Ejercicio 1. Se pretende aproximar mediante integración de Romberg la integral:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx.$$

Calcula para ello $R(2,2)$.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & {}^1\!/x \end{array}$$

Calculamos en primer lugar $R(i,0)$.

$$R(0,0) = T_1 = (3-1)\cdot\frac{f(3)-f(1)}{2} = \frac{4}{3}$$

$$R(1,0) = T_2 = \frac{3-1}{2\cdot 2}\left(f(1)+2\cdot f\left(1+\frac{3-1}{2}\right)+f(3)\right) = \frac{7}{6}$$

$$\begin{aligned} R(2,0) = T_4 &= \frac{3-1}{4\cdot 2}\left(f(1)+2\left[f\left(1+\frac{3-1}{4}\right)+f\left(1+2\cdot\frac{3-1}{4}\right)+f\left(1+3\cdot\frac{3-1}{4}\right)\right]+f(3)\right) \\ &= \frac{67}{60} \end{aligned}$$

Una vez obtenidos esos valores, calculamos $R(i,j)$ para $i,j=1,2$, con $j<i$:

$$\begin{aligned} R(1,1) &= \frac{4R(1,0)-R(0,0)}{3} = \frac{10}{9} \\ R(2,1) &= \frac{4R(2,0)-R(1,0)}{3} = \frac{11}{10} \\ R(2,2) &= \frac{4^2R(2,1)-R(1,1)}{15} = \frac{742}{675} \approx 1{,}09925925 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Dada la regla de integración numérica

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n(f,h) + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$$

¿Cómo se haría un procedimiento similar a la integración de Romberg con esta fórmula?

Tomando $h/2$, llegamos a que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n\left(f, {}^h\!/2\right) + c_1\cdot\frac{h}{2} + c_2\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_3\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots$$

Buscamos ahora eliminar el término del error de orden h. Multiplicando por 2 esta expresión y restándole la original, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= 2L_n\left(f, {}^h\!/2\right) - L_n(f,h) + c_1\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) + c_2\cdot\left(2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - h^2\right) + c_3\cdot\left(2\left(\frac{h}{2}\right)^3 - h^3\right) + \\ &= 2L_n\left(f, {}^h\!/2\right) - L_n(f,h) - c_2\cdot\left(\frac{h^2}{2}\right) - c_3\cdot\left(\frac{3h^3}{4}\right) + \dots \end{aligned}$$

Hemos conseguido eliminar el término de orden h, pero nos quedan los términos de orden h^2 y h^3. De forma similar a la integración de Romberg, podemos definir los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
L(i,0) &= L_n(f, h/2^i), \qquad i = 0, 1, \dots \\
L(i,j) &= \frac{2^j L(i,j-1) - L(i-1,j-1)}{2^j - 1}, \quad i,j \in \{0,1,\dots\}, \quad j \leqslant i
\end{aligned}
$$

De esta forma, podemos aproximar la integral de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(N,N)$$

donde N es el número de pasos que hemos dado.