

# Álgebra I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Álgebra I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo OlivaresMartos

Granada, 2023-2024

## Índice

<b>1. Cuestionarios</b>	<b>4</b>
1.1. Cuestionario I . . . . .	4
1.2. Cuestionario II . . . . .	7
1.3. Cuestionario III . . . . .	11
1.4. Cuestionario IV . . . . .	14
1.5. Cuestionario V . . . . .	17
1.6. Cuestionario VI . . . . .	21
1.7. Cuestionario VII . . . . .	24
1.8. Cuestionario VIII . . . . .	29
<b>2. Relaciones de ejercicios</b>	<b>33</b>
2.1. Relación I . . . . .	33
2.2. Relación II . . . . .	36
2.3. Relación III . . . . .	38
2.4. Relación IV . . . . .	40

# 1. Cuestionarios

## 1.1. Cuestionario I

**Ejercicio 1.** Si  $A$  es un conjunto finito arbitrario, la afirmación “ $|P(A)| > |A|$ ” es:

- Siempre verdadera.
- Verdadera o falsa, depende de  $A$ .
- Siempre falsa.

**Ejercicio 2.** Si  $A, B, C$  son conjuntos cualesquiera con  $B$  y  $C$  disjuntos, selecciona la afirmación verdadera:

- $(A \cup B) \cap C = A$ .
- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$ .
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A$ .

**Ejercicio 3.** Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de un conjunto, la afirmación “ $c(A) \cap c(B) = c(A \cap B)$ ” es:

- Siempre cierta.
- Siempre falsa.
- A veces verdadera y a veces falsa, depende de  $A$  y  $B$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $P$  y  $Q$  las propiedades referidas a los elementos de un conjunto. Las proposiciones  $P \Rightarrow \neg Q$  y  $Q \Rightarrow \neg P$  son:

- Siempre equivalentes.
- Nunca equivalentes.
- A veces equivalentes y a veces no, depende de  $P$  y de  $Q$ .

**Ejercicio 5.** Sean  $P, Q$  y  $R$  propiedades referidas a los elementos de un conjunto tal que  $P \Rightarrow Q \vee R$ , entonces (seleccionar la afirmación correcta):

- $P \Rightarrow Q$  y  $P \Rightarrow R$ .
- $P \Rightarrow Q$  o  $P \Rightarrow R$ .
- $P \Rightarrow Q$  siempre que  $R \Rightarrow Q$ .

**Ejercicio 1.** Si  $A$  es un conjunto finito arbitrario, la afirmación “ $|P(A)| > |A|$ ” es:

- Siempre verdadera.
- Verdadera o falsa, depende de  $A$ .
- Siempre falsa.

**Justificación:** Si  $A = \emptyset$ , entonces  $P(A) = \{\emptyset\}$  y  $|P(A)| = 1 > 0 = |A|$ .

Si  $A \neq \emptyset$ , entonces  $P(A)$  contiene a todos los subconjuntos unitarios  $\{a\}$ , con  $a \in A$  (luego, el cardinal de  $P(A)$  es, como mínimo, igual al de  $|A|$ ) y, además, contiene el subconjunto vacío, luego tiene al menos tantos elementos como  $A$  más uno.

Otra alternativa es usar la fórmula vista para el cardinal del conjunto potencia de un conjunto finito vista en teoría:

Sea  $A$  un conjunto finito arbitrario con  $|A| = n \in \mathbb{N}$ , entonces  $|P(A)| = 2^n$ .

Notemos que  $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 2.** Si  $A, B, C$  son conjuntos cualesquiera con  $B$  y  $C$  disjuntos, selecciona la afirmación verdadera:

- $(A \cup B) \cap C = A$ .
- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$ .
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A$ .

**Justificación:**

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A$$

**Ejercicio 3.** Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de un conjunto, la afirmación “ $c(A) \cap c(B) = c(A \cap B)$ ” es:

- Siempre cierta.
- Siempre falsa.
- A veces verdadera y a veces falsa, depende de  $A$  y  $B$ .

**Justificación:** Por las Leyes de Morgan:  $c(A \cap B) = c(A) \cup c(B)$ , por lo que podemos intuir que la afirmación no siempre es cierta. Podemos dar un contraejemplo para ilustrarlo:

Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\} \subseteq X$ :

$$c(A) = B \quad c(B) = A \quad c(A \cap B) = c(\emptyset) = X \neq c(A) \cap c(B) = \emptyset$$

Además, como no impone nada sobre los conjuntos, podemos ver que si  $A = B$ , es cierta la afirmación. Supongamos que  $A = B$ :

$$c(A \cap B) = c(A \cap A) = c(A) = c(A) \cup c(A) = c(A) \cup c(B)$$

**Ejercicio 4.** Sean  $P$  y  $Q$  las propiedades referidas a los elementos de un conjunto. Las proposiciones  $P \Rightarrow \neg Q$  y  $Q \Rightarrow \neg P$  son:

- Siempre equivalentes.
- Nunca equivalentes.
- A veces equivalentes y a veces no, depende de  $P$  y de  $Q$ .

**Justificación:**  $Q \Rightarrow \neg P$  es el contrarrecíproco de  $P \Rightarrow \neg Q$ .

Demostremos que  $(Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$ :

O, equivalentemente, que  $X_Q \subseteq c(X_P) \Leftrightarrow X_P \subseteq c(X_Q)$ .

$\Rightarrow$ ) Sea  $x \in X_P \Rightarrow x \notin c(X_P) \Rightarrow x \notin X_Q \Rightarrow x \in c(X_Q)$   
Para todo  $x \in X_P$ , luego  $X_P \subseteq c(X_Q)$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $x \in X_Q \Rightarrow x \notin c(X_Q) \Rightarrow x \notin X_P \Rightarrow x \in c(X_P)$   
Para todo  $x \in X_Q$ , luego  $X_Q \subseteq c(X_P)$ .

**Ejercicio 5.** Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  propiedades referidas a los elementos de un conjunto tal que  $P \Rightarrow Q \vee R$ , entonces (seleccionar la afirmación correcta):

- $P \Rightarrow Q$  y  $P \Rightarrow R$ .
- $P \Rightarrow Q$  o  $P \Rightarrow R$ .
- $P \Rightarrow Q$  siempre que  $R \Rightarrow Q$ .

**Justificación:** Por hipótesis,  $X_P \subseteq X_Q \cup X_R$ .

Si  $X_R \subseteq X_Q \Rightarrow X_P \subseteq X_Q = X_Q \cup X_R$ .

## 1.2. Cuestionario II

**Ejercicio 1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos finitos con  $|X| = |Y|$  y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. La afirmación “Si  $f$  es inyectiva o sobreyectiva, entonces  $f$  es biyectiva” es:

- Verdadera o falsa, depende de  $f$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Ejercicio 2.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación inyectiva y sean  $A, B \subseteq X$ . Selecciona la afirmación verdadera:

- $f_*(A) - f_*(B)$  es un subconjunto propio de  $f_*(A - B)$ .
- $f_*(A - B)$  es un subconjunto propio de  $f_*(A) - f_*(B)$ .
- $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación tal que  $f_*(c(A)) = c(f_*(A))$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Entonces:

- $f$  es inyectiva, pero no necesariamente sobreyectiva.
- $f$  es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva.
- $f$  es biyectiva.

**Ejercicio 4.** Sea  $X$  un conjunto con  $|X| \geq 2$ . La afirmación “Todo subconjunto de  $X \times X$  es de la forma  $A \times B$  para ciertos subconjuntos  $A, B \subseteq X$ ” es:

- Verdadera o falsa, depende de  $X$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Ejercicio 5.** Sea  $R$  una relación simétrica y transitiva en un conjunto  $X \neq \emptyset$ . ¿Prueba el siguiente razonamiento que  $R$  es reflexiva?:

“Por simetría,  $aRb$  implica  $bRa$  y entonces, por transitividad, concluimos que  $aRa$ ”.

- Sí.
- No.

**Ejercicio 1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos finitos con  $|X| = |Y|$  y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. La afirmación “Si  $f$  es inyectiva o sobreyectiva, entonces  $f$  es biyectiva” es:

- Verdadera o falsa, depende de  $f$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Justificación:** Si  $f$  es inyectiva, entonces  $|X| = |\text{Img}(f)|$ , luego  $|\text{Img}(f)| = |Y|$  y por tanto,  $\text{Img}(f) = Y$  y  $f$  es sobreyectiva luego biyectiva. Si  $f$  es sobreyectiva, entonces  $|Y| = |\text{Img}(f)|$ , luego  $|\text{Img}(f)| = |X|$  y por tanto,  $f$  es necesariamente inyectiva luego biyectiva.

**Ejercicio 2.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación inyectiva y sean  $A, B \subseteq X$ . Selecciona la afirmación verdadera:

- $f_*(A) - f_*(B)$  es un subconjunto propio de  $f_*(A - B)$ .
- $f_*(A - B)$  es un subconjunto propio de  $f_*(A) - f_*(B)$ .
- $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$ .

**Justificación:** Empezamos recordando la definición de  $f_*(A)$  para  $A \subseteq X$ :

$$f_*(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

$\subseteq$ ) Sea  $y \in f_*(A - B) \Rightarrow \exists x \in A - B \mid y = f(x)$ .

Esto es,  $\exists x \in A \wedge x \notin B \mid y = f(x)$ .

