

Lógica y Métodos Discretos



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Inducción

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. \square

Ejercicio 1.1.2. Demuestre que para todo número natural n :

$$\left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■ $n = 0$:

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■ $n = 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■ $n > 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio ??.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio ???. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n , $P(n)$ se tiene, como se pedía. \square

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n , se quiere usar una verdad sobre $n-k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n+1$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

“ n tiene un factor primo”

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- n no es primo: Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v < n$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p . Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$.

□

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$

$$p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b , $p(a, b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado del tenor:

“Para todo número natural m , $p(m, n) = mn$.”

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leq k < n$. Distinguiamos los siguientes casos:

- $n = 0$, (sea cual sea m):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego $P(0)$ vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale:

- Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:

1. $n \equiv 0 \pmod{2}$ (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n}{2} < n$.

2. $n \equiv 1 \pmod{2}$ (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n , vale $P(n)$. □

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“2 \mid (5^n + 3^{n-1})”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. \square

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado que el Ejercicio ???. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.8. Demuestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como $2 \geq \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como $0 \leq 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $P(n)$ es cierto, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“n^3 < n!”$$

- En el caso base, $n = 6$:

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio ?? y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“5 \mid 8^n - 3^n”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. \square

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b :

- $a = 0$ o $b = 0$:

Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b . Además, es el mínimo múltiplo común de a y b , ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $a, b > 0$:

Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b . Es claro que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b . Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Así pues, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b . \square

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de n para el que

$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden). Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n . Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (o que S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea

$$M(S) = \{m \in \omega \mid \text{para todo } x \in S, x \leq m\}$$

Se cumple lo siguiente:

- $n \in M(S)$
- $M(S) \neq \emptyset$
- Por el principio del buen orden, existe el mínimo de $M(S)$, denotado como m_0 .
- $m_0 \neq 0$, porque m_0 es un mayorante de $S \setminus \{0\}$ que es no vacío.
- Si para todo $x \in S$ se cumpliera que

$$x < m_0$$

entonces, para todo $x \in S$ se cumpliría que

$$x \leq m_0 - 1$$

y por tanto $m_0 - 1 \in M(S)$ y además

$$0 \leq m_0 - 1 < m_0$$

de donde m_0 no sería el mínimo de $M(S)$, en contra de lo supuesto.

- Existe $x_0 \in S$ tal que

$$m_0 \leq x_0$$

- Como m_0 es un un mayorante de S se cumplirá que

$$x_0 \leq m_0$$

- Por las dos desigualdades anteriores, $m_0 = x_0$
- $m_0 \in S \cap M(S)$
- El mínimo de $M(S)$ es un elemento de S , luego es el máximo de S .

□

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leq n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. A continuación, daremos las ideas de la demostración para que el lector termine el desarrollo de la misma.

El razonamiento es por el principio de inducción matemática

$$P(n) \text{ es "2} \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \text{"}$$

- Caso base: $n = 2$

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\Rightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Luego $P(2)$ es cierto.

- Hipótesis de inducción: supongamos que $n \in \omega$ y que vale $P(n)$, es decir

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- paso de inducción:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} n + 1 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ (\sqrt{n+1})^2 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ \sqrt{n+1} &< \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &< \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \omega$ con $n \leq 2$, $P(n)$ vale.

□

1.2. Recurrencia

Ejercicio 1.2.1. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geq 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz $r = 2$ de multiplicidad $m = 2$. La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n$$

Y ahora buscar los valores de c_1 y c_2 usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 3$, entonces:

$$1 = (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1$$

$$3 = (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right)2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Ejercicio 1.2.2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0$$

El orden k de la recurrencia es 2 ($k = 2$). La ecuación característica:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

En definitiva

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & m_1 &= 1 \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & m_2 &= 1 \end{aligned}$$

y se tiene: $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$

Si $\{x_n\}$ es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

para ciertos valores de c_1 y c_2 .

