

Lógica y Métodos Discretos



*Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación*

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Problemas de sesiones prácticas	5

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. \square

Ejercicio 1.1.2. Demuestre que para todo número natural n :

$$\left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■ $n = 0$:

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■ $n = 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■ $n > 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n , $P(n)$ se tiene, como se pedía. \square

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n , usar una verdad como $n - k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n + 1$.

Ejemplo (Segundo principio de inducción). Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

“ n tiene un factor primo”

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- n no es primo: Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v < n$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p . Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$. \square

Notemos que Siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Observación. No conviene usar en el metalenguaje símbolos del lenguaje.

Ejemplo (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$

$$p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b , $p(a, b) = ab$.

Observación. Notemos que esta función pasa a binario b y almacena en a tantos "2" como el popcount de b .

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio y el predicado del tenor:

"Para todo número natural m , $p(m, n) = mn$."

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leq k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

$n = 0$, sea cual sea m

$$p(a, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego $P(0)$ vale.

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale.

Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:

1. $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n}{2} < n$.

2. $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{aligned} gp(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m = \left(2m \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n , vale $P(n)$. \square

Ejercicio 1.1.4. Estime un valor de n para el que

$$100^n < n!$$