Topología I

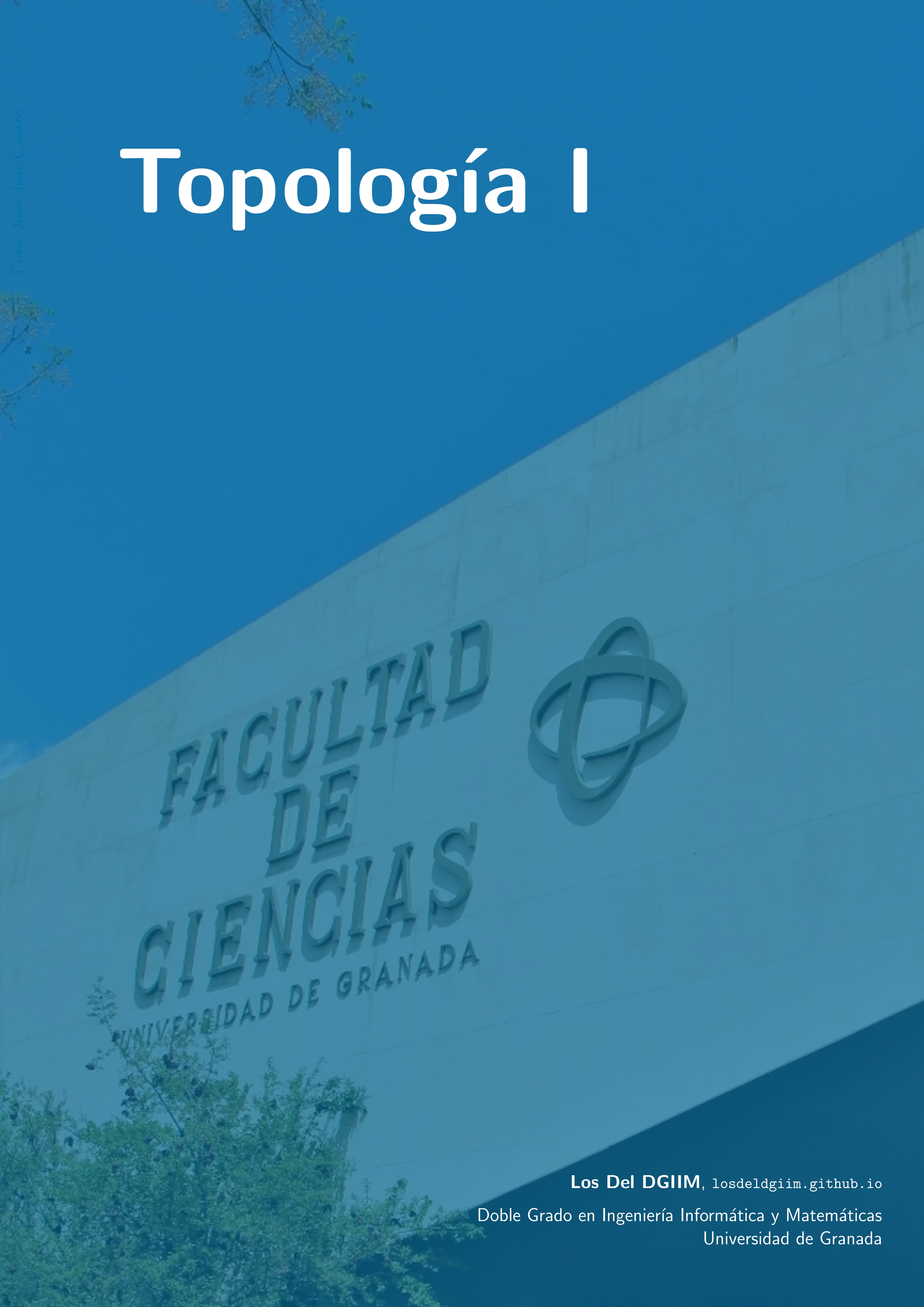


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Espacios Topológicos

1.1. La topología de $\mathbb{R}^n$. Los Espacios Métricos

Definición 1.1. Se define el conjunto $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\}\} \qquad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Definición 1.2 (Producto escalar)**.** Se define el producto escalar como:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Definición 1.3 (Norma euclídea)**.** Se define la norma euclídea o norma usual en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_2 : \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

Asociada a $\| \cdot \|_2$ tenemos la **distancia** euclídea o usual en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_2 : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d_2(x, y) = \|y - x\|_2 \end{aligned}$$

Notación. En el caso de que no se especifique subíndice en la distancia, nos referiremos a la distancia euclídea.

Algunas propiedades que se verifican de la distancia son:

1. $d(x, y) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Además, $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. Simetría: $d_2(x, y) = d_2(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
3. Desigualdad triangular: $d_2(x, z) \leqslant d_2(x, y) + d_2(y, z), \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Para $\mathbb{R}$ $(n = 1)$, se tiene que:

$$\|x\|_2 = |x| \qquad d(x, y) = |y - x| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Definición 1.4 (Bola)**.** Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Se definen:

- **Bola (abierta)** de centro x y radio r como:

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$$

- **Bola cerrada** de centro x y radio r como:

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) \leqslant r\}$$

En el caso de que simplemente se mencione una bola, sin especificar si es abierta o cerrada, nos referiremos a la bola abierta.

Definición 1.5 (Esfera)**.** Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Se define la esfera de centro x y radio r como:

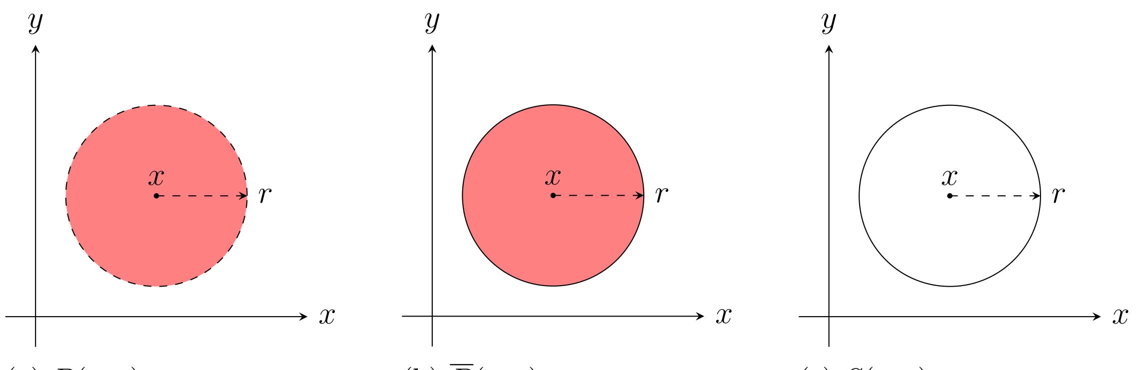
$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) = r\}$$

Ejemplo. Algunos ejemplos de bolas y esferas son:

1. Para $\mathbb{R}$ ($n = 1$), consideramos $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

$$\begin{aligned} B(x,r) &=]x-r, x+r[\\ \overline{B}(x,r) &= [x-r, x+r] \\ S(x,r) &= \{x-r, x+r\} \end{aligned}$$

2. Para $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$), consideramos $x \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces:



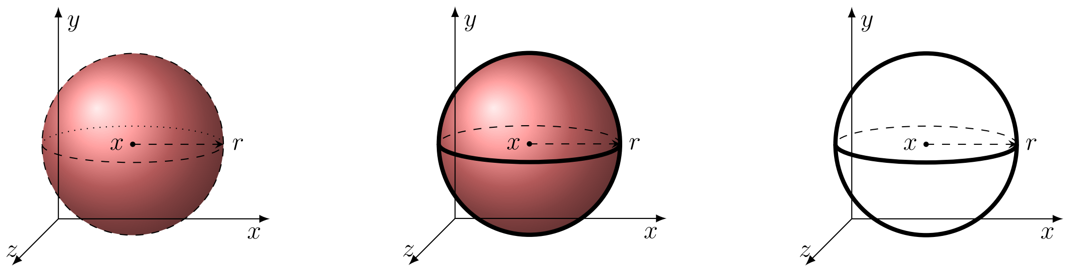
(a) $B(x,r)$.
Podemos ver que el círculo se incluye pero la circunferencia no.

(b) $\overline{B}(x,r)$.
Podemos ver que el círculo se incluye y la circunferencia también.

(c) $S(x,r)$.
Podemos ver que solo se incluye el círculo. La circunferencia no se incluye.

Figura 1.1: Bolas y esferas en el caso de $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$).

3. Para $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$), consideramos $x \in \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces:



(a) $B(x, r)$.
Podemos ver que el interior se incluye pero el borde no.

(b) $\overline{B}(x, r)$.
Podemos ver que el interior y el borde se incluyen.

(c) $S(x, r)$.
Podemos ver que solo se incluye el borde.

Figura 1.2: Bolas y esferas en el caso de $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$).

De las definiciones, se deduce de forma directa y trivial la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que:*

1. $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$,
2. $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus S(x, r)$,
3. *Sea $s \in \mathbb{R}^+$. Si $r < s$, entonces $\overline{B}(x, r) \subset B(x, s)$.*

A continuación, veamos que las bolas son de gran utilidad para la convergencia de sucesiones. Recordemos la definición de sucesión convergente:

Definición 1.6. Una sucesión $\{x_n\}$ es convergente a un límite x_0 si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \mid |x_j - x_0| < \varepsilon \quad \forall j > j_0$$

Observación. Notemos que, usando el concepto de distancia, una sucesión $\{x_n\}$ es convergente a un límite x_0 si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \mid d(x_j, x_0) < \varepsilon \quad \forall j > j_0$$

Notemos que, usando el concepto de bola, una sucesión $\{x_n\}$ es convergente a un límite x_0 si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \mid x_j \in B(x_0, \varepsilon) \quad \forall j > j_0$$

Veamos ahora lo análogo para el caso de la continuidad de funciones:

Definición 1.7. Una sucesión $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in I$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I, \ |x - x_0| < \delta$$

Observación. Notemos que, usando el concepto de distancia, dado $I \subset \mathbb{R}$, la función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in I$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta > 0 \mid d[f(x) - f(x_0)] < \varepsilon \quad \forall x \in I, \ d[f(x) - f(x_0)] < \delta$$

Notemos que, usando el concepto de bola, una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in I$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta > 0 \mid f[B(x_0, \delta)] \subset B[f(x_0, \varepsilon)]$$

Definición 1.8 (Espacio Métrico)**.** Sea $X \neq \emptyset$ un cojunto no vacío. Un espacio métrico es un par (X, d) donde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ cumple:

D1) $d(x, y) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in X$. Además, se tiene que $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

D2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$.

D3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$.

A la aplicación d se le denomina **distancia** en X.

Observación. Los apartados D2, D3 y la segunda parte de D1 implican la primera parte de D1. Para verlo, sean $x, y \in X$:

$$0 \overset{2^a\ D1}{=} d(x, x) \overset{D3}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{D2}{=} 2d(x, x)$$

En un espacio métrico también se definen las bolas y las esferas definidas en el caso de los reales. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $x \in X$ y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

- $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$
- $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant r\}$
- $S(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) = r\}$

Notación. Notamos $\mathbb{S}^n = S(x, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donde $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 1.9 (Espacio Normado)**.** Sea V un espacio vectorial real. Un espacio normado es un par $(V, \|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ cumple:

N1) $\|v\| \geqslant 0, \quad \forall v \in V$. Además, se tiene que $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|, \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

N3) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$. Se denomina desigualdad de Minkowski.

Diremos que $\|\cdot\|$ es una **norma en** V.

Observación. Los apartados N2, N3 y la segunda parte de N1 implican la primera parte de N1. Para verlo, sea $v \in V$:

$$0 \overset{2^a\ N1}{=} \|v + (-v)\| \overset{N3}{\leqslant} \|v\| + \|-v\| \overset{N2}{=} 2\|v\|$$

Proposición 1.2. *Todo espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es también un espacio métrico con*

$$d(u, v) = \|v - u\|, \quad \forall u, v \in V$$

A d se le denomina distancia asociada a (o inducida por) la norma, y se denota por $d_{\|\ \|}$.

Demostración. Veamos que la distancia así definida es una distancia:

1. $d(u,v) = ||v-u|| \geqslant 0$. Además, se tiene que

$$d(u,v) = ||v-u|| = 0 \Longleftrightarrow v-u=0 \Longleftrightarrow v=u$$

2. $d(u,v) = ||v-u|| = |-1| \cdot \|u-v\| = \|u-v\| = d(v,u)$.

3. $d(u,t) = ||t-u|| = ||t-u+v-v|| = ||v-u+t-v||$. Aplicando la desigualdad triangular, tenemos que $d(u,t) \leqslant ||v-u|| + ||t-v|| = d(u,v) + d(v,t)$.

Por tanto, vemos que efectivamente es una distancia y, por tanto, se trata de un espacio métrico. □

Definición 1.10 (Métrica euclídea)**.** Una aplicación se denomina por métrica euclídea si es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

Definición 1.11 (Espacio vectorial euclídeo)**.** Un espacio vectorial euclídeo es un par $(V, \ \langle,\rangle)$ donde V es un espacio vectorial real y $\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es una métrica euclídea en V.

En él, tenemos la norma y distancia asociada (o inducida):

$$\|v\| = \sqrt{\langle r, r\rangle} \qquad d(u,v) = \|v-u\| \qquad \forall u,v \in V$$

Observación. Se cumple que:

$$\text{E.V. Euclídeos} \subsetneq \text{E. normados} \subsetneq \text{E. métricos}$$

Ejemplo. Ejemplos de espacios normados son:

1. $(\mathbb{R}^n, \ \langle,\rangle)$, con $\langle,\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ es un espacio vectorial euclídeo con la norma $\|\cdot\|_2$.

2. En $\mathbb{R}^n$, para cada $p \in \mathbb{N}$ se define la norma p como:

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_p : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} \end{array}$$

   Se tiene que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

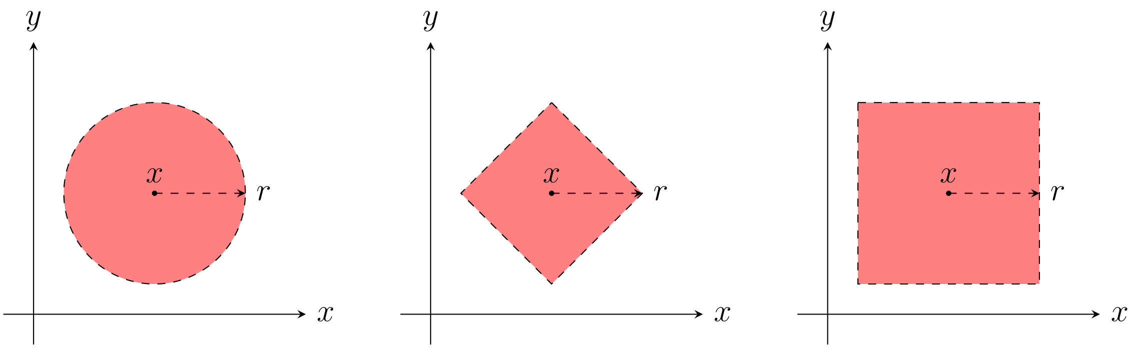
   - Para $p=2$, se tiene que $\|\cdot\|_2$ es la norma usual.
   - Para $p=1$, la norma $\|\cdot\|_1$ es la distancia del taxi o métrica de Manhattan.

3. En $\mathbb{R}^n$, se define la norma infinito como $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|x_i|\}$.

   Se tiene que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

Veamos cómo son las bolas abiertas para las distintas normas presentadas en el anterior ejemplo. Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

$$\begin{array}{l} B_2(x,r) = \{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < r\} \\ B_1(x,r) = \{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1-y_1| + |x_2-y_2| < r\} \\ B_\infty(x,r) = \{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} < r\} \end{array}$$



(a) $B_2(x,r)$ (b) $B_1(x,r)$ (c) $B_\infty(x,r)$

Figura 1.3: Bolas abiertas en el caso de $\mathbb{R}^2$ $(n=2)$ para distintas normas.

Ejemplo. En el espacio vectorial $V = C^0([a,b],\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$, con $a<b$ tenemos la métrica euclídea

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

Tenemos que dicho espacio vectorial con esa norma definida es un espacio vectorial euclídeo.

Cabe destacar que dicho espacio vectorial tiene dimensión infinita.

Ejemplo. Sea $X\neq\emptyset$. Se define la distancia discreta en X como $d_{disc}: X\times X\to\mathbb{R}$ como:

$$d(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x=y \\ 1 & \text{si} & x\neq y \end{array}\right.$$

Dado $x\in X, r\in\mathbb{R}^+$, las bolas y esfera son:

$$B(x,r)=\left\{\begin{array}{ccc} \{x\} & \text{si} & r\leqslant 1 \\ X & \text{si} & r>1 \end{array}\right. \qquad \overline{B}(x,r)=\left\{\begin{array}{ccc} \{x\} & \text{si} & r<1 \\ X & \text{si} & r\geqslant 1 \end{array}\right. \qquad S(x,r)=\left\{\begin{array}{ccc} X\setminus\{x\} & \text{si} & r=1 \\ \emptyset & \text{si} & r\neq 1 \end{array}\right.$$

Proposición 1.3. *Si d es una distancia en X y $\lambda\in\mathbb{R}^+$, entonces λd es también una distancia en X. Además, se tiene que:*

$$B_{\lambda d}(x,r) = B_d\left(x,\frac{r}{\lambda}\right)$$

Demostración. Comprobamos en primer lugar que se trata de una distancia. Para ello ha de cumplir las tres condiciones dadas en la definición de espacio métrico:

1. $\lambda d(x,y)\geqslant 0,\quad \forall x,y\in X$, ya que $\lambda>0, d(x,y)\geqslant 0$. Además, como $\lambda\neq 0$, se tiene que $\lambda d(x,y)=0 \Longleftarrow x=y$.

2. Trivialmente, se tiene que $\lambda d(x,y)=\lambda d(y,x),\quad \forall x,y\in X$.

3. $\lambda d(x,z)\leqslant \lambda d(x,y)+\lambda d(y,z),\quad \forall x,y,z\in X$, ya que al ser $\lambda>0$ se puede sacar como factor común y pasar dividiendo sin que afecte al sentido de la desigualdad.

Por tanto, tenemos que se trata de una distancia. Comprobemos lo referido a las bolas:

$$B_{\lambda d}(x,r) = \{y \in X \mid \lambda d(x,y) < r\} = \left\{y \in X \mid d(x,y) < \frac{r}{\lambda}\right\} = B_d\left(x, \frac{r}{\lambda}\right)$$

□

Definición 1.12 (Conjunto abierto métrico)**.** Sea (X,d) espacio métrico. Diremos que un conjunto $U \subset X$ es abierto métrico si $U = \emptyset$, o bien

$$\forall x \in U,\ \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,r) \subset U$$

Denotamos $\mathcal{T}_d = \{U \subset X \mid U \text{ es un abierto métrico en } (X,d)\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, d)$, hemos de notar que todo abierto no puede incluir al borde, ya que si se incluyese entonces al escoger un punto del borde no se cumpliría la condición pedida.

Algunas propiedades de los abiertos son:

Proposición 1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces:*

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_d$, *entonces* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$, *entonces* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

Demostración.

(A1) $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ trivialmente. Además, $X \in \mathcal{T}_d$ debido a que, para todo punto de X, se tiene que la bola centrada en él, independientemente del radio, está contenida en el total X.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_d$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Sea $x \in U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, por lo que $\exists i \in I \mid x \in U_i$. Por tanto, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,r) \in U_i \subset U$, por lo que se tiene.

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces, como $x \in U_i$, se tiene que $\exists B(x,r_i) \subset U_i$ con $r_i \in \mathbb{R}^+$ para $i = 1,2$. Supongamos (sin perder generalidad) que $r_1 \leqslant r_2$. Entonces, tenemos que $B(x,r_1) \subseteq B(x,r_2) \subset U_2$. Por tanto, como $B(x,r_1) \subset U_1, U_2$ tenemos que $B(x,r_1) \subset U_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

□

Por la tercera propiedad, la demostración mediante inducción sobre k del siguiente apartado es inmediata:

Corolario 1.4.1. *Sea (X,d) un espacio métrico.*
Entonces, si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_d$, $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_d$.

Proposición 1.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Se cumple que todas las bolas abiertas son abiertos métricos.*

Demostración. Sea la bola abierta $B(x, r)$. Consideramos $y \in B(x, r)$. Veamos si $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$.

Como $d(x, y) < r$ por la elección de y, tenemos que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid d(x, y) + \varepsilon < r$. Veamos que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Considerando $z \in B(y, \varepsilon)$, se tiene que:

$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) \leqslant \varepsilon + d(x, y) < r$$

Por tanto, tenemos que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$, por lo que la bola $B(x, r)$ es un abierto. □

No obstante, el otro sentido de la afirmación no se tiene; es decir, no todo abierto métrico es una bola. Ejemplo de esto es $\mathbb{R}^n$.

Observación. Respecto a la propiedad A3), hemos de destacar que, en general, la intersección infinita de abiertos no es abierto.

Por ejemplo, dado $x \in (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_2)$, tenemos que:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} B\left(x, \frac{1}{j}\right) = \{x\}$$

y un punto solo no es un abierto.

Proposición 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, todo abierto se puede escribir como la unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.*

Demostración. Sea el abierto $U \subset \mathcal{T}$. Sea $x \in U \in \mathcal{T}$, y por ser U un abierto se tiene que $\exists \varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$.

Por tanto, $x \in \overline{B}\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \subset B(x, \varepsilon_x) \subset U$, por lo que:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \subset \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x) \subset U$$

Por tanto, por doble inclusión tenemos demostrado el resultado. □

Ejemplo. Veamos ejemplos de abiertos:

1. En $(\mathbb{R}, d_u)$ los únicos conjuntos abiertos son los que conocemos como intervalos abiertos.
2. En (X, d_{disc}) tenemos que $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(x)$.

Definición 1.13. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y d_1, d_2 distancias en X. Decimos que d_1, d_2 son equivalentes en X si $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$ad_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant bd_1(x, y), \qquad \forall x, y \in X$$

Proposición 1.7. *Si d_1, d_2 son distancias equivalentes en $X \neq \emptyset$, entonces:*

$$\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$$

Demostración. Supongamos que las distancias son equivalentes; es decir, $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$ad_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant bd_1(x,y), \qquad \forall x, y \in X$$

Demostramos por doble inclusión.

- $\underline{T_{d_1} \subset T_{d_1}}$: Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, y supongamos $U \neq \emptyset$ ya que en dicho caso se tiene de forma directa. Veamos que $U \in \mathcal{T}_{d_2}$. Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1}$, por lo que:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B_{d_1}(x,\varepsilon) \subset U$$

  Veamos que $B_{d_2}(x, a\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$. Para todo $y \in B_{d_2}(x, a\varepsilon)$, se tiene que $ad_1(x,y) \leqslant d_2(y,x) < a\varepsilon$ por pertenecer y a la bola. Por tanto, como $d_1(x,y) < \varepsilon$, se tiene que $y \in B_{d_1}(x,\varepsilon)$ y, por tanto, $B_{d_2}(x,a\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$. Por tanto, $U \in \mathcal{T}_{d_2}$ y, por tanto, $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

- $\underline{T_{d_1} \supset T_{d_1}}$: Consideramos $U \in \mathcal{T}_{d_2}, U \neq \emptyset$. Veamos que $U \in \mathcal{T}_{d_1}$. Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_2}$, por lo que:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B_{d_2}(x, b\varepsilon) \subset U$$

  Veamos que $B_{d_1}(x,\varepsilon) \subset B_{d_2}(x,b\varepsilon)$. Para todo $y \in B_{d_1}(x,\varepsilon)$, por ser las distancias equivalentes se tiene que $d_2(y,x) \leqslant bd_1(x,y) < b\varepsilon$ por pertenecer y a la bola. Por tanto, como $d_2(x,y) < b\varepsilon$, se tiene que $y \in B_{d_2}(x,b\varepsilon)$ y, por tanto se tiene que $B_{d_1}(x,\varepsilon) \subset B_{d_2}(x,b\varepsilon)$. Por tanto, $U \in \mathcal{T}_{d_1}$ y, por tanto $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$.

Por doble inclusión, se tiene que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Observación. Si $\|\cdot\|_i$ y $\|\cdot\|_j$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene[1] que sus distancias asociadas d_i y d_j son equivalentes, luego $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_j$. Por tanto, en $\mathbb{R}^n$ se denomina $\mathcal{T}_u$ independientemente de la norma escogida.

No obstante, no es cierto que toda distancia en $\mathbb{R}^n$ esté asociada a una norma. Por ejemplo, d_{disc} no está asociada a una norma, y se tiene que

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{T}_{d_{disc}} \neq \mathcal{T}_u$$

1.2. Espacios Topológicos

Definición 1.14 (Espacio Topológico)**.** Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$ donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos que cumple:

A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,

A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

La familia $\mathcal{T}$ decimos que es una <u>topología</u> en X, y los elementos de $\mathcal{T}$ decimos que son <u>abiertos</u> en $(X, \mathcal{T})$.

[1]Este resultado no se demuestra, ya que es materia de Análisis, no de Topología.

Proposición 1.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces, Si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces:*

$$U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$$

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios topológicos son:

1. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $(X, \mathcal{T}_d)$ es un espacio topológico. A $\mathcal{T}_d$ se le denomina topología métrica en (X, d).

   Si $\mathcal{T}$ es una topología en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ se dice que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable.

2. Topología usual en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_{d_2}$.

3. Topología trivial: $(X, \mathcal{T}_t)$ tal que $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$.

4. Topología discreta: $(X, \mathcal{T}_{disc})$ tal que $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{d_{disc}}$. A $\mathcal{T}_{disc}$ también se le denota como $\mathcal{T}_D$.

5. Topología del punto incluido: Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$. Entonces, la topología del punto incluido es:

$$\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid x_0 \in U\}$$

6. $(\mathbb{R}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.

7. Topología cofinita: Sea $X \neq \emptyset$, y sea $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\}$.

   Si X es finito, se tiene que $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_{disc}$.

8. Topología conumerable: Sea $X \neq \emptyset$, y sea $\mathcal{T}_{CN} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X$ tal que $X \setminus U$ es numerable$\}$.

   Si X es numerable, se tiene que $\mathcal{T}_{CN} = \mathcal{T}_{disc}$.

9. Topología de Sierpinski: Sea $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

10. Topología de Sorgenfrey: $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_S$ es un conjunto tal que:

$$U \in \mathcal{T}_S \Longleftrightarrow \forall x \in U, \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid [x, x + \varepsilon[\ \in U$$

Como hemos visto, un mismo $X \neq \emptyset$ puede admitir diferentes topologías.

Lema 1.9. *Si $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, entonces $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que:*

$$\exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tales que: } \begin{cases} x \in U,\ y \in V \\ \wedge \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Demostración. Por ser metrizable, tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ la topología métrica en (X, d). En dicho espacio métrico, podemos considerar la distancia $d(x, y) > 0$. Entonces, consideramos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $r < \dfrac{d(x, y)}{2}$, sea $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$, que existen por ser $\mathcal{T}_d$ la topología métrica. Entonces,

$$U \cap V = \{z \in X \mid d(x, z) < r \wedge d(y, z) < r\}$$

Consideramos ahora $z \in U \cap V$, y veamos a que llegamos a una contradicción. Por la desigualdad triangular, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < 2r$. No obstante, por la elección de r tenemos que $d(x,y) > 2r$, por lo que llegamos a un absurdo y tenemos, por tanto, que $U \cap V = \emptyset$. □

Definición 1.15. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto, y $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X. Diremos que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$ o, equivalentemente, que $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subset T_2$.

Lo notaremos como $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ o, equivalentemente, $\mathcal{T}_2 \geqslant \mathcal{T}_1$.

Además, si $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \leqslant \mathcal{T}_1$, lo notaremos como $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de topologías más finas o menos finas son:

1. $\mathcal{T}_{CF} \leqslant \mathcal{T}_{CN}$ en $X \neq \emptyset$.
2. En $X \neq \emptyset$, se cumple que $\mathcal{T}_t \leqslant \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_{disc}, \quad \forall \mathcal{T}$ topología.
3. En $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_S$. No obstante, no son iguales, ya que $[0,1[\in \mathcal{T}_S \setminus \mathcal{T}_u$.
4. Hay topologías que no son comparables; por ejemplo, las topologías de punto incluido.

Definición 1.16 (Conjunto cerrado)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que $F \subset X$ es cerrado si $X \setminus F$ es abierto; es decir, $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Denotamos $C_\mathcal{T} = \{F \in X \mid F \text{ es cerrado en } (C, \mathcal{T})\}$.

De la definición de los cerrados como los complementarios de los abiertos, y partiendo de la definición de los abiertos, se tiene que:

C1) $\emptyset, X \in C_\mathcal{T}$,

$$X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{T} \qquad X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{T}$$

C2) Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset C_\mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in C_\mathcal{T}$,

$$X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus F_i) \in \mathcal{T}$$

donde he afirmado que pertenece a la topología ya que $X \setminus F_i$ es un abierto por ser F_i un cerrado; y la unión arbitraria de abiertos es abierta.

C3) Si $F_1, F_2 \in C_\mathcal{T}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in C_\mathcal{T}$.

$$X \setminus (F_1 \cup F_2) = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \in \mathcal{T}$$

donde he afirmado que pertenece a la topología ya que $X \setminus F_i$ es un abierto por ser F_i un cerrado; y la intersección finita de abiertos es abierta.

De la definición de cerrado, se deduce que dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, entonces:

- $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in C_\mathcal{T}$
- $F \in C_\mathcal{T} \iff X \setminus F \in \mathcal{T}$

- $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{T}_1 \subseteq T_2 \Longleftrightarrow C_{\mathcal{T}_1} \subseteq C_{\mathcal{T}_2}$
  En particular, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow C_{\mathcal{T}_1} = C_{\mathcal{T}_2}$.
- En general, puede haber conjuntos en X que no sean conjuntos abiertos ni cerrados; es decir, $\mathcal{P}(X) \neq \mathcal{T} \cup C_{\mathcal{T}}$.

  En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, el conjunto $[0,1[\notin \mathcal{T} \cup C_{\mathcal{T}}$, por lo que se tiene lo antes mencionado.
- Una unión infinita de cerrados puede no ser cerrado.

Ejemplo. Algunos ejemplos de cerrados son:

1. Topología trivial: $(X, \mathcal{T}_t)$ tal que $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$. Tenemos que $C_t = \{\emptyset, X\}$.
2. Topología discreta: $(X, \mathcal{T}_{disc})$ tal que $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$. Tenemos que $C_{disc} = \mathcal{P}(X)$.
3. Topología del punto incluido: Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$. La topología es:
$$\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid x_0 \in U\}$$
   Sus cerrados son:
$$C_{x_0} = \{X\} \cup \{F \subset X \mid x_0 \notin F\}$$
4. Topología cofinita: Sea $X \neq \emptyset$, y sea $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\}$. Tenemos que sus cerrados son $C_{CF} = \{X\} \cup \{F \subset X \mid F \text{ es finito}\}$.
5. Topología conumerable: Sea $X \neq \emptyset$, y sea su topología la dada por
$$\mathcal{T}_{CN} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es numerable}\}$$
   Tenemos que sus cerrados son $C_{CN} = \{X\} \cup \{F \subset X \mid F \text{ es numerable}\}$.
6. $(\mathbb{R}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$. Tenemos que $\mathcal{T} = C_{\mathcal{T}}$.

Hay muchos espacios topológicos que no admiten una descripción explícita de su familia de cerrados. Ejemplos de esto son la topología usual o la topología de Sorgenfrey.

Proposición 1.10. *En un espacio métrico (X, d), las bolas cerradas con conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$, y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Veamos que $\overline{B}(x,r) \in C_d$.

Consideramos su complementario, es decir:
$$X \setminus \overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) > r\}$$

Para ver que dicho conjunto es abierto, dado $y \in X \setminus \overline{B}(x,r)$, hemos de comprobar que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(y,\varepsilon)$. Como $d(x,y) > r$, sea $\varepsilon = d(x,y) - r \in \mathbb{R}^+$.

Veamos que $B(y,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x,r)$. Consideramos $z \in B(y,\varepsilon)$. Entonces,
$$\varepsilon + r = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \varepsilon \Longrightarrow d(x,z) > r \Longrightarrow B(y,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x,r)$$

Por tanto, como para todo $y \in B(y,\varepsilon)$ existe una bola abierta contenida en $X \setminus \overline{B}(x,r)$, tenemos que este conjunto es abierto y; por tanto, $\overline{B}(x,r)$ es cerrado. $\square$

Corolario 1.10.1. *En un espacio métrico (X, d), las esferas con conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$, y consideramos $r \in \mathbb{R}^+$. Veamos que $S(x, r) \in C_d$.

Consideramos su complementario, es decir:

$$X \setminus S(x, r) = B(x, r) \cup \big(X \setminus \overline{B}(x, r)\big)$$

Como la unión finita de abiertos es un abierto, tenemos que el complementario descrito es un abierto, por lo que $S(x, r) \in C_d$. □

Teorema 1.11. *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $C \in \mathcal{P}(X)$ cumpliendo que:*

C1) $\emptyset, X \in C$.

C2) Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset C$, *entonces* $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in C$.

C3) Si $F_1, F_2 \in C$, *entonces* $F_1 \cup F_2 \in C$.

Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $C_{\mathcal{T}} = C$. Además,

$$\mathcal{T} = \{U \in X \mid X \setminus U \in C\}$$

Demostración. Comenzamos por la existencia. Veamos que $\mathcal{T}$ es una topología; es decir, comprobamos las tres propiedades de los abiertos:

A1) Trivialmente, tenemos que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ por C1).

A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Como $U_i \in \mathcal{T}$, por la definición de $\mathcal{T}$ tenemos que $X \setminus U_i \in C$. Por la propiedad C2), tenemos que $\bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus U_i) \in C$. Por tanto, por la definición de $\mathcal{T}$, tenemos que $X \setminus \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus U_i) \in \mathcal{T}$. Por último, por las leyes de Morgan, tenemos que

$$X \setminus \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i) = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$$

Por tanto, esta propiedad se tiene.

A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Como $U_i \in \mathcal{T}$, por la definición de $\mathcal{T}$ se tiene que $X \setminus U_i \in C$ para $i = 1, 2$. Por C3), se tiene que $X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2 \in C$. Además, por las leyes de Morgan, tenemos que

$$X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2 = X \setminus (U_1 \cap U_2) \in C$$

Por tanto, por la definición de $\mathcal{T}$, tenemos que $X \setminus (X \setminus (U_1 \cap U_2)) \in \mathcal{T}$. No obstante, por las propiedades del complementario, se tiene que:

$$X \setminus (X \setminus (U_1 \cap U_2)) = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$$

Veamos ahora que es única. Para ello, supongamos $\mathcal{T}'$ otra topología en X tal que $C_{\mathcal{T}'} = C$. Por tanto, como $C = C_{\mathcal{T}}$, tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

1.3. Bases de Topología

Definición 1.17 (Base)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$ si:

$$\forall U \in \mathcal{T}, \quad \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B} \text{ tal que } U = \bigcup_{i\in I} B_i$$

A los abiertos de la base $B \in \mathcal{B}$ se les denomina abiertos básicos.

Observación. Algunas observaciones de las bases topológicas son:

1. La familia $\mathcal{B}$ no tiene por qué ser finita ni numerable.
2. Las uniones $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ no tienen por qué ser finitas ni numerables.
3. Si se tienen dos familias $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{B}$ es una base, entonces $\mathcal{B}'$ es una base.
4. $\mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$ trivialmente.

Respecto a la siguiente definición, cabe destacar que no es un concepto extendido en la rama de la Topología. No obstante, es un concepto que usaremos nosotros para comparar distintas bases.

Definición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son dos bases topológicas, se dice que $\mathcal{B}$ es más económica que $\mathcal{B}'$ si:

$$|\mathcal{B}| < |\mathcal{B}'|$$

Proposición 1.12 (Caracterización de la base)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Entonces, son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}$ es una base.*
2. *$\forall U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$ se tiene que $\forall x \in U,\ \exists B = B_x \in \mathcal{B} \mid x \in B = B_x \subset U$.*

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$, y escogemos $x \in U$. Entonces, como $\mathcal{B}$ es una base, tenemos que $U = \bigcup\limits_{i=I} B_i,\ B_i \in \mathcal{B}$. Por tanto, dado $x \in U$, se tiene que $\exists i \in I$ tal que $x \in B_i = B_x \subset U, \quad B_x \in \mathcal{B}$.

$2 \Longrightarrow 1)$ Sea $U \in \mathcal{T}$. Si $U = \emptyset$ se tiene, por lo que suponemos $U \neq \emptyset$. Entonces, por hipótesis se tiene que $\forall x \in U, \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Por tanto, $U \subset \bigcup\limits_{x\in U} B_x \subset U$, por lo que por doble inclusión se tiene que $U = \bigcup\limits_{x\in U} B_x$.

□

Ejemplo. Algunos ejemplos de bases son:

1. Para $(X, \mathcal{T}_t)$, tenemos que las dos únicas bases son $\{X\}$ y $\mathcal{T}$.

2. Para (X, d) espacio métrico, tenemos que una base es:

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

A dicha base se le denomina la base usual, y se denomina como $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_u$.

La demostración de que es una base es la Proposición 1.6.

3. Para $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tenemos que la base usual es

$$\mathcal{B}_u = \{]a, b[\ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Otra base es:

$$\mathcal{B} = \{]p, q[\ \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$$

Cabe destacar que esta segunda base es numerable.

4. Para $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, tenemos que la base usual es

$$\mathcal{B}_u = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+\}$$

Otra base es:

$$\mathcal{B} = \{B(q, r) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

Cabe destacar que esta segunda base es numerable.

5. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es una base.

Además, tenemos que es la más económica. Para verlo, sea $\{x\} \in \mathcal{B}$ y comprobemos si $\{x\} \in \mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}'$ otra base. Entonces, como $x \in \{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$ y $\mathcal{B}'$ es una base, entonces, por la caracterización de la base,

$$\exists B' \in \mathcal{B}' \mid x \in B' \subset \{x\} \Longrightarrow B' = \{x\} \in \mathcal{B}'$$

6. Sea $x_0 \in X$. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$. Veamos que $\mathcal{B} = \{\{x, x_0\} \mid x \in X\}$ es una base.

Sea $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}_{x_0}, x \in U, x_0 \in U$. Entonces, $\{x, x_0\} \subset U$.

Además, tenemos que esa base es la más económica.

7. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$. Tenemos que una base es $\mathcal{B} = \{[a, b[\ \mid a < b\}$.

8. Para $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$. Tenemos que una base de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es $\mathcal{B} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$, que es la base más económica.

Cabe destacar que $\mathcal{B}' = \{\mathbb{R}\}$ no es una base.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con $\mathcal{B}$ base. Algunas propiedades que se deducen de las bases son:

B1) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$.

Sea $X \in \mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ base implica que $\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ tal que:

$$X = \bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset X$$

Por doble inclusión se tiene de forma directa.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sea $U = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Entonces, dado $x \in U$, por la caracterización de las bases topológicas, se tiene de forma directa que $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset U$.

Teorema 1.13. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo las dos siguientes propiedades:*

B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en X tal que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{B}) &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B} \textit{ tal que } U = \bigcup_{i \in I} B_i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid \forall x \in U,\ \exists B \in \mathcal{B} \textit{ con } x \in B \subset U\}\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se debe a la caracterización de las bases topológicas. Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es la menos fina que contiene a $\mathcal{B}$.

A esta topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ se le denomina topología generada por $\mathcal{B}$.

Demostración. Demostramos en primer lugar la existencia. Para ello, hemos de comprobar las tres condiciones de la topología:

A1) $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ de forma trivial. Además, por B1), se tiene que $X \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

A2) Veamos que es cerrada para uniones arbitrarias. Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$, y consideramos $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$.

Por tanto, $\exists i \in I \mid x \in U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$, por lo que $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que se tiene que $x \in B \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

A3) Veamos que es cerrada para las intersecciones finitas. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$, y consideramos $x \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Por la definición del conjunto, como $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$, tenemos que $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, con $x \in B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2$. Por tanto, $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$.

Por B2), $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por tanto, se tiene.

Tras quedar demostrada la existencia de la topología, comprobamos que $\mathcal{B}$ es una base de la topología.

En primer lugar comprobamos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, lo cual es trivial por la definición de topología. Además, la caracterización de la base es la segunda forma de expresar la topología, por lo que se tiene también.

Demostramos ahora la unicidad de la topología. Supongamos $\mathcal{T}$ topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$. Comprobemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Sea $U \in X,\ U \neq \emptyset$. Tenemos que

$$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \mid x \in B \subset U \Longleftrightarrow U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$$

Por último, demostramos que $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es la menos fina que contiene a $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{T}$ otra topología en X con $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ base, y buscamos demostrar que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$. Si $U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$, $U \neq \emptyset$, tenemos que $\exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$. Como los elementos de la base son abiertos y la unión de abiertos es abierta, tenemos que U es abierto para $\mathcal{T}$, por lo que $U \in \mathcal{T}$. □

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos del Teorema anterior:

1. Si $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a\}\}$. Como no cumple B1), tenemos que no es base de ninguna topología en X.

2. Si $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Veamos que no cumple B2), por lo que no es base de ninguna topología en X.

   Sea $B_1 = \{a, b\}, B_2 = \{b, c\}$. Tenemos que $B_1 \cap B_2 = \{b\}$, pero $\nexists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B_3 \subset \{b\}$.

3. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a < b\}$. Veamos que no cumple B2), por lo que no es base de ninguna topología en X.

   Sea $B_1 = [a, b], B_2 = [b, c]$. Tenemos que $B_1 \cap B_2 = \{b\}$, pero $\nexists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B_3 \subset \{b\}$.

4. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a \leqslant b\}$, denotando $[a, a] = \{a\}$. Como cumple las dos propiedades, tenemos que sí es base de alguna topología en X. En concreto, es base de, por ejemplo, $\mathcal{T}_{disc}$.

Proposición 1.14. *Sea $X \neq \emptyset$, y sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías en X con bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivamente. Entonces, son equivalentes:*

1. $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

2. $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1,\ \forall x \in B_1$, *se tiene que* $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \mid x \in B_2 \subset B_1$.

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea $B_1 \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Por tanto, como $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathcal{T}_2$, se tiene que $\forall x \in B_1$, $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \mid x \in B_2 \subset B_1$.

$2 \Longrightarrow 1)$ Por hipótesis, tenemos que $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1,\ \forall x \in B_1$, se tiene que $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \mid x \in B_2 \subset B_1$. Notamos B_2 como B_{2x}.

Entonces, sea $B_1 \in \mathcal{B}_1$, tenemos que:

$$B_1 \subset \bigcup_{x\in B_1} B_{2x} \subset B_1$$

Por doble inclusión, tenemos que B_1 es la unión de abiertos básicos de $\mathcal{T}_2$, por lo que $B_1 \in \mathcal{T}_2$.

Por el Teorema 1.13, tenemos que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$ por ser $\mathcal{T}_1$ la más fina.

□

De forma directa, se deduce el siguiente corolario para ver cuándo dos topologías son iguales:

Corolario 1.14.1. *Sea $X \neq \emptyset$, y sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías en X con bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivamente. Entonces, son equivalentes:*

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
2. *Ocurre a la vez lo siguiente:*
   a) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1,\ \forall x \in B_1$, *se tiene que* $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \mid x \in B_2 \subset B_1$.
   b) $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2,\ \forall x \in B_2$, *se tiene que* $\exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \mid x \in B_1 \subset B_2$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_S$.
Tenemos que una base de $\mathcal{T}_u$ es $\mathcal{B}_u = \{]a, b[\ \mid a < b\}$, y una base de la Topología de Sorgenfrey es $\mathcal{B}_S = \{[a, b[\ \mid a < b\}$. Por el teorema anterior, se tiene directamente.

Proposición 1.15. *Sea $X \neq \emptyset$ y sea $S \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Entonces,*

$$\mathcal{B}(S) = \{X\} \bigcup \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i \mid S_i \in S,\ I \text{ finito} \right\}$$

es base de una topología en X, denominada <u>*topología generada por S*</u> *y denominada por $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\mathcal{B}(S))$.*
Además, $\mathcal{T}(S)$ es la la topología menos fina que contiene a S.

Demostración. Para demostrarlo, tan solo es necesario comprobar las dos condiciones del Teorema 1.13.

B1) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}(S)} B = X$ de forma trivial.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$ y $x \in B_1 \cap B_2$, veamos si $\exists B_3 \in \mathcal{B}(S)$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

   a) Si $X \in \{B_1, B_2\}$, entonces se tiene trivialmente.

   b) Como $X \notin \{B_1, B_2\}$, escribimos

$$B_1 = \bigcap_{i \in I_1} S_i,\ I_1 \text{ finito },\ S_i \in S$$
$$B_2 = \bigcap_{i \in I_2} S_i,\ I_2 \text{ finito },\ S_i \in S$$

   Por tanto, tenemos que:

$$B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i \in I_1 \cup I_2} S_i \in \mathcal{B}(S)$$

   Por tanto, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$, tenemos que $x \in B_1 \cap B_2 = B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Por tanto, aplicamos el Teorema 1.13 y se tiene de forma directa. □

Definición 1.19. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subset \mathcal{P}(X)$. Decimos que S es una subbase de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$.

Cabe destacar que toda base es subbase.

Ejemplo.

1. $S = \{X\}$ es subbase de $\mathcal{T}_t$.
2. $\mathbb{R}$, $S = \{]-\infty, b[\ \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\ \mid a \in \mathbb{R}\}$ es una subbase de $\mathcal{T}_u$.
   Cabe destacar que no es base ni de $\mathcal{T}_u$ ni de cualquier topología.

1.4. Entornos

Definición 1.20 (Entornos)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológio, y consideramos $x \in X$. Diremos que $N \subset X$ es un entorno de x si $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$.

Denotamos $N_x = \{N \subset X \mid N \text{ es entorno de } x\} \subset \mathcal{P}(X)$, y lo llamaremos sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$.

Algunas propiedades inmediatas son:

1. $X \in N_x, \quad \forall x \in X$.
2. $N_x \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, ya que $X \in N_x$.
3. Puede pasar que haya entornos no abiertos. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, se tiene que $[0, 1[\ \in N_1$.

Proposición 1.16. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos $U \subset X$. Entonces:*

$$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow U \in N_x, \ \forall x \in U$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Trivial, ya que el abierto buscado contenido en U y que contenga a todos los elementos de U es el mismo U.

$\Longleftarrow$) Como $\forall x \in U$ se tiene que $U \in N_x$, tenemos que, para cada $x \in U$, $\exists U_x \in \mathcal{T}$ con $x \in U_x \subset U$. Por tanto, $U \subset \bigcup\limits_{x \in U} U_x \subset U$, y por doble inclusión tenemos que $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$. Como la unión de abiertos es un abierto, tenemos que $U \in \mathcal{T}$.

□

Ejemplo. Algunos ejemplos de entornos son:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, $x \in X$. Tenemos que $N_x = \{X\}$.
2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $x \in X$. Tenemos que $N_x = \{U \subset X \mid x \in U\} \subset \mathcal{T}_{disc}$.
3. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x_0, x \in X$. Tenemos que $N_x = \{U \subset X \mid x, x_0 \in U\} \subset \mathcal{T}$.

4. (X, d) espacio métrico, y $x \in X$. Tenemos que

$$N_x = \{U \subset X \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ con } B(x, \varepsilon) \subset U\}$$

En particular, $\overline{B}(x, \varepsilon) \in N_x, \qquad \forall x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

5. $(X, \mathcal{T}_{CF})$, $x \in X$. Tenemos que

$$N_x = \{U \in \mathcal{T}_{CF} \mid x \in U\} = \{X \setminus F \mid F \text{ finito }, x \notin F\} \subset \mathcal{T}_{CF}$$

Veamos la primera igualdad, ya que la segunda es trivial:

$\subseteq$) Sea $N \in N_x$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}_{CF}$ tal que $x \in U \subset N$. Como $U \subset N$, se tiene que $X \setminus N \subset X \setminus U$ finito, por lo que $X \setminus N$ es finito. Además, como $x \in N$, $x \notin X \setminus N$.

$\supseteq$) Sea $U \in \mathcal{T}_{CF}$ tal que $x \in U$. Por definición de entorno, se tiene de forma directa que $U \in N_x$.

6. $(X, \mathcal{T}_{CN})$, $x \in X$. De forma análoga, tenemos que

$$N_x = \{U \in \mathcal{T}_{CN} \mid x \in U\} = \{X \setminus C \mid C \text{ numerable }, x \notin C\} \subset \mathcal{T}_{CN}$$

7. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$N_x = \{N \subset \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ con } [x, x+\varepsilon[\subset N\}$$

$\subseteq$) Sea $N \in N_x$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}_s$ tal que $x \in U \subset N$, por lo que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in [x, x+\varepsilon[= U \subset N$.

$\supseteq$) Supongamos que $[x, x+\varepsilon[\subset N$. Entonces, $x \in [x, x+\varepsilon[\subset N$, y como $[x, x+\varepsilon[$ es un abierto se tiene.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos $x \in X$. Tenemos que algunas propiedades que se deducen del sistema de entornos de x son:

N1) $N_x \neq \emptyset$.

Esto se debe a que $X \in N_x, \ \forall x \in X$.

N2) Si $N \in N_x$, entonces $x \in N$.

Si $N \in N_x$, entonces existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$. Por tanto, $x \in N$.

N3) Si $N \in N_x$ y $N \subset N'$, entonces $N' \in N_x$.

Si $N \in N_x$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N \subset N'$. Por tanto, tenemos que $N' \in N_x$, y el abierto que existe será el mismo U.

N4) Si $N, N' \in N_x$, entonces $N \cap N' \in N_x$.

Si $N \in N_x$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$.
Si $N' \in N_x$, entonces $\exists U' \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U' \subset N'$.

Como $U, U' \in \mathcal{T}$, tenemos que $U \cap U' \in \mathcal{T}$. Por tanto, considerando la intersección, tenemos que $x \in U \cap U' \subset N \cap N'$. Por tanto, $N \cap N' \in N_x$.

N5) Si $N \in N_x$, entonces $\exists N' \in N_x$ tal que $N' \subset N$ y $N \in N_y,\ \forall y \in N'$.

Como $N \in N_x$, tenemos que $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Sea $U = N'$.

Como $U \in \mathcal{T}$, por la Proposición 1.16 tenemos que $U \in N_y\ \forall y \in U$. Como $U \subset N$, por N3) tenemos que $N \in N_y,\ \forall y \in U$.

Teorema 1.17 (Hausdorff)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y supongamos que $\forall x \in X$ tenemos una familia $N_x \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

N1) $N_x \neq \emptyset$.

N2) Si $N \in N_x$, entonces $x \in N$.

N3) Si $N \in N_x$ y $N \subset N'$, entonces $N' \in N_x$.

N4) Si $N, N' \in N_x$, entonces $N \cap N' \in N_x$.

N5) Si $N \in N_x$, entonces $\exists N' \in N_x$ tal que $N' \subset N$ y $N \in N_y,\ \forall y \in N'$.

Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que N_x es el sistema de entornos de x, $\forall x \in X$. Además, tenemos que

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid U \in N_x\ \forall x \in U\}$$

Demostración. Demostramos en primer lugar la existencia. Veamos que la topología, tal y como la hemos definido, efectivamente es una topología.

A1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ trivialmente. Además, como $X \in N_x, \forall x \in X$, tenemos que $X \in \mathcal{T}$.

A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$. Supongamos que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Consideramos $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, por lo que $\exists i_o \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in \mathcal{T}$. Por tanto, $U_{i_o} \in N_x$. Por tanto, tenemos que $U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ y, por N3), se tiene que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in N_x$. Por tanto, tenemos que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Veamos que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Supongamos $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Por definición de la topología, tenemos que $U_1, U_2 \in N_x$. Por N4), tenemos que $U_1 \cap U_2 \in N_x$, por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Para completar la demostración de la existencia, hemos de demostrar que N_x es el sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ para todo $x \in X$.

$\supseteq$) Sea N entorno de x en $(X, \mathcal{T})$, y comprobamos que $N \in N_x$.

Por definición de entorno, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Por tanto, $U \in N_x$ por definición de la topología. Como $U \subset N$, por N3) tenemos que $N \in N_x$.

$\subseteq$) Sea $N \in N_x$, y veamos que N es entorno de x en $(X, \mathcal{T})$.

Definimos $U = \{y \in N \mid N \in N_y\} \subset N$. Como $N \in N_x$, tenemos que $x \in U$. Comprobemos que $U \in \mathcal{T}$.

Sea $y \in U$, y buscamos demostrar que $U \in N_y$ para poder aplicar la Proposición 1.16. Por definición de U, como $y \in U$ se tiene que $U \subset N \in N_y$.

Por N5), $\exists N' \in N_y$ tal que $N' \subset N$ con $N \in N_z$ para todo $z \in N'$. Como tenemos que $N' \in N_y$, por N2) tenemos que $y \in N' \subset U$.

Por N3), tenemos que $U \in N_y, \ \forall y \in U$.

Por tanto, $U \in \mathcal{T}$ por la Proposición 1.16. Queda así demostrado que N es entorno de x en $(X, \mathcal{T})$.

Por tanto, la existencia queda demostrada. Veamos ahora la unicidad. Para ello, supongamos que existe otra topología $\mathcal{T}'$ En X tal que N_x es el sistema de entornos de $x, \ \forall x \in X$. Entonces, por la Proposición 1.16, tenemos que $U \in \mathcal{T}'$ si y solo si $U \in N_x, \ \forall x \in U$, que coincide con la definición de $\mathcal{T}$ dada. Por tanto, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

1.4.1. Base de Entornos

Definición 1.21. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ y N_x el sistema de entornos de x. Una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ es una familia $\beta_x \subset N_x$ tal que

$$\forall N \in N_x, \ \exists V \in \beta_x \mid V \subset N$$

A los elementos $V \in \beta_x$ se les denomina entornos básicos.

Algunos resultados inmediatos son:

1. Sea β_x base de entornos de x. Entonces, $N_x = \{N \subset X \mid \exists V \in \beta_x \text{ con } V \subset N\}$

   Se tiene de forma directa por N3).

2. Una base de entornos es $\beta_x = N_x, \quad \forall x \in X$.

   Esto es trivial, ya que el entorno básico que existe es el propio entorno. Es fácil deducir que esta base no resulta muy útil.

3. $\beta_x = N_x \cap \mathcal{T} = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$ es otra base de entornos.

4. Sea $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$. Entonces, $\beta_x = \mathcal{B} \cap N_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$.

   Demostrado en el Ejercicio 4.1.18.

5. No es cierto en general que todo entorno sea unión de entornos básicos.

   Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Tenemos que $\beta_0 = \{]-\varepsilon, \varepsilon[\ \mid 0 < \varepsilon < 1\}$, y $[-1, 1] \in \ N_0$.

   No obstante, $[-1, 1]$ no es unión de entornos básicos, ya que la unión de intervalos abiertos es abierta.

Ejemplo. Algunos ejemplos de base de entornos son:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$. Sea $x \in X$. Tenemos que $\beta_x = \{X\}$.

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$. Sea $x \in X$. Tenemos que $\beta_x = \{\{x\}\}$.

3. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$. Sea $x, x_0 \in X$. Tenemos que $\beta_x = \{\{x, x_0\}\}$.

4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que $\beta_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Otra base de entornos es $\beta'_x = \left\{\overline{B}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$.

5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $\beta_x = \{[x, x + \varepsilon[\ \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

6. (X, d) espacio métrico. Sea $x \in X$. Tenemos que $\beta_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

   Una base con menos elementos es $\beta'_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$, ya que en este caso hay una cantidad numerable.

Proposición 1.18. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, β_x una base de entornos de x $\forall x \in X$ y $\emptyset \neq U \subset X$. Entonces:*

$$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in U,\ \exists V \in \beta_x \mid V \subset U$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}$, y escogemos $x \in U$. Entonces, $U \in N_x$, y por tanto $\exists V \in \beta_x$ tal que $V \subset U$.

$\Longleftarrow$) Sea $x \in U$, y por hipótesis $\exists V \in \beta_x \subset N_x$ con $V \subset U$. Por tanto, por N3) se tiene que $U \in N_x$. Como esto es válido para todo $x \in X$, por la Proposición 1.16 se tiene que $U \in \mathcal{T}$.

□

Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, y β_x una base de entornos de x $\forall x \in X$. Algunas propiedades de las bases de entornos son:

V1) $\beta_x \neq \emptyset$.

Tenemos que $N_x \neq \emptyset$ por N1), por lo que sea $N \in N_x$. Por tanto, por definición de β_x, tenemos que $\exists V \in \beta_x \mid V \subset N$, por lo que $\beta_x \neq \emptyset$.

V2) Si $V \in \beta_x$, entonces $x \in V$.

Por N3), si $V \in \beta_x \subset N_x$, entonces $x \in V$.

V3) Si $V_1, V_2 \in \beta_x$, entonces $\exists V_3 \in \beta_x \mid V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

Al ser V_1, V_2 dos entornos, tenemos que $V_1 \cap V_2$ es un entorno por N4). Por tanto, por definición de β_x, $\exists V_3 \in \beta_x \mid V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

V4) Si $V \in \beta_x$, $\exists V' \in \beta_x$ con $V' \subset V$ tal que $\forall y \in V'$, $\exists V_y \in \beta_y$ con $V_y \subset V$.

