deshacemos ahora el otro cambio, $x = \dfrac{1}{y} + \phi$:

$$x(t) = \frac{1}{t + kt^2} - \frac{1}{t} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Y habría que ver dónde están definida las soluciones. Además, tenemos que añadir la solución de partida:

$$x(t) = \phi(t) = \frac{-1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

Al conjunto de posibles soluciones.

1.7. Relación con Teoría de Grupos

Como introdución a esta sección, recordamos primero la definición de grupo.

Definición 1.4 (Grupo)**.** Sea A un conjunto no vacío con una operación binaria interna[14] de la forma

$$* : A \times A \to A$$

Es un grupo si se verifica que:

(1) $*$ es asociativa:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \forall a, b, c \in A$$

(2) Existencia de un elemento neutro para $*$:

$$\exists e \in A \mid a * e = e * a = a \qquad \forall a \in A$$

(3) Existencia de opuestos para $*$:

$$\forall a \in A \quad \exists b \in A \mid a * b = b * a = e$$

Definición 1.5. Diremos que $G \subseteq \mathcal{G}$ es un subgrupo de un grupo $\mathcal{G}$ si verifica que:

[14] Esto es, que el resultado de operar con dos elementos de A vuelve a ser un elemento de A.

1. G es cerrado para la operación interna de $\mathcal{G}$.
2. $g \in G \Longrightarrow g^{-1} \in G$.

Observación. Notemos que si $A \subseteq B$ es un subgrupo de un grupo B, entonces A es un grupo con la operación inducida de B.

Hay una teoría matemática que trata de dar sentido a que ciertos cambios de variable funcionan para ciertos "tipos" de ecuciones diferenciales y que otros cambios de variable funcionan para otros tipos de ecuaciones diferenciales.

En álgebra, hay una teoría que relaciona las ecuaciones polinómicas con un grupo. Sophus Lie trató de hacer lo mismo para las ecuaciones diferenciales, tratar de relacionarlas con un grupo para poder explicar qué cambio de variable hay que hacer para resolver una ecuación en cada caso. De esta forma, conectaría la Teoría de grupos con la solubilidad de las ecuaciones diferenciales.

Geométricamente, podemos decir que los grupos tienen la misión de detectar simetrías. Si tenemos por ejemplo un cuadrado con vértices numerados del 1 al 4 y lo rotamos 45º sobre el centro, obtenemos otro cuadrado distinto. Si por contrario lo rotamos 90º, tenemos el mismo cuadrado pero con distinta numeración en los vértices.

Hay una serie de rotaciones especiales que hace que el cuadrado sea invariante. El conjunto de rotaciones que deja invariante un cuadrado (esto es, el conjunto formado por las rotaciones de 0, 90, 180 y 270 grados) forma un grupo. Podemos pensar en él como en el conjunto $\{1, -1, i, -i\}$, que efectivamente es un grupo[15].

Resulta que cada figura simétrica tiene un grupo cíclico asociado que las dejan invariantes, llamado grupo de simetrías.

Podemos hacer una analogía entre las figuras con las rotaciones y las ecuaciones diferenciales con lso cambios de variable. De esta forma, buscamos los cambios de variable que nos dejan las ecuaciones diferenciales invariantes. Esto es, que tanto el dominio como la expresión de la ecución diferencial sea la misma, aunque pueda pasar que una solución vaya en otra distinta tras aplicar el cambio de variable, al igual que sucedía con la numeración de los vértices de nuestro cuadrado.

La idea es, que dada una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x) \tag{1.12}$$

definida en un dominio D dentro del plano, buscaremos un cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

que nos lleve D en él mismo y que tras hacer el cambio obtengamos que:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) = f(s, y) \qquad \forall (s, y) \in D$$

[15]Para la operación interna de multiplicación en $\mathbb{C}$, con neutro 1.

En este caso, diremos que (1.12) es invariante por φ.

Notemos que para $\varphi = Id_D$, esto se cumple para cualquier ecuación diferencial.

Ejemplo. Con este ejemplo, tratamos de mostrar que existen cambios de variable admisibles para una ecuación diferencial distintos de $Id_{\mathbb{R}^2}$ que dejan la ecuación diferencial invariante. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{3x^2+1}$$

Definida en $D = \mathbb{R}^2$. Le haremos el siguiente cambio de variable y veremos que dicho cambio deja la ecuación invariante.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & -t \\ y^3+y & = & x^3+x+8 \end{array} \right.$$

Supondremos por ahora que φ está bien definida (no sabemos por ahora si la segunda ecución nos da una función implícita $y = y(x)$), para ver que el cambio deja invariante la ecuación y luego veremos que es un cambio de variable bien definido y admisible para la misma.

Apliquemos el cambio de variable para ver qué ecuación obtenemos al final:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt}$$

Derivamos de forma implícita:

$$3y^2y' + y' = 3x^2x' + x'$$
$$(3y^2+1)y' = (3x^2+1)x' = \frac{\cancel{(3x^2+1)}t}{\cancel{3x^2+1}} = t$$

Luego:

$$y' = \frac{t}{3y^2+1}$$

por lo que:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{3y^2+1} = \frac{s}{3y^2+1}$$

Luego tenemos como nueva ecuación:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{3y^2+1} = \hat{f}(s,y) = f(s,y)$$

Falta ahora ver que la ecuación anterior nos da un cambio de variable admisible:

1. Veamos primero que las ecuaciones

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rl} s & = -t \\ y^3+y & = x^3+x+8 \end{array} \right.$$

Definen un cambio de variable admisible. Suponiendo que no nos sabemos las fórmulas de Cardano Vieta[16], definimos una función:

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & \xi^3+\xi\end{array}$$

con

$$\sigma'(\xi)=3\xi^2+1>0 \qquad \forall \xi\in\mathbb{R}$$

Por lo que es estrictamente creciente, luego inyectiva.

