

# Modelos de Computación



Los Del DGIIM, [losdelldgiim.github.io](https://losdelldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Modelos de Computación

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025



# Índice general

<b>1. Relaciones de Problemas</b>	<b>5</b>
1.1. Gramáticas Independientes del Contexto . . . . .	6
1.1.1. Preguntas Tipo Test . . . . .	19



# 1. Relaciones de Problemas

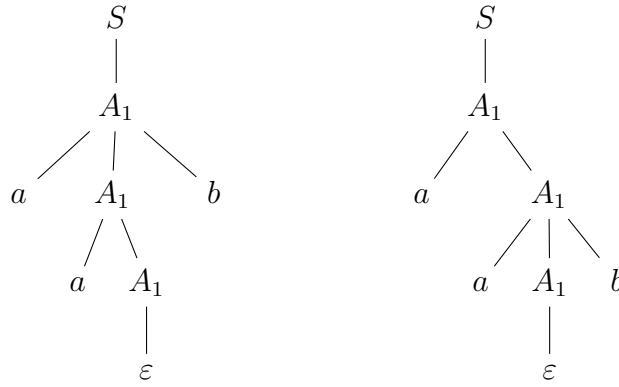


Figura 1.1: Árboles de derivación para  $aab$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.1.

## 1.1. Gramáticas Independientes del Contexto

*Observación.* Salvo que se indique lo contrario, las letras en mayúsculas representan variables, las letras en minúsculas representan terminales y la  $S$  representa el símbolo inicial.

**Ejercicio 1.1.1.** Determinar si la siguiente gramática es ambigua y si el lenguaje generado es inherentemente ambiguo:

$$\begin{cases} S \rightarrow A_1 \mid A_2 \\ A_1 \rightarrow aA_1b \mid aA_1 \mid \varepsilon \\ A_2 \rightarrow aA_2b \mid A_2b \mid \varepsilon \end{cases}$$

La gramática dada es ambigua puesto que hay palabras con más de un árbol de derivación. Por ejemplo, la palabra  $aab$  tiene los dos posibles árboles de derivación que se muestran en la Figura 1.1.

Veamos ahora que no es inherentemente ambiguo. La producción de  $A_1$  produce las palabras de la forma  $a^ib^j$ , con  $i \geq j$ . La producción de  $A_2$  produce las palabras de la forma  $a^ib^j$ , con  $i \leq j$ . Por tanto, la gramática genera el lenguaje:

$$\begin{aligned} L &= \{a^ib^j \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \geq j\} \cup \{a^ib^j \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leq j\} = \\ &= \{a^ib^j \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

Este lenguaje es regular con expresión regular asociada:

$$a^*b^*$$

Por tanto, como es regular, tenemos que no es inherentemente ambiguo.

**Ejercicio 1.1.2.** Sea la gramática

$$\begin{cases} S \rightarrow aSA \mid \varepsilon \\ A \rightarrow bA \mid \varepsilon \end{cases}$$

1. Demostrar que es ambigua.

Tomemos como palabra  $aabb$ . Esta palabra tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.2.



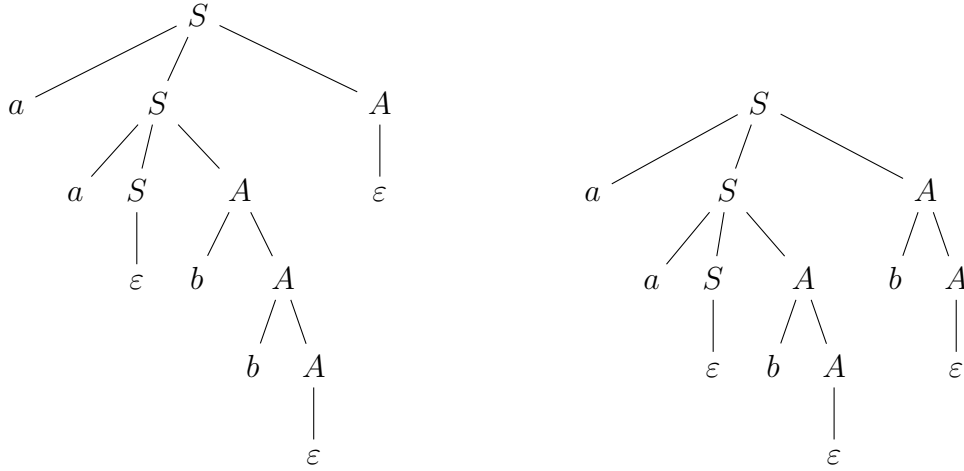


Figura 1.2: Árboles de derivación para  $aabb$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.2.

2. Dar una expresión regular para el lenguaje generado.

En primer lugar, hemos de considerar que  $\varepsilon \in L$ . Además, todas las palabras de longitud positiva empiezan por  $a$ . por tanto, la expresión regular para el lenguaje generado por la gramática es:

$$a^+b^* + \varepsilon$$

3. Construir una gramática no ambigua que genere el mismo lenguaje.

Una primera opción sería obtener el autómata y pasar este a gramática. No obstante, consideramos directamente la gramática  $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, A, B\}$$

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aA \mid \varepsilon \\ A \rightarrow aA \mid B \\ B \rightarrow bB \mid \varepsilon \end{cases}$$

Veamos ahora que esta gramática no es ambigua. Sea  $z \in L$ .

