Geometría III

Examen XI

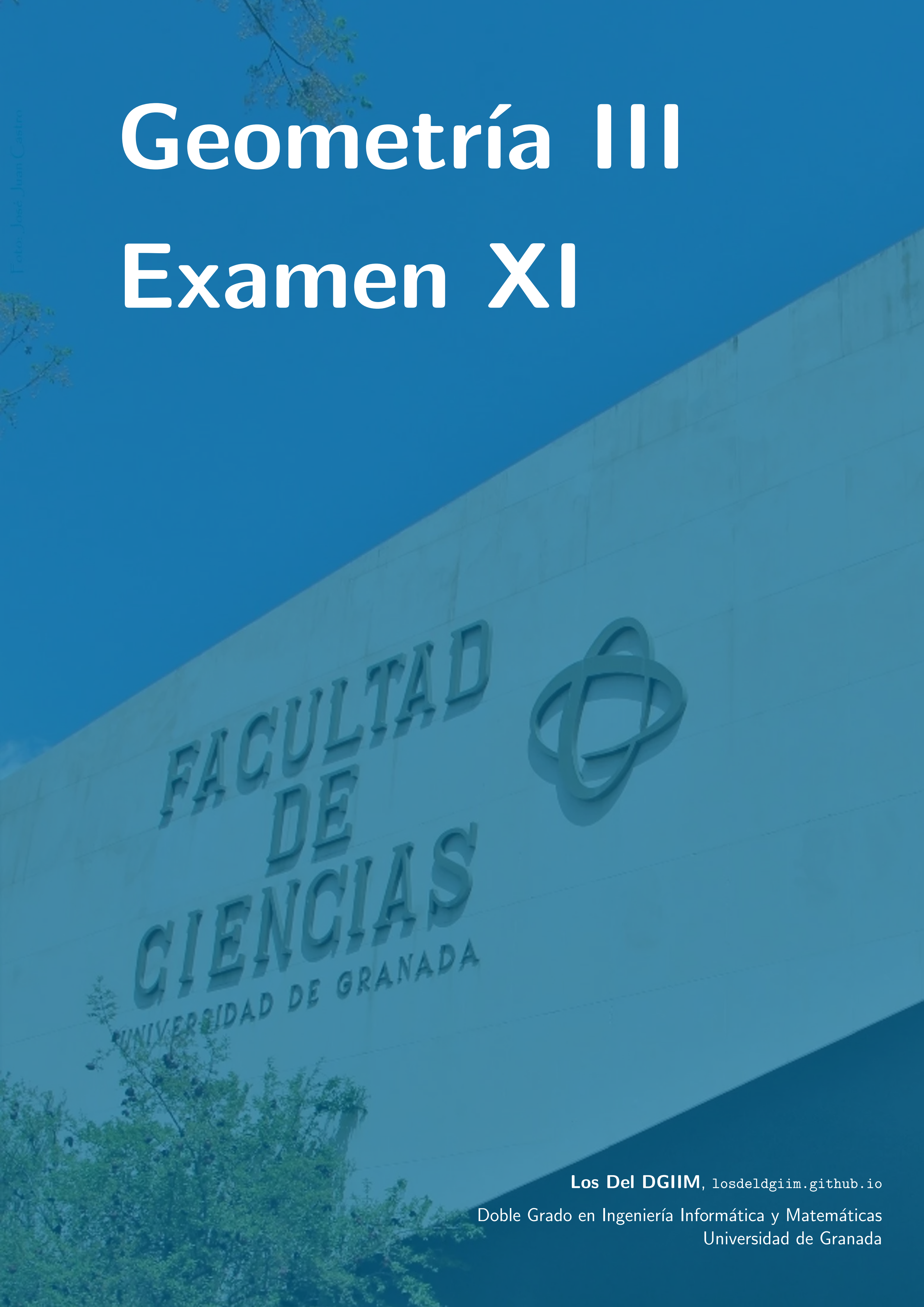


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III
Examen XI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2021-2022.

Descripción Prueba de Clase. Temas 2 y 3.

Fecha 20 de diciembre de 2021.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Clasifica el siguiente movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (1 - z, y, 1 - x)$$

y calcula sus elementos notables (o geométricos).

Podemos escribir f matricialmente como

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Como} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{ Movimiento inverso}$$

Veamos si f tiene puntos fijos:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = y \\ z = 1 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x\} = \Pi$$

Por tanto tenemos que f es un movimiento inverso con un plano de puntos fijos. Entonces f es una reflexión especular respecto al plano Π.