Notemos además que es sobreyectiva, ya que

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\sigma(\xi)=\pm\infty$$

Y como σ es una función continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que tiene que tomar todos los valores, luego σ es sobreyectiva. En definitiva, σ es biyectiva y además tiene inversa, la cual es derivable, gracias al Teorema de la Función Inversa, por ser $\sigma'(\xi)>0\ \forall\xi\in\mathbb{R}$.

Resulta por tanto que σ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$.

Pensamos ahora en las ecuaciones como en:

$$\sigma(y)=\sigma(x)+8$$

Y como es un difeomorfismo, podemos tomar la inversa:

$$y=\sigma^{-1}(\sigma(x)+8)$$

Luego efectivamente, la fórmula anterior nos define y como función implícita, en función de x. Podemos ya escribir:

$$\varphi(t,x)=(s,y)$$

donde:

$$\left\{\begin{array}{ll} s & =\varphi_1(t,x)=-t \\ y & =\varphi_2(t,x)=\sigma^{-1}(\sigma(x)+8)\end{array}\right.$$

Con lo que la función φ está bien definida.

2. Además, vemos que φ es de clase C^1, por serlo sus componentes.

3. Vemos que φ tiene inversa:

$$\psi:\left\{\begin{array}{ll} t & =\psi_1(s,y)=-s \\ x & =\psi_2(s,y)=\sigma^{-1}(\sigma(y)-8)\end{array}\right.$$

Y que además ψ es de clase C^1, luego tenemos que φ era, efectivamente, un difeomorfismo.

[16]Las que dan las raíces de los polinomios cúbicos..

4. Finalmente, vemos que es un cambio de variable admisible, ya que:
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x) = -1 + 0 \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, hemos visto ya un ejempo de un difeomorfismo distinto de la identidad que deja una ecuación diferencial invariante.

Proposición 1.5. *Sea $Diff(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todos los difeomorfismos en el plano:*
$$Diff(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ difeomorfismo}\}$$
$Diff(\mathbb{R}^2)$ es un grupo con la operación de composición de funciones $\circ$.

Demostración.

1. En primer lugar, para ver que $Diff(\mathbb{R}^2)$ sea un grupo, buscamos primero demostrar que la composición de funciones es cerrada para $Diff(\mathbb{R}^2)$. Es decir, que la composición de cualesquiera dos difeomorfismos es un difeomorfismo.

   Sean Φ, $\varphi \in Diff(\mathbb{R}^2)$, buscamos ver que $\phi = \Phi \circ \varphi$ es un difeomorfismo.

   - La composición de funciones de clase C^1 es de clase C^1, luego ϕ es de clase C^1.
   - La composición de funciones biyectivas resulta en una función biyectiva, luego ϕ es biyectiva.
   - Se verifica que[17]:
   $$\phi^{-1} = (\Phi \circ \phi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}$$
   Y tanto φ^{-1} como Φ^{-1} son de clase C^1 por ser ambos difeomorfismos, luego ϕ es de clase C^1.

   Finalmente, llegamos a que:
   $$\Phi, \varphi \in Diff(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \Phi \circ \varphi \in Diff(\mathbb{R}^2)$$

2. Además, tenemos que ver que se cumplen las tres propiedades de la definición de grupo:

   (1) La composición de funciones es asociativa[18].

   (2) Tiene un elemento neutro, $Id_{\mathbb{R}^2} \in Diff(\mathbb{R}^2)$.

   (3) Para cada $\varphi \in Diff(\mathbb{R}^2)$, tenemos $\varphi^{-1} \in Diff(\mathbb{R}^2)$, con lo que:
   $$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Concluimos por tanto que $Diff(\mathbb{R}^2)$ es un grupo con la operación $\circ$. □

Tenemos que $Diff(\mathbb{R}^2)$ es el grupo de todos los cambios de variable que existen en el plano.

[17] Visto en Álgebra I.

[18] Visto en Álgebra I.

Grupo de traslaciones

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$ un vector del plano, podemos definir el cambio

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t + v_1 \\ y & = & x + v_2 \end{array} \right.$$

Resultado de trasladar cualquier punto del plano (t, x) por el vector v. Su inversa será

$$\varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & s - v_1 \\ x & = & y - v_2 \end{array} \right.$$

Que es la traslación según el vector $-v$.

Ahora, consideramos la familia uniparamétrica de translaciones de la forma:

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t - \lambda v_1 \\ y & = & x - \lambda v_2 \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Y consideramos el conjunto:

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in R\}$$

Proposición 1.6. *Se verifica que G es un grupo.*

Demostración. Por una parte, tenemos que $G \subseteq Diff(\mathbb{R}^2)$, ya que todas las traslaciones son difeomorfismos.

1. En primer lugar, observemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda+\mu}(t,x) &= (t + (\lambda+\mu)v_1, x + (\lambda+\mu)v_2) = ((t + \lambda v_1) + \mu v_1, (x + \lambda v_2) + \mu v_2) \\ &= \varphi_\mu(t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) = \varphi_\mu(\varphi_\lambda(t,x)) \end{aligned}$$

   Por lo que $\varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda$. De esta forma, dadas dos traslaciones cualesquiera, su composición es una traslación, por lo que tenemos la primera propiedad.

2. Dado φ_λ, tenemos que $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{-\lambda}$, que también es una tralacion.

