Foto: José Juan Castro

Álgebra II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

En Álgebra I el objeto principal de estudio fueron los anillos conmutativos, conjuntos en los que teníamos definidas dos operaciones, una usualmente denotada con notación aditiva y otra con notación multiplicativa.

Posteriormente, el estudio se centró en los dominios de integridad (DI), anillos conmutativos donde teníamos más propiedades con las que manejar nuestros elementos (como la tan característica propiedad cancelativa). Después, el objeto de estudio fueron los dominios euclídeos (DE), donde ya podíamos realizar un estudio sobre la divisibilidad de los elementos del conjunto.

Finalmente, nos centramos en los dominios de factorización única (DFU), donde realizamos una breve introducción a la irreducibilidad de los polinomios.

En esta asignatura el principal objeto de estudio serán los grupos, conjuntos en los que hay definida una sola operación que entendemos por "buena[1]". Por tanto, los grupos serán estructuras menos restrictivas que los anillos conmutativos, aunque su estudio no será menos interesante.

[1]La operación cumplirá ciertas propiedades deseables.

1. Grupos: definición, generalidades y ejemplos

Comenzamos realizando la primera definición necesaria para entender el concepto de grupo, que es entender qué es una operación dentro de un conjunto.

Definición 1.1 (Operación binaria)**.** Sea G un conjunto, una operación binaria en G es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

Ejemplo. Ejemplos de operaciones binarias sobre conjuntos que ya conocemos son:

1. La suma y el producto de números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$

2. Dado un conjunto X, los operadores $\cap$ y $\cup$ son operaciones binarias sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$.

Antes de dar la definición de grupo, daremos la de monoide, que es menos restrictiva que la de grupo.

Definición 1.2 (Monoide)**.** Un monoide es una tripleta $(G, *, e)$ donde G es un conjunto no vacío, $*$ es una operación binaria en G y e es un elemento destacado de G de forma que se verifica:

i) La propiedad asociativa de $*$:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad \forall x, y, z \in G$$

ii) La existencia de un elemento neutro (el elemento destacado de G):

$$\exists e \in G \mid e * x = x \qquad \forall x \in G$$

Observación. En un monoide, el elemento neutro es único.

Demostración. Sea $(G, *, e)$ un monoide y sea $f \in G$ tal que $f * x = x$ $\forall x \in G$: $\square$

Ejemplo. Ejemplos de monoides ya conocidos son:

1. $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$

2. Dado un conjunto X: $(\mathcal{P}(X), \cap, X)$, $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset)$

Definición 1.3 (grupo)**.** Un grupo es una tripleta $(G, *, e)$ donde G es un conjunto no vacío, $*$ es una operación binaria en G y e es un elemento destacado de G de forma que se verifica:

i) La propiedad asociativa de $*$:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad \forall x, y, z \in G$$

ii) La existencia de un elemento neutro (el elemento destacado de G):

$$\exists e \in G \mid e * x = x \qquad \forall x \in G$$

iii) La existencia de un elemento simétrico para cada elemento de G:

$$\forall x \in G \quad \exists x' \in G \mid x' * x = e$$

Si además se cumple:

iv) La propiedad conmutativa de $*$:

$$x * y = y * x \qquad \forall x, y \in G$$

Entonces, diremos que $(G, *, e)$ es un grupo conmutativo o abeliano.

Notación. Para una mayor comodidad a la hora de manejar grupos, introducimos las siguientes notaciones:

1. Cuando dado un conjunto no vacío G sepamos por el contexto a qué grupo $(G, *, e)$ nos estamos refiriendo, indicaremos simplemente G (o en algunos casos $(G, *)$, para hacer énfasis en la operación binaria) para referirnos al grupo $(G, *, e)$.

2. En algunos casos, usaremos (por comodidad) la notación multiplicativa de los grupos. De esta forma, dado un grupo $(G, \cdot, 1)$, en ciertos casos notaremos la operación binaria $\cdot$ simplemente por yuxtaposición:

$$x \cdot y = xy \qquad \forall x, y \in G$$

   Además, nos referiremos al elemento neutro como “uno” y al simétrico de cada elemento como “inverso”, sustituyendo la notación de x' por la de x^{-1}.

3. Otra notación que también usaremos (aunque de forma menos frecuente que la multiplicativa) será la aditiva. Dado un grupo $(G, +, 0)$, nos referiremos al elemento neutro como “cero” y al simétrico de cada elemento como “opuesto”, sustituyendo la notación de x' por la de $-x$.

