

LMD

Examen III



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

LMD

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Antonio Romero Martín
Carolina González Ríos
Daniel Gómez García
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Lógica y Métodos Discretos.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Francisco Miguel García Olmedo.

Descripción Convocatoria ordinaria.

Fecha 14 de junio de 2024.

Observaciones El examen se hacía por grupos de 3/4 personas. La entrega se abrió en Prado a las 13:00 y se cerró a las 21:30. Tan solo se pedía entregar 5 ejercicios de los 6 propuestos.

Ejercicio 1. Sea la relación de recurrencia que para todo número natural n proporcione el número exacto a_n de cadenas de bits de longitud n que contenga al menos un par de ceros consecutivos. Responda a las siguientes cuestiones:

1. Encuentre razonadamente la relación de recurrencia descrita.

Fijado $n \in \omega$, con $n \geq 2$, veremos cuantas cadenas de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos hay, que será a_n . Distinguiamos dos casos:

- Si la cadena termina en 1, habrá tantas como cadenas de longitud $n - 1$ que contienen al menos un par de ceros consecutivos, es decir, a_{n-1} .
- Si la cadena termina en 0, volvemos a distinguir dos subcasos:
 - Si el penúltimo bit es 1, entonces habrá tantas cadenas como cadenas de longitud $n - 2$ que contienen al menos un par de ceros consecutivos, es decir, a_{n-2} .
 - Si el penúltimo bit es 0, entonces la cadena ya contiene un par de ceros consecutivos, por lo que en los $n - 2$ bits restantes puedes elegir cualquier combinación de bits, por lo que puedes formar 2^{n-2} cadenas de longitud n .

Por tanto, la relación de recurrencia para a_n es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2} \quad \forall n \in \omega, \quad n \geq 2$$

2. Dé razonadamente las condiciones iniciales que definirán el problema de recurrencia.

Como la recurrencia obtenida es de orden $k = 2$, necesitamos dos condiciones iniciales para definir el problema de recurrencia, sean estas a_0 y a_1 .

- a_0 es el número de cadenas de longitud 0 que contienen al menos un par de ceros consecutivos, que trivialmente es $a_0 = 0$.
- a_1 es el número de cadenas de longitud 1 que contienen al menos un par de ceros consecutivos, que de nuevo trivialmente es $a_1 = 0$.

Por tanto, las condiciones iniciales que definen el problema de recurrencia son:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0$$

3. Calcule razonadamente a_{500} .

Para el cálculo de a_{500} sin tener que resolver dicha recurrencia, vamos a proponer una forma alternativa de calcularlo. Buscamos una relación de recurrencia para a_n , el número de cadenas de bits de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos, vamos a dividir el problema en dos casos que son complementarios para los que usaremos el enfoque de recurrencia. Denotamos entonces por:

- a_n al número de cadenas de bits de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos.

- b_n al número de cadenas de bits de longitud n que no contienen ningún par de ceros consecutivos.

En primer lugar, observamos que la cantidad total de cadenas de bits de longitud n es 2^n , ya que cada bit puede ser 0 ó 1. Entonces, la relación entre a_n y b_n viene dada por:

$$a_n + b_n = 2^n \quad \forall n \in \omega$$

Lo que haremos será entonces encontrar una relación de recurrencia para b_n . Fijado $n \in \omega$, con $n \geq 2$, veremos cuántas cadenas de longitud n que no contienen ningún par de ceros consecutivos hay, que será b_n .

- Si la cadena termina en 1, entonces el número de cadenas de longitud $n - 1$ que no contienen ningún par de ceros consecutivos es b_{n-1} .
- Si la cadena termina en 0, el penúltimo bit debe ser 1 para que no haya un par de ceros consecutivos, por lo que la subcadena de longitud $n - 2$ restante también debe no tener ningún par de ceros consecutivos, de donde el número de cadenas de longitud $n - 2$ que no contienen ningún par de ceros consecutivos es b_{n-2} .

Por tanto, podemos escribir la relación de recurrencia para b_n como:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad \forall n \in \omega, \quad n \geq 2$$

con las condiciones iniciales siguientes:

- $b_0 = 1$, ya que la única cadena de longitud 0 es la cadena vacía, que no contiene ningún par de ceros consecutivos.
- $b_1 = 2$, ya que las cadenas de longitud 1 son 0 y 1, y ninguna de ellas contiene ningún par de ceros consecutivos.