Luego G es un subgrupo de $Diff(\mathbb{R}^2)$. □

Por tanto, dado $v \in \mathbb{R}^2$, la familia uniparamétrica de funciones

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Es un subgrupo de $Diff(\mathbb{R}^2)$.

Grupo de homotecias

Una homotecia es de la forma:

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & \lambda t \\ y & = & \lambda x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Que tiene por inversa

$$\varphi_\lambda^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & \frac{t}{\lambda} \\ x & = & \frac{y}{\lambda} \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Proposición 1.7. *La familia uniparamétrica de homotecias es un grupo. Es decir, el conjunto*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda > 0\}$$

Es un grupo.

Demostración. Para ello, primero vemos que

$$\varphi_{\lambda\cdot\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$$

- De esta forma, la composición de dos homotecias es una homotecia.
- Además, $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$, $\forall \varphi \in G$.

□

Grupo de rotaciones

Sea:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si le damos el valor $\theta = \pi/2$, vemos que es la matriz de la función lienal que nos da la rotación en sentido antihorario:

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el vector $e_1 = (1, 0)$ lo lleva en $e_2 = (0, 1)$ y el vector e_2 lo lleva en $-e_1$.

Proposición 1.8. *El conjunto de las rotaciones forman un grupo:*

$$G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Demostración. Se comprueba viendo primero que

$$R_{\theta+\Theta} = R_\theta \circ R_\Theta$$

- De esta forma, la composición de dos giros es un giro.
- Además, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, $\forall R_\theta \in G$.

□

Aunque hay otros grupos uniparamétricos, estos son los más simples.

1.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales

Tomamos $v = (1, 0)$, luego trabajaremos con el grupo uniparamétrico de cambios de variable:

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t + \lambda \\ y & = & x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Partimos de una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

Para una cierta función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Le aplicamos el cambio y llegaremos a una nueva ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s, y)$$

Y lo que buscamos es que

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

con el fin de dejar la ecuación diferencial invariante para dicho cambio de variable.

La primera observación es que φ_λ es siempre admisible para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\overset{1}{\cancel{\frac{dt}{ds}}} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Que en las nuevas variables queda como:

$$\frac{dy}{ds} = f(s - \lambda, y)$$

Ahora, buscamos que la ecuación sea invariante por todos los cambios de variable:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s - \lambda, y) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

De esta forma, tenemos una función f en dos variables que toma los mismos valores en todas las líneas horizontales, luego f solo depende de y, con lo que la ecuación en función de las variables t y x sólo depende de x.

Ejemplo. Por ejemplo, la ecuación

$$x' = \operatorname{sen} x$$

es invariante por traslaciones horizontales, ya que f sólo depende de x:

$$y' = \operatorname{sen} y$$

Ejemplo. Si por contrario tomamos la ecuación

$$x' = \operatorname{sen}(t + x)$$

Y hacemos el mismo cambio:

$$y' = \operatorname{sen}(s + y - \lambda)$$

Observación. Las ecuaciones diferenciales que son invariantes por el grupo de traslaciones verticales son aquellas que sólo dependen de t (por un razonamiento similar). Es decir, las ecuaciones diferenciales que se resuelven mendiante cálculo de primitivas.

1.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias

Trabajamos ahora con el grupo uniparamétrico de cambios

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{lll} s & = & \lambda t \\ y & = & \lambda x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

Que también resulta ser un cambio de variable admisible, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Dada una ecuación diferencial cualquiera:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, podemos aplicar el cambio de variable:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\cancel{\lambda} x'}{\cancel{\lambda}} = x' = f(t, x)$$

Cambiando ahora las variables por las nuevas:

$$\frac{dy}{ds} = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

Ahora, buscamos que la solución sea invariante por todos los infinitos cambios de variable, es decir:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que esto lo cumplen todas las funciones homogéneas de grado 0:

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^r P(t, x) = P(t, x) \qquad r = 0$$

Geométricamente, son las funciones que sólo dependen de la pendiente de un punto, luego son las funciones constantes en las rectas que pasan por el origen.

Observación. Notemos que las ecuaciones diferenciales homogéneas son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Por lo que la f de esta ecuación diferencial es una función homogénea, luego es invariante por homotecias.

Ejercicio. Encontrar la clase de ecuaciones diferenciales que son invariantes por rotaciones.

Como resumen de esta sección, podemos decir que encontrar un cambio de variable que deja una ecuación diferencial invariante es equivalente a resolverla.

2. Relaciones de Problemas

2.1. Ecuaciones y sistemas

Ejercicio 2.1.1. En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos, con dominio $D = \mathbb{R}^2$ y condición inicial $A(0) = 0$.

Ejercicio 2.1.2. Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. La pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m_t = y'(x_0)$. Por otro lado, la distancia del punto al origen, notada por $d(P, O)$ es $d(P, O) = \sqrt{x_0^2 + y(x_0)^2}$. Como la condición impuesta en el enunciado es $m_t = (d(P, O))^2$, tenemos que:

   $$y' = x^2 + y^2$$

   Su dominio es $D = \mathbb{R}^2$.

