Resúmenes Análisis Matemático I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Resúmenes Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Irina Kuzyshyn

Granada, 2023-2024

Índice general

Introducción

En el presente libro se podrán encontrar resúmenes de lo básico del temario de la asignatura Análisis Matemático I, sin demostracioón alguna. En ningún caso con esto basta para comprender a la perfección la asignatura, simplemente es un recurso más para no olvidar lo básico.
Nota: prestar especial atención a los teoremas.

1. Espacios euclídeos, normados y métricos

1.1. Espacio Euclídeo

Definición 1.1.
$\mathbb{R}^N \quad N \in \mathbb{N} \quad fijo \quad \Delta_N = \{k \in \mathbb{N}/k <= N\}$
$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_N)/x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\}$
$x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad \longleftrightarrow \quad x : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R} \quad con \quad x(k) = x_k \quad \forall k \in \Delta_N$

Definición 1.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- Suma: $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_N + y_N) \qquad (x + y)(k) = x(k) + y(k) \quad \forall k \in \Delta_N$
- Producto por escalares: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_N) \qquad (\lambda x)(k) = \lambda x(k)$

Así, $\mathbb{R}^N$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Definición 1.3 (Base usual)**.** $\phi = \{e_1, \ldots, e_N\}$

$$e_k(j) = \begin{cases} 1 & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases} \qquad \forall k \in \Delta_N$$

$$x = \sum_{k=1}^{N} x(k)e_k \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Definición 1.4 (Producto escalar)**.** Sean $x,\ y \in \mathbb{R}^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)$$

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $(\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y)$
2. $(x|y) = (y|x)$
3. $(x|x) > 0$

Un espacio pre-hilbertiano es un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

1.2. Espacios normados

Definición 1.5 (Norma).

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$$

1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x\| > 0; \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
4. Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|(x|y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X$
5. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
6. $n \in \mathbb{N}, \quad x_1, \ldots, x_n \in X, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot \|x_k\|$$

Cuando tenemos definida una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, que cumple 1, 2 y 3 en un espacio vectorial, decimos que X es un espacio normado.

Ejemplo (Norma de la suma). $\|x\|_1 = \sum |x(k)|$

Ejemplo (Norma infinito). $\|x\|_\infty = \max\{|x(k)|/k \in \Delta_N\}$

1.3. Espacio métrico

Definición 1.6 (Distancia). $d(x,y) = \|y-x\|$; $\|x\| = d(0,x)$

1. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
3. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
4. $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x,y \in E$
5. $|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$
6. $d(x_0, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k)$

Cuando tenemos definida una aplicación $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, cumpliendo 1, 2 y 3, decimos que E es un espacio métrico, con la distancia d. E no tiene que ser un espacio vectorial. Todo espacio normado X se considera un espacio métrico con la distancia asociada a su norma:

$$d(x,y) = \|y-x\|$$

Ejemplo (Distancia discreta).

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

2. Topología de un espacio métrico

2.1. Topología de un espacio métrico

Para lo que sigue sea E un espacio métrico con distancia d.

Definición 2.1. Bolas abiertas de centro x y radio r:

$$B(x,r) = \{y \in E / d(x,y) < r\} \quad x \in E, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

1. $B(x,r) \neq \emptyset$
2. $0 < s < r \Longrightarrow B(x,s) \subset B(x,r)$
3. $\forall y \in B(x,r) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$
4. Se dice $U \subset E$ abierto si $\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(x,\varepsilon) \subset U$

Definición 2.2 (Topología)**.** En un conjunto no vacío Ω es una familia $T \subset P(\Omega)$ que verifica:

(A1) $\emptyset, \Omega \in T$

(A2) $S \subset T \Longrightarrow \cup S \in T$

(A3) $U, V \in T \Longrightarrow U \cap V \in T$

Un espacio topológico es un conjunto no vacío provisto de una topología.

Definición 2.3 (Normas equivalentes)**.** Dos distancias/normas en un mismo conjunto/espacio vectorial son equivalentes cuando generan una misma topología.

Proposición 2.1 (Inclusión entre las topologías de dos normas)**.** *Para dos normas* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *definidas en un mismo espacio vectorial* X*, equivalen:*
(i) $\exists \rho > 0 \ / \ \|x\|_2 \leqslant \rho \|x\|_1 \ \forall x \in X$
(ii) $T_2 \subset T_1$

Corolario 2.1.1 (Criterio de equivalencia entre normas)**.**

$$T_1 = T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda, \rho > 0 \quad / \quad \lambda \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Definición 2.4 (Topología inducida)**.** Si T es la topología de un espacio métrico E y T_A la de un subconjunto $A \subset E$, entonces:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$$

En particular si $A \in T$, entonces:

$$V \in T_A \quad \Longleftrightarrow \quad V \in T$$

2.2. Primeras nociones topológicas

En todo lo que sigue E espacio métrico, d distancia y T topología.

Definición 2.5 (Interior y entornos).

1. **Interior**:
$$A^o = \cup\{U \in T : U \subset A\}$$
Si $x \in A^o$ entonces decimos que x es **punto interior** de A o que A es entorno de x. Denotamos por $\mathcal{U}(x)$ a la **familia de entornos** de x.

2. A^o es el máximo abierto de E contenido en A.

3. $x \in A^o \iff A \in \mathcal{U}(x) \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$

4. $A \in T \iff A = A^o \iff A \in \mathcal{U}(x) \quad \forall x \in A$

5. $A \in \mathcal{U}(x), \quad A \subset C \subset E \Longrightarrow C \in \mathcal{U}(x)$

6. $\{A_i\}_{i=1\dots n} \subset \mathcal{U}(x) \Longrightarrow \cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}(x)$

Definición 2.6 (Conjuntos cerrados). Decimos que C es un conjunto cerrado, o simplemente **cerrado** si $E \setminus C \in T$.

$$C_T = \{E \setminus U : U \in T\}$$

1. $\emptyset, E \in C_T$

2. $D \subset C_T \implies \cap D \in C_T$

3. $C, D \in \mathcal{C}_T \implies C \cup D \in \mathcal{C}_T$

Definición 2.7 (Cierre).

$$\overline{A} = \cap\{C \in C_T : A \subset C\}$$

1. $\overline{A}$ es el mínimo conjunto cerrado que contiene a A.

