

# Álgebra III

## Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Álgebra III

## Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

**Asignatura** Álgebra II.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Aurora del Río Cabeza.

**Descripción** Parcial II.

**Fecha** 21 de mayo del 2025.

**Duración** 2 horas.

**Ejercicio 1** (5 puntos). Responda **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las siguientes cuestiones, junto con una breve justificación de la respuesta.

1. Si  $f : G \rightarrow G'$  es un homomorfismo de grupos y  $N \subseteq G'$  es un subgrupo normal, entonces  $f^*(N) \subseteq G$  es un subgrupo normal.
2. Todo grupo  $G$  actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.
3. Si  $H$  es un subgrupo normal en un grupo  $G$ , entonces  $Z(H)$  es un subgrupo normal en  $Z(G)$ .
4. Si todos los subgrupos de un grupo  $G$  son normales entonces  $G$  es abeliano.
5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de  $Q_2$  sobre un conjunto de 21 elementos.
6. El grupo producto directo  $S_5 \times A_5$  tiene una única serie de composición de longitud 3.
7. Si  $H$  y  $K$  son subgrupos de  $G$ , con  $K$  normal y  $H$  resoluble, entonces el cociente  $HK/K$  es resoluble.
8. Sea  $G$  un grupo tal que  $|G/Z(G)| = pq$ ,  $p < q$ , primos. Entonces  $q \equiv 1 \pmod{p}$ .
9. El centralizador  $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$  es isomorfo a  $D_4$ .
10. Todos los  $p$ -subgrupos de Sylow de  $A_5$  son cíclicos.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Considera el grupo  $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle$ :

1. Calcula el orden de  $ab$ .
2. ¿Es el subgrupo  $H = \langle ab \rangle$  normal?
3. Prueba que el subgrupo  $K = \langle a^4 \rangle$  es normal.
4. ¿Se puede dar un morfismo  $f : G/K \rightarrow S_4$  tal que  $f(aK) = (1\ 2\ 3\ 4)$  y  $f(bK) = (2\ 4)$ ?

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

**Ejercicio 1** (5 puntos). Contestamos a cada pregunta, razonando la respuesta:

1. Si  $f : G \rightarrow G'$  es un homomorfismo de grupos y  $N \subseteq G'$  es un subgrupo normal, entonces  $f^*(N) \subseteq G$  es un subgrupo normal.

**Verdadero.** Si  $x \in G$  y  $y \in f^*(N)$ , entonces  $f(y) \in N$ . Para ver que  $f^*(N) \triangleleft G$  queremos ver que  $xyx^{-1} \in f^*(N)$ , es decir, que  $f(xyx^{-1}) \in N$ :

$$f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1} \in N$$

Que pertenece a  $N$  por ser  $f(x), (f(x))^{-1} \in G'$  y  $f(y) \in N$ , siendo  $N \triangleleft G'$ . En definitiva,  $xyx^{-1} \in f^*(N)$  para todo  $x \in G$  y para todo  $y \in f^*(N)$ , por lo que  $N \triangleleft G$ .

2. Todo grupo  $G$  actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.

**Falso.** Si consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} ac : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Veamos en primer lugar que es una acción:

$$\begin{aligned} 1x &= 1x1 = x \quad \forall x \in G \\ {}^g h x &= ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = {}^g h x h^{-1} = {}^g ({}^h x) \quad \forall g, h, x \in G \end{aligned}$$

Si consideramos la representación por permutaciones:

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \text{Perm}(G) \\ g &\longmapsto \Phi_g \end{aligned}$$

donde cada  $\Phi_g : G \rightarrow G$  viene dada por:

$$\Phi_g(h) = ghg^{-1} \quad \forall h \in G$$

Veamos si  $\ker(\Phi) = \{1\}$ , en cuyo caso será una acción fiel:

$$\begin{aligned} \ker(\Phi) &= \{g \in G \mid \Phi_g = id\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in G\} \\ &= \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\} = Z(G) \end{aligned}$$

Como hay grupos para los que  $Z(G) \neq \{1\}$  (por ejemplo, cualquier grupo abeliano), en algunos casos la acción no será fiel.