Sea $V \in \beta_x \subset N_x$. Por N5), tenemos que $\exists N' \in N_x$, $N' \subset V$ de manera que $V \in N_y$ $\forall y \in N'$. Por ser β_x una base de entornos, $\exists V' \in \beta_x$ tal que $V' \subset N' \subset V$.

Veamos que $\forall y \in V'$, $\exists V_y \in \beta_y$ con $V_y \subset V$. Sea $y \in V'$. Entonces, como $V \in N_y$ y por ser β_x una base de entornos, $\exists V_y \in \beta_y$, $V_y \subset V$.

Teorema 1.19. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\forall x \in X$ sea $\beta_x \subset \mathcal{P}(x)$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

V1) $\beta_x \neq \emptyset$.

V2) Si $V \in \beta_x$, entonces $x \in V$.

V3) Si $V_1, V_2 \in \beta_x$, entonces $\exists V_3 \in \beta_x \mid V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

V4) Si $V \in \beta_x$, $\exists V' \in \beta_x$ con $V' \subset V$ tal que $\forall y \in V'$, $\exists V_y \in \beta_y$ con $V_y \subset V$.

Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que β_x es una base de entornos de x $\forall x \in X$.

Además, $\mathcal{T}$ es la única topología con $N_x = \{N \subset X \mid \exists V \in \beta_x,\ V \subset N\}$ $\forall x \in X$.

Demostración. Comprobamos en primer lugar que N_x cumple las condiciones del Teorema 1.17. Veámoslo:

N1) $N_x \neq \emptyset$.

Por V1), como $\emptyset \neq \beta_x \subset N_x$, se tiene.

N2) Si $N \in N_x$, entonces $x \in N$.

Si $N \in N_x$, $\exists V \in \beta_x$ con $V \subset N$. Por V2), $x \in V$, por lo que se tiene.

N3) Si $N \in N_x$ y $N \subset N'$, entonces $N' \in N_x$.

Si $N \in N_x$, entonces por definición de N_x se tiene que $\exists V \in \beta_x$ con $V \subset N$. Como $N \subset N'$, el mismo abierto básico V implica que $N' \in N_x$.

N4) Si $N, N' \in N_x$, entonces $N \cap N' \in N_x$.

Como $N, N' \in N_x$, $\exists V, V' \in \beta_x$ con $V \subset N$, $V' \subset N'$. Por tanto, se tiene que $V \cap V' \subset N \cap N'$. Por V3), $\exists V_3 \in \beta_x$, $V_3 \subset V \cap V' \subset N \cap N'$. Por tanto, por definición de N_x, tenemos que $N_1 \cap N_2 \in N_x$.

N5) Si $N \in N_x$, entonces $\exists N' \in N_x$ tal que $N' \subset N$ y $N \in N_y$, $\forall y \in N'$.

Como $N \in N_x$, $\exists V \in \beta_x$ con $V \subset N$. Entonces, por V4), $\exists V' \in \beta_x$, $V' \subset V$ tal que $\forall y \in V'$, $\exists V_y \in \beta_y$, $V_y \subset V$. Tomamos $N' = V' \subset V \subset N$. Entonces, como $N' \in \beta_x$, se tiene que $N' \in N_x$.

Sea $y \in N' = V'$. Entonces, $\exists V_y \in \beta_y$ tal que $V_y \subset V \subset N$. Por tanto, por la definición de N_x dada, tenemos que $N \in N_y$.

Por tanto, por el Teorema 1.17, existe una única topología en X con N_x sistema de entornos para todo $x \in X$. Falta por comprobar que β_x es una base de entornos para dicho sistema de entornos, lo cual es trivial porque la definición dada de N_x coincide con la definición dada de base de entornos. □

Proposición 1.20. *Sean $(X, \mathcal{T})$, $(X, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Si $\forall x \in X$ se tiene que $\exists \beta_x$ base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ tal que $V \in N'_x$, $\forall V \in \beta_x$, entonces*

$$\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$$

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}$. Por la Proposición 1.18, se tiene que $\forall x \in U$, $\exists V \in \beta_x$ con $V \subset U$. Además, por hipótesis tenemos que $V \in N'_x$. Por la propiedades N3), tenemos que $U \in N'_x$, y usando ahora la Proposición 1.16, tenemos que $U \in \mathcal{T}'$, por lo que queda demostrado que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$. □

Corolario 1.20.1. *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X,\mathcal{T}')$ espacios topológicos. Si $\forall x \in X$ se tiene que:*

1. *$\exists \beta_x$ base de entornos de x en $(X,\mathcal{T})$ tal que $V \in N'_x$, $\forall V \in \beta_x$*

2. *$\exists \beta'_x$ base de entornos de x en $(X',\mathcal{T})$ tal que $V' \in N_x$, $\forall V' \in \beta'_x$*

Entonces, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

1.5. Posición de un punto respecto a un subconjunto

1.5.1. Puntos adherentes. Adherencia

Definición 1.22 (Punto adherente)**.** Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Decimos que x es punto adherente de A si todo entorno del punto interseca al conjunto. Es decir,

$$\forall N \in N_x, \text{ se tiene } N \cap A \neq \emptyset$$

Hay dos tipos de puntos adherentes mutuamente excluyentes:

- Puntos de Acumulación:

  Diremos que x es un punto de acumulación de A si $A \cap (N \backslash \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall N \in N_x$.

- Puntos Aislados:

  Diremos que x es un punto aislado de A si $\exists N \in N_x$ tal que $N \cap A = \{x\}$.

Proposición 1.21. *Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Equivalen:*

1. *$A \cap N \neq \emptyset$, $\forall N \in N_x$. Es decir, x es un punto adherente de A.*

2. *$A \cap U \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{T}$, $x \in U$.*

3. *$A \cap B \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.*

4. *$A \cap V \neq \emptyset$, $\forall V \in \beta_x$, con β_x base de entornos de $x \in X$.*

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea x un punto adherente de A. Por la Proposición 1.16, como todo abierto es entorno de los puntos contenidos en él, tenemos que $\forall U \in \mathcal{T}$, con $x \in U$, se tiene que $\mathcal{T} \in N_x$. Por la definición de punto adherente, se tiene que $\forall N \in N_x$, $N \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, como $\mathcal{T} \in N_x$, se tiene lo pedido.

$2 \Longrightarrow 3)$ Es trivial, ya que los abiertos básicos son, por definición, abiertos.

$3 \Longrightarrow 4)$ Sea $V \in \beta_x \subset N_x$. Por tanto, por definición de entorno, $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset V$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U \subset V$. Por 3), se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, como $B \subset V$, se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$.

$4 \Longrightarrow 1)$ Sea $N \in N_x$. Como β_x es una base de entornos, entonces $\exists V \in \beta_x$ con $x \in V \subset N$. Por 4), se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$. Por último, como $V \subset N$, se tiene que $A \cap N \neq \emptyset$.

$\square$

Los puntos de acumulación y aislados se caracterizan de forma análoga.

Proposición 1.22. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Equivalen:*

1. $A \cap (N \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall N \in N_x$. *Es decir, x es un punto de acumulación de A.*
2. $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{T}$, $x \in U$.
3. $A \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{B}$ *con* $x \in B$, $\mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}$.
4. $A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall V \in \beta_x$, *con* β_x *base de entornos de* $x \in X$.

Proposición 1.23. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Equivalen:*

1. $\exists N \in N_x$ *tal que* $A \cap N = \{x\}$. *Es decir, x es un punto aislado de A.*
2. $\exists U \in \mathcal{T}$ *tal que* $A \cap U = \{x\}$.
3. $\exists B \in \mathcal{B}$ *tal que* $A \cap B = \{x\}$, *con* $\mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}$.
4. $\exists V \in \beta_x$ *tal que* $A \cap V = \{x\}$, *con* β_x *base de entornos de* $x \in X$.

Definición 1.23 (Adherencia)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Se llama adherencia, clausura o cierre de A al conjunto formado por todos los puntos adherentes de A, y lo notaremos por $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \mathrm{cl}(A) = \{x \in X \mid x \text{ es punto adherente de } A\}$$

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Algunos resultados directos de la definición de adherencia son:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $\overline{X} = X$.
3. Si $A \subset X$, entonces $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de adherencia son:

1. (X, d) espacio métrico, $A \subset X$, $x \in X$.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $A =]0, 1[$. Entonces, $\overline{A} = [0, 1]$, y todos los puntos adherentes son de acumulación.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $A =]0, 1[\cup \{2\}$. Entonces, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$, y el 2 es un punto aislado.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sean $A, B \subset X$. Entonces, algunos resultados que se deducen de la definición de adherencia son:

1. $\overline{A} \in C_{\mathcal{T}}$.

   Buscamos demostrar que $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$. Supongamos $x \in X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$, y buscamos que que $X \setminus \overline{A} \in N_x$. Para esto, buscamos $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset X \setminus \overline{A}$.

   Como $x \notin \overline{A}$, $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$, $U \cap A = \emptyset$. Para que $U \subset X \setminus \overline{A}$, veamos que $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Calculamos esa intersección, sabiendo que $\overline{A} = A' \cup A$.

   $$U \cap \overline{A} = U \cap (A' \cup A) = (U \cap A) \cup (U \cap A') = U \cap A'$$

   Veamos ahora que $U \cap A' = \emptyset$. Por reducción al absurdo, sea $y \in U \cap A'$. Entonces, como $y \in A'$, $A \cap (B \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{T}$, con $y \in B$. No obstante, tenemos que $y \in U \subset \mathcal{T}$, y $A \cap (U \setminus \{y\}) \subset A \cap U = \emptyset$, por lo que $y \notin A'$.

   Como $U \cap A' = \emptyset$, tenemos que $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Por tanto, $U \subset X \setminus \overline{A}$, y tenemos que $X \setminus \overline{A} \in N_x$ para todo $x \in X \setminus \overline{A}$. Por tanto, tenemos que $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$, por lo que $\overline{A} \in C_{\mathcal{T}}$.

2. La adherencia es el menor cerrado que contiene al conjunto. Es decir, si $C \in C_{\mathcal{T}}$, con $A \subset C$, entonces $\overline{A} \subset C$.

   Sea $C \in C_{\mathcal{T}}$, $A \subset C$, $a \in \overline{A}$. Si $a \in A \subset C$, se tiene que $a \in C$, por lo que sea $a \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, tenemos que $a \in A'$, por lo que por la caracterización de puntos de acumulación tenemos que

   $$A \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset, \qquad \forall U \in \mathcal{T}\ a \in U$$

   Supongamos ahora por reducción al absurdo que $a \notin C$. Entonces, $a \in X \setminus C \in \mathcal{T}$, que es un abierto por ser C un cerrado. Entonces, por ser $a \in A'$ tenemos que:

   $$A \cap ((X \setminus C) \setminus \{a\}) = A \cap (X \setminus (C \cup \{a\})) \neq \emptyset$$

   Sea por tanto $y \in A \cap (X \setminus (C \cup \{a\}))$, que existe por ser la intersección no nula. Entonces, $y \in A$ e $y \in X \setminus (C \cup \{a\})$, por lo que $y \notin C$. Por tanto, $A \not\subset C$, llegando a una contradicción. Por tanto, $\overline{A} \subset C$.

3. $A = \overline{A} \iff A \in C_{\mathcal{T}}$.

   $\Longrightarrow$) Trivial por 1).

   $\Longleftarrow$) Si $A \in C_{\mathcal{T}}$, como $A \subset A$, por la propiedad 2) se tiene que $\overline{A} \subset A$. Como, además, $A \subset \overline{A}$, se tiene la igualdad buscada.

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

   Como $\overline{A} \in C_{\mathcal{T}}$, tenemos que coincide con su cierre.

5. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

   Sea $x \in \overline{A}$, es decir, $A \cap U \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{T},\ x \in U$. Entonces, como se tiene que $\emptyset \neq A \cap U \subset B \cap U$, tenemos que $x \in \overline{B}$.

6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   $\subset$) Tenemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, y la unión de dos cerrados es un cerrado, por lo que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Por 5), se tiene que $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   $\supset$) Por 5), se tiene que $\left\{ \begin{array}{l} A \subset A \cup B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array} \right\}$. Por tanto, se tiene.

7. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. La igualdad no es cierta en general.

   Por 5), $\left\{ \begin{array}{l} A \cap B \subset A \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ A \cap B \subset B \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array} \right\}$. Por tanto, se tiene.

   Ejemplo de que la igualdad no es cierta en general, consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $A =]0, 1[$, $B =]1, 2[$. Entonces, se tiene que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de adherencia son:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$. Entonces, $\overline{A} = \left\{ \begin{array}{lll} \emptyset & \text{si} & A = \emptyset \\ X & \text{si} & A \neq \emptyset \end{array} \right.$

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X$. Entonces, $\overline{A} = A$, y todos los puntos son aislados.

   Un punto $x \in A$ es aislado si y solo si $\exists N \in N_x$ tal que $A \cap (N \setminus \{x\}) = \emptyset$. Ese N buscado es el conjunto unitario $\{x\}$.

3. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $A \subset X$, $x_0 \in X$. Entonces, $\overline{A} = \left\{ \begin{array}{lll} A & \text{si} & x_0 \notin A \\ X & \text{si} & x_0 \in A \end{array} \right.$

   Si $x_0 \notin A$, todos los puntos son aislados, ya que el entorno necesario es $\{x, x_0\}$.

4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. Entonces, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$.

   Este resultado no es cierto para todo espacio métrico. Ejemplo de esto es (X, d_{disc}).

5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, se tiene que:

$$\overline{]a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{[a,b]} = [a,b]$$

6. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, se tiene que:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Definición 1.24 (Conjunto denso)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $A \subset X$ se dice denso en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{A} = X$. Por la caracterización de puntos adherentes, se tiene que

$$A \text{ denso } \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset, \ \forall B \in \mathcal{B} \text{ con } \mathcal{B} \text{ base}$$

Definición 1.25. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice separable si $\exists A \subset X$ denso y numerable.

1.5.2. Puntos interiores. Interior

Definición 1.26 (Punto Interior)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Decimos que x es un punto interior de A si $A \in N_x$.

Definimos el interior de A, A°, como el conjunto de todos los puntos interiores de A:

$$A^\circ = \text{int}(A) = \{x \in X \mid x \text{ es interior de } A\}$$

Como resultado análogo a la Proposición 1.21, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.24. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Equivalen:*

1. *$A \in N_x$. Es decir, x es interior de A.*
2. *$\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset A$.*
3. *$\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset A$, donde $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.*
4. *$\exists V \in \beta_x$, con $V \subset A$, donde β_x es una base de entornos de x.*

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de interiores:

1. $\emptyset^\circ = \emptyset, \qquad X^\circ = X$.
2. (X, d) espacio métrico, $x \in A^\circ \Longleftrightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x, \varepsilon) \subset A$.

   Este resultado se debe al apartado 2) de la proposición anterior.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $A =]0, 1] \cup \{2\} \Longrightarrow A^\circ =]0, 1[$.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Algunas propiedades del interior son:

1. $A^\circ \subset A$ y $A^\circ \in \mathcal{T}$.

   Tenemos que $A \in N_x$, $\forall x \in A^\circ$, por lo que $\exists U_x \in \mathcal{T} \mid x \in U_x \subset A$, $\forall x \in A^\circ$. Por tanto, $A^\circ \subset A$. Veamos ahora que el interior es un abierto.

   Sea $x \in A^\circ$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset A$. Como $U \in \mathcal{T}$, tenemos que $U \in N_y\ \forall y \in U \subset A$. Entonces, $A \in N_y\ \forall y \in U$, por lo que $x \in U \subset A^\circ$., por lo que A° es un abierto.

2. El interior es el abierto más grande contenido en el conjunto. Es decir, si $U \in \mathcal{T}$, $U \subset A$ entonces $U \subset A^\circ$.

   $U \in \mathcal{T}$, $U \subset A$ implica que $U \in N_x\ \forall x \in U$, por lo que $A \in N_x\ \forall x \in U$, por lo que $U \subset A^\circ$.

3. $A^\circ = A \Longleftrightarrow A \in \mathcal{T}$.

   $\Longrightarrow$) $A = A^\circ \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \in \mathcal{T}$.

   $\Longleftarrow$) Por 1), tenemos que $A^\circ \subset A$.

   Además, como $A \in \mathcal{T}, A \subset A$, por 2) se tiene que $A \subset A^\circ$.

4. $[A^\circ]^\circ = A^\circ$.

   Por 3), como $A^\circ \in \mathcal{T}$, se tiene que $[A^\circ]^\circ = A^\circ$.

5. $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

   Sea $x \in A^\circ$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T} \mid x \in U \subset A$. Como $A \subset B$, $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset B$, por lo que $x \in B^\circ$.

6. $[A \cap B]^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

   $\subset$) Sea $x \in [A \cap B]^\circ$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T} \mid x \in U \subset A \cap B$. Por tanto, $U \subset A$ y $U \subset B$, por lo que $x \in A^\circ$ y $x \in B^\circ$, por lo que $x \in A^\circ \cap B^\circ$.

   $\supset$) Sea $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Entonces, $\exists U_A \in \mathcal{T}$ con $x \in U_A \subset A$ y $\exists U_B \in \mathcal{T}$ con $x \in U_B \subset B$. Como la intersección finita de abiertos es un abierto, tenemos que $\exists U = U_A \cap U_B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset A \cap B$, por lo que $x \in [A \cap B]^\circ$.

7. $[A \cup B]^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

   $\supset$) Sea $x \in A^\circ \cup B^\circ$. Entonces, $\exists U_A \in \mathcal{T}$ con $x \in U_A \subset A$ o $\exists U_B \in \mathcal{T}$ con $x \in U_B \subset B$. Como la unión de abiertos es un abierto, tenemos que $\exists U = U_A \cup U_B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset A \cup B$, por lo que $x \in [A \cup B]^\circ$.

   No obstante, la otra inclusión no es cierta generalmente. Como contraejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ sea $A = [0,1]$, $B = [1,2]$. Entonces,

$$[A \cup B]^\circ = \ ]0,2[\ \not\subset \ ]0,2[\setminus\{1\} = \ ]0,1[\ \cup \ ]1,2[\ = A^\circ \cup B^\circ$$

Ejemplo. Algunos ejemplos de conjunto interior son:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $A^\circ = \begin{cases} X & \text{si} \quad A = X, \\ \emptyset & \text{si} \quad A \neq X. \end{cases}$

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X$, $A^\circ = A$.

3. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $A \subset X$, $x_0 \in X$, $A^\circ = \begin{cases} A & \text{si} \quad x_0 \in A, \\ \emptyset & \text{si} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$

4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. $[\overline{B}(x,r)]^\circ = B(x,\varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

   Esto no es cierto en cualquier espacio métrico.

5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Entonces, $]a,b[^\circ = [a,b[^\circ = [a,b]^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[$.

6. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$.

Proposición 1.25. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Entonces:*

1. $X \setminus \overline{A} = [X \setminus A]^\circ$.

2. $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Demostración.

1. Demostramos por doble inclusión.

   $\subset$) $A \subset \overline{A}$. Entonces, $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$. Como $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$, como el interior es el abierto más grande contenido en el conjunto, tenemos lo buscado.

   $\supset$) $[X \setminus A]^\circ \subset X \setminus A$, por lo que $A \subset X \setminus [X \setminus A]^\circ \in C_{\mathcal{T}}$. Por tanto, $\overline{A} \subset X \setminus [X \setminus A]^\circ$, ya que la clausura es el menor cerrado que contiene al conjunto. Por tanto, tomando complementario tenemos $[X \setminus A]^\circ \subset X \setminus \overline{A}$.

2. Aplicamos el resultado anterior a $X \setminus A$.

$$X \setminus \overline{X \setminus A} = [X \setminus (X \setminus A)]^\circ = A^\circ$$

   Tomando complementarios, se tiene lo pedido.

□

Definición 1.27. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Se define el exterior de A, notado por A^e, como:

$$A^e = \text{ext}(A) = [X \setminus A]^\circ = X \setminus \overline{A}$$

1.5.3. Puntos frontera. Frontera

Definición 1.28 (Punto Frontera)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sean $A \subset X$, $x \in X$. Decimos que x es un punto frontera de A si $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Se llama frontera de A, notado por ∂A, al conjunto por todos los puntos que son frontera de A.

$$\partial A = \text{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

Como consecuencia de las Proposición 1.21, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.26. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Son equivalentes:*

1. *x es un punto frontera.*
2. $N \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad N \cap X \setminus A \neq \emptyset, \qquad \forall N \in N_x.$
3. $U \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U \cap X \setminus A \neq \emptyset, \qquad \forall U \in \mathcal{T}, x \in U.$
4. $B \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad B \cap X \setminus A \neq \emptyset, \qquad \forall B \in \mathcal{B}$ *base de* $\mathcal{T}$*,* $x \in B$.
5. $V \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad V \cap X \setminus A \neq \emptyset, \qquad \forall V \in \beta_x$ *base de entornos de* x.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Algunas propiedades de la frontera son:

1. $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap X \setminus A^\circ = \overline{A} \setminus A^\circ$$

2. $\partial A \in C_{\mathcal{T}}$.

   La clausura es un conjunto cerrado, por lo que ∂A es la intersección de dos cerrados y, por tanto, es un cerrado.

3. $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

$$\partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \setminus [X \setminus A]^\circ = (X \setminus A^\circ) \setminus (X \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$$

4. $\overline{A} = A^\circ \sqcup$[2] ∂A.

$$A^\circ \cup \partial A = A^\circ \cup \overline{A} \setminus A^\circ = A^\circ \cup \overline{A} = \overline{A}$$
$$A^\circ \cap \partial A = A^\circ \cap \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$

donde he aplicado que $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

5. $A^\circ = \overline{A} \setminus \partial A = A \setminus \partial A$.

La primera igualdad es inmediata.

$$\overline{A} \setminus \partial A = \overline{A} \setminus (\overline{A} \setminus A^\circ) = A^\circ$$

Para la segunda, demostramos mediante doble inclusión:

$\subset$) Sea $x \in A^\circ \subset A$. Entonces, $x \in A$. Además, como $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$, tenemos que $x \notin \partial A$. Por tanto, $x \in A \setminus \partial A$.

$\supset$) Sea $x \in A \setminus \partial A$. Entonces,

$$x \in A \setminus \partial A = A \setminus (\overline{A} \setminus A^\circ) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ \wedge \\ x \notin (\overline{A} \setminus A^\circ) \Longrightarrow x \in A^\circ \end{array} \right\} \Longrightarrow x \in A^\circ$$

6. $X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup A^e$.

$$A^\circ \cup \partial A \cup A^e = A^\circ \cup \overline{A} \setminus A^\circ \cup X \setminus \overline{A} = \overline{A} \cup A^\circ \cup X \setminus \overline{A} = X$$

Veamos que su intersección es nula dos a dos:

$$A^\circ \cap \partial A = A^\circ \cap \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$
$$A^\circ \cap A^e = A^\circ \cap X \setminus \overline{A} = \emptyset, \text{ ya que } A^\circ \subset \overline{A}.$$
$$A^e \cap \partial A = X \setminus \overline{A} \cap \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$

7. $A \in C_{\mathcal{T}} \Longleftrightarrow \partial A \subset A$.

$\Longrightarrow$) Sea $A \in C_{\mathcal{T}}$, por lo que $A = \overline{A}$. Entonces,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A^\circ \subset A$$

$\Longleftarrow$) Tenemos que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \subset A$. Entonces, como $A^\circ \subset A$, tenemos que $\overline{A} \subset A$. Como además en general se tiene que $A \subset \overline{A}$, tenemos que $A = \overline{A}$. Por tanto, tenemos que $A \in C_{\mathcal{T}}$.

8. $A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.

[2]Símbolo de unión disjunta.

$\Longrightarrow$) Sea $A \in \mathcal{T}$, por lo que $A = A^\circ$. Entonces,

$$\partial A \cap A = \overline{A} \setminus A^\circ \cap A = \overline{A} \setminus A \cap A = \emptyset$$

$\Longleftarrow$) Veamos que $A = A^\circ$. Por reducción al absurdo, supongamos que $A \neq A^\circ$. Como se tiene que $A^\circ \subset A$, tenemos que $A \not\subset A^\circ$. Sea $x \in A$, $x \notin A^\circ$. Como $A \subset \overline{A}$, tenemos que $x \in \overline{A}, x \in A$. Por tanto, $x \in \overline{A} \setminus A^\circ \cap A$, por lo que $\partial A \cap A \neq \emptyset$, llegando a una contradicción.

Como $A = A^\circ$, tenemos que $A \in \mathcal{T}$.

9. $A \in \mathcal{T} \cap C_\mathcal{T} \Longleftrightarrow \partial A = \emptyset$.

$\Longrightarrow$) Sea $A \in \mathcal{T} \cap C_\mathcal{T}$. Entonces, como $A \in C_\mathcal{T}$, tenemos que $\partial A \subset A$. Además, como $A \in \mathcal{T}$, tenemos que $\emptyset = A \cap \partial A = \partial A$.

$\Longleftarrow$) Como $\partial A = \emptyset$, tenemos que $A \cap \partial A = \emptyset$, por lo que $A \in \mathcal{T}$. Además, como $\emptyset \subset A$, tenemos que $A \in C_\mathcal{T}$.

10. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. En general, no se da la igualdad.

$\subset$) Sea $x \in \partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus [A \cup B]^\circ$. Entonces, $x \in \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por lo que $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$. Además, $x \notin [A \cup B]^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$. Por tanto, $x \notin A^\circ$ y $x \notin B^\circ$. Por tanto, $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$ o $x \in \overline{B} \setminus B^\circ$, por lo que $x \in \partial A \cup \partial B$.

Para ver que la otra inclusión no se da por norma general, consideramos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los subconjuntos $A = [0,1]$ y $B = [1,2]$. Entonces,

$$\partial(A \cup B) = \{0, 2\} \not\supset \{0, 1, 2\} = \partial A \cup \partial B.$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de frontera:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $\partial A = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \in \{\emptyset, X\} \\ X & \text{si } A \notin \{\emptyset, X\} \end{cases}$

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X$, $\partial A = \emptyset$.

3. $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $A \subset X$, $x_0 \in X$, $\partial A = \begin{cases} A & \text{si } x_0 \notin A \\ X \setminus A & \text{si } x_0 \in A \end{cases}$

4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. $\partial\overline{B}(x, r) = \partial B(x, \varepsilon) = S(x, r), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Entonces, $\partial]a, b[= \partial [a, b[= \partial [a, b] = \partial]a, b] = \{a, b\}$.

6. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. $\partial \mathbb{Q} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

1.6. Topología inducida sobre un subconjunto

Proposición 1.27. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces,*

$$\mathcal{T}_{\big|A} = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en A. Es decir, $\left(A, \mathcal{T}_{\big|A}\right)$ es un espacio topológico.

Demostración. Demostremos que $\mathcal{T}_{\big|A}$ es una topología en A.

A1) Como $\emptyset = \emptyset \cap A$, con $\emptyset \in \mathcal{T}$, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{T}_{\big|A}$.

Además, como $A = X \cap A$, con $X \in \mathcal{T}$, tenemos que $A \in \mathcal{T}_{\big|A}$.

A2) Sea $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_{\big|A}$. Entonces, por ser estos abiertos para $\mathcal{T}_{\big|A}$, tenemos para cada $i \in I$ que $O_i = U_i \cap A$, con $U_i \in \mathcal{T}$. Por tanto,

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap A$$

Como $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}_{\big|A}$, por lo que es cerrado para uniones arbitrarias.

A3) Sea $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_{\big|A}$. Entonces, $\exists U_i \in \mathcal{T}$ tal que $O_i = U_i \cap A$ para $i = 1, 2$. Entonces,

$$O_1 \cap O_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \cap A$$

Como la intersección de dos abiertos de $\mathcal{T}$ es un abierto de $\mathcal{T}$, tenemos que $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_{\big|A}$.

Tenemos por tanto que es cerrado para intersecciones finitas.

$\square$

Definición 1.29. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

Diremos que $\mathcal{T}_{\big|A}$ es la <u>topología inducida por $\mathcal{T}$ sobre A</u>, y diremos que $\left(A, \mathcal{T}_{\big|A}\right)$ es un <u>subespacio topológico</u> de $(X, \mathcal{T})$.

A los elementos de $\mathcal{T}_{\big|A}$ se les llama abiertos en A.

Algunas propiedades que se deducen directamente de la topología inducida son:

1. $O \subset A$, $O \in \mathcal{T}_{\big|A} \iff O = U \cap A$, con $U \in \mathcal{T}$.

2. Si $U \subset A$, $U \in \mathcal{T} \Longrightarrow U \in \mathcal{T}_{\big|A}$.

   Esto es trivial tomando $U = U \cap A$.

   No obstante, el recíproco no es cierto; puede haber abiertos en A que no sean abiertos en X. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tomamos $A = [0, 2[$. Tenemos que $U = [0, 1[\notin \mathcal{T}_u$, pero $U =]-1, 1[\cap A$, por lo que $U \in \mathcal{T}_{\big|A}$.

Veamos cómo producir una familia de cerrados, el sistema de entornos, una base de la topología, una base de entornos, etc. en el caso de la topología inducida.

Proposición 1.28. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $a \in A$. Se tiene que:*

1. *$C \subset A$ es cerrado en $A \Longleftrightarrow C = C' \cap A$ con $C' \in C_{\mathcal{T}}$.*
2. *$N \subset A$ es entorno de a en $A \Longleftrightarrow N = N' \cap A$ con $N' \in N_a$.*
3. *$\mathcal{B}$ base $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{B}' = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{T}_{|A}$.*
4. *β_a base de entornos de a en $\mathcal{T} \Longrightarrow \{V \cap A \mid V \in \beta_a\}$ base de entornos de a en $\mathcal{T}_{|A}$.*
5. *$E \subset A \Longrightarrow \overline{E}^A = \overline{E} \cap A$, donde $\overline{E}^A$ es la adherencia en A.*
6. *$E \subset A \Longrightarrow E^{\circ_A} \supset E^\circ \cap A$, donde E°_A} es el interior en A.*
   La igualdad no es cierta en general.
7. *$E \subset A \Longrightarrow \partial_A E \subset (\partial E) \cap A$, donde $\partial_A E$ es la frontera en A.*
   La igualdad no es cierta en general.

Demostración. Demostramos cada una por separado.

1. $C \subset A$ es cerrado en $A \Longleftrightarrow C = C' \cap A$ con $C' \in C_{\mathcal{T}}$.

   $\Longrightarrow$) Sea $C \subset A$ cerrado en A. Entonces, $A \setminus C \in \mathcal{T}_{|A}$ Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $A \setminus C = U \cap A$. Por tanto, $C = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A$.
   Como $U \in \mathcal{T}$, tenemos que $(X \setminus U) \in C_{\mathcal{T}}$. Con $C' = X \setminus U$, se tiene.

   $\Longleftarrow$) Sea $C' \in C_{\mathcal{T}}$, con $C = C' \cap A$. Entonces, $A \setminus C = A \setminus (C' \cap A) = (X \setminus C') \cap A$. Como $(X \setminus C') \in \mathcal{T}$, tenemos que $A \setminus C \in \mathcal{T}_{|A}$. Por tanto, C es un cerrado para A.

2. $N \subset A$ es entorno de a en $A \Longleftrightarrow N = N' \cap A$ con $N' \in N_a$.

   $\Longrightarrow$) Sea $N \subset A$, N entorno de a en A. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}_{|A}$, con $a \in U \subset N$.
   Entonces, por definición de topología inducida, tenemos que $\exists U' \in \mathcal{T}$ con $U = U' \cap A$.
   Definimos $N' = U' \cup N$. Como $a \in U$, tenemos que $a \in U', N$. Por tanto, $a \in N'$, por lo que $N' \in N_a$.
   Tenemos que

   $$N' \cap A = (U' \cup N) \cap A = (U' \cap A) \cup (N \cap A) = U \cup N = N$$

   $\Longleftarrow$) Sea $N' \in N_a$. Entonces, $\exists U' \in \mathcal{T} \mid a \in U' \subset N'$. Como $a \in A$, se tiene que $a \in U' \cap A \subset N' \cap A$. Además, como $U' \cap A \in \mathcal{T}_{|A}$, tenemos que $N' \cap A$ es un entorno de a en A.

3. $\mathcal{B}$ base $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{B}' = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{T}_{|_A}$.

   Veamos en primer lugar que $\{B \cap A \mid V \in \mathcal{B}\}$ son abiertos en $\mathcal{T}_A$. Como $B \in \mathcal{B}$, en concreto $B \in \mathcal{T}$, por lo que $B \cap A$ es un abierto en la topología inducida. Veamos entonces que esta familia de abiertos efectivamente forman una base de la topología inducida.

   Sea $U \in \mathcal{T}_{|_A}$, $a \in U \subset A$. Entonces, $\exists U' \in \mathcal{T}$ tal que $U = U' \cap A$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, tenemos que $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subset U'$. Como $B \cap A \in \mathcal{T}_{|_A}$ y $a \in B \cap A \subset U' \cap A = U$, tenemos que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathcal{T}_{|_A}$.

4. β_a base de entornos de a en $\mathcal{T} \Longrightarrow \{V \cap A \mid V \in \beta_a\}$ base de entornos de a en $\mathcal{T}_{|_A}$.

   Veamos en primer lugar que $\{V \cap A \mid V \in \beta_a\}$ son entornos de a en A. Como $V \in \beta_a$, en concreto $V \in N_a$, por lo que $V \cap A$ entorno de a en A. Veamos entonces que esta familia de entornos efectivamente forman una base de entornos en A.

   Sea $N \subset A$ entorno de a en A. Entonces, por 2), $\exists N' \in N_a$ con $N = N' \cap A$. Entonces, como β_a es una base de entornos de a en $\mathcal{T}$, entonces $\exists V \in \beta_a$ tal que $V \subset N'$. Entonces, como $V \subset N'$, tenemos que $V \cap A \subset N' \cap A = N$. Por tanto, $V \cap A$ es un entorno de a en A. Además, como $V \cap A \subset N$, tenemos que es un entono básico, por lo que la base es la indicada.

5. $E \subset A \Longrightarrow \overline{E}^A = \overline{E} \cap A$.

   $\subset$) Sea x punto adherente a E en A, es decir, $x \in \overline{E}^A$. Por ser la adherencia en A, tenemos que $x \in A$.

   Además, como $x \in \overline{E}^A$, por definición tenemos que $N \cap E \neq \emptyset$ para todo entorno de x en A. Entonces, por 2), tenemos que $(N' \cap A) \cap E \neq \emptyset$ para todo $N' \in N_x$, por lo que se tiene que $N' \cap E \neq \emptyset$ para todo $N' \in N_x$, deduciendo que $x \in \overline{E}$.

   Por tanto, $x \in \overline{E} \cap A$.

   $\supset$) Sea $x \in \overline{E} \cap A$. Veamos que $x \in \overline{E}^A$.

   Sea N' entorno de x en A. Por 2), tenemos que $N = N' \cap A$, con $N' \in N_x$. Entonces, $N \cap E = N' \cap A \cap E$. Como $E \subset A$, tenemos que $A \cap E = E$ y, por tanto, $N \cap E = N' \cap E$. Como $N' \in N_x$ y $x \in \overline{E}$, por definición de punto adherente tenemos que $N' \cap E \neq \emptyset$, por lo que $N \cap E \neq \emptyset$. Como esto es válido para todo N entorno de x en A, tenemos que $x \in \overline{E}^A$.

6. $E \subset A \Longrightarrow E^{\circ_A} \supset E^\circ \cap A$.

   $\supset$) Sea $x \in E^\circ \cap A$. Entonces, como $x \in E^\circ$, tenemos que $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset E$. Pero como $E \subset A$, tenemos que $U \cap A \subset E$. Por tanto, definiendo $U \cap A = U' \in \mathcal{T}_{|_A}$, tenemos que $\exists U' \in \mathcal{T}_{|_A}$ con $x \in U' \subset E$, por lo que $x \in E^{\circ A}$

La igualdad no es cierta en general. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, consideramos $A = [1,5]$ y $E = [1,2]$. Entonces,

$$E^{\circ A} = [1,2[\ \not\subset \ ]1,2[\ = E^\circ \cap A$$

donde $1 \in E^{\circ A}$ ya que $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \cap A \subset E$. Ese abierto U es, por ejemplo, $]0,2[$.

7. $E \subset A \Longrightarrow \partial_A E \subset (\partial E) \cap A$.

   $\subset$) $\partial_A E = \overline{E}^A \setminus E^{\circ A} = (\overline{E} \cap A) \setminus E^{\circ A} \subset (\overline{E} \cap A) \setminus (E^\circ \cap A) = (\overline{E} \setminus E^\circ) \cap A = \partial E \cap A$

   La igualdad no es cierta en general. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, consideramos $A = [1,5]$ y $E = [1,2]$. Entonces,

$$\partial_A E = \{2\} \ \not\supset \ \{1,2\} \ = (\partial E) \cap A$$

□

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de topología inducida.

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{T}_t\big|_A = \{\emptyset, A\}$
2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{T}_{disc}\big|_A = \mathcal{P}(A)$.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, Entonces $\mathcal{T}_u\big|_{\mathbb{N}} = \mathcal{T}_{disc}\big|_{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{T}_u\big|_{\mathbb{Z}} = \mathcal{T}_{disc}\big|_{\mathbb{Z}}$.
4. $\emptyset \neq A' \subset A \subset X$. Entonces, $\left(\mathcal{T}\big|_A\right)\Big|_{A'} = \mathcal{T}\big|_{A'}$.
5. (X, d) espacio métrico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

   Trivialmente, se tiene que la siguiente aplicación define una distancia en A:

$$\begin{array}{rccl} d_A: & A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

   Por tanto, (A, d_A) es un espacio métrico, y se tiene que $\mathcal{T}_{d_A} = \mathcal{T}_d\big|_A$

   Se tiene que todo subespacio topológico de un espacio metrizable es metrizable. Veámoslo. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio metrizable, es decir, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Entonces, considerando $A \subset X$, un subespacio topológico es $\left(A, \mathcal{T}\big|_A\right)$. Como $\mathcal{T}$ es metrizable, tenemos:

$$\mathcal{T}\big|_A = \mathcal{T}_d\big|_A = \mathcal{T}_{d_A}$$

6. (X, d) espacio métrico, $A \subset X$ finito. Entonces, $\mathcal{T}\big|_A = \mathcal{T}_{disc}\big|_A$.
7. $(X, \mathcal{T})$, $x \in X$. Entonces, $\mathcal{T}\big|_{\{x\}} = \mathcal{T}_{disc}\big|_{\{x\}}$.

Definición 1.30 (Conjuntos discretos)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $A \subset X$ se dice <u>discreto</u> si $\mathcal{T}_{|A} = \mathcal{T}_{disc}{}_{|A}$.

Definición 1.31. Una propiedad topológica se dice <u>hereditaria</u> si al tenerla un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ también lo tiene cada $\left(A, \mathcal{T}_{|A}\right)$ con $A \subset X$.

Como hemos visto antes, algunas propiedades hereditarias son:

1. Ser metrizable,
2. Ser discreto,
3. Ser trivial,
4. Que los subconjuntos finitos son cerrados.

   Veamos esta última. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con los subconjuntos finitos cerrados. Es decir, $\forall C' \subset X$ finito, se tiene que $X \setminus C' \in \mathcal{T}$. Veamos si esto ocurre para la topología inducida.

   Sea $C \subset A \subset X$ finito. Entonces, buscamos que $A \setminus C \in \mathcal{T}_{|A}$. Es trivial ver que $A \setminus C = X \setminus C \cap A$, como $C \subset X$ finito, tenemos que $X \setminus C \in \mathcal{T}$ y $A \setminus C \in \mathcal{T}_{|A}$, por lo que se tiene que es una propiedad hereditaria.

1.7. Axiomas de Separación

Definición 1.32. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice:

1. <u>T1</u> (o de *Fréchet*) si: $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que:
$$\exists N \in N_x,\ M \in N_y \mid y \notin N,\ x \notin M$$

2. <u>T2</u> (o de *Haussdorf*) si: $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que:
$$\exists N \in N_x,\ M \in N_y \mid N \cap M = \emptyset$$

Proposición 1.29. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces,*

1. *T2* $\Longrightarrow$ *T1*
2. $(X, \mathcal{T})$ *es T1* $\Longleftrightarrow \forall x, y \in X,\ x \neq y$ *entonces* $\exists U \in \mathcal{T}$ *con* $x \in U,\ y \notin U$.
3. $(X, \mathcal{T})$ *es T2* $\Longleftrightarrow \forall x, y \in X,\ x \neq y$ *entonces* $\exists U, U' \in \mathcal{T}$ *con* $x \in U,\ y \in U'$ *con* $U \cap U' = \emptyset$.
4. *Las propiedades T1 y T2 son hereditarias.*

Demostración. Demostramos cada resultado por separado:

1. Supongamos que el espacio topológico es T2. Es decir, $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que:
$$\exists N \in N_x,\ M \in N_y \mid N \cap M = \emptyset$$
Entonces, $x \in N$, $y \in M$. Pero como su intersección es vacía, ha de ser $x \notin M$, $y \notin N$, por lo que tenemos que es T1.

2. Demostramos por doble implicación:

   $\Longrightarrow$) Sea $(X, \mathcal{T})$ T1. Entonces, $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que $\exists N \in N_x,\ M \in N_y$ con $y \notin N,\ x \notin M$. Entonces, como $N \in N_x$, por definición de entorno se tiene que $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Como $y \notin N$, se tiene que $y \notin U$. Por tanto, se tiene.

   $\Longleftarrow$) Supongamos que $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U,\ y \notin U$. Entonces, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U, y \notin U$. Además, tenemos que $U \in N_x$. Además, también se tiene que $\exists U' \in \mathcal{T}$ con $y \in U', x \notin U'$, teniendo también que $U' \in N_y$.
   Por tanto, tenemos que $(X, \mathcal{T})$ es T1.

3. La doble implicación es trivial si tenemos en cuenta que:
$$N \in N_x \Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{T} \text{ con } x \in U \subset N$$

4. Demostramos en primer lugar que ser T1 es hereditaria. Supongamos $(X, \mathcal{T})$ T1, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Como $(X, \mathcal{T})$ es T1, tenemos que $\forall x, y \in X,\ x \neq y$, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U,\ y \notin U$. Veamos que $\left(A, \mathcal{T}_{\big|A}\right)$ es T1.

   Sea $x, y \in A \subset X,\ x \neq y$. Entonces, será T1 si y solo si $\exists U' \in \mathcal{T}_{\big|A}$ con $x \in U',\ y \in U'$, el cual existe y es $U' = U \cap A$ por ser $(X, \mathcal{T})$ T1.

   Demostramos ahora que ser T2 es hereditaria. Supongamos $(X, \mathcal{T})$ T2, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces, $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ se tiene que $\exists U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x,\ y \in U_y$ y además $U_x \cap U_y = \emptyset$. Veamos que $\left(A, \mathcal{T}_{\big|A}\right)$ es T2.

   Sea $x, y \in A \subset X,\ x \neq y$. Entonces, será T2 si y solo si $\exists U'_x, U'_y \in \mathcal{T}_{\big|A}$ con $x \in U'_x,\ y \in U'_y$ y además $U'_x \cap U'_y = \emptyset$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ T2, tenemos que existen y son $U'_x = U_x \cap A$, $U'_y = U_y \cap A$.

□

Ejemplo.

1. $(X, \mathcal{T}_t)$, con $|X| \geqslant 2$, no es T1 (ni T2).
2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es T2 (y por tanto T1).

   Los abiertos que se toman son los unitarios.
3. (X, d) espacio métrico es T2 (y por tanto T1).

   Demostrado en el Lema 1.9.

4. Sea X infinito. Entonces $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es T1 pero no T2.

   Veamos que es T1. Sean $x, y \in X,\ x \neq y$. Tomamos $U = X \setminus \{y\} \in \mathcal{T}_{CF}$. Entonces, $x \in U,\ y \notin U$, por lo que es T1.

   Veamos que no es T2. Sean $\emptyset \neq U, U' \in \mathcal{T}_{CF}$.

   - Si $U = U'$, entonces $U \cap U' \neq \emptyset$ trivialmente, por lo que no puede ser T2.
   - Si $U \neq U'$, como $U, U' \in \mathcal{T}_{CF}$, entonces $X \setminus U, X \setminus U'$ son finitos. Por tanto, al ser X infinito tenemos que U, U' son infinitos. Por tanto, su intersección no es nula, por lo que no puede ser T2.

Proposición 1.30. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces,*

$$T1 \Longleftrightarrow \{x\} \in C_{\mathcal{T}} \quad \forall x \in X$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación.

$\Longrightarrow$ Supongamos $(X, \mathcal{T})$ T1, y sea $x \in X$. Veamos que $\overline{\{x\}} = \{x\}$, lo que implicará que es cerrado.

$\subset$) Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists y \in \overline{\{x\}},\ y \neq x$. Entonces, como es T1, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $y \in U,\ x \notin U$. Entonces, $U \in N_y,\ y \in \overline{\{x\}}$. Entonces, por definición de punto adherente se tiene que $U \cap \{x\} \neq \emptyset$, por lo que $x \in U$, llegando a una contradicción.

$\supset$) Se tiene que $\overline{\{x\}} \supset \{x\}$.

$\Longleftarrow$) Sean $x, y \in X,\ x \neq y$. Entonces, sea $U = X \setminus \{y\} \in \mathcal{T}$ por hipótesis. Por tanto, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U,\ y \notin U$, por lo que es T1.

□

Definición 1.33. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Consideramos $x_0 \in X$. Entonces:

$$\{x_n\} \to x_0 \Longleftrightarrow \forall N \in N_{x_0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid x_n \in N\ \forall n \geqslant n_0$$

Diremos que x_0 es un límite de la sucesión.

Proposición 1.31. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, con $x_n \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Si $(X, \mathcal{T})$ es T2, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un único límite.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que tiene dos límites, x_A y x_B. Entonces:

$$\forall N \in N_{x_A},\ \exists n_A \in \mathbb{N} \mid x_n \in N\ \forall n \geqslant n_A$$
$$\forall M \in N_{x_B},\ \exists n_B \in \mathbb{N} \mid x_n \in M\ \forall n \geqslant n_B$$

Por ser $(X, \mathcal{T})$ T2, tenemos que $\exists N \in N_{x_A},\ M \in N_{x_B}$ con $N \cap M = \emptyset$. Pero tomando $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, tenemos que $x_{n_0+1} \in N \cap M$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, tiene un único límite. □

1.8. Axiomas de Numerabilidad

Definición 1.34. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. $(X, \mathcal{T})$ se dice:

- 1AN (o que cumple el primer axioma de numerabilidad) si todo punto $x \in X$ tiene una base de entornos β_x numerable.
- 2AN (o que cumple el segundo axioma de numerabilidad) si $\mathcal{T}$ tiene una base numerable.

Proposición 1.32. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:*

1. *2AN $\Longrightarrow$ 1AN,*
2. *Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de $x \in X$. Sea $W_n = \bigcap\limits_{k\leqslant n} V_k$. Entonces, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x, con*

$$W_1 \supset W_2 \supset \dots$$

3. *1AN y 2AN son hereditarias.*

Demostración. Demostramos cada resultado por separado:

1. 2AN $\Longrightarrow$ 1AN

   Como $\mathcal{B}$ es numerable, tenemos que $\forall x \in X$ una base de entornos suya es $\beta_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$, que también es numerable.

2. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de $x \in X$. Sea $W_n = \bigcap\limits_{k\leqslant n} V_k$. Entonces, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x, con

$$W_1 \supset W_2 \supset \dots$$

   Veamos en primer lugar que $W_i \in N_x$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como la intersección finita de entornos es un entorno por N4), tenemos que es cierto. Por tanto, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de entornos de x. Veamos además que es una base de entornos.

   Sea $N \in N_x$. Como $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x, tenemos que $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $V_i \subset N$. Entonces, $W_i \subset V_i \subset N$, por lo que $N \in N_x$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $W_i \subset N$, siendo por tanto $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos de x.

3. 1AN y 2AN son hereditarias.

   Demostramos en primer lugar que $1AN$ es hereditaria. Supongamos $(X, \mathcal{T})$ 1AN, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces, tenemos que $\forall x \in X$, existe β_x base de entornos de x numerable.

   Entonces, dado $a \in A \subset X$, tenemos que $\exists \beta_a$ base de entornos numerable de a en $\mathcal{T}$. Por la Proposición 1.28, tenemos que $\{V \cap A \mid V \in \beta_a\}$ es una base de entornos de a en $\mathcal{T}_{|A}$, que es numerable por serlo β_a. Por tanto, tenemos que $\left(A, \mathcal{T}_{|A}\right)$ es 1AN.

Demostramos ahora que $2AN$ es hereditaria. Supongamos $(X, \mathcal{T})$ 2AN, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces, tenemos que existe $\mathcal{B}$ base $\mathcal{T}$ numerable.

Entonces, por la Proposición 1.28, tenemos que $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}_{|A}$, que es numerable por serlo $\mathcal{B}$. Por tanto, tenemos que $\left(A, \mathcal{T}_{|A}\right)$ es 2AN.

□

Ejemplo. Veamos los siguientes ejemplos de espacios topológicos 2AN o 1AN:

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, con $\mathcal{T}$ numerable, trivialmente tenemos que es 2AN y, por tanto 1AN.

   En particular, $(X, \mathcal{T}_t)$ es 2AN.

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es 1AN porque, $\forall x \in X$, tenemos que $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de X.

   La base más económica de la topología discreta es $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Por tanto, tan solo será 2AN si X es numerable.

3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es 2AN, ya que una base numerable es

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$$

4. $(X, \mathcal{T}_{CF})$.

   - Si X es numerable, entonces $C_{\mathcal{T}}$ es numerable, ya que el número de conjuntos finitos de un conjunto numerable es numerable[3]. Por tanto, $\mathcal{T}_{CF}$ es numerable y, por tanto, es 2AN.
   - Si X no es numerable, entonces no es 1AN.

     Por reducción al absurdo, supongamos que dado $x \in X$, tenemos que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x.
     Entonces, $V_n = X \setminus C_n$, con C_n finito, ya que $V_n \in \mathcal{T}_{CF}$[4]. Además, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es numerable, ya que la unión numerable de conjuntos finitos es numerable[5].
     Por tanto, como X no es numerable, tenemos que $X \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$; de hecho, tiene infinitos elementos. Por lo que sea $y \in X \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, $y \neq x$.
     Tenemos que $x \in X \setminus \{y\} \in \mathcal{T}_{CF}$ es un entorno de x, por lo que aplicando la definición de base de entornos $\exists n \in \mathbb{N} \mid V_n \subset X \setminus \{y\}$, pero $V_n = X \setminus C_n$.
     Por tanto, $\{y\} \subset C_n$, por lo que $y \in C_n$, llegando a una contradicción.

5. $(X, \mathcal{T}_{CN})$. De forma análoga, tenemos que si X es numerable es 2AN, mientras que si no es numerable no es 1AN.

[3] La demostración de este hecho es materia de Cálculo I.
[4] Ver los entornos de la Topología Cofinita.
[5] Este hecho es materia de Cálculo I.

Proposición 1.33. *Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico 2AN, entonces de toda base se puede extraer una base numerable. Es decir, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists\mathcal{B}'$ base de $\mathcal{T}$ con $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}=\{B_i\mid i\in I\}$ una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente numerable). Como $(X,\mathcal{T})$ es 2AN, $\exists\overline{\mathcal{B}}=\{\overline{B}_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ base numerable. Definimos

$$\Gamma=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid \exists i\in I,\ \text{con } \overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m\}$$

Como $\Gamma\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tenemos que es numerable. Veamos que $\Gamma\neq\emptyset$. Sea $m\in\mathbb{N}$, y consideramos $\overline{B}_m\in\overline{\mathcal{B}}$. Entonces, como $\mathcal{B}$ es una base, $\exists i\in I$ con $B_i\in\mathcal{B}$, $B_i\subset\overline{B}_m$. Análogamente, como $\overline{\mathcal{B}}$ es una base, $\exists n\in\mathbb{N}$ con $\overline{B}_n\in\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{B}_n\subset B_i$. Por tanto, para cada $m\in\mathbb{N}$, $\exists n\in\mathbb{N},\ i\in I$ tal que $\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m$, por lo que $(n,m)\in\Gamma$ y $\Gamma\neq\emptyset$.

Por el axioma de elección, definimos la aplicación $f:\Gamma\to I$ tal que $f(n,m)=i$ si y solo si $\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m$. Tomo $\mathcal{B}'=\{B_{f(n,m)}\mid (n,m)\in\Gamma\}\subset\mathcal{B}$, con $\mathcal{B}'$ numerable al serlo Γ. Comprobemos que $\mathcal{B}'$ es una base.

Sea $U\in\mathcal{T}$, $x\in U$. Entonces, aplicando en primer lugar la definición de base para $\overline{\mathcal{B}}$, luego para $\mathcal{B}$ y de nuevo para $\overline{\mathcal{B}}$, obtenemos que existen $m,n\in\mathbb{N},\ i\in I$ con $x\in\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m\subset U$. Entonces, $(n,m)\in\Gamma$, por lo que $i=f(n,m)$. Por tanto, $x\in\overline{B}_n\subset B_{f(n,m)}\subset\overline{B}_m\subset U$.

En conclusión, dado $U\in\mathcal{T}$, $\exists(n,m)\in\Gamma$ tal que $x\in B_{f(n,m)}\subset U$, por lo que $\mathcal{B}'$ es una base. □

Proposición 1.34. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $(X,\mathcal{T})$ tiene una base finita, entonces de toda base se puede extraer una base finita. Es decir, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists\mathcal{B}'$ base de $\mathcal{T}$ con $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es finita.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}=\{B_i\mid i\in I\}$ una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente finita). Como tiene una base finita, sea $\overline{\mathcal{B}}=\{\overline{B}_k\mid k\in\Delta_p\}$ base finita, donde denotamos $\Delta_p=\{1,\dots,p\}$ conjunto finito. Definimos

$$\Gamma=\{(n,m)\in\Delta_p\times\Delta_p\mid \exists i\in I,\ \text{con } \overline{B}_k\subset B_i\subset\overline{B}_k\}$$

Como $\Gamma\subset\Delta_p\times\Delta_p$ y Δ_p es finito, tenemos que es finito. Veamos que $\Gamma\neq\emptyset$. Sea $m\in\Delta_p$, y consideramos $\overline{B}_m\in\overline{\mathcal{B}}$. Entonces, como $\mathcal{B}$ es una base, $\exists i\in I$ con $B_i\in\mathcal{B}$, $B_i\subset\overline{B}_m$. Análogamente, como $\overline{\mathcal{B}}$ es una base, $\exists n\in\Delta_p$ con $\overline{B}_n\in\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{B}_n\subset B_i$. Por tanto, para cada $m\in\Delta_p$, $\exists n\in\Delta_p,\ i\in I$ tal que $\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m$, por lo que $(n,m)\in\Gamma$ y $\Gamma\neq\emptyset$.

Definimos la aplicación $f:\Gamma\to I$ tal que $f(n,m)=i$ si y solo si $\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m$. Tomo $\mathcal{B}'=\{B_{f(n,m)}\mid (n,m)\in\Gamma\}\subset\mathcal{B}$, con $\mathcal{B}'$ finito al serlo Γ. Comprobemos que $\mathcal{B}'$ es una base.

Sea $U\in\mathcal{T}$, $x\in U$. Entonces, aplicando en primer lugar la definición de base para $\overline{\mathcal{B}}$, luego para $\mathcal{B}$ y de nuevo para $\overline{\mathcal{B}}$, obtenemos que existen $m,n\in\Delta_p,\ i\in I$ con $x\in\overline{B}_n\subset B_i\subset\overline{B}_m\subset U$. Entonces, $(n,m)\in\Gamma$, por lo que $i=f(n,m)$. Por tanto, $x\in\overline{B}_n\subset B_{f(n,m)}\subset\overline{B}_m\subset U$.

En conclusión, dado $U\in\mathcal{T}$, $\exists(n,m)\in\Gamma$ tal que $x\in B_{f(n,m)}\subset U$, por lo que $\mathcal{B}'$ es una base. □

Definición 1.35 (Recubrimiento)**.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Entonces un recubrimiento de X es una familia de conjuntos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que:

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Observación. En Topología, es habitual que los recubrimientos sean por abiertos. Es decir, que $\forall i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$. Entonces, dado un recubrimiento de $(X, \mathcal{T})$ por abiertos, $\{U_i\}_{i\in I}$, tenemos que:

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i \subset X$$

donde es un subconjunto de X porque $U_i \in \mathcal{T} \subset X$ para todo $i \in I$. Por tanto, en el caso de que el recubrimiento sea por abiertos, tenemos que la inclusión se convierte en una igualdad:

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

Definición 1.36 (Subrecubrimiento)**.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. Entonces un subrecubrimiento de X es una subfamilia de $\{U_i\}_{i\in I}$ que sigue siendo un recubrimiento de X.

Proposición 1.35. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico 2AN. Entonces, todo recubrimiento de X por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ admite un subrecubrimiento numerable.*

Demostración. Supongamos $\{U_i\}_{i\in I}$, con $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ recubrimiento de X por abiertos, es decir, $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, con $U_i \in \mathcal{T}$. Entonces, por ser 2AN, $\exists \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base numerable. Definimos el siguiente conjunto:

$$\Gamma = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in I, \quad \text{con } B_n \subset U_i\}$$

Tenemos que Γ es numerable, y por ser $\mathcal{B}$ una base tenemos que $\Gamma \neq \emptyset$. Sea la aplicación $f : \Gamma \to I$ tal que $f(n) = i$ si y solo si $B_n \subset U_i$, $\forall n \in \Gamma$.

