Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Propiedades de Lenguajes Indep. del Contexto

Ejercicio 1.1.1. Proporcione ejemplos de los siguientes lenguajes:

1. Un lenguaje que no es independiente del contexto.

   Sea el lenguaje siguiente:

   $$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$$

   Veamos que no es independiente del contexto mediante el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = a^n b^n c^n \in L$, con $|z| \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Como $|vwx| \leqslant n$, entonces no es posible que contenga los tres símbolos a, b, c; y como $|vx| \geqslant 1$, vx contiene al menos uno de los tres símbolos, pero no los tres. Por tanto, al bombear vx añadiremos alguno de los tres símbolos pero no los tres, rompiendo el equilibrio. En concreto, tenemos que:

   $$uv^2wx^2y \notin L$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es independiente del contexto.

2. Un lenguaje independiente del contexto pero no determinista.

3. Un lenguaje que es independiente del contexto determinista, pero que no es aceptado por un autómata con pila determinista que tiene que vaciar su pila.

   Es necesario que el lenguaje dado no cumpla la propiedad prefijo. Un ejemplo válido es:

   $$L = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^+ \text{ y n}^\circ \text{ de subcadenas “}ab\text{” en } u \text{ es igual al n}^\circ \text{ subcadenas “}ba\text{” en } v\}$$

   tal y como se vio en el Ejercicio **??**.

4. Un lenguaje que es aceptado por un autómata con pila determinista que tiene que vaciar su pila, pero que no es un lenguaje regular.

Ejercicio 1.1.2. Encontrar cuando sea posible, un autómata con pila que acepte el lenguaje L, donde:

1. $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

   Sea el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$ que acepta L por ambos criterios (tanto por pila vacía como por estados finales), con la función de transición δ dada por:

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\} \\
&\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, BZ_0)\} \\
&\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
&\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\} \\
&\delta(q_0, \varepsilon, i) = \{(q_1, i)\} \qquad \text{Para } i \in \{Z_0, A, B\} \\
&\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
&\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
&\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

2. $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

   Veamos que no es posible demostrando que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = a^n b^n a^n b^n \in L$, con $|z| \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{a, b\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Como $|vwx| \leqslant n$, hay varias posibilidades:

   a) vwx está contenido entero en la primera mitad de la palabra (recíprocamente con la segunda). Al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre las dos mitades, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   b) vwx corta a ambas mitades, es decir, contiene la subcadena ba. Como $|vwx| \leqslant n$, tenemos que es de la forma $b^k a^l$ con $k+l \leqslant n$. Como $|vx| \geqslant 1$, al menos uno de los dos no es nulo. Supongamos que $v \neq \varepsilon$ (en el caso contrario se haría el mismo razonamiento con x). Entonces, v contiene al menos una b, por lo que al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre las dos mitades, ya que el número de b's en la primera mitad es mayor que en la segunda. Por tanto, $uv^2wx^2y \notin L$.

   En cualquier caso, con $i = 2$ tenemos que $uv^2wx^2y \notin L$, por lo que L no es independiente del contexto.

3. $L = \{a^l b^m c^n \mid l + m = n\}$.

   Sea el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$ que acepta L por ambos criterios (tanto por pila vacía como por estados finales), con la función de transición δ dada por:

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\} \\
&\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\} \\
&\delta(q_0, \varepsilon, i) = \{(q_1, i)\} \qquad \text{Para } i \in \{Z_0, X\} \\
&\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_1, XZ_0)\} \\
&\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, XX)\} \\
&\delta(q_1, \varepsilon, i) = \{(q_2, i)\} \qquad \text{Para } i \in \{Z_0, X\} \\
&\delta(q_2, c, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
&\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

4. $L = \{a^m b^n c^m \mid n \leqslant m\}$.