3. Si  $H$  es un subgrupo normal en un grupo  $G$ , entonces  $Z(H)$  es un subgrupo normal en  $Z(G)$ .

**Falso.** Veamos un ejemplo en el que ni siquiera es subgrupo:

Sea  $G = D_3 = \langle r, s \mid r^3 = s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$  y  $H = \langle r \rangle$ , tenemos que  $H \triangleleft G$  y como  $H$  es abeliano,  $Z(H) = H$ . Veamos ahora que  $r \notin Z(G)$ , ya que:

$$\begin{aligned} r(sr) &= rr^{-1}s = s \\ (sr)r &= sr^2 \end{aligned}$$

Y como  $s \neq sr^2$ ,  $r \notin Z(G)$ , por lo que  $Z(H) \not\subseteq Z(G)$ .

4. Si todos los subgrupos de un grupo  $G$  son normales entonces  $G$  es abeliano.

**Falso.** Por ejemplo, todos los subgrupos de  $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  son normales:

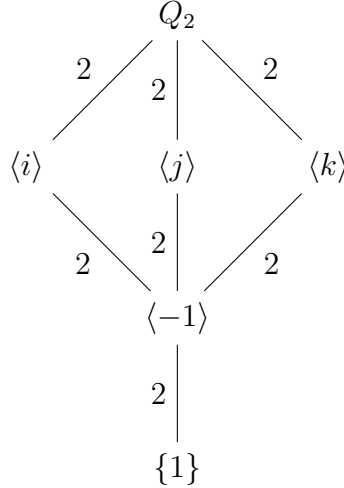


Figura 1: Diagrama de Hasse para los subgrupos del grupo de los cuaternios.

Ya que  $[G : \langle i \rangle] = [G : \langle j \rangle] = [G : \langle k \rangle] = 2$ ,  $\{1\} \triangleleft Q_2$  y  $\langle -1 \rangle \triangleleft G$  porque:

$$\begin{aligned}
 i(-1)i^3 &= -i^4 = -1 \\
 i^3(-1)i &= -i^4 = -1 \\
 j(-1)j^3 &= -j^4 = -1 \\
 j^3(-1)j &= -j^4 = -1
 \end{aligned}$$

Y como  $Q_2 = \langle i, j \rangle$ ,  $\langle -1 \rangle \triangleleft Q_2$ . Sin embargo,  $Q_2$  no es abeliano, puesto que:

$$\begin{aligned}
 ij &= k \\
 ji &= -k
 \end{aligned}$$

5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de  $Q_2$  sobre un conjunto de 21 elementos.

**Falso.** En el ejercicio 12 de la relación de  $p$ -grupos vimos que si  $G$  es un  $p$ -grupo que actúa sobre un conjunto finito  $X$ , entonces:

$$|X| \equiv |Fix(X)| \pmod{p}$$

Como  $Q_2$  es un 2-grupo (por ser  $|Q_2| = 8 = 2^3$ ), si  $X$  es un  $Q_2$ -conjunto con  $|X| = 21$ , tenemos que:

$$21 = |X| \equiv |Fix(X)| \pmod{2}$$

Por lo que  $|Fix(X)|$  será impar y, en particular,  $Fix(X) \neq \emptyset$ , por lo que cualquier acción no trivial de  $Q_2$  sobre cualquier conjunto de 21 elementos tendrá siempre al menos un punto fijo.

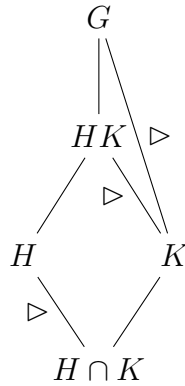
6. El grupo producto directo  $S_5 \times A_5$  tiene una única serie de composición de longitud 3.

**Falso.** Las dos siguientes series son dos series de composición distintas de  $S_5 \times A_5$  de longitud 3:

$$\begin{aligned} S_5 \times A_5 &\triangleright A_5 \times A_5 \triangleright \{1\} \times A_5 \triangleright \{1\} \\ S_5 \times A_5 &\triangleright S_5 \times \{1\} \triangleright A_5 \times \{1\} \triangleright \{1\} \end{aligned}$$

7. Si  $H$  y  $K$  son subgrupos de  $G$ , con  $K$  normal y  $H$  resoluble, entonces el cociente  $HK/K$  es resoluble.

**Verdadero.** Estamos en las condiciones de aplicar el Segundo Teorema de Isomorfía:



Obteniendo que  $HK/K \cong H/(H \cap K)$ . Como  $H$  es resoluble, también lo será cualquier cociente suyo, por lo que  $H/(H \cap K)$  será resoluble, y como esta propiedad se mantiene por isomorfismos,  $HK/K$  será resoluble.