2. $A \in C_T \iff A = \overline{A}$

3. $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^o \quad \forall A \in E$

4. $E \setminus A^o = \overline{E \setminus A} \quad \forall A \in E$

Definición 2.8 (Punto adherente a un conjunto). *Sea* $\quad x \in A \Longrightarrow$

$$X \in \overline{A} \quad \iff \quad U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \iff \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$$

Definición 2.9 (Bola cerrada). $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leqslant r\}$

Definición 2.10 (Esfera). $S(x, r) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$

Definición 2.11 (Frontera). $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^o$

1. $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$

2. $Fr(A) \in C_T$

3. $Fr(A) = Fr(E \setminus A)$

4. $\overline{A} = A \cup Fr(A)$ y $A^o = A \setminus Fr(A)$

5. $A \in T \iff A \cap Fr(A) = \emptyset$

6. $A \in C_T \iff Fr(A) \subset A$

7. $E = A^o \cup Fr(A) \cup (E \setminus A)^o$ es una partición de E, es decir:

$$A^o \cap Fr(A) = Fr(A) \cap (E \setminus A)^o = A^o \cap (E \setminus A)^o = \emptyset$$

Definición 2.12 (Puntos de acumulación)**.** Se dice de $x \in A'$ si es punto adherente de $A \setminus \{x\}$

$$\begin{aligned} A' &= \{x \in E : \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in E : B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

Definición 2.13 (Puntos aislados)**.**

$$x \in \overline{A} \setminus A' \iff \exists U \in \mathcal{U}(x)/U \cap A = \{x\} \iff \exists \varepsilon > 0/B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$$

$$\overline{A} = A' \cup A \implies A \in C_T \iff A' \subset A$$

2.3. Convergencia de sucesiones

En lo que sigue $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E y $x \in E$

$$\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies x_n \in U]$$

Proposición 2.2 (Caracterización de la convergencia usando distancias)**.**

- *En cualquier espacio métrico:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies d(x_n, x) < \varepsilon]$
- *En un espacio normado:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies \|x_n - x\| < \varepsilon]$
- *En* $\mathbb{R}$*:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies |x_n - x| < \varepsilon]$
- $\{x_\}$ $\longrightarrow x \iff \{d(x_n, x)\} \longrightarrow 0$
- $\{x_n\} \longrightarrow x$, $\{x_n\} \longrightarrow y \implies x = y$

Por tanto a ese x al que tiende la sucesión, por ser único, lo llamamos límite.

Proposición 2.3 (Convergencia de parciales)**.**

1. $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x$

2. $\{x_n\} \longrightarrow x \iff \{x_{k+n}\} \longrightarrow x$

3. $\{x_n\} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \{x_{2n}\} \longrightarrow x \wedge \{x_{2n+1}\} \longrightarrow x$

Proposición 2.4 (Caracterización del cierre)**.**

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\{x_n\} \subset A : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.5 (Caracterización del un conjunto cerrado)**.**

$$A \in C_T \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A \quad \exists\{x_n\} \subset A : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.6 (Criterio de equivalencia de dos distancias)**.** *Equivalen:*
(1) La topología generada por d_1 está incluida en la generada por d_2
(2) Toda sucesión convergente para d_2 lo es para d_1.

Proposición 2.7 (Convergencia en $\mathbb{R}^N$)**.**

$$\{x_n\} \longrightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \longrightarrow x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$$

3. Continuidad y límite funcional

3.1. Continuidad

Definición 3.1. Se dice que una función $f : E \longrightarrow F$ es continua en un punto cuando:

$$V \in \mathcal{U}(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Proposición 3.1 (Caracterizacion)**.** *Para $f : E \longrightarrow F$, $x \in E$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(i) f es continua en el punto x
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$
(iii) Sea $x_n \subset E$, $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$

Proposición 3.2 (Caracter local)**.**

$$f : E \longrightarrow F, \quad \emptyset \neq A \subset E, \quad x \in A$$

- *f continua en $x \implies f_{|A}$ continua en x*
- *$f_{|A}$ continua en x, $A \in \mathcal{U}(x) \implies f$ continua en x*

Definición 3.2. Se dice que f es continua en A, cuando es continua en todos los puntos de A. Si f es continua en todo E se dice simplemente que f es continua.

Proposición 3.3 (Caracterización)**.** *Para $f : E \longrightarrow F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f es continua
(ii) La preimagen de todo abierto es abierta.
(iii) La preimagen de todo cerrado es cerrada.
(iv) Para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

Proposición 3.4 (Caracter local de la continuidad global)**.**

- *$A = A^o$*

$$f \quad continua \quad en \quad A \Longleftrightarrow f_{|A} \quad continua$$

- *$E = U \cup V$ donde $U = U^o$, $V = V^o$*

$$f \quad continua \Longleftrightarrow f_{|U} \quad y \quad f_{|V} \quad continuas$$

- *f continua $\Longleftrightarrow \forall x \in E \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) : f_{|U}$ continua.*

3.2. Límite funcional

Definición 3.3. $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene **límite** en el punto α cuando $\exists L \in F$ /

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad x \in A, 0 < d(x, \delta) \implies d(f(x), L) < \varepsilon$$

Además el L es único y decimos que es el límite de f en α:

$$L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$$

Proposición 3.5 (Caracterización)**.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) $L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$
(ii) $\forall V \in \mathcal{U}(L) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) \quad / \quad f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V$
(iii) $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}, \quad \{x_n\} \longrightarrow \alpha \quad \implies \quad \{f(x_n)\} \longrightarrow L$

Proposición 3.6 (Caracter local)**.** $B = \{x \in A : 0 < d(x, \alpha) < r\}, \quad \alpha \in B' \implies$