Veamos ahora que $X = \bigcup\limits_{n\in\Gamma} U_{f(n)}$, es decir, que es un recubrimiento.

$\subset$) Sea $x \in X$, por lo que $\exists i \in I$, con $x \in U_i$. Como $\mathcal{B}$ es una base, tenemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset U_i$, por lo que $n \in \Gamma$. Por tanto,

$$x \in B_n \subset U_{f(n)} \subset \bigcup_{n\in\Gamma} U_{f(n)}$$

$\supset$ Tenemos que:

$$\bigcup_{n\in\Gamma} U_{f(n)} \subset \bigcup_{i\in I} U_i = X$$

Por tanto, hemos encontrado $\{U_{f(n)}\}_{n\in\Gamma}$ subrecubrimiento numerable. □

1.9. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con el Tema 1, consultar la sección 4.1.

2. Aplicaciones entre Espacios Topológicos

2.1. Continuidad

Para $\mathbb{R}$, decíamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ se tiene que } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Para espacios métricos, decíamos que dada $f : (X, d) \to (Y, d')$ es continua en $x_0 \in X$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid f[B(x_0, \delta)] \subset B[f(x_0), \varepsilon]$$

Esto es equivalente a decir que:

$$\forall N \in N_{f(x_0)} \text{ se tiene que } f^{-1}(N) \in N_{x_0}$$

Esta definición se generaliza para cualquier espacio topológico:

Definición 2.1 (Continuidad)**.** Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre dos espacios topológicos, y sea $x_0 \in X$. Decimos que f es continua en x_0 si para todo $N' \in N_{f(x_0)}$ entorno de $f(x_0)$ existe un entorno $N \in N_{x_0}$ entorno de x_0 tal que $f(N) \subset N'$. Es decir,

$$\forall N' \in N_{f(x_0)}, \quad \exists N \in N_{x_0} \text{ con } f(N) \subset N'$$

Observación. Recordamos las siguientes nociones de Álgebra I. Sea $f : X \to Y$. Entonces, dado $W \subset X$, $Z \subset Y$, se tiene que:

1. $W \subset f^{-1}(f(W))$. Además, si es inyectiva se da la igualdad.
2. $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$. Además, si es sobreyectiva se da la igualdad.

Vamos a caracterizar la definición de continuidad en términos de bases, bases de entornos y también en términos de la preimagen de f:

Proposición 2.1 (Caracterización de la continuidad)**.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre dos espacios topológicos, y sea $x_0 \in X$. Entonces, son equivalentes:*

1. *f es continua en x_0.*
2. *Dadas β_{x_0} base de entornos de x_0 y $\beta_{f(x_0)}$ base de entornos de $f(x_0)$, para cualquier $V' \in \beta_{f(x_0)}$ existe $V \in \beta_{x_0}$ tal que $f(V) \subset V'$. Es decir,*

$$\forall V' \in \beta_{f(x_0)}, \quad \exists V \in \beta_{x_0} \mid f(V) \subset V'$$

3. *La preimagen de cualquier entorno de $f(x_0)$ es un entorno de x_0. Es decir,*

$$\forall N \in N_{f(x_0)} \text{ se tiene que } f^{-1}(N) \in N_{x_0}$$

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Dado $V' \in \beta_{f(x_0)}$, en particular $V' \in N_{f(x_0)}$. Como f es continua en x_0 se tiene que $\exists N \in N_{x_0}$ tal que $f(N) \subset V'$.

Por ser β_{x_0} una base de entornos, por definición $\exists V \in \beta_{x_0}$ tal que $V \subset N$. Por tanto, se tiene que $f(V) \subset f(N) \subset V'$, demostrando así 2).

$2 \Longrightarrow 3)$ Consideramos las bases de entornos triviales dadas por todos los entornos. Entonces, dado $N \in N_{f(x_0)} = \beta_{f(x_0)}$, por 2) se tiene que $\exists V \in N_{x_0} = \beta_{x_0}$ tal que $f(V) \subset N$.

Entonces, $V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(N)$. Como $V \in N_{x_0}$, y $V \subset f^{-1}(N)$, tenemos que $f^{-1}(N) \in N_{x_0}$.

$3 \Longrightarrow 1)$ Dado $N' \in N_{f(x_0)}$, por 3) tenemos que $f^{-1}(N') \in N_{x_0}$. Consideramos $N = f^{-1}(N')$. Entonces $f(N) = f(f^{-1}(N')) \subset N'$, por lo que tenemos que f es continua en x_0.

□

Definición 2.2 (Continuidad global)**.** Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos. Decimos que f es continua si f es continua en todo $x \in X$.

Proposición 2.2 (Caracterización de la continuidad global)**.** *Sea una aplicación entre dos espacios topológicos $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$. Entonces, son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *La preimagen de todo abierto de $\mathcal{T}'$ es un abierto de $\mathcal{T}$. Es decir,*

$$f^{-1}(U') \in \mathcal{T}, \qquad \forall U' \in \mathcal{T}'$$

3. *La preimagen de todo abierto básico (de una base dada) es abierto. Es decir, dada $\mathcal{B}'$ base de $\mathcal{T}'$, se cumple que:*

$$f^{-1}(B') \in \mathcal{T}, \qquad \forall B' \in \mathcal{B}'$$

4. *La preimagen de todo elemento de una subbase fijada de $\mathcal{T}'$ es un abierto. Es decir, dada S subbase de $\mathcal{T}'$, se tiene que:*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{T}, \qquad \forall A \in S$$

5. *La preimagen de todo cerrado de $\mathcal{T}'$ es un cerrado de $\mathcal{T}$. Es decir,*

$$f^{-1}(C) \in C_{\mathcal{T}}, \qquad \forall C' \in C_{\mathcal{T}'}$$

6. *Dado $D \subset X$, la imagen de su adherencia ha de estar contenida en la adherencia de su imagen. Es decir,*

$$f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}, \qquad \forall D \subset X$$

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Dado $U \in \mathcal{T}'$, por la Proposición 1.16, tenemos que $U \in N_x \ \forall x \in U$. En particular, dado $x_0 \in f^{-1}(U) \subset X$, como $U \in N_{f(x_0)}$ y f es continua en x_0, tenemos que $f^{-1}(U) \in N_{x_0}$.

Por tanto, tenemos que $f^{-1}(U) \in N_{x_0} \ \forall x_0 \in f^{-1}(U)$. Por tanto, por la proposición 1.16, tenemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, quedando demostrada esta implicación.

$2 \Longrightarrow 1)$ Tenemos que probar que f es continua; es decir, si $x_0 \in X$, entonces f es continua en x_0.

Dado $x_0 \in X$, por la Proposición 2.1, tenemos que demostrar que si $N \in N_{f(x_0)}$, entonces $f^{-1}(N) \in N_{x_0}$.

Como $N \in N_{f(x_0)}$, $\exists U \in \mathcal{T}'$ tal que $f(x_0) \in U \subset N$. Veamos ahora que $f^{-1}(N) \in N_{x_0}$:

$$x_0 \in f^{-1}(f(x_0)) \subset f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N) \in N_{x_0}$$

donde sabemos que es un entorno ya que, usando 2), tenemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

$2 \Longrightarrow 3)$ TERMINAR

$3 \Longrightarrow 4)$

$4 \Longrightarrow 1)$

$2 \Longrightarrow 5)$

$5 \Longrightarrow 2)$

$5 \Longrightarrow 6)$ Sea $D \subset X$. Entonces, $\overline{f(D)} \in C_{\mathcal{T}'}$. Por 5), se tiene que $f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right) \in C_{\mathcal{T}}$.

Como $f(D) \subset \overline{f(D)}$, se tiene que $D \subset f^{-1}(f(D)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right) \in C_{\mathcal{T}}$; y como la adherencia es el menor cerrado que contiene al conjunto, $\overline{D} \subset f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)$, por lo que $f\left(\overline{D}\right) \subset f\left[f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)\right] \subset \overline{f(D)}$, demostrando así lo pedido.

$6 \Longrightarrow 5)$ Sea $C \in C_{\mathcal{T}'}$. Usando 6) para $D = f^{-1}(C)$, tenemos que:

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} \overset{(*)}{=} C$$

donde en $(*)$ hemos usado que $C \in C_{\mathcal{T}'}$. Además, $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}\left[f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)\right]$, por lo que:

$$\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}\left[f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)\right] \subset f^{-1}(C)$$

Por tanto, $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$, por lo que $f^{-1}(C) \in C_{\mathcal{T}}$.

□

Observación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua. Entonces, por la proposición anterior se tiene que:

$$f^{-1}(a) = \{x \in X \mid f(x) = a\} \in C_{\mathcal{T}}$$
$$f^{-1}(]a, b[) = \{x \in X \mid a < f(x) < b\} \in \mathcal{T}.$$

Ejemplo. Algunos ejemplos de aplicaciones continuas entre espacios topológicos son:

1. Hay que observar que las aplicaciones continuas entre espacios métricos son aplicaciones continuas entre los espacios topológicos correspondientes a esas distancias.

2. Cualquier aplicación f cuyo dominio sea $(X, \mathcal{T}_{disc})$ o cuyo codominio sea $(Y, \mathcal{T}_t)$, siempre será continua.

   Para el primer caso, tenemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$ independientemente de $U \in \mathcal{T}'$, por lo que f es continua.

   En el segundo caso, tenemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ y $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$ independientemente de $\mathcal{T}$, por lo que f es continua.

3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces la aplicación inclusión:

$$\begin{array}{rccc} i: & \left(A, \mathcal{T}_{|A}\right) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ & a & \longmapsto & a \end{array}$$

   es continua.

   Esto es claro, ya que $\forall U \in \mathcal{T}$ se tiene que $i^{-1}(U) = U \cap A \in \mathcal{T}_{|A}$.

4. Sea $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$. Tenemos que Id es continua si y solo si $\mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}$.

   En particular, tenemos que $Id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R} \to \mathcal{T}_u)$ es continua.

   No obstante, $Id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R} \to \mathcal{T}_S)$ no es continua, ya que $\mathcal{T}_S \nleqslant \mathcal{T}_u$.

Lema 2.3. *La composición de aplicaciones continuas entre espacios topológicos es continua. Es decir, sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ tres espacios topológicos y las siguientes aplicaciones:*

$$(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\quad f \quad} (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\quad g \quad} (Z, \mathcal{T}'')$$

Si f, g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración. Para probar esto, usaremos que la imagen inversa de un abierto ha de ser un abierto. Es decir, que dado $U \in \mathcal{T}''$, entonces $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Tenemos que:

$$(g \circ f)^{-1}(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})(U) = (f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$$

donde he aplicado que $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$ por ser g continua, por lo que su preimagen por f está en $\mathcal{T}$ por ser f continua. □

Corolario 2.3.1. *La restricción en el dominio de una aplicación continua entre espacios topológicos es continua. Es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, dado $A \subset X$ tenemos que $f_{\big|A} : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua.*

Demostración. Tenemos el siguiente caso:

$$(A, \mathcal{T}_A) \xhookrightarrow{\quad i \quad} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\quad f \quad} (Y, \mathcal{T}')$$

Como la inclusión i es continua siempre y sabemos que f es continua, tenemos que $f \circ i = f_{\big|A}$ es continua. □

Tenemos el resultado análogo para restringir el codominio.

Corolario 2.3.2. *La restricción en el codominio de una aplicación continua entre espacios topológicos es continua. Es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, dado $Im(f) \subset W \subset Y$ tenemos que $f : (X, \mathcal{T}) \to (W, \mathcal{T}_W)$ es continua.*

Lema 2.4 (de pegado)**.** *Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Supongamos que tenemos $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia (no necesariamente finita) de subconjuntos tal que $\emptyset \neq A_i \subset X, \forall i \in I$ y $\{f_i : A_i \to Y\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones. Si se verifica:*

1. $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
2. $f_i = f_j$ *en* $A_i \cap A_j$ *para todo* $i, j \in I$.
3. $A_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I$*; o bien, en el caso de que* I *se finito,* $A_i \in C_{\mathcal{T}} \quad \forall i \in I$.
4. $f_i : (A_i, \mathcal{T}_{A_i}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *es continua* $\forall i \in I$.

Entonces, la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ definida como $f(x) = f_i(x)$ cuando $x \in A_i$ está bien definida y es continua.

Demostración. Veamos en primer lugar que f está bien definida. De 2) se deduce de forma directa; ya que dado $x \in X$, en el caso de que pertenezca a más de un subconjunto su imagen ha de ser igual por 2), y en el caso de que solo pertenezca a un conjunto, como f_i es una aplicación se tiene.

Veamos ahora que es continua. Para ello, supongamos que la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es finita y de conjuntos cerrados (para abiertos la demostración en análoga).

Sea $C' \in C_{\mathcal{T}'}$. Queremos probar que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$, lo que demostraría que f es continua:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C') = X \cap f^{-1}(C') = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap f^{-1}(C') &= \bigcup_{i \in I} \left(A_i \cap f^{-1}(C')\right) = \\ &= \bigcup_{i \in I} \left(f_{\big|A_i}{}^{-1}(C')\right) = \bigcup_{i \in I} \left(f_i{}^{-1}(C')\right) \in C_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

donde tenemos que es cerrado porque $f_i{}^{-1}(C') \in C_{\mathcal{T}}$ por ser f_i continua, y la unión es un cerrado ya que la unión finita de cerrados es cerrado. (Este es el aspecto en el que la demostración difiere si A_i son abiertos o cerrados). □

2.2. Aplicaciones abiertas y cerradas. Homeomorfismos

Definición 2.3. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Decimos que:

1. f es abierta si $f(U) \in \mathcal{T}', \ \forall U \in \mathcal{T}$.
2. f es cerrada si $f(C) \in C_{\mathcal{T}'}, \ \forall C \in C_{\mathcal{T}}$.

Al igual que tenemos la caracterización de la continuidad, tenemos la caracterización de que una aplicación sea abierta:

Lema 2.5. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Entonces, equivalen:*

1. *f es abierta.*
2. *$f(B) \in \mathcal{T}'$ para todo $B \in \mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.*
3. *$f(N) \in N_{f(x)}$ para todo $x \in X, N \in N_x$.*
4. *$f(A^\circ) \subset [f(A)]^\circ$ para cualquier $A \subset X$.*

Demostración. TERMINAR □

Por último, tenemos la caracterización de que una aplicación sea cerrada:

Lema 2.6. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Entonces, equivalen:*

1. *f es cerrada.*
2. *$\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$ para cualquier $A \subset X$.*

Demostración. TERMINAR □

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de aplicaciones abiertas y cerradas:

1. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \left(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u}\big|_{\mathbb{S}^1}\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \\ & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

   No es abierta, ya que $f(\mathbb{S}^1) = [-1, 1] \notin \mathcal{T}_u$, pero $\mathbb{S}^1 \in \mathcal{T}_{u}\big|_{\mathbb{S}^1}$.

2. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{disc})$ siempre es abierta, ya que todo conjunto de Y es abierto en $\mathcal{T}_{disc}$. Igualmente, es cerrada.
3. $f : (X, \mathcal{T}_t) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta si y solo si $f(X) \in \mathcal{T}'$. Además, f es cerrada si y solo si $f(X) \in C_{\mathcal{T}'}$.

4. Sea $f : (X, \mathcal{T}_t) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ constante; es decir, $f(x) = p_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in X$.

   Tenemos que f es cerrada, ya que $f(A) = \{p_0\}$ para todo $A \subset X$ no vacío. Por tanto, si A es cerrado tenemos que su imagen es $\{p_0\} \in C_{\mathcal{T}_u}$.

   No obstante, f no es abierta, ya que $f(X) = \{p_0\} \notin \mathcal{T}_u$.

5. $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ la aplicación identidad.

   Tenemos que Id es abierta si y solo si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Análogamente, Id es cerrada si y solo si $C_\mathcal{T} \subset C_{\mathcal{T}'}$.

6. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$. Tenemos de forma directa que:

   a) Si f, g son abiertas, entonces $g \circ f$ es abierta.

   b) Si f, g son cerradas, entonces $g \circ f$ es cerrada.

7. Dado $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$, consideramos la inclusión $i_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$. Tenemos que:

   $$i_A \text{ es abierta } \Longleftrightarrow A \in \mathcal{T}$$

   $\Longrightarrow$) Como $A \in \mathcal{T}_A$, por ser i_A abierta tenemos que $i_A(A) = A \in \mathcal{T}$.

   $\Longleftarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}_A$, por lo que $U = U' \cap A$, con $U' \in \mathcal{T}$. Entonces, tenemos que $i_A(U) = U = U' \cap A$, que es la intersección de dos abiertos, por lo que es un abierto. Por tanto, f es abierta.

   De igual forma, tenemos que:

   $$i_A \text{ es cerrada } \Longleftrightarrow A \in C_\mathcal{T}$$

8. Como consecuencia de 6) y 7), si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta y $A \subset X$ es abierto, tenemos que $f_{|_A} : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta, ya que $f_{|_A} = f \circ i_A$.

   Igualmente, si f es cerrada y $A \in C_\mathcal{T}$, tenemos que $f_{|_A}$ es cerrada.

9. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación abierta, dado $W \subset Y$ tal que $Im(f) \subset W$, tenemos que $f : (X, \mathcal{T}) \to (W, \mathcal{T}_W)$ es abierta.

   De nuevo, es consecuencia directa de 6) y 7).

2.2.1. Homeomorfismos

Definición 2.4 (Homeomorfismos)**.** Decimos que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre espacios topológicos es un homeomorfismo si f es continua, biyectiva y su inversa es continua.

Algunos resultados inmediatos que se deducen de la definición son:

1. $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es un homeomorfismo.
2. Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} es un homeomorfismo.
3. La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.

4. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo y $A \subset X$, entonces se tiene que $f_{\big|A} : (A, \mathcal{T}_A) \to \left(f(A), \mathcal{T}'_{f(A)}\right)$ es un homeomorfismo.

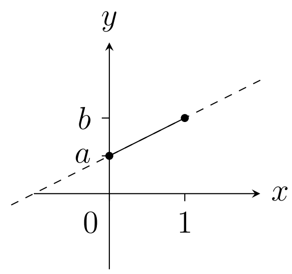
Definición 2.5. Decimos que dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre ellos. Lo notaremos mediante $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}')$.

De los resultados inmediatos que se deducen de la definición de homeomorfismo, se tiene la siguiente proposición de demostración inmediata.

Proposición 2.7. *La relación "ser homeomorfo a", denotada por $\cong$, es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios topológicos.*

Ejemplo. Algunos ejemplos de homeomorfismos son:

1. Tenemos que $\left(]0,1[, \mathcal{T}_{u]0,1[}\right)$ es homeomorfo a $\left(]a,b[, \mathcal{T}_{u]a,b[}\right)$ para cualesquiera $a < b$ fijados. Veámoslo:



Tenemos que el homeomorfismo es la recta que pasa por los puntos $A = (0, a)$, y $B = (1, b)$. Usando la ecuación punto pendiente, tenemos que $y - a = (b-a)x$. Entonces, el homeomorfismo f es:

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1[& \longrightarrow &]a,b[\\ & x & \longmapsto & a + (b-a)x \end{array}$$

Esta aplicación es claramente biyectiva, al ser una recta. Además, su inversa es $f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$, que es continua por ser polinómica. Por tanto, se tiene que f es un homeomorfismo.

Observación. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. En Álgebra I, se vio que dado $A_1, A_2 \subset X$, y $f : X \to Y$, se tiene que:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \qquad f(A_1 \cap A_2) \overset{*}{\subset} f(A_1) \cap f(A_2)$$

donde la igualdad en $(*)$ se da si y solo si f es inyectiva.

Lema 2.8. *Dada una aplicación* <u>*biyectiva*</u> $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *entre dos espacios topológicos, son equivalentes:*

1. f^{-1} *es continua.*

2. f *es abierta.*

3. f es cerrada.

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea $U \in \mathcal{T}$. Veamos que $f(U) \in \mathcal{T}'$. Como f^{-1} es continua, tenemos que $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$. No obstante, como $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, tenemos que $f(U) \in \mathcal{T}'$.

$2 \Longrightarrow 1)$ Sea $U \in \mathcal{T}$. Veamos que $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$. Como f es abierta, tenemos que $f(U) \in \mathcal{T}'$. Además, como f es biyectiva tenemos que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, por lo que tenemos que f es continua.

Las implicaciones respecto a 3) tenemos que son análogas sustituyendo abiertos por cerrados, debido a la caracterización de la continuidad de una aplicación. □

Corolario 2.8.1. *Dada una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si y solo si de da alguna de estas dos condiciones:*

1. *f es continua, biyectiva y abierta.*
2. *f es continua, biyectiva y cerrada.*

Observación. Ya se ha visto que la identidad entre el mismo espacio topológico es un homeomorfismo. No obstante, si las topologías no son iguales, $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Tenemos que es continua si y solo si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, y es abierta si y solo si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Por tanto, del corolario anterior se deduce.

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de homeomorfismos:

1. Todos los intervalos abiertos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son homeomorfos. Estos son, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces son homeomorfos:

$$]a, b[\qquad]a, +\infty[\quad]-\infty, b[\qquad \mathbb{R}$$

   Previamente se ha visto que $]a, b[\ \cong\ ]0, 1[$.

   Veamos ahora que $\mathbb{R} \cong\ ]0, 1[$. Sabemos que $f = \arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ es continua y biyectiva. Además, $f^{-1} = \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, que también es biyectiva. Por tanto, f es un homeomorfismo, por lo que $\mathbb{R} \cong \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cong\ ]0, 1[$. Por tanto, $\mathbb{R} \cong\ ]0, 1[$.

   Por último, se tiene que $f_{|_{]a,+\infty[}} :\ ]a, \infty[\to \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ es un homeomorfismo[1], por lo que $]a, \infty[\ \cong \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[\ \cong\ ]0, 1[$. Por tanto, $]a, \infty[\ \cong\ ]0, 1[$.

   Análogamente, se tiene que $]-\infty, b[\ \cong\ ]0, 1[$.

[1]Para que sea un homeomorfismo, el codominio ha de ser $f(]a, +\infty[)$. Como se conoce que arctan es estrictamente creciente, se conoce su imagen.

2. Consideramos $\mathbb{S}^n$ y el polo norte de la esfera $N = (0, \dots, 0, 1)$. Veamos que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$.

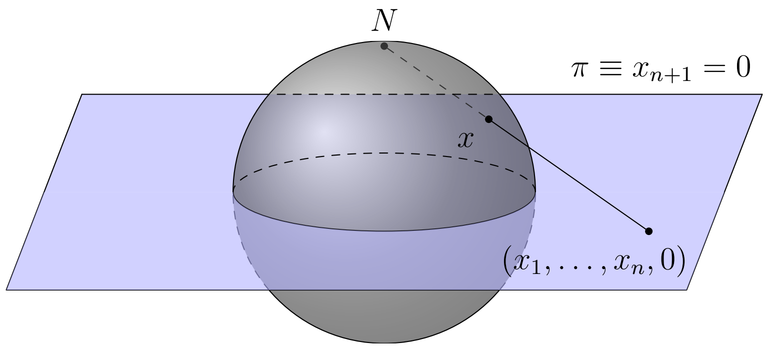


Figura 2.1: Representación gráfica de la proyección estereográfica.

Tomamos $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. La recta que pasa por x y N, es:

$$\begin{aligned}(0, \dots, 0, 1) + \lambda \cdot \overrightarrow{(0, \dots, 0, 1)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})} &= \\ = (0, \dots, 0, 1) + \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - 1) &= \\ = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1 + \lambda(x_{n+1} - 1))&\end{aligned}$$

Buscamos obtener la intersección con el plano de ecuación $x_{n+1} = 0$, por lo que $1 + \lambda(x_{n+1} - 1) = 0$. Por tanto, $\lambda = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}}$. Definimos entonces la siguiente aplicación, llamada proyección estereográfica, que lleva cada punto a la correspondiente intersección descrita:

$$\begin{array}{rccc} p_e: & \mathbb{S}^n \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \dfrac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \end{array}$$

Calculamos ahora su inversa. Dado $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, consideramos dicho punto en $\mathbb{R}^{n+1}$, $y = (y_1, \dots, y_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La recta que pasa por y y N, es:

$$(0, \dots, 0, 1) + \mu \cdot (y_1, \dots, y_n, -1) = (\mu x_1, \dots, \mu x_n, 1 - \mu)$$

Calculamos la intersección de la recta con $\mathbb{S}^n$:

$$\begin{gathered}(\mu y_1)^2 + \cdots + (\mu y_n)^2 + (1 - \mu)^2 = 1 \\ \mu^2(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + \cancel{1} + \mu^2 - 2\mu = \cancel{1} \\ \mu[\mu(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + \mu - 2] = 0\end{gathered}$$

Las dos soluciones, por tanto, son $\mu = 0$ (que nos da N, que no nos interesa), y el siguiente punto:

$$\mu(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + \mu - 2 = 0 \Longrightarrow \mu = \frac{2}{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

Por tanto, definimos:

$$\begin{array}{rccl} p_e^{-1}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{2y_1}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}, \ldots, \dfrac{2y_n}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}, 1 - \dfrac{2}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}\right) \end{array}$$

Tenemos que p_e es continua[2], y es fácil ver que p_e^{-1} es su inversa, también continua. Por tanto, tenemos la proyección estereográfica p_e es un homeomorfismo, por lo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$.

3. Denotamos por $S = (0, \ldots, 0, -1)$ al polo sur de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Veamos que $\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$ es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

   Tomamos $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$. La semirrecta que empieza en el origen y pasa por x es:

   $$\lambda(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \qquad \lambda \geqslant 0$$

   Buscamos su intersección con el cilindro:

   $$(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2 = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

   donde tomo el valor de la raíz positiva, ya que $\lambda \geqslant 0$. Además, el denominador no se anula, ya que si las primeras n componentes de x fuesen nulas, tendríamos que $x \in \{N, S\}$, pero estos no pertenecen a nuestro conjunto.

   Por tanto, definimos la siguiente aplicación, que lleva cada punto de la esfera a la correspondiente intersección con el cilindro:

   $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}} \cdot (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \end{array}$$

   La inversa se construye análogamente. Consideramos un punto del cilindro $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. La semirrecta que pasa por y y que empieza en el origen es:

   $$\mu(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \qquad \mu \geqslant 0$$

   Calculamos la intersección de la recta con $\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$:

   $$\begin{gathered} (\mu y_1)^2 + \cdots + (\mu y_n)^2 + (\mu y_{n+1})^2 = 1 \\ \mu^2(y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2) = 1 \\ \mu^2(1 + y_{n+1}^2) = 1 \end{gathered}$$

   Por tanto, el valor de μ para la intersección es:

   $$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + y_{n+1}^2}}$$

[2] En Análisis Matemático I se ha visto que es continua si y solo si lo es cada una de sus componentes, y cada una lo es por ser polinómica. Este hecho se generalizará en la sección 2.3, sobre topología producto.

Por tanto, definimos:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^n\setminus\{N,S\} \\ & (y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1+y_{n+1}^2}}\cdot(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}) \end{array}$$

Tenemos que f es continua, y se demuestra que f^{-1} es su inversa, también continua. Por tanto, tenemos que ambos conjuntos son homeomorfos.

4. Veamos ahora que $B(0,1)\cong\mathbb{R}^n$.

   Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & B(0,1) \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

   Es fácil ver que f es continua y biyectiva. Además, su inversa es:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & B(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & y & \longmapsto & \dfrac{y}{1-\|y\|} \end{array}$$

   Que también es continua. Por tanto, es un homeomorfismo, por lo que $B(0,1)\cong\mathbb{R}^n$.

Debido a las caracterizaciones de la continuidad, y a la definición de homemorfismo, se tiene de forma directa la siguiente proposición.

Proposición 2.9. *Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ un homeomorfismo entre dos espacios topológicos. Entonces, se tiene que:*

1. $U\in\mathcal{T}\Longrightarrow f(U)\in\mathcal{T}'$ *(f es abierta),*
2. $C\in C_{\mathcal{T}}\Longrightarrow f(C)\in C_{\mathcal{T}'}$ *(f es cerrada),*
3. *$\mathcal{B}$ es base de la topología en $\mathcal{T}$ si y solo si $\mathcal{B}'=\{f(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$ es base de la topología en $\mathcal{T}'$.*
4. *Dado $x\in X$, se tiene que $N\in N_x\Longleftrightarrow f(N)\in N_{f(x)}$.*
5. *β_x es base de entornos de x en $(X,\mathcal{T})$ si y solo si $\beta'_x=\{f(V)\mid V\in\beta_x\}$ es base de entornos de $f(x)$ en $(Y,\mathcal{T}')$.*

Demostración. TERMINAR □

Definición 2.6. Una propiedad se dice topológica si no cambia por homeomorfismos. Es decir, esa propiedad la cumple un espacio topológico si y solo si la cumplen todos los espacios topológicos homeomorfos a él.

Ejemplo. Algunas propiedades topológicas que se deducen de la proposición anterior son:

1. Ser T1.

   Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T1, y consideramos un homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$. Veamos si $(Y, \mathcal{T}')$ es T1.

   Sean $y_1, y_2 \in Y$. Por ser f un homeomorfismo, tenemos que $\exists!\ x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$. Entonces, como $(X, \mathcal{T})$ es T1, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x_1 \in U,\ x_2 \notin U$.

   Como f es un homeomorfismo, tenemos que $f(U) \in \mathcal{T}'$. Además, como $x_1 \in U$, entonces $f(x_1) = y_1 \in f(U)$. Además, como $x_2 \notin U$ y f es inyectiva, tenemos que $f(x_2) = y_2 \notin f(U)$. Por tanto, $(Y, \mathcal{T}')$ es T1.

2. Ser T2.

3. Ser 1AN.

4. Ser 2AN.

Definición 2.7 (Embebimiento)**.** Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos. Se dice que f es un embebimiento si $f : (X, \mathcal{T}) \to \left(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\right)$ es un homeomorfismo.

2.3. Topología Producto

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$, queremos construir una topología natural sobre $X \times Y$.

Lema 2.10. *Dados dos espacios topológicos* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$*, se tiene que*

$$\mathcal{B} = \{U \times U' \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{T},\ U' \in \mathcal{T}'\}$$

es base de una topología en $X \times Y$*.*

Demostración. Usamos el Teorema 1.13. Para ello, comprobamos ambas condiciones:

B1) Tenemos que ver que $X \times Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

   Como $X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{T}'$, tenemos que $X \times Y \in \mathcal{B}$, por lo que se tiene de forma directa.

B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y consideramos $(x, y) \in B_1 \cap B_2$. Veamos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

   Tenemos que $B_1 = U_1 \times U_1', B_2 = U_2 \times U_2'$, con $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, $U_1', U_2' \in \mathcal{T}'$. Como $(x, y) \in B_1 \cap B_2$, tenemos que $x \in (U_1 \cap U_2)$ e $y \in (U_1' \cap U_2')$. Por tanto, se tiene que $(x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \cap U_2')$.

   Definimos entonces $B_3 = (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \cap U_2')$, ya que la intersección de dos abiertos es un abierto, y se tiene lo pedido.

□

Definición 2.8 (Topología Producto)**.** Llamamos topología producto de $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ a la topología en $X \times Y$ que tiene por base la descrita en el lema anterior:

$$\mathcal{B} = \{U \times U' \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{T},\ U' \in \mathcal{T}'\}$$

A esta topología se le suele denotar por $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

Notemos que, aunque el producto de abiertos es un abierto, el recíproco no es cierto. Es decir, en general, un abierto de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ no es un producto de abiertos. Análogamente, respecto a los cerrados se tiene que el producto de cerrados también es cerrado (aunque al revés no se tiene). Veámoslo:

Proposición 2.11. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos, y consideramos $C \in C_{\mathcal{T}}$, $C' \in C_{\mathcal{T}'}$. Entonces, $C \times C' \in C_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'}$.*

Demostración. Demostramos que su complementario es un abierto.

$$(X \times Y) \setminus (C \times C') = [(X \setminus C) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus C')] \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$$

donde hemos visto que es un abierto de la topología producto ya que X e Y son abiertos en sus respectivas topologías.

Por tanto, tenemos que $C \times C'$ es un cerrado en la topología producto. $\square$

Proposición 2.12. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Entonces, se tiene:*

1. *Si $\mathcal{B}_X$ es una base de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{B}_Y$ es una base de $\mathcal{T}'$, entonces una base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es:*
$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{B \times B' \subset X \times Y \mid B \in \mathcal{B}_X,\ B' \in \mathcal{B}_Y\}$$

2. *Si β_x es una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ y β_y es una base de entornos de y en $(Y, \mathcal{T}')$, entonces una base de entornos de (x, y) en $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es:*
$$\beta_{(x,y)} = \{V \times V' \subset X \times Y \mid V \in \beta_x,\ V' \in \beta_y\}$$

Demostración. Demostramos cada uno de los resultados por separado:

1. Veamos primero que $\mathcal{B}_{X \times Y} \subset \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Esto es evidente, ya que si se tiene que $B \times B' \in \mathcal{B}_{X \times Y}$, entonces $B \in \mathcal{T}$ por ser elemento de una base de $(X, \mathcal{T})$, y análogamente se tiene que $B' \in \mathcal{T}'$. Por tanto, $B \times B' \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

   Ahora, probamos que si $U \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ y $(x_0, y_0) \in U$, entonces se tiene que $\exists B \times B' \in \mathcal{B}_{X \times Y}$ tal que $(x_0, y_0) \in B \times B' \subset U$.

   Como $U \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ y $(x_0, y_0) \in U$, entonces por la definición de la topología producto se tienen que $\exists O \in \mathcal{T}, O' \in \mathcal{T}'$ tal que $(x_0, y_0) \in O \times O' \subset U$. Como $x_0 \in O$ y $\mathcal{B}_X$ es una base de $(X, \mathcal{T})$, entonces $\exists B \in B_X$ tal que $x_0 \in B \subset O$. Análogamente, como $y_0 \in O'$ y $\mathcal{B}_Y$ es una base de $(Y, \mathcal{T}')$, entonces $\exists B' \in B_Y$ tal que $y_0 \in B' \subset O'$.

   Por tanto, tenemos que $(x_0, y_0) \in B \times B' \subset O \times O' \subset U$, tiendo entonces probado que $\mathcal{B}_{X \times Y}$ es una base de la topología producto.

2. TERMINAR

$\square$

Corolario 2.12.1. *Sean* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ *dos espacios topológicos. Entonces, se tiene:*

1. *Si* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ *son 1AN, entonces* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ *es 1AN.*
2. *Si* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ *son 2AN, entonces* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ *es 2AN.*

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de topología producto:

1. $(X, \mathcal{T}_t^X), (Y, \mathcal{T}_t^Y)$. Veamos ahora la topología producto $(X \times Y, \mathcal{T}_t^X \times \mathcal{T}_t^Y)$. Una base de $\mathcal{T}_t^X \times \mathcal{T}_t^Y$ es:
$$\mathcal{B} = \{\emptyset \times \emptyset, X \times \emptyset, \emptyset \times Y, X \times Y\} = \{\emptyset, X \times Y\}$$
Además, como uniendo abiertos básicos no se puede generar ningún otro conjunto, tenemos que $\mathcal{T}_t^X \times \mathcal{T}_t^Y = \{\emptyset, X \times Y\}$. Por tanto, se tiene que $\mathcal{T}_t^X \times \mathcal{T}_t^Y = \mathcal{T}_t^{X \times Y}$.

2. $(X, \mathcal{T}_{disc}^X), (Y, \mathcal{T}_{disc}^Y)$. Veamos ahora la topología producto $(X \times Y, \mathcal{T}_{disc}^X \times \mathcal{T}_{disc}^Y)$. Una base de $\mathcal{T}_{disc}^X \times \mathcal{T}_{disc}^Y$ es:
$$\mathcal{B} = \{A \times B \mid A \subset X,\ B \subset Y\}$$
Tenemos que cualquier punto (x_0, y_0) es un abierto, ya que:
$$\{(x_0, y_0)\} = \{x_0\} \times \{y_0\} \in \mathcal{T}_{disc}^X \times \mathcal{T}_{disc}^Y$$
Por tanto, tenemos que $\mathcal{T}_{disc}^{X \times Y} = \mathcal{T}_{disc}^X \times \mathcal{T}_{disc}^Y$.

El siguiente lema nos será de utilidad para próximos teoremas:

Lema 2.13. *Sean* $p_1, q_1 \in \mathbb{R}^n$, $p_2, q_2 \in \mathbb{R}^m$. *Entonces:*
$$\|(p_1, p_2) - (q_1, q_2)\|^2 = \|p_1 - q_1\|^2 + \|p_2 - q_2\|^2$$

Proposición 2.14. *El producto de* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u^n)$ *con* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_u^m)$ *es* $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{T}_u^{m+n})$. *Es decir,*
$$\mathcal{T}_u^n \times \mathcal{T}_u^m = \mathcal{T}_u^{n+m}$$

Demostración. Sabemos que el siguiente conjunto es un base de la topología producto $\mathcal{T}_u^n \times \mathcal{T}_u^m$:
$$\mathcal{B} = \{B(p_1, r_1) \times B(p_2, r_2) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+, p_1 \in \mathbb{R}^n, p_2 \in \mathbb{R}^n\}.$$

Queremos ver que $\mathcal{B}$ es también base de $\mathcal{T}_u^{n+m}$, lo que por el Teorema 1.13 implicaría que $\mathcal{T}_u^n \times \mathcal{T}_u^m = \mathcal{T}_u^{n+m}$.

Probamos en primer lugar que todo elemento B de $\mathcal{B}$ es un abierto en $\mathcal{T}_u^{n+m}$. Para ello, probamos que dado $q = (q_1, q_2) \in B = B(p_1, r_1) \times B(p_2, r_2)$, existe $B[(q_1, q_2), r]$ tal que $B[(q_1, q_2), r] \subset B(p_1, r_1) \times B(p_2, r_2)$.

Definimos $r_1' = r_1 - \|p_1 - q_1\|$, $r_2' = r_2 - \|p_2 - q_2\|$, y se tiene que:
$$B(q_1, r_1') \subset B(p_1, r_1) \qquad B(q_2, r_2') \subset B(p_2, r_2)$$
Por tanto, $B(q_1, r_1') \times B(q_2, r_2') \subset B(p_1, r_1) \times B(p_2, r_2)$.

Sea entonces $r = \text{mín}\{r_1', r_2'\}$. Veamos que $B[(q_1, q_2), r] \subset B(q_1, r_1') \times B(q_2, r_2')$.

$\subset$) Sea $(x_1, x_2) \in B[(q_1, q_2), r]$. Entonces, por definición de bola y por el lema anterior, se tiene:

$$\|x_1 - q_1\|^2 + \|x_2 - q_2\|^2 = \|(x_1, x_2) - (q_1, q_2)\|^2 < r^2$$

Por tanto, se tiene que $\|x_1 - q_1\|^2 < r^2 \leqslant r_1^2$, por lo que $x_1 \in B(q_1, r_1')$. Análogamente, vemos que $x_2 \in B(q_2, r_2')$. Por tanto, se tiene que $(x_1, x_2) \in B(q_1, r_1') \times B(q_2, r_2')$.

Por tanto, ya tenemos que todo elemento B de $\mathcal{B}$ es un abierto en $\mathcal{T}_u^{n+m}$. Veamos ahora que todo elemento de $\mathcal{T}_u^{n+m}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Para esto, basta demostrar que dados $U \in \mathcal{T}_u^{n+m}$ y $x = (x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, existe $B \in \mathcal{B}$ que cumpla que $x \in B \subset U$.

Sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B[(x_1, x_2), \mathbb{R}] \subset U$. Vamos a probar ahora que $B\left(x_1, \frac{r}{2}\right) \times B\left(x_2, \frac{r}{2}\right) \subset B[(x_1, x_2), r]$.

$\subset$) Si $(y_1, y_2) \in B\left(x_1, \frac{r}{2}\right) \times B\left(x_2, \frac{r}{2}\right)$, entonces se tiene que

$$\|y_1 - x_1\|^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad \|y_2 - x_2\|^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Por tanto, por el lema anterior, se tiene que:

$$\|(y_1, y_2) - (x_1 - x_2)\|^2 = \|y_1 - x_1\|^2 + \|y_2 - x_2\|^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 < r^2$$

Por tanto, $(y_1, y_2) \in B[(x_1, x_2), r]$.

$\square$

Definición 2.9 (Proyección)**.** Dados con conjuntos X, Y vamos a llamar:

$$\begin{array}{rccc} \pi_X : & X \times Y & \longrightarrow & X \\ & (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi_Y : & X \times Y & \longrightarrow & Y \\ & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

a las proyecciones sobre X y sobre Y, respectivamente.

De forma directa, se ve que ambas proyecciones son sobreyectivas.

Proposición 2.15. *Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ se tiene que las proyecciones sobre X y sobre Y desde $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ con continuas y abiertas.*

Demostración. Veamos en primer lugar que π_X es continua. Tenemos si $U \in \mathcal{T}$, entonces $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, por lo que es continua.

Veamos ahora que π_X es abierta. Para ello, por la caracterización de ser abierta, vemos que la imagen de todo abierto básico es un abierto. Tomamos la siguiente base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$:

$$\mathcal{B} = \{U \times U' \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

Entonces, tenemos que probar que $\pi_X(U \times U') \in \mathcal{T}$, que es evidente ya que $\pi_X(U \times U') = U \in \mathcal{T}$.

Análogamente, se demuestra el mismo resultado para π_Y. $\square$

Observación. Notemos que las proyecciones en general no son cerradas. Como ejemplo de esto, sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$. Consideramos ahora la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Veamos ahora que $G(f)$ es un cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$:

$$\begin{aligned} G(f) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x} = f(x)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\} \end{aligned}$$

Definiéndonos ahora la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = xy$, que es continua por ser polinómica, tenemos que $G(f) = F^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}$ es un cerrado en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y F es continua, tenemos que $G(f)$ es también un cerrado.

No obstante, $\pi_{\mathbb{R}}(G(f)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es un cerrado.

Lema 2.16. *Si $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos y $\overline{\mathcal{T}}$ es una topología sobre $X \times Y$ tal que*

$$\pi_X(X \times Y, \overline{\mathcal{T}}) \to (X, \mathcal{T}) \qquad \pi_Y(X \times Y, \overline{\mathcal{T}}) \to (Y, \mathcal{T}')$$

son continuas, entonces $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \overline{\mathcal{T}}$.

Demostración. Consideramos la siguiente base de la topología producto $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$:

$$\mathcal{B} = \{U \times U' \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

Veamos que $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Dados $U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_X^{-1}(U) &= U \times Y \in \overline{\mathcal{T}} \qquad \text{(porque } \pi_X \text{ es continua.)} \\ \pi_Y^{-1}(U') &= X \times U' \in \overline{\mathcal{T}} \qquad \text{(porque } \pi_Y \text{ es continua.)} \end{aligned}$$

Por tanto, como la intersección finita de abiertos es un abierto, tenemos que $(U \times Y) \cap (X \times U') = U \times U' \in \overline{\mathcal{T}}$, es decir $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Por el Teorema 1.13, como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, tenemos que $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \subset \overline{\mathcal{T}}$. □

Proposición 2.17. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos, y consideramos $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Entonces:*

$$\begin{aligned} \pi_X &: \left(X \times \{y_0\}, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'_{X \times \{y_0\}}\right) \to (X, \mathcal{T}) \\ \pi_Y &: \left(\{x_0\} \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'_{\{x_0\} \times Y}\right) \to (X, \mathcal{T}) \end{aligned}$$

son homeomorfismos.

Demostración. En primer lugar, tenemos que $\pi_X : X \times \{y_0\} \to X$ es biyectiva. Estudiemos ahora su continuidad.

Como $\pi_X : (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ es continua, entonces su restricción $\pi_X : \left(X \times \{y_0\}, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'_{X \times \{y_0\}}\right) \to (X, \mathcal{T})$ es continua. Veamos que esa restricción también es abierta. Consideramos la siguiente base de la topología producto $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$:

$$\mathcal{B} = \{U \times U' \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

Dado un elemento $(U \times U') \in \mathcal{B}$, basta ver que $\pi_X[(U \times U') \cap (X \times \{y_0\})]$ es abierto de $\mathcal{T}$:

$$\pi_X[(U \times U') \cap (X \times \{y_0\})] = \pi_X[U \times (U' \cap \{y_0\})] = \left\{ \begin{array}{c} \pi_X(U \times \{y_0\}) = U \in \mathcal{T} \\ \vee \\ \pi_X(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \end{array} \right.$$

En cualquier caso, se tiene que es un abierto.

Por tanto, como π_X es continua, abierta y biyectiva, se trata de un homeomorfismo. Se demuestra análogamente para π_Y. □

Proposición 2.18. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Entonces, se tiene que:*

1. *$(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es T1 si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son T1.*
2. *$(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es T2 si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son T2.*
3. *$(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 1AN si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son 1AN.*
4. *$(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 2AN si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son 2AN.*
5. *$(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es metrizable si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son metrizables.*

Demostración. TERMINAR □

La siguiente proposición es de gran utilidad, ya que nos dice que estudiar la continuidad de una función que toma valores en un producto equivale a estudiar la continuidad de cada una de sus proyecciones:

Proposición 2.19. *Sea $f : (Z, \overline{\mathcal{T}}) \to (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces,*

$$f \text{ continua} \Longleftrightarrow \pi_X \circ f \text{ y } \pi_Y \circ f \text{ continuas.}$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Tenemos que f es continua y ambas proyecciones también lo son. Por tanto, como la composición de funciones continuas es continua, se tiene de forma directa.

$\Longleftarrow$) Para estudiar la continuidad de f, calculamos la imagen inversa de un abierto básico de $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$.

Sea dicho abierto básico $U \times U'$, con $U \in \mathcal{T}$, $U' \in \mathcal{T}'$. Como $\pi_X \circ f$ es continua, tenemos que:

$$(\pi_X \circ f)^{-1}(U) = (f^{-1} \circ \pi_X^{-1})(U) = f^{-1}(U \times Y) \in \overline{\mathcal{T}}$$

Análogamente, usando la proyección en Y tenemos que $f^{-1}(X \times U') \in \overline{\mathcal{T}}$. Como la intersección de abiertos es un abierto, tenemos que:

$$f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times U') = f^{-1}[(U \times Y) \cap (X \times U')] = f^{-1}[U \times U'] \in \overline{\mathcal{T}}$$

Por tanto, f es continua.

□

2.3.1. Aplicaciones Producto

Definición 2.10 (Aplicación producto)**.** Sean dos aplicaciones entre espacios topológicos dadas por:

$$f_1 : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (Y_1, \mathcal{T}_1')$$
$$f_2 : (X_2, \mathcal{T}_2) \to (Y_2, \mathcal{T}_2')$$

Llamamos aplicación producto a la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rrcl} f_1 \times f_2 : & (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) & \longrightarrow & (Y_1 \times Y_2, \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2') \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (f(x_1), f(x_2)) \end{array}$$

Teorema 2.20. *Sean dos aplicaciones entre espacios topológicos dadas por:*

$$f_1 : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (Y_1, \mathcal{T}_1') \qquad f_2 : (X_2, \mathcal{T}_2) \to (Y_2, \mathcal{T}_2')$$

Tenemos que:

1. $f_1 \times f_2$ *es continua* $\Longleftrightarrow$ f_1 *y* f_2 *son continuas.*
2. $f_1 \times f_2$ *es abierta* $\Longleftrightarrow$ f_1 *y* f_2 *son abiertas.*
3. $f_1 \times f_2$ *es un homeomorfismo* $\Longleftrightarrow$ f_1 *y* f_2 *son homeomorfismos.*

Demostración. Demostramos cada una por separado y mediante doble implicación:

1. Demostramos mediante doble implicación:

   $\Longrightarrow$) Fijado $x_0 \in X_2$, definimos la siguiente aplicación:

   $$\begin{array}{rrcl} i : & (X_1, \mathcal{T}_1) & \longrightarrow & (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \\ & x & \longmapsto & (x, x_0) \end{array}$$

   Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & Y_1 \times Y_2 \\ i \uparrow & & \downarrow \pi_{Y_1} \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

Veamos que, efectivamente, $f_1 = \pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) \circ i$. Para todo $x \in X_1$:

$$(\pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2) \circ i)(x) = (\pi_{Y_1} \circ (f_1 \times f_2))(x, x_0) = \pi_{Y_1}(f_1(x), f_2(x_0)) = f_1(x)$$

Como $\pi_{Y_1}, (f_1 \times f_2), i$ son continuas, entonces f_1 es continua. La aplicación i es continua por la Proposición 2.19.

Análogamente, se demuestra para f_2.

$\Longleftarrow$) Dada $\mathcal{B} = \{U_1' \times U_2' \mid U_1' \in \mathcal{T}_1',\ U_2' \in \mathcal{T}_2'\}$ base de $\mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2'$, veamos que $(f_1 \times f_2)^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Sea $U_1' \times U_2' \in \mathcal{B}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(f_1 \times f_2)^{-1}(U_1' \times U_2') &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in U_1' \times U_2'\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in U_1' \times U_2'\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) \in U_1' \land f_2(x_2) \in U_2'\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in f^{-1}(U_1') \land x_2 \in f_2^{-1}(U_2')\} = \\ &= f^{-1}(U_1') \times f_2^{-1}(U_2') \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2\end{aligned}$$

donde especificamos que es un abierto de la topología producto porque, como f_1, f_2 son continuas, entonces dichos conjuntos son abiertos.

2. $\Longrightarrow$) TERMINAR

   $\Longleftarrow$)

3. $\Longrightarrow$)

   $\Longleftarrow$)

$\square$

Corolario 2.20.1. *Consideramos los espacios topológicos* $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), (Y_1, \mathcal{T}_1')$ *y* $(Y_2, \mathcal{T}_2)'$. *Entonces:*

$$\left\{\begin{array}{c}(X_1, \mathcal{T}_1) \cong (Y_1, \mathcal{T}_1') \\ \land \\ (X_2, \mathcal{T}_2) \cong (Y_2, \mathcal{T}_2')\end{array}\right\} \Longrightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \cong (Y_1 \times Y_2, \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2')$$

Ejemplo. Sabemos que $\mathbb{R}^2 \cong B(0,1)$, y que $\big(]0,1[\ , \mathcal{T}_{u]0,1[}\big) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Entonces, por el corolario anterior tenemos que $]0,1[\times]0,1[\cong \mathbb{R}^2 \cong B(0,1)$. De forma general:

$$]0,1[\times \overset{(n)}{\cdots} \times]0,1[\cong \mathbb{R}^n \cong B[(0, \overset{(n)}{\ldots}, 0), 1]$$

2.4. Topología Inicial

Consideramos una familia de espacios topológicos $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$, un conjunto X una familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$ de forma que $f_i : X \to X_i$ para todo $i \in I$.

Nuestro objetivo es buscar una topología $\mathcal{T}$ en X de forma que sea la topología más pequeña tal que f_i sea continua para todo $i \in I$. Notemos que $\mathcal{T}_{disc}$ cumple la segunda condición, pero buscamos la topología más pequeña.

Definición 2.11 (Topología Inicial)**.** Dada $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ familia de espacios topológicos, X un conjunto y $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$. Sea el siguiente conjunto:

$$S = \{f_i^{-1}(U) \subset X \mid U \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$$

Llamaremos topología inicial para la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$ a $\mathcal{T}(S)$; es decir, la topología que tiene a S por subbase.

Proposición 2.21. *Sean $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones, $\mathcal{T}$ la topología inicial sobre X para $\{f_i\}_{i\in I}$. Se considera $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ una aplicación entre espacios topológicos. Se tiene que:*

$$g \text{ es continua } \iff f_i \circ g \text{ es continua } \forall i \in I$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Por cómo está definida $\mathcal{T}$, tenemos que f_i es continua para todo $i \in I$. Además, g por hipótesis es continua. Como la composición de aplicaciones continuas es continua, se tiene.

$\Longleftarrow$) Tomamos $S = \{f_i^{-1}(U) \subset X \mid U \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$, que es subbase de $\mathcal{T}$. Por la caracterización de la continuidad global mediante subbases, basta probar que $g^{-1}(f^{-1}(U_i)) \in \mathcal{T}'$ para todo $i \in I$. Tenemos que $g^{-1}(f^{-1}(U_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$, que por hipótesis es continua; por lo que es un abierto en $(Y, \mathcal{T}')$.

Por tanto, queda demostrado que la imagen inversa de un elemento de la subbase es un abierto, por lo que g es continua.

□

Ejemplo. Dados $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Podemos considerar sobre $X \times Y$ la topología inicial asociada a las proyecciones.

Entonces, la topología inicial para $\{\pi_X, \pi_Y\}$ viene dada por la subbase siguiente:

$$S = \{\pi_X^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\} \cup \{\pi_Y^{-1}(U') \mid U' \in \mathcal{T}'\} = \{U \times Y \mid U \in \mathcal{T}\} \cup \{X \times U' \mid U' \in \mathcal{T}'\}$$

Entonces, la topología inicial para $\{\pi_X, \pi_Y\}$ tiene por base asociada:

$$\mathcal{B}(S) = \{U \times U' \mid U \in \mathcal{T},\ U' \in \mathcal{T}'\}$$

No obstante, $\mathcal{B}(S)$ es también base de la topología producto, por lo que la topología inicial para las proyecciones es la topología producto.

En general, dado un conjunto de espacios topológicos $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$, no necesariamente finita, se llama topología producto en $\prod_{i\in I} X_i$ a la topología inicial para las proyecciones

$$\pi_{X_{i_0}} : \prod_{i\in I} X_i \to (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \qquad \forall i_0 \in I$$

Una base de la topología producto es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in I} A_i \,|A_i \in \mathcal{T}_i, \quad \wedge \quad \text{Solo una cantidad finita de } A_i \text{ es diferente de } X_i \right\}$$

2.5. Espacios Cocientes e Identificaciones

2.5.1. Topología Final

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto, y $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$ una aplicación. Nuestro objetivo es buscar una topología $\mathcal{T}'$ en Y de forma que sea la más grande tal que p sea continua. Notemos que $\mathcal{T}_t$ cumple la segunda condición, pero buscamos la topología más grande.

Proposición 2.22. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto, y una aplicación $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$. Entonces, el siguiente conjunto define una topología:*

$$\mathcal{T}(p) = \{U' \subset Y \mid p^{-1}(U') \in \mathcal{T}\}$$

Demostración. Demostramos las tres condiciones para que sea una topología:

A1) En primer lugar, se tiene que $\emptyset \in \mathcal{T}(p)$, ya que $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Además, $Y \in \mathcal{T}(p)$, ya que $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$.

A2) Sean $\{U_i' \in \mathcal{T}(p)\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{T}(p)$. Veamos que la unión arbitraria de dichos elementos pertenece a $\mathcal{T}(p)$:

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i'\right) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(U_i') \in \mathcal{T}$$

A3) Si $U_1', U_2' \in \mathcal{T}(p)$, tenemos que $p^{-1}(U_1'), p^{-1}(U_2') \in \mathcal{T}$, por lo que:

$$p^{-1}(U_1' \cap U_2') = p^{-1}(U_1') \cap p^{-1}(U_2') \in \mathcal{T}$$

Por tanto, $U_1' \cap U_2' \in \mathcal{T}(p)$.

□

Por tanto, tenemos que $\mathcal{T}(p)$ es una topología sobre X. Además, se tiene que $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}(p))$ es continua. Veamos ahora que es la topología más grande que cumple que p es continua.

Supongamos que $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, y veamos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(p)$. Si $U' \in \mathcal{T}'$, como p es continua, tenemos que $p^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Por definición de $\mathcal{T}(p)$, se tiene que $U' \in \mathcal{T}(p)$.

Esta topología es la conocida como topología final.

Definición 2.12 (Topología Final)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto, y $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$ una aplicación. Se define la topología final para la aplicación p como:

$$\mathcal{T}(p) = \{U' \subset Y \mid p^{-1}(U') \in \mathcal{T}\}$$

Ejemplo. Algunos ejemplos de topología final son:

1. Sea $p : \left([0,1], \mathcal{T}_{u[0,1]}\right) \to \{0,1\}$ dada por $p = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$. Es decir,

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

   Calculemos la topología final en $Y = \{0,1\}$. Claramente, $\emptyset, Y \in \mathcal{T}(p)$. Veamos si $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{T}(p)$:

$$p^{-1}(\{1\}) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \notin \mathcal{T}_{u[0,1]}$$
$$p^{-1}(\{0\}) = \left]\frac{1}{2}, 1\right] \in \mathcal{T}_{u[0,1]}$$

   Por tanto, $\mathcal{T}(p) = \{\emptyset, Y, \{0\}\}$.

   Veamos ahora si p es abierta en $(\{0,1\}, \mathcal{T}(p))$.

$$p\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \{1\} \notin \mathcal{T}(p)$$

   Por tanto, p no es abierta. Veamos ahora si p es cerrada en $(\{0,1\}, \mathcal{T}(p))$.

$$p\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) = \{0\} \notin C_{\mathcal{T}(p)}$$

   Por tanto, p no es cerrada.

2. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto y elegimos $y_0 \in Y$. Definimos la siguiente aplicación constante en y_0:

$$\begin{array}{rccc} p: & (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

   Dado $U \subset Y$, tenemos que:

$$p^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y_0 \notin U \\ X & \text{si} \quad y_0 \in U \end{cases}$$

   Por tanto, como ambos son abiertos en $\mathcal{T}$, tenemos que $U \in \mathcal{T}(p)$ para todo $U \subset Y$. Es decir, $\mathcal{T}(p) = \mathcal{T}_{disc}$.