   Demostraremos que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = a^n b^n c^n \in L$, con $|z| \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Como $|vwx| \leqslant n$, hay varias posibilidades:

   a) Si vwx tan solo contiene a's, entonces al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre el número de a's y c's, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   b) Si vwx tan solo contiene c's, entonces al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre el número de a's y c's, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   c) Si vwx tan solo contiene b's, entonces al bombear v y x con $i = 2$, se tiene que hay más b's que a's ($n > m$), teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   d) Si vwx contiene a's y b's, entonces al bombear v y x con $i = 2$ se da alguno de los siguientes casos:

      - Si $v \neq \varepsilon$, entonces v contiene al menos una a, por lo que al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre el número de a's y c's, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.
      - Si $x \neq \varepsilon$, entonces x contiene al menos una b, por lo que al bombear v y x con $i = 2$, se tiene que hay más b's que a's ($n > m$), teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   e) Si vwx contiene b's y c's, entonces al bombear v y x con $i = 2$ se da alguno de los siguientes casos:

      - Si $v \neq \varepsilon$, entonces v contiene al menos una b, por lo que al bombear v y x con $i = 2$, se tiene que hay más b's que a's ($n > m$), teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.
      - Si $x \neq \varepsilon$, entonces x contiene al menos una c, por lo que al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre el número de a's y c's, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   f) Como $|vwx| \leqslant n$, no se puede dar que a la vez contenga a's y c's, por lo que no se da este caso.

   En cualquier caso, con $i = 2$ tenemos que $uv^2wx^2y \notin L$, por lo que L no es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.3. Demostrar que los siguientes lenguajes no son libres de contexto:

1. $L_1 = \{a^p \mid p \text{ es primo}\}$.

   Demostraremos que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea p_n el n-ésimo número primo, que sabemos que existe y, además, $p_n \geqslant n$. Consideramos la palabra $z = a^{p_n} \in L_1$, con $|z| = p_n \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{a\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

Tomemos ahora $i = p_n + 1$. Entonces, al bombear v y x, tenemos que:

$$|uv^iwx^iy| = |uvwxy| + (i-1)|vx| = p_n + p_n \cdot |vx| = p_n(1 + |vx|) > p_n$$

Por tanto, tenemos que p_n es un divisor no propio de $|uv^iwx^iy|$, por lo que $uv^iwx^iy \notin L_1$. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L_1 no es independiente del contexto.

2. $L_2 = \{a^{n^2} \mid n \geqslant 1\}$.

   Demostraremos que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = a^{n^2} \in L_2$, con $|z| = n^2 \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{a\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Tomemos ahora $i = 2$. Entonces, al bombear v y x, tenemos que:

   $$|uv^iwx^iy| = |uvwxy| + (i-1)|vx| = n^2 + |vx|$$

   Como $|vwx| \leqslant n$, tenemos que:

   $$|uv^iwx^iy| = n^2 + |vx| \leqslant n^2 + n < n^2 + n + 1 \leqslant (n+1)^2$$

   Además, como $|vx| \geqslant 1$, tenemos que:

   $$n^2 < |uv^iwx^iy| < (n+1)^2$$

   Por tanto, tenemos que $|uv^iwx^iy|$ no es un cuadrado perfecto, por lo que $uv^iwx^iy \notin L_2$. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L_2 no es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.4. Considerar el lenguaje siguiente:

$$L = \{0^n uu^{-1} 1^n \mid u \in \{0, 1\}^*\}$$

1. Encontrar un autómata con pila que acepte, por el criterio de pila vacía, el lenguaje L.

   Sea el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, 0, 1\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$ que acepta L por ambos criterios (tanto por pila vacía como por estados finales), con la función de transición δ dada por:

   $$\begin{aligned}
   &\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\} \\
   &\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\} \\
   &\delta(q_0, \varepsilon, i) = \{(q_1, i)\} && \text{Para } i \in \{Z_0, X\} \\
   &\delta(q_1, 1, i) = \{(q_1, 1i)\} && \text{Para } i \in \{Z_0, X, 1, 0\} \\
   &\delta(q_1, 0, i) = \{(q_1, 0i)\} && \text{Para } i \in \{Z_0, X, 1, 0\} \\
   &\delta(q_1, \varepsilon, i) = \{(q_2, i)\} && \text{Para } i \in \{Z_0, X, 1, 0\} \\
   &\delta(q_2, 1, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
   &\delta(q_2, 0, 0) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
   &\delta(q_2, \varepsilon, i) = \{(q_3, i)\} && \text{Para } i \in \{Z_0, X\} \\
   &\delta(q_3, 1, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} \\
   &\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}
   \end{aligned}$$