Nos damos cuenta de que esta sucesión es la conocida sucesión de Fibonacci desplazada dos términos; es decir, $b_n = F_{n+2}$, donde F_n es el n -ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Por tanto, a_n tenemos que es:

$$a_n = 2^n - F_{n+2} \quad \forall n \in \omega$$

Para calcular a_{500} , usamos el resultado obtenido:

$$a_{500} = 2^{500} - F_{502}$$

Por la relación entre la sucesión de Fibonacci y los números combinatorios, sabemos que:

$$a_{500} = 2^{500} - \sum_{i=0}^{250} \binom{501-i}{i}$$

Obtenemos dicho valor usando el siguiente programa de Python:

```

from math import comb

sum = 0
for i in range(251):
    sum += comb(501 - i, i)

print((2 ** 500) - sum)

```

Mediante dicho programa, calculamos el valor de a_{500} :

$a_{500} = 32733906078961418700131896968275991522166$
 $42045678050048759657157083896718498195198887188510$
 $824448659298138854760759871647667082449311747124309037796625$

Ejercicio 2. Para cualquier conjunto $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ de fórmulas proposicionales, considere la igualdad:

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))) = \text{Con}(\Gamma, (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

Si es cierta, dé una demostración y de no serlo, demuéstrela con un contraejemplo.

Notemos por $\varphi_1 = \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ y $\varphi_2 = (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Sea v una valuación fija pero arbitraria. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v(\varphi_1) &= v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))) \\
 &= v(\alpha)v(\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) + v(\alpha) + 1 \\
 &= v(\alpha)[v(\beta)v(\alpha \rightarrow \gamma) + v(\beta) + 1] + v(\alpha) + 1 \\
 &= v(\alpha)[v(\beta)(v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1) + v(\beta) + 1] + v(\alpha) + 1 \\
 &= v(\alpha)^2v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\
 &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(\varphi_2) &= v((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \\
 &= v(\beta \rightarrow \alpha)v(\beta \rightarrow \gamma) + v(\beta \rightarrow \alpha) + 1 \\
 &= (v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1 + 1 \\
 &= v(\beta)^2v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)^2v(\alpha) + \cancel{v(\beta)v(\alpha)} + v(\beta)^2v(\gamma) + v(\beta)^2 + \\
 &\quad + \cancel{v(\beta)} + v(\beta)v(\gamma) + \cancel{v(\beta)} + 1 + \cancel{v(\beta)v(\alpha)} + v(\beta) + 1 + 1 \\
 &= v(\beta)v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\alpha) + 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$ para cualquier valuación v , de donde se sigue que $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, por lo que $\varphi_1 = \varphi_2$. Por el apartado 6 del Teorema 3.3.2., tenemos que:

$$\text{Con}(\Gamma, \varphi_1) = \text{Con}(\Gamma, \varphi_2)$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas proposicionales Γ se cumple la igualdad:

$$\text{Con}(\Gamma) = \bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \text{Con}(\Gamma_f)$$

Demostración. Demostraremos mediante doble inclusión:

\supseteq) Demostraremos en primer lugar que $\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \text{Con}(\Gamma_f) \subseteq \text{Con}(\Gamma)$.

En virtud del Teorema 3.3.1 de los apuntes, si $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ se tiene que $\text{Con}(\Gamma_f) \subseteq \text{Con}(\Gamma)$. Deducimos entonces que:

$$\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \text{Con}(\Gamma_f) \subseteq \text{Con}(\Gamma)$$

como queríamos demostrar.

\subseteq) Demostraremos ahora que $\text{Con}(\Gamma) \subseteq \bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \text{Con}(\Gamma_f)$.

Para ello, bastará tomar una fórmula $\gamma \in \text{Con}(\Gamma)$ y ver que $\gamma \in \bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \text{Con}(\Gamma_f)$.

Esto último, a su vez, equivale a ver que $\gamma \in \text{Con}(\Gamma_f)$ para algún $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito. De nuevo, esto equivale a demostrar que $\Gamma_f \models \gamma$ para cierto $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito; que a su vez equivale a demostrar que $\Gamma_f \cup \{\neg\gamma\}$ para cierto $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito es insatisfacible.

Para esto último, demostraremos el siguiente lema, que es una de las implicaciones del Teorema de Compacidad:

Lema 0.1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, se tiene lo siguiente:*

Si cualquier $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Demostración. Para demostrar este lema, introducimos en primer lugar algo de notación.