Como  $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f_*(A)$ . Además, por ser  $f$  inyectiva, se tiene que  $y \notin f_*(B)$ , ya que si suponemos que  $y \in f_*(B)$ :

$y \in f_*(B) \Rightarrow \exists b \in B \mid y = f(b) \Rightarrow f(x) = f(b)$  con lo que  $x = b \in B$ , en contradicción con que  $x \notin B$ .

Así,  $y \in f_*(A) - f_*(B)$  para todo  $y \in f_*(A - B)$ . Luego:

$$f_*(A - B) \subseteq f_*(A) - f_*(B)$$

$\supseteq$ ) Sea  $y \in f_*(A) - f_*(B) \Rightarrow y \in f_*(A) \wedge y \notin f_*(B)$ .

Como  $y \in f_*(A) \Rightarrow \exists x \in A \mid y = f(x)$ .

Como  $y \notin f_*(B) \Rightarrow x \notin B$ .

Luego  $x \in A - B \Rightarrow y = f(x) \in f_*(A - B)$  para todo  $y \in f_*(A) - f_*(B)$ .

Luego:

$$f_*(A) - f_*(B) \subseteq f_*(A - B)$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación tal que  $f_*(c(A)) = c(f_*(A))$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Entonces:

- $f$  es inyectiva, pero no necesariamente sobreyectiva.



- $f$  es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva.
- $f$  es biyectiva.

**Justificación:** Procedemos a demostrar la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación.

Para la sobreyectividad, consideramos  $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ :

$$f_*(c(\emptyset)) = f_*(X) = \text{Img}(f) = c(f_*(\emptyset)) = c(\emptyset) = X$$

Para la inyectividad, podemos suponer sin perder generalidad que  $|X| \geq 2$  (si no lo fuera, la aplicación sería automáticamente inyectiva).

Sean  $x, x' \in X \mid x \neq x'$ . Entonces,  $x' \in c(\{x\})$  luego:

$$f(x') \in f_*(c(\{x\})) = c(\{f(x)\})$$

Luego  $f(x') \neq f(x)$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $X$  un conjunto con  $|X| \geq 2$ . La afirmación “Todo subconjunto de  $X \times X$  es de la forma  $A \times B$  para ciertos subconjuntos  $A, B \subseteq X$ ” es:

- Verdadera o falsa, depende de  $X$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Justificación:** Supongamos que sí y consideremos el siguiente conjunto:

Sea  $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ .

Si  $D = A \times B$  para ciertos  $A, B \subseteq X$ , entonces para todo  $x \in X$ ,  $(x, x) \in A \times B$  y, por tanto,  $x \in A$  y  $x \in B$ .

Así que  $A = X = B$  y, necesariamente,  $D = X \times X$ . Pero  $|X| \geq 2$ , luego existen  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ , esto es,  $(a, b) \notin D$  y  $D \neq X \times X$ .

Lo que nos lleva a contradicción.

**Ejercicio 5.** Sea  $R$  una relación simétrica y transitiva en un conjunto  $X \neq \emptyset$ . ¿Prueba el siguiente razonamiento que  $R$  es reflexiva?:

“Por simetría,  $aRb$  implica  $bRa$  y entonces, por transitividad, concluimos que  $aRa$ ”.

- Sí.
- No.

**Justificación:** Dado un  $a \in X$ , no tiene por qué existir a priori un elemento  $b \in X$  tal que  $aRb$ . Por tanto, buscamos un contraejemplo para desmentir la afirmación:

Dado  $X = \{a, b, c\} \neq \emptyset$  y la relación  $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (a, a)\} \subseteq X \times X$ .

Observemos que  $R$  es simétrica y transitiva pero no reflexiva:

Es simétrica ya que para todos  $\alpha, \beta \in X \mid \alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha$ :

Ya que  $aRb$ , ¿se cumple que  $bRa$ ?. Sí.  
 Ya que  $bRa$ , ¿se cumple que  $aRb$ ?. Sí.  
 Ya que  $bRb$ , ¿se cumple que  $bRb$ ?. Sí.  
 Ya que  $aRa$ , ¿se cumple que  $aRa$ ?. Sí.

Es transitiva ya que para todos  $\alpha, \beta, \gamma \in X \mid \alpha R \beta \wedge \beta R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma$ :

Ya que  $aRb$  y  $bRa$ , ¿se cumple que  $aRa$ ?. Sí.

Ya que  $bRa$  y  $aRb$ , ¿se cumple que  $bRb$ ?. Sí.

Ya que  $bRb$  y  $bRb$ , ¿se cumple que  $bRb$ ?. Sí.

Ya que  $aRa$  y  $aRa$ , ¿se cumple que  $aRa$ ?. Sí.

No es reflexiva, ya que  $\exists c \in X \mid c \not R c$ .

### 1.3. Cuestionario III

**Ejercicio 1.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Definimos en  $\mathcal{P}(X)$  operaciones de suma y producto por  $A + B = A \cup B$  y  $A \cdot B = A \cap B$ . Entonces (selecciona la respuesta correcta).

- $\mathcal{P}(X)$  es un anillo conmutativo.
- $\mathcal{P}(X)$  no es un anillo conmutativo, falla un axioma.
- $\mathcal{P}(X)$  no es un anillo conmutativo, fallan dos axiomas.

**Ejercicio 2.** Para enteros  $m$  y  $n$  tales que  $2 \leq m < n$ , la afirmación “ $\mathbb{Z}_m$  es un subanillo de  $\mathbb{Z}_n$ ” es:

- Verdadera o falsa, dependiendo de  $m$  y de  $n$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Ejercicio 3.** En el anillo  $\mathbb{Z}_8$  (selecciona la afirmación verdadera).

- 3 es una unidad y  $4 \cdot 3^{-1} = 4$ .
- 3 es una unidad, pero  $4 \cdot 3^{-1} \neq 4$ .
- 3 no es una unidad.

**Ejercicio 4.** En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ , la afirmación “ $(7 + 4\sqrt{3})^n$  es una unidad para todo natural  $n \geq 1$ ” es:

- Verdadera o falsa, dependiendo de  $n$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Ejercicio 5.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un subanillo. La afirmación “ $\mathbb{Z}$  es un subanillo de  $A$ ” es:

- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.
- Verdadera o falsa, dependiendo de  $A$ .

**Ejercicio 1.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Definimos en  $\mathcal{P}(X)$  operaciones de suma y producto por  $A + B = A \cup B$  y  $A \cdot B = A \cap B$ . Entonces (selecciona la respuesta correcta).

- $\mathcal{P}(X)$  es un anillo conmutativo.
- $\mathcal{P}(X)$  no es un anillo conmutativo, falla un axioma.
- $\mathcal{P}(X)$  no es un anillo conmutativo, fallan dos axiomas.

**Justificación:** En este caso,  $0 = \emptyset$ , ya que:

$$\emptyset + A = \emptyset \cup A = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

Y no hay opuestos, sea  $A \neq \emptyset \in \mathcal{P}(X)$ :

$$A + B = A \cup B \supseteq A \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{P}(X)$$

Podemos ver que el resto de axiomas se cumplen:

- Conmutativa de la suma:

$$A + B = A \cup B = B \cup A = B + A \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$$

- Asociativa de la suma:

$$A + (B + C) = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$$

- Elemento neutro de la suma (ya demostrado).
- Existencia de opuestos (ya se ha visto que no se cumple).
- Conmutativa del producto:

$$A \cdot B = A \cap B = B \cap A = B \cdot A \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$$

- Asociativa del producto:

$$A \cdot (B \cdot C) = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cdot B) \cdot C \quad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$$

- Elemento neutro del producto:

$$A \cdot X = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

- Distributiva del producto respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$$

**Ejercicio 2.** Para enteros  $m$  y  $n$  tales que  $2 \leq m < n$ , la afirmación “ $\mathbb{Z}_m$  es un subanillo de  $\mathbb{Z}_n$ ” es:

- Verdadera o falsa, dependiendo de  $m$  y de  $n$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Justificación:** En  $\mathbb{Z}_m$ , se tiene que  $m = 0$ .

Sin embargo, por ser  $2 \leq m < n$ , tenemos que  $m \neq 0$  en  $\mathbb{Z}_n$ .

**Ejercicio 3.** En el anillo  $\mathbb{Z}_8$  (seleccion la afirmación verdadera).

- 3 es una unidad y  $4 \cdot 3^{-1} = 4$ .
- 3 es una unidad, pero  $4 \cdot 3^{-1} \neq 4$ .
- 3 no es una unidad.

**Justificación:** 3 es una unidad ya que  $3 \cdot 3 = 9 = 1$ , luego  $3^{-1} = 3$ .

Entonces,  $4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 3 = 12 = 4$ .

**Ejercicio 4.** En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ , la afirmación “ $(7 + 4\sqrt{3})^n$  es una unidad para todo natural  $n \geq 1$ ” es:

- Verdadera o falsa, dependiendo de  $n$ .
- Siempre falsa.
- Siempre verdadera.

**Justificación:** Tenemos que  $7 + 4\sqrt{3}$  es invertible, puesto que:

$$N(7 + 4\sqrt{3}) = 7^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$$

Como el producto de unidades es una unidad, cualquier potencia de una unidad también lo es.