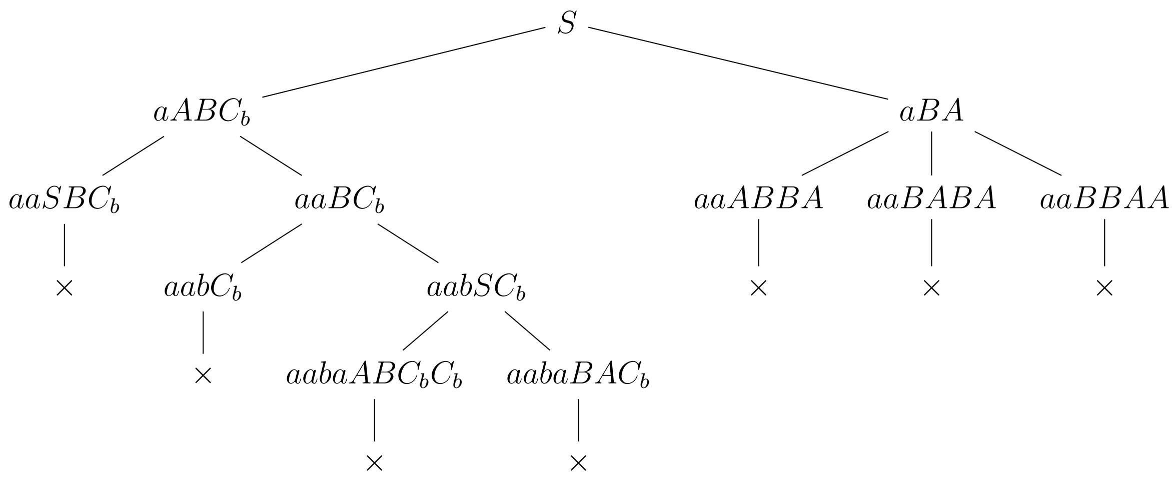

Figura 1.1: Árbol que muestra que *aabaab* no es generada por la gramática.

2. Encontrar un autómata que acepte $\overline{L}$.

Ejercicio 1.1.5. Considerar la gramática libre de contexto dada por las siguientes producciones:

$$\begin{aligned}
S &\to aABb \mid aBA \mid \varepsilon \\
A &\to aS \mid bAAA \\
B &\to aABB \mid aBAB \mid aBBA \mid bS
\end{aligned}$$

Determinar si las cadenas *aabaab* y las cadenas *bbaaa* son generadas por esta gramática

1. Haciendo una búsqueda en el árbol de todas las derivaciones, pasando previamente la gramática a forma normal de Greibach.

   En primer lugar, eliminamos las producciones nulas:

$$\begin{aligned}
S &\to aABb \mid aBA \\
A &\to aS \mid bAAA \mid a \\
B &\to aABB \mid aBAB \mid aBBA \mid bS \mid b
\end{aligned}$$

   Obtenemos ahora la forma normal de Greibach:

$$\begin{aligned}
S &\to aABC_b \mid aBA \\
A &\to aS \mid bAAA \mid a \\
B &\to aABB \mid aBAB \mid aBBA \mid bS \mid b \\
C_b &\to b
\end{aligned}$$

   Vemos ahora que la cadena *aabaab* no es generada por la gramática en la Figura 1.1.

   Por otro lado, la cadena *bbaaa* vemos de forma directa que no es generada por la gramática, ya que no se puede llegar a una cadena que empiece por b.

a	a	b	a	a	b
C_a, A	C_a, A	C_b, B	C_a, A	C_a, A	C_b, B
D_8	D_{10}	D_2	D_8	D_{10}	
$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$		
A	$\emptyset$	$\emptyset$			
D_8	$\emptyset$				
$\emptyset$					

Tabla 1.1: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *aabaab*.

b	b	a	a	a
C_b, B	C_b, B	C_a, A	C_a, A	C_a, A
D_9	D_2	D_8	D_8	
D_6	$\emptyset$	D_3		
$\emptyset$	A			
D_2				

Tabla 1.2: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *bbaaa*.

2. Mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

   Pasamos ahora la gramática a forma normal de Chomsky:

$$\begin{aligned}
S &\to C_aD_1 \mid C_aD_2 \\
A &\to C_aS \mid C_bD_3 \mid a \\
B &\to C_aD_4 \mid C_aD_5 \mid C_aD_6 \mid C_bS \mid b \\
D_1 &\to AD_7 \\
D_2 &\to BA \\
D_3 &\to AD_8 \\
D_4 &\to AD_9 \\
D_5 &\to BD_{10} \\
D_6 &\to BD_2 \\
D_7 &\to BC_b \\
D_8 &\to AA \\
D_9 &\to BB \\
D_{10} &\to AB \\
C_a &\to a \\
C_b &\to b
\end{aligned}$$

   En la Tabla 1.1 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *aabaab*, que nos muestra que no es generada por la gramática.

   En la Tabla 1.2 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *bbaaa*, que nos muestra que no es generada por la gramática.

Ejercicio 1.1.6. Determinar qué lenguajes son regulares y/o libres de contexto:

1. $\{0^{n^2} \mid n \geqslant 1\}$.

   No es independiente del contexto, como ya demostramos en el Ejercicio 1.1.3.2.

2. $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geqslant 0\}$.

   Veamos que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n1^n0^n1^n \in L$, con $|z| = 4n \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{0,1\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Como $|vwx| \leqslant n$, considerando que la palabra z está dividida en cuatro partes iguales cada una de longitud n, caben dos opciones:

   a) vwx está contenido entero en una de las partes.
   b) vwx corta dos partes consecutivas.

   En cualquier caso, no corta a las cuatro partes. Por tanto, al bombear v y x con $i = 2$, se rompe el equilibrio entre las cuatro partes, teniendo así que $uv^2wx^2y \notin L$.

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es independiente del contexto.

3. $\{0^n10^m10^{n+m} \mid n, m \geqslant 0\}$.

   Veamos que es independiente del contexto. Sea la gramática libre de contexto $G = (\{S, X\}, \{0,1\}, P, S)$, con P dada por:

   $$S \to 0S0 \mid 1X$$
   $$X \to 0X0 \mid 1$$

   Como $\mathcal{L}(G) = \{0^n10^m10^{n+m} \mid n, m \geqslant 0\}$, tenemos que L es independiente del contexto. Veamos ahora que no es regular por el Lema de Bombeo.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n10^n10^{2n} \in L$, con $|z| = 4n + 2 \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z de la forma $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, de forma que $|v| \geqslant 1$ y $|uv| \leqslant n$. De esta forma:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l}10^n10^{2n} \qquad \text{con } k + l \leqslant n, l \geqslant 1$$

   Al bombear v con $i = 2$, tenemos que:

   $$uv^2w = 0^{k+2l}0^{n-k-l}10^n10^{2n} = 0^{n+l}10^n10^{2n} \notin L$$

   ya que $n + l + n \neq 2n$ por ser $l \geqslant 1$. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es regular.

4. Conjunto de palabras en las que toda posición impar está ocupada por un 1.

   Este lenguaje es regular. Sea el alfabeto del lenguaje A, con $1 \in A$.

   $$A = \{1, a_1, \dots, a_{n-1}\}$$

   Entonces, el lenguaje tiene como expresión regular:

   $$(1\ (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}))^*\ (1 + \varepsilon)$$

b	b	a	0	d	1
A, C_b	A, C_b	C_a	B	C_d	C
A	$\emptyset$	D_0	$\emptyset$	D_2	
$\emptyset$	S	$\emptyset$	B		
S	$\emptyset$	D_0			
$\emptyset$	S				
S					

Tabla 1.3: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $bba0d1$.