Ejemplo. Ejemplos de grupos que se usarán con frecuencia en la asignatura son:

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con su respectiva suma son grupos abelianos.

2. $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ con su respectivo producto son grupos abelianos.

   Notemos la importancia de eliminar el 0 de cada conjunto para que todo elemento tenga inverso, así como que $\mathbb{Z}^*$ no es un grupo, ya que el inverso de cada elemento (para el producto al que estamos acostumbrados) no está dentro de $\mathbb{Z}^*$.

3. $\{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ con el producto heredado[1] de $\mathbb{C}$ también es un grupo abeliano.

4. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano.

5. El grupo lineal de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$:
$$GL_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : det(M) \neq 0\}$$
   con el producto heredado de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano.

6. $\mathbb{Z}_n$ con su suma es un grupo abeliano, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. $U(\mathbb{Z}_n) = \{[a] \in \mathbb{Z}_n \mid mcd(a, n) = 1\}$ con el producto es un grupo abeliano, $\forall n \in \mathbb{N}$.

8. Dado $n \geqslant 1$, consideramos:
$$\begin{aligned}\mu_n &= \{\text{raíces complejas de } x^n - 1\} = \left\{\xi_n = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right\} \\ &= \left\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1} : \xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right\}\end{aligned}$$
   Es un grupo abeliano con el producto heredado de $\mathbb{C}$.

9. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, el grupo lineal especial de orden 2 sobre dicho cuerpo:
$$SL_2(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : det(M) = 1\}$$
   Con el producto heredado de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ es un grupo que no es conmutativo.

10. Sean $(G, \Box, e), (H, \triangle, f)$ dos grupos, si consideramos sobre $G \times H$ la operación binaria $* : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$ dada por:
$$(x, u) * (y, v) = (x \Box y, u \triangle v) \qquad \forall (x, u), (y, v) \in G \times H$$
    Entonces, $G \times H$ es un grupo, al que llamaremos grupo directo de G y H.

11. Si X es un conjunto no vacío y consideramos
$$S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ biyectiva}\} = Perm(X)$$
    es un grupo no abeliano con la operación de composición de funciones $\circ$.

    En el caso en el que X sea finito y tenga n elementos: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, notaremos:
$$S_n = S(X)$$

[1] Será común hablar de "operación heredada" cuando consideramos un subconjunto de un conjunto en el que ya hay definida una operación interna, haciendo referencia a la restricción en dominio y recorrido de dicha operación interna al subconjunto considerado.

12. Sea $(G, *, e)$ un grupo y X un conjunto, consideramos el conjunto:

$$Apl(X, G) = G^X = \{f : X \to G \mid f \text{ aplicación}\}$$

junto con la operación binaria $* : G^X \times G^X \to G^X$ dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \qquad \forall x \in X, \quad \forall f, g \in G^X$$

Entonces, $(G^X, *, g)$ es un grupo, con elemento neutro:

$$g(x) = e \qquad \forall x \in X$$

de esta forma, dada $f \in G^X$, la aplicación simétrica de f será:

$$f'(x) = (f(x))' \qquad \forall x \in X$$

Casos a destacar son:

   a) Si $X = \emptyset$, entonces $G^X = \{\emptyset\}$.
   b) Si $X = \{1, 2\}$, entonces G^X se identifica con $G \times G$.

13. El grupo más pequeño que se puede considerar es el único grupo válido sobre un conjunto unitario $X = \{e\}$. Es decir, el grupo $(X, *, e)$ con $X = \{e\}$ y $* : X \times X \to X$ dada por:

$$e * e = e \qquad e \in X$$

A este grupo (independientemente de cual sea el conjunto X, ya que todos tendrán la misma[2] estructura) lo llamaremos grupo trivial.

Propiedades

Aunque estas propiedades parezcan ya conocidas y familiares (por ejemplo para el caso $(\mathbb{Z}, +, 0)$), es una buena observación darnos cuenta de que son válidas para **cualquier grupo** que consideremos, por raros y difíciles que sean sus elementos y operación interna.

Proposición 1.1. *Sea $(G, *, e)$ un grupo, destacamos sus primeras propiedades:*

i) $x * x' = e \ \forall x \in G$.

ii) $x * e = x \ \forall x \in G$.

iii) *El elemento neutro de $*$ es único. Simbólicamente:*

$$\exists_1 e \in G \mid e * x = x \qquad \forall x \in G$$

iv) *Fijado $x \in G$, el simétrico de x es único. Simbólicamente:*

$$\forall x \in G \quad \exists_1 x' \in G \mid x' * x = e$$

[2]Concepto que luego formalizaremos.

