Cálculo II
Examen V

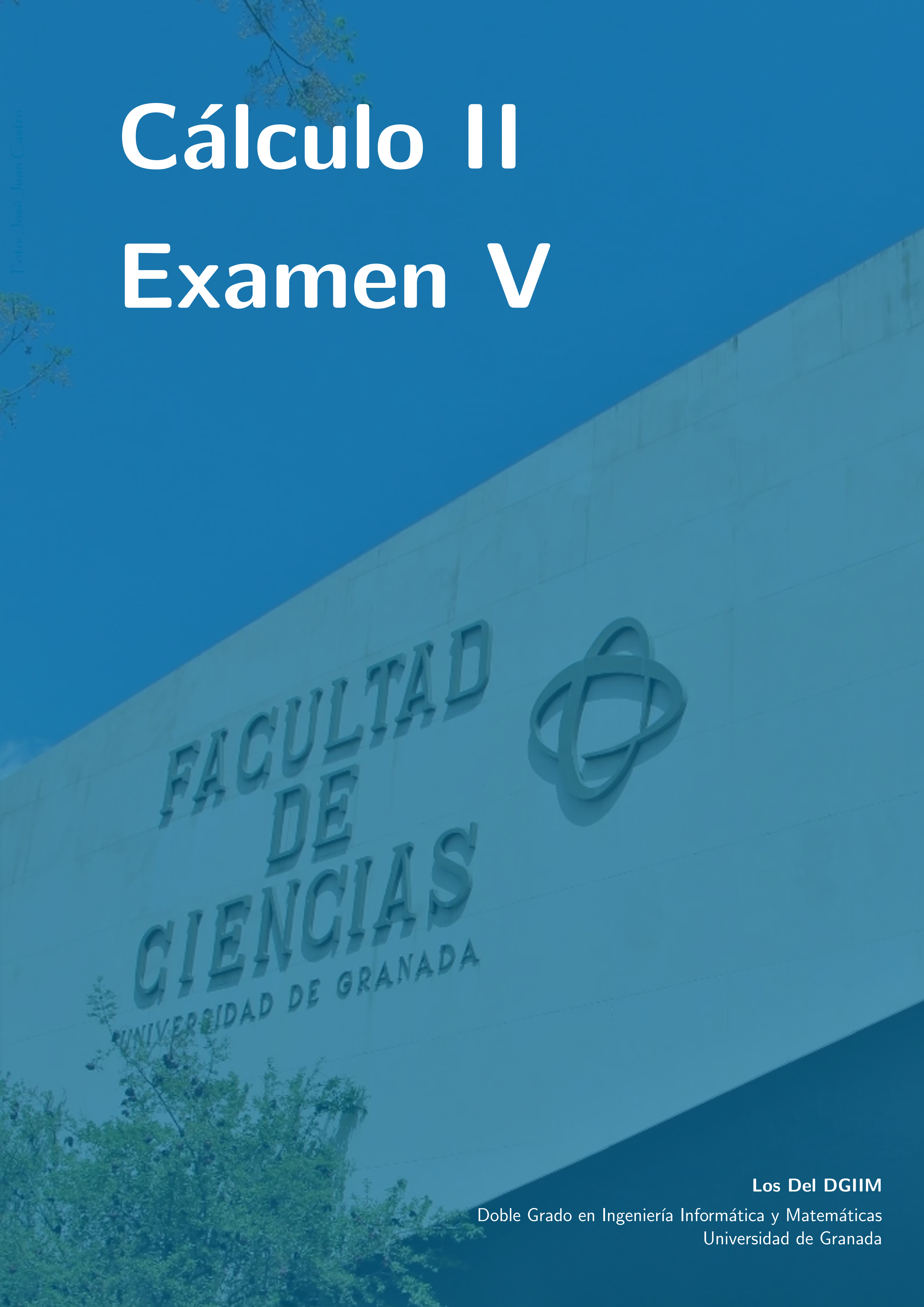


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen V

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Primer Parcial. Derivación. Temas 1-4.

Fecha 3 de mayo de 2021.