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha} f_{|B}(x) = L$$

Proposición 3.7 (Relación con la continuidad)**.**

- *Si* $a \in A \setminus A' \quad \implies f$ *continua en* a
- *Si* $a \in A \cap A' \quad \implies f$ *continua en* $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- *Si* $\alpha \in A' \setminus A \implies f$ *continua* $\iff \exists g : A \cup \{\alpha\} \longrightarrow F$, *continua en* α *con* $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A \quad \implies g$ *es única y* $g(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} f(x)$

3.3. Composición de funciones

Proposición 3.8 (Continuidad de la composición)**.** *Sean* G, E, F *espacios métricos.* $\varphi : G \longrightarrow E$, $f : E \longrightarrow F$, $f \circ \varphi : G \longrightarrow F$

$$\varphi \quad \textit{continua} \quad z \in G \quad \wedge \quad f \quad \textit{continua} \quad x = \varphi(z) \quad \implies \quad f \circ \varphi \quad \textit{continua} \quad z$$

$$\varphi, f \quad \textit{continuas} \implies f \circ \varphi \quad \textit{continua}$$

Proposición 3.9 (Cambio de variable para calcular un límite)**.** $f : A \longrightarrow F$, $A \subset E$, $\varphi : T \longrightarrow E$, $T \subset G \quad z \in T', \alpha \in E$. *Si se verifica:*

$$\lim_{t \to z} \varphi(t) = \alpha \quad \wedge \quad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall t \in T \setminus \{z\} \implies$$

$$\alpha \in A' \quad \wedge \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = L \quad \implies \quad \lim_{t \to z} f(\varphi(t)) = L$$

3.4. Ejemplos de funciones continuas

- f constante $\implies$ f continua
- $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$, $F^o = \emptyset$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$ continua $\implies$ f constante
- La función inclusión es continua
- La función identidad es continua
- La función distancia es continua
- La norma, la suma y el producto por escalares en un espacio normado son funciones continuas.

Definición 3.4 (Proyecciones y componentes)**.** Sea $F = F_1 \times ... \times F_M \neq \emptyset$

- Proyecciones coordenadas: $\pi_k : F \longrightarrow F_k, \quad \pi_k(y) = y(k) \quad \forall y \in F, \quad k \in \Delta_M$
- Componentes de f: $f : E \longrightarrow F, \quad f_k = \pi_k \circ f : E \longrightarrow F_k \quad \forall k \in \Delta_M$

Proposición 3.10 (Caracterización de la continuidad y límite funcional)**.**

- *Si $F = F_1 \times ... \times F_M$ es un producto de espacios métricos $\implies$ π_k es continua $\forall k \in \Delta_M$*
- *$f : E \longrightarrow F$ $\implies$ f continua en $x \in E \iff f_k$ continua en x $\forall k \in \Delta_M$*
- *$f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$, $y \in F$ $\implies$*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \quad \iff \quad \lim_{x \to \alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

Definición 3.5. $\mathcal{F}(E,Y)$ conjunto de todas las funciones de E en Y, $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, Y espacio vectorial, $f, g \in \mathcal{F}(E,Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto: $(\Lambda g)(x) = \Lambda(x) g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto por escalares: $(\lambda g)(x) = \lambda g(x) \quad \forall x \in E$

  Si $f, g \in \mathcal{F}(E), g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$
- Cociente: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in E$

Así. $\mathcal{F}(E,Y)$ es un **espacio vectorial** y $\mathcal{F}(E)$ es un **anillo conmutativo** con unidad.

Proposición 3.11 (Preservación de la continuidad)**.** *En las condiciones de la definición anterior:*

(i) f, g, Λ *continuas* $x \implies f + g, \Lambda g$ *continuas* x

(ii) f, g *continuas* x, $g(E) \subset \mathbb{R}^* \implies \frac{f}{g}$ *continua en* x

Definición 3.6 (Espacio de funciones continuas)**.** $\mathcal{C}(E,Y)$ conjunto de todas las funciones continuas de E en Y.

$$\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$$

$\mathcal{C}(E,Y)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E,Y)$, $\mathcal{C}(E)$ subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E)$

Proposición 3.12 (Calculo de limites)**.**

1. *El límite de la suma es la suma de los límites.*
2. *El límite del producto es el producto de los límites.*
3. *El límite del cociente es el cociente de los límites.*

Definición 3.7 (Campo escalar)**.** $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Definición 3.8 (Campo vectorial)**.** $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Merece la pena también destacar las funciones polinómicas y las racionales (cociente de polinomios donde el denominador no se anula) como funciones continuas. A continuación podemos ver las relaciones que tienen los distintos espacios:

$$\mathcal{P}(E,Y) \subset \mathcal{R}(E,Y) \subset \mathcal{C}(E,Y) \subset \mathcal{F}(E,Y)$$

4. Compacidad y conexión

4.1. Acotación

Definición 4.1 (Conjunto acotado)**.** E espacio métrico. $A \subset E$. A está acotado cuando está incluido en una bola.

$$A \quad acotado \implies \forall x \in E \quad \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$$

Ejemplo. Todo subconjunto de E está acotado.

Ejemplo. Toda sucesión convergente está acotada.

La acotación no es una propiedad topológica.

$$\rho = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

La distancia d y la ρ son equivalentes, por lo que dan la misma topología; pero dan lugar a conjuntos acotados distintos.

Proposición 4.1. *X espacio normado, $A \subset X$:*

$$A \quad acotado \iff \exists M > 0 : ||x|| \leqslant M \quad \forall x \in A$$

Dos normas equivalentes dan lugar a la misma topología.

Proposición 4.2. *$X = X_1 \times ... \times X_N$, $A \subset X$*

$$A \quad acotado \quad \iff \quad \{x(k) : x \in A\} \quad acotado \quad \forall k \in \Delta_N$$

Teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente.*

4.2. Compacidad

Definición 4.2 (Espacio métrico compacto)**.** E es compacto cuando toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente.

