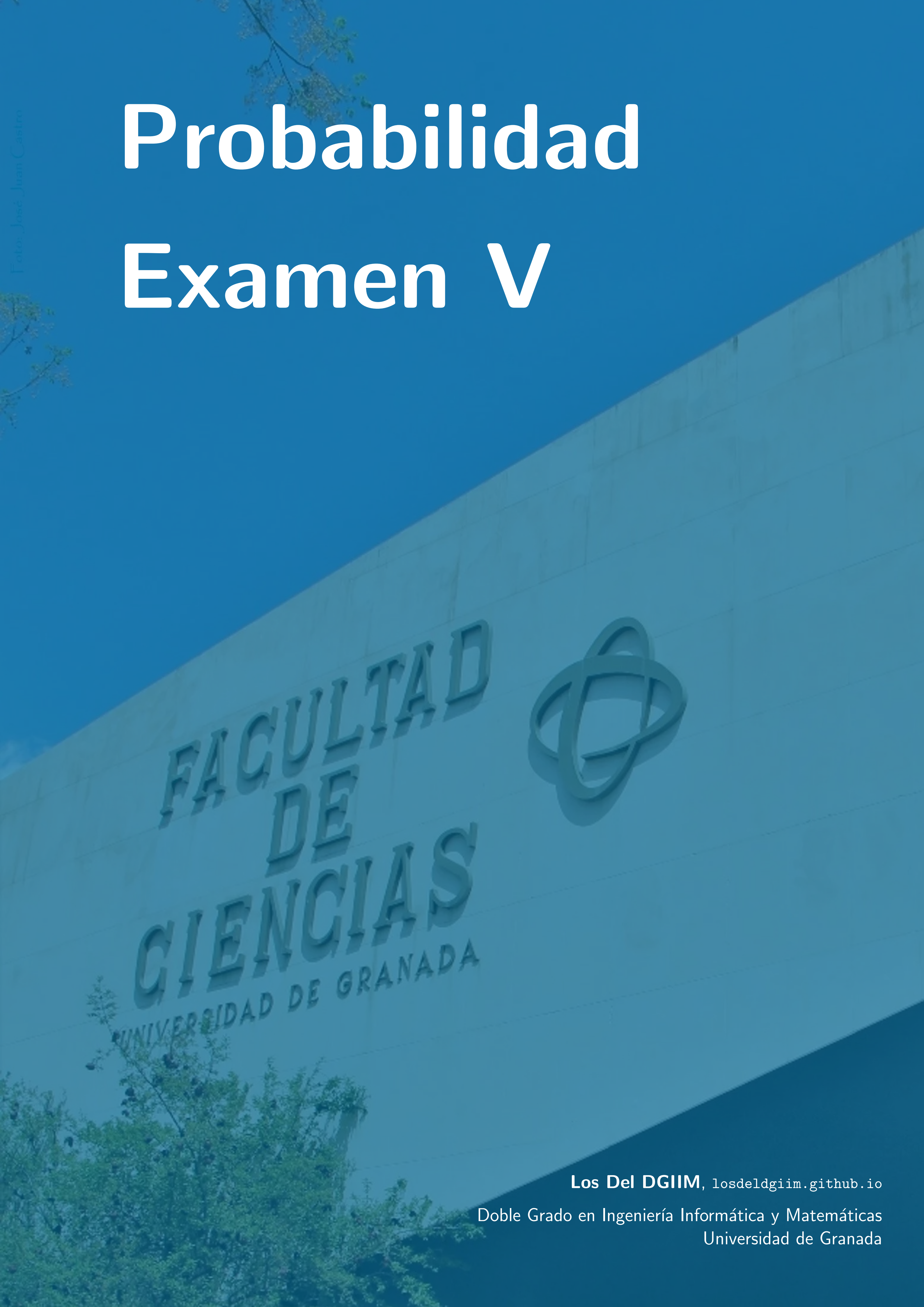

Foto: José Juan Castro

Probabilidad
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Ordinario

Fecha 21 de enero de 2022.

PARTE 1 (2.5 puntos)

Ejercicio 1 (0.25 puntos)**.** Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, 1/2)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \frac{9}{2^9}$.

Ejercicio 2 (0.25 puntos)**.** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 > 0] = \frac{e^6-1}{e^6}$.

Ejercicio 3. Para predecir los valores de una variable aleatoria X a partir de los de otra variable aleatoria Y se considera un modelo lineal:

a) **(0.50 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal considerado.

b) **(0.75 puntos)** Si $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$ son las dos rectas de regresión para el vector (X, Y), se pide: identificar la recta de regresión del apartado anterior; obtener una medida de la bondad del ajuste y calcular la esperanza del vector (X, Y).

Ejercicio 4 (0.75 puntos)**.** Las componentes de un vector aleatorio continuo son variables aleatorias contin- uas. Sin embargo, en general, un conjunto de variables aleatorias continuas no da lugar a un vector aleatorio continuo. Justificar que este recíproco sí es cierto si consideramos un conjunto X_1, X_2, ..., X_n de variables aleatorias continuas independientes.

PARTE 2 (7.5 puntos)

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio continuo (X, Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ x, y < 0\}$$

a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribuición de probabilidad conjunta.

c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

d) **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X - Y > 0$.

e) **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximaión mínimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.

f) **(0.50 puntos)** Obtener una media de la bondad del ajuste del apartado anterior.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio (X, Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = exp\left(\frac{2t_1 + 4t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$

a) **(0.75 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X, Y).

b) **(0.75 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y/X = 1$ y $X/Y = 0$.

c) **(1 punto)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y-X)$. Justificar que las variabes aleatorias $2X$ y $Y - X$ tienen cierta asociación lineal en sentido negativo.

Observación. A tener en cuenta:

- En el **apartado 1.b** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \sin(t)$.
- $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.