Notamos $P = \{p_n \mid n \in \omega\}$ el conjunto de todas las variables proposicionales. Además, en lo que sigue entenderemos que para $n \in \omega$, p_n es el n -ésimo símbolo de variable proposicional numerado en P (donde estamos haciendo uso de que el conjunto de símbolos de variables proposicionales es numerable).

Llamamos asignación parcial a toda función $\mathcal{A} : D \rightarrow \{0, 1\}$, donde o bien se tiene que $D = P$ ó $D = \{p_i \mid i \in n\} \subseteq P$ para algún $n \in \omega$ (notemos que D es finito en este último caso, llegando incluso a poder ser vacío). Por ser D el

dominio de \mathcal{A} , notaremos D por $\text{dom}(\mathcal{A})$.

Dadas dos asignaciones parciales \mathcal{A} y \mathcal{A}' , diremos que \mathcal{A}' extiende a \mathcal{A} si $\text{dom}(\mathcal{A}) \subseteq \text{dom}(\mathcal{A}')$ y $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}'(p)$ para todo $p \in \text{dom}(\mathcal{A})$.

Decimos que una asignación parcial \mathcal{A} es *buen*a si satisface cualquier fórmula $\varphi \in \Gamma$ que solo contenga símbolos de variable proposicional de $\text{dom}(\mathcal{A})$ en su expresión.

Observamos que para cada $n \in \omega$ hay una asignación parcial \mathcal{A} tal que su dominio es $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$ que es buena. Para ello, fijado $n \in \omega$, consideramos el subconjunto $\Gamma' \subseteq \Gamma$ de fórmulas que solo contienen símbolos de variable proposicional de $\{p_i \mid i \in n\}$ en su expresión. Si bien Γ' podría ser infinito, sabemos que el conjunto cociente Γ'/\equiv tiene a lo sumo $2^{(2^n)}$ elementos, luego en particular es finito. Para cada clase de equivalencia, escogemos un representante de clase y consideramos Γ'' el conjunto formado por dichos representantes.

Por hipótesis, Γ'' es satisfacible por ser subconjunto finito de Γ , luego cualquier fórmula proposicional de Γ' es satisfacible para cierta asignación parcial \mathcal{A} con $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$, que por definición es buena.

Nuestro objetivo ahora será construir $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 0}$ sucesión de asignaciones parciales buenas tal que para cada $n \in \omega$ se tenga que:

“Hay infinitas asignaciones parciales buenas que extienden a \mathcal{A}_n ”.

Esta sucesión la definiremos de la siguiente manera:

- Para $n = 0$:

En el caso de $n = 0$, \mathcal{A}_0 tiene dominio vacío ($\text{dom}(\mathcal{A}_0) = \emptyset$). Puesto que habíamos demostrado que para cada $n \in \omega$ hay una asignación parcial buena con $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$, y trivialmente cada una de ellas extiende a \mathcal{A}_0 , tenemos que hay infinitas asignaciones parciales buenas que extienden a \mathcal{A}_0 (tantas como elementos en ω). Por tanto, hemos construido el primer elemento de nuestra sucesión, \mathcal{A}_0 .

- Construido para n , construimos para $n + 1$:

Supongamos que hemos construido \mathcal{A}_n con las hipótesis anteriormente descritas. Consideramos \mathcal{B} y \mathcal{B}' las dos únicas asignaciones parciales con $\text{dom}(\mathcal{B}) = \text{dom}(\mathcal{B}') = \{p_i \mid i \in n^+\} \subseteq P$ que extienden a \mathcal{A}_n siendo $\mathcal{B}(p_{n+1}) = 0$ y $\mathcal{B}'(p_{n+1}) = 1$.

Puesto que cualquier asignación parcial buena que extiende a \mathcal{A}_n extiende a su vez a \mathcal{B} o a \mathcal{B}' , deducimos que \mathcal{B} o \mathcal{B}' tiene infinitas asignaciones parciales buenas que la extienden. Por tanto, tomamos $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}$ en caso de que \mathcal{B} tenga infinitas asignaciones parciales buenas que la extienden, y $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}'$ en caso contrario. Tenemos por tanto construido \mathcal{A}_{n+1} con las propiedades deseadas.