- Si  $z = \varepsilon$ , entonces la única derivación posible es  $S \Rightarrow \varepsilon$ .
- Si  $z \neq \varepsilon$ , entonces  $z = a^ib^j$ , con  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $i \geq 1$ . Para obtener la primera  $i$  (ya que  $i \geq 1$ ) hemos de usar la producción  $S \rightarrow aA$ . A partir de aquí, hemos de usar la producción  $A \rightarrow aA$   $i - 1$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $A \rightarrow B$  para producir las  $b$ 's y la producción  $B \rightarrow bB$   $j$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $B \rightarrow \varepsilon$  para terminar. Por tanto, la única derivación posible es:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \dots \Rightarrow a^iA \Rightarrow a^iB \Rightarrow a^ibB \Rightarrow \dots \Rightarrow a^ib^jB \Rightarrow a^ib^j$$

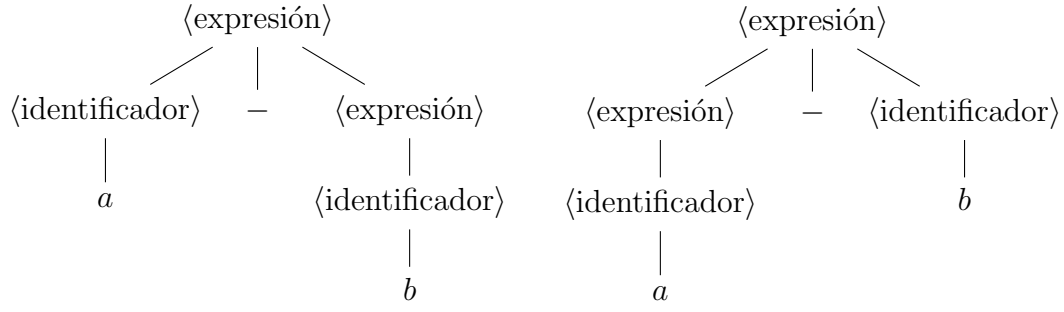


Figura 1.3: Árboles de derivación para  $a - b$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.3.

**Ejercicio 1.1.3.** Considera la gramática  $G = (V, T, S, P)$  donde

$$V = \{\langle \text{expresión} \rangle, \langle \text{identificador} \rangle\}$$

$$T = \{a, b, c, d, -\}$$

$$S = \langle \text{expresión} \rangle$$

$$P = \begin{cases} \langle \text{expresión} \rangle \rightarrow \langle \text{identificador} \rangle \\ \langle \text{expresión} \rangle \rightarrow \langle \text{identificador} \rangle - \langle \text{expresión} \rangle \\ \langle \text{expresión} \rangle \rightarrow \langle \text{expresión} \rangle - \langle \text{identificador} \rangle \\ \langle \text{identificador} \rangle \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \end{cases}$$

1. Demuestra que esta gramática no puede ser empleada para describir un posible lenguaje de programación, teniendo en cuenta que la sustracción no es una operación conmutativa, y que  $(a - b) - d \neq a - (b - d)$ .

El lenguaje generado tiene como expresión regular:

$$(a + b + c + d) (-(a + b + c + d))^*$$

Por tanto, debido a que no tenemos paréntesis, en el lenguaje de programación no podríamos obtener el resultado de  $a - (b - d)$ .

2. ¿Es ambigua la gramática  $G$ ? ¿Es la ambigüedad inherente al lenguaje generado por  $G$ ? Justifica adecuadamente la respuesta.

Para ver si la gramática es ambigua, consideramos la palabra  $a - b$ . Esta palabra tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.3.

La ambigüedad no es adherente al lenguaje generado por la gramática, ya que este lenguaje es regular. Por tanto, el lenguaje no es inherentemente ambiguo. Una gramática que no sea ambigua y que genere el mismo lenguaje es  $G = (V, \{a, b, c, d, -\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, I\}$$

$$P = \begin{cases} I \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \\ S \rightarrow I \mid I - S \end{cases}$$

3. ¿Es posible modificar  $G$  de manera que la nueva gramática pueda ser usada para generar el lenguaje de las expresiones aritméticas correctas con el operador de resta?

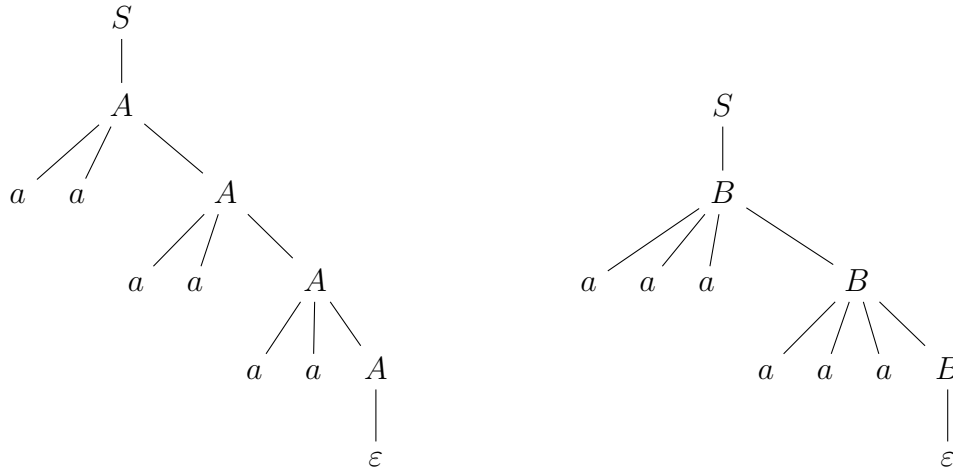


Figura 1.4: Árboles de derivación para  $a^6$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.4.