Ejercicio 1. [1 punto]. Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

Fijo $y = y_0$. Calculamos la imagen de:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = |\cos x - \cos y| - |x-y|$$

- **Opción 1**: Usando teoría de funciones lipschitzianas.

  Sea $f(x) = \cos(x)$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y tenemos que f' está acotada, tenemos que f es lipschitziana, por lo que:

  $$|\cos x - \cos y| \leq M|x-y|$$

  El valor mínimo de M que se puede emplear es denominado constante de Lipschitz, y en este caso tenemos que es la cota de la derivada. Como $|f'(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $M \geq 1$. Por tanto,

  $$|\cos x - \cos y| \leq 1 \cdot |x-y| \leq M|x-y|$$

  En conclusión, queda demostrado que

  $$|\cos x - \cos y| \leq |x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- **Opción 2**: Calculando las imágenes de las funciones.

  Dividimos nuestro estudio en 4 casos, para así no trabajar con el valor absoluto.

  - Suponemos $\cos x \geq \cos y \quad \wedge \quad x \geq y$:

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos x - \cos y - x + y$$

    $$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

    Por tanto, tenemos que f es decreciente. Como, en este caso, la función está definida en $[y, +\infty[$, y $f(y) = 0$, tenemos que:

    $$f(x) \leq 0 \qquad \forall x \geq y$$

  - Suponemos $\cos x < \cos y \quad \wedge \quad x \geq y$:

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = -\cos x + \cos y - x + y$$

    $$f'(x) = \operatorname{sen} x - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

    Por tanto, tenemos que f es decreciente. Como, en este caso, la función está definida en $[y, +\infty[$, y $f(y) = 0$, tenemos que:

    $$f(x) \leq 0 \qquad \forall x \geq y$$

  - Suponemos $\cos x < \cos y \quad \wedge \quad x < y$:

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = -\cos x + \cos y + x - y$$

    $$f'(x) = \operatorname{sen} x + 1 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

    Por tanto, tenemos que f es creciente. Como, en este caso, la función está definida en $]-\infty, y[$, y $\lim_{x \to y^-} f(x) = 0$, tenemos que:

    $$f(x) \leq 0 \qquad \forall x < y$$

- Suponemos $\cos x \geq \cos y \quad \wedge \quad x < y$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos x - \cos y + x - y$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + 1 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que f es creciente. Como, en este caso, la función está definida en $]-\infty, y[$, y $\lim_{x \to y^-} f(x) = 0$, tenemos que:

$$f(x) \leq 0 \qquad \forall x < y$$

Por tanto, independientemente del caso en el que estemos, tenemos que $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$f(x) = |\cos x - \cos y| - |x - y| \leq 0 \Longrightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como el razonamiento es válido $\forall y \in \mathbb{R}$ (simplemente tendríamos que cambiar el valor de y_0 fijado), tenemos que:

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2. [2 puntos]. Sea $a > 0$.

1. Determinar (en función del parámetro a) la imagen de la función $f_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) := x \ln a - a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

Necesitamos calcular la imagen de la función. Para ello, en primer lugar, calculamos los extremos relativos sabiendo que la función es continua y derivable.

$$f_a'(x) = \ln a - \frac{a}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{a}{\ln a}$$

$$f_a''(x) = \frac{a}{x^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, tenemos que $x = \frac{a}{\ln a}$ es un mínimo relativo.

$$f_a\left(\frac{a}{\ln a}\right) = \frac{a}{\ln a} \cdot \ln a - a \ln \frac{a}{\ln a} = a - a \ln \frac{a}{\ln a} = a\left(1 - \ln \frac{a}{\ln a}\right)$$

Calculamos ahora el comportamiento de la función en $x = 0$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0} f_a(x) = \lim_{x \to 0} x \ln a - a \ln x = -a \ln(0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to \infty} x \ln a - a \ln x = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{a^x}{x^a}\right)$$

Por tanto, para estudiar el comportamiento en $+\infty$, diferencio en función del valor de a:

- Para $a = 1$:

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 0 = -\infty$$

- Para $a < 1$:

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{a^x}{x^a}\right) = \ln\frac{0}{\infty} = \ln 0 = -\infty$$

- Para $a > 1$:

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{a^x}{x^a}\right) = \ln\infty = \infty$$

Por tanto, para $a > 1$, tenemos que $Im(f_a) = \left[a\left(1 - \ln\frac{a}{\ln a}\right), +\infty\right[$.