8. Sea  $G$  un grupo tal que  $|G/Z(G)| = pq$ ,  $p < q$ , primos. Entonces  $q \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Verdadero.** Por el Primer Teorema de Sylow, sabemos de la existencia de, al menos, un  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G/Z(G)$  de orden  $p$  y de un  $q$ -subgrupo de Sylow de  $G/Z(G)$  de orden  $q$ . Por el Segundo Teorema de Sylow, si denotamos por  $n_t$  al número de  $t$ -subgrupos de Sylow de  $G/Z(G)$ :

$$\left. \begin{aligned} n_q &\mid p \implies n_p \leq p < q \\ n_q &\equiv 1 \pmod{q} \end{aligned} \right\} \implies n_q = 1$$

Solo hay un único  $q$ -subgrupo de Sylow de  $G/Z(G)$ :  $P_q$ , que será normal en  $G/Z(G)$ . Si calculamos el número de  $p$ -subgrupos de Sylow:

$$\left. \begin{aligned} n_p &\mid q \\ n_p &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned} \right\} \implies n_p \in \{1, q\}$$

Si suponemos que  $n_p = 1$ , entonces también habrá un único  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G/Z(G)$ :  $P_p$ , que también será normal en  $G/Z(G)$ . Bajo estas condiciones, un resultado visto en teoría nos dice que  $G/Z(G)$  es producto directo interno de sus únicos subgrupos de Sylow:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q$$

Sin embargo, como  $|P_p| = p$ , será  $P_p \cong \mathbb{Z}_p$  y análogamente obtenemos que  $P_q \cong \mathbb{Z}_q$ , de donde:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

Que será un grupo cíclico, por ser  $\mathbb{Z}_p$  y  $\mathbb{Z}_q$  cíclicos con  $\text{mcd}(p, q) = 1$ , por lo que (por el ejercicio 4 de la relación de grupos directos)  $G$  será abeliano, de donde  $Z(G) = G$  y  $p = q = 1$ , contradicción, ya que  $p$  y  $q$  eran primos con  $p < q$ . La contradicción viene de suponer que  $n_p = 1$ , por lo que será  $n_p = q$  y recordamos que:

$$q = n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

9. El centralizador  $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$  es isomorfo a  $D_4$ .

**Verdadero.** Si escribimos la definición del centralizador:

$$C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \{\sigma \in S_4 \mid (\sigma(1)\ \sigma(3))(\sigma(2)\ \sigma(4)) = \sigma(1\ 3)(2\ 4)\sigma^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)\}$$

Las únicas posibilidades para  $\sigma$  son:

$$C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \{1, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

Y sabemos que no hay más (porque  $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$ , tenemos ya 8 y si añadimos un elemento más ya tenemos que ir a  $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = S_4$ , que sabemos que es falso). Si pensamos en:

$$D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, rs = sr^3 \rangle$$

Podemos pensar en los elementos  $(1\ 2\ 3\ 4)$  (como  $r$ ) y en  $(1\ 3)$  (como  $s$ ), que cumplen todas las relaciones de los generadores de  $D_4$ :

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3\ 4)^4 &= 1 \\ (1\ 3)^2 &= 1 \\ (1\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3) &= (3\ 2\ 1\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)^3 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo  $f : D_4 \rightarrow C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$ . Además,  $f$  será un isomorfismo por ser  $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$  y  $|D_4| = |C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))| = 8$ .

10. Todos los  $p$ -subgrupos de Sylow de  $A_5$  son cíclicos.

**Falso.** Como  $|A_5| = 5!/2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ , cualquier subgrupo de orden 4 de  $A_5$  será un 2-subgrupo de Sylow suyo. En particular, lo será:

$$V = \{1, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

Y  $V$  no es cíclico, ya que todos sus elementos (salvo el 1) tienen orden 2.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Considera el grupo  $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle$ . Podemos verlo también como:

$$G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ba = a^3b \rangle = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ab = ba^3 \rangle$$



1. Calcula el orden de  $ab$ .

Como  $ab \neq 1$ , buscamos el menor natural  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  de forma que  $(ab)^n = 1$ :

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= abab = aa^3bb = a^4 \neq 1 \\ (ab)^3 &= (ab)^2ab = a^4ab = a^5b \neq 1 \\ (ab)^4 &= (ab)^2(ab)^2 = a^4a^4 = a^8 = 1\end{aligned}$$

Por lo que será  $O(ab) = 4$ .

2. ¿Es el subgrupo  $H = \langle ab \rangle$  normal?