Demostración. Demostramos cada una a partir de la anterior:

i) En primer lugar, observemos que:

$$x' * (x * x') = (x' * x) * x' = e * x' = x' \tag{1.1}$$

Ahora:

$$x * x' = e * (x * x') = \left((x')' * x'\right) * (x * x') = (x')' * (x' * (x * x')) \overset{(*)}{=} (x')' * x' = e$$

Donde en $(*)$ hemos usado (1.1).

ii) Usando *i*) en $(*)$:

$$x * e = x * (x' * x) = (x * x') * x \overset{(*)}{=} e * x = x$$

iii) Sea $f \in G$ de forma que $f * x = x \ \forall x \in G$, entonces:

$$f = f * e \overset{(*)}{=} e$$

Donde en $(*)$ hemos usado *ii*).

iv) Dado $x \in G$, sea $x'' \in G$ de forma que $x'' * x = x$, entonces:

$$x'' = x'' * e \overset{(*)}{=} x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$$

Donde en $(*)$ hemos usado *i*).

□

Proposición 1.2. *En un grupo G se verifica la propiedad cancelativa (tanto a la izquierda como a la derecha):*

$$\forall x, y, z \in G : \begin{cases} xy = xz \Longrightarrow y = z \\ xy = zy \Longrightarrow x = z \end{cases}$$

Demostración. Para la primera, supongamos que $xy = xz$:

$$y = ey = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = ez = z$$

□

Proposición 1.3. *Sea G un grupo, entones:*

1. $e^{-1} = e$.
2. $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, $\forall x \in G$.
3. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $\forall x, y \in G$.

Demostración. Cada caso se demuestra observando sencillamante:

1. $ee = e$.

2. $xx^{-1} = e$.
3. $(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}x^{-1}xy = y^{-1}ey = e$.

$\square$

Proposición 1.4. *Sea G un conjunto no vacío con una operación binaria $*$ asociativa, son equivalentes:*

i) *G es un grupo.*

ii) *Para cada par de elementos $a, b \in G$, las ecuaciones:*

$$aX = b \qquad Xa = b$$

Tienen solución en G ($\exists c, d \in G \mid ac = b \wedge da = b$).

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Tomando $c = a^{-1}b$ y $d = ba^{-1}$ se tiene.

$i) \Rightarrow ii)$

$\square$

2. Relaciones de Ejercicios

2.1. Grupos: generalidades y ejemplos

Ejercicio 2.1.1. Describir explícitamente la tabla de multiplicar de los grupos $\mathbb{Z}_n^\times$ para $n = 4$, $n = 6$ y $n = 8$, donde por $\mathbb{Z}_n^\times$ denotamos al grupo de las unidades del anillo $\mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 2.1.2. Describir explícitamente la tabla de multiplicar de los grupos $\mathbb{Z}_p^\times$ para $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$ y $p = 7$.

Ejercicio 2.1.3. Calcular el inverso de 7 en los grupos $\mathbb{Z}_{11}^\times$ y $\mathbb{Z}_{37}^\times$.

Ejercicio 2.1.4. Describir explícitamente los grupos μ_n (de raíces n-ésimas de la unidad) para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 8$, dando su tabla de multiplicar.

Ejercicio 2.1.5. En el conjunto $\mathbb{Q}^\times := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \neq 0\}$ de los números racionales no nulos, se considera la operación de división, dada por $(x, y) \mapsto {}^x/_y = xy^{-1}$. ¿Nos da esta operación una estructura de grupo en $\mathbb{Q}^\times$?

Ejercicio 2.1.6. Sea G un grupo en el que $x^2 = 1$ para todo $x \in G$. Demostrar que el grupo G es abeliano.

Ejercicio 2.1.7. Sea G un grupo. Demostrar que son equivalentes:

1. G es abeliano.
2. $\forall x, y \in G$ se verifica que $(xy)^2 = x^2y^2$.
3. $\forall x, y \in G$ se verifica que $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Ejercicio 2.1.8. Demostrar que si en un grupo G, $x, y \in G$ verifican que $xy = yx$ entonces, para todo $n \geqslant 1$, se tiene que $(xy)^n = x^ny^n$.