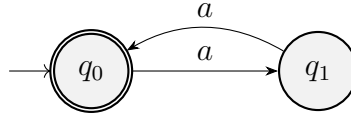


Figura 1.5: AFD que acepta el lenguaje de la variable  $A$  de la Gramática del Ejercicio 1.1.4.

Sí, podemos añadir paréntesis a la gramática para que sea capaz de generar el lenguaje de las expresiones aritméticas correctas con el operador de resta. La gramática modificada sería  $G = (V, \{a, b, c, d, -, (, )\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, I\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow a \mid b \mid c \mid d \\ S \rightarrow I \mid (I - S) \end{array} \right.$$

**Ejercicio 1.1.4.** Dada la gramática

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A \mid B \\ A \rightarrow aaA \mid \varepsilon \\ B \rightarrow aaaB \mid \varepsilon \end{array} \right.$$

1. Demostrar que es ambigua.

La variable  $A$  genera palabras de la forma  $a^{2i}$  y la variable  $B$  genera palabras de la forma  $a^{3i}$ . Por tanto, la palabras de la forma  $a^{6i}$  tienen dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.4.

2. Construir un autómata finito determinístico que acepte el mismo lenguaje.

El autómata que genera las palabras de la forma  $a^{2i}$  es el que se muestra en la Figura 1.5, mientras que el autómata que genera las palabras de la forma  $a^{3i}$  es el que se muestra en la Figura 1.6. El autómata producto es el que se muestra en la Figura 1.7.

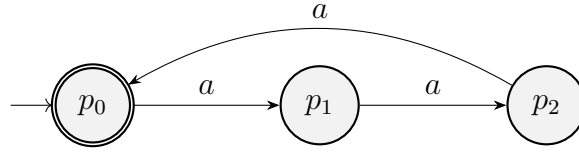


Figura 1.6: AFD que acepta el lenguaje de la variable  $B$  de la Gramática del Ejercicio 1.1.4.

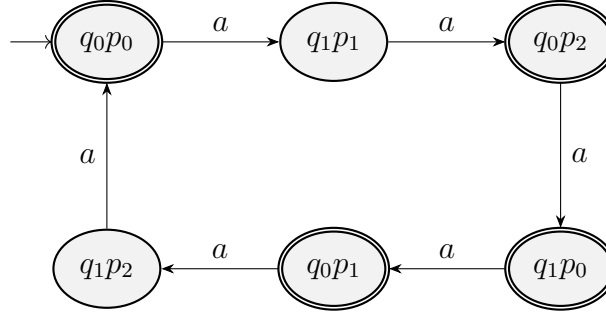


Figura 1.7: AFD que acepta el lenguaje de la Gramática del Ejercicio 1.1.4.

3. Construir una gramática lineal por la derecha, a partir del autómata determinístico, que genere el mismo lenguaje.

La gramática lineal por la derecha que genera el lenguaje del autómata de la Figura 1.7 es  $G = (V, \{a\}, P, S)$ , con:

$$V = \{q_0p_0, q_1p_1, q_0p_2, q_1p_0, q_0p_1, q_1p_2\}$$

$$P = \begin{cases} q_0p_0 \rightarrow aq_1p_1 \mid \varepsilon \\ q_1p_1 \rightarrow aq_0p_2 \\ q_0p_2 \rightarrow aq_1p_0 \mid \varepsilon \\ q_1p_0 \rightarrow aq_0p_1 \mid \varepsilon \\ q_0p_1 \rightarrow aq_1p_2 \mid \varepsilon \\ q_1p_2 \rightarrow aq_0p_0 \end{cases}$$

4. Demostrar que la gramática resultante no es ambigua.

Como el autómata del que proviene es determinista, la gramática obtenida no es ambigua; ya que para cada estado y símbolo solo hay un posible estado al que ir.

**Ejercicio 1.1.5.** Dar una gramática libre de contexto no ambigua que genere el lenguaje

$$L = \{a^ib^ja^kb^l \mid (i = j) \vee (k = l)\}$$

Este ejercicio no es tan directo y requiere explicación. La idea es expresar  $L$  como unión de tres lenguajes disjuntos:

1.  $L_1 = \{a^ib^ja^kb^l \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i = j \wedge k \neq l\}$
2.  $L_2 = \{a^ib^ja^kb^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i \neq j \wedge k = l\}$

$$3. L_3 = \{a^i b^j a^k b^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i = j \wedge k = l\} \cup \{\varepsilon\}.$$

Vemos de forma directa que  $L_1 = \bigcup_{i=1}^3 L_i$ . Veamos ahora que  $\bigcap_{i=1}^3 L_i = \emptyset$ . Sea  $z = a^i b^j a^k b^l \in L$ . Si todos los exponentes son distintos de 0, entonces vemos de forma directa que tan solo puede pertenecer a uno de los  $L_i$ . Si  $z = \varepsilon$ , tan solo puede pertenecer a  $L_3$ . Por último, tan solo queda contemplar que la palabra sea de la forma  $a^p b^q$ . En este caso, tan solo puede pertenecer a  $L_1$ .

