Ecuaciones Diferenciales I
Examen I

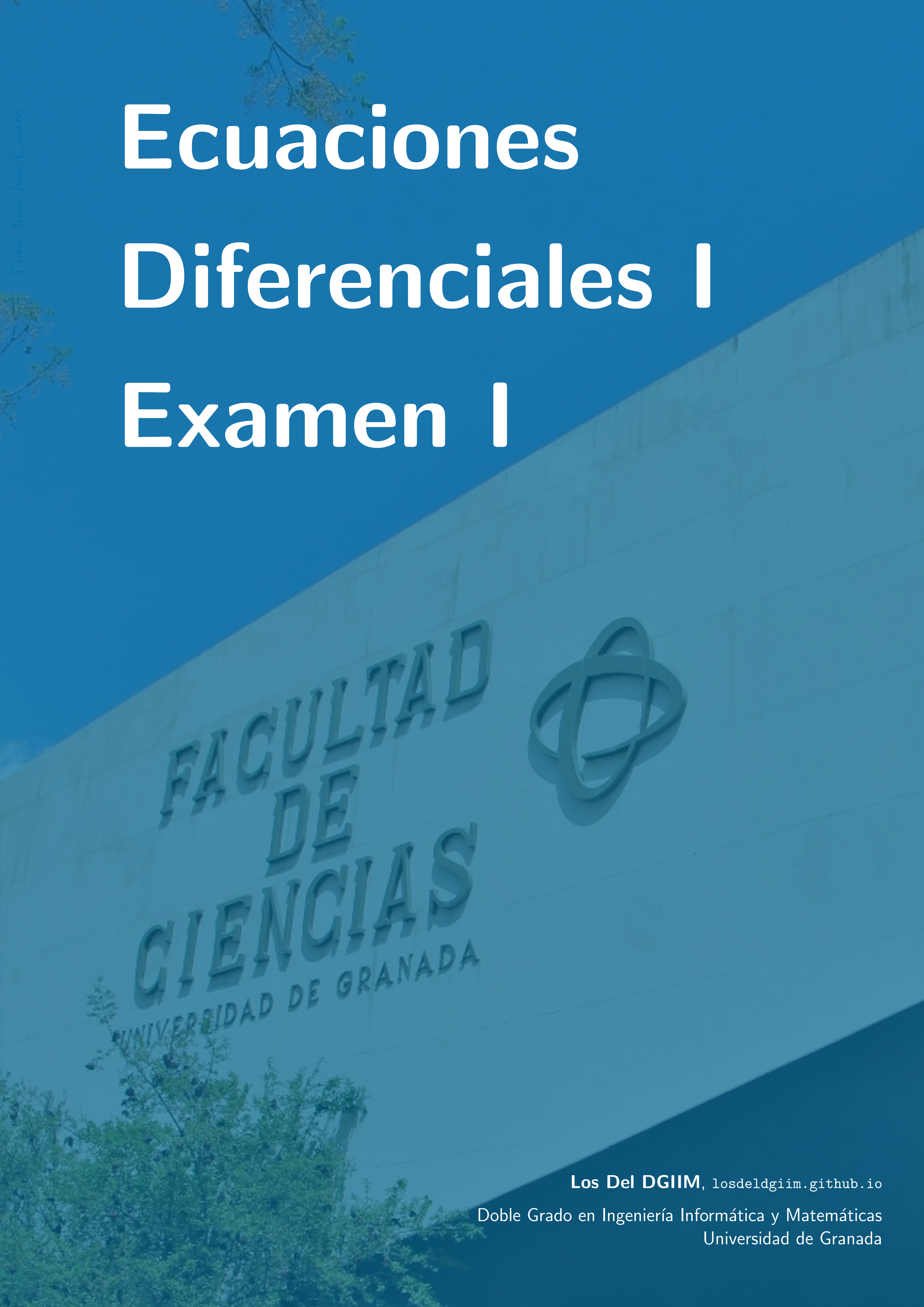

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2017-18.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 22 de marzo de 2018.

Ejercicio 1. Se considera una solución cualquiera $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x' = 2tx.$$

Se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que, para cada $t \in I$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = ce^{t^2}.$$

Demostración. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-t^2}\, x(t) \end{array}$$

Tenemos que f es derivable en I por ser producto de funciones derivables. Calculemos su derivada:

$$f'(t) = -2te^{-t^2}\, x(t) + e^{-t^2}\, x'(t) = -2te^{-t^2}\, x(t) + 2te^{-t^2}\, x(t) = 0.$$

Por tanto, al ser $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, la función f es constante en I. Es decir:

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Multiplicando por e^{t^2} ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos que:

$$x(t) = ce^{t^2} \quad \forall t \in I.$$

$\square$

Ejercicio 2. Demuestra que la transformación $\varphi(t, x) = (s, y)$, $s = t$, $y = x + t$ define un difeomorfismo del plano que es compatible con la ecuación

$$x' = (x + t)^2.$$

Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(0) = 0$ y especifica su intervalo de definición.

