

Álgebra II

Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra II

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Aurora del Río Cabeza.

Descripción Parcial I.

Fecha 26 de marzo del 2025.

Duración Dos partes de 45 minutos.

Ejercicio 1 (5 puntos). Responda **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las siguientes cuestiones, junto con una breve justificación de la respuesta (todo grafo mencionado es simple: sin lazos ni lados paralelos).

1. Todo grafo tiene dos vértices con el mismo grado.
2. Todo grafo bipartido completo tiene dos componentes conexas no vacías.
3. Sea $f : G \rightarrow H$ un monomorfismo de grupos con H un grupo abeliano, entonces G es abeliano.
4. Sean $H_1, H_2 < G$ dos subgrupos con $|H_1|$ y $|H_2|$ primos relativos, entonces $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.
5. Sean $H, K < G$ dos subgrupos, entonces HK es un subgrupo de G .
6. Si dos grupos tienen dos subgrupos propios isomorfos, entonces los grupos son isomorfos.
7. En un grupo cíclico, todo elemento que no es el neutro es un generador.
8. Sea $f : G \rightarrow G$ con G un grupo y $x \in G$, la aplicación $f_x(y) = xyx^{-1}$ es un automorfismo.
9. Sea G un grupo y $H \subseteq G$, si H es cerrado para la operación de G , entonces H es un subgrupo de G .
10. Si en un grupo G , $a = a^{-1}$, entonces a es el elemento neutro del grupo.

Ejercicio 2 (5 puntos). Fue el ejercicio 41 de la relación 1 (la de grafos).

Ejercicio 1. Contestamos a cada pregunta, razonando la respuesta:

1. Todo grafo tiene dos vértices con el mismo grado.

Verdadero. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, los vértices de G pueden tomar los grados del conjunto $GR(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sin embargo, si un vértice se conecta con todos los demás (es decir, tiene grado $n-1$), entonces no podrá haber vértices de grado 0; y viceversa: si un vértice tiene grado 0 (no se conecta con ningún otro), entonces no podrá haber vértices de grado $n-1$. Por tanto, tendremos que:

$$|\{gr(u) \mid u \in V\}| < n$$

Por el Lema del Palomar, como cada vértice tiene que tener un grado (tenemos n vértices y $n-1$ grados posibles), concluimos que $\exists u, v \in G$ con $gr(u) = gr(v)$.

2. Todo grafo bipartido completo tiene dos componentes conexas no vacías.

Falso. Por ejemplo, $K_{2,2}$ es un grafo bipartido completo pero solo tiene una componente conexas (ya que es conexo), tal y como vemos en la Figura 1.

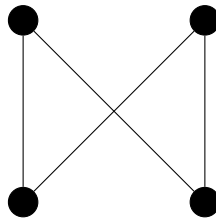


Figura 1: Grafo $K_{2,2}$.

3. Sea $f : G \rightarrow H$ un monomorfismo de grupos con H un grupo abeliano, entonces G es abeliano.

Verdadero. Sean $a, b \in G$:

$$f(ab) = f(a)f(b) = f(b)f(a) = f(ba) \implies ab = ba$$

4. Sean $H_1, H_2 < G$ dos subgrupos con $|H_1|$ y $|H_2|$ primos relativos, entonces $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Verdadero. Veamos las dos inclusiones:

\supseteq) Como H_1 y H_2 son subgrupos, tenemos que $1 \in H_1 \cap H_2$.

\subseteq) Sea $x \in H_1 \cap H_2$, entonces $x \in H_1$ y $x \in H_2$, con lo que:

$$\left. \begin{array}{l} O(x) \mid |H_1| \\ O(x) \mid |H_2| \\ mcd(|H_1|, |H_2|) = 1 \end{array} \right\} \implies O(x) = 1$$

5. Sean $H, K < G$ dos subgrupos, entonces HK es un subgrupo de G .

Falso. Por ejemplo, en S_3 consideramos:

$$H = \langle (1\ 2) \rangle = \{1, (1\ 2)\} < S_3$$

$$K = \langle (1\ 3) \rangle = \{1, (1\ 3)\} < S_3$$

Como:

$$(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

Tenemos que:

$$HK = \{1 \cdot 1, 1 \cdot (1\ 3), (1\ 2) \cdot 1, (1\ 2)(1\ 3)\} = \{1, (1\ 3), (1\ 2), (1\ 3\ 2)\}$$

Que claramente no es un subgrupo de S_3 , ya que $(1\ 3\ 2)^{-1} = (1\ 2\ 3) \notin HK$.

6. Si dos grupos tienen dos subgrupos propios isomorfos, entonces los grupos son isomorfos.

Falso. Por ejemplo, si consideramos V , el grupo de Klein y S_3 , tenemos que:

$$H = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle = \{1, (1\ 2)(3\ 4)\} < V$$

$$K = \langle s \rangle = \{1, s\} < S_2$$

Son isomorfos, basta considerar $f : H \rightarrow K$ de forma que:

$$1 \mapsto 1$$

$$(1\ 2)(3\ 4) \mapsto s$$

Para tener el isomorfismo, pero V y S_3 no son isomorfos, ya que:

$$|V| = 4 \neq 6 = |S_3|$$

7. En un grupo cíclico, todo elemento que no es el neutro es un generador.

Falso. Por ejemplo, en:

$$C_4 = \langle x \mid x^4 = 1 \rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$$

Tenemos que $1 \neq x^2 \in C_4$, con:

$$\langle x^2 \rangle = \{1, x^2\} \neq C_4$$

8. Sea $f : G \rightarrow G$ con G un grupo y $x \in G$, la aplicación $f_x(y) = xyx^{-1}$ es un automorfismo.

Verdadero. Vemos que su dominio coincide con su codominio. Veamos que es un isomorfismo:

- Para ver que es un homomorfismo:

$$f_x(yz) = xyzx^{-1} = xyx^{-1}xzx^{-1} = f_x(y)f_x(z) \quad \forall y, z \in G$$

- Para ver que es inyectiva, sean $y, z \in G$ de forma que:

$$f_x(y) = xyx^{-1} = xzx^{-1} = f_x(z)$$

Entonces, aplicando dos veces la propiedad cancelativa, tenemos que:

$$xyx^{-1} = xzx^{-1} \implies xy = xz \implies y = z$$

- Para ver que es sobreyectiva, sea $y \in G$, tomamos:

$$z = x^{-1}yx$$

Y tenemos que:

$$f_x(z) = f_x(x^{-1}yx) = xx^{-1}yxx^{-1} = y$$

Concluimos que f_x es un automorfismo.

9. Sea G un grupo y $H \subseteq G$, si H es cerrado para la operación de G , entonces H es un subgrupo de G .

Falso. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo y $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto de forma que:

$$m + n \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Es decir, que es cerrado para la suma de \mathbb{Z} . Sin embargo, \mathbb{N} no es un grupo, por no ser cerrado para opuestos.

10. Si en un grupo G , $a = a^{-1}$, entonces a es el elemento neutro del grupo.

Falso. Por ejemplo, en S_3 tenemos que $s \in S_3$ con $s^{-1} = s$ pero $s \neq 1$.