Proposición 4.4. *E espacio métrico, $A \subset E$*

$$A \quad compacto \implies A \quad acotado \quad y \quad \overline{A} = A$$

Proposición 4.5.

$$A \subset \mathbb{R}^N \quad compacto \Longleftrightarrow A \quad acotado \quad y \quad \overline{A} = A$$

Teorema 4.6 (Weierstrass). *E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ continua.*

$$E \quad compacto \implies f(E) \quad compacto$$

Proposición 4.7. *E espacio métrico compacto, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

$$\exists u, v \in E : f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in E$$

Teorema 4.8 (Hausdorff).

(i) Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

(ii) Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.

4.3. Conexión

Definición 4.3 (Espacio métrico conexo). E es conexo cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos no vacios disjuntos.

$$E = U \cup V \quad U = U^o \quad V = V^o \quad U \cap V = \emptyset \quad \implies \quad U = \emptyset \quad \vee \quad V = \emptyset$$

Proposición 4.9 (Caracterización). *Sea E espacio métrico. Equivalen:*

(i) E es conexo.

(ii) $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies$ $f(E)$ intervalo

(iii) $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ continua $\implies$ f constante

Proposición 4.10.

$$A \subset \mathbb{R} \quad conexo \quad \Longleftrightarrow \quad A \quad intervalo$$

Teorema 4.11 (del valor intermedio). *E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ continua.*

$$E \quad conexo \implies f(E) \quad conexo$$

Corolario 4.11.1. *E espacio métrico compacto y conexo, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies$ $f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado.*

Proposición 4.12. *E es conexo $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E \quad \exists C \subset E$ conexo : $x, y \in C$*

Definición 4.4 (Conjuntos convexos). Sea $E \subset X$, X espacio vectorial. E es convexo cuando:

$$x, y \in E \implies (1 - t)x + ty \in E \quad \forall t \in [0, 1]$$

Ejemplo. Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.

Ejemplo. Las bolas de un espacio normado son convexas, luego conexas.

Ejemplo. $C, D \subset E$ conexos, $C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D$ conexo

5. Complitud y continuidad uniforme

5.1. Complitud

Definición 5.1 (Sucesiones de Cauchy)**.** E espacio métrico con distancia d. $\{x_n\} \subset E$ es una sucesión de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geqslant m \implies d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.
No es una propiedad topológica.

Definición 5.2 (Espacios completos)**.** Un espacio métrico E es completo, o su distancia d es completa cuando toda sucesión de Cauchy es convergente, (a un punto de E).

Ejemplo. Espacio de Banach = espacio normado completo.

Ejemplo. Espacio de Hilbert = espacio pre-hilbertiano completo.

Proposición 5.1. *Dos normas equivalentes dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy. Toda norma equivalente a una completa es completa.*

Teorema 5.2 (Complitud de $\mathbb{R}^N$)**.**

(i) Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

(ii) El espacio euclídeo N-dimensional es de Hilbert.

Proposición 5.3 (Subespacios métricos completos)**.** *E espacio métrico, A subespacio métrico de E:*

- *A completo $\implies A = \overline{A}$ en E*
- *E completo, $A = \overline{A}$ en $E \implies A$ completo*
- *E completo $\implies$ los subconjuntos completos de E son los cerrados*
- *$A \subset \mathbb{R}^N$ completo $\iff A = \overline{A}$ en $\mathbb{R}^N$*

5.2. Continuidad uniforme

Definición 5.3 (Funciones uniformemente continuas)**.** Sean E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ es uniformemente continua cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in E, d(x,y) > \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Proposición 5.4 (Caracterización)**.**

- *Si f uniformemente continua* $\implies$

$$\{x_n\}, \{y_n\} \subset E, \{d(x_n, y_n)\} \longrightarrow 0 \implies \{d(f(x_n), f(y_n))\} \longrightarrow 0$$

- *Si f no es uniformemente continua* $\implies$ *existen* $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E, \varepsilon > 0 :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 5.5 (Heine)**.** *Sean E,F espacios métricos,* $f : E \longrightarrow F$ *continua.*

$$E \quad compacto \implies f \quad uniformemente \quad continua$$

Observación.

- No es una propiedad local
- No es una propiedad topológica.
- Se conserva en espacios normados con normas equivalentes.

Definición 5.4 (Funciones lipschitzianas)**.** E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ es lipschitziana cuando $\exists M \geqslant 0$:

$$d(f(x), f(y)) \leqslant M d(x,y) \quad \forall x, y \in E$$

Se dice que f es lipschitziana con constante M. Toda función lipschitziana es uniformemente continua.

5.3. Teorema del punto fijo

Definición 5.5 (Constante de Lipschitz)**.** E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ lipschitziana:

$$M_0 = \sup\{\frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} : x, y \in E, x \neq y\}$$

Definición 5.6 (Funcion no expansiva)**.**

$$f \quad no \quad expansiva \iff M_0 \leqslant 1$$

Definición 5.7 (Funcion contractiva)**.**

$$f \quad contractiva \iff f \quad lipschitziana \quad con \quad M < 1 \iff M_0 < 1$$

Teorema 5.6 (del punto fijo)**.** *Sea E un espacio métrico completo y* $f : E \longrightarrow F$ *contractiva* $\implies$ *f tiene un único punto fijo,* $\exists! x \in E : f(x) = x$

5.4. Aplicaciones lineales

Definición 5.8 (Aplicaciones lineales). Una aplicacion $T : X \longrightarrow Y$ se dice lineal si cumple:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X$
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

Proposición 5.7. *X, Y espacios normados, $T : X \longrightarrow Y$ lineal. Son equivalentes:*

1. *T continua.*
2. *$\exists M \geqslant 0 : ||T(x)|| \leqslant M||x|| \quad \forall x \in X$*

Observación. Si T es continua en x_0 es continua en todo X.

Observación. T continua $\Longleftrightarrow$ T uniformemente continua $\Longleftrightarrow$ T lipschitziana.