Como  $O(ab) = 4$  y usando el apartado anterior,  $H = \langle ab \rangle = \{1, ab, a^4, a^5b\}$ . Sin embargo, como:

$$babb = ba = a^3b \notin H$$

$H$  no podrá ser normal en  $G$ .

3. Prueba que el subgrupo  $K = \langle a^4 \rangle$  es normal.

Como  $a^8 = 1$ , tenemos que  $K = \langle a^4 \rangle = \{1, a^4\}$ . Basta probar que  $xnx^{-1} \in K$  para todo  $n \in K$  (para  $n = 1$  es trivial) y  $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ , ya que  $G = \langle a, b \rangle$ :

$$\begin{aligned}aa^4a^{-1} &= aa^4a^7 = a^{12} = a^4 \in K \\ a^{-1}a^4a &= a^7a^4a = a^{12} = a^4 \in K \\ ba^4b &= ba^3ab = abab = a^4 \in K\end{aligned}$$

Por lo que  $H \triangleleft G$ .

4. ¿Se puede dar un morfismo  $f : G/K \rightarrow S_4$  tal que  $f(aK) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$  y  $f(bK) = (2 \ 4)$ ?

Sí, como  $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$  y  $(2 \ 4)$  cumplen las relaciones que aparecen en la presentación de  $G$  (pensando en  $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$  como  $a$  y en  $(2 \ 4)$  como  $b$ ):

$$\begin{aligned}(1 \ 2 \ 3 \ 4)^8 &= ((1 \ 2 \ 3 \ 4)^4)^2 = 1^2 = 1 \\ (2 \ 4)^2 &= 1 \\ (2 \ 4)(1 \ 2 \ 3 \ 4)(2 \ 4)^{-1} &= (1 \ 4 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^3\end{aligned}$$

Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo  $g : G \rightarrow S_4$  de forma que:

$$\begin{aligned}g(a) &= (1 \ 2 \ 3 \ 4) \\ g(b) &= (2 \ 4)\end{aligned}$$

En vistas de aplicar la Propiedad Universal del grupo cociente, necesitamos que  $K \triangleleft G$  y que  $K = \{1, a^4\} \subset \ker(g)$ . Comprobemos esto segundo:

$$g(1) = 1 \quad g(a^4) = g(a)^4 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^4 = 1$$

Por lo que  $K \subset \ker(g)$ . Por tanto, por la Propiedad Universal del grupo cociente:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & G/K \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & S_4 \end{array}$$

tenemos que existe un homomorfismo  $f : G/K \rightarrow S_4$  que viene dado por:

$$f(xK) = g(x) \quad \forall xK \in G/K$$

De esta forma:

$$f(aK) = g(a) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$f(bK) = g(b) = (2 \ 4)$$

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

Sea  $G$  un grupo con  $|G| = 5175 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23$ , por el Primer Teorema de Sylow sabemos de la existencia de 3-subgrupos de Sylow, 5-subgrupos de Sylow y 23-subgrupos de Sylow de  $G$ . Si denotamos por  $n_t$  a la cantidad de  $t$ -subgrupos de Sylow de  $G$ , aplicando el Segundo Teorema de Sylow, obtenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} n_{23} \mid 3^2 \cdot 5^2 = 225 \\ n_{23} \equiv 1 \pmod{23} \end{array} \right\} \implies n_{23} = 1$$

Por lo que solo habrá un único 23-subgrupo de Sylow de  $G$ ,  $P_{23}$ , que será normal en  $G$  por ser el único 23-subgrupo de Sylow. Además:

$$\left. \begin{array}{l} n_5 \mid 3^2 \cdot 23 = 207 \\ n_5 \equiv 1 \pmod{5} \end{array} \right\} \implies n_5 = 1$$

Por lo que también habrá un único 5-subgrupo de Sylow de  $G$ ,  $P_5$ , que también será normal en  $G$ .

Como  $|P_5| = 5^2 = 25$ ,  $P_5$  será resoluble. Además, como:

$$|G/P_5| = |G|/|P_5| = 3^2 \cdot 23$$

Tendremos que  $G/P_5$  también será resoluble, de donde  $G$  será resoluble.

Finalmente, todos los grupos de este orden tendrán la misma longitud, ya que por ser  $G$  resoluble, sus factores de composición serán grupos cíclicos de orden primo, y las únicas posibilidades a considerar como factores son cada uno de los grupos cíclicos de orden primo asociados a la descomposición de 5175 en primos, es decir:

$$\mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_{23}$$

Por lo que la longitud de una serie de composición de  $G$  será siempre 5.