Por tanto, tenemos que:

$$\bigcup_{i=1}^3 L_i = L \quad \bigcap_{i=1}^3 L_i = \emptyset$$

Damos ahora una gramática para cada uno de los lenguajes.

1. Sea  $G_1 = (V_1, \{a, b\}, P_1, S_1)$ , con:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{S_1, A_1, B_1, B_1^a, B_2^b\} \\ P_1 &= \begin{cases} S_1 \rightarrow A_1 B_1 \\ A_1 \rightarrow a A_1 b \mid \varepsilon \\ B_1 \rightarrow a B_1 b \mid B_1^a \mid B_2^b \\ B_1^a \rightarrow a B_1^a \mid a \\ B_2^b \rightarrow b B_2^b \mid b \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que  $A_1$  genera la parte de la forma  $a^i b^j$  con  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $i = j$ .  $B_1$  inicialmente genera la parte de la palabra de la forma  $a^{k'} b^{l'}$  con  $k', l' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k' = l'$ , pero necesariamente se emplea  $B_1^a$  o  $B_2^b$  para terminar la palabra, y estas añaden respectivamente  $a$ 's o  $b$ 's (al menos una), de forma que se fuerza a que  $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $k \neq l$ .

Además, es no ambigua puesto que la la forma de la palabra fija qué producciones hemos de emplear.

De esta forma,  $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ .

2. Sea  $G_2 = (V_2, \{a, b\}, P_2, S_2)$ , con:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{S_2, A_2, B_2, A_2^a, A_2^b\} \\ P_2 &= \begin{cases} S_2 \rightarrow A_2 B_2 \\ A_2 \rightarrow a A_2 b \mid A_2^a \mid A_2^b \\ B_2 \rightarrow a B_2 b \mid ab \\ A_2^a \rightarrow a A_2^a \mid a \\ A_2^b \rightarrow b A_2^b \mid b \end{cases} \end{aligned}$$

La demostración de que  $\mathcal{L}(G_2) = L_2$  es análoga a la de  $G_1$ . Notemos que en este caso, como la regla  $B_2 \rightarrow \varepsilon$  no está presente, se fuerza a que  $k, l \neq 0$ .

Además, de igual forma, se trata de una gramática no ambigua.

Por tanto,  $\mathcal{L}(G_2) = L_2$ .

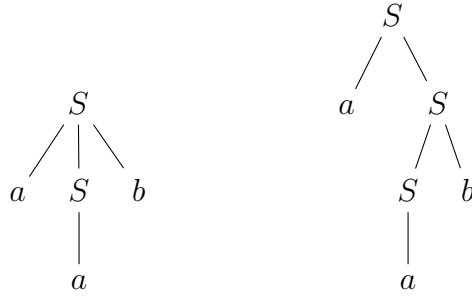


Figura 1.8: Árboles de derivación para  $aab$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.6.1.

3. Sea  $G_3 = (V_3, \{a, b\}, P_3, S_3)$ , con:

$$V_3 = \{S_3, C_3\}$$

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S_3 \rightarrow C_3 C_3 \mid \varepsilon \\ C_3 \rightarrow a C_3 b \mid ab \end{array} \right.$$

Notemos que la regla  $S \rightarrow \varepsilon$  se añade para que  $\varepsilon \in L_3$ .  $C_3$  genera la parte de la palabra de la forma  $a^i b^i$  con  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , por lo que se tiene.

Además, es no ambigua puesto que la la forma de la palabra fija qué producciones hemos de emplear.

Por tanto,  $\mathcal{L}(G_3) = L_3$ .

Como son tres lenguajes disjuntos cuya unión es  $L$ , y como cada una de las gramáticas es no ambigua, tenemos que la gramática  $G = (V, \{a, b\}, P, S)$  es no ambigua, con:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{S\}$$

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2 \mid S_3 \}$$

**Ejercicio 1.1.6.** Determinar cuales de las siguientes gramáticas son ambiguas y, en su caso, comprobar si los lenguajes generados son inherentemente ambiguos:

1.  $S \rightarrow aSb \mid Sb \mid aS \mid a$

La gramática dada es ambigua. Por ejemplo, la palabra  $aab$  tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.8. No obstante, este es un lenguaje regular con expresión regular asociada:

$$aa^*b^*$$

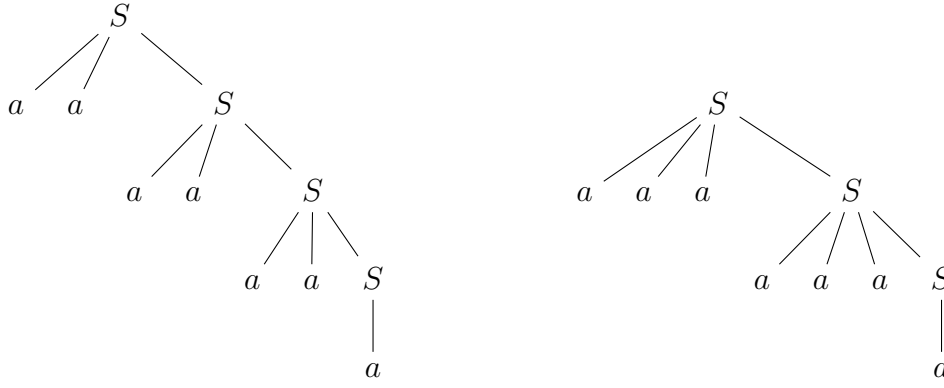
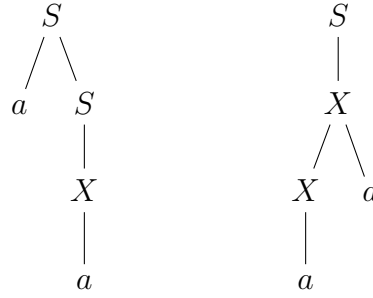
Por tanto, el lenguaje generado no es inherentemente ambiguo.

2.  $S \rightarrow aaS \mid aaaS \mid a$

La gramática dada es ambigua. Por ejemplo, la palabra  $a^7$  tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.9. No obstante, este es un lenguaje regular con expresión regular asociada:

$$(aa + aaa)^*a$$

Por tanto, el lenguaje generado no es inherentemente ambiguo.

Figura 1.9: Árboles de derivación para  $a^7$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.6.2.Figura 1.10: Árboles de derivación para  $a^2$  usando la Gramática del Ejercicio 1.1.6.3.

3.  $S \rightarrow aS \mid aSb \mid X$ ,  
 $X \rightarrow Xa \mid a$

La gramática dada es ambigua. Por ejemplo, la palabra  $a^2$  tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.10.

El lenguaje generado por esta gramática es:

$$L = \{aa^{n+m}b^n \mid n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Consideramos ahora la gramática  $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, A, B\}$$

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aA \\ A \rightarrow aA \mid B \\ B \rightarrow aBb \mid \varepsilon \end{cases}$$

Esta gramática no es ambigua. Sea  $z \in L$ , por lo que será de la forma  $z = aa^{n+m}b^n$ . Para obtener la primera  $a$  hemos de usar la producción  $S \rightarrow aA$ . A partir de aquí, hemos de usar la producción  $A \rightarrow aA$   $m$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $A \rightarrow B$  para producir las  $a$ 's y  $b$ 's y la producción  $B \rightarrow aBb$   $n$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $B \rightarrow \varepsilon$  para terminar. Por tanto, la única derivación posible es:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \dots \Rightarrow aa^mB \Rightarrow aa^{n+m}b^nB \Rightarrow aa^{n+m}b^n$$

**Ejercicio 1.1.7.** Dar gramáticas libres de contexto no ambiguas (cuando sea posible) para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto  $A = \{a, b, c\}$ :

1.  $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\}$
2.  $L_2 = \{(ab)^i (bc)^j \mid i, j \geq 0\}$

La gramática que genera el lenguaje  $L_2$  es  $G = (V, \{a, b, c\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, X\}$$

$$P = \begin{cases} S \rightarrow abS & | & X \\ X \rightarrow bcX & | & \varepsilon \end{cases}$$

Esta no es ambigua. Sea  $z \in L$ , por lo que será de la forma  $z = (ab)^i (bc)^j$ . Para obtener la parte de  $(ab)^i$  hemos de usar la producción  $S \rightarrow abS$   $i$  veces. A partir de aquí, hemos de usar la producción  $S \rightarrow X$  para producir las  $b$ 's y  $c$ 's y la producción  $X \rightarrow bcX$   $j$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $X \rightarrow \varepsilon$  para terminar. Por tanto, la única derivación posible es:

$$S \Rightarrow abS \Rightarrow ababS \Rightarrow \dots \Rightarrow (ab)^i X \Rightarrow (ab)^i (bc)X \Rightarrow (ab)^i (bc)^j X \Rightarrow (ab)^i (bc)^j$$

3.  $L_3 = \{a^i b^{i+j} c^j \mid i, j \geq 0\}$

La gramática que genera el lenguaje  $L_3$  es  $G = (V, \{a, b, c\}, P, S)$ , con:

$$V = \{S, A, C\}$$

$$P = \begin{cases} S \rightarrow AC \\ A \rightarrow aAb & | & \varepsilon \\ C \rightarrow bCc & | & \varepsilon \end{cases}$$

Esta no es ambigua. Sea  $z \in L$ , por lo que será de la forma  $z = a^i b^{i+j} c^j$ . Para obtener la parte de  $a^i b^i$  hemos de usar la producción  $A \rightarrow aAb$   $i$  veces. A partir de aquí, hemos de usar la producción  $A \rightarrow \varepsilon$ . Por otro lado, para obtener la parte de  $b^j c^j$  hemos de usar la producción  $C \rightarrow bCc$   $j$  veces. Por último, hemos de usar la producción  $C \rightarrow \varepsilon$  para terminar.