Veamos en primer lugar que es un difeomorfismo. Aunque no se menciona, entendemos el dominio maximal de φ, es decir:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, x + t) \end{array}$$

Comenzamos por demostrar que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como ambas componentes de φ son polinómicas, esto es directo. Veamos ahora que φ es biyectiva buscando su inversa. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, y - s) \end{array}$$

Como $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$, tenemos que $\psi = \varphi^{-1}$, por lo que φ es biyectiva. Además, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por la misma razón (ambas componentes son polinómicas). Por tanto, φ es un difeomorfismo.

Veamos ahora que es compatible con la ecuación diferencial dada. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & (x+t)^2 \end{array}$$

Nuestra ecuación diferencial es $x' = f(t,x)$, y veamos ahora que el cambio de variable φ es compatible con ella probando que:

1. f es continua, lo que es directo al ser polinómica.
2. φ es un difeomorfismo, lo que ya hemos hecho.
3. Comprobar que se cumple la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

   En nuestro caso, tenemos que:

$$1 + 0 \cdot (x+t)^2 = 1 \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

   Esto último no habría sido necesario, puesto que no se modifica la variable independiente.

Por tanto, el cambio de variable es compatible con la ecuación diferencial dada.

Para resolverla aplicando el cambio de variable, tenemos que la ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} x' = 1 + 1 \cdot (x+t)^2 = 1 + y^2 \Longrightarrow y' = 1 + y^2.$$

El dominio de esta nueva ecuación es $\mathbb{R}^2$, y vemos que es una ecuación diferencial de variables separadas. Como no tiene soluciones constantes al ser $1 + y^2 \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, aplicamos el método de separación de variables:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int ds \Longrightarrow \arctan y = s + C \Longrightarrow y(s) = \tan(s + C)$$

Veamos su intervalo de defición $\widehat{I} \subset \mathbb{R}$. Como $\arctan y = s + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para todo $s \in \widehat{I}$, tenemos que $\widehat{I} = \left]-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right[$. Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que:

$$x(t) = \tan(t + C) - t \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right[.$$

Por último, aplicamos la condición inicial $x(0) = 0$:

$$x(0) = \tan(C) = 0 \Longrightarrow C = 0.$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial dada que cumple la condición inicial es:

$$x(t) = \tan(t) - t \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ejercicio 3. Encuentra un cambio de variable que transforme la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

en una ecuación homogénea.

El dominio de definición de dicha ecuación diferencial ha de asegurar que no se anula el denominador de la ecuación dada, por lo que hay dos posibles dominios de definición:

$$D = \left\{ \begin{array}{lcl} D_+ & = & \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t-x+2 > 0\} \\ D_- & = & \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t-x+2 < 0\} \end{array} \right.$$

Calculamos en primer lugar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Por tanto, el cambio de variable correspondiente es una traslación según el vector $v_* = (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, el cual más aderante especificaremos. Es decir, el cambio de variable es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D' \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t+t_*, x+x_*) \end{array}$$

donde D' depende del dominio escogido en primer lugar. Este puede ser:

$$\begin{aligned} D' &= \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (s-t_*, y-x_*) \in D\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{lcl} D'_+ & = & \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s-t_*-y+x_*+2 > 0\} \\ D'_- & = & \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s-t_*-y+x_*+2 < 0\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por lo visto en teoría, sabemos que φ es un difeomorfismo admisible en este caso, y la ecuación diferencial homogénea correspondiente es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{{dy}/{dt}}{{ds}/{dt}} = \frac{dy}{dt} = 0 + 1 \cdot x' = \frac{t+x+3}{t-x+2} = \frac{s-t_*+(y-x_*)+3}{s-t_*-(y-x_*)+2}$$

Por tanto, hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -t_*-x_*+3 & = & 0 \\ -t_*+x_*+2 & = & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} t_*+x_* & = & 3 \\ t_*-x_* & = & 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} t_* & = & 5/2 \\ x_* & = & 1/2 \end{array} \right.$$

Por tanto, el cambio de variable es una traslación según el vector $v_* = (5/2, 1/2)$; es decir:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D' \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t+5/2, x+1/2) \end{array}$$

La ecuación diferencial homogénea correspondiente es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s+y}{s-y} \quad \forall (s,y) \in D'.$$

donde el dominio de definición de esta ecuación diferencial es D', que puede ser:

$$D' = \left\{ \begin{array}{lcl} D'_+ & = & \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s-y > 0\} \\ D'_- & = & \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s-y < 0\} \end{array} \right.$$

Ejercicio 4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e^t, \quad y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además, la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Podríamos intentar despejar t en alguna de las dos expresiones de forma única, aunque esto no es posible. Por tanto, lo despejaremos de forma implícita en la expresión de x:

Para ello, fijado $x \in \mathbb{R}$, definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t + e^t - x \end{array}$$

Ver que define función implícita $t(x)$ exivale a ver que f_x tiene un único cero en $\mathbb{R}$, que será el valor de $t(x)$.