2. El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

   La representación gráfica de la situación se encuentra en la Figura 2.1.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. Para ambas rectas, usaremos la ecuación punto-pendiente. Para la recta tangente, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{r} m_t = y'(x_0) \\ P_t = (0, y_t) \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(x_0) = \frac{y(x_0) - y_t}{x_0 - 0} \Longrightarrow y_t = y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)$$

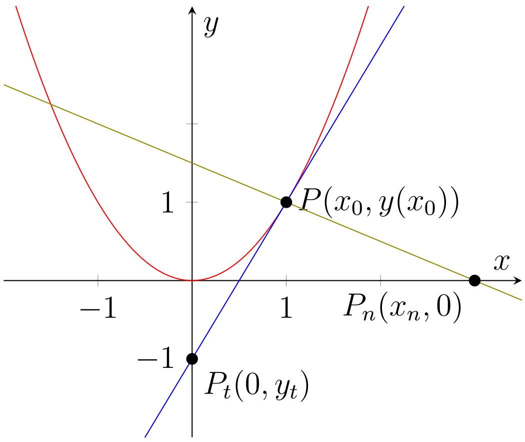


Figura 2.1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 2.1.2.2.

Notemos además que, en el caso de $x_0 = 0$, también podemos ver que se cumple que $y_t = y(x_0) - 0 \cdot y'(x_0) = y(x_0)$. Respecto a la recta normal, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} m_n = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \\ P_n = (x_n, 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow -\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y(x_0)}{x_n - x_0} \Longrightarrow x_n = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0$$

Notemos que, si $y'(x_0) = 0$, se cumple también que $x_n = 0 \cdot y(x_0) + x_0 = x_0$. Además, si $x_n = x_0$, entonces se tiene que $y'(x_0) = 0$ o $y(x_0) = 0$, por lo que también se cumple.

La ecuación diferencial que especifica el enunciado es $|y_t| = |x_n|$. Por tanto, tenemos que:

$$|y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)| = |y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0|$$

Quitando los valores absolutos, llegamos a que:

$$\begin{aligned} y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0 &\Longrightarrow y(x_0) - x_0 = y'(x_0)\,(y(x_0) + x_0) \\ y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = -y(x_0) \cdot y'(x_0) - x_0 &\Longrightarrow y(x_0) + x_0 = y'(x_0)\,(x_0 - y(x_0)) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales que describen el enunciado son:

$$\begin{array}{ll} y - x = y'\,(y + x) & \text{con dominio } \Omega_1 = \mathbb{R}^3 \\ y + x = y'\,(x - y) & \text{con dominio } \Omega_2 = \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Estas ecuaciones diferenciales no están en forma normal. Si quisiésemos dejarlas en forma normal (que no es recomendable, puesto que se dividen los dominios y se pierden soluciones), estas serían:

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \qquad \text{con dominio} \left\{ \begin{array}{c} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}. \end{array} \right.$$

$$y' = \frac{y + x}{x - y} \qquad \text{con dominio} \left\{ \begin{array}{c} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}. \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.1.3. En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

Del contexto, deducimos que $x \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$. Además, tenemos que su primera derivada solo se anula en $x = \alpha$ y $x = \beta$. Consideramos por tanto los siguientes casos:

- <u>Si $x \in]0, \alpha[$:</u> En este caso, $x < \alpha < \beta$, luego $x - \alpha < 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.
- <u>Si $x \in]\alpha, \beta[$:</u> En este caso, $\alpha < x < \beta$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' > 0$, luego es creciente.
- <u>Si $x \in]\beta, +\infty[$:</u> En este caso, $x > \beta > \alpha$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x < 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.

Por tanto, para el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$, tenemos que:

- Si $x(0) \in]0, \alpha[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to 0$.
- Si $x(0) \in]\alpha, \beta[$, entonces x' es creciente, luego $x(t) \to \beta$.
- Si $x(0) \in]\beta, +\infty[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to \beta$.

Ejercicio 2.1.4. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1. $xy = k$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$0 = y + xy' \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

   $$y' = \frac{x}{y}$$

2. $y = kx^4$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$0 = 4kx^3 - y' \Longrightarrow y' = 4kx^3 = 4 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{y}{x}$$

Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

3. $y = e^{kx}$.

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$0 = ke^{kx} - y' \Longrightarrow y' = ke^{kx}$$

   Para despejar la k, tenemos que $k = \dfrac{\ln y}{x}$. Por tanto, tenemos que:

   $$y' = \frac{\ln y}{x} \cdot e^{\frac{\ln y}{x} \cdot x} = \frac{\ln y}{x} \cdot y$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

   $$y' = -\frac{x}{y \ln y}$$

Ejercicio 2.1.5. Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Las soluciones alcanzan un punto crítico donde $x'(t) = 0$, es decir, $t + x^3 = 0$. Por tanto, las soluciones alcanzan un punto crítico en la curva $x(t) = \sqrt[3]{-t}$. El dibujo, tanto del campo de direcciones como de la curva, se encuentra en la Figura 2.2.

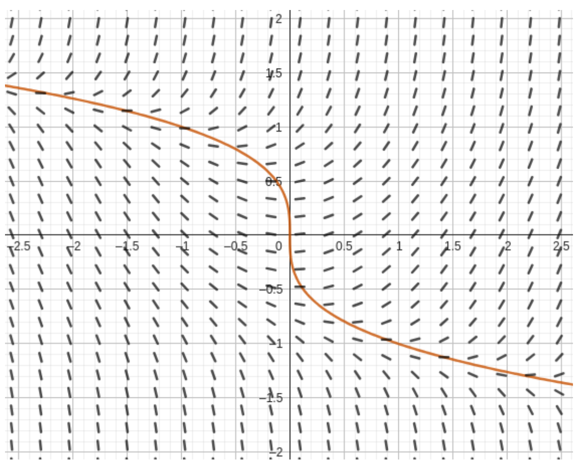


Figura 2.2: Campo de direcciones y curva del Ejercicio 2.1.5.