Para $a \leq 1$, tenemos que $Im(f_a) = \mathbb{R}$.

2. Determinar los valores de $a > 0$ que son tales que $x\ln a \geq a\ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

Para ello, necesito que $Im(f_a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Por tanto, descartamos los $a \leq 1$.

Para que $Im(f_a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, necesitamos que:

$$a\left(1 - \ln\frac{a}{\ln a}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln\frac{a}{\ln a} \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{a}{\ln a} \leq e \Longleftrightarrow e - \frac{a}{\ln a} \geq 0$$

Calculo por tanto la imagen de $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = e - \frac{x}{\ln x}$.

$$g'(x) = \frac{-\ln x + 1}{\ln^2 x} = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$$

- Para $x < e$: $g'(x) > 0 \Longrightarrow g$ estrictamente creciente.
- Para $x > e$: $g'(x) < 0 \Longrightarrow g$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos que $x = e$ es un máximo relativo. Sabemos que $g(e) = 0$. Vemos ahora el comportamiento en $x = 1^+$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\frac{1}{\ln 1^+} = -\frac{1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = e - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = e - \infty = -\infty$$

Por tanto, tenemos que $Im(g) = \mathbb{R}_0^-$. Por tanto, el único valor de x que hace que $g(x) \geq 0$ es $x = e$.

Por tanto, el valor de $a > 0$ que hace que $x\ln a \geq a\ln\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ es $a = e$.

Ejercicio 3. [2.5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 4 - x^2$.

1. Estudiar la concavidad de f. ¿Posee algún punto de inflexión? Justifíquese la respuesta.

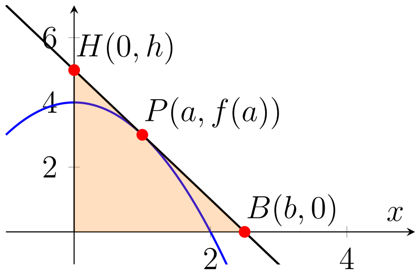
Sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Por tanto,

$$f'(x) = -2x \qquad f''(x) = -2$$

Como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, tenemos que la concavidad la determina la segunda derivada. Como $f''(x) = -2 < 0\ \forall x$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en todos los reales.

Además, al ser f dos veces derivable, una condición necesaria de punto de inflexión es que, en él, se anule la segunda derivada. Como $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 0$, entonces podemos afirmar que no hay puntos de inflexión.

2. Determinar el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $f(x) = 4-x^2$ cuya recta tangente corta en el primer cuadrante tanto al eje OX como al eje OY, determinando un triángulo de área mínima.



Por la interpretación geométrica de la derivada, tenemos que $f'(a) = -2a = m_t$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto P es:

$$f(x) = m_t x + n = -2ax + h$$

Como el punto P pertenece tanto a la recta como a la parábola,

$$f(a) = f(a) \Longrightarrow -2a^2 + h = 4 - a^2 \Longrightarrow h = 4 + a^2$$

Además, para $y = 0$, tenemos:

$$f(b) = 0 = -2ab + h \Longrightarrow b = \frac{h}{2a} = \frac{4+a^2}{2a}$$

por tanto, una vez establecidas las ecuaciones de ligadura, tenemos:

$$\begin{aligned} A :]0, 2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow A(a) = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{4+a^2}{2a} \cdot (4+a^2)}{2} = \frac{(4+a^2)^2}{4a} \end{aligned}$$

Para calcular el área mínima, minimizamos $A(a)$. Para ello, calculamos el mínimo de la función.

$$A'(a) = \frac{(4a)^2(4+a^2) - 4(4+a^2)^2}{(4a)^2} = 0 \Longleftrightarrow (4+a^2)(16a^2 - 4(4+a^2)) =$$
$$= (4+a^2)(12a^2 - 16) = 0 \Longleftrightarrow a = \sqrt{\frac{16}{12}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Comprobemos ahora si el punto crítico es, efectivamente, un mínimo relativo.