Construida esta sucesión, definimos la asignación \mathcal{A} como sigue:

$$A(p_n) = A_n(p_n), \quad \forall n \in \omega$$

Para cualquier fórmula $\varphi \in \Gamma$ que sólo contenga símbolos de variable proposicional contenidos en $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ en su expresión, sabemos por construcción que \mathcal{A}_n satisface φ . Por tanto, \mathcal{A} también satisface a φ , pues por definición \mathcal{A} extiende a \mathcal{A}_n . \square

Una vez demostrado el lema, por el contrareciproco del mismo, si Γ es insatisfacible, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ tal que Γ_f es insatisfacible, tal y como queríamos demostrar. \square

Ejercicio 4. Considere la función booleana dada como sigue:

$$f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15) + \sum d(10, 14)$$

Para este ejercicio empleará exclusivamente el algoritmo de Quine-McCluskey y razonará, escueta pero suficientemente, los pasos en la aplicación de dicho algoritmo. A continuación, se le pide:

1. Dé razonadamente una expresión minimal de la función a condición de ser SOP. Usaremos el algoritmo de Quine-McCluskey. Generamos los implicants primos:

Columna 1	Columna 2	Columna 3
0 0000 ✓	{0,1} 000_ ✓	{0,1,4,5} 0_0_ *
1 0001 ✓	{0,4} 0_00 ✓	{4,5,6,7} 01__ *
4 0100 ✓	{1,5} 0_01 ✓	{6,7,14,15} _11_ *
5 0101 ✓	{1,9} _001 *	{10,11,14,15} 1_1_ *
6 0110 ✓	{4,5} 010_ ✓	
9 1001 ✓	{4,6} 01_0 ✓	
10 1010 ✓	{5,7} 01_1 ✓	
7 0111 ✓	{6,7} 011_ ✓	
11 1011 ✓	{6,14} _110 ✓	
14 1110 ✓	{9,11} 10_1 *	
15 1111 ✓	{10,11} 101_ ✓	
	{10,14} 1_10 ✓	
	{7,15} _111 ✓	
	{11,15} 1_11 ✓	
	{14,15} 111_ ✓	

Los implicants primos son, por tanto, los que se han marcado con *. Reducimos la tabla de implicants primos usando la cuadrícula de McCluskey:

			0	1	4	5	6	7	9	11	15
	{1,9}	_001		○					○		
	{9,11}	1_1_							○	○	
*	{0,1,4,5}	0_0_	○	○	○	○					
	{4,5,6,7}	01__			○	○	○	○			
	{6,7,14,15}	_11_					○	○			○
	{10,11,14,15}	1_11								○	○

donde hemos indicado con * que el implicante $\{0,1,4,5\}$ es esencial, ya que es el único que cubre el minterm 0. Además, la columna asociada a cada minterm cubierto por este implicante se descarta, puesto que ya está cubierta. Esto lo hemos indicado con una línea roja. La tabla reducida es:

			6	7	9	11	15
	{1,9}	_001			○		
	{9,11}	1_1_			○	○	
	{4,5,6,7}	01__	○	○			
**	{6,7,14,15}	_11_	○	○			○
	{10,11,14,15}	1_11				○	○

donde, en primer lugar, la fila del implicante primo $\{6,7,14,15\}$ domina a la del $\{4,5,6,7\}$, por lo que se descarta esta última (indicado en azul). Una vez hecho esto, vemos que el minterm 6 tan solo está cubierto por el implicante primo $\{6,7,14,15\}$, por lo que este es esencial (indicado con **). Además, las columnas asociadas a los minterms cubiertos por este implicante se descartan, ya que ya están cubiertas (indicado tachando dichas columnas en morado). La tabla reducida es:

			9	11
	{1,9}	_001	○	
***	{9,11}	1_1_	○	○
	{10,11,14,15}	1_11		○

donde, en primer lugar, la fila del implicante primo $\{9,11\}$ domina a las otras dos, por lo que se descartan estas dos últimas (indicado en naranja). Una vez hecho esto, vemos que el minterm 9 tan solo está cubierto por el implicante primo $\{9,11\}$, por lo que este es esencial (indicado con ***).