Supongamos ahora una solución tal que $x(0) = 0$. Como x es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, tenemos que $x \in C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, x es derivable en 0. Calculamos la derivada de x en 0:

$$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$$

Por tanto, tenemos que es un punto crítico. Comprobemos que es un mínimo local estricto. Para ello, calculamos la segunda derivada de x en 0:

$$x''(0) = 1 + 3x(0)^2 \cdot x'(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 \cdot 0 = 1 > 0$$

Por tanto, es un mínimo local estricto.

Respecto de la demostración de que es un mínimo global, intuitivamente observando el campo de direcciones se tiene directamente.

Ejercicio 2.1.6. Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

Buscamos obtener y en función de x. Hay dos opciones:

Opción 1: Buscamos completar cuadrados para obtener las funciones $y(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2x + 2y &= (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y) = (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y + 1/4 - 1/4) = \\ &= (x+1)^2 - 1 + 2(y + 1/2)^2 - 1/2 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$C \equiv (x+1)^2 + 2(y + 1/2)^2 = 5/2 \equiv (y + 1/2)^2 = \frac{5/2 - (x+1)^2}{2}$$

Aplicando la raíz cuadrada, tenemos que:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{5/2 - (x+1)^2}{2}} - \frac{1}{2}$$

Opción 2: Despejamos y usando la ecuación de segundo grado, considerando x fijo:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2 - 2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x + 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{20 - 4 \cdot 2 \cdot (x+1)^2}{16}} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5/2 - (x+1)^2}{2}} \end{aligned}$$

En ambos casos, vemos que obtenemos dos funciones diferenciables, una para cada signo. Como C es una elipse, se trata de la parte superior e inferior de la misma. El intervalo maximal de definición es aquel que mantiene el argumento de la raíz cuadrada positivo:

$$\frac{5/2-(x+1)^2}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow 5/2 \geqslant (x+1)^2 \Longrightarrow -5/2 \leqslant x+1 \leqslant 5/2 \Longrightarrow |x+1| \leqslant \sqrt{5/2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -\sqrt{5/2}-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{5/2}-1$$

Por tanto, el intervalo maximal de definición es $I = \left[-\sqrt{5/2}-1, \sqrt{5/2}-1\right]$.

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x,y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

   Derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$2x+2+(4y+2)y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{2x+2}{4y+2} = -\frac{x+1}{2y+1}$$

   Por tanto, la ecuación diferencial que describe las funciones del apartado anterior es $y = f(x,y)$, con:

$$f(x,y) = -\frac{x+1}{2y+1} \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y+1>0\} \\ \qquad\qquad\vee \\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y+1<0\}. \end{cases}$$

3. La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y,y') = 0$.

Ejercicio 2.1.7. Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0,s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

Observación. Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

La situación descrita se encuentra en la Figura 2.3.

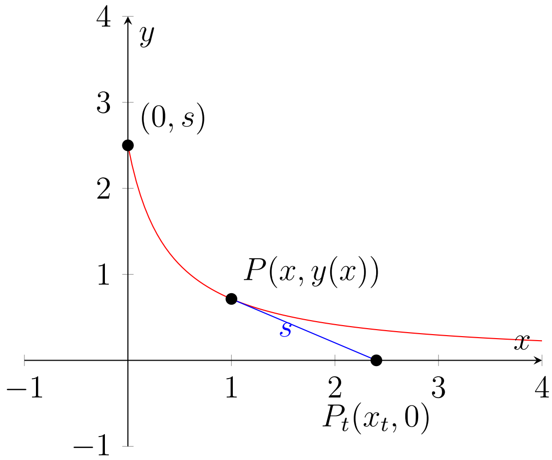


Figura 2.3: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 2.1.7.

Por tanto, la condición impuesta es que la distancia desde un punto de la gráfica al punto de corte de la tangente a la curva por ese punto con el eje de abscisas es constante e igual a s. Es decir, si el punto es $(x, y(x))$, entonces la condición es:

$$\sqrt{(x-x_t)^2 + y(x)^2} = s$$

Veamos cómo calcular x_t. Usando la definición de pendiente con los puntos P y P_t, tenemos:

$$y'(x) = \frac{y(x)-0}{x-x_t} \Longrightarrow x_t = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que $y'(x) = 0$ no tiene sentido, puesto que la recta descrita sea horizontal, y por tanto no habría punto de corte con el eje X (es decir, no habría un único x_t). Por tanto, la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$\sqrt{\left(x - x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right)^2 + y(x)^2} = s \Longrightarrow \sqrt{\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2} = s$$

Elevando al cuadrado, tenemos que:

$$\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2 = s^2 \Longrightarrow y'(x)^2 = \frac{y(x)^2}{s^2 - y(x)^2}$$

Notemos que $y(x) < s$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el denominador es siempre positivo. Aplicamos ahora la raíz cuadrada, sabiendo que $y'(x) < 0$ por ser la pendiente de la curva decreciente, y $y(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{s^2 - y(x)^2}}$$

Usando la notación correspondiente, tenemos que la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}} \qquad \text{con dominio } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -s < y < s\}$$

Ejercicio 2.1.8. Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{2.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{2.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (2.1).

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (2.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (x'(t))^2 + x^2(t). \end{array}$$

Por ser x una solición de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x,\ x' \in C^1(I)$ y, por tanto f es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\ \ [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que f es constante en I. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + x^2(t) &= 0^2 + 1^2 = 1, \\ x''(t) + x(t) &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.9. Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2 - x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1 - y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \end{aligned}$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.

   Representemos la situación en la Figura 2.4.