**Ejercicio 5.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un subanillo. La afirmación “ $\mathbb{Z}$  es un subanillo de  $A$ ” es:

- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.
- Verdadera o falsa, dependiendo de  $A$ .

**Justificación:** Por inducción, veamos primero que  $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \subseteq A$ .

Esto es, que  $n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$n = 0$ : Por ser  $A$  subanillo de  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $0 \in A$ .

$n = 1$ : Por ser  $A$  subanillo de  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $1 \in A$ .

$n > 1$ : Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n \in A$  y veamos que  $n + 1 \in A$ .

Por ser  $A$  cerrado para la suma, tenemos que  $1 \in A$  y que  $n \in A$  por hipótesis de inducción, luego  $n + 1 \in A$ .

Por tanto,  $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \subseteq A$ .

Ahora, para  $n \in \mathbb{Z}$  con  $n \geq 0$ ,  $A$  es cerrado para opuestos, luego  $-n \in A$ .

Por tanto,  $\mathbb{Z} \subseteq A$ .

Por ser  $\mathbb{Z}$  cerrado para la suma, producto, opuestos y contiene al 0 y al 1,  $\mathbb{Z}$  es subanillo de  $A$ . Por tanto,  $\mathbb{Z}$  es el menor subanillo de  $\mathbb{R}$ .

## 1.4. Cuestionario IV

**Ejercicio 1.** En el anillo  $\mathbb{Z}_{10}$ , la afirmación “ $3^{4k+3} = -3$ , para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ” es:

- Siempre falsa.
- Siempre cierta.
- A veces cierta y a veces falsa, depende de  $k$ .

**Ejercicio 2.** En el anillo  $\mathbb{Z}_n[x]$ , la afirmación “la suma reiterada  $n$  veces de cualquier polinomio es 0”, es:

- Verdadera o falsa, depende de  $n$ .
- Siempre falsa.
- Siempre verdadera.

**Ejercicio 3.** Un subanillo  $A$  de un anillo  $B$  se dice propio si  $A \subsetneq B$ . Seleccione el enunciado correcto:

- En anillo  $\mathbb{Z}$  no tiene subanillos propios.
- El conjunto  $A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  es un subanillo propio de  $\mathbb{Z}$ .
- El cuerpo  $\mathbb{Q}$  no tiene subanillos propios.

**Ejercicio 4.** Homomorfismos  $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

- Hay exactamente uno.
- Hay al menos dos.
- No hay ninguno.

**Ejercicio 5.** Sea  $A$  un anillo conmutativo, la afirmación “Para cualesquiera indeterminadas  $x$  e  $y$ , los anillos de polinomios  $A[x]$  y  $A[y]$  son isomorfos”. Es:

- Verdadera o falsa, depende de  $A$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Ejercicio 1.** En el anillo  $\mathbb{Z}_{10}$ , la afirmación “ $3^{4k+3} = -3$ , para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ” es:

- Siempre falsa.
- Siempre cierta.
- A veces cierta y a veces falsa, depende de  $k$ .

**Justificación:**

$$3^{4k+3} = (3^4)^k \cdot 3^3 = (9 \cdot 9)^k \cdot 9 \cdot 3 = 1^k \cdot 7 = 7 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 2.** En el anillo  $\mathbb{Z}_n[x]$ , la afirmación “la suma reiterada  $n$  veces de cualquier polinomio es 0”, es:

- Verdadera o falsa, depende de  $n$ .
- Siempre falsa.
- Siempre verdadera.

**Justificación:** Sea  $R_n : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_n[x]$  el homomorfismo de reducción módulo  $n$ . Para cualquier  $f \in \mathbb{Z}_n[x]$ :

$$nf = nR_n(f) = R_n(nf) = R_n(n)R_n(f) = 0 \cdot f = 0$$

**Ejercicio 3.** Un subanillo  $A$  de un anillo  $B$  se dice propio si  $A \subsetneq B$ . Seleccion el enunciado correcto:

- En anillo  $\mathbb{Z}$  no tiene subanillos propios.
- El conjunto  $A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  es un subanillo propio de  $\mathbb{Z}$ .
- El cuerpo  $\mathbb{Q}$  no tiene subanillos propios.

**Justificación:** Si  $A$  es un subanillo de  $\mathbb{Z}$ , entonces  $1 \in A$  con lo que para todo  $n \geq 0$ ,  $\overbrace{1 + \dots + 1}^{n \text{ veces}} = n \in A$  y, como  $A$  contiene a sus opuestos, entonces  $\mathbb{Z} \subseteq A$ . Por lo que  $A = \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 4.** Homomorfismos  $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

- Hay exactamente uno.
- Hay al menos dos.
- No hay ninguno.

**Justificación:** Si  $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  fuese un homomorfismo, tendríamos que:

$$\phi(1 + 1) = \phi(1) + \phi(1) = 1 + 1 = 2$$

Pero en  $\mathbb{Z}_2$ ,  $1 + 1 = 0$  y por tanto,  $\phi(1 + 1) = \phi(0) = 0$ , así que sería  $0 = 2$  en  $\mathbb{Z}$ , lo que es una contradicción.

**Ejercicio 5.** Sea  $A$  un anillo conmutativo, la afirmación “Para cualesquiera indeterminadas  $x$  e  $y$ , los anillos de polinomios  $A[x]$  y  $A[y]$  son isomorfos”. Es:

- Verdadera o falsa, depende de  $A$ .
- Siempre verdadera.
- Siempre falsa.

**Justificación:** El automorfismo identidad  $id_A : A \cong A$  extiende a un único homomorfismo  $\phi : A[x] \rightarrow A[y]$  tal que  $\phi(x) = y$ . Explícitamente:

$$\phi \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n a_i y^i$$

Claramente  $\phi$  es biyectiva.



## 1.5. Cuestionario V

**Ejercicio 1.** En relación con los anillos  $\mathbb{Z}_6$  y  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , selecciona la afirmación correcta:

- Ambos son DI.
- Uno de ellos es DI, pero el otro no.
- Ninguno es DI.

**Ejercicio 2.** En relación a las siguientes proposiciones, referidas a los elementos de un Dominio de Integridad:

(a)  $a \mid b \wedge a \nmid c \Rightarrow b \nmid b + c.$

(b)  $a \mid b \wedge a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c.$

Selecciona la afirmación correcta:

- Ambas son verdad.
- Una es verdad y la otra es falsa.
- Ambas son falsas.

**Ejercicio 3.** Polinomios de grado uno que son unidades en el anillo de polinomios  $\mathbb{Z}_4[x]$ :

- No hay.
- Hay dos.
- Hay infinitos.

**Ejercicio 4.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ :

- 3 es unidad.
- 3 es irreducible.
- 3 no es irreducible.

**Ejercicio 5.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ :

- 2 es unidad.
- 2 es irreducible.
- 2 no es irreducible.

**Ejercicio 1.** En relación con los anillos  $\mathbb{Z}_6$  y  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , selecciona la afirmación correcta:

- Ambos son DI.
- Uno de ellos es DI, pero el otro no.
- Ninguno es DI.

**Justificación:**

- En  $\mathbb{Z}_6$ ,  $2 \cdot 3 = 0$ .
- En  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$ .

**Ejercicio 2.** En relación a las siguientes proposiciones, referidas a los elementos de un Dominio de Integridad:

- (a)  $a \mid b \wedge a \nmid c \Rightarrow b \nmid b + c$ .
- (b)  $a \mid b \wedge a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c$ .

Selecciona la afirmación correcta:

- Ambas son verdad.
- Una es verdad y la otra es falsa.
- Ambas son falsas.

**Justificación:**

- La primera es cierta: si  $b = ax$  y fuese  $b + c = ay$ , tendríamos que  $c = ay - ax = a(x - y)$ , así que  $a \mid c$ , lo que es contradictorio.
- La segunda es falsa: por ejemplo, en  $\mathbb{Z}$ ,  $2 \nmid 1$  y  $2 \nmid 3$ , pero  $2 \mid 1 + 3 = 4$ .

**Ejercicio 3.** Polinomios de grado uno que son unidades en el anillo de polinomios  $\mathbb{Z}_4[x]$ :

- No hay.
- Hay dos.
- Hay infinitos.

**Justificación:** La tabla de multiplicar en  $\mathbb{Z}_4$  es:

$(\mathbb{Z}_4, \cdot)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Buscamos estudiar el cardinal del conjunto:

$$\{p \in U(\mathbb{Z}_4[x]) \mid \deg(p) = 1\}$$

Sea  $ax + b \in U(\mathbb{Z}_4[x])$  con  $a \neq 0$ :

$$\begin{aligned} (ax + b)(ax + b) = 1 &\implies (ax + b)^2 = 1 \implies a^2x + 2abx + b^2 = 1 \\ &\implies a^2 = 0 \quad \wedge \quad 2ab = 0 \quad \wedge \quad b^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a^2 = 0 &\implies a = 2 \\ 2ab = 0 &\implies 4b = 0 \implies 0b = 0 \implies 0 = 0 \\ b^2 = 1 &\implies b = 1 \quad \vee \quad b = 3 \end{cases}$$

Luego:

$$2x + 1 \in U(\mathbb{Z}_4[x])$$

$$2x + 3 \in U(\mathbb{Z}_4[x])$$

Tenemos dos polinomios que verifican la segunda opción. Además, la última no puede ser por ser  $\mathbb{Z}_4[x]$  finito.