Ejercicio 1.2.3. Reuelva el problema de recurrencia

$$\begin{aligned}u_0 &= 0 \\u_1 &= 1 \\u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 0$ y $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned}0 &= x_0 \\&= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\&= c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= x_1 \\&= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\&= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\&= c_1 \sqrt{5} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

La solución del problema es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Ejercicio 1.2.4. Calcular la solución del problema de recurrencia

$$\begin{aligned}u_0 &= 2 \\u_1 &= 1 \\u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio ??, sabemos que si:

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 2$ y $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = 2 - c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\ \implies 1 &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\ \implies 0 &= c_1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \\ \implies c_1 \sqrt{5} &= \sqrt{5} \implies c_1 = 1 \implies c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución es:

$$x_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ejercicio 1.2.5. Resuelva el siguiente problema de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 3 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \end{aligned}$$

De orden: $k = 2$

Ecuación característica: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Soluciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \\ r_1 &= 2 \quad m_1 = 2 \end{aligned}$$

Solución general:

$$x_n = (c_1 + c_2)2^n$$

Pasamos ahora a buscar los valores de c_1 y c_2 :

$$\begin{aligned} 1 &= u_0 \\ &= x_0 \\ &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 \\ &= c_1 \cdot 1 \\ &= c_1 \implies c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= u_1 \\ &= x_1 \\ &= (1 + c_2 \cdot 1)2^1 \\ &= (1 + c_2) \cdot 2 \\ &= 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La solución

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right) 2^n = \frac{2+n}{2} 2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Ejercicio 1.2.6. De el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como “Torres de Hanoi”, en función del número de discos n con los que cuente.

Para $n \geq 0$ sea u_n el número de pasos solicitado. Si el puzzle tuviese $n+1$ discos entonces (Intuimos que es mover $n-1$ piezas, mover la base y mover $n-1$ piezas):

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 1 + u_n \\ &= 2u_n + 1 \end{aligned}$$

Así pues recurrentemente:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

que resolveremos esquemáticamente:

$$k = 1.$$

Ecuación característica: $x - 2$.

Función de ajuste: $f(n) = 1^n = 1$.

Multiplicidad de 1 como solución de la ecuación característica: $m = 0$.

Solución particular:

$$x_n^{(p)} = n^m q(n) 1^n \quad \deg(g(n)) \leq \deg(p(n)) = 0$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_2 1^n = c_2 \\ x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 2^n + c_2 \end{aligned}$$

Calcularemos c_2 sin contar con valores de la sucesión. Sabemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} \\ &= c_2 - 2c_2 \\ &= c_2(1 - 2) = -c_2 \implies c_2 = -1 \end{aligned}$$

Luego

$$x_n = c_1 2^n - 1$$

y como $x_0 = u_0 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 2^0 - 1 \\ &= c_1 - 1 \implies c_1 = 1 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$x_n = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned} n &= 0; & x_n &= 0 \\ n &= 1; & x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\ n &= 2; & x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ n &= 3; & x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\ n &= 4; & x_4 &= 2^4 - 1 = 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. Sea

$$u_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n .
2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n .

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= \sum_{k=0}^n k 2^k \quad n \geq 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k 2^k \right) + n 2^n \\ &= u_{n-1} + n 2^n \end{aligned}$$

O sea, $u_n = u_{n-1} + n 2^n$

2. Resolvemos el problema

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= u_{n-1} + n 2^n \end{aligned}$$

Orden: $k = 1$.

Ecuación característica: $x - 1$.

Solución homogénea: $x_n^{(h)} = c_1$.

Función de ajuste: $f(n) = p(n)s^n = n2^n$.

$\Rightarrow p(n) = n, \deg(p(n)) = 1$. $S = 2$, que no es solución de la ecuación característica, luego $m = 0$.

