

Ecuaciones Diferenciales I



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Ecuaciones y sistemas	9
1.1. Crecimiento proporcional	10
2. Relaciones de Problemas	13
2.1. Ecuaciones y sistemas	13

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función a los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal <https://www.ugr.es/~rortega/>. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

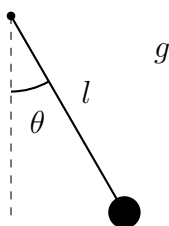
Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área “Ecuaciones Funcionales”, pero gracias a que en física $F = m \cdot a$, podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

Ejemplo. Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos l .
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos g .
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos θ .



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo (t), y ver ahora la variable θ como una variable dependiente en función de t :

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si $\theta(t)$ es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación¹:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (1)$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones θ que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

¹De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente (t , que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función (x , en función de t), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La Φ que aparece en (2) será una función:

$$\begin{aligned} \Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y) \end{aligned}$$

Donde trataremos de ver x como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de t : $x = x(t)$, siendo y su derivada.

Ejemplo. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función Φ en cuestión es:

$$\begin{aligned} \Phi : D = \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t & x(t) &= \cos t \\ x(t) &= 1 & x(t) &= -1 \end{aligned}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \sin(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en \mathbb{R}^* por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{aligned} f : C \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para x' : $x'(t) = h(t)$, a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7t \\ f(t, x) &= 7t\end{aligned}$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7x \\ f(t, x) &= 7x\end{aligned}$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \quad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

nde ejemplo

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \sin t$
- $x'(t) = \sin x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \sin t \\ f(t, x) &= \sin t\end{aligned}$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \sin x \\ f(t, x) &= \sin x\end{aligned}$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

1. Ecuaciones y sistemas

Definición 1.1 (Ecuación Diferencial y solución). Una ecuación diferencial viene dada por una función

$$\begin{aligned}\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y)\end{aligned}$$

continua donde D es un **abierto**¹ **conexo**² de \mathbb{R}^3 .

Una **solución** de dicha ecuación diferencial será una función

$$\begin{aligned}x : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t)\end{aligned}$$

con $I \subseteq \mathbb{R}$ **intervalo**³ **abierto**⁴ tal que:

- I) x sea derivable en I ⁵.
- II) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ ⁶.
- III) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

y la expresión:

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}$$

Probar que dicha expresión es solución de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial viene dada por

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto y - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

- Cogiendo $I =]19, +\infty[$, tenemos I).

¹Por convenio, ya que las ecuaciones diferenciales no se comportan bien en los bordes.

²Es lógico pensarlo, ya que estamos estudiando movimientos.

³Es lógico, pues usualmente t será el tiempo.

⁴Pudiendo trabajar con funciones continuas en un cerrado y derivables en el abierto, evitando así por ejemplo tangentes verticales

⁵Necesario para poder considerar $x'(t)$ en la propia ecuación.

⁶En vistas de III).

- Por ser la raíz una función continua y creciente, tenemos que $x(I) =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$, de donde se cumple II).

■

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-38}} = \frac{1}{x(t)} \quad \forall t \in I$$

Notación. La notación que hemos estado utilizando para las ecuaciones diferenciales no es la que usaremos a lo largo del curso:

Lo que hasta ahora hemos notado y entendido por:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Como en el caso:

$$x'(t) = 3x(t)$$

Lo notaremos ahora por:

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, x') &= 0 \\ x' &= 3x \end{aligned}$$

Que recordamos tiene por solución:

$$x(t) = c \cdot e^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, resolver:

$$1. \quad x' = \lambda x$$

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x' = \lambda t$$

$$x(t) = \frac{\lambda}{2} t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

1.1. Crecimiento proporcional

En el capítulo anterior nos preguntábamos si todas las soluciones de la ecuación $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ eran de la forma

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora daremos respuesta a dicha cuestión, comentando además utilidades de la misma ecuación.

Proposición 1.1. Dada $x(t)$, solución de $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto I , existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad t \in I$$

Antes de dar paso a la demostración, observemos que si suponemos cierta la tesis:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \iff e^{-\lambda t} x(t) = c \implies \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} x(t)) = 0$$

Demostración. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-\lambda t}x(t) \end{aligned}$$

que es derivable por ser producto de funciones derivables.