Proposición 5.8. *X espacio normado de dimensión finita, Y espacio normado. Por el teorema de Hausdorff:*

$$T : X \longrightarrow Y \quad \textit{lineal} \implies T \quad \textit{continua}$$

Definición 5.9 (Espacio de aplicaciones lineales continuas). X, Y espacios normados. $L(X, Y)$ conjunto de todas las aplicaciones lineales continuas de X en Y. Es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, Y)$

Definición 5.10 (Norma de una aplicación lineal continua). Sea $T \in L(X, Y)$ se define $||T|| = M_0$, constante de Lipschitz.

6. Diferenciabilidad

6.1. Motivación

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \in A \cap A'$$

f derivable en el punto a cuando $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x-a)}{x-a} = 0$$

λ es único, lo llamamos derivada de f en el punto a y lo escribimos: $f'(a) = \lambda$

Proposición 6.1 (El espacio $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)**.** $\alpha \in \mathbb{R}$ $T_\alpha \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *con* $T_\alpha = \alpha x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *Definimos* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, con* $\Phi(\alpha) = T_\alpha \implies \Phi$ *es lineal, biyectiva y conserva la norma y* $\mathbb{R}$ *y* $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *son idénticos como espacios normados.*

Definición 6.1 (Diferencial de una función real de variable real)**.**

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \in A \cap A'$$

f defereciable en el punto a cuando $\exists T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{x-a} = 0$$

T es único, lo llamamos diferencial de f en el punto a y lo denotamos: $Df(a)$

Proposición 6.2 (Relación entre derivada y diferencial)**.**

$$f \quad derivable \quad a \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad diferenciable \quad a$$

$$Df(a)(x) = f'(a)x \qquad f'(a) = Df(a)(1)$$

6.2. Funciones diferenciables

Notación. X, Y espacios normados, $f : A \longrightarrow Y$ y $a \in A^o$

Definición 6.2 (Función diferenciable en un punto)**.** f defereciable en el punto a cuando $\exists T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{||x-a||} = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x) - f(a) - T(x-a)||}{||x-a||} = 0$$

6.2.1. Observaciones importantes

Proposición 6.3 (Unicidad). *Si f es diferenciable en a, la aplicación $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es única y la llamamos diferencial de f en a y se denota por Df(a)*

Proposición 6.4 (Relación con la continuidad). *Si f diferenciable en $a \implies f$ continua en a*

Proposición 6.5 (Significado analítico). *f diferenciable en a, $g : X \longrightarrow Y$:*

$$g(x) = f(a) + Df(a)(x - a) = f(a) - Df(a)(a) + Df(a)(x) \quad \forall x \in X$$

g es una función afín y continua, tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{||x - a||} = 0$$

Entonces g es una "buena aproximación"de f cerca del punto a.

Proposición 6.6 (Carácter local). *Si $U \subset X, a \in U^o \implies$*

$$f \quad diferenciable \quad a \quad \iff \quad f_{|U} \quad diferenciable \quad a$$

$$Df(a) = D(f_{|U})(a)$$

Proposición 6.7 (Independencia de las normas). *La existencia o no y la diferencial no cambia cuando cambiamos las normas por otras equivalentes.*

Notación. X, Y espacios normados, $\Omega = \Omega^o \subset X$ y $f : \Omega \longrightarrow Y$

Definición 6.3 (Función diferenciable). Si f es diferenciable en todo punto decimos que es diferenciable.

Definición 6.4. $D(\Omega, Y)$ es el conjunto de todas las funciones diferenciables de Ω en Y.

$$D(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

Definición 6.5 (Diferencial de f). Sea $f \in D(\Omega, Y)$, tenemos la función diferencial de f: $Df : \Omega \longrightarrow L(\Omega, Y)$ dada por $x \longmapsto Df(x)$

Definición 6.6. Decimos que f es de clase C^1 cuando $f \in D(\Omega, Y)$ y Df es continua.

Definición 6.7. $C^1(\Omega, Y)$ es el conjunto de todas las funciones de clase C^1

$$C^1(\Omega, Y) \subset D(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

6.3. Reglas de diferenciación

Ejemplo. $f : X \longrightarrow Y$ constante $\implies f \in C^1(X,Y)$ con $Df(a) = 0 \quad \forall a \in X$

Ejemplo. $f \in L(X,Y) \implies f \in C^1(X,Y)$ con $Df(a) = f \quad \forall a \in X$

Proposición 6.8 (Linealidad de la diferencial).

$$f, g \in D(\Omega, Y) \implies \alpha f + \beta g \in D(\Omega, Y)$$

$$f, g \in C^1(\Omega, Y) \implies \alpha f + \beta g \in C^1(\Omega, Y)$$

Teorema 6.9 (Regla de la cadena). *X, Y, Z espacios normados, $\Omega = \Omega^o \subset X$, $U = U^o \subset Y$, $f : \Omega \longrightarrow U$, $g : U \longrightarrow Z$.*
Si f diferenciable en a y g es diferenciable en $b = f(a) \implies g \circ f$ es diferenciable en a con $D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a)$

$$f \in D(\Omega, U), g \in D(U, Z) \implies g \circ f \in D(\Omega, Z)$$

$$f \in C^1(\Omega, U), g \in C^1(U, Z) \implies g \circ f \in C^1(\Omega, Z)$$

Observación. $T \in D(X,Y), S \in D(Y,Z) \implies \|S \circ T\| \leqslant \|S\|\|T\|$

Notación. $Y = \prod_{j=1}^{M} Y_j$ producto de espacios normados, $j \in \Delta_M$

Definición 6.8 (Inyección natural). $I_j : Y_j \longrightarrow Y$, $I_j(u) = (0, ..., \overset{(j)}{u}, ..., 0)$, $\|I_j\| = 1$