**Ejercicio 4.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ :

- 3 es unidad.
- 3 es irreducible.
- 3 no es irreducible.

**Justificación:**

$$N(3) = 9 \neq \pm 1 \implies 3 \notin U(\mathbb{Z}[i])$$

Para probar que 3 es irreducible, supongamos una factorización  $3 = \alpha \cdot \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus U(\mathbb{Z}[i])$ . Entonces:

$$N(3) = N(\alpha)N(\beta) \implies 9 = N(\alpha)N(\beta) \quad N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}$$

Como  $\alpha, \beta \notin U(\mathbb{Z}[i]) \implies N(\alpha), N(\beta) \neq \pm 1$  Como  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ , se tiene que:

$$N(\alpha) = a^2 + b^2 \geq 1$$

$$N(\beta) = (a')^2 + (b')^2 \geq 1$$

Por tanto,  $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}$ . Además,  $9 = N(\alpha)N(\beta) \implies N(\alpha) = N(\beta) = 3$ .

$$N(\alpha) = 3 \implies a^2 + b^2 = 3$$

Pero  $\nexists a, b \in \mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 = 3$ , por lo que 3 es irreducible.

**Ejercicio 5.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ :

- 2 es unidad.
- 2 es irreducible.

- 2 no es irreducible.

**Justificación:**

$$N(2) = 4 \neq 1 \implies 2 \notin U(\mathbb{Z}[i])$$

Para ver que 2 no es irreducible, supongamos una factorización:  $2 = \alpha \cdot \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus U(\mathbb{Z}[i])$ .

$$N(2) = N(\alpha\beta) \implies 4 = N(\alpha)N(\beta) \implies N(\alpha) = N(\beta) = 2$$

Por ejemplo,  $\alpha = \beta = 1 + i$

$$-i(1+i)^2 = (1+i^2+2i)(-i) = (-i)(1-1+2i) = (-i)2i = -2i^2 = 2$$

Luego  $2 = -i(1+i)^2$  es la factorización esencialmente única de 2  $\implies$  es reducible.

## 1.6. Cuestionario VI

**Ejercicio 1.** En relación a las siguientes proposiciones, referidas a elementos cualesquiera de un DI, selecciona las verdaderas:

- $c \mid ab \implies c \mid a \vee c \mid b$ .
- $a \mid c \wedge b \mid c \implies ab \mid c$ .
- $c \mid a \vee c \mid b \implies c \mid ab$ .

**Ejercicio 2.** Entre los siguientes DE, selecciona aquellos en los que el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo son únicos salvo signo:

- $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ .
- $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .
- $\mathbb{Z}_3[x]$ .

**Ejercicio 3.** En un DE, tenemos la ecuación diofántica  $px + by = 1$ , donde  $p$  es irreducible. Entre las siguientes afirmaciones, selecciona la que es verdad.

- Nunca tiene solución.
- Puede tener solución o no, depende de  $b$ .
- Siempre tiene solución.

**Ejercicio 4.** En un DE, tenemos la ecuación diofántica  $px + qy = c$ , donde  $p$  y  $q$  son irreducibles no asociados entre sí. Entre las siguientes afirmaciones, selecciona la que es verdad.

- Nunca tiene solución.
- Puede tener solución o no, depende de  $p$  y de  $q$ .
- Siempre tiene solución.

**Ejercicio 5.** Entre las siguientes proposiciones, referidas a un DE, selecciona las verdaderas.

- Si la ecuación  $ax + by = 1$  tiene solución, entonces la ecuación  $ax + by = c$  tiene solución para todo  $c$ .
- Si la ecuación  $ax + bb'y = 1$  tiene solución, entonces las ecuaciones  $ax + by = 1$  y  $ax + b'y = 1$  tienen solución.
- Si las ecuaciones  $ax + by = 1$  y  $ax + b'y = 1$  tienen solución, entonces la ecuación  $ax + bb'y = 1$  tiene solución.

**Ejercicio 1.** En relación a las siguientes proposiciones, referidas a elementos cualesquiera de un DI, selecciona las verdaderas:

- $c \mid ab \implies c \mid a \vee c \mid b$ .
- $a \mid c \wedge b \mid c \implies ab \mid c$ .
- $c \mid a \vee c \mid b \implies c \mid ab$ .

**Justificación:**

- La primera es falsa, en  $\mathbb{Z}$ ,  $6 \mid 12 = 4 \cdot 3$  pero  $6 \nmid 4$ .
- La segunda es falsa, en  $\mathbb{Z}$ ,  $2 \mid 6$  pero  $2 \cdot 2 \nmid 6$ .
- La tercera es verdadera. De hecho, basta con que  $c$  divida a uno de ellos para que divida al producto:

$$a = ca' \implies ab = c(a'b)$$

**Ejercicio 2.** Entre los siguientes DE, selecciona aquellos en los que el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo son únicos salvo signo:

- $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ .
- $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .
- $\mathbb{Z}_3[x]$ .

**Justificación:** Serán aquellos cuyas unidades sean  $\pm 1$ :

- En  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $a + b\sqrt{-2}$  es unidad si y sólo si  $a^2 + 2b^2 = 1$ , lo que sólo se verifica si  $a = 1$  y  $b = 0$ .
- En  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ,  $a + b\sqrt{3}$  es unidad si y sólo si  $a^2 - 3b^2 = \pm 1$ , lo que verifica por ejemplo  $2 + \sqrt{3} \neq \pm 1$ , luego aquí el mcd y el mcm no son únicos salvo signo.
- En  $\mathbb{Z}_3[x]$ :

$$U(\mathbb{Z}_3[x]) = U(\mathbb{Z}_3) = \{1, 2\} = \{1, -1\} = \{\pm 1\}$$

**Ejercicio 3.** En un DE, tenemos la ecuación diofántica  $px + by = 1$ , donde  $p$  es irreducible. Entre las siguientes afirmaciones, selecciona la que es verdad.

- Nunca tiene solución.
- Puede tener solución o no, depende de  $b$ .
- Siempre tiene solución.

**Justificación:** La ecuación tendrá solución  $\iff \text{mcd}(p, b) \mid 1 \iff \text{mcd}(p, b) = 1$ . Como  $p$  es irreducible, equivale a que  $p \nmid b$ , luego puede tener solución o no, dependiendo de  $b$ :

- Para  $b = 1$  sí tiene solución.
- Pero para  $b = 2p \implies \text{mcd}(p, 2p) = p \neq 1$  no tiene solución.

**Ejercicio 4.** En un DE, tenemos la ecuación diofántica  $px + qy = c$ , donde  $p$  y  $q$  son irreducibles no asociados entre sí. Entre las siguientes afirmaciones, selecciona la que es verdad.

- Nunca tiene solución.
- Puede tener solución o no, depende de  $p$  y de  $q$ .
- Siempre tiene solución.

**Justificación:** La ecuación tendrá solución  $\iff \text{mcd}(p, q) \mid c$ . Como  $p$  y  $q$  son irreducibles no asociados, tenemos que  $\text{mcd}(p, q) = 1$  y como  $1 \mid c \forall c \in A$ , la ecuación siempre tendrá solución.

**Ejercicio 5.** Entre las siguientes proposiciones, referidas a un DE, selecciona las verdaderas.

- Si la ecuación  $ax + by = 1$  tiene solución, entonces la ecuación  $ax + by = c$  tiene solución para todo  $c$ .
- Si la ecuación  $ax + bb'y = 1$  tiene solución, entonces las ecuaciones  $ax + by = 1$  y  $ax + b'y = 1$  tienen solución.
- Si las ecuaciones  $ax + by = 1$  y  $ax + b'y = 1$  tienen solución, entonces la ecuación  $ax + bb'y = 1$  tiene solución.

**Justificación:**

- Sea  $(x_0, y_0)$  solución de  $ax + by = 1 \implies (cx_0, cy_0)$  es solución de  $ax + by = c$ .
- Sea  $(x_0, y_0)$  solución de  $ax + bb'y = 1 \implies (x_0, y_0b')$  es solución de  $ax + by = 1$  y  $(x_0, y_0b)$  es solución de  $ax + b'y = 1$ .
- 

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = 1 \text{ tiene solución} \implies \text{mcd}(a, b) = 1 \\ ax + b'y = 1 \text{ tiene solución} \implies \text{mcd}(a, b') = 1 \end{array} \right\} \implies \text{mcd}(a, bb') = 1$$

Luego  $ax + bb'y = 1$  tiene solución.

## 1.7. Cuestionario VII

**Ejercicio 1.** En relación a las siguientes proposiciones sobre elementos de un DE, selecciona las verdaderas:

- Si  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , entonces  $\text{mcd}(a, b^n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $a \equiv a' \pmod{b}$ , entonces  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a', b)$ .
- Si  $a \equiv a' \pmod{b}$ , entonces  $\text{mcm}(a, b) = \text{mcm}(a', b)$ .

**Ejercicio 2.** Entre las siguientes ecuaciones en congruencias, selecciona las que tienen solución.

- En  $\mathbb{Z}$ ,  $6x \equiv 10 \pmod{45}$ .
- En  $\mathbb{Z}$ ,  $100x \equiv 20 \pmod{15}$ .
- En  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $(2 + 2i)x \equiv 5 \pmod{3 - i}$ .

**Ejercicio 3.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a ecuaciones en el anillo  $\mathbb{Z}_{64}$ , selecciona las que son verdad.