Los cerrados de la topología final se obtienen de forma análoga a los abiertos:

Lema 2.23. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto, y $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$ una aplicación. Los cerrados de $\mathcal{T}(p)$ son:*

$$C_{\mathcal{T}(p)} = \{C \subset Y \mid p^{-1}(C) \in C_{\mathcal{T}}\}$$

Demostración. Demostramos por doble inclusión:

$\subset$) Sea $C \in C_{\mathcal{T}(p)}$. Entonces, $C = Y \setminus U$, con $U \in \mathcal{T}(p)$. Por definición de $\mathcal{T}(p)$, tenemos que $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Calculemos la preimagen de C:

$$p^{-1}(C) = p^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus p^{-1}(U) \in C_{\mathcal{T}}$$

Por tanto, $C \in \{C \subset Y \mid p^{-1}(C) \in C_{\mathcal{T}}\}$.

$\supset$) Sea $C \subset Y$ tal que $p^{-1}(C) \in C_{\mathcal{T}}$. Veamos si $U = Y \setminus C \in \mathcal{T}(p)$:

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus p^{-1}(C)$$

Por tanto, $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, por lo que $U \in \mathcal{T}(p)$, por lo que $C \in C_{\mathcal{T}(p)}$.

□

Proposición 2.24. *Dadas aplicaciones $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$, y $f : (Y, \mathcal{T}(p)) \to (Z, \mathcal{T}')$. Se tiene que:*

$$f \text{ es continua} \iff f \circ p \text{ es continua}$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Es claro, ya que f es continua y $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}(p))$ es continua por definición de $\mathcal{T}(p)$. Como la composición de aplicaciones continuas es continua, se tiene.

$\Longleftarrow$) Si $U' \in \mathcal{T}'$, por ser $f \circ p$ continua se tiene que $(f \circ p)^{-1}(U') = p^{-1}(f^{-1}(U')) \in \mathcal{T}$.

Por definición de $\mathcal{T}(p)$, tenemos que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}(p)$, por lo que f es continua.

□

2.5.2. Identificaciones

Definición 2.13 (Identificación)**.** Decimos que una aplicación entre dos espacios topológicos $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una <u>identificación</u> si p es sobreyectiva y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$. Es decir, $\mathcal{T}'$ es la topología final para p.

Algunas observaciones sobre las identificaciones son:

1. Toda identificación es una aplicación continua.
2. Si $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación y $f : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ es una aplicación, entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \circ p \text{ es continua.}$$

Saber si una aplicación entre espacios topológicos es una identificación no es, por norma general, fácil. No obstante, en algunos casos esta proposición nos será de ayuda.

Proposición 2.25. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua, sobreyectiva y abierta (o bien cerrada). Entonces, f es una identificación.*

Demostración. Como p es sobreyectiva, tan solo hay que demostrar que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$.

$\subset$) Sabemos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$, ya que $\mathcal{T}(f)$ es la mayor topología en Y que hace que f sea continua.

$\supset$) Sea $U \in \mathcal{T}(f)$. Por definición de $\mathcal{T}(f)$, tenemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Como f es abierta, tenemos que $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$. Como f es sobreyectiva, tenemos que $f(f^{-1}(U)) = U$, por lo que $U \in \mathcal{T}'$.

□

No obstante, una identificación no tiene que ser necesariamente abierta ni cerrada. Por ejemplo, sea la siguiente aplicación:

$$p = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} : \left([0,1], \mathcal{T}_{u[0,1]}\right) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}(p))$$

Es evidentemente una identificación, pero anteriormente hemos visto que no es ni abierta ni cerrada.

Ejemplo. Algunos ejemplos de identificaciones son:

1. La identidad $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es una identificación, ya que es continua, biyectiva y abierta (por ejemplo).

2. Las proyecciones definidas en el espacio producto son identificaciones:

$$\begin{array}{rrcl} \pi_X : & (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \pi_Y : & (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') & \longrightarrow & (Y, \mathcal{T}') \\ & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Estas son continuas, sobreyectivas y, como vimos, abiertas (Proposición 2.15). Por tanto, son identificaciones.

Definición 2.14. Sea $p : X \to Y$ una aplicación. Decimos que $A \subset X$ es saturado si:

$$p^{-1}(p(A)) = A$$

Cuando la aplicación p no se entienda directamente, se podrá decir que A es $p-$saturado.

Proposición 2.26. *Sea $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación, y sea $A \subset X$. Entonces:*

$$A \text{ es saturado} \Longleftrightarrow \exists B \subset Y \text{ tal que } A = p^{-1}(B)$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sea A saturado. Tomando $B = p(A)$, tenemos $p^{-1}(B) = p^{-1}(p(A)) = A$.

$\Longleftarrow$) Sea $A = p^{-1}(B)$, con $B \subset Y$. Veamos que $A = p^{-1}(B) = p^{-1}(p(p^{-1}(B)))$:

- $\subset$) Tenemos que $p(p^{-1}(B)) \subset B$, por lo que $p^{-1}(p(p^{-1}(B))) \subset p^{-1}(B)$.
- $\supset$) Sea $x \in p^{-1}(B)$. Entonces, $p(x) \in B$. Por tanto, $p(x) \in p(p^{-1}(B))$, por lo que $x \in p^{-1}(p(p^{-1}(B)))$.

□

Ejemplo. Veamos algunos conjuntos saturados:

1. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & x & \longmapsto & (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{array}$$

   a) Para $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Tenemos que:

$$p^{-1}(p(A)) = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \left[z, z + \frac{1}{2}\right]$$

   Por tanto, A no es saturado.

   b) Para $\mathbb{Z}$, tenemos que $p(\mathbb{Z}) = \{(1,0)\}$, y $p^{-1}(p(\mathbb{Z})) = p^{-1}(\{(1,0)\}) = \mathbb{Z}$. Entonces, tenemos que $p^{-1}(p(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$, por lo que es saturado.

   c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $A = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}]a + z, b + z[$ es saturado.

Proposición 2.27. *Sea $p : (X, \mathcal{T}) \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Entonces:*

$$\mathcal{T}(p) = \{p(U) \mid U \in \mathcal{T},\ U \text{ es saturado}\}$$
$$C_{\mathcal{T}(p)} = \{p(C) \mid C \in C_{\mathcal{T}},\ C \text{ es saturado}\}$$

Demostración. Demostramos la primera igualdad, ya que la segunda se deduce de forma directa:

$\subset$) Sea $U' \in \mathcal{T}(p)$. Por definición de topología final, tenemos que $p^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Sea $U = p^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Tenemos que:

$$p(U) = p(p^{-1}(U')) \overset{(*)}{=} U'$$

donde en $(*)$ se ha usado que p es sobreyectiva. Veamos ahora que U es saturado:

$$p^{-1}(p(U)) = p^{-1}(U') = U$$

Por tanto, U es saturado.

$\supset$) Sea $U \in \mathcal{T}$ y saturado. Entonces, por ser saturado, tenemos $U = p^{-1}(p(U)) \in \mathcal{T}$. Por tanto, $p(U) \in \mathcal{T}(p)$.

$\square$

Corolario 2.27.1. *Sea $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación sobreyectiva. Entonces, son equivalentes:*

1. *p es identificación.*
2. *$\mathcal{T}' = \{p(U) \mid U \in \mathcal{T}, U \text{ es saturado.}\}$*
3. *$C_{\mathcal{T}'} = \{p(C) \mid C \in C_{\mathcal{T}}, C \text{ es saturado.}\}$*

Proposición 2.28. *Sean $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $p' : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ dos identificaciones. Entonces, $p' \circ p$ es una identificación.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama:

$$(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{p} (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{p'} (Z, \mathcal{T}'')$$

$\square$

Notemos que, en la proposición anterior, la implicación solo va en un sentido. La siguiente proposición es algo más débil que la anterior, pero nos aporta información en el sentido opuesto.

Proposición 2.29. *Sean $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $p' : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ dos aplicaciones continuas. Si $p' \circ p$ es una identificación, entonces p' es una identificación.*

Demostración. Por ser $p' \circ p$ una identificación, tenemos que $p' \circ p$ es sobreyectiva y $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}(p' \circ p)$.

En primer lugar, es directo ver que p' es sobreyectiva, ya que por ser $p' \circ p$ sobreyectiva, entonces p' es sobreyectiva. Probemos ahora que $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}(p')$.

$\subset$) Por definición de $\mathcal{T}(p')$, como p' es continua para $\mathcal{T}''$ tenemos que $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}(p')$.

$\supset$) Sea $U'' \in \mathcal{T}(p')$. Por definición, tenemos que $(p')^{-1}(U'') \in \mathcal{T}'$.

Como p es continua, tenemos que $p^{-1}((p')^{-1}(U'')) = (p' \circ p)^{-1}(U'') \in \mathcal{T}$.

Por tanto, por definición de la topología final, tenemos que $U'' \in \mathcal{T}(p' \circ p) = \mathcal{T}''$.

$\square$

Proposición 2.30. *Sea $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una identificación, y consideramos $p' : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ una aplicación. Entonces:*

$$p' \text{ es identificación } \Longleftrightarrow p' \circ p \text{ es identificación.}$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Como la composición de identificaciones es una identificación, se tiene de forma directa.

$\Longleftarrow$) Como toda identificación es continua, tenemos que p es continua. Si probamos que p' es continua, por la proposición anterior se tiene de forma directa. Probamos por tanto que p' es continua.

Como p es una identificación, sabemos que p' es continua si y solo si $p' \circ p$ es continua, que lo es por ser identificación.

Por tanto, p' es continua, como queríamos probar, por lo que p' es una identificación.

$\square$

Proposición 2.31. *Sea $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación inyectiva. Entonces, p es identificación si y solo si p es un homeomorfismo.*

$$p \text{ identificación} \Longleftrightarrow p \text{ homeomorfismo}$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación:

$\Longleftarrow$) Como p es un homeomorfismo, por el Corolario 2.8.1, p es continua biyectiva y abierta (o cerrada). Por la proposición 2.25, p es una identificación.

$\Longrightarrow$) Como p es una identificación, es sobreyectiva y continua. Además, como p es inyectiva, tenemos que p es biyectiva y continua. Veamos que p es abierta:

Tenemos que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p) = \{p(U) \mid U \in \mathcal{T},\ U \text{ saturado}\}$. Como p es biyectiva, tenemos que todos los subconjuntos de X son saturados, por lo que se tiene que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p) = \{p(U) \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Por tanto, p es abierta, por lo que tenemos que p es un homeomorfismo.

$\square$

2.5.3. Espacios Cocientes

Notación. Dado un conjunto X y una relación de equivalencia $\mathcal{R}$, denotamos por $X/\mathcal{R}$ al conjunto cociente[3] (conjunto de las clases de equivalencia) y llamamos p a su proyección usual; es decir,

$$\begin{array}{rccl} p: & X & \longrightarrow & X/\mathcal{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Notemos que, claramente, p es sobreyectiva.

Definición 2.15 (Topología cociente)**.** Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia, entonces en $X/\mathcal{R}$ consideramos la topología final para su proyección usual. Esta topología final $\mathcal{T}(p)$ se denota por $\mathcal{T}/\mathcal{R}$, y se denomina topología cociente.

Al espacio topológico $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ se denomina espacio topológico cociente.

Algunas propiedades de la topología cociente son:

1. $p : (X, \mathcal{T}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ es una identificación.

[3] Conjunto formado por las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$. Estudiado en Álgebra I.

2. Una aplicación $f : (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y solo si la aplicación $f \circ p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua.

$$(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\quad p \quad} (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R}) \xrightarrow{\quad f \quad} (Y, \mathcal{T}')$$

3. Un conjunto $A \subset X$ es saturado si y solo si para cualquier $x \in X,\ a \in A$ tal que $x\mathcal{R}a$, entonces $x \in A$.

$\Longrightarrow$) Sea $x \in X$, $a \in A$, tal que $[x] = [a]$. Entonces, $p(x) = p(a)$. Como $a \in A$, entonces $p(a) = p(x) \in p(A)$, por lo que $x \in p^{-1}(p(A))$. No obstante, como A es saturado, tenemos que $x \in A$.

$\Longleftarrow$) Demostramos por doble inclusión que $A = p^{-1}(p(A))$:

$\subset$) Se tiene de forma directa para cualquier aplicación.

$\supset$) Sea $x \in p^{-1}(p(A))$. Entonces, $p(x) \in p(A)$. Entonces, $\exists a \in A$ tal que $p(x) = p(A)$, por lo que $x\mathcal{R}a$. Entonces, por hipótesis $x \in A$.

4. Los abiertos y los cerrados de la topología cociente son:

$$\mathcal{T}/\mathcal{R} = \{p(U) \mid U \in \mathcal{T}, U \text{ es saturado}\}$$
$$C_{\mathcal{T}/\mathcal{R}} = \{p(C) \mid C \in C_{\mathcal{T}}, C \text{ es saturado}\}$$

Consideramos ahora dos conjuntos X, Y, una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en X y $f : X \to Y$ una aplicación. Si ocurre que $x\mathcal{R}x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$, entonces f se puede inducir al cociente[4]. Es decir, existe:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} :\ X/\mathcal{R} &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

tal que $\widetilde{f} \circ p = f$. El diagrama de las composiciones es:

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (Y, \mathcal{T}') \\ (X/\mathcal{R},\ \mathcal{T}/\mathcal{R}) \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Algunas propiedades de la aplicación inducida al cociente consecuencia de que p sea identificación son:

1. f continua $\Longleftrightarrow \widetilde{f}$ es continua.
2. f es identificación $\Longleftrightarrow \widetilde{f}$ es identificación.

Dada una aplicación entre dos conjuntos $f : X \to Y$, se puede definir una relación de equivalencia en X de la siguiente forma:

$$x\mathcal{R}_f x' \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x')$$

[4]En Álgebra I se demostró que esta aplicación efectivamente estaba bien definida.

Teorema 2.32. *Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación si y solo si la aplicación inducida por $\mathcal{R}_f$ es un homeomorfismo. Es decir, si y solo la siguiente aplicación es un homeomorfismo:*

$$\widetilde{f} : (X/\mathcal{R}_f,\ \mathcal{T}/\mathcal{R}_f) \to (Y, \mathcal{T}')$$

Demostración. Tenemos que f es una identificación si y solo si $\widetilde{f}$ es una identificación; y como $\widetilde{f}$ es inyectiva[5], entonces esto es equivalente a que $\widetilde{f}$ sea un homeomorfismo. □

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de aplicación teorema anterior.

1. Consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

   Veamos que $(\mathbb{R}/\mathcal{R},\ \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

   Consideramos la siguiente aplicación:

   $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & x & \longmapsto & (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{array}$$

   Veamos en primer lugar que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$.

   Dados $x, x' \in \mathbb{R}$, tenemos que:

   $$\begin{aligned} x\mathcal{R}_f x' &\iff f(x) = f(x)' \iff (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) = (\cos 2\pi x', \operatorname{sen} 2\pi x') \iff \\ &\iff 2\pi x = 2\pi x' + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \\ &\iff x = x' + k, \quad k \in \mathbb{Z} \iff x\mathcal{R}x' \end{aligned}$$

   Veamos ahora que f es una identificación. Claramente, f es sobreyectiva. Ya que f es continua por serlo cada una de las componentes, si probamos que f es abierta tendríamos lo buscado.

   Sea $\mathcal{B} = \{]a, b[\ \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ una base de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

   a) Si $b - a > 1$, entonces $f(]a, b[) = \mathbb{S}^1$, que es abierto.
   b) Si $b - a \leqslant 1$, entonces... TERMINAR

   Por tanto, f es continua, por lo que es una identificación y; por tanto, $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

Vamos a ver un lema técnico que nos ayudará a saber, en algunos casos, que una aplicación es cerrada. Lo generalizaremos en el tercer tema, en el Teorema 3.26.

Lema 2.33. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado; y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Entonces, f es cerrada (con las topologías usuales).*

Demostración. Sea $C \in C_{\mathcal{T}_{uA}}$, y veamos que $f(C)$ es un cerrado. Para ello, probaremos que $\overline{f(C)} = f(C)$.

[5]En Álgebra I, se vio que si la implicación no es solo hacia la derecha, sino que es en ambos sentidos ($x\mathcal{R}x' \iff f(x) = f(x')$), entonces $\widetilde{f}$ es inyectiva.

$\supset$) Es claro que $f(C) \subset \overline{f(C)}$.

$\subset$) Sea $y \in \overline{f(C)}$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \cap f(C) \neq \emptyset$. Consideramos entonces $y_n \in B\left(y, \frac{1}{n}\right) \cap f(C)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y_n \in f(C)$, $\exists x_n \in C$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de C, que es cerrado y acotado, entonces existe una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\} \to x_0 \in C$.

Como f es continua, tenemos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x_0) \in f(C)$. No obstante, $\{f(x_{\sigma(n)})\} = \{y_{\sigma(n)}\} \to y$. Por la unicidad del límite, tenemos $y = f(x_0) \in f(C)$.

$\square$

Haciendo uso de este lema, podemos ver más ejemplos de homeomorfismos:

Ejemplo. Algunos ejemplos de homeomorfismos son:

1. Buscamos una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ tal que $\left([0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{u[0,1]}/\mathcal{R}\right)$ sea homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

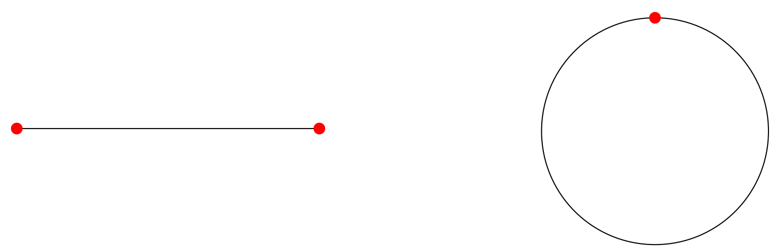


Figura 2.3: Identificamos los extremos del segmento con el mismo punto de la circunferencia, "enrrollando" entonces el segmento.

Sea entonces la relación de equivalencia la siguiente:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ \vee \\ \{x,y\} = \{0,1\} \end{array}\right.$$

Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & x & \longmapsto & (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{array}$$

Veamos en primer lugar que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$. Dados $x, y \in [0,1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}_f y \Longleftrightarrow & f(x) = f(y) \Longleftrightarrow (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) = (\cos 2\pi y, \operatorname{sen} 2\pi y) \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow 2\pi x = 2\pi y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow x = y + k, \quad k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow |x - y| = k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x\mathcal{R}y \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $x, y \in [0,1]$.

Veamos ahora que f es una identificación. Claramente, f es sobreyectiva. Además, f es continua; y por el lema anterior sabemos que f es cerrada. Por tanto, f es una identificación.

2. Consideramos la Cinta de Moebius o Möbius, representada en la figura 2.4.

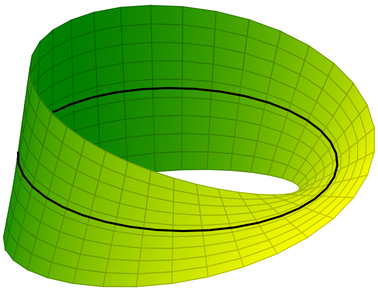


Figura 2.4: Cinta de Moebius.

La definimos como un espacio cociente. Sea el conjunto $[0,1]\times[0,1]$, y definimos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$, vista gráficamente en la figura 2.5:

$$(x_1,x_2)\mathcal{R}(y_1,y_2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x_1,x_2)=(y_1,y_2) \\ \vee \\ \{x_1,y_1\}=\{0,1\}\wedge x_2+y_2=1 \end{array}\right.$$

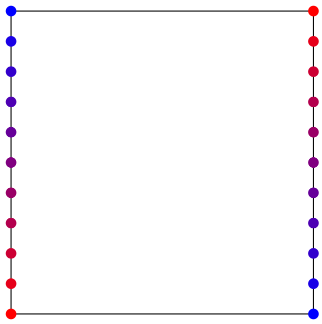


Figura 2.5: Identificamos cada punto del lado izquierdo con el opuesto del lado derecho.

La cinta de Moebius se define entonces como el siguiente espacio cociente:

$$\left([0,1]\times[0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{u[0,1]\times[0,1]}/\mathcal{R}\right)$$

3. Consideramos el toro, representado el la figura 2.6.

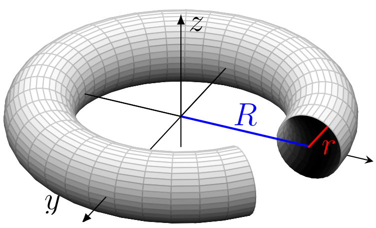
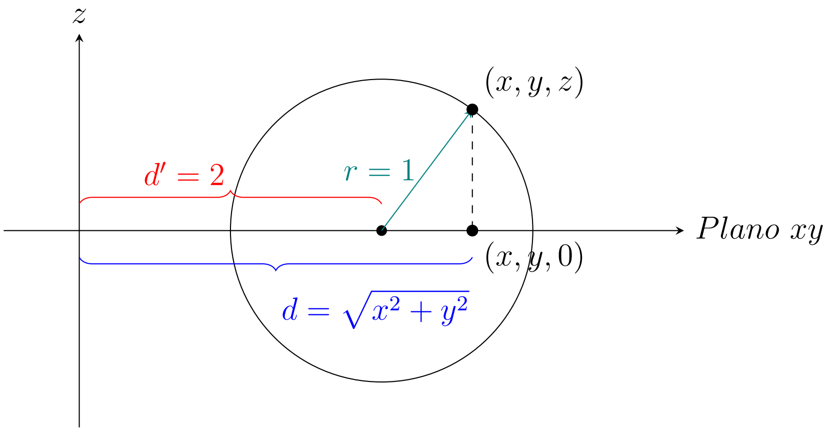


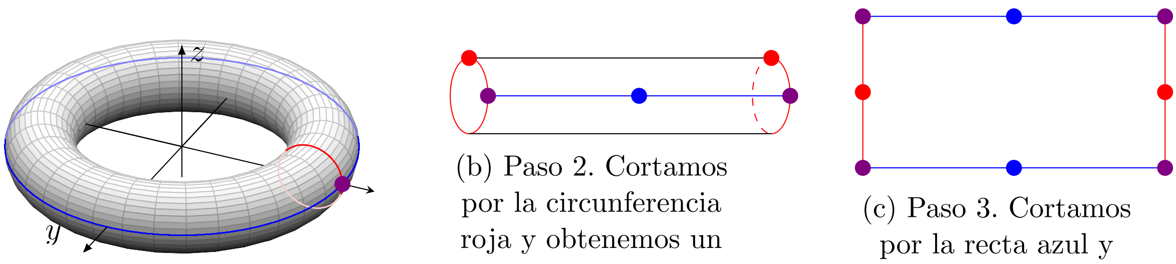
Figura 2.6: Toro

Veamos cuál es su ecuación. Para ello, fijado un punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que pertenezca al toro, realizamos un corte al toro por el plano que pasa por dicho punto y es perpendicular al plano de ecuación $z = 0$. Es decir, por el plano $\pi : (x, y, z) + \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}^{\perp}$, y tenemos lo siguiente:



El punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ estará en el toro de rotación de la circunferencia de radio $r = 1$ a una distancia $R = 2$ del eje de rotación z si y solo si cumple el Teorema de Pitágoras del triángulo inscrito. Es decir:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1$$



(a) Paso 1. Toro.

(b) Paso 2. Cortamos por la circunferencia roja y obtenemos un cilindro.

(c) Paso 3. Cortamos por la recta azul y obtenemos un rectángulo.

Figura 2.7: Identificaciones usadas en $\mathcal{R}$.

Vamos a ver que el toro es homeomorfo a un cociente. Consideramos el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y la siguiente relación de equivalencia, descrita gráficamente en la Figura 2.7:

$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff \left\{ \begin{array}{c} (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ \vee \\ \{x_1, y_1\} = \{0, 1\} \wedge x_2 = y_2 \\ \vee \\ \{x_2, y_2\} = \{0, 1\} \wedge x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, y_1\} = \{0, 1\} \wedge \{x_2, y_2\} = \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Queremos probar que $([0, 1] \times [0, 1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ es homeomorfo al toro de $\mathbb{R}^3$ de rotación con su topología usual.

Buscamos entonces una parametrización del toro. Si (x, y, z) están en el toro, entonces $\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1$. Por tanto,

$$\left\{\begin{array}{r} \sqrt{x^2+y^2}-2=\cos\theta \\ z=\operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$

Análogamente, como $\sqrt{x^2+y^2}-2=\cos\theta$, entonces $x^2+y^2=(2+\cos\theta)^2$. Por tanto,

$$\left\{\begin{array}{l} x=(2+\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(2+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right.$$

Es decir, cada punto del toro se puede parametrizar como:

$$\left\{\begin{array}{l} x=(2+\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(2+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ z=\operatorname{sen}\theta \end{array}\right. \qquad \theta,\varphi\in[0,2\pi[$$

Por tanto, siendo $Toro=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1\right\}$; definimos:

$$\begin{array}{rrcl} f: & ([0,1]\times[0,1],\mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (Toro,\mathcal{T}_u) \\ & (x,y) & \longmapsto & ((2+\cos(2\pi x))\cos(2\pi y),(2+\cos(2\pi x))\operatorname{sen}(2\pi y),\operatorname{sen}(2\pi x)) \end{array}$$

Veamos en primer lugar que $\mathcal{R}=\mathcal{R}_f$. Dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[0,1]\times[0,1]$, tenemos que:

$$\begin{array}{l}
(x_1,y_1)\mathcal{R}_f(x_2,y_2)\Longleftrightarrow f((x_1,y_1))=f((x_2,y_2))\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} (2+\cos(2\pi x_1))\cos(2\pi y_1) & = & (2+\cos(2\pi x_2))\cos(2\pi y_2) \\ (2+\cos(2\pi x_1))\operatorname{sen}(2\pi y_1) & = & (2+\cos(2\pi x_2))\operatorname{sen}(2\pi y_2) \\ \operatorname{sen}(2\pi x_1) & = & \operatorname{sen}(2\pi x_2) \end{array}\right\}\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \\
\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(2\pi x_1) & = & \operatorname{sen}(2\pi x_2) \\ \cos(2\pi x_1) & = & \cos(2\pi x_2) \\ \cos(2\pi y_1) & = & \cos(2\pi y_2) \\ \operatorname{sen}(2\pi y_1) & = & \operatorname{sen}(2\pi y_2) \end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c} 2\pi x_1=2\pi x_2+2k_1\pi \\ \wedge \\ 2\pi y_1=2\pi y_2+2k_1\pi \end{array}\right. \quad k_1,k_2\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x_1-x_2\in\mathbb{Z} \\ \wedge \\ y_1-y_2\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}\Longleftrightarrow(x_1,y_1)\mathcal{R}(x_2,y_2)
\end{array}$$

donde en $(*)$ he elevado la primera y segunda ecuación al cuadrado, y luego las he sumado obteniendo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2+\cos(2\pi x_1))^2\cos^2(2\pi y_1) & = & (2+\cos(2\pi x_2))^2\cos^2(2\pi y_2) \\ (2+\cos(2\pi x_1))^2\operatorname{sen}^2(2\pi y_1) & = & (2+\cos(2\pi x_2))^2\operatorname{sen}^2(2\pi y_2) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
2(2+\cos(2\pi x_1))^2[\cos^2(2\pi y_1)+\operatorname{sen}^2(2\pi y_1] & = & 2(2+\cos(2\pi x_2))^2[\cos^2(2\pi y_2)+\operatorname{sen}^2(2\pi y_2)] \\
(2+\cos(2\pi x_1))^2 & = & (2+\cos(2\pi x_2))^2 \\
\cos(2\pi x_1) & = & \cos(2\pi x_2)
\end{array}$$

Veamos ahora que f es una identificación. Claramente, f es sobreyectiva. Además, f es continua (porque cada coordenada lo es); y por el lema anterior sabemos que f es cerrada. Por tanto, f es una identificación.

Por tanto, f induce un homeomorfismo $\widetilde{f} : ([0,1]\times[0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R}) \to (Toro, \mathcal{T}_u)$.

4. Observemos que el toro también es homeomorfo a $\left(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1, \mathcal{T}^4_{u\,\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\right)$.

   Por el primer ejemplo visto en este apartado, $\left([0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{u[0,1]}/\mathcal{R}\right) \cong (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$. Entonces:
$$([0,1]\times[0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R}) \cong \left(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1, \mathcal{T}^4_{u\,\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\right)$$
   Como el Toro es homeomorfo a $([0,1]\times[0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$, entonces por transitividad es homeomorfo a $\left(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1, \mathcal{T}^4_{u\,\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\right)$.

5. El espacio proyectivo (real).

   Tomamos $X = \mathbb{R}^n\setminus\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, y consideramos la relación de equivalencia:
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^* \mid y = \lambda x$$
   Al espacio cociente $X/\mathcal{R}$ se le llama espacio proyectivo real, y lo denominaremos $\mathbb{R}P^{n-1}$. Notemos que nosotros consideraremos sobre el espacio proyectivo siempre la topología usual.

   También podemos considerar sobre $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ la relación de equivalencia:
$$x\overline{\mathcal{R}}y \Longleftrightarrow x = \pm y$$
   Veamos que $\left(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\left\{\overrightarrow{0}\right\}/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R}\right)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n/\overline{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_u/\overline{\mathcal{R}})$. Sea la siguiente aplicación:
$$\begin{array}{rccc} F: & \left(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\left\{\overrightarrow{0}\right\}, \mathcal{T}_u\right) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} \end{array}$$
   Tenemos entonces el siguiente diagrama de composiciones:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\left\{\overrightarrow{0}\right\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\overline{p}\circ F"] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\overline{p}"] \\ \mathbb{R}^{n+1}\setminus\left\{\overrightarrow{0}\right\}/\mathcal{R} \arrow[r, "\widetilde{F}"'] & \mathbb{S}^n/\overline{\mathcal{R}} \end{tikzcd}$$
   Veamos que F se induce en los cocientes a $\widetilde{F} : \mathbb{R}^{n+1} - \left\{\overrightarrow{0}\right\}/\mathcal{R} \to \mathbb{S}^n/\overline{\mathcal{R}}$. Para ello, vemos en primer lugar que $\widetilde{F}$ está bien definida. Es decir, si $x\mathcal{R}y$, entonces $(\overline{p}\circ F)(x) = (\overline{p}\circ F)(y)$.
$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow x = \lambda y,\ \lambda\neq 0 \Longrightarrow F(x) = F(\lambda y) \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|} = \frac{\lambda y}{\|\lambda y\|} = \pm\frac{y}{\|y\|} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F(x) = \pm F(y) \Longrightarrow F(x)\overline{\mathcal{R}}F(y) \Longrightarrow (\overline{p}\circ F)(x) = (\overline{p}\circ F)(y)$$

Por tanto, $\widetilde{F}$ está bien definida. Veamos que $\widetilde{F}$ es un homeomorfismo. Tenemos que $\widetilde{F}$ es continua si y solo si lo es $\widetilde{F} \circ p$ es continua, ya que p es una identificación. No obstante, $\widetilde{F} \circ p = \overline{p} \circ F$, que es composición de dos continuas, por lo que $\widetilde{F}$ es continua.

Busquemos ahora su inversa. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} i = G: & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Veamos que G se induce a $\widetilde{G} : \mathbb{S}^n/\overline{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\} /\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\overline{p}"'] \arrow[dr, "p\circ G"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{S}^n/\overline{\mathcal{R}} \arrow[r, "\widetilde{G}"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\} /\mathcal{R}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que ver que $\widetilde{G}$ está bien definida; es decir, si $x, y \in \mathbb{S}^n \mid x\overline{\mathcal{R}}y$, entonces $p(G(x)) = p(G(y))$.

$$x\overline{\mathcal{R}}y \Longrightarrow x = \pm y \Longrightarrow G(x) = G(\pm y) \Longrightarrow x = \pm y \Longrightarrow x\mathcal{R}y \Longrightarrow p(G(x)) = p(G(y))$$

Además, Tenemos que $\widetilde{G}$ es continua si y solo si lo es $\widetilde{G} \circ \overline{p}$ es continua, ya que $\overline{p}$ es una identificación. No obstante, $\widetilde{G} \circ \overline{p} = p \circ G$, que es composición de dos continuas, por lo que $\widetilde{G}$ es continua.

Falta probar que $\widetilde{F} = \widetilde{G}^{-1}$. Dado $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, tenemos que:

$$\widetilde{G}(\widetilde{F}(p(x))) = \widetilde{G}(\overline{p}(F(x))) = \widetilde{G}\left(\overline{p}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = p\left(G\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = p(x)$$

Por lo que $\widetilde{G} \circ \widetilde{f} = Id$. Dado $x \in \mathbb{S}^n$, por lo que $\|x\| = 1$:

$$\widetilde{F}(\widetilde{G}(\overline{p}(x))) = \widetilde{F}(p(G(x))) = \widetilde{F}(p(x)) = \overline{p}(F(x)) = \overline{p}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \overline{p}\,(x)$$

Por lo que $\widetilde{F} \circ \widetilde{G} = Id$, y por tanto $\widetilde{G} = \widetilde{F}^{-1}$

Entonces, tenemos que $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

Introducimos ahora el concepto de cocientes por un subconjunto:

Definición 2.16 (Cocientes por un subconjunto)**.** Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$ subconjuntos cualquiera, se considera la relación de equivalencia:

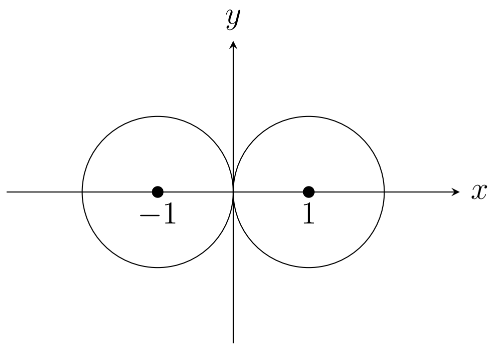
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \vee \\ x, y \in A \end{cases}$$

Se define el espacio cociente por el subconjunto A como el espacio cociente $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ para la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ anterior. Se denota normalmente como:

$$(X/A, \mathcal{T}/A)$$

Ejemplo. Consideremos $(X, \mathcal{T}) = ([-1, 1], \mathcal{T}_u)$, y como subconjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Veamos que $([-1, 1]/A, \mathcal{T}_u/A)$ es homeomorfo a dos circunferencias tangentes en un punto:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ \vee \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\}$$



Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1, 1] & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} (1 - \cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (-1 + \cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) & \text{si} & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Por el carácter local de la continuidad, f es continua en $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Además, mediante límites se comprueba que f es continua en el origen. Además, es biyectiva y; como $[-1, 1]$ es cerrado y acotado, es cerrada; por lo que se trata de un homeomorfismo.

2.6. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con el Tema 2, consultar la sección 4.2.

3. Conexión y Compacidad

3.1. Conexión

Definición 3.1 (Conexión)**.** Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si no existen dos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \in \mathcal{T},\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tales que $X = U_1 \cup U_2$; salvo el vacío y el total.

En el caso de que un conjunto no sea conexo, diremos que es disconexo.

Un conjunto $A \subset X$ es conexo si $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo. Es decir, cuando se habla de un subconjunto, implícitamente nos referimos a la topología inducida.

Proposición 3.1 (Caracterización de la Conexión)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
2. *No existen dos cerrados disjuntos $C_1, C_2 \subset C_{\mathcal{T}},\ C_1 \cap C_2 = \emptyset$, tales que $X = C_1 \cup C_2$; salvo el vacío y el total.*
3. *Si $A \subset X$ es un conjunto abierto y cerrado, entonces $A = \emptyset$ o bien $A = X$.*
4. *Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ es constante.*

Demostración.

1) $\Longrightarrow$ 2) Demostramos el contrarrecíproco. Supongamos que existen dos cerrados disjuntos $C_1, C_2 \subset C_{\mathcal{T}},\ C_1 \cap C_2 = \emptyset$, tales que $X = C_1 \cup C_2$; con $C_1, C_2 \neq \emptyset, X$. Entonces, sean $U_1 = X \setminus C_1,\ U_2 = X \setminus C_2$. Tenemos que $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, ya que $C_1, C_2 \in C_{\mathcal{T}}$. Además, estos abiertos son disjuntos, ya que:

$$U_1 \cap U_2 = X \setminus C_1 \cap X \setminus C_2 = X \setminus (C_1 \cup C_2) = X \setminus X = \emptyset.$$

Además, como $C_1, C_2 \neq \emptyset, X$, entonces $U_1, U_2 \neq X, \emptyset$.

Por tanto, $(X, \mathcal{T})$ es disconexo, por lo que queda demostrado el contrarrecíproco.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea A un conjunto abierto y cerrado, y consideramos $C_1 = A,\ C_2 = X \setminus A$. Tenemos que $C_1, C_2 \in C_{\mathcal{T}}$, y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Además, $X = C_1 \cup C_2$. Por tanto, como $(X, \mathcal{T})$ es conexo, $C_1 = A = \emptyset$ o $C_1 = A = X$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Demostramos el contrarrecíproco. Supongamos que existen dos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subset \mathcal{T},\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tales que $X = U_1 \cup U_2$; con $U_1, U_2 \neq \emptyset, X$. Entonces, como $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tenemos que $U_2 = X \setminus U_1$, por lo que es cerrado. Por tanto, $U_2 \neq \emptyset, X$ es abierto y cerrado a la vez, por lo que queda demostrado el contrarrecíproco.

1) $\Longrightarrow$ 4) Demostramos el contrarrecíproco. Si existe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua y no constante, entonces definimos los siguientes conjuntos:

$$U_1 = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T} \qquad U_2 = f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}$$

Tenemos que $U_1, U_2 \notin \{\emptyset, X\}$ ya que no es constante; y se tiene que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = X$. Por tanto, $(X, \mathcal{T})$ es disconexo, por lo que queda demostrado el contrarrecíproco.

4) $\Longrightarrow$ 1) Demostramos el contrarrecíproco. Como X no es conexo, existen dos abiertos $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, con $U_1, U_2 \notin \{\emptyset, X\}$ tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = X$.

Entonces, definimos f de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in U_1 \\ 1 & \text{si} \quad x \notin U_1 \Longleftrightarrow x \in U_2 \Longleftrightarrow x \in X \setminus U_1 \end{cases}$$

Tenemos que f no es constante, ya que ninguno de los conjuntos es el vacío. Además, f es continua, ya que:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \qquad f^{-1}(\{0,1\}) = X \qquad f^{-1}(\{0\}) = U_1 \qquad f^{-1}(\{1\}) = U_2$$

Por tanto, f es continua, ya que la imagen inversa de todo abierto es un abierto; pero no es constante, por lo que queda demostrado el contrarrecíproco.

$\square$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de conjuntos conexos:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$ es conexo, ya que los únicos abiertos son el vacío y el total.
2. Sea X un conjunto tal que $|X| > 1$. Entonces, $(X, \mathcal{T}_{disc})$ no es conexo, ya que fijado $x_0 \in X$, entonces:

$$X = (X \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}$$

3. $(X, \mathcal{T}_{CF})$. Si X es finito, tenemos la topología discreta, por lo que no es conexo. Si X es infinito, sí es conexo. Veámoslo:

   Sea $C \in \mathcal{T}_{CF} \cap C_{\mathcal{T}_{CF}}$, y supongamos que no es ni el vacío ni el total. Entonces, por ser cerrado es finito, y su complementario es también finito por ser abierto. Entonces, $X = C \cup (X \setminus C)$ es finito, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, es conexo.

4. Sea la hipérbola $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

   Tenemos que H no es conexo. Para verlo, sea H^+ el siguiente conjunto:

$$H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \mid xy = 1,\ x > 0\}$$

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} H^+ &= H \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \in \mathcal{T}_{uH} \\ H^+ &= H \cap (\mathbb{R}^+_0 \times \mathbb{R}^+_0) \in C_{\mathcal{T}_{uH}} \end{aligned}$$

   Por tanto, H^+ es un abierto y cerrado. Como $H^+ \neq \emptyset, H$, entonces H no es conexo.

Proposición 3.2. *Los conjuntos conexos de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *son exactamente los intervalos. Es decir, dado* $A \subset \mathbb{R}$*, tenemos que:*

$$A \text{ es conexo} \Longleftrightarrow A \text{ es un intervalo}$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sea A conexo, y supongamos que no es un intervalo. Entonces, existen $a, b \in A$, $x \in X \setminus A$, tales que $a < x < b$. Entonces, consideramos los siguientes conjuntos:

$$U_1 = A \cap]-\infty, x[$$
$$U_2 = A \cap]x, \infty[$$

Tenemos que $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{uA}$, ya que son intersecciones de abiertos de $\mathcal{T}_u$ con A. Además, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Además, $U_1 \cup U_2 = A \setminus \{x\} = A$.

Como $a \in U_1, b \notin U_1$, entonces $U_1 \neq \emptyset, A$. Análogamente, se demuestra que $U_2 \neq \emptyset, A$. Por tanto, A es disconexo, llegando a una contradicción, por lo que A es un intervalo.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, y sea $f : (A, \mathcal{T}_A) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Tenemos que demostrar que f es constante.

Por el Teorema del Valor Intermedio visto en Cálculo I, tenemos que que $f(A)$ es un intervalo. Pero como $f(A) \subset \{0, 1\}$, entonces $f(A) = \{0\}$ o bien $f(A) = \{1\}$, por lo que f es constante.

□

Teorema 3.3. *La imagen mediante una aplicación continua de un conexo es un conexo.*

Es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *es continua y* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo, entonces* $f(X)$ *es conexo.*

Demostración. Veamos el contrarrecíproco. Si $f(X)$ no fuese conexo, entonces por la caracterización de los conjuntos conexos, $\exists g : f(X) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua y no constante. Por tanto,

$$g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$$

es continua (por ser composición de continuas) y no constante (ya que g no lo es), por lo que $(X, \mathcal{T})$ no es conexo, llegando a una contradicción. □

Como consecuencia inmediata, tenemos que si f es un homeomorfismo, se trata de una doble implicación, ya que se puede considerar f^{-1}, también continua.

Corolario 3.3.1. *La conexión es una propiedad topológica.*
Es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *es un homeomorfismo, entonces* $f(X) = Y$ *es conexo si y solo si* X *es conexo.*

Para el caso de los espacios cocientes, tenemos el siguiente corolario:

Proposición 3.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Consideramos $X/\mathcal{R}$ el espacio cociente con la topología cociente. Entonces:*

$$X \text{ conexo} \Longrightarrow X/\mathcal{R} \text{ conexo.}$$

Demostración. Consideramos $p : (X, \mathcal{T}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ la proyección canónica en el cociente. Entonces, por el teorema anterior, como p es continua, $p(X)$ es conexo. Pero como $p(X) = X/\mathcal{R}$ por ser p sobreyectiva, entonces $X/\mathcal{R}$ es conexo. □

Ejemplo. Veamos algunos resultados sobre el teorema anterior:

1. $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$ es conexo.

   Sabemos que $\mathbb{R}$ es conexo, por ser un intervalo. Nos definimos la siguiente aplicación:
   $$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1}) \\ & x & \longmapsto & (\cos x, \operatorname{sen} x) \end{array}$$

   Tenemos que f es continua y sobreyectiva, por lo que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ es conexo.

2. $[a, b],\ [a, b[,\ ]a, b],\ ]a, b[$ con $a < b$ no son homeomorfos.

   Supongamos que sí, lo son, por lo que existe el siguiente homeomorfismo:
   $$h : [a, b] \to [a, b[$$

   Como h es inyectiva, $h(a)$ o bien $h(b)$ no son a. Suponemos sin pérdida de generalidad que $h(b) \neq a$. Entonces:
   $$h_{\big|[a,b[} : [a, b[\longrightarrow [a, b[\setminus \{h(b)\}$$

   es un homeomorfismo (luego continua). Pero $[a, b[$ es conexo y $[a, b[\setminus \{h(b)\}$ no lo es (no es un intervalo), por lo que llegamos a una contradicción.

   Para el resto de casos, se demuestra de forma análoga.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

   Supongamos que sí existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ homeomorfismo. Entonces, consideramos la siguiente restricción:
   $$h_{\big|\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{h(0)\}$$

   que también es un homeomorfismo. Como $\mathbb{S}^1 \setminus \{h(0)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, que es conexo, tenemos que $\mathbb{S}^1 \setminus \{h(0)\}$ es conexo. No obstante, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no lo es, por lo que llegamos a una contradicción.

Corolario 3.4.1. *Sea un intervalo abierto $]a, b[\subset \mathbb{R}$, y sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, Si A es homeomorfo a $]a, b[$, entonces A es un intervalo abierto.*

Demostración. Si A es homeomorfo a $]a,b[$, entonces A debe ser conexo y así A es un intervalo. Entonces, A es uno de los siguientes tipos:

$$\begin{array}{ll}]c,d[& -\infty \leqslant c < d \leqslant \infty \\ [c,d[& -\infty < c < d \leqslant \infty \\ ]c,d] & -\infty \leqslant c < d < \infty \\ [c,d] & -\infty < c < d < \infty \end{array}$$

Por el apartado 2 del resultado anterior, tenemos que A no es homeomorfo a los intervalos cerrados por uno o ambos extremos, por lo que:

$$A =]c,d[\qquad -\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$$

□

Como consecuencia de lo visto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5 (Invarianza del Dominio)**.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si A, B son homeomorfos con la topología usual y A es abierto, entonces B es abierto.*

Demostración. Sea $h : A \to B$ un homeomorfismo entre ambos. Si $A \in \mathcal{T}_u$, como los intervalos son una base de la topología usual, entonces:

$$A = \bigcup_{i \in I}]c_i, d_i[\qquad \text{con } c_i < d_i,\ c_i, d_i \in \mathbb{R}$$

Entonces, la siguiente restricción es otro homomorfismo:

$$h\Big|_{]c_i,d_i[} :]c_i, d_i[\to h(]c_i, d_i[)$$

Por consecuencia del corolario anterior, $h(]c_i, d_i[)$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, por lo que:

$$B = h(A) = h\left(\bigcup_{i \in I}]c_i, d_i[\right) = \bigcup_{i \in I} h(]c_i, d_i[) \in \mathcal{T}_u$$

□

Teorema 3.6 (del Valor Intermedio)**.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua con $(X, \mathcal{T})$ conexo. Si existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = a < b = f(x_1)$, entonces para todo $c \in]a,b[$, existe $x \in X \mid f(x) = c$.*

Demostración. Supongamos que no existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. Entonces, $f(X)$ no es un intervalo, ya que $a < c < b$, con $a, b \in f(X)$ pero $c \notin f(X)$. Por tanto, $f(X)$ no es conexo, llegando a una contradicción. □

Teorema 3.7 (Borsuk-Ulam)**.** *Sea $f : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua. Entonces, existe $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p) = f(-p)$.*

Demostración. Definimos la siguiente aplicación, que es continua por ser diferencia de continuas:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - f(-x) \end{array}$$

El teorema quedaría demostrado si encontramos $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(p) = 0$.

Sea $q \in \mathbb{S}^n$. Si $g(q) = 0$, q es el valor buscado. En caso contrario, supongamos sin pérdida de generalidad que $g(q) > 0$. Entonces, $-q \in \mathbb{S}^n$ y

$$g(-q) = f(-q) - f(q) = -g(q) < 0$$

Por tanto, por el teorema del valor intermedio, como g es continua y $\mathbb{S}^n$ es conexo (se demuestra más adelante, en el apartado 2 del ejemplo de la página 96), $\exists p \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(p) = 0$, es decir, $f(p) = f(-p)$. $\square$

Actualmente, demostrar si un conjunto es conexo o no es una tarea complicada, ya que está definido de forna negativa (*no existen...*). Probar la no existencia suele ser complicado, por lo que proporcionamos una serie de criterios que nos permiten demostrar la conexión de un conjunto de forma más sencilla. Este es el primer criterio, que trata la unión de conjuntos conexos:

Proposición 3.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos conexos con $A_i \subset X$ para todo $i \in I$.*

1. *Si $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es conexo.*
2. *Si existe $i_o \in I$ tal que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es conexo.*
3. *Si la familia A_i fuese numerable; es decir, podemos escribirla como $\{A_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o cantidad finita) y se cumple que $A_{i_n} \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n}$ es conexo.*

Demostración. Demostramos cada una por separado:

1. Sea $f : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Tenemos que demostrar que es constante. Como cada A_i es conexo, entonces:

$$f_{\big|A_i} : A_i \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$$

es constante. Además, existe $x_0 \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, por lo que $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in A_i$.

Uniendo ambos resultados, tenemos que $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, por lo que f es constante.

2. Sea $f : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Tenemos que demostrar que es constante. Como cada A_i es conexo, entonces:

$$f_{\big|A_i} : A_i \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$$

es constante. En particular, $f_{\big|A_{i_0}}$ es constante. Sea $x_{i_0} \in A_{i_0}$.

Para cada $i \in I$, $\exists x_i \in A_i \cap A_{i_0}$, por lo que $f(x_i) = f(x_{i_0})$. Por tanto, uniendo ambos resultados, tenemos que $f(x) = f(x_{i_0})$ $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, por lo que f es constante.

3. Definimos $Y_n = \bigcup\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\leqslant n}} A_{i_k}$. Demostremos que Y_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$:

   - $n = 1$. Es trivial, ya que $Y_1 = A_{i_1}$, que es conexo.
   - Supuesto cierto para n, demostramos para $n+1$.
     Tenemos que $Y_{n+1} = Y_n \cup A_{i_{n+1}}$, ambos conexos. Además,

     $$Y_n \cap A_{i_{n+1}} = \left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\leqslant n}} A_{i_k}\right) \bigcap A_{i_{n+1}} = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\leqslant n}} \left(A_{i_k} \cap A_{i_{n+1}}\right) \supset A_{i_n} \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$$

     Por tanto, por el apartado 1 de esta proposición, Y_{n+1} es conexo.

   Como $\emptyset \neq A_{i_1} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, entonces por el apartado 1 de esta proposición, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n}$ es conexo.

□

Teorema 3.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $A \subset X$ un conjunto conexo. Entonces, para cualquier $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$ se tiene que B es conexo.*

En particular, la adherencia de un conexo también es conexo.

Demostración. Sea $f : B \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Tenemos que demostrar que f es constante. Consideramos la restricción a A:

$$f_{|_A} : A \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$$

Tenemos que dicha restricción es constante por ser A conexo. Estudiamos ahora en $B \setminus A$.

Sea $b \in B \setminus A$, y consideramos $\{f(b)\} \in \mathcal{T}_{disc}$. Por ser f continua, también es continua en b, por lo que $\exists N \in N_b$ tal que $f(N) \subset \{f(b)\}$. Es decir, f es constante en un entorno de b.

Como $b \in B \setminus A \subset \overline{A} \setminus A$, entonces $b \in \partial A$. Por tanto, $\exists x \in A \cap N$. Como f es constante en N, $f(x) = f(b)$. Además, como $x \in A$ y f es constante en A, tenemos que $f(b) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Por tanto, $\forall b \in B \setminus A$, tenemos que $f(b)$ es constante e igual a $f(x)$ $\forall x \in A$.

Por tanto, f es constante en B, por lo que B es conexo. □

Este criterio, relativo a los productos de conexos, nos será también de utilidad al trabajar con la topología producto:

Proposición 3.10. *Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Entonces, el producto $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo si y solo si $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son conexos.*

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Si $X \times Y$ es conexo, como la proyección sobre X, $\pi_X : X \times Y \to X$ es continua y sobreyectiva, entonces $\pi_X(X \times Y) = X$ es conexo.

Análogamente, se demuestra que Y es conexo.

$\Longleftarrow$) Veamos que $X \times Y$ es unión de conexos de forma que todos corten a uno fijo.

Para cada $y \in Y$, consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_y = X \times \{y\}, \qquad \text{con } y \in Y$$

Tenemos que X_y es homeomorfo a X para todo $y \in Y$, por lo que es conexo.

Además, fijado $x_0 \in X$, consideramos e siguiente conjunto homeomorfo a Y, luego conexo:

$$Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y$$

Por tanto, tenemos que $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X_y = \left(\bigcup_{y \in Y} X_y \right) \cup Y_{x_0}$, y la intersección $X_y \cap Y_{x_0} = \{(x_0, y)\} \neq \emptyset$ es no vacía para todo $y \in Y$.

Por tanto, $X \times Y$ es conexo.

$\square$

No obstante, incluso mostrar ejemplos de conjuntos conexos nos sigue resultando complicado. De hecho, con lo visto, no es fácil ver si $\mathbb{R}^n$ es conexo o no. Para ello, introducimos los conceptos de conjunto estrellado y convexo.

3.1.1. Conjuntos Estrellados y Convexidad

En esta sección trataremos la Convexidad y los conjuntos estrellados. Aunque es cierto que tan solo nos serán de ayuda en caso de espacios vectoriales reales, estos conceptos nos son de ayuda para trabajar con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, espacio vectorial real de gran importancia.

Definición 3.2 (Conjunto estrellado)**.** Sea V un espacio vectorial. Decimos que un conjunto $C \subset V$ es estrellado desde $x_0 \in C$ si para todo $x \in C$, se cumple que el segmento que une x con x_0, $[x, x_0]$, está en C. Es decir,

$$(1-t)x + tx_0 \in C \qquad \forall t \in [0,1], \forall x \in C$$

Decimos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado si es estrellado desde algún $x_0 \in C$.

Definición 3.3 (Conjunto convexo)**.** Sea V un espacio vectorial. Decimos que un conjunto $C \subset V$ es convexo si es estrellado desde todos sus puntos. Es decir, para todo $x, y \in C$, el segmento que une x con y, $[x, y]$, está en C. Es decir,

$$(1-t)x + ty \in C \qquad \forall t \in [0,1], \forall x, y \in C$$

Como consecuencia inmediata de las definiciones, tenemos que todo conjunto convexo es estrellado. No obstante, no es cierto que todo conjunto estrellado sea convexo, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Lema 3.11. *Sea E un espacio vectorial, y $C \subset V$ un subconjunto suyo.*

$$C \text{ es convexo} \Longrightarrow C \text{ es estrellado.}$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de conjuntos estrellados y convexos:

1. $\mathbb{R}^n$ es evidentemente convexo.
2. La semirrecta con inicio en el origen que pasa por x, $S_x = \{\lambda x \mid \lambda > 0\}$, es convexo.

   En efecto, dado $x_0 \in S_x$, entonces $x_0 = \lambda x$, con $\lambda > 0$. Entonces, para todo $t \in [0,1]$:

   $$(1-t)x + tx_0 = (1-t)x + t\lambda x = (1-t+t\lambda)x \in S_x \Longrightarrow 1-t+t\lambda > 0$$

   que, como $t \in [0,1]$, se cumple.

   Por tanto, S_x es estrellado desde x_0. Como x_0 es arbitrario, S_x es convexo.

Proposición 3.12. *Sea V un espacio vectorial normado, y $C \subset V$ un subconjunto suyo.*

$$C \text{ es estrellado} \Longrightarrow C \text{ es conexo.}$$

Demostración. Cada segmento cerrado uniendo dos puntos $x, x_0 \in V$ es un conjunto conexo, ya que son la imagen de la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & V \\ & t & \longmapsto & (1-t)x + tx_0 \end{array}$$

que es continua, (de hecho, es lipschitziana):

$$\|f(t) - f(t')\| = \|(1-t)x + tx_0 - (1-t')x - t'x_0\| = \|(t'-t)(x-x_0)\| = \|x-x_0\||t-t'|$$

Por el ejercicio 4.2.1, como f es lipschitziana, entonces es continua. Además, como $[0,1]$ es conexo, entonces todos los segmentos dichos son conexos.

Entonces, como C es estrellado, supongamos que lo es desde $x_0 \in C$:

$$C = \bigcup_{x\in C} \{x\} \subset \bigcup_{x \in C} [x, x_0] \overset{(*)}{\subset} C$$

donde en $(*)$ hemos usado que C es estrellado. Por tanto, como $x_0 \in \bigcap\limits_{x\in C} [x, x_0]$, por el primer apartado del resultado anterior tenemos que C es conexo. □

Corolario 3.12.1. *Sea V un espacio vectorial normado, y $C \subset V$ un subconjunto suyo.*

$$C \text{ es convexo} \Longrightarrow C \text{ es conexo.}$$

Demostración. Como C es convexo, entonces es estrellado, por lo que por la proposición anterior, C es conexo. □

Una vez visto este nuevo criterio, podemos introducir nuevos ejemplos de conjuntos conexos:

Ejemplo. Otros ejemplos de conjuntos conexos son:

1. $\mathbb{R}^n$ es conexo por ser estrellado.

2. La esfera $\mathbb{S}^n$ es conexo con la $\mathcal{T}_{u\mathbb{S}^n}$.

   Tenemos que:
$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$
   Ambos conjuntos son conexos por ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, y su intersección es no vacía. Por tanto, $\mathbb{S}^n$ es conexo.

3. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo para $n \geqslant 2$.

   Podemos ver $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ como la unión de $\mathbb{S}^{n-1}$ con todas las semirrectas S_x para cada $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. La esfera tenemos que es conexa, y las semirrectas S_x son estrellados, luego conexos.

   Como cada $S_x \cap \mathbb{S}^{n-1} = \{x\} \neq \emptyset$, entonces $\left(\bigcup\limits_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} S_x\right) \cup \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es conexo.

4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio vectorial normado. Entonces, las bolas abiertas son conjuntos conexos.