Ejercicio 1.1.7. Comprobar si las palabras $bba0d1$ y $cba1d1$ pertenecen al lenguaje generado por la gramática

$$\begin{aligned} S &\to AaB \mid AaC \\ A &\to Ab \mid Ac \mid b \mid c \\ B &\to BdC \mid 0 \\ C &\to CeB \mid 1 \end{aligned}$$

usando para ello:

1. El algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

   En primer lugar, pasamos la gramática a forma normal de Chomsky:

$$\begin{aligned} S &\to AD_0 \mid AD_1 \\ A &\to AC_b \mid AC_c \mid b \mid c \\ B &\to BD_2 \mid 0 \\ C &\to CD_3 \mid 1 \\ C_i &\to i \qquad \text{Para } i \in \{a, b, c, d, e\} \\ D_0 &\to C_aB \\ D_1 &\to C_aC \\ D_2 &\to C_dC \\ D_3 &\to C_eB \end{aligned}$$

   En la Tabla 1.3 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $bba0d1$, que nos muestra que sí es generada por la gramática, con derivación:

$$S \Rightarrow AD_0 \Rightarrow AC_bC_aB \Rightarrow AC_bC_aBD_2 \Rightarrow AC_bC_aBC_dC \Rightarrow bba0d1$$

   En la Tabla 1.4 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $cba1d1$, que nos muestra que no es generada por la gramática.

2. El algoritmo de Early.

   Para la cadena $bba0d1$, tenemos que:

   0) Registros[0]: $(0, 0, S, \varepsilon, AaB)$, $(0, 0, S, \varepsilon, AaC)$, $(0, 0, A, \varepsilon, Ab)$, $(0, 0, A, \varepsilon, Ac)$, $\overline{(0, 0, A, \varepsilon, b)}$, $(0, 0, A, \varepsilon, c)$.

c	b	a	1	d	1
A, C_c	A, C_b	C_a	C	C_d	C
A	$\emptyset$	D_1	$\emptyset$	D_2	
$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$		
S	$\emptyset$	$\emptyset$			
$\emptyset$	$\emptyset$				
$\emptyset$					

Tabla 1.4: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $cba1d1$.

1) Registros[1]: $(0,1,A,b,\varepsilon)$, $(0,1,S,A,aB)$, $(0,1,S,A,aC)$, $(0,1,A,A,b)$, $(0,1,A,A,c)$.
2) Registros[2]: $(0,2,A,Ab,\varepsilon)$, $(0,2,S,A,aB)$, $(0,2,S,A,aC)$, $(0,2,A,A,b)$, $(0,2,A,A,c)$.
3) Registros[3]: $(0,3,S,Aa,B)$, $(0,3,S,Aa,C)$, $(3,3,B,\varepsilon,BdC)$, $(3,3,B,\varepsilon,0)$, $(3,3,C,\varepsilon,CeB)$, $(3,3,C,\varepsilon,1)$.
4) Registros[4]: $(3,4,B,0,\varepsilon)$, $(0,4,S,AaB,\varepsilon)$, $(3,4,B,B,dC)$.
5) Registros[5]: $(3,5,B,Bd,C)$, $(5,5,C,\varepsilon,CeB)$, $(5,5,C,\varepsilon,1)$.
6) Registros[6]: $(5,6,C,1,\varepsilon)$, $(3,6,B,BdC,\varepsilon)$, $(5,6,C,C,eB)$, $(0,6,S,AaB,\varepsilon)$, $(3,6,B,B,dC)$.

Por tanto, la cadena $bba0d1$ es generada por la gramática, con derivación:

$$S \Rightarrow AaB \Rightarrow AaBdC \Rightarrow Aba0d1 \Rightarrow bba0d1$$

Para la cadena $cba1d1$, tenemos que:

0) Registros[0]: $(0,0,S,\varepsilon,AaB)$, $(0,0,S,\varepsilon,AaC)$, $(0,0,A,\varepsilon,Ab)$, $(0,0,A,\varepsilon,Ac)$, $(0,0,A,\varepsilon,b)$, $(0,0,A,\varepsilon,c)$.
1) Registros[1]: $(0,1,A,c,\varepsilon)$, $(0,1,S,A,aB)$, $(0,1,S,A,aC)$, $(0,1,A,A,b)$, $(0,1,A,A,c)$.
2) Registros[2]: $(0,2,A,Ab,\varepsilon)$, $(0,2,S,A,aB)$, $(0,2,S,A,aC)$, $(0,2,A,A,b)$, $(0,2,A,A,c)$.
3) Registros[3]: $(0,3,S,Aa,B)$, $(0,3,S,Aa,C)$, $(3,3,B,\varepsilon,BdC)$, $(3,3,B,\varepsilon,0)$, $(3,3,C,\varepsilon,CeB)$, $(3,3,C,\varepsilon,1)$.
4) Registros[4]: $(3,4,C,1,\varepsilon)$, $(0,4,S,AaC,\varepsilon)$, $(3,4,C,C,eB)$.
5) Registros[5]: No hay registros.
6) Registros[6]: No hay registros.

Por tanto, la cadena $cba1d1$ no es generada por la gramática.

Ejercicio 1.1.8. Dada la gramática $G = (\{a,b,c,d\}, \{S,A,B,C,D\}, S, P)$ con producciones:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid C \\
A &\to aAb \mid ab \\
B &\to cBd \mid cd \\
C &\to aCd \mid aDd \\
D &\to bDc \mid bc
\end{aligned}
$$

determinar mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras *abbccd* y *aabbcd* son generadas.

En primer lugar, eliminamos las producciones unitarias:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid aCd \mid aDd \\
A &\to aAb \mid ab \\
B &\to cBd \mid cd \\
C &\to aCd \mid aDd \\
D &\to bDc \mid bc
\end{aligned}
$$

Ahora, obtenemos las producciones en forma normal de Chomsky:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid C_aX_1 \mid C_aX_2 \\
A &\to C_aX_3 \mid C_aC_b \\
B &\to C_cX_4 \mid C_cC_d \\
C &\to C_aX_1 \mid C_aX_2 \\
D &\to C_bX_5 \mid C_bC_c \\
X_1 &\to CC_d \\
X_2 &\to DC_d \\
X_3 &\to AC_b \\
X_4 &\to BC_d \\
X_5 &\to DC_c \\
C_i &\to i \qquad \text{Para } i \in \{a,b,c,d\}
\end{aligned}
$$

En la Tabla 1.5 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *abbccd*, que nos muestra que sí es generada por la gramática. La derivación es:

$$S \Rightarrow C_aX_2 \Rightarrow aDC_d \Rightarrow aC_bX_5d \Rightarrow abDC_cd \Rightarrow abC_bC_cC_cd \Rightarrow abbccd$$

En la Tabla 1.6 vemos el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena *aabbcd*, que nos muestra que sí es generada por la gramática. La derivación es:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow C_aX_3C_cC_d \Rightarrow aAC_bcd \Rightarrow aC_aC_bbcd \Rightarrow aabbcd$$

a	b	b	c	c	d
C_a	C_b	C_b	C_c	C_c	C_d
A	$\emptyset$	D	$\emptyset$	B	
X_3	$\emptyset$	X_5	$\emptyset$		
$\emptyset$	D	$\emptyset$			
$\emptyset$	X_2				
S					

Tabla 1.5: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $abbccd$.

a	a	b	b	c	d
C_a	C_a	C_b	C_b	C_c	C_d
$\emptyset$	A	$\emptyset$	D	B	
$\emptyset$	X_3	$\emptyset$	X_2		
A	$\emptyset$	$\emptyset$			
$\emptyset$	$\emptyset$				
S					

Tabla 1.6: Algoritmo de Cocke-Younger-Kasami para la cadena $aabbcd$.

Ejercicio 1.1.9. Determinar si son regulares y/o independientes del contexto los siguientes lenguajes:

1. $\{uu^{-1}u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

   Veamos que no es independiente del contexto por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n1^n2^n0^n0^n1^n \in L$, con $|z| = 6n \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z en cinco partes $z = uvwxy$, con $u, v, w, x, y \in \{0,1\}^*$, de forma que $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$.