- $12x = 28$  tiene 4 soluciones.
- $14x = 28$  tiene 4 soluciones.
- $12x = 30$  tiene 4 soluciones.

**Ejercicio 4.** Entre las siguientes proposiciones, selecciona las verdaderas.

- El anillo  $\mathbb{Z}_{900}$  tiene 240 unidades.
- $14^{20} \equiv 1 \pmod{33}$ .
- $3^{16} = 3$  en  $\mathbb{Z}_{16}$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $p$  un número primo y considérese la congruencia  $ax \equiv 1 \pmod{p^2}$ . En relación a las siguientes proposiciones, selecciona las verdaderas:

- No tiene solución, pues  $p^2$  no es primo.
- Tiene solución si y sólo si la congruencia  $ax \equiv 1 \pmod{p}$  tiene solución.
- Tiene solución salvo que  $a$  sea múltiplo de  $p^2$ .



**Ejercicio 1.** En relación a las siguientes proposiciones sobre elementos de un DE, selecciona las verdaderas:

- Si  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , entonces  $\text{mcd}(a, b^n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $a \equiv a' \pmod{b}$ , entonces  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a', b)$ .
- Si  $a \equiv a' \pmod{b}$ , entonces  $\text{mcm}(a, b) = \text{mcm}(a', b)$ .

**Justificación:**

- Es cierto, lo probamos por inducción:

**Para  $n = 0$ :**  $\text{mcd}(a, b^0) = \text{mcd}(a, 1) = 1$ , cierto.

**Para  $n = 1$ :**  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , cierto.

**Supuesto cierto para  $n - 1$ , lo vemos para  $n$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{mcd}(a, b) = 1 \\ \text{mcd}(a, b^{n-1}) = 1 \end{array} \right\} \text{mcd}(a, b^n) = \text{mcd}(a, b^{n-1}b) = 1$$

- Es cierto, sea  $A$  el DE:

$$\begin{aligned} a \equiv a' \pmod{b} &\implies \exists q \in A \mid a - a' = qb \\ &\implies a' = a - qb \end{aligned}$$

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - qb, b) = \text{mcd}(a', b)$$

- Es falso, por ejemplo en  $\mathbb{Z}$ , sean  $a = 6$ ,  $a' = 2$ ,  $b = 4$

$$\begin{aligned} 6 &\equiv 2 \pmod{4} \\ \text{mcm}(6, 4) &= 12 \neq 4 = \text{mcm}(2, 4) \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** Entre las siguientes ecuaciones en congruencias, selecciona las que tienen solución.

- En  $\mathbb{Z}$ ,  $6x \equiv 10 \pmod{45}$ .
- En  $\mathbb{Z}$ ,  $100x \equiv 20 \pmod{15}$ .
- En  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $(2 + 2i)x \equiv 5 \pmod{3 - i}$ .

**Justificación:**

- $\text{mcd}(6, 45) = 3$ , como  $3 \nmid 10 \implies$  no tiene solución.
- $\text{mcd}(100, 15) = 5$ , como  $5 \mid 20 \implies$  tiene solución:

$$20x \equiv 4 \pmod{3} \quad \text{mcd}(20, 3) = 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= 20(-1) + 7 \cdot 3 \implies 20 \cdot 1 = -1 \pmod{3} \\ &\implies 20(-4) \equiv 4 \pmod{3} \end{aligned}$$

$x_0 = -4$  es solución particular

$x_0 = 2$  es solución óptima

$$x_0 = 2 + 3k \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Calculamos  $\text{mcd}(2 + 2i, 3 - i)$  en  $\mathbb{Q}[i]$ :

$$\frac{3 - i}{2 + 2i} = \frac{(2 - 2i)(3 - i)}{8} = \frac{6 - 2i - 6i - 2}{8} = \frac{4}{8} - \frac{8i}{8} = \frac{1}{2} - i$$

Tenemos  $q = i$ ,  $r = 1 + i$

$$\begin{array}{rrr} r_i & u_i & v_i \\ 3 - i & 1 & 0 \\ 2 + 2i & 0 & 1 \\ 1 + i & 1 & -i \end{array}$$

Existe solución  $\iff 1 + i \mid 5$ , pero como  $1 + i \nmid 5$ , no existe solución.

**Ejercicio 3.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a ecuaciones en el anillo  $\mathbb{Z}_{64}$ , selecciona las que son verdad.

- $12x = 28$  tiene 4 soluciones.
- $14x = 28$  tiene 4 soluciones.
- $12x = 30$  tiene 4 soluciones.

**Justificación:**

■

$$\begin{array}{l} 12x \equiv 28 \pmod{64} \\ 6x \equiv 14 \pmod{32} \\ 3x \equiv 7 \pmod{16} \end{array}$$

Como  $\text{mcd}(16, 3) = 1$ , tiene solución.

$$\begin{aligned} 1 &= 16 \cdot 1 + 3(-5) \implies 3 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{16} \\ &\implies 3 \cdot 5(-7) \equiv 7 \pmod{16} \end{aligned}$$

$5(-7) = -35$  es solución particular

$x_0 = 13$  es solución óptima

$$x = 13 + 16k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 13 & x_2 = 29 \\ x_3 = 45 & x_4 = 61 \end{array}$$

Tiene 4 soluciones.

■

$$\begin{array}{l} 14x \equiv 28 \pmod{64} \\ 7x \equiv 14 \pmod{32} \end{array}$$

$\text{mcd}(7, 32) = 1$ , tiene solución.

$$\begin{aligned} 1 &= 32 \cdot 2 + 7(-9) \implies 7 \cdot 9 \equiv -1 \pmod{32} \\ &\implies 7 \cdot 9(-14) \equiv 14 \pmod{32} \end{aligned}$$

$x_0 = 9(-14) = -126$  es solución particular

$y_0 = 2$  es solución óptima

$$x = 2 + 23k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 34$$

No tiene 4 soluciones, es falso.

■

$$12x \equiv 30 \pmod{64}$$

$$6x \equiv 15 \pmod{32}$$

$$\text{mcd}(6, 32) = 2 \nmid 15 \implies \text{no tiene solución}$$

Es falso.

**Ejercicio 4.** Entre las siguientes proposiciones, selecciona las verdaderas.

■ El anillo  $\mathbb{Z}_{900}$  tiene 240 unidades.

■  $14^{20} \equiv 1 \pmod{33}$ .

■  $3^{16} = 3$  en  $\mathbb{Z}_{16}$ .

**Justificación:**

■

$$|U(\mathbb{Z}_{900})| = \varphi(900) = \varphi(3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2) = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 240$$

■

$$\left. \begin{aligned} \varphi(33) &= \varphi(3 \cdot 11) = 2 \cdot 10 = 20 \\ \text{mcd}(14, 33) &= 1 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{Fermat}} 14^{20} \equiv 1 \pmod{33}$$

■

$$\left. \begin{aligned} \varphi(16) &= \varphi(2^4) = 2^3 \cdot 1 = 8 \\ \text{mcd}(3, 16) &= 1 \end{aligned} \right\} \implies 3^8 \equiv 1 \pmod{16} \implies 3^{16} \equiv 1 \pmod{16} \\ \implies 3^{16} \not\equiv 3 \pmod{16}$$

**Ejercicio 5.** Sea  $p$  un número primo y considérese la congruencia  $ax \equiv 1 \pmod{p^2}$ . En relación a las siguientes proposiciones, selecciona las verdaderas:

- No tiene solución, pues  $p^2$  no es primo.
- Tiene solución si y sólo si la congruencia  $ax \equiv 1 \pmod{p}$  tiene solución.
- Tiene solución salvo que  $a$  sea múltiplo de  $p^2$ .

**Justificación:**

La ecuación tiene solución  $\iff \text{mcd}(a, p^2) \mid 1 \iff \text{mcd}(a, p^2) = 1$   
 $\iff \text{mcd}(a, p) = 1 \iff ax \equiv 1 \pmod{p}$  tiene solución

Luego la segunda opción es verdadera. Estudiamos ahora la tercera, si  $a = kp^2$  con  $k \in A \implies \text{mcd}(a, p^2) = p^2$  por lo que es cierto que no tiene solución. Sin embargo, si  $p^2$  es múltiplo de  $a \implies \text{mcd}(a, p^2) = a$ , por lo que tampoco tiene solución. Luego la tercera es falsa, al existir más casos en los que no tiene solución.

## 1.8. Cuestionario VIII

**Ejercicio 1.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ , selecciona las afirmaciones verdaderas:

- $2 + i$  y  $2 - i$  son unidades.
- $2 + i$  y  $2 - i$  son asociados.
- $2 + i$  y  $2 - i$  son irreducibles.

**Ejercicio 2.** Entre las siguientes afirmaciones, selecciona las afirmaciones verdaderas:

- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , los número  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son asociados.
- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , los número  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son primos.
- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , el número 2 no es primo.

**Ejercicio 3.** Entre las siguientes afirmaciones, selecciona las correctas.

- En  $\mathbb{Z}[x]$ , todo polinomio de grado 1 es irreducible.
- En  $\mathbb{Z}[x]$ , todo polinomio mónico de grado menor o igual que 3 y sin raíces en  $\mathbb{Z}$  es irreducible.
- Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 en  $\mathbb{Q}[x]$  es asociado a un primitivo de  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Ejercicio 4.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a un polinomio  $f \in \mathbb{Z}[x]$ , selecciona las que son verdad:

- Si el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si  $f$  es mónico y el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si  $f$  es primitivo y el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.