- Para $0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$: $A'(a) < 0 \Longrightarrow A'$ decreciente.
- Para $\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < 2$: $A'(a) > 0 \Longrightarrow A'$ creciente.

Por tanto, confirmamos que es un mínimo relativo. También es absoluto en ese intervalo, ya que es una función continua en un intervalo.

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

Por tanto, el punto que minimiza el área es:

$$(a, f(a)) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Ejercicio 4. [3 puntos]

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden 10 centrado en el origen de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

   Las derivadas sucesivas del seno son:

   $$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(4k+1)}(0) = 1 \qquad f^{(4k+3)}(0) = -1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

   Por tanto,
   $$P^f_{10,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

   Respecto al coseno, tenemos:

   $$f^{(4k)}(0) = 1 \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad f^{(4k+2)}(0) = -1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

   Por tanto,
   $$P^g_{10,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

2. Determinar $P^{\operatorname{sen} x}_{3,0}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y $P^{\cos x}_{3,0}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y dar la estimación del error cometido al aproximar $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ por dichos valores, respectivamente (esto es una aproximación del seno y del coseno del ángulo de 10^0).

   En primer lugar, trabajo con el seno.

   $$P^{\operatorname{sen} x}_{3,0}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{\pi^3}{18^3 \cdot 3!} \approx 0{,}1736$$

   Usando el Resto de Lagrange, el error cometido es, para algún $c \in \left[0, \frac{\pi}{18}\right]$:

   $$R^{\operatorname{sen} x}_{3,0}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{f^{4)}(c)}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = \frac{\operatorname{sen} c}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \leq \frac{\pi^4}{4! \cdot 18^4} = 3{,}8663 \cdot 10^{-5}$$

   Respecto al coseno, la aproximación es:

   $$P^{\cos x}_{3,0}\left(\frac{\pi}{18}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2} \approx 0{,}984769$$

Usando el Resto de Lagrange, el error cometido es, para algún $c \in \left[0, \frac{\pi}{18}\right]$:

$$R_{3,0}^{\cos x}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{g^{4)}(c)}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = \frac{\cos c}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \leq \frac{\pi^4}{4! \cdot 18^4} = 3{,}8663 \cdot 10^{-5}$$

No obstante, aunque la acotación del error a la que hemos llegado es la misma, como para $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$ se tiene que $\operatorname{sen} x < \cos x$, entonces podemos afirmar que la aproximación del seno es mejor.

3. Haciendo uso del polinomio de Taylor, calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(2x-\operatorname{sen} x)(\cos x-1)}{x^3}$.

Sea $h(x) = (2x - \operatorname{sen} x)(\cos x - 1)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \cancelto{0}{\frac{h(x) - P_{3,0}^h(x)}{x^3}} + \frac{P_{3,0}^h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3,0}^h(x)}{x^3} \overset{Ec.\ 1}{=} -\frac{1}{2}$$

Calculamos ahora el polinomio de Taylor necesario:

$$P_{3,0}^h(x) = \left[\left(2x - x + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} - 1\right)\right]_{n=3} = \left[\left(x + \frac{x^3}{6}\right)\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_{n=3} = -\frac{x^3}{2} \tag{1}$$

Ejercicio 5. [1.5 puntos] Calcular

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right).$$

Calculo el límite por partes. Resuelvo en primer la primera parte

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \overset{Ec.\ 3}{=} e^1 = e \tag{2}$$

donde he tenido que resolver previamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \tag{3}$$

Resuelvo ahora la segunda parte:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\ = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x}}{2x(1+x) + x^2} &= -\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x + 3x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2+6x} = -\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, uniendo ambas partes, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) \overset{Ec.\ 2{,}4}{=} -\frac{e}{2}$$