Por tanto, los implicantes primos esenciales son los siguientes:

Implicante	Patrón	Producto
$\{0,1,4,5\}$	0_0_	$\bar{a} \bar{c}$
$\{6,7,14,15\}$	_11_	$b c$
$\{9,11\}$	10_1	$a \bar{b} d$

Por tanto, una vez aplicado el algoritmo de Quine-McCluskey, la expresión minimal de la función a condición de ser SOP es:

$$f(a, b, c, d) = \bar{a} \bar{c} + b c + a \bar{b} d$$

2. Dé razonadamente una expresión minimal de la función a condición de ser POS.

En primer lugar, hemos de obtener la expresión de f como producto de maxtérminos. Esta es:

$$f(a, b, c, d) = \prod M(2, 3, 8, 12, 13) \cdot \prod d(10, 14)$$

Usaremos el algoritmo de Quine-McCluskey. Generamos los implicants primos:

Columna 1	Columna 2	Columna 3
2 0010 ✓	{2,3} 001_ *	{8,10,12,14} 1__0 *
8 1000 ✓	{2,10} _010 *	
3 0011 ✓	{8,10} 10_0 ✓	
10 1010 ✓	{8,12} 1_00 ✓	
12 1100 ✓	{10,14} 1_10 ✓	
13 1101 ✓	{12,13} 110_ *	
14 1110 ✓	{12,14} 11_0 ✓	

Los implicants primos son, por tanto, los que se han marcado con *. Reducimos la tabla de implicants primos usando la cuadrícula de McCluskey:

			2	3	8	12	13
*	{2,3}	001_	○	○			
	{2,10}	_010	○				
*	{12,13}	110_				○	○
*	{8,10,12,14}	1__0			○	○	

donde hemos indicado con * que el impicante {2,3} es esencial, ya que es el único que cubre el maxtérmino 3. Además, la fila asociada a cada maxtérmino cubierto por este impicante se descarta, puesto que ya está cubierta. Esto lo hemos indicado con una línea vertical roja. Asimismo, hemos indicado con * que el impicante {12,13} es esencial, ya que es el único que cubre el maxtérmino 13. El impicante primo {8,10,12,14} también es esencial por ser el único que cubre el maxtérmino 8 (indicado con *).

Por tanto, los implicants primos esenciales son los siguientes:

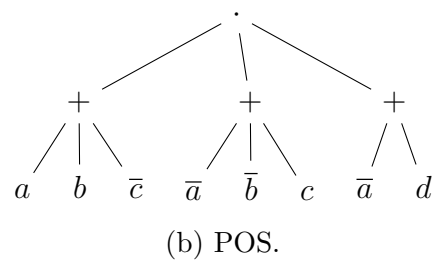
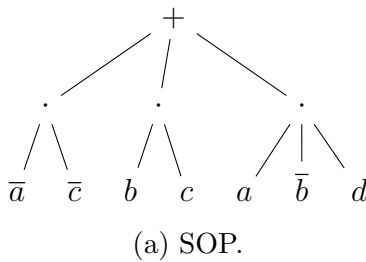
Impicante	Patrón	Suma
{2,3}	001_	$a + b + \bar{c}$
{12,13}	110_	$\bar{a} + \bar{b} + c$
{8,10,12,14}	1__0	$\bar{a} + d$

Por tanto, una vez aplicado el algoritmo de Quine-McCluskey, la expresión minimal de la función a condición de ser POS es:

$$f(a, b, c, d) = (a + b + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + d)$$

3. Elija justificadamente la expresión de menor coste entre la SOP y la POS encontradas en los apartados anteriores.

Calculemos para ello el coste de ambas expresiones obtenidas en los apartados anteriores:



Por tanto, en el caso de la expresión SOP, tenemos:

- Puertas OR: 1.
- Puertas AND: 3.
- Ejes: 10.

Por tanto, el coste de la expresión SOP es $1 + 3 + 10 = 14$. Respecto a la expresión POS, tenemos:

- Puertas OR: 3.
- Puertas AND: 1.
- Ejes: 11.

Por tanto el coste de la expresión POS es $3 + 1 + 11 = 15$.

Como el coste de la expresión SOP es menor que el de la expresión POS (14 ¡15), elegimos la SOP como expresión de menor coste:

$$f(a, b, c, d) = \bar{a} \bar{c} + b c + a \bar{b} d$$

Ejercicio 5. De ser posible, construya razonadamente un grafo G (sin lazos ni lados paralelos) que teniendo 7 vértices: dos sean de grado 2, uno de grado 3, tres de grado 4 y no haya ninguno de grado 1.