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)) = -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t}x'(t) \\ &= -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + \lambda e^{-\lambda t}x(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por ser f continua y definida en un intervalo, llegamos a que es constante, luego $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = e^{-\lambda t}x(t) = c \quad \forall t \in I$, de donde deducimos que:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

□

Nos centraremos ahora en la idea intuitiva de derivada como representación de la variación de una variable dependiente para dar lugar a los siguientes dos ejemplos que nos muestran cómo surge la ecuación diferencial $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma natural.

Ejemplo. Si ingresamos un capital inicial $C(0) = 100$ en un banco que nos da el 2 % anual de interés, al cabo de un año tendremos en nuestra cuenta:

$$C(1) = C(0) + \frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{2}{100} \cdot 100 = 102$$

Sin embargo, si acudimos a otro banco que nos ofrece la misma tasa anual de interés pero que nos realiza pagos semestrales, al cabo de un año conseguiremos reunir:

$$\begin{aligned} C(1/2) &= C(0) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(0) = 100 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 100 = 101 \\ C(1) &= C(1/2) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(1/2) = 101 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 101 = 102,01 > 102 \end{aligned}$$

En general, si Δt es la fracción del año en la que se nos hacen los pagos ($\Delta t = 1$ significa que es pago anual), la fórmula es:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{2}{100} \Delta t C(t)$$

de donde:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{2}{100} C(t)$$

Si ahora vamos a un banco que nos haga pagos continuos, dicha fracción de tiempo será mínima, por lo que podemos pensar que $\Delta t \rightarrow 0$ y hacer un paso al límite (no riguroso) para obtener que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t) = \frac{2}{100} C(t)$$

De donde tenemos

$$C' = \frac{2}{100}C$$

o de forma general, si notamos por $I \in \mathbb{R}$ a la tasa de interés:

$$C' = IC$$

Cuyas soluciones ya sabemos que se tratan de cualquier función de la familia:

$$C(t) = c \cdot e^{It} \quad c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el crecimiento del dinero en un banco que nos ofrezca un interés continuo es exponencial. En este ejemplo, vemos cómo el crecimiento del dinero en una cuenta bancaria es exponencial a la propia cantidad de dinero de la que disponemos en la misma.

Ejemplo. La teoría física de la radioactividad nos dice que las sustancias radioactivas van perdiendo masa a una velocidad proporcional a la masa de la propia sustancia. Es decir, si representamos la masa de una sustancia radioactiva como variable dependiente del tiempo $m = m(t)$:

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

Para cierto parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ relativo a la sustancia radioactiva que consideremos.

Gracias al estudio anteriormente realizado de la ecuación diferencial $m' = -\lambda m$, sabemos ya que soluciones de esta son cualesquiera funciones de la forma:

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

En este ejemplo, hemos vuelto a observar la interpretación de la derivada como cuantía de la variación de una determinada variable dependiente.

Más adelante en estos mismos apuntes podremos observar el uso de la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva.

2. Relaciones de Problemas

2.1. Ecuaciones y sistemas

Ejercicio 2.1.1. En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo t . Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos.

Ejercicio 2.1.2. Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.
2. El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

Ejercicio 2.1.3. En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t , $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Ejercicio 2.1.4. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1. $xy = k$,
2. $y = kx^4$,
3. $y = e^{kx}$.

Ejercicio 2.1.5. Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Ejercicio 2.1.6. Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.
3. La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

Ejercicio 2.1.7. Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0, s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

Observación. Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

Ejercicio 2.1.8. Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{2.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{2.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (2.1).

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (2.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (x'(t))^2 + x^2(t). \end{aligned}$$

Por ser x una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x, x' \in C^1(I)$ y, por tanto f es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t) [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que f es constante en I . Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}(x'(t))^2 + x^2(t) &= 0^2 + 1^2 = 1, \\ x''(t) + x(t) &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.9. Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\end{aligned}$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t ; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.
2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

Ejercicio 2.1.10. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$,
2. $x = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$.

Ejercicio 2.1.11. Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx_0 + \varphi(x_0)$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.
2. Suponiendo que $\varphi(x) = x^2$, demuestre que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ también es solución.
3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

Ejercicio 2.1.12. Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.