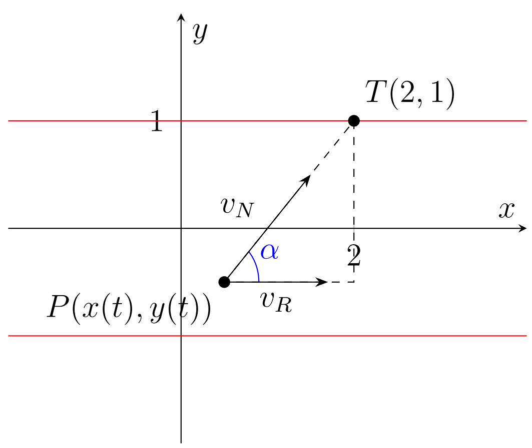


Figura 2.4: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 2.1.9.

Tenemos que $x(t)$ es la componente horizontal de la posición de la nadadora, por lo que $x'(t)$ es la velocidad horizontal de la nadadora:

$$x'(t) = v_R + v_N \cdot \cos(\alpha) \stackrel{(*)}{=} v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de coseno como cateto contiguo sobre hipotenusa. Por otro lado, $y(t)$ es la componente vertical de la posición de la nadadora, por lo que $y'(t)$ es la velocidad vertical de la nadadora:

$$y'(t) = v_N \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \stackrel{(*)}{=} v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de seno como cateto opuesto sobre hipotenusa.

2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

   Tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_N \cdot \dfrac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}}}{v_R + v_N \cdot \dfrac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}}} = \frac{1-y}{\dfrac{v_R}{v_N}\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2} + 2 - x}$$

Ejercicio 2.1.10. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$,

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1e^t - c_2e^{-t}, \\ x'' &= c_1e^t + c_2e^{-t}. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que la ecuación diferencial $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite como solución a la familia de funciones dada.

2. $x = c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t$.

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 \operatorname{senh} t + c_2 \cosh t, \\ x'' &= c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que la ecuación diferencial $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite de nuevo como solución a la familia de funciones dada.

Ejercicio 2.1.11. Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx' + \varphi(x')$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

   La ecuación de la recta es:
$$x(t) = at + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

   Veamos qué condición hemos de imponer para que cumpla la ecuación de Clairaut:
$$at + b = at + \varphi(a) \Longrightarrow b = \varphi(a)$$

   Por tanto, tenemos que una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas es:
$$x(t) = at + \varphi(a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

2. Suponiendo que $\varphi(x) = x^2$, demuestre que $x(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ también es solución.

   Para esto, vemos:
$$tx' + \varphi(x') = t \cdot \left(\frac{-2t}{4}\right) + \left(\frac{-2t}{4}\right)^2 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{4} = x$$

   Por tanto, $x(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ es solución.

3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

Ejercicio 2.1.12. Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.

1. **Problema 6:** Transformar la ecuación $e^{x'} = x$ en una ecuación en forma normal y prueba que tiene una única solución tal que $x(t_0) = a$ para todo t_0 y todo $a \in \mathbb{R}^+$.

   Aplicando el logaritmo neperiano, tenemos que la ecuación diferencial en forma normal es:
$$x' = \ln x \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

2. **Problema 7:** Encuentra la ecuación cuya solución es la catenaria:
$$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

   Calculamos su derivada:
$$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh}(t)$$

   Por tanto, la ecuación diferencial que describe la catenaria es:
$$x' = \operatorname{senh}(t) \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

2.2. Cambios de Varible

Ejercicio 2.2.1. Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas de la forma dada por $x' = p(t)q(x)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$ y, para que el dominio sea conexo, podemos considerar $J = \mathbb{R}^+$ o $J = \mathbb{R}^-$.

Usamos por tanto el método de variables separadas. En primer lugar, comprobamos que q no tiene raíces en J:

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 = 0$$

Una vez comprobado esto, procedemos a resolver la ecuación usando el método de variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t-5}{x^2} \Longrightarrow x^2dx = (t-5)dt \Longrightarrow \int x^2dx = \int (t-5)dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{t^2}{2} - 5t + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

Despejando x obtenemos la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - 15t + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Busquemos ahora su intervalo maximal de definición (llamémoslo $\widehat{I} \subset I$). Necesitamos que $x(t) \in J$ para todo $t \in \widehat{I}$ y que x sea derivable en $\widehat{I}$. Distinguimos casos:

- $\underline{J = \mathbb{R}^+}$: En este caso, necesitamos que $x(t) > 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea positivo:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C > 0$$

  Veamos en qué puntos se anula el radicando:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C = 0 \Longrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 6C}}{3} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

  Distinguimos en función de C:

  $$25 - \frac{2C}{3} = 0 \Longrightarrow C = \frac{75}{2}$$

- $C > 75/2$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x, y este es siempre positivo. Por tanto, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$; es decir, $x(t) \in J$ para todo $t \in I$. Además, x es derivable en I, luego el intervalo maximal de definición es I, $\widehat{I} = I$.
- $C = 75/2$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, 5[\qquad I_2 =]5, +\infty[$$

En ambos casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.
- $C < 75/2$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus [t_1, t_2]$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, t_1[\qquad I_2 =]t_2, +\infty[$$

En todos los casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.

- $J = \mathbb{R}^-$: En este caso, necesitamos que $x(t) < 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea negativo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C < 0$$

Distinguimos en función de C:

- $C > 75/2$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x. Además, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$, por lo que no hay solución en este caso.
- $C = 75/2$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Además, como el intervalo de definición de la solución debe ser abierto y conexo, no hay solución en este caso.
- $C < 75/2$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) < 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Como en el abierto es derivable, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} =]t_1, t_2[$.