4.  $L_4$  definido como el conjunto de palabras que comienzan por  $aab$  y terminan por  $bbc$  y tales que estas dos subcadenas no aparecen nunca en el interior de la palabra (sólo están al principio y al final).

**Ejercicio 1.1.8.** Dada la gramática

$$\{S \rightarrow 01S \mid 010S \mid 101S \mid \varepsilon\}$$

1. Determinar si es ambigua.

La gramática dada es ambigua. Por ejemplo, la palabra 010101 tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.11.



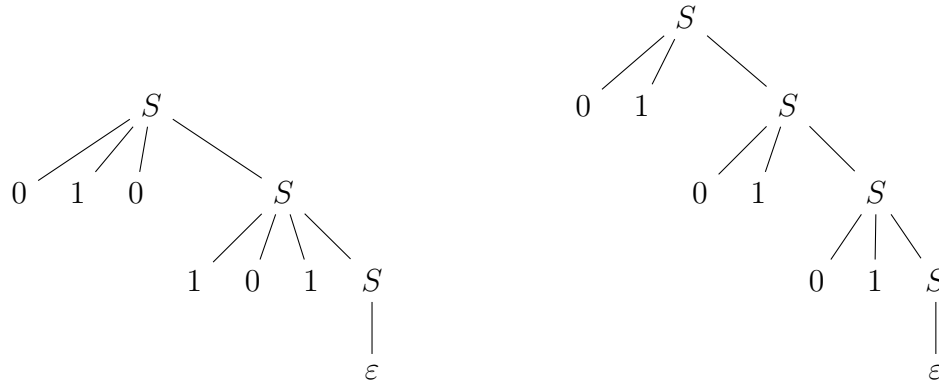


Figura 1.11: Árboles de derivación para 010101 usando la Gramática del Ejercicio 1.1.8.

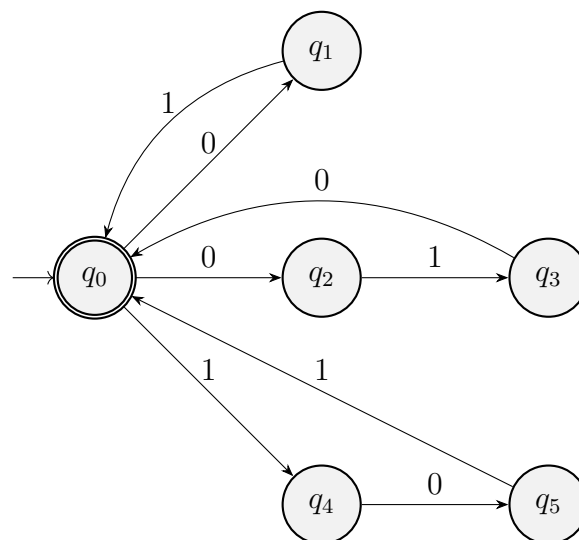


Figura 1.12: AFND que acepta el lenguaje de la Gramática del Ejercicio 1.1.8.

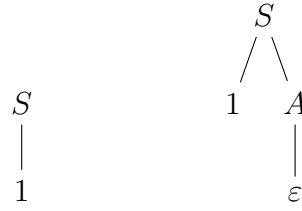


Figura 1.13: Árboles de derivación para 1 usando la Gramática del Ejercicio 1.1.9.

2. Construir un autómata finito determinista asociado.

La expresión regular asociada al lenguaje generado por la gramática es:

$$(01 + 010 + 101)^*$$

El AFND asociado es el de la Figura 1.12.

3. Calcular la gramática lineal por la derecha que se obtiene a partir del autómata. ¿Es ambigua la gramática resultante?

**Ejercicio 1.1.9.** Considerar la siguiente gramática:

$$\begin{cases} S \rightarrow A1B \\ A \rightarrow 0A \mid \varepsilon \\ B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon \end{cases}$$

1. Demostrar que la gramática dada no es ambigua.

La expresión regular asociada al lenguaje generado por la gramática es:

$$0^*1(0 + 1)^*$$

La gramática dada no es ambigua. Sea  $z \in L$ , por lo que será de la forma  $z = 0^i 1 u$ , con  $i \geq 0$  y  $u \in \{0, 1\}^*$ . En primer lugar, para obtener el 1 central, hemos de usar la producción  $S \rightarrow A1B$ . A partir de aquí, hemos de usar la producción  $A \rightarrow 0A$   $i$  veces. Después, usamos las reglas de  $B$  para obtener la palabra  $u$ .

2. Encontrar una gramática para el mismo lenguaje que sea ambigua y demostrar su ambigüedad.

Consideramos la gramática  $G = (V, \{0, 1\}, P, S)$ , con:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \\ P &= \begin{cases} S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 1 \\ A \rightarrow 0A \mid 1A \mid \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que esta es ambigua, puesto que si consideramos la palabra 1, esta tiene dos árboles de derivación, como se muestra en la Figura 1.13. Notemos que si quitamos la regla  $S \rightarrow 1$ , la gramática no sería ambigua y generaría el mismo lenguaje que la gramática original.