Ejercicio 2.1.9. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, demostrar que el conjunto de las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que $f(x) = ax + b$, es un grupo con la composición como ley de composición.

Ejercicio 2.1.10.

1. Demostrar que $|\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$, describiendo explícitamente todos los elementos que forman este grupo.
2. Sea $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que
$$\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_2) = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}.$$
3. Escribir, utilizando la representación anterior, la tabla de multiplicar de $\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Ejercicio 2.1.11. Dar las tablas de grupo para los grupos D_3, D_4, D_5 y D_6.

Ejercicio 2.1.12. Demostrar que el conjunto de rotaciones respecto al origen del plano euclídeo junto con el conjunto de simetrías respecto a las rectas que pasan por el origen, es un grupo.

Ejercicio 2.1.13. Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k$, $a^n = 1 = b^m$ con $n, m > 0$.

1. Demostrar que para todo $i = 0, \dots, m-1$ se verifica $b^i a = ab^{ik}$.
2. Demostrar que para todo $j = 0, \dots, n-1$ se verifica $ba^j = a^j b^{k^j}$.
3. Demostrar que para todo $i = 0, \dots, m-1$ y todo $j = 0, \dots, n-1$ se verifica $b^i a^j = a^j b^{ikj}$.
4. Demostrar que todo elemento de $\langle a, b \rangle$ puede escribirse como $a^r b^s$ con $0 \leqslant r < n$, $0 \leqslant s < m$.

Ejercicio 2.1.14. Sean $s_1, s_2 \in S_7$ las permutaciones dadas por

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcular los productos $s_1 s_2$, $s_2 s_1$ y s_2^2, y su representación como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 2.1.15. Dadas las permutaciones

$$p_1 = (1\ 3\ 2\ 8\ 5\ 9)(2\ 6\ 3), \qquad p_2 = (1\ 3\ 6)(2\ 5\ 3)(1\ 9\ 2\ 8\ 5),$$

hallar la descomposición de la permutación producto $p_1 p_2$ como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 2.1.16. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas en los ejercicios anteriores.

1. Descomponer la permutación $s_1 s_2 s_1 s_2$ como producto de ciclos disjuntos.
2. Expresar matricialmente la permutación $p_3 = p_2 p_1 p_2$ y obtener su descomposición como ciclos disjuntos.
3. Descomponer la permutación $s_2 p_2$ como producto de ciclos disjuntos y expresarla matricialmente.

Observación. Aquí tratamos a S_7 como un subgrupo de S_9, donde consideramos cada permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ como una permutación del conjunto $\{1, \dots, 9\}$ que deja fijos a los elementos 8 y 9.

Ejercicio 2.1.17. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas en los ejercicios anteriores.

1. Calcular el orden de la permutación producto $s_1 s_2$. ¿Coincide dicho orden con el producto de los órdenes de s_1 y s_2?
2. Calcular el orden de $s_1 (s_2)^{-1} (s_1)^{-1}$.
3. Calcular la permutación $(s_1)^{-1}$, y expresarla como producto de ciclos disjuntos.
4. Calcular la permutación $(p_1)^{-1}$ y expresarla matricialmente.

5. Calcular la permutación $p_2(s_2)^2(p_1)^{-1}$. ¿Cuál es su orden?

Ejercicio 2.1.18. Sean s_1, s_2, p_1 y p_2 las permutaciones dadas anteriormente. Sean también $s_3 = (2\ 4\ 6)$ y $s_4 = (1\ 2\ 7)(2\ 4\ 6\ 1)(5\ 3)$. ¿Cuál es la paridad de las permutaciones s_1, $s_4p_1p_2$ y p_2s_3?

Ejercicio 2.1.19. En el grupo S_3, se consideran las permutaciones $\sigma = (1\ 2\ 3)$ y $\tau = (1\ 2)$.

1. Demostrar que
$$S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}.$$
2. Reescribir la tabla de multiplicar de S_3 empleando la anterior expresión de los elementos de S_3.
3. Probar que
$$\sigma^3 = 1, \quad \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma = \sigma^2\tau.$$
4. Observar que es posible escribir toda la tabla de multiplicar de S_3 usando simplemente la descripción anterior y las relaciones anteriores.

Ejercicio 2.1.20. Describir los diferentes ciclos del grupo S_4. Expresar todos los elementos de S_4 como producto de ciclos disjuntos.

Ejercicio 2.1.21. Demostrar que el conjunto de transposiciones
$$\{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\}$$
genera al grupo simétrico S_n.