Proposición 6.10 (Diferenciabilidad con valores en un producto). *X espacio normado, $\Omega = \Omega^o \subset X$, $f = (f_1, ..., f_M) : \Omega \longrightarrow Y$*

$$f \quad diferenciable \quad a \iff f_j \quad diferenciable \quad a \quad \forall j \in \Delta_M$$
$$Df(a) = (Df_1(a), ..., Df_M(a))$$
$$f \in D(\Omega, Y) \iff f_j \in D(\Omega, Y) \quad \forall j \in \Delta_M$$
$$f \in C^1(\Omega, Y) \iff f_j \in C^1(\Omega, Y) \quad \forall j \in \Delta_M$$

Proposición 6.11 (Producto de funciones diferenciables).
X espacio normado, $\Omega = \Omega^o \subset X$, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f, g \in D(\Omega) \implies fg \in D(\Omega) \; D(fg) = gDf + fDg$$

$$f, g \in C^1(\Omega) \implies fg \in C^1(\Omega)$$

Proposición 6.12 (Cociente de funciones diferenciables).
X espacio normado, $\Omega = \Omega^o \subset X$, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^*$

$$f, g \in D(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{R}^* \implies f/g \in D(\Omega) \quad D(f/g) = \frac{1}{(g)^2}(gDf - fDg)$$

$$f, g \in C^1(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{R}^* \implies f/g \in C^1(\Omega)$$

7. Práctica 1. Continuidad

7.1. Teoremas relacionados

Teorema 7.1 (Carácter local de la continuidad)**.** *Sean E, F espacios topológicos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $x \in A$.*

Si $f_{\big|A}$ es continua en x con $A \in \mathbb{U}(x) \Rightarrow f$ es continua en x.

Teorema 7.2 (Cambio de variable)**.** *Sean E, F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in E$:*

Si G es un espacio métrico con $T \subseteq G$ y $\varphi : T \to E$, $z \in T'$ que cumple:

$$\lim_{t\to z} \varphi(t) = \alpha \in E \qquad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall t \in T \setminus \{z\}$$

Entonces, $\alpha \in A'$ y se verifica que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to z} f(\varphi(t)) = L$$

Procedemos por tanto a estudiar el siguiente problema:
Sea $A \subset E^m$ espacio métrico producto. Dada $f : A \to F^n$, buscamos saber si f es continua. Notemos que podemos expresar $f = (f_1, \ldots, f_n)$, con $f_k = \pi_k \circ f$. Sabemos que f es continua si y solo si f_k es continua $\forall k \in \Delta_n$.

Por tanto, el problema se reduce a estudiar la continuidad de $f_k : E^m \to F$, y por norma general trabajaremos con $F = \mathbb{R}$.

7.2. Parte rutinaria del problema

- Definimos U y comprobamos que U sea abierto.
- Comprobamos que $f_{\big|U}$ sea continua.
- Aplicamos el carácter local de la continuidad y tenemos que f es continua en U.

A continuación se nos presentan distintos puntos problemáticos en los que querremos estudiar el límite. Nos fereriremos a un punto de estos como α. Calculamos:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)$$

Normalmente, se presentará una indeterminación. A continuación, la intuición nos dirá si debemos intentar probar que el límite no existe o intentar probar la existencia del límite.

Un camino algo más mecánico es comprobar, en este orden, los límites parciales, límites direccionales, intentar probar la existencia de límite y, por último, intentar probar que el límite no existe con un cambio de variable.

7.3. El límite no existe

Si creemos que el límite en α no existe, el procedimiento a seguir es el siguiente:

7.3.1. Límites parciales

Si e_k es el k-ésimo vector de la base usual. Sea $t \in \mathbb{R} \mid x \to \alpha$ si $t \to 0$ con $x \neq \alpha$ si $t \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\alpha + te_k) = L$$

En el caso $n = 2$, si $\alpha = (a, b)$. Entonces:

$$\lim_{x\to(a,b)} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x, b) = \lim_{x\to b} f(a, x) = L$$

- Si uno de los límites parciales no existe, podemos afirmar $(*)$.
- Si existen los dos límites parciales y no son iguales, podemos afirmar $(*)$.
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L, por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L, podemos afirmar $(*)$.

$$(*) \qquad \nexists \lim_{x\to\alpha} f(x)$$

7.3.2. Límites direccionales

$$S = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$$

Sea $u \in S$. Entonces, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) = L \qquad \forall u \in S$$

El cálculo lo haremos con un u genérico que cumpla estas premisas, de forma que:

- Si uno de los límites direccionales no existe, podemos afirmar $(*)$.
- Si el límte direccional depende de u, podemos afirmar $(*)$ al saber que si cambiamos u obtenemos distintos valores del límite.
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L, por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L, podemos afirmar $(*)$.

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites direccionales.

Límites radiales

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(\alpha + tu) = L \qquad \forall u \in S$$

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites radiales.

Caso $n = 2$:

Coordenadas polares

Sea $u = (u_1, u_2) \in S$. Entonces, tenemos que $\exists_1 \theta \in]-\pi, \pi]$ tal que $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si $\alpha = (a, b)$, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha + tu) = \lim_{\rho\to 0^+} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) = L \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Coordenadas cartesianas

Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En vez de normalizar con $\|u\| = 1$, tomamos:

$$u_1 = 1 \text{ y } u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) = \lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) \overset{t=x-a}{=} \lim_{x\to a}(x, b + \lambda(x - a))$$

Esta última equivalencia es útil para $a = b = 0$.