Ejercicio 2.2.2. En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P' = P(\alpha - \beta P)$$

y la ecuación de Gompertz

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P)$$

siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

Resolvamos en primer lugar la ecuación de Verhulst. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta P) \end{array}$$

donde consideramos $I = J = \mathbb{R}$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, \frac{\alpha}{\beta}$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación son, para todo $t \in I$:

$$P(t) = 0 \qquad P(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \mathbb{R}^-$, $J_2 =]0, \alpha/\beta[$ y $J_3 =]\alpha/\beta, +\infty[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en el la segunda componente del dominio.

- $\underline{J_1 = \mathbb{R}^-}$:

  Como en este caso no cumple que $P(0) = 100 \in J_1$, no nos interesa este dominio.

- $\underline{J_2 =]0, \alpha/\beta[}$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_2$:

  $$100 \in J_2 \Longleftrightarrow 100 < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta < \alpha$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_2$:

  $$P' = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = dt \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt$$

  Para resolver la primera integral, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

  $$\frac{1}{P(\alpha - \beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P} = \frac{A(\alpha - \beta P) + BP}{P(\alpha - \beta P)}$$

- Para $P = 0$: $1 = A \cdot \alpha \Longrightarrow A = {}^1\!/\!_\alpha$.
- Para $P = {}^\alpha\!/\!_\beta$: $1 = B \cdot {}^\alpha\!/\!_\beta \Longrightarrow B = {}^\beta\!/\!_\alpha$.

Por tanto, tenemos que:

$$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha-\beta P)} = \int dt \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\int \frac{dP}{P} + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dP}{\alpha-\beta P} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha-\beta P) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

donde en la última implicación hemos usado que $P \in J_2$.

Operando con la solución obtenida, llegamos a:

$$\ln\left(\frac{P}{\alpha-\beta P}\right) = \alpha(t+C) \Longrightarrow \frac{P}{\alpha-\beta P} = e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(1+\beta e^{\alpha(t+C)}) = \alpha e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow P = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}$$

Por tanto, para $P \in J_2$, la familia de soluciones es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{1+\beta e^{\alpha C}} \Longrightarrow 100(1+\beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)$$

- $J_3 =]{}^\alpha\!/\!_\beta, +\infty[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_3$:

$$100 \in J_3 \Longleftrightarrow 100 > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta > \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_3$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\beta P - \alpha) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Operando con la solución obtenida, llegamos a que la familia de soluciones para $P \in J_3$ es:

$$P(t) = \frac{-\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 - \beta e^{\alpha(t+C)}} = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{-1 + \beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(-1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{-100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Verhulst con condición inicial $P(0) = 100$ son, en función de los parámetros α, β:

- $\underline{100 = \alpha/\beta}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad t \in I$$

- $\underline{100 < \alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

- $\underline{100 > \alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_3, luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Resolvamos ahora la ecuación de Gompertz. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rrcl} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta \ln P) \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}^+$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta \ln P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, e^{\alpha/\beta}$$

La solución $P = 0$ no es válida, puesto que no pertenece al dominio J. Por tanto, la única solución constante es:

$$P(t) = e^{\alpha/\beta} \qquad t \in I$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \left]0, e^{\alpha/\beta}\right[$ y $J_2 = \left]e^{\alpha/\beta}, +\infty\right[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en el la segunda componente del dominio.

- $J_1 = \left]0, e^{\alpha/\beta}\right[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_1$:

  $$100 \in J_1 \Longleftrightarrow 100 < e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow \ln 100 < \frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_1$:

  $$P' = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = dt \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int dt$$

  Para resolver la integral del logaritmo, aplicamos el cambio de variable $P = e^u$, luego $dP = e^u du$:

  $$\int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int \frac{e^u du}{e^u(\alpha - \beta u)} = \int \frac{du}{\alpha - \beta u} = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta u) + C' =$$
  $$= -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln P) + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

  donde hemos hecho uso de que:

  $$\alpha - \beta u > 0 \Longleftrightarrow u < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \ln P < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 0 < P < e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow P \in J_1$$

Operando, llegamos a que:

$$-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln P)=t+C \Longrightarrow \alpha-\beta\ln P=e^{-\beta(t+C)} \Longrightarrow \ln P=\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}$$

Por tanto, la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_1 es:

$$P(t)=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad C\in\mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0)=100$, obtenemos:

$$P(0)=100=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta C}}{\beta}\right) \Longrightarrow \ln(100)=\frac{\alpha-e^{-\beta C}}{\beta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^{-\beta C}=\alpha-\beta\ln(100) \Longrightarrow C=-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln(100))$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

$$P(t)=\exp\left(\frac{\alpha-e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t\in I, \qquad C=-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta\ln(100))$$

- $J_2=\left]e^{\alpha/\beta},+\infty\right[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0)=100\in J_2$:

  $$100\in J_2 \Longleftrightarrow 100>e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow \ln 100>\frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I\times J_2$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

  $$-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln P-\alpha)=t+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

  donde hemos hecho uso de que:

  $$\alpha-\beta u<0 \Longleftrightarrow u>\frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \ln P>\frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow P>e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow P\in J_2$$

  Operando, llegamos a que la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_2 es:

  $$P(t)=\exp\left(\frac{-\alpha+e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad C\in\mathbb{R}$$

  Estableciendo la condición inicial $P(0)=100$, y repitiendo los cálculos del apartado anterior, llegamos a:

  $$P(0)=100 \Longrightarrow C=-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100)-\alpha)$$

  Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

  $$P(t)=\exp\left(\frac{-\alpha+e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t\in I, \qquad C=-\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100)-\alpha)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Gompertz con condición inicial $P(0) = 100$ son, en función de los parámetros α, β:

- $\underline{100 = e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = e^{\alpha/\beta} \qquad t \in I$$

- $\underline{100 < e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_1, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta\ln(100))$$

- $\underline{100 > e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100) - \alpha)$$

Ejercicio 2.2.3. Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t - x)$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

Al no indicarnos nada sobre la primera variable, suponemos que esta no varía, luego el cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{cases} s = t, \\ y = t - x. \end{cases}$$

Al no especificar dominio de la ecuación, suponemos que está definida en $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t, t-x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi = (\psi_1, \psi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, s-y) \end{array}$$

Para emplear el cambio de variable, en primer lugar hemos de comprobar que φ es un difeomorfismo. Para ello, hemos demostrar que φ es biyectiva y que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demostraremos en primer lugar que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ll} \varphi \circ \psi(s,y) = \varphi(s, s-y) = (s, s-(s-y)) = (s,y) = Id_{\mathbb{R}^2}(s,y) & \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi \circ \varphi(t,x) = \psi(t, t-x) = (t, t-(t-x)) = (t,x) = Id_{\mathbb{R}^2}(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por tanto, hemos demostrado que φ es biyectiva y que $\varphi^{-1} = \psi$. Además, como ambas componentes de φ, ψ son de clase 1, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, luego φ es un difeomorfismo.

A continuación, hemos de comprobar que el cambio es admisible. Aunque lo sabemos puesto que no varía la primera variable, lo demostramos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t,x) = 1 + 0 \cdot \cos(t-x) = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que el cambio de variable es admisible. Procedemos a aplicarlo a la ecuación dada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = 1 - \cos(t-x) = 1 - \cos y$$

Usando la notación usual, la nueva ecuación diferencial, con dominio $\mathbb{R}^2$, es:

$$y' = 1 - \cos y$$

Esta es de la forma $y' = p(s)q(y)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & 1 - \cos y \end{array}$$

Buscamos en primer lugar los valores en los que se anula q:

$$q(y) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \cos y = 0 \Longleftrightarrow \cos y = 1 \Longleftrightarrow y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fijado ahora $k \in \mathbb{Z}$, restringimos ahora el dominio de q a $J =]2\pi k, 2\pi(k+1)[$. En J tenemos que q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{ds} = 1 - \cos y \Longrightarrow \frac{dy}{1-\cos y} = ds \Longrightarrow \int \frac{dy}{1 - \cos y} = \int ds$$

Ejercicio 2.2.4. Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que

$$v' + \frac{k}{m} v^2 = g,$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k > 0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0) = 0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $v' = p(t)q(v)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & -\frac{k}{m} v^2 + g \end{array}$$

Comprobamos las raíces de q en $\mathbb{R}$:

$$q(v) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{k}{m}v^2 + g = 0 \Longleftrightarrow v^2 = \frac{gm}{k} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\sqrt{\dfrac{gm}{k}}, \\ v_2 = \sqrt{\dfrac{gm}{k}}. \end{cases}$$

Como buscamos la solución que cumple $v(0) = 0$, consideramos el dominio dado por $J =]v_1, v_2[$. En este dominio, q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 + g \Longrightarrow \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow m\int \frac{dv}{-kv^2 + gm} = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Para resolver la integral, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{-kv^2 + gm} = \frac{A}{v - v_1} + \frac{B}{v - v_2} = \frac{A(v - v_2) + B(v - v_1)}{(v - v_1)(v - v_2)}$$

- Para $v = v_1$: $1 = A(v_1 - v_2) \Longrightarrow A = \dfrac{1}{v_1 - v_2} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.
- Para $v = v_2$: $1 = B(v_2 - v_1) \Longrightarrow B = \dfrac{1}{v_2 - v_1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} m\int \frac{dv}{-kv^2 + gm} &= m\int \left(\frac{A}{v - v_1} + \frac{B}{v - v_2}\right) dv = \\ &= m\left(A\ln(v - v_1) + B\ln(v_2 - v)\right) + C' = \\ &= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left(\ln(v_2 - v) - \ln(v - v_1)\right) + C' = \\ &= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{v_2 - v}{v - v_1}\right) + C' = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v}\right) + C' \end{aligned}$$

Por tanto, la famlia de soluciones en J es:

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v}\right) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Operando, llegamos a:

$$\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v}=\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)$$

$$-v\left[1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]=\sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

$$v=-\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}}}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}$$

$$v=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0)=0$ es:

$$v(0)=0=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}\Longrightarrow 1=\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}=0\Longrightarrow C=0$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0)=0$ es:

$$v(t)=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left(t\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left(t\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}\qquad t\in\mathbb{R}$$

Estudiemos ahora el comportamiento a largo plazo de la solución. Para ello, consideramos el límite cuando $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}v(t)=-\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

Ejercicio 2.2.5. Calcule la solución de la ecuación

$$y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}$$

que verifica $y(0)=1$.

Ejercicio 2.2.6. Resuelva los siguientes problemas lineales

1. $x'+3x=e^{-3t}$, $x(1)=5$

2. $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}$, $x(2) = 0$

3. $x' = \cosh t \cdot x + \sinh t$, $x(0) = 1$

Ejercicio 2.2.7. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $a(t) \geqslant c > 0$ para todo t y

$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes)

Ejercicio 2.2.8. La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problemas de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

Ejercicio 2.2.9. Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

Ejercicio 2.2.10. Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

Ejercicio 2.2.11. Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t$, $y = \lambda^2 x$, con $\lambda > 0$.

Ejercicio 2.2.12. Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.