Ejercicio 2.1.22. Demostrar que el conjunto $\{(1,2,\ldots,n),(1,2)\}$ genera al grupo simétrico S_n.

Ejercicio 2.1.23. Demostrar que para cualquier permutación $\alpha \in S_n$ se verifica que $s(\alpha) = s(\alpha^{-1})$, donde s denota la signatura, o paridad, de una permutación.

Ejercicio 2.1.24. Demostrar que si $(x_1x_2\cdots x_r) \in S_n$ es un ciclo de longitud r, entonces
$$s(x_1x_2\cdots x_r) = (-1)^{r-1}.$$

Ejercicio 2.1.25. Encontrar un isomorfismo $\mu_2 \cong \mathbb{Z}_3^\times$.

Ejercicio 2.1.26.

1. Demostrar que la aplicación
$$1 \mapsto 1, \qquad -1 \mapsto 4, \qquad i \mapsto 2, \qquad -i \mapsto 3,$$
da un isomorfismo entre el grupo μ_4 de las raíces cuárticas de la unidad y el grupo $\mathbb{Z}_5^\times$ de las unidades en $\mathbb{Z}_5$.
2. Encontrar otro isomorfismo entre estos dos grupos que sea distinto del anterior.

Ejercicio 2.1.27. Encontrar un isomorfismo $\mu_2 \times \mu_2 \cong \mathbb{Z}_8^\times$.

Ejercicio 2.1.28. Demostrar, haciendo uso de las representaciones conocidas, que $D_3 \cong S_3 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Ejercicio 2.1.29. Sea K un cuerpo y considérese la operación binaria

$$\begin{array}{rrcl} \otimes : & K \times K & \longrightarrow & K \\ & (a,b) & \longmapsto & a \otimes b = a + b - ab. \end{array}$$

Demostrar que $(K - \{1\}, \otimes)$ es un grupo isomorfo al grupo multiplicativo K^*.

Ejercicio 2.1.30.

1. Probar que si $f : G \cong G'$ es un isomorfismo de grupos, entonces $o(a) = o(f(a))$, para todo elemento $a \in G$.

2. Listar los órdenes de los diferentes elementos del grupo Q_2 y del grupo D_4 y concluir que D_4 y Q_2 no son isomorfos.

Ejercicio 2.1.31. Calcular el orden de:

1. la permutación $\sigma = (1\ 8\ 10\ 4\ 5\ 9)(2\ 6\ 3) \in S_{15}$.

2. cada elemento del grupo $\mathbb{Z}_{11}^{\times}$.

Ejercicio 2.1.32. Demostrar que un grupo generado por dos elementos distintos de orden dos, que conmutan entre sí, consiste del 1, de esos elementos y de su producto y es isomorfo al grupo de Klein.

Ejercicio 2.1.33. Sea G un grupo y sean $a, b \in G$.

1. Demostrar que $o(b) = o(aba^{-1})$ (un elemento y su conjugado tienen el mismo orden).

2. Demostrar que $o(ba) = o(ab)$.

Ejercicio 2.1.34. Sea G un grupo y sean $a, b \in G$, $a \neq 1 \neq b$, tales que $a^2 = 1$ y $ab^2 = b^3a$. Demostrar que $o(a) = 2$ y que $o(b) = 5$.

Ejercicio 2.1.35. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

1. $f(x^n) = f(x)^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. Si f es un isomorfismo entonces G y H tienen el mismo número de elementos de orden n. ¿Es cierto el resultado si f es sólo un homomorfismo?

3. Si f es un isomorfismo entonces G es abeliano $\Leftrightarrow$ H es abeliano.

Ejercicio 2.1.36.

1. Demostrar que los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^*$ (de los reales no nulos) y $\mathbb{C}^*$ (de los complejos no nulos) no son isomorfos.

2. Demostrar que los grupos aditivos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son isomorfos.

Ejercicio 2.1.37. Sea G un grupo. Demostrar:

1. G es abeliano $\iff$ la aplicación $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^{-1}$ es un homomorfismo de grupos.
2. G es abeliano $\iff$ la aplicación $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^2$ es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 2.1.38. Si G es un grupo cíclico demostrar que cualquier homomorfismo de grupos $f : G \to H$ está determinado por la imagen del generador.

Ejercicio 2.1.39. Demostrar que no existe ningún cuerpo K tal que sus grupos aditivo $(K, +)$ y $(K^*, \cdot)$ sean isomorfos.