   Demostramos en primer lugar que son convexos. Sea $x_0 \in X,\ r \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para todo $x, y \in B(x_0, r)$, tenemos que:
$$\begin{aligned}\|(1-t)x + ty - x_0\| &= \|(1-t)(x-x_0) + t(y-x_0)\| \leqslant \\ &\leqslant (1-t)\|x-x_0\| + t\|y-x_0\| < (1-t)r + tr = r\end{aligned}$$
   por tanto, son conjuntos convexos. Como X es un espacio vectorial normado, son conexos.

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio vectorial normado. Entonces, las bolas cerradas son conjuntos conexos.

Ejemplos de conjuntos producto que son conexos son:

1. El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es conexo por ser producto de conexos.

2. El toro es conexo por ser homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\mathcal{R}$, y este lo es por serlo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que es producto de conexos.

3. El espacio proyectivo es también conexo, por serlo $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $n \geqslant 2$.

Notemos entonces que, auque estas propiedades no sean topológicas, sino algebraicas, nos permiten demostrar la conexión de conjuntos de forma sencilla. Por último, en el Teorema 3.8 se ha tratado la unión de conjuntos conexos, aunque en ningún momento se ha tratado la intersección de conjuntos conexos. Esto es más complejo, pero tenemos el siguiente resultado que también nos será de ayuda:

Proposición 3.13. *Sea V un espacio vectorial, y sean $A, B \subset V$ dos subconjuntos suyos.*
$$A, B \text{ convexos} \Longrightarrow A \cap B \text{ convexo.}$$

Demostración. Sean $x, y \in A \cap B$. Entonces, como A es convexo, $[x, y] \subset A$. Análogamente, $[x, y] \subset B$. Por tanto, $[x, y] \subset A \cap B$, por lo que $A \cap B$ es convexo. □

3.1.2. Componentes Conexas

Definición 3.4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos $x_0 \in X$. Llamamos componente conexa de x_0 al siguiente conjunto:

$$C(x_0) = \bigcup \{A \subset X \mid x_0 \in A,\ A \text{ es conexo}\}$$

Proposición 3.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $x_0 \in X$. Entonces, la componente conexa $C(x_0)$ de x_0 es el mayor conexo que contiene a x_0.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $C(x_0)$ es conexo. Tenemos que es la unión de conexos, y su intersección es no vacía, ya que

$$x_0 \in \bigcap \{A \subset X \mid x_0 \in A,\ A \text{ es conexo}\}$$

Por tanto, $C(x_0)$ es conexo.

Además, sea C un conexo que contiene a x_0. Entonces, de forma directa se tiene que $C \subset C(x_0)$. □

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de componentes conexas:

1. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que $C(1) = \mathbb{R}^+$.
2. En $\mathbb{Q}$, tenemos que $C(1) = \{1\}$.

Proposición 3.15. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces, se tiene las siguientes propiedades:*

1. *Las componentes conexas de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ dan una partición de X.*
2. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si tiene una única componente conexa.*
3. *Las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$ son cerrados de $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración. Vemos cada propiedad por separado:

1. Tomamos dos puntos distintos $x, y \in X$. Veamos que $C(x) = C(y)$ o bien $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

   Supongamos que $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Entonces, $C(x) \cup C(y)$ es conexo, por ser unión de dos conexos con intersección no vacía. Por tanto,

   $$x \in C(x) \subset C(x) \cup C(y) \overset{(*)}{\subset} C(x)$$

   donde en $(*)$ se ha aplicado que $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x. Por tanto, $C(x) = C(x) \cup C(y)$. Análogamente, se demuestra el mismo resultado para $C(y)$, es decir, $C(y) = C(x) \cup C(y)$. Por tanto, $C(x) = C(y)$.

   Por tanto, vemos que dos componentes conexas son disjuntas o iguales. Si demostramos que la unión de todas las componentes conexas es X, entonces tenemos que las componentes conexas dan una partición de X. Es claro que:

   $$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} C(x) \subset X \Longrightarrow X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

   Por tanto, las componentes conexas dan una partición de X.

2. Demostramos por doble implicación:

   $\Longrightarrow$) Supongamos que X es conexo. Entonces, $\exists x_0 \in X$ tal que $X = C(x_0)$. Por tanto, como las componentes conexas dan una partición de X, $C(x_0)$ es la única componente conexa de X.

   $\Longleftarrow$) Supongamos que X tiene una única componente conexa. Entonces, como las componentes conexas dan una partición de X, $X = C(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Por tanto, como $C(x_0)$ es conexo, X también lo es.

3. Si $C(x)$ es la componente conexa de $x \in X$, sabemos que $\overline{C(x)}$ es un conexo. Pero:
$$x \in C(x) \subset \overline{C(x)} \overset{(*)}{\subset} C(x)$$
donde en $(*)$ hemos aplicado que $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x. Entonces, $C(x) = \overline{C(x)}$, por lo que $C(x)$ es cerrado.

$\square$

La siguiente propiedad nos da una condición suficiente para que una partición por conexos coincida con las componentes conexas:

Proposición 3.16. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de X donde cada $A_i \in \mathcal{T}$ y es conexo. Entonces la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de todas las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración. Sea $x \in X$ e $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Veamos que $C(x) = A_{i_0}$.

$\supset$) Como A_{i_0} es conexo y $x \in A_{i_0}$, entonces $A_{i_0} \subset C(x)$.

$\subset$) Supongamos que $C(x) \setminus A_{i_0} \neq \emptyset$. Entonces:
$$\begin{aligned} C(x) &= (C(x) \cap A_{i_0}) \bigcup (C(x) \cap (X \setminus A_{i_0})) = \\ &= (C(x) \cap A_{i_0}) \bigcup \left(C(x) \cap \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \right) \end{aligned}$$

Por tanto, $C(x)$ se expresa como unión de dos abiertos de $\mathcal{T}_{C(x)}$, disjuntos y no vacíos, por lo que $C(x)$ no es conexo, llegando a una contradicción.

Por tanto, $C(x) \setminus A_{i_0} = \emptyset$, por lo que $C(x) \subset A_{i_0}$.

$\square$

No obstante, se trata de una condición suficiente, pero no necesaria. Es decir, puede haber componentes conexas que no sean abiertas. Veamos un ejemplo:

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Tenemos que las componentes conexas de X son:
$$]-\infty, 0] \qquad]1, \infty[\qquad \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\quad n \in \mathbb{N}$$

No obstante, $]-\infty, 0]$ no es abierto, ya que el 0 no es interior. Esto se debe a que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap X \subset]-\infty, 0]$, ya que $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap X$ contiene elementos positivos.

Ya que toda aplicación continua lleva conjuntos conexos en conexos, concluimos el siguiente resultado:

Proposición 3.17. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sea $x \in X$:*

1. *$f(C(x)) \subset C(f(x))$.*
2. *Si f es un homeomorfismo, entonces $f(C(x)) = C(f(x))$.*

Demostración. Demostramos cada apartado por separado:

1. Como $C_(x)$ es conexo, entonces $f(C(x))$ es conexo, por ser f continua. Además, como $x \in C(x)$, $f(x) \in f(C(x))$ conexo, por lo que $f(C(x)) \subset C(f(x))$ por ser $C(f(x))$ el mayor conexo que contiene a $f(x)$.
2. Como f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} es continua. Consideramos $y \in C(f(x))$. Entonces, por ser f biyectiva, $\exists!\ x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces:
$$f^{-1}(C(f(x))) \subset C(f^{-1}(f(x))) = C(x) \Longrightarrow C(f(x)) \subset f(C(x))$$

□

Corolario 3.17.1. *El número de componentes conexas es una propiedad topológica.*

Es decir, si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son homeomorfos, entonces tienen el mismo número de componentes conexas.

3.2. Compacidad

Definición 3.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que X es compacto si todo recubrimiento de X por abiertos tiene un subrecubrimiento finito. Es decir, si $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ con $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$, entonces $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $X = \bigcup\limits_{i \in I_0} U_i$.

Un conjunto $A \subset X$ es compacto si $(A, \mathcal{T}_A)$ es compacto.

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de compactos:

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ no es compacto.

   Para verlo, un recubrimiento $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ por abiertos es:
$$U_n = B(0, n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
   Supongamos que existe un conjunto $N_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\{U_n\}_{n \in N_0}$ es un recubrimiento de $\mathbb{R}^n$. Como N_0 es finito, $\exists n_0 = \max N_0$, y se tiene que:
$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in N_0} U_n = \bigcup_{n \in N_0} B(0, n) \subset B(0, n_0) \Longrightarrow \mathbb{R}^n \subset B(0, n_0)$$
   que es un absurdo, ya que $\mathbb{R}^n$ no está acotado.
2. $(X, \mathcal{T}_t)$ es compacto, ya que tan solo hay dos abiertos.
3. Sea $(X, \mathcal{T})$. Si $\mathcal{T}$ es finito, entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

4. $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es compacto si y solo si X es finito.

   $\Longleftarrow$) Si X es finito, entonces $\mathcal{T}_{disc}$ es finito, por lo que $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es compacto.

   $\Longrightarrow$) Demostramos el contrarrecíproco. Supongamos que X es infinito. Entonces, $\{x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento de X por abiertos, pero no tiene ningún subrecubrimiento finito, ya que cada $x \in X$ está en un único abierto.

5. $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es compacto.

   Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos, y elegimos $i_0 \in I$ de forma que $U_{i_0} \neq \emptyset$. Entonces, $X \setminus U_{i_0}$ es finito, por lo que $\exists x_1, \dots, x_n \in X$ tal que $X \setminus U_{i_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

   Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, consideramos x_j. Como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X, entonces $\exists i_j \in I$ tal que $x_j \in U_{i_j}$. Por tanto, tenemos que el subrecubrimiento finito es:
   $$\{U_{i_0}\} \cup \{U_{i_j}\}_{j=1,\dots,n}$$

Proposición 3.18 (Caracterización de la Compacidad)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Entonces, equivalen:*

1. *X es compacto.*
2. *Para cualquier familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ finito tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_j = \emptyset$.*
3. *Para cualquier recubrimiento de X por abiertos básicos $\{B_i\}_{i\in I}$, con $B_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in I$, entonces $I_0 \subset I$ finito tal que $X = \bigcup\limits_{i\in I_0} B_i$.*

Demostración. Demostramos mediante implicaciones dobles:

$1) \Longrightarrow 2)$ Supongamos que X es compacto, y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de X tal que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$. Consideramos $U_i = X \setminus F_i$, y tenemos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos de X. Veamos que es un recubrimiento de X:
$$X = X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$$
Por tanto, como X es compacto, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Entonces:
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$$

$2) \Longrightarrow 1)$ Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos. Entonces, $\{X \setminus U_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados de X cuya intersección es nula. Por tanto, por hipótesis, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = \emptyset$. Entonces:
$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Longrightarrow X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset X$$

Por doble inclusión, $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, por lo que X es compacto.

1) $\Longrightarrow$ 3) Como los abiertos básicos son abiertos, entonces se tiene de forma directa.

3) $\Longrightarrow$ 1) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos. Por la definición de base, para cada $i \in I$, existe un conjunto de índices J_i tal que $U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} B_j^i$ con $B_j^i \in \mathcal{B}$. Por tanto,

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} B_j^i$$

Por tanto, por hipótesis $\exists I_0 \subset I$ finito y, para cada $i \in I_0$, existe $J_i^0 \subset J_i$ finito tal que:

$$X = \bigcup_{i\in I_0} \bigcup_{j\in J_i^0} B_j^i$$

Como I_0 es finito y también lo son los J_i^0, entonces $\bigcup\limits_{j\in J_i^0} B_j^i$ es finito. Por tanto, X es compacto.

□

En la definición de espacio compacto, se ha visto que un subconjunto es compacto si lo es con la topología inducida. No obstante, la siguiente caracterización nos es de ayuda, ya que nos permite saber si un conjunto es compacto trabajando con los abiertos de la topología original.

Proposición 3.19. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces, A es compacto si y solo si todo recubrimiento de A por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ tiene un subrecubrimiento (de A) finito.*

Es decir, si $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ con $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$, entonces $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$.

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Dado $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ un recubrimiento de A, para cada $i \in I$ consideramos $U_i \cap A \in \mathcal{T}_A$. Veamos que es un recubrimiento de A (por abiertos de A):

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Longrightarrow A \cap A \subset A \cap \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} (U_i \cap A)$$

Por tanto, como A es compacto, entonces $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} (U_i \cap A)$. Veamos que $\{U_i\}_{i\in I_0}$ es un subrecubrimiento de A:

$$A \subset \bigcup_{i\in I_0} (U_i \cap A) \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$$

Entonces, dado un recubrimiento de A por abiertos de $(X, \mathcal{T})$, hemos encontrado un subrecubrimiento (de A) finito.

$\Longleftarrow$) Tenemos que ver que A es compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}_A$ $\forall i \in I$ un recubrimiento de A por abiertos de A. Entonces, $U_i = A \cap U_i'$ con $U_i' \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$. Veamos que $\{U_i'\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X:

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(A\cap U_i') = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} U_i'\right) \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} U_i'$$

Por tanto, como $\{U_i'\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X, por la hipótesis $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i'$. Veamos que $\{U_i\}_{i\in I_0}$ es un subrecubrimiento de A:

$$A \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i' \Longrightarrow A\cap A \subset A \cap \left(\bigcup_{i\in I_0} U_i'\right) \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i\in I_0}(A\cap U_i') = \bigcup_{i\in I_0} U_i$$

Por tanto, se ha demostrado que A es compacto.

□

Veamos un ejemplo de aplicación de esta proposición:

Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y consideramos $\{x_n\}$, $x_n \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ una sucesión de puntos de X convergente a $x_0 \in X$. Veamos que el siguiente conjunto es compacto:

$$A = \{x_0\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

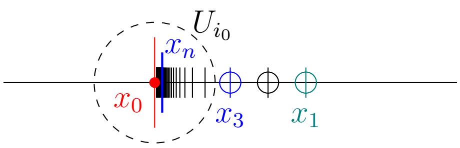


Figura 3.1: Representación gráfica de los elementos de la demostración.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ un recubrimiento de A por abiertos de X. Entonces, como $x_0 \in A$, $\exists i_0 \in I$ tal que $x_0 \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ con $x_0 \in U_{i_0}$, tenemos que $U_{i_0} \in N_{x_0}$. Por tanto, como la sucesión converge a x_0, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{i_0}$ $\forall n \geqslant n_0$.

Veamos qué ocurre con los x_n con $n < n_0$. Como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, $\exists i_n \in I$ tal que $x_n \in U_{i_n}$. Por tanto, el subrecubrimiento finito es:

$$\{U_{i_0}\} \cup \{U_{i_n}\}_{n=1,\dots,n_0-1}$$

Por tanto, A es compacto.

Al igual que ocurría con la conexión, la compacidad se mantiene por funciones continuas:

Proposición 3.20. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Longrightarrow f(X) \text{ compacto.}$$

Demostración. Sea $\{U'_i\}_{i\in I}$, $U'_i \in \mathcal{T}'$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de $\mathcal{T}'$.

Por la continuidad de f, $\forall i \in I$, $f^{-1}(U'_i) \in \mathcal{T}$. Veamos que $\{f^{-1}(U'_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$:

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U'_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U'_i) \subset X$$

Por ser X compacto, $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $X = \bigcup\limits_{i\in I_0} f^{-1}(U'_i)$. Por tanto,

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(U'_i)\right) = \bigcup_{i\in I_0} f(f^{-1}(U'_i)) \subset \bigcup_{i\in I_0} U'_i$$

Por tanto, $\{U'_i\}_{i\in I_0}$ es un subrecubrimiento finito de $f(X)$ por abiertos de $\mathcal{T}'$, por lo que $f(X)$ es compacto. □

Corolario 3.20.1. *La compacidad es una propiedad topológica.*

Es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo, entonces X es compacto si y solo si $f(X) = Y$ es compacto.

Para el caso de los cocientes, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.21. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Consideramos $X/\mathcal{R}$ el espacio cociente con la topología cociente. Entonces:*

$$X \text{ compacto} \Longrightarrow X/\mathcal{R} \text{ compacto.}$$

Demostración. Consideramos $p : (X, \mathcal{T}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ la proyección canónica en el cociente. Entonces, por el teorema anterior, como p es continua, $p(X)$ es compacto. Pero como $p(X) = X/\mathcal{R}$ por ser p sobreyectiva, entonces $X/\mathcal{R}$ es compacto. □

Para poder introducir ejemplos de aplicación de este teorema, incluimos antes el siguiente teorema. Se generalizará más adelante en el Corolario de Heine-Borel (Corolario 3.29.1), aunque para demostrar este último emplearemos este caso particular:

Teorema 3.22. *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, y sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces, $[a, b]$ es compacto.*

Demostración. Sea $A = [a, b]$. Consideramos un recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}$, $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}_u$ $\forall i \in I$.

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \qquad \text{con } U_i \in \mathcal{T}_u \ \forall i \in I$$

Definimos el conjunto:

$$J = \left\{ x \in [a, b] \mid \exists I_0 \subset I \text{ finito tal que } [a, x] \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i \right\}$$

Para ver que J es cerrado, basta con ver que $b \in J$.

En primer lugar vemos que $J \neq \emptyset$. Como $a \in [a,b]$, $\exists i_0 \in I$ tal que $a \in U_{i_0}$. Por tanto, $[a,a] \subset U_{i_0}$, por lo que $a \in J$. Además, si $x \in J$, entonces $[a,x] \subset J \subset [a,b]$, ya que, para todo $y \in [a,x]$, el mismo conjunto finito I_0 empleado para ver que $x \in J$ sirve para ver que $y \in J$, ya que $[a,y] \subset [a,x] \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$. Por tanto,

$$J = \begin{cases} [a,c[\\ \vee \\ [a,c] \end{cases} \quad \text{para un cierto } c \in [a,b]$$

Veamos ahora que el caso $J = [a,c[$ no es posible. Para ello, veamos que $c \in J$. Como $c \in [a,b]$, $\exists i_0 \in I$ tal que $c \in U_{i_0}$. Como $c \in U_{i_0} \in \mathcal{T}_u$, entonces $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(c,\varepsilon) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U_{i_0}$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in]c-\varepsilon, c[\subset J$, ya que en caso contrario tomamos un ε' menor de forma que se cumpla. Entonces, $\exists I_1 \subset I$ finito tal que $[a,x] \subset \bigcup\limits_{i\in I_1} U_i$. Por tanto,

$$[a,c] = [a,x] \cup [x,c] \subset \left(\bigcup_{i\in I_1} U_i\right) \cup]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset \bigcup_{i\in I_1} U_i \cup U_{i_0}$$

Definiendo $I_2 = I_1 \cup \{i_0\}$, tenemos que $[a,c] \subset \bigcup\limits_{i\in I_2} U_i$, por lo que $c \in J$.

Por tanto, $J = [a,c]$, para un cierto $c \in [a,b]$. Veamos ahora que $c = b$. Por reducción al absurdo, Supongamos que $c < b$. Como $c \in J$, $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $[a,c] \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$. Además, como $c \in [a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, entonces $\exists i_0 \in I$ tal que $c \in U_{i_0}$. Como $c \in U_{i_0} \in \mathcal{T}_u$, entonces $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(c,\varepsilon) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U_{i_0}$. Definimos ahora $\varepsilon' = \text{mín}\{\varepsilon, b-c\} > 0$. Entonces,

$$[a, c+\varepsilon'[= [a,c] \cup [c, c+\varepsilon'[\subset [a,c] \cup [c, c+\varepsilon[\subset \left(\bigcup_{i\in I_0} U_i\right) \cup]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset \bigcup_{i\in I_0} U_i \cup U_{i_0}$$

Definiendo $I_1 = I_0 \cup \{i_0\}$, tenemos que $[a, c+\varepsilon'[\subset \bigcup\limits_{i\in I_1} U_i$. Por tanto, $c + \dfrac{\varepsilon'}{2} \in J$, llegando a una contradicción, ya que $J = [a,c]$. Por tanto, $c = b$.

Por tanto, $J = [a,b]$. En particular, $b \in J$, por lo que $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$. Es decir, $\{U_i\}_{i\in I_0}$ es un subrecubrimiento finito de A por abiertos de $\mathbb{R}$, por lo que A es compacto. □

Una vez visto que $[a,b]$ es compacto, podemos ver el siguiente ejemplo de aplicación de que la compacidad se mantiene por funciones continuas:

Ejemplo. Veamos que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es compacta. Consideramos la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & x & \longmapsto & (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x)) \end{array}$$

Tenemos que f es continua y sobreyectiva. Por tanto, como $[0,1]$ es compacto, $\mathbb{S}^1 = f([0,1])$ es compacto.

La compacidad por norma general no es hereditaria, pero sí se hereda a subconjuntos cerrados, como indica la siguiente proposición:

Proposición 3.23. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, y sea $C \subset X$. Entonces:*

$$C \in C_{\mathcal{T}} \text{ cerrado} \Longrightarrow C \text{ compacto.}$$

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ un recubrimiento mediante abiertos de $\mathcal{T}$ de C. Es decir,

$$C \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Entonces, $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus C\}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ compacto, $\exists I_0 \subset I$ finito tal que $\{U_i\}_{i\in I_0} \cup \{X \setminus C\}$ es un subrecubrimiento de X. Veamos que $\{U_i\}_{i\in I_0}$ es un sobrerecubrimiento finito de C por abiertos de $\mathcal{T}$:

$$X = \left(\bigcup_{i\in I_0} U_i\right) \cup (X \setminus C) \Longrightarrow C = C \cap X = C \cap \left(\left(\bigcup_{i\in I_0} U_i\right) \cup (X \setminus C)\right) =$$
$$= C \cap \left(\bigcup_{i\in I_0} U_i\right) \Longrightarrow C \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$$

Por tanto, C es compacto. □

Por tanto, se ha demostrado que "cerrado implica compacto"[1]. No obstante, para el recíproco necesitamos que el espacio topológico sea de Hausdorff:

Proposición 3.24. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff (T2), y sea $C \subset X$. Entonces:*

$$C \text{ compacto} \Longrightarrow C \in C_{\mathcal{T}} \text{ cerrado.}$$

Demostración. Probemos que $X \setminus C \in \mathcal{T}$. Fijamos $x_0 \in X \setminus C$ y, para todo $x \in C$, como X es T2 y $x \neq x_0$, $\exists U_x, \widetilde{U}_x \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x$, $x_0 \in \widetilde{U}_x$ y $U_x \cap \widetilde{U}_x = \emptyset$.

Entonces, veamos que $\{U_x\}_{x\in C}$ es un recubrimiento de C por abiertos de $\mathcal{T}$:

$$C = \bigcup_{x\in C} \{x\} \subset \bigcup_{x\in C} U_x$$

Por ser C compacto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{U_{x_n}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leqslant n_0}}$ es un subrecubrimiento finito de C por abiertos de $\mathcal{T}$.

Consideramos ahora $\widetilde{U}_{x_0} = \bigcap\limits_{n=1}^{n_0} \widetilde{U}_{x_n}$. Tenemos que $\widetilde{U}_{x_0} \in \mathcal{T}$ por ser intersección finita de abiertos de $\mathcal{T}$. Además, $x_0 \in \widetilde{U}_{x_0}$. Veamos que $\widetilde{U}_{x_0} \cap C = \emptyset$. Para ello, vemos que:

$$\widetilde{U}_{x_0} \cap U_{x_n} = \left(\bigcap_{n=1}^{n_0} \widetilde{U}_{x_n}\right) \cap U_{x_n} \subset \widetilde{U}_{x_n} \cap U_{x_n} = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant n_0$$

[1] En realidad, no se ha demostrado exactamente eso. Se ha demostrado que un subconjunto cerrado de un compacto es un compacto. Además, la proposición siguiente no es exactamente el recíproco, ya que las hipótesis cambian. No obstante, debido a la similitud de los resultados, se expresa como el recíproco para facilitar la interpretación.

Por tanto,

$$\widetilde{U}_{x_0} \cap C \subset \widetilde{U}_{x_0} \cap \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant n_0}} U_{x_n} \right) = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leqslant n_0}} (\widetilde{U}_{x_0} \cap U_{x_n}) = \emptyset$$

Por tanto, tenemos que $x_0 \in \widetilde{U}_{x_0} \subset X \setminus C$, con $\widetilde{U}_{x_0} \in \mathcal{T}$. Por tanto, $x_0 \in [X \setminus C]^\circ$. Como $x_0 \in X \setminus C$ es arbitrario, entonces $X \setminus C = [X \setminus C]^\circ$, por lo que $X \setminus C \in \mathcal{T}$ es abierto; es decir, C es cerrado. □

Quitando la hipótesis de que el espacio topológico sea de Hausdorff, no es cierto que todo compacto sea cerrado, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología cofinita $\mathcal{T}_{CF}$. Entonces, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es cerrado, ya que no es finito. No obstante, es fácil ver que es compacto de una forma similar a como se demostró que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ es compacto.

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores, se tiene el siguiente corolario, el cual no es trivial, respecto de la intersección de compactos.

Corolario 3.24.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff (T2). Sea $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \subset X$ una familia de compactos de X. Entonces:*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \text{ compacto.}$$

Demostración. Sea $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Como A_i es compacto $\forall i \in I$ y $(X, \mathcal{T})$ es T2, entonces $A_i \in C_\mathcal{T}$ cerrado $\forall i \in I$ por la proposición 3.24. Además, como la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, entonces $A \in C_\mathcal{T}$ cerrado.

Fijado $i \in I$, como $A \subset A_i$ es un subconjunto cerrado de un compacto (A_i), entonces A es compacto por la proposición 3.23. □

Para la unión de compactos, tenemos el siguiente resultado, más general que el anterior ya que no se impone nada sobre $(X, \mathcal{T})$:

Proposición 3.25. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:*

$$A, B \subset X \text{ compactos} \Longrightarrow A \cup B \text{ compacto.}$$

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}$ un recubrimiento de $A \cup B$ por abiertos de $\mathcal{T}$, es decir,

$$A \cup B \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Como $A \subset A \cup B$, entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de $\mathcal{T}$, y como A es compacto, $\exists I_A \subset I$ finito tal que $\{U_i\}_{i\in I_A}$ es un subrecubrimiento finito de A, es decir,

$$A \subset \bigcup_{i\in I_A} U_i$$

Análogamente, como $B \subset A \cup B$, entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de B por abiertos de $\mathcal{T}$, y como B es compacto, $\exists I_B \subset I$ finito tal que $\{U_i\}_{i\in I_B}$ es un subrecubrimiento finito de B, es decir,

$$B \subset \bigcup_{i\in I_B} U_i$$

Por tanto, $\{U_i\}_{i\in I_A\cup I_B}$ es un subrecubrimiento de $A\cup B$ por abiertos de $\mathcal{T}$:

$$A\cup B \subset \left(\bigcup_{i\in I_A} U_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in I_B} U_i\right) = \bigcup_{i\in I_A\cup I_B} U_i$$

Como $I_A\cup I_B$ es finito, entonces dicho subrecubrimiento es finito, por lo que $A\cup B$ es compacto. □

Veamos el siguiente ejemplo de aplicación de esta proposición:

Ejemplo. Veamos si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ es T2.

Consideramos $A = [0, +\infty[$, que claramente no es cerrado. Además, es fácil demostrar que es compacto (se demuestra de forma análoga a que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ lo es). Por tanto, como $A\subset\mathbb{R}$ es compacto pero no cerrado, tenemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es T2, como ya se demostró en el el apartado 4 del ejemplo de la página 44.

El siguiente resultado nos será de gran utilidad para demostrar que una aplicación es cerrada:

Teorema 3.26. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y $(Y, \mathcal{T}')$ un espacio topológico de Hausdorff (T2). Entonces, toda aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua es cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado de X. Tenemos que ver que $f(C)$ es cerrado en Y.

Como $C \subset X$ es cerrado y X es compacto, entonces C es compacto por la Proposición 3.23. Como f es continua y C es compacto, entonces $f(C)$ es compacto. Por tanto, como Y es de T2, $f(C)$ es cerrado. □

Por último, tenemos el siguiente resultado, que nos sirve para estudiar la compacidad de productos de espacios topológicos:

Teorema 3.27 (Tychonoff[2])**.** *Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. Entonces,*

$$X \text{ e } Y \text{ compactos} \Longrightarrow X\times Y \text{ compacto.}$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Como $X\times Y$ es compacto y la proyección en X, π_X es continua, entonces $(X\times Y) = X$ es compacto. Análogamente, se demuestra que Y es compacto.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X e Y son compactos.

□

[2]También escrito como Tijonov, Tychonov.

3.2.1. Compacidad en espacios métricos

Definición 3.6 (Conjunto acotado)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $A \subset X$ es acotado si $\exists x_0 \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(x_0, r)$.

Lema 3.28. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $A \subset X$ es acotado si y solo si, para cada $x \in X$, $\exists r_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(x, r_x)$.*

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Se tiene de forma directa.

$\Longrightarrow$) Como A es acotado, $\exists x_0 \in X$ y $r' \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(x_0, r')$. Para cada $x \in X$, consideramos $r_x = d(x, x_0) + r'$. Veamos que $A \subset B(x, r)$. Sea $y \in A$. Entonces:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x) < r' + d(x_0, x) = r_x \Longrightarrow y \in B(x, r_x)$$

Por tanto, $A \subset B(x, r_x)$. □

Una vez introducido el concepto de conjunto acotado, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.29. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subset X$. Tenemos que:*

$$A \text{ es compacto} \Longrightarrow A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Demostración. Como A es compacto, por ser (X, d) T2 (ver Lema 1.9), por la Proposición 3.24 tenemos que A es cerrado. Veamos ahora que está acotado.

Como las bolas abiertas son abiertos de X, fijado $x_0 \in X$ tomamos el siguiente recubrimiento de A por abiertos de X:

$$A \subset X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n)$$

Por ser A compacto, $\exists n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(x_0, n_i)$. Tomando $r = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ conjunto finito, tenemos que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_0, n_i) \subset B(x_0, r).$$

Por tanto, A es acotado. □

Corolario 3.29.1 (Heine-Borel)**.** *Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, y consideramos $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$A \text{ es compacto} \Longleftrightarrow A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Esto se ha demostrado en la Proposición 3.29 para cualquier espacio métrico.

$\Longleftarrow$) Como A es acotado, tenemos que $\exists R \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(0,R) \subset \overline{B}(0,R)$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. Entonces, como $\|x\| \leqslant R$, tenemos que $|x_i| \leqslant R$ $\forall i = 1, \ldots, n$; es decir, A está acotado coordenada a coordenada. Por tanto,

$$A \subset [-R,R]^n = [-R,R] \times \overbrace{\cdots}^{(n)} \times [-R,R]$$

Tenemos que $[-R,R]$ es compacto por ser un intervalo cerrado y acotado (Teorema 3.22). Además, por el Teorema de Tychonoff (Teorema 3.27), $[-R,R]^n$ es compacto. Por tanto, A es un subconjunto cerrado de un compacto, por lo que A es compacto (Proposición 3.23).

□

Ejemplo. Algunos ejemplos de conjuntos compactos son:

1. La esfera $\mathbb{S}^n$ es compacta.
2. El toro es compacto por ser homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\mathcal{R}$, y este lo es por serlo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que es producto de compactos.

Como corolario al Corolario de Heine-Borel, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.29.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y sea la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua. Entonces, f es acotada (alcanza un máximo y un mínimo absolutos). Es decir,*

$$\exists x_0, x_1 \in X \mid f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) \qquad \forall x \in X$$

Demostración. Como f es continua y X es compacto, entonces $f(X) \subset \mathbb{R}$ es compacto. Por tanto, $f(X)$ es cerrado y acotado.

Por ser $f(X)$ acotada, $f(X)$ está mayorada y minorada, y por el Axioma del Supremo $\exists i = \inf f(X)$, $s = \sup f(X)$. Además, sabemos que:

$$i \in \overline{f(X)} \overset{(*)}{=} f(X) \qquad s \in \overline{f(X)} \overset{(*)}{=} f(X)$$

donde en $(*)$ hemos empleado que $f(X)$ es cerrado. Por tanto, el ínfimo y el supremo están en $f(X)$, por lo que son mínimo y máximo respectivamente. Además, $\exists x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = i$ y $f(x_1) = s$.

□

3.3. Relación de Ejercicios

Para ver ejercicios relacionados con el Tema 3, consultar la sección 4.3.

4. Relaciones de Problemas

4.1. Espacios Topológicos

Ejercicio 4.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que la siguiente aplicación $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \qquad \forall x, y \in X$$

es una distancia en X. Prueba que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$.

Para probar que es una distancia, comprobamos las 3 condiciones sabiendo que d es una distancia:

1. Como $d(x, y) \geqslant 0$, tenemos que el numerador es no-negativo. Además, como el denominador es la suma de no-negativos, tenemos que también es no-negativo. Por tanto, tenemos que $\widetilde{d}(x, y) \geqslant 0$. Además, tenemos que:

$$\widetilde{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

2. Tenemos de forma directa que es simétrica esta distancia, ya que d es también simétrica.

3. Veamos si cumple la tercera desigualdad, es decir, :

$$\widetilde{d}(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leqslant \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = \widetilde{d}(x, y) + \widetilde{d}(y, z)$$

Definimos $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, y estudiamos su monotonía.

$$f'(x) = \frac{1 + x - x}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0$$

Por tanto, tenemos que f es estrictamente creciente, por lo que si $t \leqslant s$, tenemos que $f(t) \leqslant f(s)$. Veamos además qué ocurre con la suma. Para ello, sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$,

$$f(a + b) = \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} = f(a) + f(b)$$

Por tanto, como d es una distancia, tenemos que $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. Entonces,

$$f[d(x,z)] \leqslant f[d(x,y) + d(y,z)] \leqslant f[d(x,y)] + f[d(y,z)]$$

Por tanto, por la definición de f y $\widetilde{d}$, tenemos:

$$\widetilde{d}(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \widetilde{d}(x,y) + \widetilde{d}(y,z)$$

Por tanto, como hemos probado las tres condiciones, tenemos que es una distancia. Comprobemos ahora que las topologías son iguales. Para ello, hacemos uso del Corolario 1.14.1 y de que los abiertos básicos de un espacio métrico son sus bolas abiertas. Comprobamos ambas condiciones:

1. $\underline{\mathcal{T}_{\widetilde{d}} \leqslant \mathcal{T}_d}$

   Sea $\widetilde{x} \in X, \widetilde{r} \in \mathbb{R}^+$. Buscamos demostrar que $\forall B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, existe un $B_d(x,r)$ con $x \in B_d(x,r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$.

   Como $B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$ es un abierto métrico, tenemos que $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r}), \exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{\widetilde{d}}(x,r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$.

   Ahora, vemos que $\widetilde{d}(x,y) < d(x,y)$:

   $$\begin{aligned}\widetilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < d(x,y) \Longleftrightarrow d(x,y) < d(x,y) + d^2(x,y) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow d^2(x,y) > 0 \Longleftrightarrow d(x,y) > 0\end{aligned}$$

   Con ese resultado, veamos ahora que $B_d(x,r) \subset B_{\widetilde{d}}(x,r)$. Sea $y \in B_d(x,r)$, es decir, $d(x,y) < r$. Como $\widetilde{d}(x,y) < d(x,y) < r$, tenemos que $y \in B_{\widetilde{d}}(x,r)$.

   Por tanto, hemos demostrado que $\forall B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, existe un $B_d(x,r)$ con $x \in B_d(x,r) \subset B_{\widetilde{d}}(x,r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$.

   Cabe destacar el procedimiento seguido. En primer lugar, hemos demostrado que $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\widetilde{r})$, podemos encontrar una bola con la misma distancia centrada en dicho punto. Esa bola es $B_{\widetilde{d}}(x,r)$. Por último, buscamos una bola centrada en dicho x pero con la otra distancia, en nuestro caso $B_d(x,r)$. En este caso particular, encontrar esa segunda bola es más sencillo por la relación de las distancias.

2. $\underline{\mathcal{T}_d \leqslant \mathcal{T}_{\widetilde{d}}}$

   Sea $x_d \in X, r \in \mathbb{R}^+$. Buscamos demostrar que $\forall B_d(x_d,r)$, $\forall x \in B_d(x_d,r)$, existe un $B_{\widetilde{d}}(x,\delta)$ con $x \in B_{\widetilde{d}}(x,\delta) \subset B_d(x_d,r)$.

   Como $B_d(x_d,r)$ es un abierto métrico, tenemos que $\forall x \in B_d(x_d,r), \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_d(x,\varepsilon) \subset B_d(x_d,r)$.

Definimos de nuevo $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, que vimos que es estrictamente creciente. Veamos ahora que, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = f(\varepsilon)$, se tiene $B_{\widetilde{d}}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$.

Sea $y \in B_{\widetilde{d}}(x, \delta)$, es decir, $\widetilde{d}(x, y) < \delta$. Por la definición de f, tenemos que $f(d(x, y)) < f(\varepsilon)$. Por tanto, por ser f estrictamente creciente, tenemos que $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que $y \in B_d(x, \varepsilon)$.

Por tanto, hemos demostrado que $\forall B_d(x_d, r), \forall x \in B_d(x_d, r)$, existe un $B_{\widetilde{d}}(x, \delta)$ con $x \in B_{\widetilde{d}}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset B_d(x_d, r)$.

Cabe destacar el procedimiento seguido. En primer lugar, hemos demostrado que $\forall x \in B_d(x_d, r)$, podemos encontrar una bola con la misma distancia centrada en dicho punto. Esa bola es $B_d(x, \varepsilon)$. Por último, buscamos una bola centrada en dicho x pero con la otra distancia, en nuestro caso $B_{\widetilde{d}}(x, \delta)$. En este caso particular, para encontrar esa segunda bola hemos definido un δ particular.

Ejercicio 4.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que la siguiente aplicación $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \qquad \forall x, y \in X$$

es una distancia en X. Prueba que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$.

Para probar que es una distancia, comprobamos las 3 condiciones sabiendo que d es una distancia:

1. Como $1 > 0$ y $d(x, y) \geqslant 0$, tenemos que $\inf\{1, d(x, y)\} \geqslant 0$. Además, tenemos que:
$$\widetilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = 0 \Longleftrightarrow d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

2. Tenemos de forma directa que es simétrica esta distancia, ya que d es también simétrica y $\min\{a, b\} = \min\{b, a\}$.

3. Veamos si cumple la tercera desigualdad:

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(x, z) = \min\{1, d(x, z)\} \leqslant \min\{1, d(x, y) + d(y, z)\} \leqslant \\ \leqslant \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\} = \widetilde{d}(x, y) + \widetilde{d}(y, z)\end{aligned}$$

Por tanto, como hemos probado las tres condiciones, tenemos que es una distancia. Comprobemos ahora que las topologías son iguales. Para ello, hacemos uso del Corolario 1.14.1 y de que los abiertos básicos de un espacio métrico son sus bolas abiertas. Comprobamos ambas condiciones:

- $\underline{\mathcal{T}_d \leqslant \mathcal{T}_{\widetilde{d}}}$

  Sea $x_d \in X, r_d \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $\forall B_d(x_d, r_d)$, $\forall x \in B_d(x_d, r_d)$, buscamos demostrar que $\exists B_{\widetilde{d}}(x, r)$ tal que $x \in B_{\widetilde{d}}(x, r) \subset B_d(x, r)$.

Como $B_d(x_d, r_d)$ es un abierto métrico, tenemos que $\forall x \in B_d(x_d, r_d)$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_d(x, r) \subset B_d(x_d, r_d)$. Tomamos $r < 1$ sin pérdida de generalidad, ya que en el caso de que $r \geqslant 1$, tenemos que que $\exists r' < 1$ tal que se tiene que $B_d(x, r') \subset B_d(x, r)$.

Veamos ahora que $B_{\widetilde{d}}(x, r) \subset B_d(x, r)$. Sea $y \mid \widetilde{d}(x, y) < r$. Entonces, como $\widetilde{d}(x, y) = \text{ínf}\{1, d(x, y)\} < r < 1$, tenemos que $d(x, y) = \widetilde{d}(x, y) < r < 1$. Por tanto, $y \in B_d(x, r)$.

Por tanto, tenemos que $\forall B_d(x_d, r_d)$, $\forall x \in B_d(x_d, r_d)$, existe $B_{\widetilde{d}}(x, r)$ tal que $x \in B_{\widetilde{d}}(x, r) \subset B_d(x, r) \subset B_d(x_d, r_d)$.

- $\underline{\mathcal{T}_{\widetilde{d}} \leqslant \mathcal{T}_d}$

  Sea $\widetilde{x} \in X, \widetilde{r} \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $\forall B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, buscamos demostrar que $\exists B_d(x, r)$ tal que $x \in B_d(x, r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$.

  Como $B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$ es un abierto métrico, tenemos que $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{\widetilde{d}}(x, r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$.

  Veamos ahora que $B_d(x, r) \subset B_{\widetilde{d}}(x, r)$. Sea $y \mid d(x, y) < r$. Entonces, como $\widetilde{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\} \leqslant d(x, y) < r$, tenemos que $y \in B_{\widetilde{d}}(x, r)$.

  Por tanto, tenemos que $\forall B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, $\forall x \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, existe $B_d(x, r)$ cumpliendo que $x \in B_d(x, r) \subset B_{\widetilde{d}}(x, r) \subset B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x}, \widetilde{r})$.

Ejercicio 4.1.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Prueba que la aplicación $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ d(x, x_0) + d(x_0, y) & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

es una distancia en X. Si (X, d) es el espacio métrico euclídeo a d' se le denomina **distancia de correos**.

Para probar que es una distancia, comprobamos las 3 condiciones sabiendo que d es una distancia:

1. De forma evidente, como d es una distancia, tenemos que $d'(x, y) \geqslant 0$, $\forall x, y \in X$. Además, por definición tenemos que $x = y \Longrightarrow d'(x, y) = 0$. Veamos la otra implicación:

   $$d'(x, y) = 0 = d(x, x_0) + d(x_0, y) \Longrightarrow x = x_0 = y \Longrightarrow x = y$$

2. Tenemos de forma directa que es simétrica esta distancia, debido a que d es también simétrica y a la conmutabilidad de la suma en $\mathbb{R}$.

3. Veamos si cumple la tercera desigualdad. Realizamos la siguiente distinción de casos:

   - Si $x = z$, entonces $d'(x, z) = 0 \leqslant d'(x, y) + d'(y, z)$.

- Si $x \neq z$, entonces:

$$d'(x,z) = d(x,x_0) + d(x_0,z) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) + d(y,x_0) + d(x_0,z) = \\ = d'(x,y) + d'(y,z)$$

Por tanto, como hemos probado las tres condiciones, tenemos que es una distancia.

Ejercicio 4.1.4. Consideramos la siguiente aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{si} \quad x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & \text{si} \quad x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

Demuestra que d es una distancia en $\mathbb{R}^2$ y calcula las bolas abiertas y cerradas de $(\mathbb{R}^2, d)$. A d se le denomina la **distancia del río en la jungla** o **distancia del ascensor**.

Para probar que es una distancia, comprobamos las 3 condiciones sabiendo que d es una distancia:

1. De forma evidente, como al ser el valor absoluto siempre positivo o nulo, tenemos que $d(x,y) \geqslant 0,\ \forall x,y \in X$. Veamos ahora que $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

   - Si $x = y$, entonces $d(x,y) = y_2 - x_2 = 0$.
   - Si $d(x,y) = 0$, si $x_1 = y_1$ tenemos que $y_2 = x_2$; y si $x_1 \neq y_1$, entonces ya tenemos un sumando positivo y por tanto $d(x,y) \neq 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $x = y$.

2. Tenemos de forma directa que es simétrica esta distancia, debido a que, en $\mathbb{R}$, se tiene que $|a-b| = |b-a|$.

3. Veamos si cumple la tercera desigualdad. Realizamos la siguiente distinción de casos:

   - Si $x_1 = z_1$:
     Suponiendo $y_1 = x_1 = z_1$, tenemos que

     $$d(x,z) = |z_2 - x_2| = |y_2 - x_2 + z_2 - y_2| \leqslant |y_2 - x_2| + |z_2 - y_2| = d(x,y) + d(y,z)$$

     Suponiendo $y_1 \neq x_1 = z_1$, tenemos que

     $$d(x,z) = |z_2 - x_2| \leqslant |z_2| + |x_2| \leqslant |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2| = \\ = d(x,y) + d(y,z)$$

   - Si $x_1 \neq z_1$, entonces:
     Suponiendo $y_1 = x_1 \neq z_1$, tenemos que

     $$d(x,z) = |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leqslant |y_2 - x_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2| = d(x,y) + d(y,z)$$

Suponiendo $y_1 \neq x_1, y_1 \neq z_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x_2| + |z_1 - x_1| + |z_2| \leqslant |x_2| + |z_1 - y_1 + y_1 - x_1| + |z_2| \leqslant \\ &\leqslant |x_2| + |z_1 - y_1| + |y_1 - x_1| + |z_2| \leqslant \\ &\leqslant |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2| = \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Por tanto, como hemos probado las tres condiciones, tenemos que es una distancia. Veamos ahora las bolas abiertas. Dado, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} = \{(x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |y_2 - x_2| < r\} \bigcup \\ \bigcup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \neq y_1 \mid |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| < r\} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.5. Consideremos la distancia discreta d_{disc} en $\mathbb{R}^n$. Prueba que no existe ninguna norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $d_{\|\cdot\|} = d_{disc}$.

Para toda distancia $d_{\|\cdot\|}$ inducida por la norma $\|\cdot\|$ se cumple $\forall a \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^n$ que:

$$d_{\|\cdot\|}(ax + y, y) = ||ax + y - y|| = ||ax|| = |a|\ ||x|| = |a|\ d_{\|\cdot\|}(x, 0)$$

Por tanto, tenemos que $d_{\|\cdot\|}(ax + y, y) = |a| d_{\|\cdot\|}(x, 0), \quad \forall a \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^n$. Tomando $x \neq 0$, $a \neq \pm 1, 0$ suponemos $d_{\|\cdot\|} = d_{disc}$ y llegamos al siguiente absurdo:

$$d_{disc}(ax + y, y) = |a| d_{disc}(x, 0) \Longrightarrow d_{disc}(ax + y, y) = |a| \neq 0, 1$$

que, por cómo está definida la distancia discreta, es un absurdo.

Ejercicio 4.1.6. Consideremos la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^n$. Prueba que no existe ninguna forma bilineal simétrica definida positiva $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\|\cdot\|_g = \|\cdot\|_1$.

Tenemos que en todo espacio vectorial euclídeo X se cumple la identidad del paralelogramo[1]:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2, \qquad \forall x, y \in X$$

Busquemos contraejemplos que demuestren que eso no es cierto para $X = \mathbb{R}^n$ con la norma 1. Sean los valores siguientes:

$$\begin{aligned} x &= (1, \dots, 1) & x + y &= (0, 2, \dots, 2) \\ y &= (-1, 1, \dots, 1) & x - y &= (2, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Veamos que no se cumple la identidad del paralelogramo en $\mathbb{R}^n$ para la norma 1:

$$2||x||_1^2 + 2||y||_1^2 = 2n^2 + 2n^2 = 4n^2 \neq [2(n-1)]^2 + 2^2 = ||x + y||_1^2 + ||x - y||_1^2$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^n$ con la norma 1 no se cumple la identidad del paralelogramo. Por tanto, no existe un producto escalar asociado a dicha norma.

[1] Demostrado en Análisis Matemático I.

Ejercicio 4.1.7. Encuentra todas las topologías de un conjunto con dos elementos.

Sea $X = \{a, b\}$. Entonces tenemos que las posibles topologías son:

$$\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \qquad \mathcal{T}_{disc} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} \qquad \mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\} \qquad \mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$$

Ejercicio 4.1.8. Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico en los siguientes casos:

a) $X = \mathbb{N}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{\{1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Comprobamos las tres condiciones para que sea un espacio topológico:

a) Trivialmente, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

b) Veamos si es cerrado para uniones arbitrarias. Sea la familia $\{U_i\}_{i\in I}$. Si $U_i = \emptyset$, no afecta a la unión, por lo que no lo tenemos en cuenta. Si $U_i = X$, tenemos que la unión será X y, por tanto, también se tiene. Comprobamos por tanto el caso en que $U_i \neq \emptyset, X$ para todo i. Sean por tanto $U_i = \{1, \dots, n_i \mid n_i \in \mathbb{N}\}$.

- Si $\{n_i\}_{i\in I}$ está acotado, tenemos que $\exists \max\limits_{i\in I}\{n_i\}$. Definimos por tanto $n = \max\limits_{i\in I}\{n_i\} \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que
$$\bigcup_{i\in I} U_i = \{1, \dots, n\} \in \mathcal{T}$$
- Si $\{n_i\}_{i\in I}$ no está acotado, entonces
$$\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{N} = X \in \mathcal{T}$$
Veámoslo. Sea $n \in \mathbb{N}$, por lo que como $\{n_i\}_{i\in I}$ no está acotado, tenemos que $n \in U_n$. Por tanto, $n \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. La otra inclusión es trivial, ya que $U_i \subset \mathbb{N}\ \forall i \in I$.

c) Veamos si es cerrado para intersecciones de dos abiertos. Si $U_1 = \emptyset$, entonces la intersección es $\emptyset \in \mathcal{T}$. Si $U_1 = X$, tenemos que la intersección será $U_2 \in \mathcal{T}$ y, por tanto, también se tiene. Por tanto, consideramos $U_1 = \{1, \dots, n_1\}$ y $U_2 = \{1, \dots, n_2\}$. Sea $n = \min\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, y tenemos que
$$U_1 \cap U_2 = \{1, \dots, n\} \in \mathcal{T}$$

b) $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{]-\infty, b[\ \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Comprobamos las tres condiciones para que sea un espacio topológico:

a) Trivialmente, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

b) Veamos si es cerrado para uniones arbitrarias. Sea la familia $\{U_i\}_{i\in I}$. Si $U_i = \emptyset$, no afecta a la unión, por lo que no lo tenemos en cuenta. Si $U_i = X$, tenemos que la unión será X y, por tanto, también se tiene. Comprobamos por tanto el caso en que $U_i \neq \emptyset, X$ para todo i. Sean por tanto $U_i =]-\infty, b_i[$. Definimos por tanto $b = \sup_{i \in I}\{b_i\} \in \mathbb{R}$, que existe por el axioma del supremo ya que $I \neq \emptyset$. Entonces, tenemos que

$$\bigcup_{i \in I} U_i =]-\infty, b[\in \mathcal{T}$$

c) Veamos si es cerrado para intersecciones de dos abiertos. Si $U_1 = \emptyset$, entonces la intersección es $\emptyset \in \mathcal{T}$. Si $U_1 = X$, tenemos que la intersección será $U_2 \in \mathcal{T}$ y, por tanto, también se tiene. Por tanto, consideramos $U_1 =]-\infty, b_1[$ y $U_2 =]-\infty, b_2[$. Sea $b = \min\{b_1, b_2\} \in \mathbb{R}$, y tenemos que

$$U_1 \cap U_2 =]-\infty, b[\in \mathcal{T}$$

c) $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{]-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\}$.

No es una topología, ya que no es cerrado para uniones arbitrarias. Tenemos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]-\infty, -\frac{1}{n}\right] = \ ]-\infty, 0[\ \notin \mathcal{T}$$

d) X un conjunto, $\emptyset \neq A, B \subset X$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, X\}$.

En este caso, en general no se tiene. Como contraejemplo, sea $X = \{a, b, c\}$, y consideramos $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Entonces, se tiene que $A \cup B \notin \mathcal{T}$, por lo que no es cerrado para uniones.

Si $A \subset B$ o $X \setminus A = B$ se tiene.

e) X un conjunto, $\emptyset \neq A \subsetneq X$ y $\mathcal{T} = \mathcal{P}(A) \cup \{X\}$.

Comprobamos las tres condiciones para que sea un espacio topológico:

a) Trivialmente, $X \in \mathcal{T}$. Además, como $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$.

b) Veamos si es cerrado para uniones arbitrarias. Tenemos que $\mathcal{P}(A)$ es cerrado para uniones arbitrarias, por lo que comprobamos para el caso de una unión con X. En este caso, el resultado de la unión es $X \in \mathcal{T}$, por lo que se tiene.

c) Veamos si es cerrado para intersecciones de dos abiertos. Como $\mathcal{P}(A)$ es cerrado para intersecciones, tenemos que se tiene. Veamos qué ocurre en el caso de que uno de los abiertos sea X. Es decir, $U_1 = X$, $U_2 \in \mathcal{P}(A)$. Se tiene que $U_1 \cap U_2 = U_2 \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}$.

f) $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid \exists f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \cap A\}$.

Es decir, tenemos que los abiertos son, además del vacío, los conjuntos que contienen al menos una función continua. Veamos que no se trata de un espacio topológico con el siguiente contraejemplo.

Sean $f, g, h \in X$, con

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \qquad h(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} & \geqslant x\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Sean $U_1 = \{f, h\} \in \mathcal{T}$, $U_2 = \{g, h\} \in \mathcal{T}$. Tenemos que no es cerrado para intersecciones de abiertos, ya que

$$U_1 \cap U_2 = \{h\} \notin \mathcal{T}$$

Ejercicio 4.1.9. Sea X un conjunto infinito y $x_0 \in X$. Prueba que:

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid x_0 \notin U\} \cup \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\}$$

es una topología sobre X, a la que llamaremos **topología fuerte en un punto**.

Comprobamos las tres condiciones para que sea un espacio topológico:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, ya que $x_0 \notin \emptyset$. Además, $X \in \mathcal{T}$, ya que $X \setminus X = \emptyset$ es finito.
2. Veamos si es cerrado para uniones arbitrarias.

   Sea la familia $\{U_i\}_{i \in I}$.

   - Si $x_0 \notin U_i \; \forall i \in I$, tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
   - Si $X \setminus U$ es finito $\forall i \in I$, tenemos que $X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcap\limits_{i \in I} X \setminus U_i$ finita por ser la intersección de conjuntos finitos. Por tanto, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

   Por tanto, tenemos que ambos subconjuntos son cerrados para uniones arbitrarias. Veamos qué ocurre al unir un conjunto de cada tipo. Sea $U_1 \subset X$ con $x_0 \notin U_1$, y $U_2 \subset X$ tal que $X \setminus U$ finito.

   $$U_2 \subset U_1 \cup U_2 \Longrightarrow X \setminus (U_1 \cup U_2) \subset X \setminus U_2 \text{ finito}$$

   Por tanto, tenemos que $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{T}$ y, por tanto, es cerrado para uniones arbitrarias.
3. Veamos si es cerrado para intersecciones de dos abiertos.

   Sean $U_1, U_2 \subset X$.

   - Si $x_0 \notin U_i \; \forall i = 1, 2$, tenemos trivialmente que $x_0 \notin U_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
   - Si $X \setminus U$ es finito $\forall i = 1, 2$, tenemos $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ finito, ya que la unión finita de conjuntos finitos es finita. Por tanto, tenemos que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

   Por tanto, tenemos que ambos subconjuntos son cerrados para intersecciones finitas. Veamos qué ocurre al intersecar un conjunto de cada tipo. Sea $U_1 \subset X$ con $x_0 \notin U_1$, y $U_2 \subset X$ tal que $X \setminus U$ finito.

   $$x_0 \notin U_1 \Longrightarrow x_0 \notin U_1 \cap U_2 \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$$

   Por tanto, tenemos que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ y, por tanto, es cerrado para intersecciones finitas.

Ejercicio 4.1.10. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos U_n al conjunto de los divisores de n. En $\mathbb{N}$, se considera la siguiente familia de subconjuntos $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $U \in \mathcal{T}$ si y solo si $U_n \subset U$, para todo $n \in U$. Prueba que:

a) $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$.

Tenemos que $U \subset \mathbb{N}$ es un abierto si es cerrado para los divisores de sus elementos. Comprobamos las tres condiciones para que sea un espacio topológico:

A1) $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}$ trivialmente.

A2) Veamos si es cerrado para uniones arbitrarias.
Sea la familia $\{U^i\}_{i\in I}$, con $U^i \in \mathcal{T}$, y consideramos $A = \bigcup\limits_{i\in I} U^i$. Veamos si $A \in \mathcal{T}$. Dado $n \in A$, tenemos que comprobar que $U_n \subset A$. Como $n \in A$, tenemos que $\exists i \in I$ tal que $n \in U^i$. Como $U^i \in \mathcal{T}$, tenemos que $U_n \subset U^i \subset A$, por lo que se tiene directamente.

A3) Veamos si es cerrado para intersecciones de dos abiertos. Sean $A, B \in \mathcal{T}$, y consideramos $A \cap B$. Dado $n \in A \cap B$, tenemos que $n \in A, B$, por lo que $U_n \subset A, B$ y por tanto $U_n \subset A \cap B$, teniendo entonces que $A \cap B \in \mathcal{T}$.

b) $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{T}$.

Usando la Proposición 1.12, tenemos que $\mathcal{B}$ es una base si y solo si para todo $U \in \mathcal{T}$, se tiene que dado $n \in U$, $\exists B_n \in \mathcal{B}$ con $n \in B_n \subset U$.

Como $U \subset \mathbb{N}$, tenemos precisamente que $B_n = U_n \in \mathcal{B}$, ya que $n \in U_n$ por ser n un divisor (trivial) de n y, por ser $U \in \mathcal{T}$, tenemos que $U_n \subset U$. Por tanto, se tiene de forma directa.