**Ejercicio 5.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a un polinomio mónico  $f \in \mathbb{Z}[x]$ , selecciona las que son verdad:

- Si  $f$  no tiene raíces en  $\mathbb{Z}$  y para un primo entero  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1 \cdot f_2$  con  $\deg(f_1) = 1$ , entonces  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[x]$ .
- Si para un entero primo  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1^2$  con  $\deg(f_1) = 3$  y para un entero primo  $q \geq 2$ , el reducido  $R_q(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_q[x]$  en la forma  $R_q(f) = g_1 g_2 g_3$  con  $\deg(g_1) = 1 = \deg(g_2)$  y  $\deg(g_3) = 4$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si para un entero primo  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1^2$  con  $\deg(f_1) = 2$  y para un entero primo  $q \geq 2$ , el reducido  $R_q(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_q[x]$  en la forma  $R_q(f) = g_1 g_2 g_3 g_4$  con  $\deg(g_1) = 1$ , entonces  $f$  es irreducible.

**Ejercicio 1.** En el anillo  $\mathbb{Z}[i]$ , selecciona las afirmaciones verdaderas:

- $2 + i$  y  $2 - i$  son unidades.
- $2 + i$  y  $2 - i$  son asociados.
- $2 + i$  y  $2 - i$  son irreducibles.

**Justificación:**

- La primera es falsa:

$$N(2 + i) = N(2 - i) = 5 \neq \pm 1$$

- La segunda también:

$$\frac{2 + i}{2 - i} = \frac{(2 + i)(2 + i)}{5} = \frac{3 + 4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Luego tenemos  $q = i + 1$  y  $r = (2 + i) - (2 - i)(1 + i) = -1 \neq 0$ , así que  $2 - i \nmid 2 + i$ , luego no son asociados.

- La tercera es verdad:

$$N(2 + i) = N(2 - i) = 5 \text{ que es un primo de } \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 2.** Entre las siguientes afirmaciones, selecciona las afirmaciones verdaderas:

- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , los número  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son asociados.
- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , los número  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son primos.
- En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , el número 2 no es primo.

**Justificación:** Vemos que  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son asociados, ya que:

$$\begin{aligned} \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Luego  $2 + \sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$  y  $2 - \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$ , así que  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  se dividen mutuamente, luego son asociados (la primera es verdad).

Puesto que  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  es un DE, es un DFU y ser primo es equivalente a ser irreducible. Como:

$$N(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

Es un primo de  $\mathbb{Z}$ , vemos que tanto  $2 + \sqrt{2}$  como  $2 - \sqrt{2}$  son primos (la segunda es verdad):. Como:

$$2 = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$$

Deducimos que 2 no es irreducible y, por tanto, no es primo (se verifica la tercera).

**Ejercicio 3.** Entre las siguientes afirmaciones, selecciona las correctas.

- En  $\mathbb{Z}[x]$ , todo polinomio de grado 1 es irreducible.
- En  $\mathbb{Z}[x]$ , todo polinomio mónico de grado menor o igual que 3 y sin raíces en  $\mathbb{Z}$  es irreducible.
- Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 en  $\mathbb{Q}[x]$  es asociado a un primitivo de  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Justificación:**

- Falsa, sea  $f = 6x - 2$ ,  $\deg(f) = 1$  y no es irreducible:  $f = 2 \cdot (3x - 1)$ .
- Sea  $f = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Por ser mónico, es primitivo. Sus posibles raíces en  $\mathbb{Q}$  son de la forma  $a/b$  donde  $a \mid a_0$  y  $b \mid 1 \implies b = \pm 1$ .

Luego sus posibles raíces en  $\mathbb{Q}$  son de la forma  $\pm a$ , donde  $a \mid a_0$ , luego sus raíces son enteras. Como  $f$  no tiene raíces en  $\mathbb{Z} \implies$  no tiene raíces en  $\mathbb{Q}$ .

**Supuesto**  $\deg(f) = 2 \vee \deg(f) = 3$  Entonces, es irreducible en  $\mathbb{Q}$  y, por el criterio de al raíz, es irreducible en  $\mathbb{Z}$ .

**Supuesto**  $\deg(f) = 1$  Entonces,  $f = x + a_0 \implies x = -a_0$  es raíz de  $f$  en  $\mathbb{Z}$ , contradicción, luego no puede ser  $\deg(f) = 1$ .

**Supuesto**  $\deg(f) = 0$  Entonces,  $f \in \mathbb{Z}$  y como es mónico,  $f = 1 \in \mathbb{Z}$ . Pero  $f = 1 \in U(\mathbb{Z}[x]) \implies f$  no es irreducible.

Por lo que es falsa, sólo es cierto si  $f \neq 1$ .

- Se ha demostrado que todo  $\phi \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(\phi) \geq 1$  se puede expresar como  $\phi = a/b f$  con  $a/b \in \mathbb{Q}$  y  $f \in \mathbb{Z}[x]$  primitivo.
- Como  $a/b \in \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo  $\implies a/b \in U(\mathbb{Q}) \implies \phi \sim f$ , cierto.

**Ejercicio 4.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a un polinomio  $f \in \mathbb{Z}[x]$ , selecciona las que son verdad:

- Si el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si  $f$  es mónico y el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si  $f$  es primitivo y el reducido  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x]$ , entonces  $f$  es irreducible.

**Justificación:**

- Falso, puede ser que  $\deg(R_p(f)) \neq \deg(f)$ :

$$\text{Sea } f = 2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1) \in \mathbb{Z}[x]$$

$R_2(f) = x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  es irreducible, pero  $f$  es reducible.

■

$$f \text{ mónico} \implies \begin{cases} f \text{ primitivo} \\ \deg(R_p(f)) = \deg(f) \end{cases}$$

Por tanto, aplicando el criterio de reducción,  $R_p(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[x] \implies f$  es irreducible, cierto.

- Falso, puede ser que  $\deg(R_p(f)) = \deg(f)$  y tenemos el mismo contraejemplo que para el primer punto.

**Ejercicio 5.** Entre las siguientes afirmaciones relativas a un polinomio mónico  $f \in \mathbb{Z}[x]$ , selecciona las que son verdad:

- Si  $f$  no tiene raíces en  $\mathbb{Z}$  y para un primo entero  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1 \cdot f_2$  con  $\deg(f_1) = 1$ , entonces  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[x]$ .
- Si para un entero primo  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1^2$  con  $\deg(f_1) = 3$  y para un entero primo  $q \geq 2$ , el reducido  $R_q(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_q[x]$  en la forma  $R_q(f) = g_1 g_2 g_3$  con  $\deg(g_1) = 1 = \deg(g_2)$  y  $\deg(g_3) = 4$ , entonces  $f$  es irreducible.
- Si para un entero primo  $p \geq 2$ , el reducido  $R_p(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_p[x]$  en la forma  $R_p(f) = f_1^2$  con  $\deg(f_1) = 2$  y para un entero primo  $q \geq 2$ , el reducido  $R_q(f)$  factoriza en irreducibles  $\mathbb{Z}_q[x]$  en la forma  $R_q(f) = g_1 g_2 g_3 g_4$  con  $\deg(g_1) = 1$ , entonces  $f$  es irreducible.

**Justificación:**

- Como  $f$  es mónico,  $f$  y  $R_p(f)$  tienen el mismo grado,  $n$ , y como  $f$  no tiene raíces en  $\mathbb{Z}$ , no tiene divisores de grado 1 ni de grado  $n - 1$ . Además, como  $R_p(f)$  no tiene divisores de grado  $r$  para cualquier  $1 < r < n - 1$  (sus únicos divisores propios son, salvo asociados,  $f_1$  y  $f_2$ )  $f$  tampoco los puede tener. Como es mónico, es primitivo y no tiene divisores propios de grado 0. Luego  $f$  es irreducible.
- Como es mónico,  $f$ ,  $R_p(f)$  y  $R_q(f)$  tienen el mismo grado, 6. Como  $R_p(f)$  no tiene divisores de grados 1, 2, 4 o 5  $f$  tampoco los puede tener. Como  $R_q(f)$  no tiene divisores de grado 3,  $f$  tampoco los puede tener. Como es mónico, es primitivo y no tiene divisores propios de grado 0. Luego  $f$  es irreducible.
- La tercera es falsa: la información sobre  $R_p(f)$  nos garantiza que  $f$  no tiene divisores de grado 1 o 3, pero puede tenerlos de grado 2, y la segunda información sobre  $R_q(f)$  no nos garantiza que  $f$  no puede tenerlos. Un contraejemplo sería  $f = x^4 + 2x + 1 = (x^2 + 1)^2$ . La factorización en irreducibles de  $R_3(f)$  en  $\mathbb{Z}_3[x]$  es  $(x^2 + 1)^2$  y la de  $R_2(f)$  en  $\mathbb{Z}_2[x]$  es  $(x + 1)^4$ .



## 2. Relaciones de ejercicios

### 2.1. Relación I

En los siguientes enunciados,  $A, B, C, \dots$  refieren a subconjuntos arbitrarios de un conjunto dado  $X$ , y se pide demostrar la veracidad de las equivalencias o igualdades propuestas.