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) = L \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

7.4. Existencia del límite

La <u>única</u> forma de probar que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}$ es acotando f:

Necesitamos hallar $r \in \mathbb{R}^+$ y $g : B(\alpha, r) \to \mathbb{R}^+$ tal que:

$$0 \leqslant |f(x) - L| \leqslant g(x) \quad \forall x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$$

De tal forma que

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$$

Entonces, por el lema del Sándwich, tenemos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

El estudio fracasado de los límites direccionales puede ayudarnos a la hora de determinar de forma más fácil una acotación:

7.4.1. Acotación por límites direccionales

Si el estudio de los límites direccionales fracasó fue porque:

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) - L = 0 \qquad \forall u \in S$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(\alpha + tu) - L| \leqslant h(t) \qquad \forall u \in S \;\; \forall t \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

En el caso $n = 2$:

7.4.2. Acotación por uso de coordenadas polares

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas polares fracasó fue porque:

$$\lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) - L = 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) - L| \leqslant h(\rho) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \;\; \forall \rho \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

7.4.3. Acotación por uso de coordenadas cartesianas

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas cartesianas fracasó fue porque:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) - L = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(a + t, b + \lambda t) - L| \leqslant h(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \;\; \forall t \in]-r, r[\setminus \{0\}$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

7.5. Último recurso

Si no pudimos encontrar ninguna acotación de f, deberemos intuir que el límite no existe. Para probar esto, tenemos que idear un cambio de variable nuevo:

Si $L \in \mathbb{R}$ es el único posible límite de f en α, podemos probar con un cambio de variable $x = \varphi(t)$ con $0 < t < r$ tal que:

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) \neq \alpha \;\; \forall t \in]0, r[$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = L$$

Luego buscamos φ de forma que $f \circ \varphi$ no tenga límite en 0.

Por ejemplo, en el caso $n = 2$ con $\alpha = (a, b)$, podemos hacer el cambio de variable:

$$\varphi_p(t) = (a + t, b + t^p) \qquad p \in \mathbb{R}^+$$

De forma que calculamos el límite con un $p \in \mathbb{R}^+$ cualquiera y luego fijamos un valor de p para el cual el límite no exista.

Otro recurso que podemos usar es que si $n = 2$ y nuestra función f es un cociente entre dos términos que contienen x e y de forma que el exponente de y es siempre el doble de x, podemos usar el cambio de variable:

$$\varphi_2(t) = (a + t, b + t^2)$$

7.6. Límites famosos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

7.6.1. Cambiar forma de la función

Dada una función a la que le queremos calcular un límite, es recurrente que nos sepamos a qué tiende parte del límite ya que nos es conocido y querramos descomponer la función en dos partes, una de la que conocemos su límite y otra que será más sencillo de calcular. La pregunta es cómo podemos hacer esto formalmente y sin fallos. Para ello, pondremos el ejemplo de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

De tal forma que queremos calcular el límite en el punto $(0, 0)$. Para ello, uno podría pensar que podemos hacer:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Pero debemos tener cuidado, ya que nuestro dominio es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y al cambiar la expresión de f estamos dividiendo por cero al considerar cualquier punto del estilo $(a, 0)$ con $a \neq 0$ en nuestro dominio. Para solucionar este problema, resolveremos el ejercicio de la siguiente forma:

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$\varphi(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \quad \forall y \neq 0 \qquad \varphi(0) = 1$$

Notemos que φ es continua en todo $\mathbb{R}$, al ser $\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y) = 1 = \varphi(0)$.

De esta forma, hemos conseguido una función que nos permite hacer lo siguiente:

$$\operatorname{sen} y = y\varphi(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \varphi(y)\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

De esta forma, podemos estudiar f en dos partes:

Por una lado, sabemos que:

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y) = \varphi(0) = 1$$

Y por otro, tenemos que podemos acotar fácilmente la función, haciendo que el otro trozo converja a cero:

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant |y|$$

Con $\lim\limits_{y\to 0} y = 0$. Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

Por lo que, finalmente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(y)\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

8. Práctica 2. Diferenciabilidad

8.1. Planteamiento del problema

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y un campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, buscamos estudiar la continuidad, diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales.

8.2. Teoremas relacionados

Gracias a la teoría vista hasta el momento en los temas 6, 7 y 8, podemos recordar teoremas que nos van a ayudar a lo largo de esta práctica.

Teorema 8.1 (Carácter local de la continuidad). *Sean E, F espacios topológicos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $x \in A$.*

Si $f\Big|_A$ es continua en x con $A \in \mathbb{U}(x) \Rightarrow f$ es continua en x.

Proposición 8.2 (Carácter local de la diferenciabilidad). *Si $U \subset X, a \in U$. Entonces:*

$$f \quad diferenciable \quad a \quad \Longleftrightarrow \quad f_{|U} \quad diferenciable \quad a$$

$$Df(a) = D(f_{|U})(a)$$

Proposición 8.3 (Relación de la diferenciabilidad con la continuidad).
Si f diferenciable en a $\Longrightarrow$ f continua en a

Proposición 8.4 (Condición suficiente de diferenciabilidad).
Sea $\Omega = \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $k \in \Delta_N$.
Suponemos que f es parcialmente derivable en a y que al menos $N-1$ derivadas parciales son continuas en el punto a.
Entonces, f es diferenciable en el punto a.

8.3. Parte rutinaria del problema

Será común encontrar un subconjunto A de Ω (dominio de f) en el que $f_{|A}$ esté formada por operaciones de funciones de clase C^1. Nuestro interés será que dicho conjunto A sea abierto, para poder aplicar el carácter local de la continuidad y de la diferenciabilidad.

Por tanto, buscamos un conjunto abierto $U \subset \Omega$ (el mayor que podamos) tal que $f_{|U}$ se obtiene mediante operaciones con funciones de clase C^1. Al ser U abierto, por el carácter local de la continuidad y diferenciabilidad, sabremos que f será continua y diferenciable en U.

Resumiendo, seguimos los siguientes pasos:

- Definimos un conjunto $U \subset \Omega$ (el máximo que cumpla lo que queremos) y **comprobamos** que es abierto.
- Comprobamos que $f_{|U} \in C^1(U)$, que será fácil por cómo hayamos escogido U.
- Usamos los carácteres locales de la continuidad y diferenciabilidad, obteniendo que f es continua y diferenciable en U.

A partir de este momento, el problema de estudiar la continuidad y diferenciabilidad quedará reducido a estudiarla en todos los puntos del conjunto $\Omega \setminus U$.