**Ejercicio 1.1.10.** Describe el lenguaje generado por la siguiente gramática  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ , con

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid bAa \\ A \rightarrow aAa \mid bAa \mid \varepsilon \end{cases}$$

1. Demuestra que el lenguaje generado por la gramática no es regular, pero si independiente del contexto.
2. Normaliza la gramática  $G$  en la Forma Normal de Greibach, y determina todas las derivaciones más a la izquierda para la cadena  $ab^2a^5$ .

En primer lugar, vemos que todas las producciones son útiles. Buscamos ahora eliminar las producciones nulas. Para esto, vemos que la única producción variable anulable es  $A$ . Eliminando las producciones nulas, obtenemos las siguientes reglas de producción:

$$P = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid bAa \mid aa \mid ba \\ A \rightarrow aAa \mid bAa \mid aa \mid ba \end{cases}$$

**Ejercicio 1.1.11.** Obtener la forma normal de Greibach para la siguiente gramática:

$$G = (\{S_1, S_2, S_3\}, \{a, b, c, d, e\}, S_1, P)$$

donde:

$$P = \begin{cases} S_1 \rightarrow S_1S_2c \mid S_3 \mid S_3bS_3 \\ S_2 \rightarrow S_1S_1 \mid d \\ S_3 \rightarrow S_2e \end{cases}$$

**Ejercicio 1.1.12.** Pasar a forma normal de Greibach la gramática

$$\begin{cases} S \rightarrow AAA \mid B \\ A \rightarrow aA \mid B \\ B \rightarrow \varepsilon \end{cases}$$

**Ejercicio 1.1.13.** Determina si los siguientes lenguajes son regulares o independientes del contexto. Encuentra una gramática que los genere.

1.  $L_1 = \{a^ib^jc^k \mid i, j \geq 0, k < i + j\}$
2.  $L_2 = \{(ab)^ic^jd \mid j = i - 1, i \geq 1\}$
3.  $L_3 = \{ab^icd^j \mid j = 2 \cdot i, 1 \leq i \leq 10\}$

Elige una de ellas que sea independiente del contexto y pásala a forma normal de Chomsky.

**Ejercicio 1.1.14.** Dadas las siguientes gramáticas determinar si son ambiguas y, en caso de que lo sean, determinar una gramática no ambigua que genere el mismo lenguaje

1.  $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid x \mid y$  (alfabeto de símbolos terminales  $\{x, y, +, *, (, )\}$  y símbolo inicial  $E$ ).
2.  $S \rightarrow SS+ \mid SS* \mid x \mid y$  (alfabeto de símbolos terminales  $\{x, y, +, *\}$  y símbolo inicial  $S$ )

**Ejercicio 1.1.15.** Una gramática independiente del contexto generalizada es una gramática en el que las producciones son de la forma  $A \rightarrow r$  donde  $r$  es una expresión regular de variables y símbolos terminales. Una gramática independiente del contexto generalizada representa una forma compacta de representar una gramática con todas las producciones  $A \rightarrow \alpha$ , donde  $\alpha$  es una palabra del lenguaje asociado a la expresión regular  $r$  y  $A \rightarrow r$  es una producción de la gramática generalizada. Observemos que esta gramática asociada puede tener infinitas producciones, ya que una expresión regular puede representar un lenguaje con infinitas palabras. El concepto de lenguaje generado por una gramática generalizada se define de forma análoga al de las gramáticas independientes del contexto, pero teniendo en cuenta que ahora puede haber infinitas producciones. Demostrar que un lenguaje es independiente del contexto si y solo si se puede generar por una gramática generalizada.

**Ejercicio 1.1.16.** Demostrar que los siguientes lenguajes son independientes del contexto:

1.  $L_1 = \{u\#w \mid u^{-1} \text{ es una subcadena de } w, u, w \in \{0, 1\}^*\}$
2.  $L_2 = \{u_1\#u_2\#\dots\#u_k \mid k \geq 1, \text{ cada } u_i \in \{0, 1\}^*, \text{ y para algún } i \text{ y } j, u_i = u_j^{-1}\}$

**Ejercicio 1.1.17.** Sobre el alfabeto  $\{0, 1\}$  dar una gramática no ambigua que genere todas las palabras en las que el número de 0s es el doble que el de 1s.

**Ejercicio 1.1.18.** Sea el lenguaje  $L = \{0^i 1^k 0^j \mid i \neq j, 2i \neq j\}$ . Demostrar que  $L$  es independiente del contexto.

**Ejercicio 1.1.19.** Demostrar que si una gramática  $G$  está en forma normal de Chomsky, entonces si  $w \in L(G)$  el número de pasos de derivación de toda generación de esta palabra es  $2|w| - 1$ .

**Ejercicio 1.1.20.** Dar gramáticas independientes del contexto no ambiguas para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto  $\{0, 1\}$ :

1. El conjunto de palabras  $w$  tal que en todo prefijo de  $w$  el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.
2. El conjunto de palabras  $w$  en las que el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

**Ejercicio 1.1.21.** Sea  $L = \{0^i 1^j 0^k \mid i \neq j, 2i \neq j\}$ . Demostrar que  $L$  es independiente del contexto.