Ejercicio 4.1.11. En $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$ se considera la familia

$$\mathcal{B} = \{B[(x, y), \varepsilon] \mid y > 0, \varepsilon \in\ ]0, y[\} \cup \{(x, 0) \cup B[(x, y), y] \mid y > 0\}$$

Prueba que existe una única topología $\mathcal{T} \in H^+$ tal que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$. A este espacio topológico se le conoce como semiplano de Moore.

Aplicamos el Teorema 1.13, por lo que comprobamos ambas propiedades.

B1) Hemos de comprobar que $H^+ = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$.

Demostramos por doble inclusión:

$\subset$) Sea $(x, y) \in H^+$. Veamos que (x, y) está en uno de los abiertos básicos del segundo tipo; es decir, $(x, y) \in \{(x, 0) \cup B[(x, y), y] \mid y > 0\}$.
Si $y = 0$, se tiene directamente, ya que $(x, y) = (x, 0)$. Si $y \neq 0$, tenemos que $y > 0$ y, por tanto, $(x, y) \in B[(x, y), y]$.

$\supset$) Sea $(a, b) \in \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$. Entonces, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $(a, b) \in B$.

- Si B es del primer tipo, tenemos que $(a, b) \in B[(x, y), \varepsilon]$, con $y > 0$ y $\varepsilon \in\ ]0, y[$. Entonces,

$$d[(x, y), (a, b)] < \varepsilon \Longrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \Longrightarrow y-b < \varepsilon < y \Longrightarrow 0 < b$$

- Si B es del segundo tipo, tenemos que $b = 0$ (por lo que $(a, b) \in H^+$) o $(a, b) \in B[(x, y), y]$ con $y > 0$, por lo que:

$$d[(x, y), (a, b)] < y \Longrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < y \Longrightarrow y - b < y \Longrightarrow 0 < b$$

En ambos casos, tenemos $(a, b) \in H^+$.

B2) Hemos de demostrar que si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $(a, b) \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $(a, b) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Realizamos la siguiente distinción de casos:

a) Si $b > 0$: Supongamos que B_1, B_2 son del primer tipo. Es decir, supongamos $B_1 = B[(x, y), \varepsilon]$ y $B_2 = B[(x', y'), \varepsilon']$ con $y, y' > 0$ y $\varepsilon \in]0, y[$, $\varepsilon' \in]0, y'[$. Entonces, como las bolas abiertas son base de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$, tenemos que $\exists \delta > 0$ tal que $B[(a, b), \delta] \subset B_1 \cap B_2$. Además, de forma trivial se tiene que $\delta < b$, por lo que $\delta \in]0, b[$.

De forma análoga se demuestra para los otros casos, solo que $\delta \in]0, b]$. Por tanto, se tiene que $B_3 \in \mathcal{B}$.

b) Si $b = 0$: Tenemos que $(a, b) = (a, 0)$ y que B_1, B_2 son del segundo tipo y tienen la misma coordenada $x = a$. Es decir,

$$B_1 = \{(a, 0) \cup B[(a, y_1), y_1] \mid y_1 > 0\}$$
$$B_2 = \{(a, 0) \cup B[(a, y_2), y_2] \mid y_2 > 0\}$$

Supuesto $y_1 \leqslant y_2$, tenemos que $B_1 \subset B_2$, ya que dado $(u, v) \in B_1$, $(u, v) \neq (a, 0)$ se tiene que $d[(a, y_1), (u, v)] < y_1$ y, por la desigualdad triangular:

$$d[(a, y_2), (u, v)] < d[(a, y_2), (a, y_1)] + d[(a, y_1), (u, v)] = y_2 - y_1 + d[(a, y_1), (u, v)] <$$
$$< y_2 - y_1 + y_1 = y_2 \Longrightarrow (u, v) \in B_2$$

Por tanto, como un abierto es subconjunto del otro abierto, tenemos que $B_1 \cap B_2 \in \{B_1, B_2\}$.Tomamos por tanto $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \{B_1, B_2\} \subset \mathcal{B}$, y se tiene de forma directa.

Por tanto, como se tienen B1) y B2), se tiene que existe una única topología con esa base.

Ejercicio 4.1.12. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de un conjunto X. Demuéstrese que la familia $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, formada por los abiertos comunes a ambas, es también una topología de X. ¿Es la unión de dos topologías una topología?

Para ver si $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ es una topología, aplicamos la definición:

A1) Trivialmente $\emptyset, X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$.

A2) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$. Entonces, $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ y $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}'$. Por ser $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías, tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}, \mathcal{T}'$, por lo que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, por lo que es cerrado para uniones arbitrarias.

A3) Sea $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$. Entonces, como $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ son dos topologías, tenemos que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}, \mathcal{T}'$, por lo que es cerrado para intersecciones finitas.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ es una topología.

Veamos ahora que la unión, por norma general, no lo es. Sea $X = \{a, b, c\}$. Entonces, consideramos $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}, \mathcal{T}' = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ son dos topologías, pero la unión $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}' = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ no es una topología, ya que no es cerrada para uniones, ya que $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$.

Ejercicio 4.1.13. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los intervalos que son abiertos son los de la forma $]a, b[$, para $a \leqslant b$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ y $\mathbb{R}$; y los que son cerrados son de la forma $[a, b]$, para $a \leqslant b$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ y $\emptyset$.

Veamos en primer lugar la forma de los intervalos abiertos. Consideramos cada intervalo, y tenemos en cuenta que en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los abiertos son abiertos métricos. Es decir $U \in \mathcal{T}$ si y solo si $\forall x \in U,\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$.

1. $]a, b[$: Tenemos que $]a, b[\ = B\left(a + \dfrac{b-a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$.
2. $]a, +\infty[$: $\forall x \in]a, +\infty[$, se tiene que $x \in B\left(x, x-a\right) =]a, 2x-a[\ \subset]a, +\infty[$.
3. $]-\infty, b[$: $\forall x \in]-\infty, b[$, se tiene que $x \in B\left(x, b-x\right) =]2x-b, b[\ \subset]-\infty, b[$.
4. $\mathbb{R}$: Tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in B\left(x, \varepsilon\right) \subset \mathbb{R}$.

Para el resto de los intervalos, tenemos que al menos uno de los extremos es cerrado, por lo que para dicho extremo c, se tiene que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\ \subset I$, llegando a que no son abiertos métricos.

Una vez se tienen los abiertos, los cerrados son triviales, ya que:

1. $[a, b] = \mathbb{R} \setminus (]-\infty, a[\ \cup\ ]b, +\infty[) \in C_{\mathcal{T}}$.
2. $[a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, a[\in C_{\mathcal{T}}$.
3. $]-\infty, b] = \mathbb{R} \setminus]b, +\infty[\in C_{\mathcal{T}}$.
4. $\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$.

Para el resto de intervalos, tengo que no son abiertos al ser sus complementarios del estilo a estos últimos.

Ejercicio 4.1.14. Prueba que el conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un abierto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ mientras que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$ es un cerrado que no es abierto.

Como $\mathcal{T}$ es la topología métrica, tenemos que U es un abierto métrico si y solo si $\forall (x, y) \in U$ se tiene que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B[(x, y), \varepsilon] \subset U$. Sea $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Entonces, sea $(a, b) \in B\left[(x, y), \frac{x}{2}\right]$. Entonces:

$$d[(x, y), (a, b)] < \frac{x}{2} \Longrightarrow \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \frac{x}{2} \Longrightarrow |a - x| < \frac{x}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x - \frac{x}{2} < a < x + \frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{x}{2} < a < \frac{3x}{2} \Longrightarrow 0 < a \Longrightarrow (a, b) \in U$$

Por tanto, tenemos que U es un abierto métrico. Veamos que C es un cerrado. Tenemos que su complementario es $X \setminus C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, y exactamente con la misma bola llegamos a la misma desigualdad para el valor de a. No obstante, como ahora $x < 0$, tenemos que $a < 0$ y por tanto $(a, b) \in X \setminus C$, por lo que $X \setminus C \in \mathcal{T}$ y por tanto C es un cerrado.

Ejercicio 4.1.15. Sea X un conjunto no vacío y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de X. Demuestra que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una base de $\mathcal{T}$. Prueba que todo abierto de $\mathcal{T}$ es un cerrado.

Aplicamos el Teorema 1.13, por lo que comprobamos ambas propiedades.

B1) Por definición de partición, se tiene de forma directa que $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

B2) Sean $A_i, A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$. Por definición de partición, tenemos que $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Entonces $x \in A_i \cap A_j$ implica que $A_i = A_j$, por lo que $x \in A_i \subset A_i \cap A_j$.

Por tanto, aplicando el Teorema 1.13 se tiene que existe una única topología $\mathcal{T}$ con dicha familia como base. Veamos ahora que $\mathcal{T} = C_{\mathcal{T}}$.

Sea $U \in \mathcal{T}$. Entonces, por definición de base topológica tenemos que $U = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, con $J \subset I$. Por tanto, $X \setminus U = \bigcup\limits_{i\in I\setminus J} A_i \in \mathcal{T}$, ya que la unión de abiertos es un abierto.

Por tanto, tenemos que el complementario de un abierto es un abierto, de lo que se deduce de forma directa que $\mathcal{T} = C_{\mathcal{T}}$.

Ejercicio 4.1.16. Sobre $\mathbb{R}$, consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{T} = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{T}_u,\ V \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

Se pide:

a) Prueba que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$ que contiene a la topología usual $\mathcal{T}_u$. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ recibe el nombre de **recta diseminada**.

Comprobamos en primer lugar que es una topología:

A1) Tenemos que $\emptyset \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\emptyset \in \mathcal{T}_u$, por lo que se tiene que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Además, como $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$, tenemos que $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

A2) Sea una familia de abiertos $\{W_i\}_{i\in T}$, con $W_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$. Entonces, se tenemos que $W_i = U_i \cup V_i$, con $U_i \in \mathcal{T}_u$, $V_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces:

$$\bigcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I} U_i \cup V_i = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \overset{(*)}{=} U \cup V \in \mathcal{T}$$

donde en $(*)$ he aplicado $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_u$ por ser la unión de abiertos un abierto, y que $V = \bigcup\limits_{i\in I} V_i \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ya que $V_i \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\forall i \in I$.

A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_u$, $V_1, V_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Entonces, $U_1 \cup V_1, U_2 \cup V_2 \in \mathcal{T}$. Entonces:

$$\begin{aligned}(U_1 \cup V_1) \cap (U_2 \cup V_2) &= [(U_1 \cup V_1) \cap U_2] \cup [(U_1 \cup V_1) \cap V_2] = \\ &= [(U_1 \cap U_2) \cup (V_1 \cap U_2)] \cup [(U_1 \cup V_1) \cap V_2] = \\ &= [(U_1 \cap U_2)] \cup (V_1 \cap U_2) \cup [(U_1 \cup V_1) \cap V_2] \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

donde he indicado que es un abierto por ser $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_u$ por ser intersección de dos abiertos y ser $(V_1 \cap U_2) \cup [(U_1 \cup V_1) \cap V_2] \subset V_1 \cup V_2 \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Por tanto, tenemos que efectivamente se tiene que $\mathcal{T}$ es una topología. Además, considerando $V = \emptyset$ se tiene trivialmente que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$.

b) Prueba que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d[$ con $d \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Tenemos que $\mathbb{R}\setminus[a, b] =]-\infty, a[\ \cup\ ]b, +\infty[\in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$, por lo que $[a, b] \in C_{\mathcal{T}}$. Veámoslo para $[c, d[$:

$$\mathbb{R}\setminus[c, d[\ =\ ]-\infty, c[\ \cup\ [d, +\infty[\ =\ ]-\infty, c[\ \cup\ ]d, +\infty[\ \cup\ \{d\} \in \mathcal{T}$$

donde he indicado que es un abierto, ya que $]-\infty, c[\ \cup\ ]d, +\infty[\ \in \mathcal{T}$ y $\{d\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Por tanto, $[c, d[\ \in C_{\mathcal{T}}$.

c) Calcula una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Recordamos que una base de entornos de x es una familia de entornos de x tal que $\forall N \in N_x$, $\exists V \in \beta_x \mid x \in V \subset N$. Recordamos también que un entorno de x es un conjunto $N \subset \mathbb{R}$ tal que $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$.

En el caso de que $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, tenemos que $\{x\} \in \mathcal{T}$, por lo que $\{x\} \in N_x$. Por tanto, tenemos que $\beta_x = \{x\}$ es una base de entornos de x.

En el caso de $x \in \mathbb{Q}$, tenemos que una base de entornos suya coincide con una base de entornos suya en $\mathcal{T}_u$, es decir, $\beta_x =\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto, tenemos que:

$$\beta_x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} & \text{si } x \in \mathbb{Q}\end{cases}$$

d) Calcula el interior, la clausura y la frontera de los intervalos $A = [0, 1]$ y $B = [0, \sqrt{2}[$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Demostramos en primer lugar que $A^\circ =]0, 1[$:

$\subset$) Tenemos que $A^\circ \subset A = [0, 1]$.

Veamos que $0 \notin A^\circ$. Supongamos que $0 \in A^\circ$. Entonces, $\exists W \in \mathcal{T}$ con $x \in W \subset A$. Sea $W = U \cup V$, con $U \in \mathcal{T}_u$, $V \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Como $0 \in \mathbb{Q}$, tenemos que $x \in U$. Por tanto, $\exists U \in \mathcal{T}_u$, con $0 \in U \subset [0, 1]$, lo cual es trivialmente una contradicción. Análogamente, se tiene que $1 \notin A^\circ$. Por tanto, deducimos que $A^\circ \subset\ ]0, 1[$.

$\supset$) Como $]0,1[\ \in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$, tenemos que $]0,1[\subset A^\circ$.

Por tanto, tenemos que $A^\circ =]0,1[$. Además, en el segundo apartado hemos probado que $A \in C_\mathcal{T}$, por lo que $A = \overline{A} = [0,1]$. Por tanto, tenemos que:

$$A^\circ =]0,1[, \quad \overline{A} = [0,1], \quad \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \{0,1\}$$

Trabajamos ahora con B. De manera análoga al caso anterior, tenemos que $0 \notin B^\circ$, por lo que $B^\circ \subset]0,\sqrt{2}[$, pero como $]0,\sqrt{2}[\ \in \mathcal{T}$, tenemos que $B^\circ = \ ]0,\sqrt{2}[$. Además, en el segundo apartado hemos probado que $B \in C_\mathcal{T}$, ya que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por tanto, tenemos que $\overline{B} = B$. Por tanto,

$$B^\circ =]0,\sqrt{2}[, \quad \overline{B} = [0,\sqrt{2}[, \quad \partial B = \overline{B} \setminus B^\circ = \{0\}$$

e) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $\{x\}$ en $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Veamos en primer lugar que $\{x\} \in C_\mathcal{T}$:

$$\mathbb{R} \setminus \{x\} =]-\infty, x[\ \cup\ ]x,+\infty[\in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$$

Por tanto, tenemos que $\{x\} \in C_\mathcal{T}$, por lo que $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Calculamos ahora su clausura. En el caso de que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tenemos que $\{x\} \in \mathcal{T}$, por lo que $[\{x\}]^\circ = \{x\}$. Supongamos $x \in \mathbb{Q}$, y por reducción al absurdo supongamos $\exists W \in \mathcal{T}$ con $x \in W \subset \{x\}$, por lo que $W = \{x\}$. No obstante, $\{x\} \notin \mathcal{T}$, por lo que llegamos a un absurdo y tenemos que $N_x = \emptyset$, por lo que $[\{x\}]^\circ = \emptyset$. Por tanto, tenemos que:

$$[\{x\}]^\circ = \begin{cases} \{x\} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \emptyset & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Aplicando la definición de frontera, tenemos que:

$$\partial\{x\} = \overline{\{x\}} \setminus [\{x\}]^\circ = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{x\} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ejercicio 4.1.17. Sobre $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\quad \bigcup \quad]n,+\infty[\ \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Prueba que existe una única topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

Hemos de comprobar que se dan las condiciones del Teorema 1.13:

B1) Se tiene de forma directa, ya que:

$$\mathbb{R} \subset \left(\bigcup_{x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\cup\ ]n,+\infty[\right) \subset \bigcup_{x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\subset \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}$$

Por doble inclusión se tiene de forma directa.

B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, consideramos $z \in B_1 \cap B_2$, por lo que $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$z \in \left(\left] x_1 - \frac{1}{n_1}, x_1 + \frac{1}{n_1} \right[\ \bigcup \ ]n_1, +\infty[\right) \bigcap \left(\left] x_2 - \frac{1}{n_2}, x_2 + \frac{1}{n_2} \right[\ \bigcup \ ]n_2, +\infty[\right)$$

Calculamos la intersección:

$$B_1 \cap B_2 = \left] \max\left\{ x_1 - \frac{1}{n_1}, x_2 - \frac{1}{n_2} \right\}, \min\left\{ x_1 + \frac{1}{n_1}, x_2 + \frac{1}{n_2} \right\} \right[\ \bigcup \ \bigcup \ ]\max\{n_1, n_2\}, +\infty[$$

Definimos por tanto $a, c \in \mathbb{R}$, $b, d, e \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$B_1 \cap B_2 = \left] a + \frac{1}{b}, c + \frac{1}{d} \right[\ \bigcup \ ]e, +\infty[$$

Distinguimos en función de dónde se encuentre $z \in B_1 \cap B_2$:

- $z \geqslant e$.
  Entonces, definimos $n_3 = e$, y sea el abierto básico

  $$B_3 = \left] (n_3 + 1) - \frac{1}{n_3}, (n_3 + 1) + \frac{1}{n_3} \right[\ \bigcup \ ]n_3, +\infty[=]n_3, +\infty[$$

  Tenemos que $z \in B_3$, y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, ya que $n_3 = e \geqslant n_1, n_2$.
- $z < e$.
  Como $z < e$, tenemos que $a - \frac{1}{b} < z < c + \frac{1}{d}$. Por tanto, elijo $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$z - \frac{1}{n_3} > a - \frac{1}{b} \qquad z + \frac{1}{n_3} < c + \frac{1}{d}$$

  Esto siempre es posible, ya que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \to 0$. Veamos además que $n_3 > n_1$:

  $$\begin{cases} z - \frac{1}{n_3} > a - \frac{1}{b} \geqslant x_1 - \frac{1}{n_1} \Longrightarrow z - \frac{1}{n_3} + \frac{2}{n_1} \geqslant x_1 + \frac{1}{n_1} \\ \\ z + \frac{1}{n_3} < c + \frac{1}{d} \leqslant x_1 + \frac{1}{n_1} \end{cases}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$z + \frac{1}{n_3} \leqslant x_1 + \frac{1}{n_1} \leqslant z - \frac{1}{n_3} + \frac{2}{n_1} \Longrightarrow \cancel{z} + \frac{1}{n_3} \leqslant \cancel{z} - \frac{1}{n_3} + \frac{2}{n_1} \Longrightarrow \frac{2}{n_3} \leqslant \frac{2}{n_2} \Longrightarrow n_3 \geqslant n_1$$

  Por tanto, tenemos que $n_3 \geqslant n_1$. Análogamente tenemos que $n_3 \geqslant n_2$, por lo que $n_3 \geqslant \max\{n_1, n_2\}$. Por tanto, tenemos que

  $$]n_3, +\infty[\ \subset \ ]\max\{n_1, n_2\}, +\infty[\ = \ ]e, +\infty[$$

  Por tanto, definimos $B_3 = \left] z - \frac{1}{n_3}, z + \frac{1}{n_3} \right[\ \bigcup \ ]n_3, +\infty[$, y tenemos que $z \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

b) Calcula una base de entornos en $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{T}$ no trivial.

En primer lugar, hemos de notar que los abiertos de $\mathcal{T}$ no están acotados superiormente. Además, decimos que $N \in N_x$ si $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Como U no está acotado, los entornos de x tampoco lo están. Por tanto, una base de entornos de x es:

$$\beta_x = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, +\infty\right[\ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos que β_x es una base, y en especial numerable.

c) Prueba que $]1, +\infty[$ es un abierto de $\mathcal{T}$ pero $]-\infty, 1[$ no lo es.

Veamos en primer lugar $]1, +\infty[$. Sea $n = 1$, $x \geqslant 2$. Entonces,

$$]1, +\infty[\ = \ ]x - 1, x + 1[\ \cup \ ]1, +\infty[$$

Por tanto, tenemos que $]1, +\infty[\ \in \mathcal{T}$. No obstante, $]-\infty, 1[$ no es un abierto, por no estar acotado inferiormente. Todos los abiertos están acotados inferiormente por $\min\left\{x - \frac{1}{n}, n\right\}$, pero $]-\infty, 1[$ no, por lo que no es un abierto.

d) Prueba que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_u$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

Sabemos que una base de $\mathcal{T}_u$ son las bolas abiertas. Además, los intervalos del tipo $]n, +\infty[$ también son abiertos métricos, ya que para todo $x > n$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, r) \subset]n, +\infty[$.

Por tanto, tenemos que todo $U \in \mathcal{T}$ es la unión de dos abiertos métricos. Como la unión de dos abiertos es un abierto, tenemos que $U \in \mathcal{T}_u$.

No obstante, la otra inclusión no se da, ya que $]-\infty, 1[$ es un abierto para $\mathcal{T}_u$ pero no para $\mathcal{T}$.

e) Calcula la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos $]-\infty, 2]$ y $[2, +\infty[$.

Empezamos con el intervalo $]-\infty, 2]$. Veamos en primer lugar que es un cerrado:

$$\mathbb{R} \setminus \ ]-\infty, 2] =]2, +\infty[\in \mathcal{T}$$

Por tanto, como es un cerrado, tenemos que $\overline{]-\infty, 2]} =]-\infty, 2]$. Calculemos ahora su interior. Veamos que $(]-\infty, 2])^\circ = \emptyset$.

Por reducción al absurdo, sea $x \in (]-\infty, 2])^\circ$. Entonces, por la caracterización de los puntos interiores, tenemos que $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset]-\infty, 2]$, por lo que U está acotado superiormente por el 2. No obstante, tenemos que U es un abierto, por lo que llegamos a una contradicción ya que los abiertos en esta topología no están acotados superiormente. Por tanto, se tiene que $(]-\infty, 2])^\circ = \emptyset$.

La frontera tenemos que es:

$$\partial]-\infty, 2] =]-\infty, 2] \setminus \emptyset =]-\infty, 2]$$

Trabajamos ahora con $[2,+\infty[$. Veamos que $\overline{[2,+\infty[} = \mathbb{R}$:

$\subset$) Trivial.

$\supset$) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que $[2,+\infty[\ \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, ya que los abiertos básicos tampoco están acotados superiormente, y la intersección de dos intervalos no acotados superiormente es un intervalo no acotado superiormente.

Por tanto, por la caracterización de los puntos adherentes tenemos que $x \in \overline{[2,+\infty[}$.

Veamos ahora que $([2,+\infty[)^\circ =]2,+\infty[$.

$\subset$) Tenemos que $([2,+\infty[)^\circ \subset [2,+\infty[$. No obstante, el 2 no es un punto interior, $\nexists B \in \mathcal{B}$ con $2 \in B \subset [2,+\infty[$.

$\supset$) Sea $x > 2$. Entonces, $]2,+\infty[\in \mathcal{T}$, y $x \in\ ]2,+\infty[\ \subset [2,+\infty[$, por lo que x es un punto interior.

Por tanto, tenemos que la frontera buscada es:

$$\partial[2,+\infty[= \mathbb{R}\setminus]2,+\infty[\ =\ ]-\infty,2]$$

Ejercicio 4.1.18. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Prueba que, para cada punto $x \in X$, la familia:

$$\beta_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

es una base de entornos abiertos del punto x.

Para demostrar que β_x es una base de entornos, tenemos que ver que dado $N \in N_x$, entonces $\exists B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subset V$.

Como tenemos que $N \in N_x$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Por ser $\mathcal{B}$ una base de la topología, tenemos que $U = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$, por lo que $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = U \subset N$$

Por tanto, tenemos que β_x es una base de entornos.

Ejercicio 4.1.19. En $\mathbb{R}^2$ se considera para cada $z \in \mathbb{R}^2$, la familia de conjuntos $\beta_z = \{\{z\} \cup A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, donde A_ε es una bola abierta de centro z y radio ε a la que se le han quitado un número finito de radios. Demuestra que β_z es una base de entornos de z para alguna topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$. $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ recibe el nombre de **plano agrietado**.

En primer lugar, dado $z \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, I \subset \mathbb{R}$, seguiremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} R^{\varepsilon,z} &= \{\text{Conjunto de radios de la bola } B(z,\varepsilon)\} \\ R_I^{\varepsilon,z} &= \{\text{Subconjunto de radios de la bola } B(z,\varepsilon) \text{ indexados en } I\} \subset R^{\varepsilon,z} \\ A_\varepsilon^z &= B(z,\varepsilon) \setminus R_I^{\varepsilon,z}, \ \text{ con } I \text{ finito.} \end{aligned}$$

Para ello, usamos el Teorema 1.19, por lo que comprobamos las siguientes 4 condiciones:

V1) Evidentemente, se tiene que $\beta_z \neq \emptyset$. De hecho, tiene una cantidad no numerable de elementos, ya que $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

V2) Trivialmente, se tiene que si $V \in \beta_z$, entonces $z \in V$ por definición de β_z.

V3) Sea $V_1 = \{z\} \cup A^z_{\varepsilon_1}$, $V_2 = \{z\} \cup A^z_{\varepsilon_2}$. Entonces, $V_1 \cap V_2 = \{z\} \cup (A^z_{\varepsilon_1} \cap A^z_{\varepsilon_2})$. Veamos ahora el valor de $A^z_{\varepsilon_1} \cap A^z_{\varepsilon_2}$. Tenemos que:

$$A^z_{\varepsilon_1} = B(z, \varepsilon_1) \setminus R_I^{\varepsilon_1, z}, \text{ con } I \text{ finito.}$$
$$A^z_{\varepsilon_2} = B(z, \varepsilon_2) \setminus R_J^{\varepsilon_2, z}, \text{ con } J \text{ finito.}$$

Sea ahora $\varepsilon_3 = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces,

$$A^z_{\varepsilon_1} \cap A^z_{\varepsilon_2} = B(z, \varepsilon_3) \setminus (R_I^{\varepsilon_1,z} \cup R_J^{\varepsilon_2,z}) = B(z, \varepsilon_3) \setminus (R_I^{\varepsilon_3,z} \cup R_J^{\varepsilon_3,z}) = B(z, \varepsilon_3) \setminus R_{I\cup J}^{\varepsilon_3,z}$$

Como I, J son finitos, tenemos que $I \cup J$ es finito. Por tanto, $A^z_{\varepsilon_1} \cap A^z_{\varepsilon_2} = A^z_{\varepsilon_3}$, y $V_3 = V_1 \cap V_2 = \{z\} \cup A^z_{\varepsilon_3} \in \beta_z$.

V4) Sea $V = \{z\} \cup A^z_\varepsilon = \{z\} \cup B(z, \varepsilon) \setminus R_I^{\varepsilon,z}$, con I finito. Entonces, $\exists \delta \in \mathbb{R}$, con $0 < \delta < \varepsilon$, y consideramos $V' = \{z\} \cup A^z_\delta = \{z\} \cup B(z, \delta) \setminus R_I^{\delta,z} \subset V$, ya que $A^z_\delta \subset A^z_\varepsilon$ por ser una bola centrada en el mismo punto, de menor radio, a la que se le han quitado los mismos radios.

Dado $x \in V'$, consideramos $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Notemos que $B(x, \gamma) \in \beta_x$, ya que $B(x, \gamma) = \{x\} \cup B(x, \gamma) \setminus R_I^{\delta,x}$, con $I = \emptyset$. Busquemos ahora $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \gamma) \subset V$.

Para ello, en primer lugar tenemos que, como $x \in V' \subset V$, entonces $d(x, z) < \varepsilon$, por lo que $\exists \gamma' \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(x, z) + \gamma' < \varepsilon$. De esta forma, tendríamos que $B(x, \gamma') \subset B(z, \varepsilon)$. No obstante, podríamos tener que alguno de los radios eliminados cortase a $B(x, \gamma')$, provocando que la inclusión no se dé.

Buscamos ahora $\gamma \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \gamma) \subset B(x, \gamma')$ pero que no esté cortada por ningún radio. Para ello, sabemos que $x \in A^z_\varepsilon$, por lo que no se encuentra en ningún radio eliminado. Es decir, $d(x, R_i^{\varepsilon,z}) > 0 \ \forall i \in I$. Consideramos $\gamma_i = d(x, R_i^{\varepsilon,z}) > 0$ la distancia desde x hasta cada radio medida de forma perpendicular. Entonces, sea ahora $\gamma = \text{mín}\{\gamma', \gamma_i \mid i \in I\}$, que existe por ser I finito. Tenemos por tanto que $\gamma \leqslant \gamma'$, por lo que $B(x, \gamma) \subset B(x, \gamma')$. Además, como $\gamma \leqslant \gamma_i$, tenemos que $B(x, \gamma)$ no es cortada por ningún radio. Tenemos por tanto que, dado $x \in V'$, $\exists V_x = B(x, \gamma) \in \beta_x$ y $V_x \subset V$.

Ejercicio 4.1.20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ y sea β_x una base de entornos de x. Prueba que la familia $\widetilde{\beta_x} = \{V^\circ \mid V \in \beta_x\}$ es una base de entornos abiertos del punto x.

Para ver si $\widetilde{\beta_x}$ es una base de entornos de $x \in X$, es necesario ver que $\beta_x \subset N_x$ y que dado $N \in N_x$, $\exists \widetilde{V} \in \widetilde{\beta_x}$ tal que $\widetilde{V} \subset N$.

Veamos en primer lugar que $\widetilde{\beta_x} \subset N_x$. Sea $\widetilde{V} \in \widetilde{\beta_x}$. Entonces, $\widetilde{V} = V^\circ$, con $V \in \beta_x$. Por ser $V \in \beta_x$, tenemos que $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset V$. Por tanto, como $U \subset V$, tenemos $U \subset V^\circ$, ya que el interior es el abierto más grande contiendo en V. Por tanto, tenemos que $x \in U \subset V^\circ \subset V$, por lo que $\widetilde{V} = V^\circ \in N_x$.

Sea ahora $N \in N_x$. Por ser β_x una base de entornos, tenemos que $\exists V \in \beta_x$ tal que $V \subset N$. Por definición de $\widetilde{\beta_x}$, tenemos que $\exists \widetilde{V} = V^\circ \in \widetilde{\beta_x}$, y se tiene que $V^\circ \subset V \subset N$. Por tanto, es efectivamente una base de entornos.

Ejercicio 4.1.21. En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ de la recta de Sorgenfrey, calcula la clausura de los siguientes subconjuntos:

1. $\mathbb{N}$:

   Veamos que los naturales son un conjunto cerrado. Para ello, vemos si su complementario es abierto:

   $$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{R}^- \cup [0,1[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[\right)$$

   Veamos que esa unión numerable es abierta. Para ello, vemos en primer lugar si $]n, n+1[\in \mathcal{T}_S$, con $n \in \mathbb{N}$. Esto se da si y solo si, dado $x \in]n, n+1[$, se tiene que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $[x, x+\varepsilon[\;\subset\;]n, n+1[$.

   Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $n < x < n+1$. Entonces, $(n+1) - x > 0$. Entonces, sea $\varepsilon = \frac{(n+1)-x}{2}$, y se tiene que $[x, x+\varepsilon[\;\subset\;]n, n+1[$. Claramente, $x > n$. Veamos ahora que $x + \varepsilon < n+1$:

   $$x+\varepsilon = x + \frac{(n+1)-x}{2} = \frac{(n+1)+x}{2} < n+1 \Longleftrightarrow n+1+x < 2n+2 \Longleftrightarrow x < n+1$$

   Por tanto, tenemos que dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $]n, n+1[$ es un abierto, por lo que esa unión numerable también lo es. Además, de forma análoga se demuestra que $\mathbb{R}^-$ y $[0,1[$ también lo son. Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ es un abierto, por lo que, $\mathbb{N} \in C_{\mathcal{T}_S}$. Por tanto,

   $$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$$

2. $\mathbb{Z}$:

   Veamos que los enteros son un conjunto cerrado. Para ello, vemos si su complementario es abierto:

   $$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}]z, z+1[$$

   Tenemos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ es claramente un abierto, con una demostración análoga a la del apartado anterior. Por tanto, $\mathbb{Z} \in C_{\mathcal{T}_S}$, por lo que

   $$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

3. $\mathbb{Q}$:

   Veamos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. La inclusión $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ es evidente. Veamos la otra inclusión.

   Sea $x \in \mathbb{R}$, y consideramos $U \in \mathcal{T}_s$ con $x \in U$, por lo que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $[x, x+\varepsilon[\;\subset U$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in [x, x+\varepsilon[\;\subset U$. Por tanto, se tiene que $\mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset$.

   Al ser esto para todo $U \in \mathcal{T}_s$ con $x \in U$, por la caracterización de los puntos adherentes tenemos que $x \in \overline{\mathbb{Q}}$.

4. $]a,b]$:

   Veamos que $]a,b]$ no es un cerrado. Tenemos que $\mathbb{R}\setminus\,]a,b] = \;]-\infty,a]\cup\,]b,+\infty[$, y consideramos ahora el extremo superior del primer elemento de la unión, $a\in\mathbb{R}\setminus\;]a,b]$. Tenemos que $\nexists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tal que $[a,a+\varepsilon[\;\subset\mathbb{R}\setminus\;]a,b]$, por lo que $\mathbb{R}\setminus\;]a,b]$ no es un abierto, y por tanto $]a,b]$ no es un cerrado.

   Veamos ahora que $[a,b]$ sí lo es. Su complementario $\mathbb{R}\setminus[a,b] = \;]-\infty,a[\,\cup\,]b,+\infty[$ es la unión de dos abiertos y, por tanto, es un abierto. Por tanto, $[a,b]$ es un cerrado.

   Calculemos ahora la clausura. Sea $\overline{]a,b]} = A$. Entonces, $]a,b]\subset A$. Además, como la clausura es el menor cerrado que contiene a $]a,b]$ y $[a,b]\in C_{\mathcal{T}_S}$, tenemos que $A\subset[a,b]$. Por tanto,

$$]a,b]\subset A\subset[a,b]$$

   Como la clausura es un cerrado, tenemos que $\overline{]a,b]} = A = [a,b]$.

5. $[a,b[$:

   Veamos que es un cerrado. Para ello, tenemos que su complementario es $\mathbb{R}\setminus[a,b[\;=\;]-\infty,a[\;\cup\;[b,+\infty[$, que es la unión de dos abiertos. Entonces, al ser su complementario un abierto, tenemos que $[a,b[$ es un cerrado.

   Por tanto, tenemos que $\overline{[a,b[} = [a,b[$.

6. $A = \left\{\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$:

   Veamos que A no es un cerrado:

$$\mathbb{R}\setminus A = \mathbb{R}^-\cup\{0\}\cup\;]1,+\infty[\;\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left]\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right[\right)$$

   Este conjunto no es abierto, ya que dado $0\in\mathbb{R}\setminus A$, no existe $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tal que $[0,0+\varepsilon[\subset\mathbb{R}\setminus A$, ya que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}\in\;[0,0+\varepsilon[$ por ser $\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0$.

   Por tanto, A no es un cerrado. No obstante, $A\cup\{0\}$ sí lo es, ya que su complementario es unión de abiertos.

   Por tanto, como $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, tenemos que $A\subset\overline{A}\subset A\cup\{0\}$. Como $\overline{A}$ es un cerrado, tenemos que

$$\overline{A} = A\cup\{0\} = \left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\;\{0\}$$

7. $B = \left\{-\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$:

   Veamos que es un cerrado:

$$\mathbb{R}\setminus B = \mathbb{R}^+\cup\{0\}\cup\;]-\infty,1[\;\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right[\right) =$$

$$= [0,+\infty[\cup\,]-\infty,1[\;\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right[\right)$$

En este caso, tenemos que el complementario es la unión de tres abiertos, por lo que es un abierto. Por tanto, tenemos que B es cerrado, por lo que $B = \overline{B}$.

Ejercicio 4.1.22. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ calcula la clausura, el interior y la frontera de:

1. $\mathbb{N}$:

   En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$, tenemos que $C_{\mathcal{T}_{CF}} = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ finito}\}$. Además, sabemos que $\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{N}}$, y $\overline{\mathbb{N}} \in C_{\mathcal{T}_{CF}}$. Por tanto, como $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, tenemos que $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$.

   Análogamente, calculemos ahora los abiertos de esta topología. Tenemos que $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ finito}\}$. Como $\mathbb{R}$ no es numerable, para que el complementario de A sea finito, A tampoco puede ser numerable. Como $[\mathbb{N}]^\circ \subset \mathbb{N}$ numerable, tenemos que $[\mathbb{N}]^\circ$ es numerable. Además, como $[\mathbb{N}]^\circ \in \mathcal{T}_{CF}$, tenemos que es el conjunto vacío o no es numerable. Por tanto, $[\mathbb{N}]^\circ = \emptyset$.

   Por último, por definición tenemos que $\partial\mathbb{N} = \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{Z}$:

   Sabemos que $\mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{Z}}$, y $\overline{\mathbb{Z}} \in C_{\mathcal{T}_{CF}}$. Por tanto, como $\mathbb{Z}$ es un conjunto infinito, tenemos que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

   Respecto al interior, como $[\mathbb{Z}]^\circ \subset \mathbb{Z}$ numerable, tenemos que $[\mathbb{Z}]^\circ$ es numerable. Además, como $[\mathbb{Z}]^\circ \in \mathcal{T}_{CF}$, tenemos que es el conjunto vacío o no es numerable. Por tanto, $[\mathbb{Z}]^\circ = \emptyset$.

   Por último, por definición tenemos que $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{R}$.

3. $\mathbb{Q}$:

   Sabemos que $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$, y $\overline{\mathbb{Q}} \in C_{\mathcal{T}_{CF}}$. Por tanto, como $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito, tenemos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

   Respecto al interior, como $[\mathbb{Q}]^\circ \subset \mathbb{Q}$ numerable, tenemos que $[\mathbb{Q}]^\circ$ es numerable. Además, como $[\mathbb{Q}]^\circ \in \mathcal{T}_{CF}$, tenemos que es el conjunto vacío o no es numerable. Por tanto, $[\mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$.

   Por último, por definición tenemos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

4. $B = \{0, 1\}$:

   Como B es finito, tenemos que es cerrado y, por tanto, $\overline{B} = \{0, 1\}$.

   Respecto al interior, como $B^\circ \subset B$ numerable, tenemos que B° es numerable. Además, como $B^\circ \in \mathcal{T}_{CF}$, tenemos que es el conjunto vacío o no es numerable. Por tanto, $B^\circ = \emptyset$.

   Por último, por definición tenemos que $\partial B = B = \{0, 1\}$.

Ejercicio 4.1.23. Calcula los puntos de acumulación y los puntos aislados del subconjunto A en los siguientes casos:

1. $(X, \mathcal{T}_t)$ y $A \subset X$, con $|A| \geqslant 2$.

   En primer lugar, calculamos la adherencia. Como $C_{\mathcal{T}_t} = \{\emptyset, X\}$ y $\overline{A} \in C_{\mathcal{T}_t}$, tenemos que $\overline{A} = X$.

Para ver los puntos de acumulación tenemos que, fijado $x \in X$, tenemos que el único abierto que contiene a x es X. Por tanto, $x \in A'$, ya que:

$$U \cap (A \setminus \{x\}) = X \cap (A \setminus \{x\}) = (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \qquad \forall U \in \mathcal{T}_t,\ x \in U$$

donde no es el conjunto vacío ya que $|A| \geqslant 2$.

Por tanto, $A' = X$. Por consiguiente, no tiene puntos aislados.

2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$ y $A \subseteq X$.

   Como $C_{\mathcal{T}_{disc}} = \mathcal{P}(X)$, tenemos que $A = \overline{A}$.

   Veamos los puntos aislados. Sea $x \in A$. Entonces, $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$, y $A \cap \{x\} = \{x\}$, por lo que tenemos que x es un punto aislado de A. Por tanto, tenemos que todos los elementos de A son puntos aislados.

   Sea ahora $x \in X$, y veamos si es un punto de acumulación. Como todos los puntos de A son aislados, tenemos que $x \notin A$. Además, tenemos que $\{x\}$ es un abierto en $\mathcal{T}_{disc}$. Por tanto, tenemos que $A \cap (\{x\} \setminus \{x\}) = \emptyset$, con $\{x\} \in \mathcal{T}$, $x \in \{x\}$. Por tanto, x no es un punto de acumulación, por lo que $A' = \emptyset$.

3. $(X, \mathcal{T}_{CF})$ y $A \subseteq X$ finito.

   Si X es finito, tenemos que $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_{disc}$, por lo que estamos en el caso anterior. Suponemos X infinito.

   Como A es finito, tenemos que $A = \overline{A}$. Dado $x \in A$, para ver los puntos aislados, sabemos que $A \setminus \{x\}$ es finito. Por tanto, consideramos el siguiente abierto:
   $$U = X \setminus (A \setminus \{x\}) = (X \setminus A) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{CF}$$

   Por tanto, tenemos que $A \cap U = A \cap [(X \setminus A) \cup \{x\}] = \{x\}$. Por tanto, tenemos que x es un punto aislado de A. Es decir, todos los puntos de A son aislados.

   Sea ahora $x \in X$, y veamos si es un punto de acumulación. Como todos los puntos de A son aislados, tenemos que $x \notin A$. Además, como A es finito, tenemos que $X \setminus A \in \mathcal{T}_{CF}$. Entonces:

   $$A \cap ((X \setminus A) \setminus \{x\}) = A \cap (X \setminus (A \cup \{x\})) = \emptyset$$

   Entonces, $x \notin A'$, y por tanto $A' = \emptyset$.

4. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ y $A =]0, 1]$.

   Como $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, que no es un abierto. No obstante, $[0, 1]$ sí es un cerrado, por lo que $\overline{A} = [0, 1]$.

   Para $1 \in \overline{A}$, tenemos que $U = [1, 2[$. Además, $U \cap A = \{1\}$, por lo que tenemos que 1 es un punto aislado de A.

   Para $x \in \overline{A} \setminus \{1\} = [0, 1[$, tenemos que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{T}_S$ y $x \in U$. Esto se debe a que, como $U \in \mathcal{T}$, entonces $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ con $x + \frac{\varepsilon}{n} \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $x + \frac{\varepsilon}{n} \in A$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, ya que $\frac{\varepsilon}{n} > 0$ y $\left\{\frac{\varepsilon}{n}\right\} \to 0$. Por tanto, $A' = [0, 1[$.

Ejercicio 4.1.24. ¿Para qué espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ se cumple que X es el único subconjunto denso?

Nos pide que para qué espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ se cumple que, dado $A \subseteq X$, se tiene que $\overline{A} = X \Longrightarrow A = X$.

Dado $x \in X$ veamos que $\{x\} \in \mathcal{T}$. Para ello, razonamos con que $X \setminus \{x\} \in C_{\mathcal{T}}$. Veámoslo:

$$X \setminus \{x\} \subset \overline{X \setminus \{x\}} \subset X$$

Como $X \neq X \setminus \{x\}$, entonces, $X \setminus \{x\}$ no es denso, por lo que $\overline{X \setminus \{x\}} \neq X$. Por tanto, tenemos que $X \setminus \{x\} = \overline{X \setminus \{x\}}$, teniendo entonces que es un cerrado.

Por tanto, tenemos que $\{x\} \in \mathcal{T}$ para todo $x \in X$; y como la unión de abiertos es un abierto, se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Por tanto, se tiene que la topología es la discreta, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

Ejercicio 4.1.25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y D un subconjunto denso de $(X, \mathcal{T})$. Demuestra que para todo subconjunto abierto $A \subset X$ se tiene $\overline{D \cap A} = \overline{A}$.

$\subset$) Tenemos que $\overline{D \cap A} \subset \overline{D} \cap \overline{A}$. Como D es denso, tenemos que $\overline{D} = X$, por lo que:

$$\overline{D \cap A} \subset \overline{D} \cap \overline{A} = X \cap \overline{A} = \overline{A}$$

$\supset$) Sea $x \in \overline{A}$. Entonces, por la caracterización de los puntos adherentes tenemos que $A \cap U \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{T}$, con $x \in U$. Además, como A, U son abiertos, tenemos que su intersección es un abierto.

Como D es denso, tenemos que $\overline{D} = X$. Por tanto, $U' \cap D \neq \emptyset$ para todo $U' \in \mathcal{T}$. Tomando $U' = A \cap U$ dependiente de U, tenemos que

$$\emptyset \neq (A \cap U) \cap D = (A \cap D) \cap U \neq \emptyset, \quad \forall U \in \mathcal{T}, \ x \in U$$

Habiendo llegado por tanto a que $x \in \overline{A \cap D}$.

Ejercicio 4.1.26. Prueba que en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ se verifica:

a) $\overline{B(x, \varepsilon)} = \overline{B}(x, \varepsilon)$.

$\subset$) Como $B(x, \varepsilon) \subset \overline{B}(x, \varepsilon) \in C_{\mathcal{T}_u}$, y la clausura se define como el menor cerrado que contiene a $B(x, r)$, tenemos que $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset \overline{B}(x, \varepsilon)$.

$\supset$) Sea $y \in \overline{B}(x, \varepsilon)$, por lo que $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Si $d(x, y) < \varepsilon$, tenemos que $y \in B(x, \varepsilon) \subset \overline{B(x, \varepsilon)}$. Supongamos por tanto que $d(x, y) = \varepsilon$.

Veamos que $B(x, \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \beta_y$ base de entornos de y. Notemos $V = B(y, \delta)$, con $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Para ver que $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta) \neq \emptyset$, consideramos $z = tx + (1 - t)y$, con $t \in \mathbb{R}$. Veamos si $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que z pertenezca a ambas bolas.

Tenemos que $z \in B(x, \varepsilon)$ si y solo si $d(x, z) < \varepsilon$. En este punto, aplicamos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - tx - (1 - t)y\| = |1 - t| \cdot \|x - y\| = |1 - t| \cdot d(x, y) = \varepsilon \cdot |1 - t|$$

Por tanto,

$$z \in B(x,\varepsilon) \Longleftrightarrow d(x,z) < \varepsilon \Longleftrightarrow |1-t| < 1 \Longleftrightarrow |t| \in]0,2[.$$

Análogamente, tenemos que $z \in B(y,\delta)$ si y solo si $d(y,z) < \delta$. Usando que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico:

$$d(y,z) = \|z-y\| = \|tx + (1-t)y - y\| = \|tx - ty\| = |t| \cdot d(x,y) = \varepsilon \cdot |t|$$

Por tanto,

$$z \in B(y,\delta) \Longleftrightarrow d(y,z) < \delta \Longleftrightarrow \varepsilon \cdot |t| < \delta \Longleftrightarrow |t| < \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Por tanto, necesitamos $0 < t < \text{mín}\left\{2, \dfrac{\delta}{\varepsilon}\right\}$, que es posible ya que ambos números son positivos y por la densidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Por tanto, como $\forall \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ hemos encontrado que $\exists t \in \mathbb{R}$ que cumple que z pertenece a ambas bolas, tenemos que la intersección no es nula.

Por tanto, tenemos que $y \in \overline{B}(x,\varepsilon)$.

b) $[\overline{B}(x,\varepsilon)]^\circ = B(x,\varepsilon)$.

$\subset$) Sea $y \in [\overline{B}(x,\varepsilon)]^\circ \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$. Entonces, tenemos que $d(x,y) \leqslant \varepsilon$. Si $d(x,y) < \varepsilon$, se tiene que $y \in B(x,\varepsilon)$. Veamos ahora que no se puede dar el caso de que $d(x,y) = \varepsilon$. Supongamos que sí, y llegaremos a un absurdo.

Como $y \in [\overline{B}(x,\varepsilon)]^\circ$, tenemos que $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(y,\delta) \subset B(x,\varepsilon)$. Consideramos[2] ahora $z = y + \dfrac{y-x}{\|y-x\|} \cdot \dfrac{\delta}{2}$.

Veamos que $z \in B(y,\delta)$ usando que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico:

$$d(z,y) = \|z-y\| = \left\| \frac{y-x}{\|y-x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right\| = \frac{\|y-x\|}{\|y-x\|} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} < \delta \Longrightarrow z \in B(y,\delta)$$

Veamos ahora que $z \notin B(x,\varepsilon)$:

$$d(x,z) = \|z-x\| = \left\| (y-x)\left(1 + \frac{\delta}{2\|y-x\|}\right) \right\| = \|y-x\| \cdot \left| 1 + \frac{\delta}{2\|y-x\|} \right| = \varepsilon + \frac{\delta}{2} > \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que $z \in B(y,\delta)$, $z \notin B(x,\varepsilon)$. Por tanto, hemos llegado a un absurdo, y concluimos que no se puede dar que $d(x,y) = \varepsilon$.

$\supset$) Tenemos que $B(x,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,\varepsilon)$, por lo que:

$$B(x,\varepsilon) = [B(x,\varepsilon)]^\circ \subset [\overline{B}(x,\varepsilon)]^\circ$$

[2]Intuitivamente, desde el punto y, nos "alejamos" una cantidad $\frac{\delta}{2}$, de forma que z estará en la bola de radio δ, pero ya no estará en la bola de radio ε.

c) $\partial\overline{B}(x,\varepsilon) = \partial B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)$.

Usando que las bolas cerradas son cerrados métricos, y las bolas abiertas son abiertos métricos; y usando los dos apartados anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\partial\overline{B}(x,\varepsilon) &= \overline{\overline{B}(x,\varepsilon)} \setminus [\overline{B}(x,\varepsilon)]^\circ = \overline{B}(x,\varepsilon) \setminus B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon) \\
\partial B(x,\varepsilon) &= \overline{B(x,\varepsilon)} \setminus [B(x,\varepsilon)]^\circ = \overline{B}(x,\varepsilon) \setminus B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)
\end{aligned}$$

¿Son ciertas las igualdades anteriores en todo espacio métrico?

No, ya que tanto en el apartado a) como en el b) hemos usado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico. Por ejemplo, en (X, d_{disc}) tenemos que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{disc}$. Entonces, consideramos el contraejemplo para $\varepsilon = 1$. Entonces,

$$\begin{gathered}
\overline{B}(x,1) = X \not\subset \overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \\
[\overline{B}(x,1)]^\circ = [X]^\circ = X \not\subset B(x,1) = \{x\}
\end{gathered}$$

Ejercicio 4.1.27. Un conjunto A de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice frontera si $A \subset \partial A$. Demuestra que:

1. A es frontera $\Longleftrightarrow A^\circ = \emptyset \Longleftrightarrow \overline{X \setminus A} = X$.

   Demostramos en primer lugar la primera equivalencia:

   $\Longrightarrow$) Tenemos que $A \subset \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Además, sabemos que $A^\circ \subset A$.
   Por reducción al absurdo, sea $x \in A^\circ$. Entonces, tenemos que $x \in A$ pero $x \notin \partial A$, por lo que $A \not\subset \partial A$, llegando por tanto a una contracción. Por tanto, $A^\circ = \emptyset$.

   $\Longleftarrow$) Partimos de que $A^\circ = \emptyset$, por lo que $\partial A = \overline{A}$. Además, también sabemos que $A \subset \overline{A}$. Por tanto, tenemos que $A \subset \partial A$.

   Veamos ahora la tercera equivalencia. Sabemos que $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$. Por tanto, sabemos que:
   $$\overline{X \setminus A} = X \Longleftrightarrow A^\circ = \emptyset$$

2. En $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$, se tiene que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son conjuntos frontera.

   Para verlo, demostramos que el interior de ambos conjuntos es el conjunto vacío.

   Supongamos que no, y sea $x \in [\mathbb{Q}]^\circ$. Entonces, $\exists a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tal que $x \in]a,b[\ \subset \mathbb{Q}$. No obstante, por la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tenemos que $\exists y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $y \in]a,b[$, por lo que la inclusión vista no se puede dar, llegando por tanto a una contradicción. Tenemos que $[\mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$.

   Análogamente, tenemos que $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$.

   Por tanto, por la equivalencia vista en el apartado anterior tenemos que ambos conjuntos son frontera.

Ejercicio 4.1.28. Un conjunto A de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice enrarecido si $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$. Demuestra que:

1. Si A es enrarecido, A es frontera.

   Si A es enrarecido, tenemos que $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$. Por tanto, como $A \subset \overline{A}$, tenemos que $A^\circ \subset \left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$. Por tanto, $A^\circ = \emptyset$, por lo que A es frontera.

2. Un subconjunto frontera y cerrado es enrarecido.

   Al ser frontera, tenemos que $A^\circ = \emptyset$. Al ser cerrado, tenemos que $A = \overline{A}$. Por tanto, $\emptyset = A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$, por lo que A es enrarecido.

3. Si $U \in \mathcal{T}$, entonces ∂U es enrarecido.

   Calculamos por tanto $\left[\overline{\partial U}\right]^\circ$, y veamos si es el vacío. Por definición de frontera y sabiendo que $U \in \mathcal{T}$, tenemos que:

   $$\left[\overline{\partial U}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U^\circ}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U}\right]^\circ$$

   Veamos ahora que $\overline{U} \setminus U$ es cerrado. Tenemos que $\overline{U} \setminus U = \overline{U} \cap (X \setminus U)$. Tenemos que $U \in \mathcal{T}$, por lo que $X \setminus U \in C_\mathcal{T}$. Por tanto, tenemos que $\overline{U} \setminus U$ es la composición de dos cerrados, por lo que es un cerrado. Por tanto,

   $$\left[\overline{\partial U}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U^\circ}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U}\right]^\circ = \left[\overline{U} \setminus U\right]^\circ$$

   Expresando el complementario como una intersección, y sabiendo que el abierto de la intersección es la intersección de los abiertos, tenemos que:

   $$\left[\overline{\partial U}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U^\circ}\right]^\circ = \left[\overline{\overline{U} \setminus U}\right]^\circ = \left[\overline{U} \setminus U\right]^\circ = \left[\overline{U} \cap (X \setminus U)\right]^\circ = \left[\overline{U}\right]^\circ \cap [X \setminus U]^\circ$$

   Tenemos que $[X \setminus U]^\circ = X \setminus \overline{U}$. Por tanto, finalmente llegamos a que

   $$\left[\overline{\partial U}\right]^\circ = \left[\overline{U}\right]^\circ \cap X \setminus \overline{U}$$

   No obstante, se tiene que $\left[\overline{U}\right]^\circ \subset \overline{U}$, por lo que:

   $$\left[\overline{\partial U}\right]^\circ = \left[\overline{U}\right]^\circ \cap X \setminus \overline{U} \subset= \overline{U} \cap X \setminus \overline{U} = \emptyset$$

   Por tanto, tenemos que ∂U es enrarecido.

4. Todo subconjunto cerrado y enrarecido es la frontera de un abierto.

   Sea A cerrado y enrarecido, y comprobemos que es la frontera de un abierto. Sea el abierto $U = X \setminus A \in \mathcal{T}$, que es abierto por ser A cerrado. Veamos que $\partial U = A$.

   $$\partial U = \partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

   donde he usado que la frontera de un conjunto coincide con la frontera de su complementario. Ahora, como A es cerrado, tenemos que $\overline{A} = A$. Además, al ser enrarecido, en el primer apartado hemos visto que $A^\circ = \emptyset$. Por tanto,

   $$\partial U = \partial(X \setminus A) = \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus \emptyset = A$$

   De esta forma, hemos visto que dado un cerrado y enrarecido $A \in C_\mathcal{T}$, es la frontera de un abierto, $U \in \mathcal{T}$.

Ejercicio 4.1.29. Demuestra que todo subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ es la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Sea $C \in C_{\mathcal{T}_u}$ un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$. Tenemos que encontrar $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial A = C$.

Tenemos que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ es 2AN, por lo la topología inducida al restringir sobre C también es 2AN (por ser 2AN es hereditario). Por tanto, $\exists \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de $(C, (\mathcal{T}_u)_C)$. Definimos $A \subset C = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde $a_n \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que A es numerable, veamos ahora que es denso en C.

Por la definición de A, tenemos que $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in (\mathcal{T}_u)_C$, ya que $A \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U = \bigcup\limits_{j\in J\subset\mathbb{N}} B_j$. Por tanto, tenemos que es denso.

Por tanto, hemos demostrado que $(C, (\mathcal{T}_u)_C)$ es separable, y el conjunto denso en C y numerable que contiene es A. Es decir, $A \subset C$ con $\overline{A}^C = C$. Veamos que su cierre en $\mathbb{R}^2$ también es C, es decir, $\overline{A} = C$.

$\subset$) Como $A \subset C$, entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Como C es cerrado, tenemos que $C = \overline{C}$, por lo que $\overline{A} \subset C$.

$\supset$) Como $\overline{A}^C = \overline{A} \cap C = C$, tenemos que $C \subset \overline{A}$.

Por tanto, tenemos que $\overline{A} = C$. Veamos ahora que $A^\circ = \emptyset$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x \in A^\circ$. Entonces, $\exists z \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(z, \varepsilon) \subset A$, pero esto no es posible ya que las bolas son no numerables y A es numerable. Por tanto, $A^\circ = \emptyset$.

Entonces, tengo que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = C \setminus \emptyset = C$.

Ejercicio 4.1.30. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup\limits_{i\in I} [A_i]^\circ = X$. Entonces, $U \in \mathcal{T}$ si y solo si se tiene que $U \cap A_i \in \mathcal{T}_{A_i}, \quad \forall i \in I$.

$\Longrightarrow$) Trivial por definición de la topología inducida.