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Explica razonadamente si es posible obtener lo siguiente, teniendo en cuenta la siguiente observación:

Observación. Recordemos que una simetría axial es una simetría ortogonal respecto de una recta.

1. (2 puntos) una traslación en $\mathbb{R}^2$ como composición de dos simetrías axiales.

   Sí, basta tomar dos rectas paralelas que sean perpendiculares al vector de traslación y la distancia entre ellas sea igual a la mitad del módulo del vector de traslación. Veámolo:

   Sea $v = (v_1, v_2)$ el vector de traslación. Entonces podemos tomar $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, dos rectas de $\mathbb{R}^2$ como

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_1 & = (p_1, p_2) + \mathcal{L}\{v^\perp\} \\ \mathcal{S}_2 & = (q_1, q_2) + \mathcal{L}\{v^\perp\} \end{array} \qquad \text{donde } d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \frac{\|v\|}{2}$$

   Podemos considerar el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p = (p_1, p_2), \{v, v^\perp\}\}$. En este sistema nos queda:

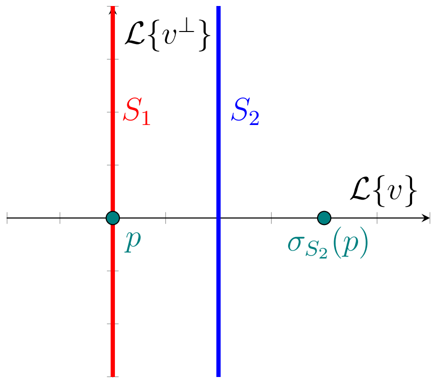
$$M(t_v; \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \|v\| & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A$$

$$M(\sigma_{\mathcal{S}_1}; \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = B \qquad M(\sigma_{\mathcal{S}_2}; \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right) = C$$

Por tanto, Como $C \cdot B = A$, tenemos que:

$$C \cdot B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right) = A \Leftrightarrow \begin{array}{c} a_1 = \|v\| \\ a_2 = 0 \end{array}$$

Sabemos que $(a_1, a_2) = \sigma_{\mathcal{S}_2}(p_1, p_2)_{\mathcal{R}_0} = \sigma_{\mathcal{S}_2}(0,0)_{\mathcal{R}} = (2d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2), 0)$ como se puede ver en el siguiente gráfico (que está en el sistema de referencia $\mathcal{R}$):



Además, hemos definido $d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \frac{\|v\|}{2}$ por lo que $(a_1, a_2) = \left(2 \cdot \frac{\|v\|}{2}, 0\right) = (\|v\|, 0)$ y se verifica

$$M(\sigma_{\mathcal{S}_2}; \mathcal{R}) \cdot M(\sigma_{\mathcal{S}_1}; \mathcal{R}) = M(t_v; \mathcal{R}) \Rightarrow t_v = \sigma_{\mathcal{S}_2} \circ \sigma_{\mathcal{S}_1}$$

2. (2 puntos) una simetría axial de $\mathbb{R}^2$ como composición de dos traslaciones.

   Esto no va a ser posible ya que la traslación es un movimiento directo, y por tanto su composición también lo será. Sin embargo, la simetría axial es inverso y por tanto no se puede conseguir.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Si sabemos que f es la simetría respecto de un plano Π de $\mathbb{R}^3$ y $f(1,2,3) = (3,4,5)$, calcula una ecuación implícita del plano Π.

Tomo en primer lugar el vector $\overrightarrow{(1,2,3),(3,4,5)} = (2,2,2)$ que es perpendicular al plano. Puedo entonces encontrar dos vectores perpendiculares a este que me darán el espacio de direcciones de Π. Por ejemplo, $(1,-1,0)$ y $(1,0,-1)$. Como son linealmente independientes entre sí nos bastan para ser generadores de Π. Nos queda encontrar un punto que pertenezca al plano. Este será el punto medio entre $(1,2,3)$ y $(3,4,5)$,

$$m_{(1,2,3),(3,4,5)} = \frac{(1,2,3)+(3,4,5)}{2} = \frac{(4,6,8)}{2} = (2,3,4)$$

Nos queda entonces $\Pi = (2,3,4) + \mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. Busquemos una ecuación implícita del plano.

$$(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 3, 4) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(1, 0, -1) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 - \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 - y \\ z = 4 - \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 4 - z \end{array}\right\} x = 9 - y - z \Rightarrow x + y + z = 9$$

Por tanto, $\Pi \equiv x + y + z = 9$