Topología I

Examen V

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas[1].

Grupo Único.

Profesor Miguel Ortega Titos.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 19 de enero de 2021.

Duración 3 horas.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $R_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha\}$. Se considera la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$ con base $\mathcal{B} = \{R_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1. (0.25 puntos) Estudiar si $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_u$ y si $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}^2$.
2. (0.25 puntos) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ un espacio de Hausdorff?
3. (0.5 puntos) Calcular el cierre, el interior y la frontera de los ejes coordenados.
4. (0.25 puntos) ¿Es cierto que todo conjunto acotado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ tiene interior vacío?
5. (0.5 puntos) Identificar la topología inducida por $\mathcal{T}$ sobre cada R_α y sobre $L = \{0\} \times \mathbb{R}$.
6. (0.75 puntos) Construir explícitamente un homeomorfismo $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$, donde $\mathcal{T}'$ es la topología en $\mathbb{R}^2$ con base $\mathcal{B}' = \{R'_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ (en este caso, $R'_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha\}$).
7. (0.75 puntos) Probar que $A \subset \mathbb{R}^2$ es conexo en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset R_\alpha$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.
8. (0.75 puntos) Demostrar que A es compacto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $J \subset \mathbb{R}$ finito tal que $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in J} R_\alpha$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Teoría.

1. Definir la topología final asociada a la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre espacios topológicos, y la noción de identificación entre espacios topológicos.
2. Probar que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación, entonces existe una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en X tal que el espacio cociente $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ es homeomorfo a $(Y, \mathcal{T}')$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

1. ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto? ¿Y si el espacio es metrizable?
2. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la recta de Sorgenfrey. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_S \times \mathcal{T}_S) & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_S \times \mathcal{T}_S) \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, -y^3) \end{array}$$

   Analizar si f es continua, abierta o cerrada.
3. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ entre espacios topológicos se dice que es *propia* si para cada C' compacto en $(Y, \mathcal{T}')$, verifica que $f^{-1}(C')$ es compacto en $(X, \mathcal{T})$. Probar que si f es propia, $(X, \mathcal{T})$ es de Haussdorf e Y es compacto, entonces f es continua.