$\Longleftarrow$) Veamos que $U \in \mathcal{T}$. Dado $i \in I$, tenemos que $[A_i]^\circ \in \mathcal{T}$, por lo que por definición de topología inducida se tiene que $[A_i]^\circ \cap A_i = [A_i]^\circ \in \mathcal{T}_{A_i}$. Además, tenemos que $U \cap A_i \in \mathcal{T}_{A_i}$. Como la intersección de dos abiertos es un abierto, tenemos que $U \cap A_i \cap [A_i]^\circ = U \cap [A_i]^\circ \in \mathcal{T}_{A_i}$.

Como $U \cap [A_i]^\circ \in \mathcal{T}_{A_i}$, por definición de topología inducida se tiene que $\exists V_i \in \mathcal{T}$ (tiene el subíndice i ya que depende del valor inicial escogido) tal que $U \cap [A_i]^\circ = V_i \cap A_i$.

Veamos ahora las uniones en I, para las cuales lo anterior es cierto, ya que era cierto para i cualquiera. Veamos primero que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$:

$$X = \bigcup_{i\in I} [A_i]^\circ \subset \bigcup_{i\in I} A_i \subset X$$

Tenemos por tanto los dos siguientes resultados:

$$\bigcup_{i\in I} (V_i \cap A_i) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \bigcap X = \bigcup_{i\in I} V_i$$

$$\bigcup_{i\in I}(U\cap[A_i]^\circ)=U\bigcap\left(\bigcup_{i\in I}[A_i]^\circ\right)=U\bigcap X=U$$

Como $U\cap[A_i]^\circ=V_i\cap A_i$ para todo $i\in I$, tenemos que:

$$U=\bigcup_{i\in I}(U\cap[A_i]^\circ)=\bigcup_{i\in I}(V_i\cap A_i)=\bigcup_{i\in I}V_i\in\mathcal{T}$$

donde sabemos que es un abierto por ser unión de abiertos.

Ejercicio 4.1.31. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A\subset X$ un subconjunto no vacío. Sea $a\in A$ y β_a una base de entornos de a en $(X,\mathcal{T})$. Prueba que la familia

$$(\beta_A)_a=\{B\cap A\mid B\in\beta_a\}$$

es una base de entornos de a en $(A,\mathcal{T}_A)$.

Demostrado en la Proposición 1.28.

Ejercicio 4.1.32. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, $A\subset X$ un subconjunto no vacío y $B\subset A$. Prueba que:

1. $B^\circ\cap A\subset B^{\circ A}$. Da un ejemplo de que en general no se tiene la igualdad.

   Demostrado en la Proposición 1.28.

2. $\partial_A(B)\subset A\cap\partial(B)$. Da un ejemplo de que en general no se tiene la igualdad.

   Demostrado en la Proposición 1.28.

Ejercicio 4.1.33. Consideremos el conjunto $A=[-1,0[\ \cup\ ]0,2[\ \cup\{3\}$ de $\mathbb{R}$ con la topología $(\mathcal{T}_u)_A$ inducida en A por $\mathcal{T}_u$.

1. Estudia si los conjuntos $\{3\}$ y $]0,2[$ son abiertos o cerrados en $(A,(\mathcal{T}_u)_A)$.

   Los tres apartados de este ejercicio los resolvemos aplicando la Proposición 1.28.

   Tenemos que $\{3\}=A\cap\ \left]\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right[$, siendo ese intervalo un abierto en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$. Por tanto, $\{3\}\in(\mathcal{T}_u)_A$. Además, $\{3\}=A\cap\ \left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$, siendo ese intervalo cerrado un cerrado en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$. Por tanto, $\{3\}\in C_{(\mathcal{T}_u)_A}$. Es decir, es cerrado y abierto a la vez.

   Veamos ahora $]0,2[$. Tenemos que $]0,2[=A\cap\ ]0,2[$, siendo este un intervalo abierto y, por tanto, un abierto en esta topología. Por tanto, $]0,2[\in(\mathcal{T}_u)_A$. Además, $]0,2[=A\cap\ [0,2]$, siendo este un intervalo cerrado y, por tanto, un cerrado en esta topología. Por tanto, $]0,2[\in C_{(\mathcal{T}_u)_A}$. Es decir, también es cerrado y abierto simultáneamente.

2. Comprueba si $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ es entorno de -1 en $(A,(\mathcal{T}_u)_A)$.

   Tenemos que $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]=A\cap\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$, y el segundo es un entorno de -1 en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$. por tanto, por la Proposición 1.28, tenemos que sí es un entorno de -1 en $(\mathcal{T}_u)_A$.

3. Calcula la clausura de $[-1,0[$ en $(A,(\mathcal{T}_u)_A)$.

   Tenemos que $\overline{[-1,0[}^A = A \cap \overline{[-1,0[} = A \cap [-1,0] = [-1,0[$.

Ejercicio 4.1.34. Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subconjunto no vacío, e define $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ como $d_A(x,y) = d(x,y), \quad \forall x,y \in A$. Prueba que:

1. (A,d_A) es un espacio métrico.

   Para ello, y como $A \neq \emptyset$, solo falta ver que, efectivamente d_A es una distancia. Esto se obtiene de forma directa e inmediata, ya que d lo es.

2. $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{d_A}$; es decir, la topología inducida en A por $\mathcal{T}_d$ coincide con la topología asociada a d_A.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{d_A} &= \{U \subset A \mid \exists B_A(x,\varepsilon) \subset U \quad \forall x \in U\} \\
(\mathcal{T}_d)_A &= \{V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_d\} = \{V \cap A \mid \exists B(x,\varepsilon) \subset V \quad \forall x \in V\}
\end{aligned}$$

   Demostramos la igualdad por doble inclusión:

   $\subset$) Sea $U \in (\mathcal{T}_d)_A$. Entonces, $U = V \cap A$, con $V \in \mathcal{T}_d$; es decir, existe una bola $B(x,\varepsilon) \subset V$ para todo $x \in V$.

   Como $U \subset V$, tenemos que $\exists B(x,\varepsilon) \subset V$ para todo $x \in U$. Por tanto, $B(x,\varepsilon) \cap A \subset V \cap A = U$. Además, tenemos que $B(x,\varepsilon) \cap A = B_A(x,\varepsilon)$, por lo que tenemos que $\exists B_A(x,\varepsilon)$ tal que $B_A(x,\varepsilon) \subset U$.

   Por tanto, $U \in \mathcal{T}_{d_A}$.

   $\supset$) Sea $U \in \mathcal{T}_{d_A}$, por lo que $\exists B_A(x,\varepsilon) = B(x,\varepsilon) \cap A \subset U$ para todo $x \in U$. Veamos ahora que:

$$U = \bigcup_{x \in U} (B(x,\varepsilon) \cap A) = A \bigcap \bigcup_{x \in U} B(x,\varepsilon)$$

   donde $B(x,\varepsilon) \cap A \subset U$, que hemos visto que existe por ser $U \in \mathcal{T}_{d_A}$.

   $\subset$) Sea $x \in U \subset A$, por lo que $x \in A$. Además, $x \in B(x,\varepsilon)$. Por tanto, x está en la unión descrita.

   $\supset$) Sabemos que $B(x,\varepsilon) \cap A \subset U$ para todo $x \in U$. Como la unión es en $x \in U$, tenemos que la unión sigue siendo un subconjunto de U.

   Por tanto, tenemos que $U = V \cap A$, con $V = \bigcup\limits_{x \in U} B(x,\varepsilon)$ unión de abiertos, por lo que $V \in \mathcal{T}_d$.

Ejercicio 4.1.35. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno $V \in N_x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geqslant n_0$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x diremos $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y diremos que x es un límite de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prueba las siguientes afirmaciones:

a) En un espacio topológico Hausforff (T2), una sucesión convergente tiene un único límite.

   Está demostrado en la Proposición 1.31.

b) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $x \in X$ y β_x una base de entornos de x. Entonces $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ si y solo si para todo $B \in \beta_x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geqslant n_0$.

$\Longrightarrow$) Como x es un límite de la sucesión, tenemos que se cumple la condición del enunciado para todo $N \in N_x$. Como $\beta_x \subset N_x$, tenemos que también se cumple para todo $B \in \beta_x$.

$\Longleftarrow$) Tenemos que la condición del enunciado se cumple para todo entorno básico. Veamos que se cumple también para todo entorno.

Sea $N \in N_X$. Entonces, por definición de base de entornos, tenemos que $\exists B \in \beta_x$ tal que $B \subset N$. Por hipótesis, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in B \subset N$ para todo $n \geqslant n_0$, por lo que se tiene.

c) En un espacio $(X, \mathcal{T}_t)$ con la topología trivial, cualquier sucesión en X converge a todos los puntos de X (una sucesión puede converger a más de un punto).

Tenemos que $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$. Dado $x \in X$, calculemos en primer lugar N_x. Tenemos que $N \in N_x$ si y solo si $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Como $x \in U$, entonces $U \neq \emptyset$, por lo que $U = X$. Como $X = U \subset N$, tenemos que $N = X$. Por tanto, hemos visto que dado $x \in X$, $N_x = \{X\}$.

Veamos ahora que, dado $x \in X$, cualquier sucesión en X converge a x. Como $N_x = \{X\}$ y $x_n \in X$, tenemos que $\forall N \in N_x$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para todo $n \geqslant n_0$. Podemos tomar $n_0 = 1$, por ejemplo.

d) Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Entonces, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(X, \mathcal{T}_d)$ si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$.

Tenemos que, dado $x \in X$, una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T}_d)$ son las bolas abiertas que contiene a x. Es decir, $\beta_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Entonces, por el apartado b) de este ejercicio, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in \lim_{n\to\infty} x_n &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x, \varepsilon) \quad \forall n \geqslant n_0 \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid d(x, x_n) < \varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0 \end{aligned}$$

e) En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$ prueba que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si y solo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para todo $n \geqslant n_0$.

$\Longrightarrow$) Supongamos que x es un límite de la sucesión. Entonces, tenemos que $\forall N \in N_x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para todo $n \geqslant n_0$.

En concreto, y como $\{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\} \subset N_x$ tenemos que $\forall U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geqslant n_0$.

Consideramos ahora el conjunto $U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$. Veamos ahora su complementario:

$$\mathbb{R}\backslash U = \mathbb{R}\backslash(\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cap \mathbb{R}\backslash\{x\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}\backslash\{x\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\backslash\{x\}$$

Por tanto, tenemos que $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable, ya que $\mathbb{R}$ no es numerable pero U sí. Por tanto, $U \in \mathcal{T}_{CF}$. Además, claramente $x \in U$. Por tanto, y aplicando que la sucesión converge a x, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ para todo $m \geqslant n_0$.

Como $x_m \in U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$, tenemos que $x_m = x$ para todo $m \geqslant n_0$, quedando por tanto demostrado lo pedido.

$\Longleftarrow$) Como $x \in N$ para todo $N \in N_x$, se tiene de forma directa.

Notemos que en la demostración tan solo se usa que $\mathbb{R}$ no es numerable, por lo que este resultado es cierto para todo $(X, \mathcal{T}_{CF})$ con X no numerable.

f) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en A que converge a un punto $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$.

   Como x es un límite, tenemos que para todo $N \in N_x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in N$ para todo $n \geqslant n_0$.

   Por tanto, tenemos que $N \cap A \neq \emptyset$, ya que $\{a_n \mid n \geqslant n_0\} \subset N \cap A$. Por tanto, tenemos que $x \in \overline{A}$.

g) Sea $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si $x \in A^\circ$ entonces para cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para $n \geqslant n_0$.

   Sea una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Entonces, para todo $N \in N_x$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para $n \geqslant n_0$.

   Veamos por tanto si $A \in N_x$. Esto solo ocurrirá si $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset A$, y ese abierto es $U = A^\circ$.

h) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico 1AN, $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $x \in \overline{A}$. Entonces, existe una sucesión de puntos de A que converge a x. Da un contraejemplo de que esto no tiene por qué ser cierto si $(X, \mathcal{T})$ no es 1AN.

   Por ser 1AN, tenemos que todo punto, en concreto x, tiene una base de entornos numerable. Sea dicha base $\overline{\beta_x} = \{\overline{V}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Definimos ahora la familia $\beta_x = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de la forma $V_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{V}_k$. Por el apartado 2 de la Proposición 1.32, tenemos que es una base de entornos en la que $V_i \subset V_j$ para todo $i > j$. Además, es numerable.

   Además, como $x \in \overline{A}$, tenemos que $A \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in N_x$. En concreto, tenemos que $A \cap V_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Definimos entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A \cap V_n$, de forma que tenemos que $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tan solo falta por comprobar que converge a x.

   Para ello, veamos que $\forall V_n \in \beta_x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \in V_n$ para todo $m \geqslant n_0$. Equivalentemente, tenemos que ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \in V_n$ para todo $m \geqslant n_0$. Tomamos $n_0 = n$, y veamos que para $m \geqslant n_0$ se tiene que $a_m \in V_n$.

   - Si $m = n_0 = n$, entonces $a_n \in V_n$ trivialmente, por elección de a_n.

- Si $m > n_0 = n$, entonces $a_m \in V_m$ trivialmente, por elección de a_n. Además, como $m > n$, tenemos que $V_m \subset V_n$, por lo que $a_m \in V_n$.

Es decir, tenemos que $a_m \in V_n$ para todo $m \geqslant n_0 = n$. Es decir, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Para el contraejemplo, trabajamos con $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$, que se ha visto en teoría que no es 1AN por no ser $\mathbb{R}$ numerable, y consideramos $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Veamos que $\overline{A} = \mathbb{R}$:

$\subset$) Trivialmente, se tiene que $\overline{A} \subset \mathbb{R}$.

$\supset$) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces dado X numerable, $x \notin X$, se tiene:

$$A \cap \mathbb{R} \setminus X = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} \setminus X) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup X) \neq \emptyset$$

donde hemos especificado que no es vacío, ya que $\mathbb{R}$ es no numerable, y $\mathbb{Q}, X$ sí lo son, y la unión de numerables es numerable. Por tanto, como $x \notin X$ y X es numerable, tenemos que $x \in \mathbb{R} \setminus X \in \mathcal{T}_{CN}$. Como la intersección con A es no nula, tenemos que $x \in \overline{A}$.

Consideramos ahora $x = 1 \in \overline{A} \setminus A$, y supongamos que existen puntos de $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x = 1$. Por el apartado e), al ser el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$, tenemos que esto solo es posible si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = x$ para todo $n \neq n_0$. No obstante, $a_n = x = 1 \notin A$, pero $a_n \in A$, ya que es una sucesión de puntos de A. Por tanto, llegamos a una contradicción, y tenemos que dicha sucesión de puntos de A que converge a $x = 1$ no existe.

i) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico 1AN, $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que para cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para $n \geqslant n_0$. Entonces $x \in A^\circ$.

Demostramos el recíproco. Supongamos que $x \notin A^\circ$, y veamos que existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x pero que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists q \geqslant j$ tal que $x_q \notin A$.

Por ser 1AN, tenemos que todo punto, en concreto x, tiene una base de entornos numerable. Sea dicha base $\overline{\beta_x} = \{\overline{V}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definimos ahora la familia $\beta_x = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de la forma $V_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{V}_k$. Por el apartado 2 de la Proposición 1.32, tenemos que es una base de entornos en la que $V_i \subset V_j$ para todo $i > j$. Además, es numerable.

Habiendo definido entonces V_n, veamos que $V_n \setminus A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, por reducción al absurdo, supongamos que $V_n \setminus A = V_n \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Entonces, $V_n \subset A$, y $V_n \in N_x$, por lo que $A \in N_x$, llegando a una contracción, ya que $x \notin A^\circ$. Definimos cada $x_n \in \mathbb{X}$ tal que $x_n \in V_n \setminus A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos en primer lugar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Para esto, vemos que dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in V_n$ para $m \geqslant n_0$. Tomamos $n_0 = n$. Entonces:

- Si $m = n = n_0$, tenemos que $x_n \in V_n$ por elección de x_n.

- Si $m > n = n_0$, tenemos que $x_m \in V_m$. Además, como $m > n$, tenemos que $V_m \subset V_n$, por lo que $x_m \in V_n$.

Por tanto, hemos probado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Veamos ahora que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists q \geqslant j$ tal que $x_q \notin A$. De hecho, esto es siempre cierto, ya que por la elección de x_n se tiene que $x_n \notin A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, y tras haber demostrado el contrarrecíproco, se tiene lo pedido.

Ejercicio 4.1.36. Prueba que la recta de Sorgenfrey es un espacio de Haussdorf (T2) y 1AN, pero no es 2AN.

1. Veamos en primer lugar que es T2. Para ello, vemos que, dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $\exists U, U' \in \mathcal{T}_S$ con $x \in U,\ y \in Y'$ tal que $U \cap U' = \emptyset$.

   Supongamos, sin pérdida de generalidad, $x < y$. Entonces, consideramos los abiertos $U = [x, y[$, $U' = [y, y+1[$, y tenemos que $x \in U,\ y \in U'$ y $U \cap U' = \emptyset$.

2. Veamos que es 1AN; es decir, que todo punto $x \in \mathbb{R}$ tiene una base de entornos numerable. Tenemos que $\beta_x = \{[x, x+\varepsilon[\ \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$ es numerable. Veamos ahora que, efectivamente, es una base de entornos de x.

   En primer lugar, vemos que $\beta_x \subset N_x$. Como $[x, x+\varepsilon[\ \in \mathcal{T}_S$, tenemos que es un entorno. Además, sea $N \in N_x$. Entonces, $N = [x, x+\delta[$, con $\delta \in \mathbb{R}^+$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon < \delta$. Por tanto, se tiene que $x \in [x, x+\varepsilon[\ \subset [x, x+\delta[$.

   Por tanto, tenemos que es una base de entornos (numerable por ser $\varepsilon \in \mathbb{Q}$).

3. Veamos que no es 2AN. Lo hacemos por contrarrecíproco, suponiendo que sí lo es. Entonces, por la Proposición 1.33, tenemos que $\exists \mathcal{B}'$ base de $\mathcal{T}$ con $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}'$ base numerable. Como $\mathcal{B} = \{[x, y[| \ x < y, x, y \in \mathbb{R}\}$ es una base de $\mathcal{T}$, tenemos que $\exists \mathcal{B}' = \{[x_n, y_n[\ \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.

   Consideramos ahora $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, que sabemos que no es el vacío ya que $\mathbb{R}$ no es numerable. Consideramos $U = [x, x+1[$, y por ser $\mathcal{B}'$ una base, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [x_{n_0}, y_{n_0}[\ \subset [x, x+1[$. Por tanto, tenemos que $x = x_{n_0}$, llegando entonces a un absurdo por la elección de x.

Ejercicio 4.1.37. Sobre $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a < b, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Se pide:

a) Prueba que existe una única topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$.

   Usamos el Teorema 1.13. Para ello, comprobamos las siguientes condiciones:

   B1) Veamos que $\displaystyle\bigcup_{\substack{a\in\mathbb{Q}\\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} [a, b] = \mathbb{R}$:

   $\subset$) Sea $x \in \displaystyle\bigcup_{\substack{a\in\mathbb{Q}\\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} [a, b]$. Entonces, $\exists a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$\supset$) Sea $x \in \mathbb{R}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a < x$. Análogamente, por la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\exists b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < b$. Por tanto, $x \in [a, b]$, por lo que $x \in \bigcup\limits_{\substack{a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} [a, b]$.

B2) Sean $a, a' \in \mathbb{Q}$, $b, b' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de forma que $a < b, a' < b'$. Consideramos también $x \in [a, b] \cap [a', b']$. Veamos que $\exists c \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, con $c < d$ tal que $x \in [c, d] \subset [a, b] \cap [a', b']$. Calculamos la intersección:

$$[a, b] \cap [a', b'] = [\text{máx}\, a, a', \text{máx}\, b, b']$$

Entonces, notando $c = \text{máx}\{a, a'\}$, $d = \text{máx}\{b, b'\}$, tenemos que

$$x \in [c', d'] \subset [c', d'] = [a, b] \cap [a', b']$$

Además, $[c', d'] \in \mathcal{B}$, ya que el máximo de dos racionales es racional (igual con irracionales).

Por tanto, se tiene.

b) Calcula una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{T}$ no trivial.

Supongamos x racional. Entonces, una base de entornos suya es:

$$\beta_x = \left\{ \left[x, x + \frac{\pi}{n} \right] \quad | \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Supongamos x irracional. Entonces, una base de entornos suya es:

$$\beta_x = \{[a, x] \quad | \; a \in \mathbb{Q}, \; a < x\}$$

c) Prueba que $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ un espacio topológico $T2$?

Veamos en primer lugar que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$. Usando la caracterización de inclusión con las bases topológicas, tenemos que equivale a ver que, dado $]a, b[\; \in \mathcal{T}_u$, para todo $x \in \;]a, b[$ $(a < x < b)$ se tiene que $\exists [c, d] \in \mathcal{T}$ tal que $x \in [c, d] \subset]a, b[$.

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\exists c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < x$. Por la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $\exists d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < d < b$.

Por tanto, se que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$. No obstante, la otra inclusión no es cierta, ya que $[0, \pi] \notin \mathcal{T}_u$.

Por último, falta por ver si $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es T2. Para esto, vemos si dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, se tiene que $\exists U, U' \in \mathcal{T}$ con $x \in U, \; y \in U'$ con $U \cap U' = \emptyset$.

Como $\mathcal{T}_u$ es T2, tenemos que $\exists U, U' \in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ tal que $x \in U, \; y \in U'$ con $U \cap U' = \emptyset$, por lo que se tiene.

d) Calcula la clausura, el interior y la frontera de los conjuntos $[0, 1[$, $[0, \sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}$.

Veamos en primer lugar que $[0,1[$ es cerrado. Tenemos que su complementario es $\mathbb{R}\setminus[0,1[\ =]-\infty,0[\ \cup\ [1,+\infty[$. El primer intervalo es un abierto en $\mathcal{T}_u\subset\mathcal{T}$. Respecto al segundo, tenemos que:

$$[1,+\infty[\ = \bigcup_{\substack{b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ b>1}}[1,b]\in\mathcal{T}$$

Por tanto, tenemos que el segundo intervalo es una unión (no numerable) de abiertos, por lo que es un abierto. Por tanto, $\mathbb{R}\setminus[0,1[\ \in\mathcal{T}$, por lo que $[0,1[$ es un cerrado y, por tanto, $\overline{[0,1[}=[0,1[$.

Además, tenemos que $[0,1[\ = \bigcup\limits_{\substack{b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0<b<1}}[0,b]\in\mathcal{T}$, por lo que es un abierto y, por tanto, $[0,1[^\circ=[0,1[$.

Trabajamos ahora con $[0,\sqrt{2}]$. Como $\mathcal{T}_u\subset\mathcal{T}$, tenemos que $C_{\mathcal{T}_u}\subset C_{\mathcal{T}}$. Por tanto, tenemos que $[0,\sqrt{2}]\in C_{\mathcal{T}}$, por lo que $\overline{[0,\sqrt{2}]}=[0,\sqrt{2}]$.

Además, tenemos que es un abierto básico, por lo que $[0,\sqrt{2}]^\circ=[0,\sqrt{2}]$.

Veamos ahora la clausura de $\mathbb{Q}$. Como los abiertos básicos son intervalos, tenemos que $\mathbb{Q}\cap B\neq\emptyset$, para todo $B\in\mathcal{B}$ intervalo y por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, como esto es cierto $\forall x\in X$, tenemos que $\overline{Q}=\mathbb{R}$.

De igual forma, por la densidad de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\nexists B\in\mathcal{B}$ tal que $B\subset\mathbb{Q}$. Por tanto, $[\mathbb{Q}]^\circ=\emptyset$.

e) Prueba que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto discreto de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

Para ello, hemos de ver que $\mathcal{T}_{|_\mathbb{Z}}$ es la topología discreta. Sea $z\in\mathbb{Z}$, y veamos si $\{z\}\in\mathcal{T}_{|_\mathbb{Z}}$. Tenemos que $\{z\}=\left[z,z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cap\mathbb{Z}$, ya que $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$. Además, como $\frac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, tenemos que al sumarle z sigue siendo irracional y, por tanto, $\left[z,z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\in\mathcal{T}$.

Por tanto, por definición de topología inducida tenemos que $\{z\}\in\mathcal{T}_{|_\mathbb{Z}}$, y como la unión de abiertos es un abierto, tenemos que $\mathcal{T}_{|_\mathbb{Z}}=\mathcal{P}(\mathbb{Z})=\mathcal{T}_{disc}{}_{|_\mathbb{Z}}$.

f) Estudia si $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ es un espacio topológico 1AN o 2AN.

En el apartado b) de este ejercicio hemos demostrado que todo punto $x\in\mathbb{R}$ tiene una base de entornos numerable. Por tanto, $\mathcal{T}$ es 1AN. Veamos ahora si es o no 2AN.

Supongamos que sí lo es, y llegaremos a una contradicción. Por la Proposición 1.33, tenemos que $\exists\mathcal{B}'$ base numerable de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$. Es decir, $\mathcal{B}'=\{[a_n,b_n]\mid n\in\mathbb{N},\ [a_n,b_n]\in\mathcal{T}\}$ es una base de $\mathcal{T}$.

Sea ahora $b\in\mathcal{R}\setminus\mathbb{Q}$ un irracional, y consideramos $a\in\mathbb{Q}$, $a<b$. Entonces, $[a,b]\in\mathcal{T}$ por ser un abierto básico de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}'$ es una base, tenemos que $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $b\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$, por lo que $b=b_n$. Por tanto, hemos llegado

a que $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $b = b_n$; es decir, a que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es numerable, llegando a un claro absurdo.

Por tanto, tenemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es 2AN.

4.2. Aplicaciones entre Espacios Topológicos

Ejercicio 4.2.1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Diremos que una aplicación $f:(X,d)\to(Y,d')$ es lipschitziana si existe $K>0$ tal que $d'(f(x),f(y))\leqslant Kd(x,y)$ para todo $x,y\in X$. Prueba que toda aplicación lipschitziana es una aplicación continua.

Sea $x\in X$, y veamos si f es continua en dicho punto. Para cualquier $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, sea $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$. Entonces, si $d(x,x_0)<\delta$ se tiene que:

$$d'(f(x),f(x_0))\leqslant Kd(x,y)<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}<\varepsilon$$

Es decir, $f[B(x,x_0)]\subset B(f(x),\varepsilon)$. Por tanto, f es continua.

Ejercicio 4.2.2. Sean (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$. Demuestra que la aplicación $f:(X,\mathcal{T}_d)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ dada por $f(x)=d(x,A)=\inf\{d(x,a)\mid a\in A\}$ es continua.

Sea $x,y\in X$, y veamos que f es lipschitziana en dicho punto. Para todo $a\in A$:

$$f(x)=d(x,A)\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a)\Longrightarrow f(x)-d(x,y)\leqslant d(y,a)$$

Por tanto, como se tiene $\forall a\in A$, se tiene que $f(x)-d(x,y)\leqslant f(y)$ o, equivalentemente,

$$f(x)-f(y)\leqslant d(x,y)\qquad\forall x,y\in X$$

De forma análoga, se tiene que $f(y)-f(x)=-[f(x)-f(y)]\leqslant d(x,y)\ \forall x,y\in X$. Por tanto, tenemos que:

$$d(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|\leqslant d(x,y)$$

Por tanto, tenemos que f es lipschitziana con constante $K=1$. En particular, es continua.

Ejercicio 4.2.3. Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $f,g:(X,\mathcal{T})\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ aplicaciones continuas. Demostrar que las siguientes aplicaciones son continuas:

$$\begin{array}{rrcl} f+g: & (X,\mathcal{T}) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)\\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x)\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} f\cdot g: & (X,\mathcal{T}) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)\\ & x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x)\end{array}$$

Escribiremos $f+g, f\cdot g$ como una composición. Sean las siguientes aplicaciones entre espacios topológicos:

$$\begin{array}{rrcl} F: & (X,\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u\\ & x & \longmapsto & (f(x),g(x))\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} s: & (\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u) & \longrightarrow & \mathbb{R},\mathcal{T}_u\\ & (x,y) & \longmapsto & x+y\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rrcl} p: & (\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u) & \longrightarrow & \mathbb{R},\mathcal{T}_u\\ & (x,y) & \longmapsto & xy\end{array}$$

Tenemos que, para todo $x \in X$:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) = s(f(x), g(x)) = s(F(x)) = (s \circ F)(x)$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x) = p(f(x), g(x)) = (F(x)) = (p \circ F)(x)$$

Por tanto, se tiene que $f+g = s \circ F$, $fg = p \circ F$. Sabemos que s, p son continuas por ser polinómicas, veamos ahora que F lo es.

Opción 1. Usando la caracterización de la continuidad mediante bases de la topología.

En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$, consideramos la base $\mathcal{B} = \{]a,b[\times]c,d[\mid a<b,\ c<d\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} F^{-1}(]a,b[\times]c,d[) &= \{x \in X \mid F(x) \in\ ]a,b[\times]c,d[\} = \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in]a,b[\quad \wedge \quad g(x) \in]c,d[\} = \\ &= f^{-1}(]a,b[)\ \cap g^{-1}(]c,d[) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

donde tenemos que es un abierto por ser la intersección de dos abiertos, y estos dos lo son por ser f, g continuas.

Opción 2. Usando la topología producto.

Como ambas componentes de F son continuas, F también lo es.

Por tanto, como p, s, F son continuas, entonces $f+g, fg$ son continuas.

Ejercicio 4.2.4. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación. Demuestra que equivalen:

1. f es continua.
2. $f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ, \forall B \subset Y$.
3. $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B), \forall B \subset Y$.

$1 \Longrightarrow 2)$ Como f es continua, y $B^\circ \in \mathcal{T}'$, entonces $f^{-1}(B^\circ) \in \mathcal{T}$. Además, como $B^\circ \subset B$, entonces $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)$. Como el interior es el mayor abierto contenido en el conjunto, entonces:

$$f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ$$

$2 \Longrightarrow 1)$ Sea $U \in \mathcal{T}'$, por lo que $U = U^\circ$. Mediante doble inclusión, demostraremos que $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U)]^\circ$:

$\subset)$ Como $U = U^\circ$, usando 2):

$$f^{-1}(U^\circ) = f^{-1}(U) \subset [f^{-1}(U)]^\circ$$

$\supset)$ De forma directa se tiene que $[f^{-1}(U)]^\circ \subset f^{-1}(U)$.

$1 \Longrightarrow 3)$ Tenemos que $\partial(f^{-1}(B)) = \overline{f^{-1}(B)} \setminus [f^{-1}(B)]\circ$.

Veamos en primer lugar que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$. Como $B \subset \overline{B}$, entonces $f^{-1}(B) \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$, por lo que:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}\left(\overline{B}\right)} \stackrel{(*)}{=} f^{-1}\left(\overline{B}\right)$$

donde en $(*)$ he empleado que, como $\overline{B} \in C_{\mathcal{T}'}$, entonces $f^{-1}\left(\overline{B}\right) \in C_{\mathcal{T}}$.

Veamos ahora que $f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ$. Como $B^\circ \subset B$, entonces se tiene que $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)$, por lo que:

$$f^{-1}(B^\circ) \stackrel{(*)}{=} [f^{-1}(B^\circ)]^\circ \subset [f^{-1}(B)]^\circ$$

donde en $(*)$ he empleado que, como $B^\circ \in \mathcal{T}'$, entonces $f^{-1}(B^\circ) \in \mathcal{T}$.

Por tanto, se tiene que:

$$\partial(f^{-1}(B)) = \overline{f^{-1}(B)} \setminus [f^{-1}(B)]^\circ \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right) \setminus f^{-1}(B^\circ) = f^{-1}(\overline{B} \setminus B^\circ) = f^{-1}(\partial B)$$

$3 \Longrightarrow 1)$ Sea $U \in \mathcal{T}'$, por lo que $U = U^\circ$. Mediante doble inclusión, demostraremos que $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U)]^\circ$:

$\subset)$ Como $U = U^\circ$, usando 3):

$$\partial f^{-1}(U) \subset f^{-1}(\partial U) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Por tanto, $\partial f^{-1}(U) = \overline{f^{-1}(U)} \setminus [f^{-1}(U)]^\circ = \emptyset$, por lo que se tiene $f^{-1}(U) \subset [f^{-1}(U)]^\circ$.

$\supset)$ De forma directa se tiene que $[f^{-1}(U)]^\circ \subset f^{-1}(U)$.

Ejercicio 4.2.5. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$, dos espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sobreyectiva. Demuestra que si $D \subset X$ es un subconjunto denso, entonces $f(D)$ es denso en Y. Demuestra, mediante un contraejemplo, que si $f(D)$ es denso, D no tiene por qué serlo.

Demostremos que $f(D)$ es denso. Para ello, demostramos que $\overline{f(D)} = Y$.

$\subset)$ Tenemos que $f(D) \subset Y$. Por tanto, $\overline{f(D)} \subset \overline{Y} = Y$, ya que $Y \in C_{\mathcal{T}'}$.

$\supset)$ Por la caracterización de continuidad, por ser f continua tenemos que $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$. Como X es denso ($X = \overline{D}$), tenemos que $f(X) = f(\overline{D})$. Además, tenemos por ser f sobreyectiva tenemos que $f(X) = Y$. Por tanto,

$$Y = f(X) = f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$$

Por tanto, mediante doble inclusión hemos demostrado que $f(D)$ es denso.

Para ver que el recíproco no es cierto, sea $f : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (Y, \mathcal{T}_t)$, considerando $X = \{0, 1\}$ e $Y = \{y_0\}$, la aplicación constante en $y_0 \in \mathbb{R}$. Tenemos que f es continua y sobreyectiva. Tenemos que $f(\{0\}) = \{y_0\} = Y$, por lo que $f(\{0\})$ es denso. No obstante, $\overline{\{0\}} = \{0\}$, por lo que $\{0\}$ no es denso.

Ejercicio 4.2.6. Sean $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}')$, dos espacios topológicos y una aplicación $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$.

1. Demuestra que si f es continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x_0 entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x_0)$.
2. Demuestra que si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico 1AN tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0 se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $f(x_0)$, entonces f es continua.
3. Demuestra que 2) no es cierto en general si se elimina la condición 1AN.

Ejercicio 4.2.7. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\mathcal{T}$ del ejercicio 4.1.10 de la Relación 1. Caracteriza las aplicaciones continuas de $(\mathbb{N},\mathcal{T})$ en sí mismo.

Ejercicio 4.2.8. Sean $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}')$, dos espacios topológicos, $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ una aplicación. Si $A\subset X$, entonces $f_{|_A}$ puede ser continua sin que f sea continua en los puntos de A.

Esto es cierto, y ejemplo de esto es la función característica de $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rccl} f=\chi_{\mathbb{Q}}: & (\mathbb{R},\mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (\{0,1\},\mathcal{T}_{disc}) \\ & x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}$$

Tenemos que $f_{|_\mathbb{Q}}$ es constante en 1, por lo que es continua. No obstante, f no es continua en los puntos de $\mathbb{Q}$. Veámoslo.

Consideramos $x\in\mathbb{Q}$. Tenemos que $f(x)=1$, y $\{1\}\in N_1'$ por ser la topología discreta. No obstante, $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}\notin N_x$. Por tanto, hemos encontrado un entorno de $f(x)$ cuya preimagen no es un entorno de x, por lo que f no es continua en x.

Ejercicio 4.2.9 (Carácter local de la continuidad)**.** Sean $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}')$, dos espacios topológicos y una aplicación $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$. Demuestra que f es continua en x_0 si y solo si existe $U\in\mathcal{T}$ con $x_0\in U$ tal que $f_{|_U}:(U,\mathcal{T}_U)\to(Y,\mathcal{T}')$ es continua en x_0. ¿Es cierta la equivalencia anterior si sustituimos U abierto conteniendo a x_0 por C cerrado conteniendo a x_0?

$\Longrightarrow$) Sea $U=X\in\mathcal{T}$. Tenemos que $x_0\in X$, y $f_{|_U}=f$, por lo que se tiene de forma directa.

$\Longleftarrow$) Como $x_0\in U$, entonces podemos considerar $f_{|_U}(x_0)=f(x_0)$.

Sea $N'\in N_{f_{|U}(x_0)}=N_{f(x_0)}$. Entonces, por ser $f_{|_U}^{-1}$ continua en x_0, se tiene que $f_{|_U}^{-1}(N')\in N_{x_0}$ para $\mathcal{T}_{|_U}$; es decir, $f^{-1}(N')\cap U\in N_{x_0}$ para $\mathcal{T}_{|_U}$.

Entonces, por ser un entorno, tenemos que $\exists O\in\mathcal{T}_{|_U}$ tal que se tiene que $x_0\in O\subset f^{-1}(N')\cap U$, por lo que $\exists O'\in\mathcal{T}$ tal que $x_0\in O'\cap U\subset f^{-1}(N')\cap U$. Como $f^{-1}(N')\cap U\subset f^{-1}(N')$, se tiene que:

$$\exists O'\in\mathcal{T} \text{ tal que } x_0\in O'\cap U\subset f^{-1}(N')$$

Como la intersección de dos abiertos es un abierto, tenemos que $O' \cap U \in \mathcal{T}$, por lo que $f^{-1}(N') \in N_{x_0}$, por lo que f es continua en x_0.

Como un único punto es un cerrado, tenemos que al sustituir U por un cerrado no es cierto. Sea $C = \{0\}$, y la función definida por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Tenemos que $f_{\big|C}$ es constante en el 0, por lo que es continua en el $0 \in C$. No obstante, f no es continua en el 0, ya que:

$$f^{-1}\left(\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right) = \{0\} \notin N_0 \text{para la } \mathcal{T}_u.$$

Ejercicio 4.2.10. Demuestra que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}_{x_0}) \to (Y, \mathcal{T}_{y_0})$ es continua si y solo si es constante o $f(x_0) = y_0$. Deduce que $(X, \mathcal{T}_{x_0}) \cong (X, \mathcal{T}_{x_1})$ para todo par de puntos $x_0, x_1 \in X$.

$\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua, y sea un abierto básico $\{y, y_0\} \in \mathcal{T}_{y_0}$. Entonces, $f^{-1}(\{y, y_0\}) \in \mathcal{T}_{x_0}$, por lo que hay dos opciones:

$$x_0 \in f^{-1}(\{y, y_0\}) = f^{-1}(y) \cup f^{-1}(y_0) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x_0) = y \\ \vee \\ f(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

$$\emptyset = f^{-1}(\{y, y_0\}) \Longrightarrow y, y_0 \notin Im(f)$$

Es decir, tenemos que $f(x_0) = y_0$ o, para todo $y \in Y$, $f(x_0) = y$ o $y \notin f(X)$. Es decir, $f(x_0) = y_0$ o $Im(f) = \{f(x_0)\}$. Como f es una aplicación, $f(x_0)$ es único, por lo que $\|Im(f)\| = 1$.

Por tanto, $f(x_0) = y_0$ o f es constante en $f(x_0)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos $f(x_0) = y_0$, y sea $\{y, y_0\} \in \mathcal{T}_{y_0}$. Entonces,

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \in f^{-1}(\{y, y_0\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{y, y_0\}) \in \mathcal{T}_{x_0}$$

Supongamos ahora que f es constante en $k \neq y_0$.

1. Dado $y \neq k$, consideramos el abierto $\{y, y_0\} \in \mathcal{T}_{y_0}$. Entonces,

$$\emptyset = f^{-1}(\{y, y_0\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{y, y_0\}) \in \mathcal{T}_{x_0}$$

2. Para $y = k$, tenemos que $f(x_0) = k = y$, por lo que:

$$x_0 = f^{-1}(y) \in f^{-1}(\{y, y_0\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{y, y_0\}) \in \mathcal{T}_{x_0}$$

Veamos ahora que $(X, \mathcal{T}_{x_0}) \cong (X, \mathcal{T}_{x_1})$ para todo par de puntos $x_0, x_1 \in X$. Sea el homeomorfismo siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} f: & (X, \mathcal{T}_{x_0}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}_{x_1}) \\ & x & \longmapsto & x - x_0 + x_1 \end{array}$$

Claramente tenemos que es continua, ya que $f(x_0) = y_0$. Además, f^{-1} viene dada por:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & (X, \mathcal{T}_{x_1}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}_{x_0}) \\ & y & \longmapsto & y + x_0 - x_1 \end{array}$$

Como $f^{-1}(x_1) = x_0$, también tenemos que es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo y ambos conjuntos son homeomorfos, como queríamos demostrar.

Ejercicio 4.2.11. Demuestra que todo subespacio afín $S \subset \mathbb{R}^n$ es un cerrado de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$.

Si S es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$, entonces S viene dado por unas ecuaciones implícitas en las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array} \right.$$

Definimos las siguientes aplicaciones para $i = 1, \dots, r$:

$$\begin{array}{rrcl} f_i: & (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \\ & (x_i, \dots, x_n) & \longmapsto & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \end{array}$$

Tenemos que $S = \bigcap\limits_{i=1,\dots,r} f^{-1}(b_r)$ es cerrado en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, ya que cada función es continua y, como $\{b_r\}$ es un cerrado, entonces su imagen inversa también.

Ejercicio 4.2.12. Consideremos el espacio $(X, \mathcal{T})$ donde $X = \{a, b, c, d\}$ y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}.$$

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ la aplicación dada por:

$$f(a) = b \qquad f(b) = d \qquad f(c) = b \qquad f(d) = c$$

Estudia en qué puntos la aplicación f es continua. ¿Es f abierta o cerrada?

Veamos en primer lugar que no es continua. Dado $\{b\} \in \mathcal{T}$, tenemos que la imagen inversa del abierto $\{b\}$ no es un abierto, es decir, $f^{-1}\{b\} = \{a, c\} \notin \mathcal{T}$. Por tanto, como hemos encontrado un abierto cuya preimagen no es un abierto, tenemos que f no es continua.

Veamos ahora que f no es abierta. Dado $\{b\} \in \mathcal{T}$, tenemos que $f\{b\} = \{d\} \notin \mathcal{T}$. Por tanto, como hemos encontrado un abierto cuya imagen no es un abierto, tenemos que f no es abierta.

Tenemos que los cerrados son:

$$C_{\mathcal{T}} = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}\}$$

Veamos que f no es cerrada. Dado $\{a\} \in C_{\mathcal{T}}$, tenemos que $f\{a\} = \{b\} \notin C_{\mathcal{T}}$. Por tanto, como hemos encontrado un cerrado cuya imagen no es un cerrado, tenemos que f no es cerrada.

Ejercicio 4.2.13. Se considera $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, siendo $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ la recta diseminada (Ejercicio 4.1.16 de la Relación 1). Estudia si f es continua, abierta o cerrada.

Veamos si f es continua. Tomamos como abierto en la recta diseminada el conjunto $W = \{\operatorname{sen} 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tenemos que:

$$f^{-1}(W) = \{1 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\pi - 1) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Tenemos que $f^{-1}(W) \notin \mathcal{T}$, ya que si fuese un abierto, entonces $1 \in f^{-1}(W) = U \cup V$, con $U \in \mathcal{T}_u$, $V \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Como $1 \in \mathbb{Q}$, tenemos que ha de ser que $1 \in U \in \mathcal{T}_u$. Por la definición de la topología usual, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid 1 \in B(1, \varepsilon) \subset U \subset f^{-1}(W)$. No obstante, esto no es posible, ya que f^{-1} es discreto.

Veamos que no es abierta. Tenemos que $W = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \in \mathcal{T}$, pero $f(W) = \{1\} \notin \mathcal{T}$.

Veamos que no es cerrada. Para ello, usamos el conjunto $C = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$. Tenemos que:

$$X \setminus U =]-\infty, 0[\ \cup \ \left]\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[\ \cup \ \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \in \mathcal{T}$$

No obstante, $f(C) =]-1, 1]$, que no es un cerrado, ya que:

$$X \setminus f(C) =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$$

El -1 es racional, pero $\nexists B(x, \varepsilon)$ tal que $1 \in B(x, \varepsilon) \subset X \setminus f(C)$.

Ejercicio 4.2.14. Sea $f = \chi_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} : ([0, 1], (\mathcal{T}_u)_{[0,1]}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ la función característica del intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Demuestra que $\chi_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$ es sobreyectiva, abierta, cerrada, pero no es continua.

Claramente es sobreyectiva, ya para todo $y \in \{0, 1\}$, $\exists x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = y$. Por ejemplo, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Además, es abierta y cerrada, ya que la topología de destino es la topología discreta. No obstante, no es continua, ya que:

$$f^{-1}(\{1\}) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \notin \mathcal{T}_u)_{[0,1]}$$

Por tanto, como hay un abierto cuya imagen inversa no es un abierto, f no es continua.

Ejercicio 4.2.15. Demuestra que las proyecciones $p_i : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dadas por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, son aplicaciones abiertas pero no cerradas.

Ejercicio 4.2.16. Demuestra que la aplicación $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \to ([0, +\infty[, \mathcal{T}_{u[0,+\infty[})$ dada por $f(x) = \|x\|$ es abierta, y que $g : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dada por $g(x) = \|x\|$ no lo es.

Ejercicio 4.2.17. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \in C_{\mathcal{T}_u}$ y $f : \left(A, (\mathcal{T}_u)_{|A}\right) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_u)$ continua, y tal que $f^{-1}(B)$ es acotado en $\mathbb{R}^n$ para cada $B \subset \mathbb{R}^m$ acotado. Demuestra que entonces f es cerrada. Deduce que la función g del ejercicio anterior y las funciones polinómicas $p : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son cerradas.

Ejercicio 4.2.18. Demuestra que toda aplicación afín biyectiva en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es un homeomorfismo.

Por ser una aplicación afín, tenemos que f es:

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \end{array}$$

con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ fijo. Como f es biyectiva, tenemos que $|A| \neq 0$.

Es directo ver que f es continua, ya que cada componente de una aplicación afín es una ecuación lineal, por lo que se trata de funciones continuas. Además, su inversa (que también es una aplicación afín) es también continua. Por tanto, f es un homeomorfismo.

Utiliza este resultado para construir un homeomorfismo:

1. Entre cualesquiera bolas abiertas, cualesquiera bolas cerradas y cualesquiera esferas de $(\mathbb{R}^n, d_u)$.

   Sean $c, c' \in \mathbb{R}^n$ fijos, y sean $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$. Sea la aplicación lineal buscada una homotecia de centro c y razón $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ compuesto con una traslación según el vector $v = \overrightarrow{cc'}$. Es decir:

   $$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \\ & x & \longmapsto & c + \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\overrightarrow{cx} + \overrightarrow{cc'} = c' + \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\overrightarrow{cx} = \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}x + c' - \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}c = \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}(x-c) + c' \end{array}$$

   Veamos ahora que $f[B(c, \varepsilon)] = B(c', \varepsilon')$:

   $\subset$) Sea $x \in B(c, \varepsilon)$, por lo que $\|x - c\| < \varepsilon$.
   Tenemos que:

   $$\|f(x) - c'\| = \left\| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}(x-c) + \cancel{c'} - \cancel{c'} \right\| = \left\| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}(x-c) \right\| < \varepsilon'$$

   Por tanto, $f(x) \in B(c', \varepsilon')$.

   $\supset$) Sea $y' \in B(c', \varepsilon')$. Veamos que $\exists x \in B(c, \varepsilon)$ tal que $f(x) = y'$.
   Consideremos $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(y' - c') + c$. Veamos que $x \in B(c, \varepsilon)$:

   $$\|x - c\| = \left\| \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(y' - c') \right\| < \varepsilon$$

   Además, veamos que $f(x) = y'$:

   $$f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(y' - c') + c\right) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(y' - c')\right) + c' = y'$$

   Análogamente, se demuestra que $f[\overline{B}(c, \varepsilon)] = \overline{B}(c', \varepsilon')$, $f[S(c, \varepsilon)] = S(c', \varepsilon')$.

2. El cilindro circular $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y el cilindro elíptico $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   Tomando como sistema de referencia el usual, tenemos que la aplicación afín ha de de cumplir que $f(O) = O$, $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$, $f(e_3) = e_3$. En definitiva, tenemos que $f(x, y, z) = (x, 2y, z)$.

   Veamos ahora que $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = C$.

   $\subset$) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, y veamos si $f(x, y, z) \in C$. Como $(x, y, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Además, $f(x, y, z) = (x, 2y, z)$. Por tanto, como se tiene que:
   $$x^2 + \frac{(2y)^2}{4} = x^2 + y^2 = 1$$
   Por tanto, tenemos que $(x, 2y, z) \in C$.

   $\supset$) Sea $(u, v, w) \in C$, y veamos si $\exists (x, y, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = (u, v, w)$.
   Como $(u, v, w) \in C$, tenemos que $u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$. Consideramos $(x, y, z) = \left(u, \frac{v}{2}, w\right)$. Tenemos claramente que $f\left(u, \frac{v}{2}, w\right) = (u, v, w)$. Veamos ahora que $\left(u, \frac{v}{2}, w\right) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
   $$u^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$$

Ejercicio 4.2.19. Sea X un conjunto. Demuestra que toda aplicación biyectiva $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \to (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un homeomorfismo.

Supongamos en primer lugar que X es finito. Entonces, $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_{disc}$, por lo que es continua y abierta y, entonces, un homeomorfismo.

Supongamos ahora que X es infinito. Veamos en primer lugar que f es continua. Dado un abierto $B \in \mathcal{T}_{CF}$, entonces $X \setminus B$ es finito. Para ver si f es continua, es necesario que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{CF}$ o, equivalentemente, que su complementario sea finito:
$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B) \in C_{\mathcal{T}_{CF}}$$
que es finito porque $X \setminus B$ es finito y f es biyectiva. Por tanto, f es continua.

Para ver si es abierta, tenemos que:
$$X \setminus f(B) = f(X) \setminus f(B) = f(X \setminus B) \in C_{\mathcal{T}_{CF}}$$
que es finito porque $X \setminus B$ es finito y f es biyectiva. Por tanto, f es abierta.

Como f es continua, biyectiva y abierta, es un homeomorfismo.

Ejercicio 4.2.20. Encuentra un contraejemplo que demuestre que la siguiente afirmación es falsa: Si existen aplicaciones continuas e inyectivas $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ entonces $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son homeomorfos.

Ejercicio 4.2.21. Demuestra que toda aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ estrictamente creciente (decreciente) y continua es un embebimiento.

Por ser estrictamente monótona, tenemos que es inyectiva. Al restringir el codominio a su imagen, tenemos que $f\Big|_{Im(f)}$ es sobreyectiva; por lo que $f\Big|_{Im(f)}$ es biyectiva.

Veamos que su inversa es continua. Dado un intervalo $]a,b[\ \subset X$, tenemos que:

$$(f^{-1})^{-1}_{\Big|_{Im(f)}}(]a,b[) = f(]a,b[) =]f(a), f(b)[\ \in \mathcal{T}_u$$

Ejercicio 4.2.22. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ y $f : (A, (\mathcal{T}_u)_A) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una función continua. Se define el **grafo** de f como el como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Demuestra que:

1. $(A, (\mathcal{T}_u)_A)$ es homeomorfo a $\Big(G(f), (\mathcal{T}_u)_{G(f)}\Big)$.

   Hay que probar que la siguiente aplicación es un homeomorfismo:

   $$\begin{array}{rccc} H: & A & \longrightarrow & G(f) \\ & x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

   Tenemos que H es continua, ya que la primera coordenada es la identidad (continua) y la segunda es f (continua). Además, tenemos que H es biyectiva. Su inversa es:

   $$\begin{array}{rccc} H^{-1}: & G(f) & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

   Tenemos que $H^{-1} = F\Big|_{G(f)}$, donde F es la siguiente aplicación:

   $$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$$

   que es continua. Por tanto, H es un homeomorfismo.

2. La bola cerrada $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfa al conjunto $\mathbb{S}^+ = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \mid t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

   Tenemos que:

   $$\begin{aligned} \mathbb{S}^+ &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1,\ x_{n+1} \geqslant 0\} = \\ &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2,\ x_{n+1} \geqslant 0\} = \\ &= \left\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}\right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, sea la siguiente función:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \Big(\overline{B}(0,1), \mathcal{T}_{u\overline{B}(0,1)}\Big) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \end{array}$$

   Tenemos que f es continua por ser composición de una polinómica que toma valores en $\mathbb{R}_0^+$ con la raíz cuadrada, que es continua.

   Por tanto, tenemos que $\mathbb{S}^+ = G(f)$, por lo que ambos conjuntos son homeomorfos.

3. Las cuádricas C_1, C_2, C_3 son homeomorfas a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\} \\ C_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\} \\ C_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \geqslant 0\} \end{aligned}$$

   Definimos $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f_2(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f_3(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   En los tres casos, tenemos que f_i es continua por ser polinómica. Además, $C_i = (x, G(f_i))$, por lo que $\mathbb{R}^2 \cong C_i$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Ejercicio 4.2.23. Demuestra que la siguiente aplicación es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{rccc} f: & \left([0,1[, (\mathcal{T}_u)_{[0,1[}\right) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^1, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1}) \\ & t & \longmapsto & (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{array}$$

Tenemos claro que f es continua, ya que cada componente lo es. Además, también es fácil ver que es biyectiva.

No obstante, tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\right) &= \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 \mid x \in [1, -1[\ \wedge\ y \in [0,1]\} = \\ &= \mathbb{S}^1 \cap (\{(x,y) \mid y > 0\} \cup \{(1,0)\}) \notin (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1} \end{aligned}$$

donde se especifica que no es un abierto, ya que no es un entorno del $(1,0)$. Por tanto, tenemos que no es abierta, ya que la imagen de un abierto no es un abierto.

Por tanto, como f es continua y biyectiva, como la continuidad de f^{-1} equivale a ver si f es abierta, tenemos que f^{-1} no es continua y, por tanto, no es un homeomorfismo.

Ejercicio 4.2.24. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la recta de Sorgenfrey. Se define la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0, \\ 3 & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Estudia la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ y $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

2. Estudia si las aplicaciones anteriores son abiertas o cerradas.

Ejercicio 4.2.25. Demuestra que "ser metrizable" es una propiedad topológica.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico metrizable; es decir, sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distancia tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Sea además $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ un homeomorfismo, es decir f continua, biyectiva y f^{-1} continua.

Definimos $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$d'(y, y') = d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \qquad \forall y, y' \in Y$$

Como d es una distancia y f es un homeomorfismo, se tiene que d' es una distancia.

Veamos que $(Y, \mathcal{T}')$ es metrizable con d', es decir, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{d'}$.

$\subset$) Sea $U' \in \mathcal{T}'$. Entonces, por ser f continua, tenemos que $f^{-1}(U') = U \in \mathcal{T}$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ metrizable, tenemos que $\forall x \in U$, $\exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_d(x, r) \subset U$. Entonces, veamos que $\forall y \in U'$, $B_{d'}(y, r) \subset U'$. Como f es biyectiva, esto equivale a ver que $\forall x \in U$, $B_{d'}(f(x), r) \subset U'$.

$\subset$) Sea $y' \in B_{d'}(f(x), r) \subset Y$. Como f es un homeomorfismo, entonces $\exists! x' \in X$ tal que $f(x') = y'$. Entonces, $d'(y', f(x)) = d(x', x) < r$. Por tanto, $x' \in B_d(x, r) \subset U$, por lo que $f(x') = y' \in f(U) = U'$.

Por tanto, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_{d'}$.

$\supset$) Veamos que $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}'$. Sea $U' \in \mathcal{T}_{d'}$. Entonces, por ser f continua, tenemos que $f^{-1}(U') = U \in \mathcal{T}$.

Tenemos que $\forall y \in U'$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{d'}(y, r) \subset U'$. Entonces, aplicando f^{-1}, tenemos que $\forall x \in f^{-1}(U')$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_d(x, r) \subset U$, por lo que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Por tanto, como f^{-1} es continua, tenemos que $f(f^{-1}(U')) = U' \in \mathcal{T}$.

Ejercicio 4.2.26. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos metrizables si y solo si $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es un espacio topológico metrizable.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son metrizables. Entonces, veamos si la topología producto lo es. Nos definimos la siguiente distancia:

$$\begin{array}{rrcl} \overline{d}: & (X \times Y) \times (X \times Y) & \longrightarrow & [(x, y), (x, y)] \\ & \max\{d(x, y), d(x', y')\} & \longmapsto & E \end{array}$$

s fácil ver que se trata de una distancia.

Sea entonces una base para $\mathcal{T}_{\overline{d}}$ la dada por:

$$\mathcal{B}_{\overline{d}} = \{B_{\overline{d}}[(x, y), r] \mid (x, y) \in X \times Y,\ r \in \mathbb{R}^+\}$$

Sea la base para la topología producto:

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \times B(y, r') \mid (x, y) \in X \times Y,\ r, r' \in \mathbb{R}^+\}$$

TERMINAR

Ejercicio 4.2.27. Sean $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{u, v\}$, $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$. Halla la topología producto $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

Tenemos que una base de dicha topología es:

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X \times Y, X \times \{u\}, \{a\} \times Y, \{a\} \times \{u\}, \{b, c\} \times Y, \{b, c\} \times \{u\}\}$$

Es decir,

$$\mathcal{B} = \{X \times Y, X \times \{u\}, \{a\} \times Y, \{(a, u)\}, \{b, c\} \times Y, \{(b, u), (c, u)\}\}$$

Ejercicio 4.2.28. Encuentra tres espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ tales que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \cong (X \times Z, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'')$ pero $(Y, \mathcal{T}') \not\cong (Z, \mathcal{T}'')$.

