Variable Compleja

Examen I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas y Doble Grado en Matemáticas y Física.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 28 de noviembre de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}$ converge absolutamente en todo punto de $D(0,1)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $D(0,1)$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Dado $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando

$$z^2 f'(z) + \beta z f(z) = \log(1+z) \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Dado $R > 0$ con $R \neq 1$ y $R \neq 2$, calcular la integral

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\, dz.$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi \in C^2(\Omega)$ y:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

1. [**1.5 puntos**] Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por
$$g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$$
es holomorfa en Ω.

2. [**1.5 puntos**] Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \varphi$ y que f es única salvo una constante.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{1-z^{n+1}}$ converge absolutamente en todo punto de $D(0,1)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $D(0,1)$.

Sea $z \in D(0,1)$ fijo, por lo que $|z| < 1$. Entonces:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{|1-|z|^{n+1}|} = \frac{|z|^n}{1-|z|^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aplicamos ahora el criterio del cociente para series, usando que $|z| < 1$:

$$\left\{\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|^{n+2}} \cdot \frac{1-|z|^{n+1}}{|z|^n}\right\} = \left\{|z| \cdot \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|^{n+2}}\right\} \to |z| \cdot 1 = |z| < 1$$

Por tanto, por el Criterio del Cociente para series, la siguiente serie converge:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|z|^n}{1-|z|^{n+1}}$$

Por el Criterio de Comparación para series, la serie siguiente es convergente:

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{z^n}{1-z^{n+1}}\right|$$

Por tanto, la serie del enunciado converge absolutamente para todo $z \in D(0,1)$.

Respecto a la convergencia uniforme, sea $K \subset D(0,1)$ no vacío y compacto. Entonces existe $r \in [0,1[$ tal que $|z| \leqslant r < 1$ para todo $z \in K$. Entonces:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{|1-|z|^{n+1}|} = \frac{|z|^n}{1-|z|^{n+1}} \leqslant \frac{r^n}{1-r^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in K$$

Por el Criterio del Cociente usado de forma idéntica al caso anterior, la serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{1-r^{n+1}}$$

es convergente. Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie del enunciado converge uniformemente en K.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Dado $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando

$$z^2 f'(z) + \beta z f(z) = \log(1+z) \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Supongamos la existencia. Entonces, como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, f es analítica en $D(0,1)$ y por tanto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Teorema de Derivación de funciones dadas como Sumas de Series de Potencias, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por tanto, podemos reescribir la ecuación dada en el enunciado para cada $z \in D(0,1)$ como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta\alpha_n z^{n+1} = \log(1+z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\beta)\,\alpha_n z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Por el Principio de Identidad, tenemos que:

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+\beta)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, la función f queda dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+\beta)} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Veamos no obstante que f está bien definida. Para ello, vamos a ver que la serie converge puntualmente en $D(0,1)$. Para ello, clculamos su radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|\alpha_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+\beta)}} = 1$$

Por tanto, por la fórmula de Cauchy-Hadamard, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$. Por tanto, la serie converge puntualmente en $D(0,1)$, y esto demuestra la existencia de f.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Dado $R > 0$ con $R \neq 1$ y $R \neq 2$, calcular la integral

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\,dz.$$

Distinguimos en función del valor de R.

1. Caso $R \in \,]0,1[$: En este caso, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \end{array}$$

Tenemos que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $D(0,1)$ es estrellado. Por el Teorema Local de Cauchy, f admite una primitiva en $D(0,1)$. Como $C(0,R)$ es un camino cerrado en $D(0,1)$, tenemos que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\,dz = \int_{C(0,R)} f(z)\,dz = 0$$

2. <u>Caso $R \in]1,2[$</u>: En este caso, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^z}{z-2} \end{array}$$

Entonces, $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$ y $\overline{D}(0,R) \subset D(0,2)$. Por la Fórmula de las Derivadas de Cauchy, tenemos que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\,dz = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i \cdot f'(-1)$$

Calcularemos por tanto la derivada de f:

$$f'(z) = \frac{(z-2)e^z - e^z}{(z-2)^2} = \frac{(z-3)e^z}{(z-2)^2} \qquad \forall z \in D(0,2)$$

Por tanto, tenemos que:

$$f'(-1) = -\frac{4}{9e}$$

Por tanto, la integral queda dada por:

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\,dz = 2\pi i \cdot f'(-1) = -\frac{8\pi i}{9e}$$

3. <u>Caso $R \in]2,+\infty[$</u>: En este caso, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z-2} = \frac{A(z-2)(z+1) + B(z-2) + C(z+1)^2}{(z+1)^2(z-2)}$$

Igualando numeradores, tenemos que:

- Para $z=-1$: $1 = -3B \Longrightarrow B = {}^{-1}\!/\!_3$.
- Para $z=2$: $1 = 9C \Longrightarrow C = {}^{1}\!/\!_9$.
- Igualando los coeficientes de z^2: $0 = A + C \Longrightarrow A = {}^{-1}\!/\!_9$.

Resolvemos ahora cada una de las integrales por separado. Como la exponencial es entera, podemos usar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia en dos de las integrales:

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{z+1}\,dz = 2\pi i \cdot e^{-1}$$
$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{z-2}\,dz = 2\pi i \cdot e^{2}$$

Para la tercera integral, empleamos la Fórmula de Cauchy para la derivada, sabiendo que la derivada de la exponencial es la exponencial:

$$\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i \cdot e^{-1}$$

Por tanto, la integral queda dada por:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}\,dz &= A\cdot\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{z+1}\,dz + B\cdot\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{(z+1)^2}\,dz + C\cdot\int_{C(0,R)} \frac{e^z}{z-2}\,dz \\
&= \left(-\frac{1}{9}\cdot 2\pi i\cdot e^{-1}\right) + \left(-\frac{1}{3}\cdot 2\pi i\cdot e^{-1}\right) + \left(\frac{1}{9}\cdot 2\pi i\cdot e^{2}\right) \\
&= -\frac{4}{9}\cdot 2\pi i\cdot e^{-1} + \frac{1}{9}\cdot 2\pi i\cdot e^{2} = \frac{2\pi i}{9}\left(e^2 - 4e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^2\equiv\mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi\in C^2(\Omega)$ y:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad \forall (x,y)\in\Omega.$$

1. **[1.5 puntos]** Sea $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función $g:\Omega\to\mathbb{C}$ dada por

   $$g(x+iy)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)-i\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$$

   es holomorfa en Ω.

   Definimos las funciones $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$, con vistas a aplicar las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

   $$\begin{aligned}
   u(x,y)&=\operatorname{Re} g(x+iy)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\\
   v(x,y)&=\operatorname{Im} g(x+iy)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)
   \end{aligned}$$

   Calculamos cada una de las derivadas parciales de u y v:

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \qquad \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\\
   \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \qquad \frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}
   \end{aligned}$$

   Comprobemos que se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

   $$\begin{aligned}
   &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial v}{\partial y}\iff\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\\
   &\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}
   \end{aligned}$$

   Notemos que la primera ecuación se cumple por hipótesis, y la segunda se cumple por el Teorema de Clairaut. Por tanto, se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por tanto g es holomorfa en Ω.

2. **[1.5 puntos]** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f=\varphi$ y que f es única salvo una constante.

Como Ω es un dominio estrellado y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, por el Teorema Local de Cauchy, $\exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una primitiva de g en Ω. Por tanto, tenemos que:

$$f'(x+iy) = g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Definimos ahora de nuevo $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) \end{aligned}$$

Por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Para calcular $u = \operatorname{Re} f$, integramos la primera ecuación respecto de x:

$$u(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \varphi(x,y) + h(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

donde h es una función de y que no depende de x y representa la constante de integración. Derivando respecto de y, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, h es constante, por lo que $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + C \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Como $u = \operatorname{Re} f$, y por hipótesis buscamos que $\operatorname{Re} f = \varphi$, tenemos que $C = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} f(x,y) = \varphi(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, la existencia está probada. Supongamos ahora que existe otra función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} g = \varphi$. Definimos $h = f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, tenemos que:

$$\operatorname{Re} h = \operatorname{Re} f - \operatorname{Re} g = \varphi - \varphi = 0$$

Como h es holomorfa, está definida en un dominio, y su parte real es nula, entonces h es constante, luego $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = g(z) + \lambda \qquad \forall z \in \Omega$$

Por tanto, f es única salvo una constante.