Sea $G = (V, A)$ un grafo simple con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$, denotamos por d_i al grado de v_i ($d_i = \text{dg}(v_i)$). Por ser un grafo simple, veamos que:

$$d_i \leq 6, \quad \forall i \in \{1, \dots, 7\}$$

Supongamos que $\exists i \in \{1, \dots, 7\}$ tal que $d_i \geq 7$. Por definición, como no hay lazos, tenemos que el número de aristas de G incidentes en v_i es mayor o igual que 7. No obstante, esto contradice nuestra hipótesis, ya que por el principio del palomar, existirían aristas paralelas. Por tanto, tenemos que $d_i \leq 6$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Aplicamos ahora las condiciones dadas. Tenemos que:

$$d_1 = k \in \omega, \quad d_2 = d_3 = d_4 = 4, \quad d_5 = 3, \quad d_6 = d_7 = 2$$

Buscamos ahora conocer el valor de $k \in \omega$. Por ser G un grafo, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^7 d_i = k + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 19 + k = 2 \cdot |A|$$

Por tanto, sabemos que $d_1 = k \leq 6$ y k es impar. Como k no puede ser ni 1 ni 3 por hipótesis (ya que entonces habría más nodos con dicho grado que los indicados en el enunciado), tenemos que $d_1 = k = 5$.

Una vez llegados a este punto, en el que sabemos el grado de cada vértice de nuestro grafo G , consideramos la sucesión 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, y aplicaremos el teorema de *Havel-Hakimi* para construir el grafo.

5	4	4	4	3	2	2	Eliminamos el 5 y restamos uno a los 5 términos siguientes	
	3	3	3	2	1	2	Reordenamos los términos	
	3	3	3	2	2	1	Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes	
		2	2	1	2	1	Reordenamos los términos	
		2	2	2	1	1	Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes	
			1	1	1	1	Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente	
				0	1	1	Reordenamos los términos	
					1	1	0	Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente
						0	0	

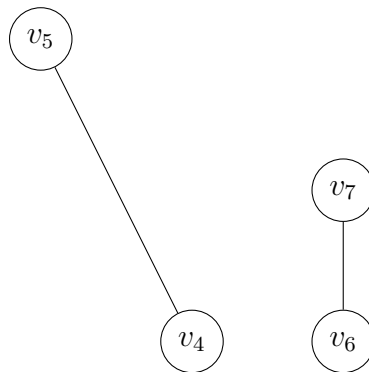
Por tanto, comprobamos que, efectivamente se puede construir un grafo G con las condiciones dadas; es decir, que la sucesión 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2 es gráfica. Para representarlo, comenzamos con la sucesión 0, 0:



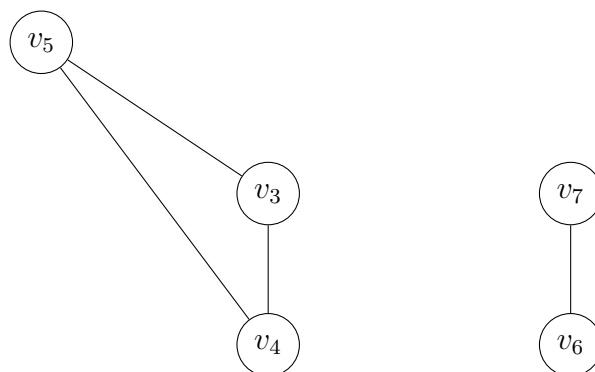
Ahora, pasamos a la sucesión superior, es decir, 1, 1, 0, que proviene de la sucesión 0, 0, por lo que el nuevo nodo añadido debe conectarse a un nodo de grado 0:



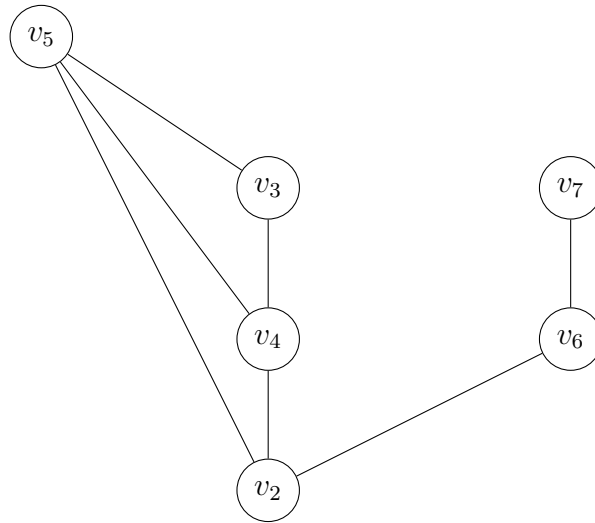
La siguiente sucesión es 1, 1, 1, 1, que proviene de **0**, 1, 1, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a un nodo que tenía grado 0:



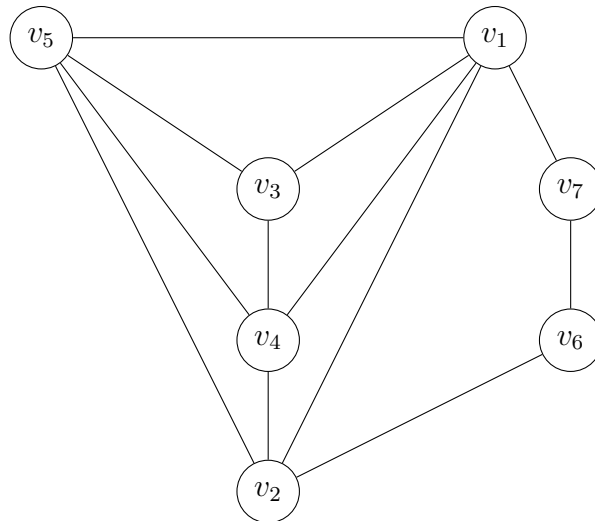
La siguiente sucesión es 2, 2, 2, 1, 1, que proviene de la sucesión **1**, **1**, 1, 1, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a dos nodos de grado 1:



La siguiente sucesión es 3, 3, 3, 2, 2, 1, que proviene de la sucesión **2**, **2**, **1**, 2, 1. Por tanto, el nuevo nodo añadido debe conectarse a dos nodos de grado 2 y uno de grado 1:



La última sucesión es 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, que proviene de la sucesión **3, 3, 3, 2, 1, 2**, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a tres nodos de grado 3, uno de grado 2 y uno de grado 1:



De esta forma, hemos construido un grafo G con las condiciones dadas (7 nodos, dos de grado 2, uno de grado 3 y tres de grado 4).

Ejercicio 6. Considere las fórmulas de cierto lenguaje de primer orden:

- $\varphi_0 \equiv \forall x(r(x, x) \rightarrow \exists y r(x, y))$
- $\varphi_1 \equiv \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$
- $\varphi_2 \equiv \forall x (\neg r(y, x))$
- $\varphi_3 \equiv \exists x (\neg r(x, x))$

y diga razonadamente si son ciertas o no cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$

Demostraremos que sí es cierta. Esto lo haremos demostrando que el conjunto $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ es insatisfacible. Para ello, calcularemos la forma clausulada de cada una de las fórmulas, pasando para ello tanto por la forma normal prenexa como por la forma normal de Skolem:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &\equiv \forall x(r(x, x) \rightarrow \exists y r(x, y)) \\ &\equiv \forall x \exists y (r(x, x) \rightarrow r(x, y)) \\ &\equiv \forall x \exists y (\neg r(x, x) \vee r(x, y)) \\ &\equiv \forall x (\neg r(x, x) \vee r(x, f(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ &\equiv \forall x \forall y (\neg r(x, y) \vee r(y, x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &\equiv \forall x (\neg r(y, x)) \\ &\stackrel{(*)}{\equiv} \forall x (\neg r(b, x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\varphi_3 &\equiv \neg(\exists x (\neg r(x, x))) \\ &\equiv \forall x (r(x, x))\end{aligned}$$

donde en (*) hemos sustituido y por b en φ_2 por tratarse de una fórmula y no de una sentencia (y es libre). Definimos el conjunto Γ_1^* de las formas clausuladas de los elementos de Γ :

$$\Gamma_1^* = \{\forall x (\neg r(x, x) \vee r(x, f(x))), \forall x \forall y (\neg r(x, y) \vee r(y, x)), \forall x (\neg r(b, x)), \forall x (r(x, x))\}$$

Tenemos que el conjunto de fórmulas Γ es insatisfacible si y solo si el conjunto de sentencias Γ_1^* es insatisfacible. Veamos que se cumple esto último por resolución:

$$\begin{array}{c} \neg r(b, x) \qquad r(x, x) \\ (x|b) \mid \quad \diagdown \\ \square \qquad (x|b) \end{array}$$

Por tanto, Γ_1^* es insatisfacible, y deducimos que Γ también lo es, teniendo que $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$ como queríamos demostrar.

