
# Variable Compleja I

# Examen X

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Variable Compleja I
# Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Prueba Intermedia.

**Fecha** 29 de Abril de 2025.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1** (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $\Omega$.

- [**1 punto extra**] Deducir que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ es continua y probar que admite primitiva.

**Ejercicio 2.**

1. [**1.5 puntos**] Probar que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera:
$$f(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

2. [**1.5 puntos**] Calcular la integral
$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2}\, dz.$$

**Ejercicio 3** (3.5 puntos)**.** Dada $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $z_0 \in D(0,1)$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando
$$z^2 f''(z) + f(z) = g(z), \qquad \forall z \in D(0,1),$$

**Ejercicio 1** (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $\Omega$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Como la parte real de $z$ es continua, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \text{mín}\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$$

Entonces, para todo $z \in K$ se tiene que:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leqslant \frac{1}{n^M} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $M > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^M}$ converge, y por el Test de Weierstrass, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente en $K$.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como $z$ es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de $\Omega$.

- **[1 punto extra]** Deducir que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ es continua y probar que admite primitiva.

  Probaremos ahora la continuidad de $g$ en $\Omega$, algo que no tenemos directo por no ser $\Omega$ compacto. Fijado $z \in \Omega$, por ser $\Omega$ abierto $\exists R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Entonces, tomando $r = R/2$ se tiene que $z \in \overline{D}(z, r) \subset \Omega$, con $K = \overline{D}(z, r)$ compacto. Como $K$ es compacto y el término general de la serie de $g$ está formado por funciones continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de la serie en $K$ nos garantiza que $g$ es continua en $z \in K$. Como $z$ era arbitrario en $\Omega$, se concluye que $g$ es continua en $\Omega$.

  Para probar que admite primitiva, como $\Omega$ es estrellado podríamos intentar ver si $g$ es holomorfa en $\Omega$, algo que no es trivial puesto que no se trata de una serie de potencias. Por tanto, veamos que la integral para todo camino $\gamma$ en $\Omega$ es nula. Fijado un camino cerrado $\gamma$, como $\gamma$ es una función continua sabemos que $\gamma^*$ es compacto, por lo que la serie converge uniformemente en $\gamma^*$. Por tanto, podemos intercambiar la integral y la suma:

  $$\int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}\, dz = \sum_{n\geqslant 1} \int_\gamma \frac{1}{n^z}\, dz \overset{(*)}{=} \sum_{n\geqslant 1} 0 = 0$$

  donde en $(*)$ hemos usado el Teorema Local de Cauchy, puesto que el integrando es holomorfa ya que $z \notin \mathbb{R}_0^-$ para todo punto de $\Omega$.

  Por tanto, $g$ es continua y admite primitiva en $\Omega$.

**Ejercicio 2.**

1. **[1.5 puntos]** Probar que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera:

$$f(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Por el Carácter local de la Holomorfía, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Por tanto, también sabemos que $f \in C(\mathbb{C}^*)$. Estudiar la derivabilidad en el origen no es sencillo, y planteamos varias opciones.

**Opción 1.** Estudiemos en primer lugar la continuidad de $f$ en el origen. Sabemos que:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - e^0}{z - 0} \overset{(*)}{=} e^0 = 1 = f(0)$$

donde en $(*)$ hemos usado la definición formal de la derivada de la exponencial en el origen.

Por tanto, sabemos que $f \in C(\mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Por el corolario del Teorema de Extensión de Riemman, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

**Opción 2.** Supongamos que no caemos en la primera opción, que evidentemente es mucho más directa. Entonces, buscamos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

Desarrollando la exponencial en serie de Taylor, tenemos que:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 - z}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z^2} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

Para poder intercambiar sumatoria con límite, necesitamos que la sumatoria sea una función continua, y para ello necesitamos que haya convergencia uniforme. Calculamos el radio de convergencia de la serie de potencias:

$$\left\{ \frac{1}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{1} \right\} = \left\{ \frac{1}{n+3} \right\} \to 0$$

Por la fórmula de Cauchy-Hadamard, el radio de convergencia es $R = \infty$. Por tanto, la serie converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$. Tomando $K = \overline{D}(0, r)$ para cierto $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \to 0} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f$ es derivable en el origen (con $f'(0) = 1/2$), y por tanto $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. **[1.5 puntos]** Calcular la integral

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2}\, dz.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{A(z-1)^2 + Bz(z-1) + Cz}{z(z-1)^2}$$

- Si $z = 0$, tenemos $1 = A$.
- Si $z = 1$, tenemos $1 = C$.
- Igualando los coeficientes de $z^2$, tenemos $0 = A + B$, por lo que $B = -1$.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2}\, dz = \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z}\, dz - \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{z-1}\, dz + \int_{C(0,2)} \frac{e^z - 1}{(z-1)^2}\, dz$$

Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^z - 1 \end{array}$$

Sabemos que $f$ es entera, y usando la fórmula de Cauchy para las derivadas, tenemos que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i f(0) - 2\pi i f(1) + 2\pi i f'(1) = 2\pi i\,(0 - (e-1) + e) = 2\pi i$$

**Ejercicio 3** (3.5 puntos)**.** Dada $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $z_0 \in D(0,1)$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando

$$z^2 f''(z) + f(z) = g(z), \qquad \forall z \in D(0,1),$$

Como $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Supongamos ahora la existencia de una función entera $f$ que verifique la ecuación dada. Entonces, existe una sucesión $\{\beta_n\}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de serie de potencias, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

De nuevo, por el mismo Teorema:

$$f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^{n-2} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Podemos por tanto escribir la ecuación dada como:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+1)\beta_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)
\end{aligned}$$

Por el Principio de Identidad, se tiene que:

$$\alpha_n = (n(n-1)+1)\beta_n \Longrightarrow \beta_n = \frac{\alpha_n}{n(n-1)+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n(n-1)+1} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Comprobemos que dicha función es holomorfa en $D(0,1)$. Como $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, entonces su radio de convergencia es $R_g = 1$, por lo que $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \to 1$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_n}{n(n-1)+1}\right|} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n-1)+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, $R_f = 1$ y por tanto $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, demostrando así la existencia de una función entera $f$ que verifique la ecuación dada. Además, esta es única por el Principio de Identidad.