**Ejercicio 1.**

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

**Ejercicio 2.**

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$$

**Ejercicio 3.**

(a)  $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq c(B) \iff B \subseteq c(A).$

(b)  $A \cup B = X \iff c(A) \subseteq B \iff c(B) \subseteq A.$

**Ejercicio 4.**

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

**Ejercicio 5.**

(a)  $A - B = A \iff A \cap B = \emptyset.$

(b)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$

**Ejercicio 6.** Siendo la “diferencia simétrica”  $A \Delta B$  de  $A$  y  $B$  el subconjunto

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

demostrad:

(a)  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$

(b)  $A \Delta B = B \Delta A.$

(c)  $A \Delta \emptyset = A.$

(d)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$

(e)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$

**Ejercicio 7.** Si  $A$  y  $B$  son finitos,  $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$

**Ejercicio 8.** Si  $A, B$  y  $C$  son finitos,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En los siguientes ejercicios,  $P, Q, R, \dots$  refieren a las propiedades que pueden ser satisfechas, o no, por los elementos de un conjunto  $X$ .

**Ejercicio 9.** Argumentar que las siguientes proposiciones son equivalentes.

- (a)  $P \implies Q$ .
- (b)  $P \vee Q \iff Q$ .
- (c)  $P \wedge Q \iff P$ .

**Ejercicio 10.** Argumentar la veracidad de las siguientes equivalencias.

- (a)  $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ .
- (b)  $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ .
- (c)  $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$ .
- (d)  $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ .
- (e)  $(P \vee \neg Q) \vee (P \vee \neg R) \iff P \vee \neg(Q \wedge R)$ .
- (f)  $P \vee Q \vee \neg R \iff P \vee Q \vee \neg(P \vee R)$ .
- (g)  $(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P) \iff (P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $S$  y  $T$  conjuntos,  $A \subseteq S$  y  $B \subseteq T$ .

- (a) Probar  $A \times B$  es un subconjunto de  $S \times T$ .
- (b) Probar, con el siguiente ejemplo, que no todo subconjunto  $X$  de  $S \times T$  es de la forma  $X = A \times B$ :

$$S = T = \{0, 1\} \quad X = \{(0, 0), (1, 1)\} \subseteq S \times T$$

**Ejercicio 12.** Sean  $f : S \rightarrow T$  y  $g : T \rightarrow U$  aplicaciones.

- (a) Probar que si ambas son inyectivas, entonces su composición  $g \circ f : S \rightarrow U$  es también inyectiva.
- (b) Probar que si ambas son sobreyectivas, entonces su composición  $g \circ f : S \rightarrow U$  es también sobreyectiva.
- (c) Si su compuesta  $g \circ f : S \rightarrow U$  es inyectiva o sobreyectiva, ¿qué podemos decir sobre  $f$  y  $g$ ?

**Ejercicio 13.** Sea  $f : S \rightarrow T$  una aplicación.

- (a) Probar que  $f$  es inyectiva si y solo si tiene una *inversa por la izquierda*, es decir, existe una aplicación  $g : T \rightarrow S$  tal que  $g \circ f = id_S$ .
- (b) Dar un ejemplo de una aplicación inyectiva con dos diferentes inversas por la izquierda.
- (c) Probar que  $f$  es sobreyectiva si y solo si tiene una *inversa por la derecha*, es decir, existe una aplicación  $g : T \rightarrow S$  tal que  $f \circ g = id_T$ .
- (b) Dar un ejemplo de una aplicación sobreyectiva con dos diferentes inversas por la derecha.

**Ejercicio 14.** Denotemos por  $2 = \{0, 1\}$  al conjunto con dos elementos. Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $2^X$  el conjunto de todas las aplicaciones  $f : X \rightarrow 2$ . Si  $A \in \mathcal{P}(X)$ , se define su **aplicación característica**  $\chi_A : X \rightarrow 2$  por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Probar que la correspondencia  $A \mapsto \chi_A$  define una aplicación biyectiva

$$\chi : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\cong} 2^X$$

Toda aplicación  $f : S \rightarrow T$  determina otras

$$f_* : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(T) \quad f^* : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S)$$

llamadas las aplicaciones **imagen** e **imagen inversa** por  $f$ , respectivamente, que están definidas, para cada  $A \subseteq S$  y  $X \subseteq T$ , por

$$f_*(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \quad f^*(X) = \{a \in S \mid f(a) \in X\}$$

En los ejercicios siguientes,  $f : S \rightarrow T$  refiere a una aplicación dada,  $A, B \subseteq S$  son subconjuntos de  $S$  y  $X, Y \subseteq T$  son subconjuntos de  $T$ .

*Observación.* Es común en matemáticas usar las aplicaciones imagen e imagen inversa, aunque la notación usual para estas es  $f$  y  $f^{-1}$ , respectivamente. Estas no deben confundirse con la aplicación y con la inversa de la aplicación, dada una aplicación  $f : A \rightarrow B$ , tenemos:

$$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B) \quad f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

que son las aplicaciones imagen e imagen inversa, mientras que la inversa (en caso de existir), es una aplicación  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

**Ejercicio 15.** Probar que  $f^*(X \cup Y) = f^*(X) \cup f^*(Y)$  y  $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ .

**Ejercicio 16.** Probar que  $f^*(X \cap Y) = f^*(X) \cap f^*(Y)$  y  $f_*(A \cap B) \subseteq f_*(A) \cap f_*(B)$ .

**Ejercicio 17.** Demostrar que si  $f$  es inyectiva, entonces  $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ .

**Ejercicio 18.** Demostrar con el siguiente ejemplo que, en general,  $f_*(A \cap B) \neq f_*(A) \cap f_*(B)$ :

Sea  $f = || : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación “valor absoluto”,  $A = (0, 1)$  y  $B = (-1, 0)$ .

**Ejercicio 19.**  $f_*(f^*(X)) \subseteq X$ , y se da la igualdad si  $f$  es sobreyectiva.

**Ejercicio 20.**  $A \subseteq f^*(f_*(A))$ , y se da la igualdad si  $f$  es inyectiva.

**Ejercicio 21.** Probar que, si  $f$  es una biyección, entonces las aplicaciones  $f_* : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(T)$  y  $f^* : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S)$  son biyectivas e inversas una de la otra.

## 2.2. Relación II

**Ejercicio 1.** Dar ejemplos de relaciones binarias en un conjunto que verifiquen una sola de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva.

**Ejercicio 2.** Sea  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  el conjunto de los números naturales, sobre  $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definimos  $(a, b) \sim (c, d)$  si  $a + d = b + c$ .

- (a) Verificar que  $\sim$  es una relación de equivalencia.
- (b) Sea  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  la aplicación definida por  $f(a, b) = a - b$ . Verificar que  $f$  induce una biyección  $\mathbb{N}^2 / \sim \cong \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f : S \rightarrow T$  una aplicación.

- (a) Probar que  $f$  define una relación de equivalencia  $R_f$  en  $S$ , donde  $aR_fb$  si  $f(a) = f(b)$  (esta relación se llama *la relación núcleo de  $f$* ).
- (b) Probar que, si  $f$  es sobreyectiva, se induce una biyección  $S/R_f \cong T$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $Y \subseteq X$  un subconjunto. Sea  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  la aplicación tal que  $f(A) = A \cap Y$ , para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ .

- (a) Probar que  $f$  es una sobreyección.
- (b) Describir la relación  $R_f$ , núcleo de  $f$ .
- (c) Probar que  $f$  induce una biyección  $\mathcal{P}(X)/R_f \cong \mathcal{P}(Y)$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $R$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $S$ . La aplicación  $p : S \rightarrow S/R$  definida por  $p(A) = \bar{a}$  es la llamada **proyección canónica** de  $S$  sobre el cociente. ¿Qué relación hay entre  $R$  y  $R_p$ ?

**Ejercicio 6.** Un subconjunto  $P \subseteq \mathcal{P}(S)$  es llamado una **partición del conjunto  $S$**  si

- (a)  $\forall A \in P, A \neq \emptyset$ .
- (b)  $\bigcup_{A \in P} A = S$ .
- (c) Para cualesquiera  $A, B \in P \mid A \neq B$ , se verifica que  $A \cap B = \emptyset$ .

Así, por ejemplo, el conjunto cociente  $S/R$ , para  $R$  una relación de equivalencia sobre  $S$  es una partición.

Sea  $P$  una partición de  $S$ . Definimos la aplicación  $p : S \rightarrow P$  por  $p(a) = A$  si  $a \in A$ . ¿Qué relación hay entre  $P$  y  $S/R_p$ ?

**Ejercicio 7.** Sea  $X = \{1, 2, 3\}$ . Calcular todas las particiones de  $X$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$  y  $f : X \rightarrow Y$  la aplicación dada por:

$$f(0) = c \quad f(1) = f(2) = a \quad f(3) = b$$

Consideremos la aplicación  $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

- (a) ¿Es  $f^*$  inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
- (b) Describir la relación  $R_{f^*}$  asociada a  $f^*$  y el conjunto cociente  $\mathcal{P}(Y)/R_{f^*}$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $X$  un conjunto e  $Y \subseteq X$  un subconjunto suyo. En el conjunto  $\mathcal{P}(X)$  se define la siguiente relación binaria:

$$A \sim B \iff A \cap Y = B \cap Y$$

Demosttrad que dicha relación es de equivalencia. Para  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $Y = \{1, 4\}$ , describir del conjunto cociente.