Ejercicio 4.2.29. Sean$(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Demuestra que:

1. $[A \times B]^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

$$\begin{aligned}
[A \times B]^\circ =& \left\{(x, y) \in X \times Y \mid (A \times B) \in N_{(x,y)}\right\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists U_\mathcal{T} \in \mathcal{T}_{X \times Y} \text{ con } (x, y) \in U_\mathcal{T} \subset (A \times B)\} \overset{(*)}{=} \\
\overset{(*)}{=}& \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}', \text{ tal que } (x, y) \in U \times U' \subset (A \times B)\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}', \text{ tal que } x \in U \subset A, \ y \in U' \subset B\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid A \in N_x, B \in N_y\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A^\circ, y \in B^\circ\} = \\
=& A^\circ \times B^\circ
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado que una base de la topología producto son el producto de abiertos.

2. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

$$\begin{aligned}
\overline{A \times B} =& \left\{(x, y) \in X \times Y \mid (A \times B) \in N_{(x,y)}\right\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid U \times U' \cap A \times B \neq \emptyset, \quad \forall U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}' \text{ con } (x, y) \in U \times U'\} = \\
=& \{(x, y) \in X \times Y \mid U \cap A \neq \emptyset, U' \cap B \neq \emptyset, \quad \forall U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}' \text{ con } x \in U, \ x' \in U'\} = \\
=& \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

3. $\partial(A \times B) = \left[\overline{A} \times \partial B\right] \cup \left[\partial A \times \overline{B}\right]$.

$$\begin{aligned}
\partial(A \times B) =& \overline{A \times B} \setminus [A \times B]^\circ = \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \setminus (A^\circ \times B^\circ) = \\
=& \left(\overline{A} \times [\overline{B} \setminus B^\circ]\right) \cup \left([\overline{A} \setminus A^\circ] \times \overline{B}\right) = \left[\overline{A} \times \partial B\right] \cup \left[\partial A \times \overline{B}\right]
\end{aligned}$$

4. $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{A \times B} = \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}'_B$.

Comprobemos que tienen la misma base:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{(U \times U') \cap (A \times B) \mid U \in \mathcal{B}_X, \ U' \in \mathcal{B}_Y\} = \\
&= \{(U \cap A) \times (U' \cap B) \mid U \in \mathcal{B}_X, \ U' \in \mathcal{B}_Y\} = \\
&= \mathcal{B}'
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}$ es una base de $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{A \times B}$, y $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}'_B$, ya que es el producto de abiertos básicos.

5. $A \times B \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ si y solo si $A \in \mathcal{T}$ y $B \in \mathcal{T}'$.

$\Longleftarrow$) Como $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{T}'$, entonces $A \times B$ es un abierto básico de la topología producto, y en particular es un abierto básico de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

$\Longrightarrow$) Como $A\times B \in \mathcal{T}\times\mathcal{T}'$, entonces usando la base de la topología producto se tiene que para cada $(a,b)\in A\times B$, $\exists U\in\mathcal{T}, U'\in\mathcal{T}'$ tal que se tiene que $(a,b)\in U\times U'\subset A\times B$.

Por un lado, se tiene entonces que para cada $a\in A$, $\exists U\in\mathcal{T}$ tal que $a\in U\subset A$. Por tanto, para cada $a\in A$ se tiene que $A\in N_a$, por lo que $A\in\mathcal{T}$. Análogamente, se tiene que $B\in\mathcal{T}'$.

6. $A\times B\in C_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$ si y solo si $A\in C_{\mathcal{T}}$ y $B\in C_{\mathcal{T}'}$.

7. $A\times B$ es denso en $X\times Y$ si y solo si A es denso en X y B es denso en Y.

Ejercicio 4.2.30. Sean $(X,\mathcal{T}_{CF})$ e $(Y,\mathcal{T}_{CF})$ espacios topológicos con la topología cofinita. Demuestra que $\mathcal{T}_{CF}\times\mathcal{T}_{CF}$ no tiene por qué ser la topología cofinita en $X\times Y$.

En el caso de que X,Y sean finitos, tenemos que ambas topologías son la discreta, por lo que $\mathcal{T}_{CF}\times\mathcal{T}_{CF}=\mathcal{T}_{disc}$. Por tanto, buscamos ejemplos en los que alguno no sea finito.

Sea $X=Y=\mathbb{R}$. Tenemos que $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_{CF}\times\mathcal{T}_{CF})$. No obstante, $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\notin(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_{CF})$, ya que:

$$\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}$$

Es decir, se trata del plano quitándole los ejes.

Ejercicio 4.2.31. Sean $(X,\mathcal{T}_{x_0})$ e $(Y,\mathcal{T}_{y_0})$ espacios topológicos con la topología del punto incluido. Demuestra que $\mathcal{T}_{x_0}\times\mathcal{T}_{y_0}$ no tiene por qué ser la topología $\mathcal{T}_{(x_0,y_0)}$ en $X\times Y$.

Sea $U=\{(0,0),(1,1)\}$. Tenemos que $U\in(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_{(0,0)})$, pero $U\notin(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}_0)$. Veámoslo.

Una base de $\mathcal{T}_0$ es $\mathcal{B}=\{\{0,x\}\mid x\in X\}$. Por tanto, una base de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}_0)$ es $\mathcal{B}\times\mathcal{B}=\{B_1\times B_2\mid B_1,B_2\in\mathcal{B}\}=\{\{(0,0),(0,x),(x,0),(x,x)\}\mid x\in X\}$.

Por tanto, supongamos que $U\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}_0)$. Entonces, como $(1,1)\in U$, $\exists x\in X$ tal que:

$$(1,1)\in\{(0,0),(0,x),(x,0),(x,x)\}\subset U=\{(0,0),(1,1)\}$$

Por tanto, hemos llegado a una contradicción, por lo que U no es un abierto.

Ejercicio 4.2.32. En el espacio topológico producto $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_\times\mathcal{T}_S)$ calcula la clausura, el interior y la frontera del conjunto $A=[1,2[\times[1,2[$. Estudia también si la aplicación $f:(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u)\to(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u\times\mathcal{T}_S)$ dada por $f(x,y)=(y,x)$ es continua.

Tenemos que $\overline{A}=[1,2]\times[1,2[$. Además, $A^\circ=]1,2[\times[1,2[$.

Veamos ahora si f es continua. Para ello, componemos o usamos un contraejemplo.

Sea $]1,2[\times[1,2[$. Su preimagen es $[1,2[\times]1,2[$. No es continua.

Ejercicio 4.2.33. Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ una aplicación continua, abierta y sobreyectiva. Entonces, $(Y,\mathcal{T}')$ es $T2$ si y sólo si $\Delta f=\{(x,y)\in X\times X\mid f(x)=f(y)\}$ es un subconjunto cerrado de $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$. Deduce de aquí que un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es T2 si y sólo si el conjunto $\Delta=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}$ es cerrado en $(X\times X,\mathcal{T}\times\mathcal{T})$.

Ejercicio 4.2.34. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos con $(Y, \mathcal{T}')$ Hausdorff y sean $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ aplicaciones continuas. Si existe un subconjunto $A \subset X$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$. Demuestra que si A es denso en X entonces $f = g$.

Demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists x \in \overline{A}$ tal que $f(x) \neq g(x) \in Y$. Como Y es T2, $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tal que $f(x) \in U$, $g(x) \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Como f, g son continuas, entonces $f^{-1}(U), g^{-1}(V) \in T$. Además, $x \in f^{-1}(U), g^{-1}(V)$. Entonces, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset$.

Como $x \in \overline{A}$, entonces $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$, $g^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, tenemos que $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Sea $x' \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap A$. Como $x \in A$, entonces $f(x') = g(x') \in U \cap V$, por lo que llegamos a una contradicción.

Veamos ahora que si A es denso en X, entonces $f = g$. Como A es denso, entonces $\overline{A} = X$. Por lo demostrado antes, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A} = X$, por lo que $f = g$.

Ejercicio 4.2.35. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{disc} \times \mathcal{T})$, donde se tiene que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

1. Encuentra una base de entornos, si es posible numerable, de cada punto de $\mathbb{R}^2$.

   Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y busquemos $\beta_{(x,y)}$. Tenemos que:

   $$\beta_{(x,y)} = \begin{cases} \{\{x\} \times \mathbb{Q}\} & \text{si} \quad y \in \mathbb{Q} \\ \{\{x\} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} & \text{si} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Encuentra un subconjunto no vacío $A \subsetneq \mathbb{R}^2$ que sea abierto y cerrado a la vez.

   Por ejemplo, $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3. Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. ¿Es cerrado L? ¿Cuál es la topología producto $(\mathcal{T}_{disc} \times \mathcal{T})_L$?

   Veamos que L no es un cerrado. Para ello, consideramos su complementario $U = \mathbb{R}^2 \setminus L$, y vemos si es un abierto.

   Supongamos que lo es, y lleguemos a contradicción. Como $(1, 2) \in \mathbb{R}^2 \setminus L = U$, tenemos que $U \in \mathcal{N}_{(1,2)}$. Como $\beta_{(1,2)} = \{\{1\} \times \mathbb{Q}\}$ es una base de entornos, tenemos que $\{1\} \times \mathbb{Q} \subset U = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Por tanto, $(1, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, algo que no es cierto ya que $(1, 1) \in L$. Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que L no es un cerrado.

   Tenemos que $(\mathcal{T}_{disc} \times \mathcal{T})_L = (\mathcal{T}_{disc})_L$. Esto se debe a que $\{(x, x)\} \in (\mathcal{T}_{disc} \times \mathcal{T})_L$, ya que:

   $$\{(x, x)\} = (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap L$$

   como $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$ y $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$, entonces $\{x\} \times \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{disc} \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.2.36. Sea $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua que verifica la siguiente igualdad $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que $f \equiv 0$ o $f(x) = a^x$ para algún $a > 0$.

Ejercicio 4.2.37. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua y sobreyectiva tal que para cada $y \in Y$ existe un entorno N verificando que $f_{\big|f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \to N$ es una identificación. Demuestra que f es una identificación.

Ejercicio 4.2.38. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Demuestra que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación continua, sobreyectiva y admite una inversa continua por la derecha (es decir, existe $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ tal que $f \circ g = Id_Y$) entonces f es una identificación.

Como f, g son continuas, tenemos que:

$$f \circ g \text{ identificación} \Longleftrightarrow f \text{ identificación}$$

Como $f \circ g = Id_Y$, que es una identificación, tenemos que f lo es.

Ejercicio 4.2.39. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la siguiente relación de equivalencia

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow x^2 + y = (x')^2 + y'$$

Demuestra que $(\mathbb{R}^2/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^2 + y \end{array}$$

Es claro que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$, por lo que f se induce al siguiente cociente:

$$\widetilde{f} : (\mathbb{R}^2/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$$

Para ver si $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo, basta con ver si f es una identificación. Para ello, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \longmapsto & (0, z) \end{array}$$

Es claro que f es continua por ser polinómica. Además, es sobreyectiva, ya que dado $z \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(\sqrt{z - \lambda}, \lambda) = z$ para todo $\lambda \leqslant z$. Además, g es continua por serlo cada una de sus componentes, y:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(0, z) = z = Id_{\mathbb{R}}(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$. Por tanto, f es una identificación y se tiene que $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 4.2.40. Demuestra que la proyección $p : X \to X/A$ es una biyección continua de $X \setminus A$ en su imagen. Demuestra también que es un homeomorfismo si A es abierto o cerrado.

En este caso, nos piden considerar $p_{\big|X\setminus A} : X\setminus A \to p(X\setminus A)$. Por haber restringido el codominio a la imagen de $X\setminus A$, hemos forzado que sea sobreyectiva. Veamos ahora si es inyectiva.

Sean $x, y \in X \setminus A$, $x \neq y$. Entonces, como $x, y \notin A$, $x \not\mathcal{R} y$, por lo que las clases de equivalencia no son las mismas, es decir, $p_{\big| X\setminus A}(x) \neq p_{\big| X\setminus A}(y)$. Por tanto, $p_{\big| X\setminus A}$ es inyectiva.

Por tanto, $p_{\big| X\setminus A}$ es biyectiva. Veamos ahora que es continua. Esto es directo, ya que por definición de topología cociente, la topología empleada es la final para su proyección, por lo que p es continua. Por tanto, al restringir en el dominio, también es continua.

TERMINAR

Ejercicio 4.2.41. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto $A \subset X$ ni abierto ni cerrado tales que $X \setminus A$ no sea homeomorfo a $X/A \setminus \{[A]\}$.

Ejercicio 4.2.42. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia R en X tal que $(X, \mathcal{T})$ sea Hausdorff pero $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ no lo sea.

Ejercicio 4.2.43. Da un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia R en X tal que $(X, \mathcal{T})$ sea 2AN pero $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ no lo sea.

Ejercicio 4.2.44. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $I = [0, 1]$. Se denomina cono de X al espacio topológico cociente

$$\left(\frac{X \times I}{X \times \{0\}}, \frac{\mathcal{T} \times \mathcal{T}_u}{X \times \{0\}}\right)$$

Demuestra que que el cono de $(\mathbb{S}^n, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^n})$ es homeomorfo a $(\overline{B^{n+1}}, (\mathcal{T}_u)_{\overline{B^{n+1}}})$ para $n \geqslant 0$.

Ejercicio 4.2.45. Sea $X = [0, 2]$ y $A = \{0, 1, 2\}$. Demuestra que $(X/A, (\mathcal{T}_u)_{X/A})$ es homeomorfo a $(C_1 \cup C_{-1}, (\mathcal{T}_u)_{C_1 \cup C_{-1}})$, donde C_1 es la circunferencia de radio 1 centrada en $(1, 0)$ y C_{-1} es la circunferencia de radio 1 centrada en $(-1, 0)$.

Ejercicio 4.2.46. ¿Qué espacio se obtiene si en una banda de Möbius se identifican todos los puntos de su borde?

Ejercicio 4.2.47. Ver que $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo al cociente $((I \times I)/\mathcal{R}, (\mathcal{T} \times \mathcal{T})/\mathcal{R})$ donde R es la menor relación que contiene a $(t, 0)R(1-t, 1)$ y $(0, s)R(1, 1-s)$ y $\mathcal{T}$ es la topología usual de I.

Ejercicio 4.2.48. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 2\}$. Se define una relación de equivalencia en X de la siguiente forma: $(x, y)R(x', y')$ si y sólo si $(x, y) = (x', y')$ o $\|(x, y)\| - \|(x', y')\| = \pm 1$ y $(x, y) = \lambda(x', y')$, $\lambda > 0$. Demuestra que el espacio cociente es homeomorfo al toro.

4.3. Conexión y Compacidad

Ejercicio 4.3.1. Demuestra que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}$ ambos considerados con la topología usual.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, y supongamos que A es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, por lo que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \to A$. Como $\mathbb{S}^1$ sabemos que es conexo, entonces A también lo es, y como $A \subset \mathbb{R}$, entonces A es un intervalo, supongamos de extremos a y b, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, o $\pm\infty$.

Sea ahora $c \in A$ tal que $a < c < b$, y como f es biyectiva, consideremos su preimagen $f^{-1}(c) \in \mathbb{S}^1$. Sea entonces la restricción de f a $\mathbb{S}^1 \setminus \{f^{-1}(c)\}$, que es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1 \setminus \{f^{-1}(c)\}$ y $A \setminus \{c\}$. Como la esfera sin un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}$ (conexo), entonces es $A \setminus \{c\} \subset \mathcal{R}$ es conexo, por lo que es un intervalo. No obstante, esto es una contraddicción, ya que $A \setminus \{c\}$ no es un intervalo por tener $a, b \in A \setminus \{c\}$ y $c \notin A \setminus \{c\}$.

Ejercicio 4.3.2. Demuestra que $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ no es conexo.

Sea $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{B}(0,1)$, $V = B(0,1)$. Tenemos que $U, V \in \mathcal{T}_u$ abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Además, $U \cap A = U$ y $V \cap A = V$, por lo que $U, V \in \mathcal{T}_A$ abiertos en la topología usual inducida en A. Además, tenemos que $U, V \neq A, \emptyset$.

Tenemos que $U \cap V = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{B}(0,1)\right) \cap B(0,1) = \emptyset$, y:

$$U \cup V = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{B}(0,1)\right) \cup B(0,1) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n = A$$

Por tanto, A es conexo.

Ejercicio 4.3.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Demuestra que son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es conexo.
2. Para todo $A \subseteq X$ tal que $\partial A = \emptyset$ se tiene $A = X$ o $A = \emptyset$.

Veamos en primer que lugar que, dado $A \subset X$, se tiene que $\partial A = \emptyset$ si y solo si A es abierto y cerrado.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\partial A = \emptyset$. Entonces,

$$\emptyset = \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \Longleftrightarrow \overline{A} \subset A^\circ$$

Como $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$, entonces $A^\circ = \overline{A} = A$, por lo que A es cerrado y abierto.

$\Longleftarrow$) Supongamos que A es abierto y cerrado. Entonces,

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \emptyset$$

Por tanto, $\partial A = \emptyset$.

Tenemos por tanto las siguientes equivalencias:

1. $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

2. Para todo $A \subseteq X$ tal que A es abierto y cerrado se tiene $A = X$ o $A = \emptyset$.

3. Para todo $A \subseteq X$ tal que $\partial A = \emptyset$ se tiene $A = X$ o $A = \emptyset$.

La equivalencia entre 1) y 2) se ha demostrado en la Caracterización de la Conexión, y la equivalencia entre 2) y 3) se ha demostrado en este ejercicio.

Ejercicio 4.3.4. Sean A y B subconjuntos conexos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tales que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Demuestra que $A \cup B$ es conexo.

Como $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, entonces $\exists b_0 \in \overline{A} \cap B$. Como A es conexo y $A \subset A \cup \{b_0\} \subset \overline{A}$, por el Teorema 3.9 tenemos que $A \cup \{b_0\}$ es conexo.

Tenemos que $A \cup B = (A \cup \{b_0\}) \cup B$, siendo ambos conexos. Además, como se tiene que $b_0 \in (A \cup \{b_0\}) \cap B \neq \emptyset$, por el Teorema 3.8, $A \cup B$ es conexo.

Ejercicio 4.3.5. Sean A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio $(X, \mathcal{T})$ tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos. Demuestra que A y B son conexos.

Supongamos que A no es conexo, por lo que existen $C, D \in C_{\mathcal{T}_A}$ cerrados de A no triviales tales que $C \cap D = \emptyset$ y $C \cup D = A$. Por ser cerrados de A, existen $C', D' \in C_{\mathcal{T}}$ tales que $C = C' \cap A$ y $D = D' \cap A$, y como $A \in C_{\mathcal{T}}$ y la intersección de cerrados en cerrado, tenemos que $C, D \in C_{\mathcal{T}}$.

Consideramos ahora $A \cap B \subset A = C \cap D$. Veamos ahora que $A \cap B$ solo interseca a uno de los dos conjuntos C y D. Por contrarecíproco, supongamos $(A \cap B) \cap C \neq \emptyset$ y $(A \cap B) \cap D \neq \emptyset$. Entonces, sean $\widetilde{C} = (A \cap B) \cap C$ y $\widetilde{D} = (A \cap B) \cap D$, ambos no vacíos. Tenemos que $\widetilde{C}, \widetilde{D} \in C_{\mathcal{T}_{A \cap B}}$. Además:

$$\widetilde{C} \cap \widetilde{D} = [(A \cap B) \cap C] \cap [(A \cap B) \cap D] \subset C \cap D = \emptyset$$
$$\widetilde{C} \cup \widetilde{D} = [(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap D] = (A \cap B) \cap (C \cup D) = (A \cap B) \cap A = A \cap B$$

Por tanto, tenemos que $\widetilde{C}, \widetilde{D} \in C_{\mathcal{T}_{A \cap B}}$ cerrados de $A \cap B$ no triviales tales que $\widetilde{C} \cap \widetilde{D} = \emptyset$ y $\widetilde{C} \cup \widetilde{D} = A \cap B$, por lo que $A \cap B$ no es conexo, lo que es una contradicción.

Por tanto, $A \cap B \subset C$ o $A \cap B \subset D$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \cap B \subset C$. Entonces, $A \cap B \subset C$, y como $C \cap D = \emptyset$, entonces $(A \cap B) \cap D = \emptyset$. Como $D \subset A$, entonces $B \cap D = \emptyset$. Entonces:

$$A \cup B = (C \cup D) \cup B = D \cup (C \cup B)$$
$$D \cap (C \cup B) = (D \cap C) \cup (D \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Como D es no trivial, entonces $C \cup B$ es no trivial. Además, como $C, D, B \subset A \cup B$ y los tres son cerrados, tenemos que $D, C, B \in C_{\mathcal{T}_{A \cup B}}$. Como la unión finita de cerrados es cerrado, entonces $C \cup B \in C_{\mathcal{T}_{A \cup B}}$. Por tanto, tenemos una partición de $A \cup B$ en dos cerrados no triviales, por lo que $A \cup B$ no es conexo, lo que es una contradicción.

Por tanto, A es conexo. Intercambiando A por B, se demuestra que B es conexo.

Ejercicio 4.3.6. Sean Y_1 y Y_2 subespacios de $(X, \mathcal{T})$ y sea $A \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Demuestra que si A es abierto (respectivamente cerrado) en Y_1 y en Y_2, entonces A es abierto (respectivamente cerrado) en $Y_1 \cap Y_2$ y en $Y_1 \cup Y_2$.

Como $A \in \mathcal{T}_{Y_1}$, tenemos que $\exists A_1 \in \mathcal{T}$ tal que $A = A_1 \cap Y_1$. Análogamente, $\exists A_2 \in \mathcal{T}$ tal que $A = A_2 \cap Y_2$. Notemos que $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Como $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{T}$, tenemos que $(A_1 \cup A_2) \cap (Y_1 \cap Y_2) \in \mathcal{T}_{Y_1 \cap Y_2}$. Además,

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \cap (Y_1 \cap Y_2) &= (A_1 \cap Y_1 \cap Y_2) \cup (A_2 \cap Y_1 \cap Y_2) = \\ &= (A \cap Y_2) \cup (A \cap Y_1) = A \cap (Y_1 \cup Y_2) = A\end{aligned}$$

Por tanto, $A \in \mathcal{T}_{Y_1 \cap Y_2}$. Además, como $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$, tenemos que $(A_1 \cap A_2) \cap (Y_1 \cup Y_2) \in \mathcal{T}_{Y_1 \cup Y_2}$. Además,

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2) \cap (Y_1 \cup Y_2) &= (A_1 \cap A_2 \cap Y_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap Y_2) = \\ &= (A \cap A_2) \cup (A \cap A_1) = A \cap (A_1 \cup A_2) = A\end{aligned}$$

donde he empleado que $A \subset A_1, A_2$, por lo que $A \subset A_1 \cup A_2$. Por tanto, $A \in \mathcal{T}_{Y_1 \cup Y_2}$.

Por tanto, hemos visto que $A \in \mathcal{T}_{Y_1 \cap Y_2}$ y $A \in \mathcal{T}_{Y_1 \cup Y_2}$, por lo que A es abierto en $Y_1 \cap Y_2$ y en $Y_1 \cup Y_2$. La demostración para cerrados es análoga, ya que la intersección y la unión de dos cerrados es cerrado.

Ejercicio 4.3.7. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo y A un subconjunto conexo y no vacío de X. Sea U un abierto y cerrado en $X \setminus A$. Demuestra que $A \cup U$ es conexo.

Supongamos que es disconexo, por lo que existe $V \in \mathcal{T}_{A\cup U} \cap C_{\mathcal{T}_{A\cup U}}$ abierto y cerrado de $A \cup U$ no trivial ($V \neq \emptyset$, $V \neq A \cup U$). Como $V \in \mathcal{T}_{A\cup U}$, entonces $\exists V' \in \mathcal{T}$ tal que $V = V' \cap (A \cup U)$. Por tanto, $A \cap V = A \cap V' \cap (A \cup U) = A \cap V'$, por lo que $A \cap V \in \mathcal{T}_A$. Análogamente, se ve que $A \cap V \in C_{\mathcal{T}_A}$, por lo que $A \cap V$ es abierto y cerrado de A no trivial. Como A es conexo, entonces $A \cap V$ es trivial, por lo que $A \cap V = \emptyset$ o $A \cap V = A$.

1. Supongamos $A \cap V = \emptyset$.

   Como $U \subset X \setminus A$ y $V \subset A \cup U$, entonces $V \subset U$. Además, $U \cap V = U \cap V'$, por lo que $V = U \cap V \in \mathcal{T}_U$. Análogamente, $V \in C_{\mathcal{T}_U}$, por lo que $V \in \mathcal{T}_U \cap C_{\mathcal{T}_U}$. Como $U \in \mathcal{T}_{X\setminus A} \cap C_{\mathcal{T}_{X\setminus A}}$, entonces $V \in \mathcal{T}_{X\setminus A} \cap C_{\mathcal{T}_{X\setminus A}}$, por lo que V es abierto y cerrado de $X \setminus A$.

   Aplicamos ahora el Ejercicio 4.3.6 al conjunto V, con $Y_1 = X \setminus A$, $Y_2 = U \cup A$. Tenemos que $V \subset U \subset Y_1 \cap Y_2$, y $V \in \mathcal{T}_{Y_1} \cap C_{\mathcal{T}_{Y_1}}$ y $V \in \mathcal{T}_{Y_2} \cap C_{\mathcal{T}_{Y_2}}$. Por tanto, $V \in \mathcal{T}_{Y_1 \cup Y_2} \cap C_{\mathcal{T}_{Y_1 \cup Y_2}}$. Calculemos ahora $Y_1 \cup Y_2$:

   $$Y_1 \cup Y_2 = (X \setminus A) \cup (U \cup A) = X$$

   Por tanto $V \in \mathcal{T} \cap C_{\mathcal{T}}$. Como $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces V es trivial, por lo que $V = \emptyset$ o $V = X$. Como $\emptyset \neq A \subset X$ y $A \cap V = \emptyset$, entonces $V \neq X$, por lo que $V = \emptyset$, lo que es una contradicción.

2. Supongamos $A \cap V = A$.

   Sea $C = (A \cup U) \setminus V \in \mathcal{T}_{A\cup U} \cap C_{\mathcal{T}_{A\cup U}}$. Por tanto, $A \cap C \in \mathcal{T}_A \cap C_{\mathcal{T}_A}$, por lo que $A \cap C$ es abierto y cerrado de A, y como A es conexo, entonces $A \cap C$ es trivial. Veamos que $A \cap C \neq A$. Tenemos que:

   $$A \cap C = A \Longleftrightarrow A \subset C \Longleftrightarrow A \cap V \subset (A \cup U) \setminus V \Longleftrightarrow A \cap V = \emptyset$$

Que no es el caso, por lo que $A \cap C \neq A$. Por tanto, $A \cap C = \emptyset$. Aplicando el apartado anterior a $A \cap C$, tenemos que $C = \emptyset$, por lo que $A \cup U \subset V$. No obstante, sabemos que $V \subset A \cup U$, por lo que $A \cup U = V$, lo que es una contradicción.

Ejercicio 4.3.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo y A un subconjunto conexo y no vacío de X. Sea C una componente conexa de $X \setminus A$. Demuestra que $X \setminus C$ es conexo.

Supongamos que $X \setminus C$ es disconexo, por lo que existe $U \in \mathcal{T}_{X\setminus C} \cap C_{\mathcal{T}_{X\setminus C}}$ abierto y cerrado de $X \setminus C$ no trivial. Como $U \in \mathcal{T}_{X\setminus C}$, entonces $\exists U' \in \mathcal{T}$ tal que $U = U' \cap (X \setminus C)$. Por tanto, $A \cap U = A \cap (X \setminus C) \cap U' = A \cap U'$, donde he aplicado que, como $C \subset X \setminus A$, entonces $A \subset X \setminus C$. Por tanto, $A \cap U \in \mathcal{T}_A$. Análogamente, se ve que $A \cap U \in C_{\mathcal{T}_A}$, por lo que $A \cap U$ es abierto y cerrado de A. Como A es conexo, entonces $A \cap U$ es trivial, por lo que $A \cap U = \emptyset$ o $A \cap U = A$.

1. Supongamos $A \cap U = A$. Entonces, $A \subset U$, y por tanto $A \cap X \setminus (U \cup C) = \emptyset$. Como $C \subset X \setminus A$ y $X \setminus (U \cup C) \subset X \setminus A$, entonces $C \subset C \cup X \setminus (U \cup C) \subset X \setminus A$, por lo que $A \cap (C \cup X \setminus (U \cup C)) = \emptyset$.

2. Supongamos $A \cap U = \emptyset$. Entonces, $A \subset X \setminus U$, y como $A \subset X \setminus C$, entonces $A \subset X \setminus (U \cup C)$.

Ejercicio 4.3.9. Prueba que el interior y la frontera de un subconjunto conexo no son en general conexos.

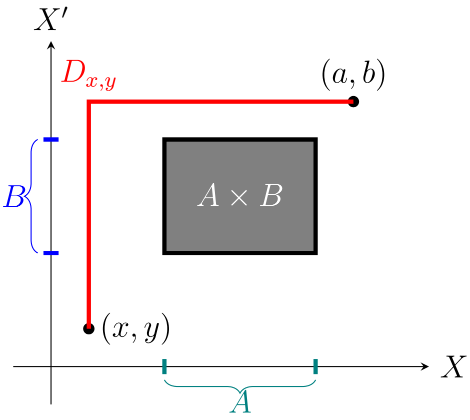
Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ el espacio topológico. Sean $A = \overline{B}[(-1, 0), 1], B = \overline{B}[(1, 0), 1] \subset \mathbb{R}^2$ dos bolas cerradas. Estas son convexas, luego son conexos. Además, $A \cap B = \{(0, 0)\} \neq \emptyset$, por lo que $A \cup B$ es conexo. Sin embargo, $[A \cup B]^\circ = B[(-1, 0), 1] \cup B[(1, 0), 1]$, que no es conexo por ser unión de dos abiertos disjuntos.

Para el caso de la frontera, consideremos $A = [0, 1] \times \mathbb{R}$. Tenemos que es conexo por ser producto de conexos. No obstante, $\partial A = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$, que no es conexo por ser unión de dos cerrados disjuntos.

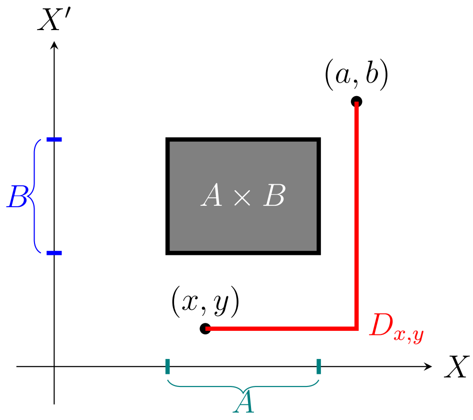
Ejercicio 4.3.10. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos conexos y $A \subsetneq X$, $B \subsetneq X'$. ¿Es $(X \times X') \setminus (A \times B)$ conexo?

Para probar que sí es conexo, emplearemos la Proposición 3.15, demostrando que tan solo tiene una componente conexa. Para ello, fijado $(a, b) \in (X \setminus A) \times (X' \setminus B)$, veremos que, para todo $(x, y) \in (X \times X') \setminus (A \times B)$, existe un conjunto conexo $D_{x,y} \subset (X \times X') \setminus (A \times B)$ con $(a, b), (x, y) \in D_{x,y}$. Como $D_{x,y}$ es conexo y $(a, b) \in D_{x,y}$, entonces $(x, y) \in D_{x,y} \subset C(a, b)$. Es decir, para todo $(x, y) \in (X \times X') \setminus (A \times B)$, se tiene que $(x, y) \in C(a, b)$, por lo que es la única componente conexa de $(X \times X') \setminus (A \times B)$, por lo que este conjunto es conexo.

El siguiente dibujo ilustra la idea intuitiva del conjunto $D_{x,y}$:



(a) $x \notin A, y \notin B$.



(b) $x \in A, y \notin B$.

Figura 4.2: Conjunto $D_{x,y}$ para distintos casos.

Sea $(x, y) \in (X \times X') \setminus (A \times B)$.

1. Supongamos $x \notin A$ (Caso 4.2a).

   Entonces $\{x\} \times X'$ es conexo por ser homeomorfo a X', y $(x, y), (x, b) \in \{x\} \times X'$. Además, $X \times \{b\}$ es conexo por ser homeomorfo a X, y $(a, b), (x, b) \in X \times \{b\}$. Por tanto, sea $D_{x,y} = X \times \{b\} \cup \{x\} \times X'$. Tenemos que $D_{x,y}$ es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía ($(x, b) \in X \times \{b\} \cap \{x\} \times X'$). Además, como $x \notin A$, $b \notin B$, entonces $D_{x,y} \subset (X \times X') \setminus (A \times B)$. Además, como $(a, b), (x, y) \in D_{x,y}$, entonces $(x, y) \in D_{x,y} \subset C(a, b)$.

2. Supongamos $x \in A$ (Caso 4.2b).

   En este caso es similar, solo que $D_{x,y} = X \times \{y\} \cup \{a\} \times X'$.

Notemos que, para que $D_{x,y} \subset (X \times X') \setminus (A \times B)$, es necesario que $(a, b) \in (X \setminus A) \times (X' \setminus B)$, no basta con que $(a, b) \in (X \times X') \setminus (A \times B)$.

Ejercicio 4.3.11. Sea X el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^2$ con alguna coordenada racional. Prueba que X con la topología inducida es un subconjunto conexo.

Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \lor y \in \mathbb{Q}\} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$.

Ejercicio 4.3.12. Prueba que no existen aplicaciones continuas e inyectivas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva. Tenemos que, como f es continua y $\mathbb{R}^2$ es conexo, $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$ es conexo, luego es un intervalo, supongamos de extremos a y b, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, o $\pm\infty$.

Sea ahora $c \in f(\mathbb{R}^2)$ tal que $a < c < b$, y como f es inyectiva, consideremos su preimagen $f^{-1}(c) \in \mathbb{R}^2$, que es única. Sea entonces la restricción de f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{f^{-1}(c)\}$, que es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{f^{-1}(c)\}$ y $A \setminus \{c\}$. Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{f^{-1}(c)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, es conexo, por lo que $A \setminus \{c\} \subset \mathbb{R}$ es conexo pero no es un intervalo, ya que $a, b \in A \setminus \{c\}$ y $c \notin A \setminus \{c\}$, lo que es una contradicción.

Ejercicio 4.3.13. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición por subconjuntos conexos y abiertos de $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\{A_i\}_{i\in I}$ es la familia de componentes conexas de X.

Demostrado en la Proposición 3.16.

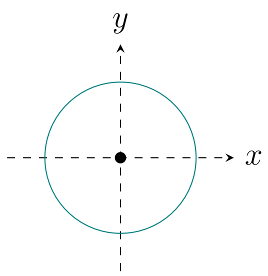
Ejercicio 4.3.14. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Calcula las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$.

$$\{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$$

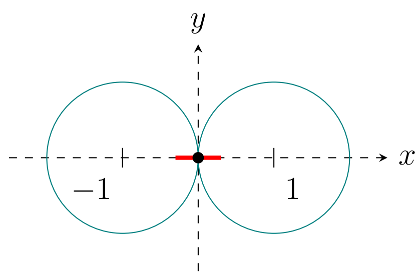
Dicho conjunto tenemos que es una partición de X por subconjuntos conexos y abiertos, por lo que son las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$.

Ejercicio 4.3.15. Denotemos por $C((a, b), r)$ la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro (a, b) y radio r. Demuestra que ninguno de los siguientes espacios topológicos es homeomorfo a cualquier otro:

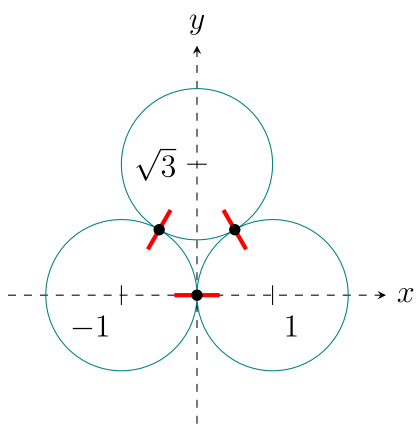
1. $X_1 = C((0, 0), 1)$
2. $X_2 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1)$
3. $X_3 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1) \cup C\left(\left(0, \sqrt{3}\right), 1\right)$
4. $X_4 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$.



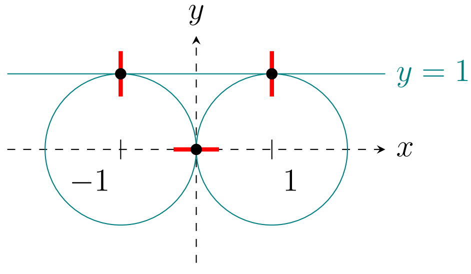
(a) $X_1 = C((0, 0), 1)$



(b) $X_2 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1)$



(c) $X_3 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1) \cup C\left(\left(0, \sqrt{3}\right), 1\right)$



(d) $X_4 = C((-1, 0), 1) \cup C((1, 0), 1) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$

Veamos en primer que toda circunferencia a la que se le quita un punto sigue siendo conexa. Tenemos que una circunferencia es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$, que es conexo. Además, también tenemos que $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ es conexo, y es homeomorfo a una circunferencia a la que se le quita un punto, por lo que es conexo.

No obstante, veamos que $\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\}$ con $p \neq q$, es disconexo. Consideremos la recta $R = p + \mathcal{L}\{\overrightarrow{pq}\}$ que pasa por p y q. Tenemos que R divide $\mathbb{R}^2$ en dos semiplanos, ambos abiertos en $\mathcal{T}_u$, y al intersecar cada plano con $\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\}$, obtenemos dos abiertos en $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^1 \setminus \{p,q\}}$ (los dos arcos de circunferencia que quedan) que son disjuntos y cuya unión es $\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\}$, por lo que $\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\}$ es disconexo.

Veamos ahora que X_1 no es homeomorfo al resto. Supongamos que $f_i : X_1 \to X_i$ es un homeomorfismo para $i = 2, 3, 4$. Sean $p_i, q_i \in X_i$ tales que $p_i \neq q_i$ para $i = 2, 3, 4$, no perteneciendo ambos a la misma circunferencia ni, en el caso de X_4, a la recta $y = 1$. Entonces, $f_i^{-1}(p_i), f_i^{-1}(q_i) \in X_1$ son tales que $f_i^{-1}(p_i) \neq f_i^{-1}(q_i)$ por ser f_i inyectiva. Consideremos ahora la restricción de f_i, $f_i\big|_{X_1 \setminus \{f_i^{-1}(p_i), f_i^{-1}(q_i)\}} : X_1 \setminus \{f_i^{-1}(p_i), f_i^{-1}(q_i)\} \to X_i \setminus \{p_i, q_i\}$, que es un homeomorfismo por ser f_i homeomorfismo. Veamos ahira que $X_i \setminus \{p_i, q_i\}$ es disconexo para $i = 2, 3, 4$. Como los puntos p_i, q_i no pertenecen a la misma circunferencia, entonces todas las circunferencias son conexas. Además, como los puntos no son los puntos de tangencia, entonces $X_i \setminus \{p_i, q_i\}$ es la unión de conexos con intersección no vacía, por lo que son conexos. En concreto, para el caso de X_4, la recta es conexa por ser homeomorfa a $\mathbb{R}$ y, como los puntos que se han quitado no son de la recta, sigue siendo conexa. Por tanto, hemos visto que $X_i \setminus \{p_i, q_i\}$ es conexo, por lo que $X_1 \setminus \{p_i, q_i\}$ es conexo, pero sabemos que no lo es por ser una circunferencia a la que se le han quitado dos puntos. Por tanto, llegamos a un absurdo, por lo que X_1 no es homeomorfo a X_i para $i = 2, 3, 4$.

Veamos ahora que X_2 no es homeomorfo a X_i, con $i = 3, 4$. Supongamos que $f_i : X_2 \to X_i$ es un homeomorfismo para $i = 3, 4$. Consideramos $p = (0, 0) \in X_2$. Entonces, $X_2 \setminus \{p\}$ es disconexo, ya que la recta $y = 0$ divide $\mathbb{R}^2$ en dos semiplanos, ambos abiertos en $\mathcal{T}_u$, y al intersecar cada plano con $X_2 \setminus \{p\}$, obtenemos dos abiertos en $\mathcal{T}_{X_2 \setminus \{p\}}$ (las dos circunferencias a las que se le ha quitado el $(0, 0)$) que son disjuntos y cuya unión es $X_2 \setminus \{p\}$, por lo que $X_2 \setminus \{p\}$ es disconexo. Sin embargo, $X_i \setminus \{f_i(p)\}$ es conexo para $i = 3, 4$, ya que sigue siendo unión de conexos con intersección no vacía (tienen más de un punto de tangencia). Por tanto, consideramos la restricción de f_i, $f_i\big|_{X_2 \setminus \{p\}} : X_2 \setminus \{p\} \to X_i \setminus \{f_i(p)\}$, que es un homeomorfismo por ser f_i homeomorfismo. Como $X_2 \setminus \{p\}$ es disconexo y $X_i \setminus \{f_i(p)\}$ es conexo, llegamos a un absurdo, por lo que X_2 no es homeomorfo a X_i para $i = 3, 4$.

Veamos ahora que X_3 no es homeomorfo a X_4. Supongamos que $f : X_3 \to X_4$ es un homeomorfismo. Sea $p = (1, 1)$, y como f es un homeomorfismo, consideramos $f^{-1}(p) \in X_3$. Entonces, $X_3 \setminus \{f^{-1}(p)\}$ es conexo, porque es la unión de conexos con intersección no vacía (tienen más de un punto de tangencia). Sin embargo, $X_4 \setminus \{p\}$ es disconexo. Por tanto, consideramos la restricción de f, $f\big|_{X_3 \setminus \{f^{-1}(p)\}} : X_3 \setminus \{f^{-1}(p)\} \to X_4 \setminus \{p\}$, que es un homeomorfismo por ser f homeomorfismo. Como $X_3 \setminus \{f^{-1}(p)\}$ es conexo y $X_4 \setminus \{p\}$ es disconexo, llegamos a un absurdo, por lo que X_3 no es homeomorfo a X_4.

Ejercicio 4.3.16. Decide cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son compactos. Razona la respuesta:

1. $[0, \infty[$

   En todo este ejercicio, haremos uso del Corolario de Heine-Borel (Corolario 3.29.1), que afirma que los compactos en $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados.

   En este caso, $[0, \infty[$ es cerrado pero no acotado, por lo que no es compacto.

2. $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

   En este caso, $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es acotado, pero no sabemos si es cerrado. Veamos que existe una sucesión de elementos de A que converge a un punto de $\mathbb{R} \setminus A$. Sea la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 2\right\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow e-2$$

   Dicha sucesión sabemos que es convergente, y converge a $e - 2$. Tenemos que $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que, por el Ejercicio 4.1.35.f), $e - 2 \in \overline{A}$. Como $e - 2 \notin \mathbb{Q}$, tenemos que $e - 2 \notin A$, por lo que $A \neq \overline{A}$ y, por tanto, A no es cerrado. Por tanto, A no es compacto.

3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}$.

   Tenemos que A no está acotado, ya que $[1, +\infty[\times\{0\} \subset A$, y este no está acotado por no estarlo $[1, +\infty[$. Por tanto, A no es compacto.

4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$.

   En este caso, $A = \overline{B}_1(0, 1)$ bola cerrada unidad para la norma 1. Por tanto, A es cerrado y acotado, por lo que es compacto.

5. $A = \mathbb{S}^1 \setminus \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

   Tenemos que A es homeomorfo a $\mathbb{R}$, que no es compacto. Por tanto, A no es compacto.

6. $(]0, 1[, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{]0, 1 - 1/n[\ \mid n \geqslant 2\}$.

   Sea $U_n =]0, 1 - 1/n[$. Tenemos que U_n es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$, y que $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que U_n es un recubrimiento por abiertos de $]0, 1[$. Tenemos que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[= \lim_{n\to\infty} \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[=]0, 1[$$

   Supongamos ahora que existe un conjunto $I_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\{U_n\}_{n\in I_0}$ es un subrecubrimiento de $]0, 1[$. Sea $n_0 = \max I_0$. Entonces,

$$\bigcup_{n\in I_0} U_n = \bigcup_{n\in I_0} \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[= \left]0, 1 - \frac{1}{n_0}\right[\neq]0, 1[$$

   donde la última igualdad se da porque $\nexists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} = 0$, por lo que $1 - \frac{1}{n_0} \neq 1$.

   Por tanto, $(]0, 1[, \mathcal{T})$ no es compacto.

7. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T} = \left\{O \subseteq \mathbb{R} \mid O = U \setminus B, U \in \mathcal{T}_u, B \subseteq \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right\}$

   Tomando $B = \emptyset$, vemos claramente que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$. Sea $U_=]-n, n[\in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$, ya que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[= \mathbb{R}$$

   Supongamos ahora que existe un conjunto $I_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\{U_n\}_{n\in I_0}$ es un subrecubrimiento de $\mathbb{R}$. Sea $n_0 = \max I_0$. Entonces,

$$\bigcup_{n\in I_0} U_n = \bigcup_{n\in I_0}]-n, n[=]-n_0, n_0[\neq \mathbb{R}$$

   Por tanto, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es compacto.

8. La recta de Sorgenfrey.

   El razonamiento es análogo al caso anterior, ya que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_S$. Por tanto, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ no es compacto.

9. $\left(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{u|_{\mathbb{Q}}}\right)$.

   Es fácil ver que $\mathbb{Q}$ no es cerrado, ya que $\overline{Q} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mathbb{Q}$ no es cerrado, por lo que no es compacto.

10. X es un conjunto, $p \in X$ un punto fijo y $\mathcal{T} = \{O \subseteq X \mid p \in O\} \cup \{\emptyset\}$.

    Tenemos que $\mathcal{T}$ es la topología del punto incluido para p.

    Sabemos que si X es finito, entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto. Supongamos por tanto que X es infinito. Sea $U_x = \{x, p\}$ para $x \in X$. Entonces, $\{U_x\}_{x\in X}$ es claramente un recubrimiento por abiertos de X, ya que:

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X} \{x, p\} = \bigcup_{x\in X} U_x = X$$

    Supongamos ahora que existe un conjunto $I_0 \subset X$ finito tal que $\{U_x\}_{x\in I_0}$ es un subrecubrimiento de X. Es decir,

$$X = \bigcup_{x\in I_0} U_x = \bigcup_{x\in I_0} \{x, p\} = I_0 \cup \{p\}$$

    Como I_0 es finito, entonces $I_0 \cup \{p\}$ es finito, por lo que X es finito, lo que es una contradicción.

    Por tanto, tenemos que:

$$(X, \mathcal{T}) \text{ es compacto} \iff X \text{ es finito}$$

11. X es un conjunto, $p \in X$ un punto fijo y $\mathcal{T} = \{O \subseteq X \mid p \notin O\} \cup \{X\}$.

    Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X, es decir, $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$ y:
    $$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$
    Tenemos $p \in X$, por lo que $\exists i_0 \in I$ tal que $p \in U_{i_0}$. Entonces, $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ y $p \in U_{i_0}$, por lo que $U_{i_0} = X$. Entonces $\{X\}$ es un subrecubrimiento de X finito para cualquier recubrimiento de X, por lo que X es compacto.

12. $\mathbb{N}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

    Sea $U_n = \{1, \dots, n\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{N}$, ya que:
    $$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1, \dots, n\}$$
    Tenemos que $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que existe un conjunto $I_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\{U_n\}_{n\in I_0}$ es un subrecubrimiento de $\mathbb{N}$. Sea $n_0 = \max I_0$. Entonces,
    $$\bigcup_{n\in I_0} U_n = \bigcup_{n\in I_0} \{1, \dots, n\} = \{1, \dots, n_0\} \neq \mathbb{N}$$
    ya que los naturales no tienen máximo.

Ejercicio 4.3.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Prueba que si $A, A' \subseteq X$ son subespacios compactos, entonces $A \cup A'$ también es compacto.

Demostrado en la Proposición 3.25.

Ejercicio 4.3.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Prueba que si $\{A_i\}_{i\in I}$ son subespacios compactos de X, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ también es compacto.

Demostrado en el Corolario 3.24.1.

Ejercicio 4.3.19. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n es un subconjunto cerrado y no vacío tal que $C_{n+1} \subseteq C_n$. Prueba que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$. Entonces, tenemos que $\{X \setminus C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos de X, ya que:
$$X = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus C_n$$
donde he aplicado que $X \setminus \emptyset = X$. Como X es compacto, entonces existe un subconjunto finito $I_0 \subset \mathbb{N}$ tal que $\{X \setminus C_n\}_{n\in I_0}$ es un subrecubrimiento de X:
$$X = \bigcup_{n\in I_0} X \setminus C_n = X \setminus \left(\bigcap_{n\in I_0} C_n\right)$$

Como I_0 es finito, sea $n_0 = \max I_0$ y, como $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_{n_0} \subseteq C_n$ para todo $n \in I_0$, por lo que:

$$X = \bigcup_{n \in I_0} X \setminus C_n = X \setminus \left(\bigcap_{n \in I_0} C_n \right) = X \setminus C_{n_0}$$

Por tanto, como $X = X \setminus C_{n_0}$, tenemos que $C_{n_0} = \emptyset$, lo que es una contradicción, ya que C_{n_0} es no vacío. Por tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Ejercicio 4.3.20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Hausdorff y compacto y $f : X \to X$ una aplicación continua. Prueba que existe $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado y no vacío tal que $f(A) = A$.

Como f es continua y va de un compacto a un Hausdorff, por el Teorema 3.26, tenemos que f es cerrada. Vamos a definirnos la siguiente sucesión:

$$C_1 = X \qquad C_{n+1} = f(C_n)$$

Aplicaremos el método de inducción para demostrar dos resultados. En primer lugar, veremos que C_n es cerrado no vacío para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$:

  Como $C_1 = X$, entonces C_1 es cerrado. Además, como $X \neq \emptyset$, entonces $C_1 \neq \emptyset$.

- Supuesto cierto para n, veamos que se cumple para $n + 1$:

  Como f es cerrada y C_n es cerrado por hipótesis de inducción, entonces $C_{n+1} = f(C_n)$ es cerrado. Además, como $C_n \neq \emptyset$ por hipótesis de inducción, entonces por ser f una aplicación, $C_{n+1} = f(C_n) \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$:

  Como $f : X \to X$, tenemos que $f(X) \subset X$, por lo que:

  $$C_2 = f(C_1) = f(X) \subset X = C_1$$

- Supuesto cierto para n, veamos que se cumple para $n + 1$:

  Como, por hipótesis de inducción, $C_{n+1} \subset C_n$ y f es una aplicación, entonces $f(C_{n+1}) \subset f(C_n)$. Por tanto,

  $$C_{n+2} = f(C_{n+1}) \subset f(C_n) = C_{n+1}$$

Por el ejercicio anterior, el Ejercicio 4.3.19, tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Sea entonces $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Como la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, tenemos que A es cerrado. Veamos que $f(A) = A$.

$$f(A) = f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(C_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{n+1} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = A$$

Por tanto, $\exists A \subset X$ cerrado no vacío tal que $f(A) = A$.

Ejercicio 4.3.21 (Teorema de la aplicación contractiva)**.** Demuestra que si X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una aplicación contractiva (es decir, existe $K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leqslant K \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in X$), entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Como f es contrativa, en particular es lipschitziana, y por el ejercicio 4.2.1 es continua. Además, como X es un espacio métrico, tenemos que es T2. Por tanto, por el ejercicio anterior, el Ejercicio 4.3.20, tenemos que existe $A \subset X$ cerrado no vacío tal que $f(A) = A$. No obstante, en este ejercicio piden demostrar que A tiene un único punto, y que este punto es el único punto fijo de f.

Buscamos demostrar que A es un conjunto unitario. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

función distancia de X continua. Como $A \subset X$ es cerrado y X es compacto, tenemos que A es compacto, por lo que $A \times A$ es compacto. Por tanto, como d es continua, $d(A \times A) \subset \mathbb{R}$ es compacto, y como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, tenemos que $d(A \times A)$ es cerrado y acotado, y en particular alcanza su máximo. Es decir,

$$\exists x_0, y_0 \in A \text{ tal que } d(x_0, y_0) \geqslant d(x, y) \quad \forall x, y \in A$$

Como $f(A) = A$, entonces $\exists x_1, y_1 \in A$ tales que $f(x_1) = x_0$ y $f(y_1) = x_0$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) = d(f(x_1), f(y_1)) \leqslant K \cdot d(x_1, y_1) \leqslant K \cdot d(x_0, y_0) \Longrightarrow& \\ \Longrightarrow (1 - K) \cdot d(x_0, y_0) \leqslant 0& \end{aligned}$$

Como $1 - k > 0$ y $d(x_0, y_0) \geqslant 0$, entonces tenemos que $d(x_0, y_0) = 0$, por lo que $x_0 = y_0$. Por tanto,

$$0 \geqslant d(x, y) \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y \qquad \forall x, y \in A$$

Por tanto, tenemos que A es un conjunto unitario, es decir, $A = \{x_0\}$. Como $f(A) = A$, entonces $f(x_0) = x_0$, por lo que x_0 es un punto fijo de f.

Veamos ahora la segunda parte de la demostración, probando que es el único punto fijo de f. Sea $x' \in X$ otro punto fijo de f.

$$\begin{aligned} d(x_0, x') = d(f(x_0), f(x')) \leqslant K \cdot d(x_0, x') \Longrightarrow& \\ \Longrightarrow (1 - K) \cdot d(x_0, x') \leqslant 0 \Longrightarrow d(x_0, x') = 0 \Longrightarrow x_0 = x'& \end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos no vacíos en X tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ y que si $U \in \mathcal{T}$ tal que $K \subseteq U$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_m \subseteq U$.

Como X es Hausdorff y $K_n \subset X$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que K_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $K_n \cap K_1 = K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que K_n es cerrado en K_1 para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Ejercicio 4.3.19 con $X = K_1$ y $C_n = K_n$, tenemos que $K \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $U \in \mathcal{T}$ tal que $K \subset U$. Entonces, $X \setminus U \in C_{\mathcal{T}}$, por lo que $K_1 \setminus U \in C_{\mathcal{T}_{K_1}}$ es cerrado en K_1. Como K_1 es compacto, entonces $K_1 \setminus U \subset K_1$ es compacto. Veamos que $\{K_1 \setminus K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $K_1 \setminus U$ por abiertos de K_1.

$$K_1 \setminus U \subset K_1 \setminus K = K_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_1 \setminus K_n$$

Como $K_1 \setminus U$ es compacto, existe un subconjunto finito $I_0 \subset \mathbb{N}$ tal que la familia $\{K_1 \setminus K_n\}_{n\in I_0}$ es un subrecubrimiento de $K_1 \setminus U$:

$$K_1 \setminus U \subset \bigcup_{n\in I_0} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in I_0} K_n\right)$$

Como I_0 es finito, sea $n_0 = \max I_0$ y, como $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $K_{n_0} \subset K_n$ para todo $n \in I_0$, por lo que:

$$K_1 \setminus U \subset \bigcup_{n\in I_0} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in I_0} K_n\right) = K_1 \setminus K_{n_0}$$

Por tanto, tenemos que $K_1 \setminus U \subset K_1 \setminus K_{n_0}$, por lo que $K_{n_0} \subset U$. Por tanto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{n_0} \subset U$.

Ejercicio 4.3.23. Encuentra contraejemplos de las afirmaciones siguientes:

1. En cualquier espacio métrico toda bola cerrada es un subespacio compacto.

   Las bolas cerradas son cerrados topológicos, y son subconjuntos del espacio métrico. Si el espacio métrico es compacto, por la proposición 3.23, entonces las bolas cerradas son compactas. Por tanto, tenemos que buscar un espacio métrico que no sea compacto. Además, en el caso de $\mathbb{R}^n$, se ha visto que los compactos son los cerrados y acotados, por lo que tenemos que buscar un espacio métrico distinto.

   Por ejemplo, sea (X, d_{disc}) espacio métrico asociado a la la distancia discreta, con X infinito. Además, sabemos que X no es compacto, pues $(X, d_{disc}) = (X, \mathcal{T}_{disc})$ y X es infinito. Entonces, tenemos que:

   $$\overline{B}(0,1) = \{x \in X \mid d(x,0) \leqslant 1\} = X$$

   Por tanto, como X no es compacto, tenemos que $\overline{B}(0,1)$ no es compacto.

2. En cualquier espacio métrico ninguna bola abierta puede ser un subespacio compacto.

   En todo espacio métrico, sabemos que compacto implica cerrado y acotado. Por tanto, hemos de encontrar una topología en la que una bola abierta sea cerrada.

Por ejemplo, sea (X, d_{disc}) espacio métrico asociado a la la distancia discreta, X finito. Como X es finito, entonces X es compacto. Entonces:

$$B(0,1) = \{x \in X \mid d(x,0) < 1\} = \{0\} \in C_{\mathcal{T}_{disc}}$$

Por tanto, como X es compacto y $B(0,1) \in C_{\mathcal{T}_{disc}}$, tenemos que $B(0,1)$ es compacto.

Ejercicio 4.3.24. Demuestra que no existe ninguna función continua

$$f : \left([0,1], \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}\right) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$$

que verifique $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 4.3.25. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos con $(X, \mathcal{T})$ compacto. Prueba que la proyección $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Ejercicio 4.3.26. Se dice que $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva de Jordan si $C = f([0,1])$ para $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una aplicación continua e inyectiva. Prueba que no existe una curva de Jordan que rellene el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 4.3.27. Prueba que los subconjuntos compactos de la recta de Sorgenfrey son necesariamente numerables.