**Ejercicio 1.1.22.** Supongamos el conjunto de símbolos terminales  $T = \{\text{if, condicion, then, else, } a := 1\}$ , el alfabeto de variables  $V = \{\langle \text{SENT} \rangle, \langle \text{IF - THEN} \rangle, \langle \text{IF - THEN - ELSE} \rangle, \langle \text{ASIG} \rangle\}$ , y las producciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{SENT} \rangle \rightarrow \langle \text{ASIG} \rangle \mid \langle \text{IF - THEN} \rangle \mid \langle \text{IF - THEN - ELSE} \rangle \\ \langle \text{IF - THEN} \rangle \rightarrow \text{if condicion then} \langle \text{SENT} \rangle \\ \langle \text{IF - THEN - ELSE} \rangle \rightarrow \text{if condicion then} \langle \text{SENT} \rangle \text{else} \langle \text{SENT} \rangle \\ \langle \text{ASIG} \rangle \rightarrow a := 1 \end{array} \right.$$

Suponiendo que el símbolo inicial es  $\langle \text{SENT} \rangle$ , demostrar que la gramática es ambigua. Dar una gramática no ambigua que genere el mismo lenguaje.

### 1.1.1. Preguntas Tipo Test

Se pide discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Si un lenguaje de tipo 2 viene generado por una gramática ambigua, siempre puedo encontrar una gramática no ambigua que genere el mismo lenguaje.
2. En una gramática de tipo 2 ambigua no puede existir una palabra generada con un único árbol de derivación.
3. Dada una gramática independiente del contexto, siempre se puede construir una gramática sin transiciones nulas ni unitarias que genere exactamente el mismo lenguaje que la gramática original.
4. Una gramática independiente del contexto es ambigua si existe una palabra que puede ser generada con dos cadenas de derivación distintas.
5. Un lenguaje inherentemente ambiguo puede ser generado por una gramática ambigua.
6. El lenguaje de las palabras sobre  $\{0, 1\}$  con un número impar de ceros es independiente del contexto.
7. Si en una producción de una gramática independiente del contexto, uno de los símbolos que contiene es útil, entonces la producción es útil.
8. Todo árbol de derivación de una palabra en una gramática independiente del contexto está asociado a una única derivación por la izquierda.
9. Para poder aplicar el algoritmo que hemos visto para transformar una gramática a forma normal de Greibach, la gramática tiene que estar en forma normal de Chomsky necesariamente.
10. Sólo hay una derivación por la derecha asociada a un árbol de derivación.
11. Si una gramática independiente del contexto no tiene producciones nulas ni unitarias, entonces si  $u$  es una palabra de longitud  $n$  generada por la gramática, su derivación se obtiene en un número de pasos no superior a  $2n - 1$ .

12. Cada árbol de derivación de una palabra en una gramática de tipo 2, tiene asociada una única derivación por la izquierda de la misma.
13. Existe un lenguaje con un número finito de palabras que no puede ser generado por una gramática libre de contexto.
14. La gramática compuesta por las reglas de producción  $S \rightarrow AA$ ,  $A \rightarrow aSa$ ,  $A \rightarrow a$  no es ambigua.
15. Para poder aplicar el algoritmo que transforma una gramática en forma normal de Greibach es necesario que la gramática esté en forma normal de Chomsky.
16. Un lenguaje libre de contexto es inherentemente ambiguo si existe una gramática ambigua que lo genera.
17. La gramática compuesta por las reglas de producción  $S \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow aSa$ ,  $A \rightarrow a$  es ambigua.
18. Para generar una palabra de longitud  $n$  en una gramática en forma normal de Chomsky hacen falta exactamente  $2n - 1$  pasos de derivación.
19. Es imposible que una gramática esté en forma normal de Chomsky y Greibach al mismo tiempo.
20. En una gramática independiente del contexto, si una palabra de longitud  $n$  es generada, entonces el número de pasos de derivación que se emplean debe de ser menor o igual a  $2n - 1$ .
21. El algoritmo que pasa una gramática a forma normal de Greibach produce siempre el mismo resultado con independencia de cómo se numeren las variables.
22. La gramática compuesta por las siguientes reglas de producción  $\{S \rightarrow A \mid BA \mid SS, B \rightarrow a \mid b, A \rightarrow a\}$  es ambigua.
23. Si una palabra de longitud  $n$  es generada por una gramática en forma normal de Greibach, entonces lo es con  $n$  pasos de derivación exactamente.
24. En una gramática independiente del contexto puede existir una palabra que es generada con dos derivaciones por la izquierda distintas que tienen el mismo árbol de derivación.
25. Una gramática independiente del contexto genera un lenguaje que puede ser representado por una expresión regular.
26. Para cada autómata finito no determinista  $M$  existe una gramática independiente de contexto  $G$  tal que  $L(M) = L(G)$ .
27. Para que un autómata con pila sea determinista es necesario que no tenga transiciones nulas.

28. El algoritmo que pasa una gramática a forma normal de Greibach produce siempre el mismo resultado con independencia de cómo se numeren las variables.
29. El conjunto de cadenas generado por una gramática independiente del contexto en forma normal de Greibach puede ser reconocido por un autómata finito no determinista con transiciones nulas.
30. La intersección de dos lenguajes regulares da lugar a un lenguaje independiente del contexto.
31. Si  $L_1$  y  $L_2$  son independientes del contexto, no podemos asegurar que  $L_1 \cap L_2$  también lo sea.