

Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Sistemas Lineales

5

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal <https://www.ugr.es/~rortega/>. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Sistemas Lineales

Notación. Por comodidad, a lo largo de la sección notaremos al conjunto de matrices de orden $n \times m$ sobre \mathbb{R} por:

$$\mathbb{R}^{n \times m} = M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Estudiaremos sistemas lineales de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (1.1)$$

Con $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ y $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, funciones continuas¹ en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si notamos por $A = (a_{ij})_{i,j}$, $d = (b_i)$ y $x = (x_i)$ a las correspondientes coordenadas de A , b y x , podemos reescribir (1.1) en forma de sistema, como:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1d}(t)x_d + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2d}(t)x_d + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_d = a_{d1}(t)x_1 + \cdots + a_{dd}(t)x_d + b_d(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Ejemplo. Supongamos que estamos en la situación de la Figura 1.1, con dos masas m_1 y m_2 , y dos muelles con constantes elásticas k_1 y k_2 . Supongamos además que a la masa m_2 se le aplica una fuerza $F(t)$.

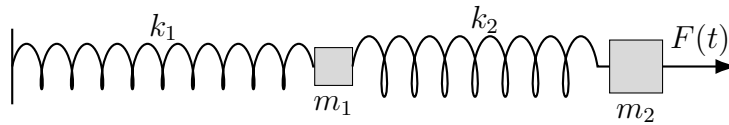


Figura 1.1: Dos masas conectadas por muelles.

Describiremos este sistema de forma matemática describiendo x_1 , la distancia de la masa m_1 a su posición de equilibrio; y x_2 , la distancia de la masa m_2 a su posición de equilibrio a lo largo del tiempo t .

Suponiendo que inicialmente (en el instante t_0) el primer muelle está dilatado (es decir, $x_1(t_0) > 0$) y que el segundo muelle está contraído ($x_2(t_0) - x_1(t_0) < 0$), aplicando las leyes de Newton, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1) + F(t) \end{cases}$$

¹Recordemos que esto significa que sean continuas coordenada a coordenada.

La máquina descrita sigue estas ecuaciones diferenciales, que no están en la categoría que nos interesa, por ser de segundo orden. Sin embargo, un sistema lineal de cualquier orden se puede hacer siempre de primer orden. Para ello, buscamos transformar dos ecuaciones de segundo orden en 4 ecuaciones de primer orden.

El truco para cambiar orden por dimensión es llamar incógnita a las derivadas. Definimos:

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_1' \quad y_3 = x_2 \quad y_4 = x_2'$$

De esta forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{-k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{-k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \frac{F(t)}{m_2} \end{cases}$$

Obtenemos ya un sistema de ecuaciones lineal de primer orden. Los físicos dicen que hemos pasado del espacio de las configuraciones al espacio de estados.

Tenemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de las soluciones). *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \quad x(t_0) = x_0$$

*definida en **todo** el intervalo I .*

Para su demostración, será necesario repasar varios conceptos ya vistos en otras asignaturas.

Corolario 1.1.1. *Ahora, si tenemos una ecuación lineal de orden superior:*

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Lo que hacemos es tomar como incógnitas:

$$y_1 = x \quad y_2 = x' \quad \dots \quad y_k = x^{(k-1)}$$

Y plantear el sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{k-1}' = y_k \\ y_k' = -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \cdots - a_{k-1}(t)y_k + b(t) \end{cases}$$

Con lo que el Teorema de existencia y unicidad del Capítulo anterior es un corolario del Teorema 1.1.

Normas matriciales

Sobre \mathbb{R}^d , consideramos una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Esta norma puede inducirse al espacio $\mathbb{R}^{d \times d}$, de forma que:

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| \geq 1\} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

De forma geométrica, cada A es una transformación del espacio \mathbb{R}^d en sí mismo. Lo que hacemos es tomar el punto más lejano al origen que es imagen de un vector de norma 1 en el dominio.

Notemos que podemos tomar el máximo porque la aplicación $x \mapsto \|Ax\|$ es continua y estamos tomando la imagen de un compacto por una aplicación continua.

Ejemplo. Considerando el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, si tomamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La aplicación asociada a A transforma \mathbb{S}^1 en una elipse de eje mayor 2 y eje menor $1/2$, con lo que:

$$\|A\| = 2$$

Las normas matriciales tienen propiedades extra, que ya fueron vistas en Métodos Numéricos I:

Proposición 1.2. *Se verifica que:*

1. $\|I\| = 1$.
2. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$.
3. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Integrales vectoriales

Supongamos que tenemos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua en un intervalo compacto, con lo que f tiene d coordenadas: $f = (f_1, \dots, f_d)$, todas ellas continuas. De esta forma, definimos

$$\int_a^b f(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t) dt \end{pmatrix}$$

Proposición 1.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, entonces:*

$$A \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b A(f(t)) dt$$

Proposición 1.4. *Se verifica que:*

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

Para cualquier norma.

Demostración. Se saca mediante las sumas de Riemann, cogiendo la integral de Riemann. \square

Convergencia uniforme