2. $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_1$

Demostraremos que no es cierta. Veamos que $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$. Sea \mathbf{A} una estructura tal que:

- $A = \{0, 1\}$
- $(r)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$

Sea una asignación v tal que $v(y) = 1$, y consideremos la interpretación $\langle \mathbf{A}, v \rangle$.
Veamos qué ocurre con cada una de las fórmulas:

a) Para φ_0 :

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_0) = 1 &\iff \forall a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x) \rightarrow \exists y r(x, y)) = 1 \\ &\iff \forall a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(\exists y r(x, y)) + I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) + 1 = 1 \\ &\iff \forall a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(\exists y r(x, y)) = I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) \end{aligned}$$

Veamos qué ocurre con cada $a \in A$:

■ Para $a = 0$:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^{v(x|0)}(r(x, x)) = 1 &\iff \langle v(x|0)(x), v(x|0)(x) \rangle = \langle 0, 0 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \quad \checkmark \\ I_{\mathbf{A}}^{v(x|0)}(\exists y r(x, y)) = 1 &\iff \exists b \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|0, y|b)}(r(x, y)) = 1 \\ &\iff \exists b \in A, \quad \langle v(x|0, y|b)(x), v(x|0, y|b)(y) \rangle = \langle 0, b \rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Tomando $b = 0$, se tiene que $\langle 0, 0 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$ y por tanto $I_{\mathbf{A}}^{v(x|0)}(\exists y r(x, y)) = 1$. Tenemos entonces $1 \cdot 1 = 1$, lo cual es correcto.

■ Para $a = 1$:

$$I_{\mathbf{A}}^{v(x|1)}(r(x, x)) = 1 \iff \langle v(x|1)(x), v(x|1)(x) \rangle = \langle 1, 1 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \quad \times$$

Por tanto, como $\langle 1, 1 \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, se tiene que $I_{\mathbf{A}}^{v(x|1)}(r(x, x)) = 0$, y por tanto tenemos que $0 \cdot 1 = 0$, lo cual es correcto.

En definitiva, tenemos que $I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_0) = 1$.

b) Para φ_2 :

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_2) = 1 &\iff I_{\mathbf{A}}^v(\forall x (\neg r(y, x))) = 1 \\ &\iff \forall a \in A, I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(\neg r(y, x)) = 1 \\ &\iff \forall a \in A, I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(y, x)) + 1 = 1 \\ &\iff \forall a \in A, I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(y, x)) = 0 \\ &\iff \forall a \in A, \langle v(x|a)(y), v(x|a)(x) \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \\ &\iff \forall a \in A, \langle v(y), a \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \\ &\iff \forall a \in A, \langle 1, a \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

donde hemos afirmado que, para todo $a \in A$, $\langle 1, a \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, puesto que no existe ningún par en $(r)^{\mathbf{A}}$ que tenga a 1 como primer componente.

c) Para φ_3 :

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_3) = 1 &\iff I_{\mathbf{A}}^v(\exists x (\neg r(x, x))) = 1 \\ &\iff \exists a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(\neg r(x, x)) = 1 \\ &\iff \exists a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) + 1 = 1 \\ &\iff \exists a \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a)}(r(x, x)) = 0 \\ &\iff \exists a \in A, \quad \langle v(x|a)(x), v(x|a)(x) \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \\ &\iff \exists a \in A, \quad \langle a, a \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Por tanto, tomando $a = 1$, se tiene que $\langle 1, 1 \rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, y por tanto $I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_3) = 1$.

d) Para φ_1 :

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_1) = 1 &\iff I_{\mathbf{A}}^v(\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x))) = 1 \\
 &\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(x, y) \rightarrow r(y, x)) = 1 \\
 &\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \\
 &\quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(x, y)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(y, x)) + I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(x, y)) + 1 = 1 \\
 &\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \\
 &\quad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(x, y)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(y, x)) = I_{\mathbf{A}}^{v(x|a, y|b)}(r(x, y))
 \end{aligned}$$

Tomemos $a = 0$ y $b = 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{A}}^{v(x|0, y|1)}(r(x, y)) = 1 &\iff \langle v(x|0, y|1)(x), v(x|0, y|1)(y) \rangle = \langle 0, 1 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}} && \checkmark \\
 I_{\mathbf{A}}^{v(x|0, y|1)}(r(y, x)) = 1 &\iff \langle v(x|0, y|1)(y), v(x|0, y|1)(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}} && \times
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $I_{\mathbf{A}}^{v(x|0, y|1)}(r(x, y)) = 1$ y $I_{\mathbf{A}}^{v(x|0, y|1)}(r(y, x)) = 0$, y como $1 \cdot 0 \neq 1$, se tiene que $I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_1) = 0$.

En conclusión, hemos encontrado una \mathbf{L} -interpretación $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ tal que:

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_0) = I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_2) = I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_3) &= 1, \\
 I_{\mathbf{A}}^v(\varphi_1) &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$.