# Geometría I

# Examen VI


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

# Geometría I
# Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

**Asignatura** Geometría I.

**Curso Académico** 2021-22.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Juan de Dios Pérez Jiménez[1].

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 20 de enero de 2022.

[1]El examen lo pone el departamento.

**Ejercicio 1.** [**2 puntos**] Sea $U_1, \dots, U_n$ una familia finita de subespacios vectoriales de un espacio vectorial $V$. Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i, \ \forall\, i = 1, \dots, n\}$$

*Observación.* Por definición: $\sum_{i=1}^{n} U_i = \mathcal{L}\left(\cup_{i=1}^{n} U_i\right)$.

**Ejercicio 2.** [**2 puntos**] Sea $V$ y $V'$ espacios vectoriales de dimensión finita y $\Phi : V \to V^{**}$, $\Phi' : V' \to (V')^{**}$ los correspondientes isomorfismos del Teorema de reflexividad. Demostrar que si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces $\Phi' \circ f = (f^t)^t \circ \Phi$.

*Demostración.* Describimos en primer lugar las aplicaciones mencionadas:

$$\begin{array}{llll}
f : V \to V' & & & \\
\Phi : V \to V^{**} & \Phi(v) = \Phi_v & \forall \phi \in V^*, & \Phi_v(\phi) = \phi(v) \\
\Phi' : V' \to (V')^{**} & \Phi'(v') = \Phi'_{v'} & \forall \phi' \in (V')^*, & \Phi'_{v'}(\phi') = \phi'(v') \\
f^t : (V')^* \to V^* & f^t(\phi') = \phi' \circ f & & \\
(f^t)^t : V^{**} \to (V')^{**} & (f^t)^t(\Phi_v) = \Phi_v \circ f^t & &
\end{array}$$

Veamos ahora la igualdad pedida:

$$V \xrightarrow{\ f\ } V' \xrightarrow{\ \Phi'\ } (V')^{**}$$

$$V \xrightarrow{\ \Phi\ } V^{**} \xrightarrow{\ (f^t)^t\ } (V')^{**}$$

Por tanto, vemos que ambas composiciones tienen el mismo dominio y codominio. Veamos ahora si, $\forall v \in V$, se cumple que $(\Phi' \circ f)(v) = ((f^t)^t \circ \Phi)(v)$.

$$(\Phi' \circ f)(v) = \Phi'[f(v)] = \Phi'_{f(v)} \quad \in (V')^{**}$$

$$((f^t)^t \circ \Phi)(v) = (f^t)^t(\Phi(v)) = (f^t)^t(\Phi_v) = \Phi_v \circ f^t \quad \in (V')^{**}$$

Como ambos pertenecen a $(V')^{**}$, les aplicamos $\phi' \in (V')^*$.

$$\Phi'_{f(v)}(\phi') = \phi'(f(v)) = (\phi' \circ f)(v) \quad \in \mathbb{K}$$

$$(\Phi_v \circ f^t)(\phi') = \Phi_v(f^t(\phi')) = \Phi_v(\phi' \circ f) = (\phi' \circ f)(v) \quad \in \mathbb{K}$$

Por tanto, tenemos que se verifica lo pedido. $\square$

**Ejercicio 3.** [**3 puntos**] En el espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas de orden 3, $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, se considera $U = \{A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \mid tr(AM) = 0\}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular un complementario $W$ de $U$ en $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

   Calculo en primer lugar una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}), \quad A = -A^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que una base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Calculo ahora un base de $U$.

$$\begin{aligned} U &= \{A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \mid tr\,(AM) = 0\} = \\ &= \left\{ A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, tr\left[ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \right\} = \\ &= \{A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \mid a_{12} + \cancel{a_{13}} + a_{12} - a_{23} - \cancel{a_{13}} - a_{23} = 0\} = \\ &= \{A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \mid 2a_{12} - 2a_{23} = 0\} = \{A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \mid a_{12} = a_{23}\} \end{aligned} \tag{1}$$

   Por tanto, tenemos que la base $\mathcal{B}_U$ de $U$ es:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Por tanto, para obtener un complementario de $U$ es necesario ampliar la base $\mathcal{B}_U$ a una base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Sea dicha base ampliada $\bar{\mathcal{B}}$.

$$\bar{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Por tanto, tenemos que el complementario de $U$, $W$, es:

$$W = \mathcal{L}\left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

   Es fácil ver que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

2. Calcular un complementario de

$$T = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + U\right\}\right)$$

en $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})/U$.