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= x^0(c_2 + c_3n)2^n \\ &= (c_2 + c_3n)2^n \end{aligned}$$

Calculemos $x_n^{(p)}$, o sea, los valores de c_2 y c_3 .

$$(n+1)2^{n+1} = x_{n+1}^{(p)} - x_n^{(p)}$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (c_2 + c_3n)2^n \\ x_{n+1}^{(p)} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} \\ (n+1)2^{n+1} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} - (c_2 + c_3n)2^n \\ 2(n+1)2^n &= 2(c_2 + c_3(n+1))2^n - (c_2 + c_3n)2^n \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3(n+1) - c_2 - c_3n) \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3n + 2c_3 - c_2 - c_3n) \\ &= 2^n(c_2 + (2c_3 - c_3)n + 2c_3) \\ &= 2^n(c_2 + 2c_3 + c_3n) \end{aligned}$$

luego

$$2n + 2 = 2(n+1) = c_3n + c_2 + 2c_3$$

basta con que

$$\begin{aligned} 2 &= c_3 \\ 2 &= c_2 + 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto $c_3 = 2$ y

$$\begin{aligned} 2 &= c_2 + 2 \cdot 2 \\ &= c_2 + 4 \Rightarrow c_2 = -2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (-2 + 2n)2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$

En definitiva

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 + (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$

y como $x_0 = u_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + (0 - 1)2^{0+1} \\ &= c_2 - 2 \end{aligned}$$

luego $c_1 = 2$ y por tanto:

$$x_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

Respuesta:

$$u_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

Ejercicio 1.2.8. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe hacer al final de cada plazo?

u_n es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del n -ésimo plazo, es decir, a continuación del n -ésimo pago. Entonces, para todo $0 \leq n \leq T-1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1 + I)u_n - P \end{aligned}$$

y el problema de recurrencia a resolver es:

$$\begin{aligned} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1 + I)u_n - P \quad 0 \leq n \leq T - 1 \end{aligned}$$

lo cual hacemos.

$$k = 1.$$

Ecuación característica: $x - (1 + I) = 0 = 0$.

Solución homogénea: $x_n^{(h)} = c(1 + I)^n$.

Función de ajuste: $f(n) = -P = -P \cdot 1^n$.

Los casos son los siguientes:

■ $I = 0$;

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c \\ x_n^{(p)} &= n^m \cdot A \cdot 1^n \\ &\stackrel{m=1}{=} nA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -P &= (n + 1) - nA \\ &= A(n + 1 - n) = A \end{aligned}$$

$$x_n = c - nP$$

como $x_0 = u_0 = S$ entonces:

$$S = x_0 = C - 0 \cdot P = C$$

luego

$$x_n = S - nP$$

Como $x_T = 0$, entonces

$$0 = S - T \cdot P$$

luego

$$P = \frac{S}{T}$$

■ $I \neq 0$;

$$x_n^{(p)} = A$$

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} \\ &= A - (1+I)A \\ &= A(1 - (1+I)) = -AI \implies A = \frac{P}{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} S = x_0 &= c(1+I)^0 + \frac{P}{I} \implies c = S - \frac{P}{I} \\ x_n &= \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^n + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$0 = x_T = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{P}{I} &= \left(\frac{P}{I} - S\right)(1+I)^T \\ P &= (P - SI)(1+I)^T \\ &= P(1+I)^T - SI(1+I)^T \\ P(1 - (1+I)^T) &= -SI(1+I)^T \\ P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - 1} \\ &= SI(1 - (1+I)^{-T})^{-1} \end{aligned}$$

Respuesta

$$P = SI(1 - (1+I)^{-T})^{-1}$$

Ejercicio 1.2.9. Orden: $k = 2$ porque

$$u_n = 0 \cdot u_{n-1} + u_{n-2} + 2^n + (-1)^n$$

Ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 &&= (x+1)(x-1) \\ r_1 &= -1m_1 &&= 1 \\ r_2 &= 1m_2 &&= 1 \end{aligned}$$

Solución homogénea

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_3 2^n + n^1 c_4 (-1)^n \\ &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