Existencia Tenemos que f_x es continua, por lo que podemos aplicar el Teorema de Bolzano:

$$\lim_{t \to -\infty} f_x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} f_x(t) = +\infty.$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $t(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f_x(t(x)) = 0$.

Unicidad Veamos para ello que f_x es estrictamente creciente. Para ello, como es derivable, tenemos que:

$$f_x'(t) = 1 + e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la ecuación dada define de forma implícita una única función

$$\begin{array}{rccc} t : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & t(x) \end{array}$$

tal que $x = t(x) + e^{t(x)}$. Veamos que esta función es derivable aplicando el Teorema de la Función Implícita. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & t + e^t - x \end{array}$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 1 + e^t, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -1.$$

Por tanto, como ambas derivadas parciales son continuas, tenemos que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como además su derivada parcial respecto de t (notemos que en este caso hemos intercambiado el papel usual de x y t) no se anula en $\mathbb{R}^2$, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita en cada punto $(x, t(x)) \in \mathbb{R}^2$ para obtener que $t(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, como $y = 1 + (t(x))^4$, tenemos que $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ por ser suma de funciones de clase C^1.

Para demostrar que $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$, podemos derivarla implícitamente:

$$y'(x) = 4(t(x))^3 \cdot t'(x)$$

- Veamos en qué puntos se anula $t(x)$:

$$t(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 + e^0 = 1$$

- Veamos en qué puntos se anula $t'(x)$.

  Para ello, es necesario calcular $t'(x)$, lo que no es sencillo. Sin embargo, usando que $t = x^{-1}$, donde hemos considerado:

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t + e^t \end{array}$$

  Usando el Teorema de la Derivación de la Función Inversa, como $x'(t) = 1 + e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$t'(x) = \frac{1}{1 + e^{t(x)}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Por tanto, $t'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, el único punto crítico de $y \in C^1(\mathbb{R})$ es $x = 1$. Veamos los signos de $t(x)$ a ambos lados de $x = 1$:

- Para $x < 1$, como t es estrictamente creciente y $t(1) = 0$, tenemos que $t(x) < 0$ para todo $x < 1$.
- Para $x > 1$, como t es estrictamente creciente y $t(1) = 0$, tenemos que $t(x) > 0$ para todo $x > 1$.

Por tanto, tenemos que $y(x)$ alcanza su mínimo relativo en $x = 1$. Además, por ser el único mínimo relativo de una función de clase C^1, se trata de un mínimo absoluto.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuación

$$x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x = t$$

define de forma implícita una única función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además, prueba que se cumple la identidad $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Para verlo, hemos de demostrar que x es una aplicación; es decir, que para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, existe un único valor $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que cumple dicha ecuación. Para ello, fijado $t \in \mathbb{R}$, definimos la función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f_t: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x - t \end{array}$$

Demostrar la existencia y unicidad de $x(t)$ es equivalente a demostrar que f_t tiene un único cero en $\mathbb{R}$.

Existencia Tenemos que f es continua, por lo que podemos aplicar el Teorema de Bolzano:

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_t(x) = +\infty.$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(x(t)) = 0$.

Unicidad Veamos para ello que f_t es estrictamente creciente. Para ello, como es derivable, tenemos que:

$$f_t'(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, f_t es estrictamente creciente, lo que implica que tiene a lo sumo un cero. Por tanto, $x(t)$ es único.

Por tanto, la ecuación dada define de forma implícita una única función

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

Como conclusión, tenemos que:

$$x(t) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora que se cumple la identidad $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi$.

- Para t, tenemos que $x(t) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t) = t$.
- Para $t+2\pi$, tenemos que $x(t+2\pi) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t+2\pi) = t+2\pi$.

Uniendo ambos resultados, tenemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(t+2\pi) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t+2\pi) &= t + 2\pi = \\ &= \left(x(t) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t)\right) + 2\pi \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} x(t) + 2\pi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x(t) + 2\pi) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la periodicidad del seno.

Definimos ahora la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & u - \frac{1}{3}\operatorname{sen} u \end{array}$$

Tenemos que $g \in C^1(\mathbb{R})$ con:

$$g'(u) = 1 - \frac{1}{3}\cos u > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, g es estrictamente creciente, luego inyectiva. Tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x(t+2\pi)) &= x(t+2\pi) - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x(t)+2\pi) = \\ &= g(x(t) + 2\pi) \end{aligned}$$

Como g es inyectiva, tenemos que $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$.