Calculo en primer lugar la dimensión del espacio cociente:

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})/U\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\right) - \dim_{\mathbb{R}}\left(U\right) = 3 - 2 = 1$$

Como la suma de las dimensiones de un subespacio y las de su complementario dan la dimensión del espacio vectorial, tenemos que la dimensión del subespacio complementario es nula, ya que:

$$1 = \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})/U\right) = dim_{\mathbb{R}}\left(T\right) + 0 = 1 + 0 = 1$$

Por tanto, tenemos que es complementario de $T$ es $\{0\}$.

3. Sea $f : \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(A) = tr(AM)$. Comprobar que $f \in (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^*$ y calcular una base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ que contenga a $f$.

Supuesto que $f$ es lineal, al ser una forma lineal tendríamos directamente el resultado buscado. Por tanto, comprobamos que $f$ es lineal.

Sean $A, B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}), \qquad a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(aA + bB) &= tr[(aA + bB)M] = tr(aA + bB) \cdot tr(M) = [atr(A) + btr(B)]tr(M) = \\ &= atr(AM) + btr(BM) = af(A) + bf(B) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $f$ es lineal y, por tanto, $f \in (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^*$. Calculamos ahora una base $\mathcal{B}^*$ de $(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^*$ tal que $f \in \mathcal{B}^*$.

Sea $\mathcal{B}_0$ la base usual de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, es decir.

$$\mathcal{B}_0 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Sea $\mathcal{B}_0^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ su base dual tal que:

$$\varphi_i \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} = a_i \qquad\qquad \forall i = 1, 2, 3$$

Como $f \in (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^*$, calculamos sus coordenadas en la base especificada.

$$f \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} = tr\left[\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \overset{Ec.\ 1}{=} 2a_1 - 2a_3$$

Por tanto, tenemos que $f = 2\varphi_2 - 2\varphi_3 \Longrightarrow f = (2, -2, 0)_{\mathcal{B}_0^*}$.

Veamos si $\varphi_2, \varphi_3$ son linealmente independientes a $f$ y, por tanto, forman base:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{B}^* = \{f, \varphi_2, \varphi_3\} \text{ base de } \left(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\right)^*$$

**Ejercicio 4. [3 puntos]** Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual verifica:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular, en caso de que existan, bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz de $f$ en esas bases sea:
$$M(f, \mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculo en primer lugar $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(-2, 3, -1)\}\right)$$

   Sean ahora las bases buscadas $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}, \mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$. Por la matriz dada, es necesario que:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(v_1) = v_1' \\ f(v_2) = v_2' \\ f(v_3) = 0 \Longrightarrow v_3 \in Ker(f) \end{array} \right.$$

   Una posible solución es:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-2, 3, -1)\}$$
$$\mathcal{B}' = \{(3, -3, 1), (2, -2, 1), (1, 0, 0)\}$$

   donde los siguientes determinantes prueban que forman base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. Determinar si es posible resolver el apartado anterior con una única base (esto es, con $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$) y, en caso de ser posible, calcular esa base.

Sea ahora la bases buscada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Por la matriz dada, es necesario que:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \\ f(v_3) = 0 \Longrightarrow v_3 \in Ker(f) \end{cases}$$

Notamos la base usual de $\mathbb{R}^3$ como $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$. Una posible solución consiste en fijar $v_3 = (-2, 3, -1)$ y $v_2 = e_3 = (0, 0, 1)$. Notamos $v_1 = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Para calcular $v_1$, imponemos la siguiente condición:

$$\begin{aligned} v_1 = f(v_1) \Longrightarrow xe_1 + ye_2 + ze_3 = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow xe_1 + ye_2 + ze_3 = x[3e_1 - 3e_2 + e_3] + y[2e_1 - 2e_2 + e_3] + ze_3 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow x[2e_1 - 3e_2 + e_3] + y[2e_1 - 3e_2 + e_3] = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow [2e_1 - 3e_2 + e_3](x + y) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que la condición que ha de cumplir $v_1$ es $x + y = 0$, de lo que deducimos que una posible solución es:

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (-2, 3, -1)\}$$