Para el cálculo de c_3 y c_4

$$u_{n+2} = u_n + 2^{n+2} + (-1)^n$$

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3 2^{n+2} + (n+2)c_4 (-1)^n \\ x_n^{(p)} &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + (-1)^n &= x_{n+2} - x_n^{(p)} \\ &= c_3 2^{n+2} + (n+2)c_4 (-1)^n \\ &\quad - c_3 2^n - n c_4 (-1)^n \\ &= 2^n (2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n ((n+2)c_4 - n c_4) \\ &= 2^n \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

y en definitiva tenemos:

$$4 \cdot 2^n + (-1)^n = (3c_3)2^n + (-1)^n 2c_4$$

basta con que

$$\begin{aligned} 3c_3 &= 4 \implies c_3 = \frac{4}{3} \\ 2c_4 &= 1 \implies c_4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \frac{4}{3} 2^n + n \frac{1}{2} (-1)^n \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \end{aligned}$$

Calculamos x_n

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2}$$

y como $x_0 = u_0 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \\ \implies c_1 + c_2 &= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y como $x_1 = u_1 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_1 \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{16-3}{6} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{13}{6} \\ c_1 - c_2 &= \frac{13}{6} - 2 = \frac{1}{6} \\ \begin{cases} c_1 - c_2 &= \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 &= \frac{2}{3} \end{cases} \\ 2c_1 &= \frac{5}{6} \implies c_1 = \frac{5}{12} \\ c_2 &= \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left(\frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}2^{n+2} + \left(\frac{5+6n}{12} \right) (-1)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Respuesta

$$x_n = \frac{1}{3}2^{n+2} + \left(\frac{5+6n}{12} \right) (-1)^n + \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.2.10. Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

■ Orden: $k = 2$.

- Ecuación característica: $x^2 + 4x + 16 = 0$ que tiene como raíces

$$r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

forma polar:

$$\begin{aligned} |r_1| &= 4 \\ \frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1+\operatorname{Re}(z)/|z|} &= \frac{\sqrt{3}/2}{1-1/2} \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi/3}{2}\right) \end{aligned}$$

y así

$$2 \operatorname{arc tg}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1+\operatorname{Re}(z)/|z|}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Solución homogénea:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Solución particular:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left(c_3 \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) \right) \\ &= 4^n \left(-16c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$x_{n+1}^{(p)} = 4^n \left(4c_4 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4c_3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

1.3. Lógica Proposicional

Ejemplo. $a \rightarrow b$ (siempre que $b \neq a$) es refutable

Demostración. Basta tomar una valoración v tal que $v(a) = 1$ y $v(b) = 0$.

De hecho, $a \rightarrow b$ es satisfacible, luego es una fórmula contingente. \square

Ejemplo. Todas las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías (siempre verdaderas):

1. $(a \rightarrow a)$

2. $(\alpha \vee \neg\alpha)$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} v(a \rightarrow a) &= v(a)v(a) + v(a) + 1 \\ &= v(a) + v(a) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + v(\neg\alpha) \\ &= v(\alpha)(v(\alpha) + 1) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha) + v(\alpha) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

\square

Ejercicio. Demuestre que las siguientes reglas son correctas

1.

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha \wedge \beta}{\gamma}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir

$$v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1 = v(\alpha \wedge \beta)$$

Debemos demostrar que $v(\gamma) = 1$.

Sabemos por hipótesis que:

■

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \\ &= v(\alpha)v(\beta \rightarrow \gamma) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} \\ &\quad + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Si y sólo si

$$v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) = 0$$

Si y sólo si

$$v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) = v(\alpha)v(\beta)$$

■

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \wedge \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) \end{aligned}$$

Y uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos:

$$\begin{aligned} v(\gamma) &= 1 \cdot v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\beta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $v(\gamma) = 1$ y la regla sabemos ahora que es correcta

2.

$$\frac{\alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$$

Sea v tal que

$$v(\alpha \rightarrow \gamma) = 1 = v(\beta \rightarrow \gamma)$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \\ 1 &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

O sea

$$\begin{aligned} v(\alpha)v(\gamma) &= v(\alpha) \\ v(\beta)v(\gamma) &= v(\beta) \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= v(\alpha \vee \beta)v(\gamma) + v(\alpha \vee \beta) + 1 \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta))v(\gamma) \\ &\quad + (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\gamma) \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Y aplicando las igualdades anteriormente obtenidas:

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\beta)} \\ &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\beta)} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.

$$\frac{\gamma \rightarrow \alpha \quad \gamma \rightarrow \beta}{\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

4.

$$\frac{\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma \quad \alpha \quad \beta}{\gamma}$$

5. Ley de resolución.

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \alpha \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$$

Sea v tal que

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 = v(\neg \alpha \vee \gamma)$$

y demostremos que

$$v(\beta \vee \gamma) = 1$$

Si $v(\alpha \vee \beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$.Si $v(\neg \alpha \vee \gamma) = 1$, entonces $v(\alpha) = 0$ ó $v(\gamma) = 1$.

- Si $v(\beta) = 1$, entonces $v(\beta \vee \gamma) = 1$.

Supongamos por tanto que $v(\beta) = 0$. Y demostremos que $v(\gamma) = 1$.Si $v(\beta) = 0$, entonces $v(\alpha) = 1$, por lo que $v(\alpha) \neq 0$ y por tanto, $v(\gamma) = 1$, de donde $v(\beta \vee \gamma) = 1$.

Hagámoslo ahora con el estilo algebraico:

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \alpha \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$$

Sea v tal que

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 = v(\neg \alpha \vee \gamma)$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ 1 &= (v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + \cancel{v(\alpha)} + v(\alpha) + 1 + \cancel{v(\gamma)} \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

O sea

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ 0 &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha) &= v(\alpha)v(\gamma) \end{aligned}$$

Demostremos que

$$v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) = 1$$

$$\begin{aligned} v(\beta) &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ v(\beta)v(\gamma) &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + v(\gamma) \\ v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + \cancel{v(\gamma)} + v(\beta) + \cancel{v(\gamma)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por la fórmula de arriba

Ejemplo. Regla de reducción al absurdo clásica

$$\frac{\begin{array}{l} \neg\alpha \rightarrow \beta \\ \neg\alpha \rightarrow \neg\beta \end{array}}{\alpha}$$

Ejemplo. Regla de reducción al absurdo intuicionista

$$\frac{\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \rightarrow \neg\beta \end{array}}{\neg\alpha}$$

Ejemplo. Demostración por casos

$$\frac{\begin{array}{l} \neg\alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \rightarrow \beta \end{array}}{\beta}$$

Ejemplo. Para cualesquiera fórmulas α y β

$$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$$

Demostración. Sea v fija pero arbitraria a condición de que $v(\alpha) = 1 = v(\alpha \rightarrow \beta)$. Hemos de demostrar que $v(\beta) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ &= 1 \cdot v(\beta) + 1 + 1 \\ &= v(\beta) \end{aligned}$$

□

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Ejercicio 1.3.1. Dada una fórmula α , tenemos que:

α es una tautología si y sólo si $\models \alpha$

Demostración. Para toda asignación v

$$v_*(\emptyset) = \emptyset \subseteq \{1\}$$

Sabremos que $\models \alpha$ si y sólo si para toda asignación $v(\alpha) = 1$, si y sólo si α es una tautología. \square

Proposición 1.1.

1. El conjunto \emptyset es satisfacible.
2. Existen conjuntos insatisfacibles.
3. Si Δ es insatisfacible y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces Γ es insatisfacible.
4. $\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha\}$ es insatisfacible.

Demostración.

1. Por vacuidad:
Sabemos que existen valoraciones. Dado una fórmula a_0 :

$$\chi_{\{a_0\}}$$

Si \emptyset fuese insatisfacible, existiría $\varphi_v \in \emptyset$ tal que $v(\varphi_v) = 0$, lo cual es absurdo.

2. Lo sabemos porque existen símbolos de variable proposicional.

$$\{a, \neg a\}$$

es insatisfacible.

3. Fácil de ver.
4. Sea v tal que $v(\alpha) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} v(\alpha \rightarrow \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 1 \cdot 0 + 1 + 1 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Si $\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha\}$ fuera satisfacible, debería ser $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1$, pero si $v(\alpha) = 1$, entonces $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$. \square

Proposición 1.2 (Modus ponens). *Para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$. Si*

$$\Gamma \models \alpha \text{ y } \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$$

Entonces, $\Gamma \models \beta$.