   Como $|vwx| \leqslant n$, considerando que la palabra z está dividida en seis partes, caben dos opciones:

   a) vwx está contenido entero en una de las partes.

   b) vwx corta dos partes consecutivas.

   En cualquier caso, no corta a tres partes. Por tanto, en el caso de que vwx comienze por 0's (recíprocamente con 1's), no podremos bombear 0's de dos partes distintas, rompiendo entonces el equilibrio. Por tanto, tenemos que:

   $$uv^2wx^2y \notin L$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es independiente del contexto.

2. $\{uu^{-1}ww^{-1} \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$.

Veamos que sí es independiente del contexto. Sea la gramática libre de contexto $G = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P, S)$, con P dada por:

$$\begin{aligned}
&S \to AB \\
&A \to 0A0 \mid 1A1 \mid C \\
&B \to 0B0 \mid 1B1 \mid C \\
&C \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(G) = \{uu^{-1}ww^{-1} \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$, tenemos que L es independiente del contexto. Veamos ahora que no es regular por el Lema de Bombeo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n 1^{2n} 0^n \in L$, con $|z| = 4n \geqslant n$. Consideramos ahora cualquier descomposición de z de la forma $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, de forma que $|v| \geqslant 1$ y $|uv| \leqslant n$. De esta forma:

$$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l}1^{2n}0^n \qquad \text{con } k + l \leqslant n, l \geqslant 1$$

Al bombear v $i = 2$ veces, tenemos que:

$$uv^2w = 0^{k+2l}0^{n-k-l}1^{2n}0^n = 0^{n+l}1^{2n}0^n \notin L$$

ya que $n + l \neq n$. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es regular.

3. $\{uu^{-1}w \mid u, w \in \{0,1\}^* \text{ y } |u| \leqslant 3\}$

   Consideramos los lenguajes auxiliares:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{uu^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*,\ |u| \leqslant 3\} \\
L_2 &= \{w \mid w \in \{0,1\}^*\}
\end{aligned}$$

   Tenemos que L_1 es regular por ser finito, y L_2 es regular tener expresión regular $(0+1)^*$. Por tanto, L es regular por ser la concatenación de dos lenguajes regulares.

Ejercicio 1.1.10. Construir una gramática independiente del contexto para el lenguaje más pequeño que verifica las siguientes reglas:

1. Cualquier sucesión de dígitos de $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ de longitud mayor o igual a 1 es una palabra del lenguaje.

2. Si $u_1, \dots, u_n$ $(n \geqslant 1)$ son palabras del lenguaje, entonces $(u_1 + \cdots + u_n)$ es una palabra del lenguaje.

3. Si $u_1, \dots, u_n$ $(n \geqslant 1)$ son palabras del lenguaje, entonces $[u_1 * \cdots * u_n]$ es una palabra del lenguaje.

Comprobar por el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras: $(0 + 1) * 3$ y $[(0 + 1)]$ son generadas por la gramática.

Ejercicio 1.1.11. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje:

$$L = \{ucv \mid u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y n}^{\underline{o}} \text{ de subcadenas “01” en } u \text{ es igual al n}^{\underline{o}} \text{ subcadenas “10” en } v\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena $010c101$ pertenece al lenguaje generado por la gramática.

Ejercicio 1.1.12. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje definido sobre el alfabeto $\{a, 0, 1\}$:

$$L = \{auava \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ y } u = v^{-1}\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadenas $a0a0a$ y $a1a0a$ pertenecen al lenguaje generado por la gramática.

Ejercicio 1.1.13. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguaje definidos sobre el alfabeto $\{a, 0, 1\}$:

$$L_1 = \{auava \mid u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$
$$L_2 = \{uvu \mid u \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena $a0a0a$ pertenece a L_1 y la cadena 011001 pertenece al lenguaje L_2.