8.4. Cálculo de derivadas parciales

El segundo aspecto a tener en cuenta es la existencia de las derivadas parciales:

En cada punto $a \in \Omega \setminus U$, estudiaremos la existencia de las derivadas parciales de f en a y si estas existen, calcularlas. Se nos presentan dos posibilidades:

- Si no existe alguna de las derivadas parciales de f en a, entonces sabremos que f no es diferenciable en a. Quedará estudiar la continuidad en a y la continuidad de las derivadas parciales que sí existan en a (Práctica 1. Continuidad).
- Si f es parcialmente derivable en a (existen todas sus derivadas parciales), entonces podemos considerar el vector gradiente:
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right)$$

8.5. Estrategias a seguir

Llegado a este punto, tenemos que f es parcialmente derivable en Ω. Fijado $a \in \Omega \setminus U$, podemos seguir tres estrategias:

Opción optimista

Estudiamos primero la continuidad de las derivadas parciales de f en a:

- Si tenemos al menos $N-1$ (recordamos que trabajamos en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$) derivadas parciales continuas de f en a, sabremos por la condición suficiente de diferenciabilidad que f es diferenciable en a, luego también será continua en a. Faltará ver la continuidad de la parcial restante.
- Si tenemos que dos o más derivadas parciales de f en a no son continuas no podemos deducir nada más y por tanto, nos quedará estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en a y la continuidad de $N-2$ derivadas parciales de f en a.

Opción pesimista

Estudiamos primero la continuidad de la función f en a:

- Si f no es continua en a, tampoco podrá ser diferenciable en a y ninguna derivada parcial podrá ser continua en a.
- En caso de que f sea continua en a, habremos finalizado el estudio de la continuidad de f en a, pero nos quedará el estudio de la diferenciabilidad de f en a y de la continuidad de las derivadas parciales de f en a.

Opción conservadora

Estudiamos primero la diferenciabilidad de f en a:

- Si f es diferenciable en a, también será continua en el punto a. Nos quedará estudiar la continuidad de las derivadas parciales.
- Si f no es diferenciable en a, tendremos al menos 2 derivadas parciales que no podrán ser continuas. Quedará buscar cuáles son, estudiar la continuidad de las $N-2$ derivadas parciales restantes (si estamos en $\mathbb{R}^2$ será innecesario) y la continuidad de la función f en el punto a.

8.6. Estudio de la diferenciabilidad

Cuando nos dispongamos a estudiar la diferenciabilidad de f en un punto $a \in \Omega \setminus U$, necesitamos comprobar previamente que f es parcialmente derivable en a, ya que en caso de serlo, podremos usar el vector gradiente y, en caso de no serlo, descartaremos que f sea diferenciable.

Por tanto, suponemos teóricamente (en la práctica ya se habrá hecho) que f es parcialmente derivable en $a \in \Omega \setminus U$.

f será diferenciable en a si y sólo si se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (\nabla f(a)|(x-a))}{\|x-a\|} = 0$$

Por tanto, si definimos $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - (\nabla f(a)|(x-a))}{\|x-a\|}$ $\forall x \in \Omega \setminus a$, f será diferenciable en a si y sólo si:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Observación.

- La norma en la definición de φ podemos elegirla a voluntad (todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes). Suele ser más fácil elegir la norma euclídea en un caso general, aunque si la ocasión lo merece (para simplificar con el numerador) puede elegirse otra.

- A veces, estudiando el límite de φ obtendremos un límite direccional distinto de 0. Esto ya nos vale para afirmar que f no es diferenciable en a: pues de existir el límite, su valor debe coincidir con el del límite direccional, distinto de cero, luego f no es diferenciable en a.

8.7. Ejemplos

Se pide estudiar la continuidad, diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad f(0,0) = 0$$

Definimos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es abierto por ser el complementario en $\mathbb{R}^2$ de un cerrado, $(0,0)$ (cerrado por ser un punto).

$f_{|U}$ es una función racional, por lo que $f_{|U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la continuidad y de la diferenciabilidad, tenemos que f es continua y diferenciable en U.

A continuación, calculamos las derivadas parciales $\forall (x,y) \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - 3x^3y^4}{(x^2+y^4)^2}$$

Calculamos el valor de las derivadas parciales en $(0,0)$ y con ello, el vector gradiente. Observemos que:

$$f(x,0) = 0 = f(0,y) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Luego:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

Obtamos por la estrategia conservadora y nos disponemos a estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Definimos $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) | (x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observemos que:

$$\varphi(x,x) = \frac{x^3}{\sqrt{2}(x^3+x^5)} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Luego si φ tiene límite en $(0,0)$, este sería $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, luego f no es diferenciable en $(0,0)$. Por tanto, sabemos que ni $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ni $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. Falta ver la continuidad de f en $(0,0)$:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = |y|\frac{x^2}{x^2+y^4} \leqslant |y|$$

Con $\lim\limits_{y\to 0} y = 0$, luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ es continua en $(0,0)$.

b)

$$g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad g(0,0) = 0$$

Definimos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es abierto por ser el complementario en $\mathbb{R}^2$ de un cerrado, $(0,0)$ (cerrado por ser un punto).

$g_{|U}$ es una función racional, por lo que $g_{|U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la continuidad y de la diferenciabilidad, tenemos que g es continua y diferenciable en U.

A continuación, calculamos las derivadas parciales $\forall (x,y) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

Calculamos el valor de las derivadas parciales en $(0,0)$ y con ello, el vector gradiente. Observemos que:

$$g(x,0) = 0 = g(0,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Luego:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\nabla g(0,0) = (0,0)$$

Observamos la segunda derivada parcial de g y tenemos que (estrategia optimista):

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = 2|y|\frac{x^2}{(x^2+y^4)}\frac{(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)} \leqslant 2|y|$$

Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} \text{ es continua en } (0,0)$$

Luego por la condición suficiente de diferenciabilidad, tenemos que f es diferenciable en $(0,0)$, luego también será continua en $(0,0)$. Falta ver la continuidad de la parcial restante:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x^2,x) = \frac{2x^8}{4x^8} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Luego $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, por lo que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.