O sea, si $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\Gamma)$, entonces $\beta \in \text{Con}(\Gamma)$.

$\text{Con}(\Gamma)$ es cerrado por la regla:

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \rightarrow \beta \end{array}}{\beta}$$

Proposición 1.3. *Para toda α y β , $\beta \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$.*

Demostración.

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \text{Con}(\emptyset) \subseteq \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha \in \text{Con}(\emptyset) \subseteq \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$$

$$\implies \alpha, \neg\alpha \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$$

$$\implies \beta \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$$

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha \\ \alpha \wedge \neg\alpha \end{array}}{\alpha} \quad \frac{\begin{array}{c} \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \\ \alpha \wedge \neg\alpha \end{array}}{\neg\alpha} \quad \frac{\begin{array}{c} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ \neg\alpha \rightarrow \beta \end{array}}{\neg\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\begin{array}{c} \neg\alpha \rightarrow \beta \\ \beta \end{array}}$$

Si $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \subseteq \Gamma$, entonces para todo β , $\beta \in \text{Con}(\Gamma)$.

□

Ejercicio 1.3.2. Clasifique las siguientes fórmulas:

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$
3. $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

1.

$$\begin{aligned} v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \\ &\quad + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\neg\beta) + 1) \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\beta) \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\beta) + v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\neg\beta) + v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + 1 \\ &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Se trata de una tautología.

2. También es una tautología

3.

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) &= v(\alpha \rightarrow \neg\beta)v(\neg\alpha \rightarrow \beta) + v(\alpha \rightarrow \neg\beta) + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\neg\alpha) + 1})^0 \\
 &\quad + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\
 &= \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)v(\beta)}^0 + v(\neg\alpha)v(\beta)v(\alpha) \\
 &\quad + v(\neg\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)}^0 + v(\neg\alpha) \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1} \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1} + 1 \\
 &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\
 &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, depende de los valores de α y de β :

- Si $v(\neg\alpha) = 1 = v(\neg\beta)$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 0$$

- Si $v(\neg\alpha) = 0$ ó $v(\neg\beta) = 0$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 1$$

En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. El caso particular en el que α y β fuesen símbolos de variable proposicional, daría una fórmula contingente.

Ejercicio 1.3.3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, se cumple

$$Con(\Gamma, \alpha \vee \beta) = Con(\Gamma, \alpha) \cap Con(\Gamma, \beta)$$

La demostración es por doble inclusión.

\subseteq) Para cualesquiera fórmulas α, β se tiene que $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ es una tautología, luego

$$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in Con(\emptyset)$$

$$\emptyset \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$$

$$Con(\emptyset) \subseteq Con(\Gamma, \alpha)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in Con(\Gamma, \alpha)$$

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Con(\Gamma, \alpha)$$

$$\alpha \in Con(\Gamma, \alpha)$$

$$Con(\Gamma, \alpha) \text{ es cerrado por modus ponens}$$

$$\alpha \vee \beta \in Con(\Gamma, \alpha)$$

De la misma manera, tenemos que $\alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \beta)$, de donde:

$$\alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma &\subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta) \\ \Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} &\subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \\ \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) &\subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma, \alpha)) = \text{Con}(\Gamma, \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) &\subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \\ \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) &\subseteq \text{Con}(\Gamma, \beta) \\ \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) &\subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)\end{aligned}$$

\supseteq) Sea $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$

$$\begin{aligned}(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)) &\in \text{Con}(\emptyset) \\ (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)) &\in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \gamma &\in \text{Con}(\Gamma) \text{ y } \beta \rightarrow \gamma \in \text{Con}(\Gamma) \\ \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma &\in \text{Con}(\Gamma)\end{aligned}$$

Por ser $\text{Con}(\Gamma)$ cerrado por modus ponens.

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$$

Luego $\text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$