**Ejercicio 10.** Sea  $X$  un conjunto e  $Y \in \mathcal{P}(X)$ . Definimos la aplicación  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  por  $f(x) = Y \cup \{x\}$ , para  $x \in X$  y consideramos en  $X$  la relación de equivalencia  $R_f$  (Ejercicio 3). Describir el conjunto cociente  $X/R_f$ . Si  $X$  es un conjunto finito con  $n$  elementos e  $Y$  tiene  $m$  elementos, calcular el cardinal de  $X/R_f$ .

## 2.3. Relación III

### Ejercicio 1.

- (a) Si  $A$  y  $B$  son anillos conmutativos, probar que el conjunto producto cartesiano  $A \times B$  con las operaciones

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') \quad (a, a')(b, b') = (ab, a'b')$$

es efectivamente un anillo conmutativo. Se llama el “*anillo producto cartesiano*” de  $A$  y  $B$  o “*anillo producto directo*” de  $A$  y  $B$ .

- (b) Escribir las tablas de sumar y multiplicar del anillo producto  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

**Ejercicio 2.** En el conjunto  $\mathbb{Z}$  definimos las operaciones de suma  $\oplus$  y producto  $\otimes$  por

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a + b - 1 \\ a \otimes b &= a + b - ab \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,  $2 \oplus 3 = 4$  y  $2 \otimes 3 = -1$ . ¿Es  $\mathbb{Z}$  un anillo conmutativo con estas operaciones?

### Ejercicio 3.

$$\begin{aligned} (a, a') + (b, b') &= (a + b, a' + b') \\ (a, a') \cdot (b, b') &= (ab, ab' + a'b) \end{aligned}$$

¿Es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  un anillo conmutativo con estas operaciones?

**Ejercicio 4.** Calcula el cociente y el resto de dividir.

- (a) 17544 entre 123.
- (b) -17544 entre -123.
- (c) 17544 entre -123.
- (d) -17544 entre 123.

**Ejercicio 5.** Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos  $\mathbb{Z}_5$  y  $\mathbb{Z}_6$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  la aplicación que asigna a cada entero su resto al dividirlo por  $n$  ( $n \geq 2$ ). Probar que, para cualquier natural  $m \geq 1$  y  $r \in \mathbb{Z}_n$ , se verifica que

$$mr = R(mr) = R(m)r$$

donde el término  $mr = \sum_1^m r$  es el resultado de sumar, en  $\mathbb{Z}_n$ ,  $r$  consigo mismo  $m$  veces, el término  $R(mr)$  es el resto de dividir por  $n$  el número natural producto de  $m$  y  $r$ ; y el término  $R(m)r$  es el producto en  $\mathbb{Z}_n$ , del resto de dividir  $m$  entre  $n$  por  $r$ .

Utilizando lo anterior, ¿es verdad que si, en  $\mathbb{Z}_8$ , sumas 7 consigo mismo 23 veces obtienes 1, o que si sumas 6 consigo mismo 125 veces obtienes 6?

**Ejercicio 7.** Efectuar los siguientes cálculos en el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ :

$$(3 + 2\sqrt{3}) + (4 - 5\sqrt{3}) \quad (3 + 2\sqrt{3})(4 - 5\sqrt{3}) \quad (2 - \sqrt{3})^3$$

**Ejercicio 8.** ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?

(i)  $\{a \in \mathbb{Q} \mid 3a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$ .

(ii)  $\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 9.** Determinar las unidades del anillo definido por el conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , con las operaciones (ver Ejercicio 3)

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') \quad (a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b)$$

**Ejercicio 10.** Encontrar todas las unidades de los anillos  $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7$  y  $\mathbb{Z}_8$ .

**Ejercicio 11.** ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?

(i)  $\sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_1 \text{ es par} \} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ .

(ii)  $\sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_2 \text{ es par} \} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ .

**Ejercicio 12.** Efectuar las siguientes operaciones en el anillo  $\mathbb{Z}_5[x]$ :

$$\begin{aligned} (3 + 4x + x^2 + 2x^3) + (3 + 4x + 4x^4 + 3x^3) \\ (3 + 4x + x^2 + 2x^3) + (3 + 4x + 4x^4 + 3x^3) \\ (2 - 4x + x^2 - 2x^3) + (3 - 4x + 4x^2 - 3x^3) \\ (2 - 4x + x^2 - 2x^3)(3 - 4x + 4x^2 - 3x^3) \end{aligned}$$

**Ejercicio 13.** Si  $p(X) \in \mathbb{Z}_5[x]$  es cualquiera de los cuatro polinomios obtenidos al realizar el ejercicio anterior, calcular  $p(1)$  y  $p(-1)$  en cada caso.

**Ejercicio 14.** El conjunto  $\mathbb{R}^2$  es un anillo con las operaciones:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') \quad (a, a') \cdot (b, b') = (ab - a'b', ab' + a'b)$$

Probar que hay un isomorfismo  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $A$  un anillo conmutativo y  $u \in A$  una unidad del anillo. Demostrar que la aplicación  $f_u : A \rightarrow A$  dada por  $f_u(x) = uxu^{-1}$  es un automorfismo de  $A$ .

**Ejercicio 16.** Dado un anillo  $A$ , demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de  $\mathbb{Z}$  en  $A$ .

**Ejercicio 17.** Para un anillo  $A$ , se define la **característica** de  $A$  como el menor entero positivo  $n$  tal que  $n \cdot 1 = \overbrace{1 + \dots + 1}^n = 0$ , siendo 1 el uno del anillo  $A$ . Si no existe tal  $n$ , diremos que la característica de  $A$  es 0.

Demstrar que si  $A$  es un anillo de característica  $n \geq 2$ , entonces existe un único homomorfismo de anillos de  $\mathbb{Z}_n$  en  $A$ .

**Ejercicio 18.** Dados dos números naturales,  $n, m \geq 2$ , dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de  $\mathbb{Z}_n$  en  $\mathbb{Z}_m$ .

## 2.4. Relación IV

**Ejercicio 1.** Argumenta si los siguientes anillos son, o no, Dominios de Integridad:

$$\mathbb{Z}_8 \quad \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \quad \mathbb{Z}_3 \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_6[x] \quad \mathbb{Z}[i] \quad \mathbb{Z}_5[x]$$

**Ejercicio 2.** ¿Es el anillo definido por el conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con las operaciones:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') \quad (a, a')(b, b') = (ab, ab' + a'b)$$

un Dominio de Integridad? (ver Ejercicio 3 de la Relación III).

**Ejercicio 3.** ¿Es el anillo definido por el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los números enteros con las operaciones:

$$a \oplus b = a + b - 1 \quad a \otimes b = a + b - ab$$

un Dominio de Integridad? (ver Ejercicio 2 de la Relación III).

**Ejercicio 4.** Demuestra que un Dominio de Integridad finito es un cuerpo.

**Ejercicio 5.** Sea  $n \in \mathbb{Z}$  un entero no cuadrado en  $\mathbb{Z}$ . Demuestra que el cuerpo de fracciones de  $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$  es  $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ .

**Ejercicio 6.** Se define el cuerpo  $\mathbb{Q}(x)$  como el cuerpo de fracciones del anillo  $\mathbb{Z}[x]$ , esto es,  $\mathbb{Q}(x) := \mathbb{Q}(\mathbb{Z}[x])$ . Demuestra que  $\mathbb{Z}[x]$  y  $\mathbb{Q}[x]$  tienen el mismo cuerpo de fracciones. Esto es:

$$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(x)$$

**Ejercicio 7.** Sea  $A = \{\frac{m}{2^k} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 0\}$ . Argumentar que:

(a)  $A$  es subanillo de  $\mathbb{Q}$ .

(b)  $\mathbb{Z} \subsetneq A$ .

(c) El cuerpo de fracciones de  $A$  es el mismo que el de  $\mathbb{Z}$ , o sea,  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $A$  un DI y consideremos en  $A$  la relación binaria  $\sim$  de ser asociados. Esto es,  $a \sim b$  si  $a$  es asociado con  $b$ .

(a) Probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $A$ .

(b) Sea  $A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$ , el correspondiente conjunto cociente. Establecemos entre sus elementos la relación por la cual  $[a] \leq [b]$  si  $a$  es un divisor de  $b$  en el anillo  $A$ . ¿Está bien definida esa relación en  $A/\sim$ ? ¿Es una relación de orden?

**Ejercicio 9.** Para  $n$  un número natural, calcular  $\text{mcd}(n, n^2)$ ,  $\text{mcd}(n, n+1)$  y  $\text{mcd}(n, n+2)$ .

**Ejercicio 10.** ¿Podremos rellenar con precisión un depósito de 5388033 litros usando un recipiente de 371? En caso afirmativo, ¿cuántas veces usaremos el recipiente?

**Ejercicio 11.** Determinar, si existe, un polinomio  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tal que:

$$\left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)p(x) = \frac{9}{20}x^5 + \frac{147}{40}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{11}{3}$$



**Ejercicio 12.** Calcular el cociente y el resto de dividir, en el anillo  $\mathbb{Q}[x]$ , el polinomio  $p$  entre el polinomio  $q$ :

$$p = \frac{9}{20}x^5 + \frac{147}{40}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{4}x + \frac{17}{3}$$
$$q = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$