Ejercicio 1.1.14. Sea la gramatica $G = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, P)$ siendo P:

$$\begin{aligned} &S \to AabB \\ &A \to aA \mid bA \mid \varepsilon \\ &B \to Bab \mid Bb \mid ab \mid b \end{aligned}$$

1. ¿Es regular el lenguaje que genera G?.
2. Transforma G a una gramatica equivalente en Forma Normal de Chomsky.
3. Aplicando el algoritmo CYK, determinar si las siguientes cadenas pertenecen a $L(G)$: $aababb$, $aaba$.
4. Muestra el arbol de derivacion para generar las palabras del apartado anterior que pertenecen a $L(G)$.

Ejercicio 1.1.15. Dada la gramática:

$$\begin{array}{lll} S \to AB & S \to C & S \to BE \\ A \to aAb & A \to \varepsilon & \\ B \to cBd & B \to \varepsilon & \\ C \to aCd & C \to aDd & \\ D \to bDc & D \to \varepsilon & \end{array}$$

determinar mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras $abbccd$ y $aabbcd$ son generadas por esta gramática.

Ejercicio 1.1.16. Demostrar que si L_1 es independiente del contexto y L_2 es regular, entonces $L_1 \cap L_2$ es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.17. Si L_1 y L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces se define el cociente $L_1/L_2 = \{u \in A^* \mid \exists w \in L_2 \text{ tal que } uw \in L_1\}$. Demostrar que si L_1 es independiente del contexto y L_2 regular, entonces L_1/L_2 es independiente dl contexto.

Ejercicio 1.1.18. Si L es un lenguaje sobre $\{0, 1\}$, sea $SUF(L)$ el conjunto de los sufijos de palabras de L:

$$SUF(L) = \{u \in \{0,1\}^* \mid \exists v \in \{0,1\}^*, \text{ tal que } vu \in L\}.$$

Demostrar que si L es independiente del contexto, entonces $SUF(L)$ también es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.19. Demostrar que $L = \{0^i 1^1 \mid i \geqslant 0\} \cup \{0^i 1^{2i} \mid i \geqslant 0\}$ es independiente del contexto, pero no es determinista.

1.1.1. Preguntas Tipo Test

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La intersección de lenguajes libres de contexto es siempre libre de contexto.
2. Existe un algoritmo para determinar si una palabra es generada por una gramática independiente del contexto.
3. El lenguaje $\{a^i b^j c^i d^i \mid i, j \geqslant 0\}$ es independiente del contexto.
4. Existe un algoritmo para determinar si una gramática independiente del contexto es ambigua.
5. Existe un algoritmo para comprobar cuando dos gramáticas libres de contexto generan el mismo lenguaje.
6. El lenguaje $L = \{0^i 1^j 2^k \mid i \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ es independiente del contexto.
7. Si el lenguaje L es independiente del contexto, entonces L^{-1} es independiente del contexto.
8. Existe un algoritmo que permite determinar si una gramática independiente del contexto genera un lenguaje finito o infinito.
9. Existe un algoritmo para determinar si una gramática independiente del contexto es ambigua.
10. En el algoritmo de Earley, la presencia del registro $(2, 5, A, CD, adS)$ implica que a partir de CD se puede generar la subcadena de la palrba de entrada que va del carácter 3 al 5.
11. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado por una gramática libre de contexto es regular.

12. El algoritmo de Earley se puede aplicar a cualquier gramática independiente del contexto (sin producciones nulas ni unitarias).

13. El conjunto de palabras $\{a^n b^n c^i \mid i \leqslant n\}$ es independiente del contexto.

14. Si L_1 y L_2 son independientes del contexto, entonces $L_1 - L_2$ es siempre independiente del contexto.

15. Hay lenguajes que no son independientes del contexto y si verifican la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto.

16. El conjunto de palabras $\{u011u \mid u \in \{0,1\}^*\}$ es independiente del contexto.

17. El conjunto de palabras que contienen la subcadena 011 es independiente del contexto.

18. En el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami calculamos los conjuntos V_{ij} que son las variables que generan la subcadena de la palabra de entrada que va desde el símbolo en la posición i al símbolo en la posición j.

19. Un lenguaje puede cumplir la negación de la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto y ser regular.

20. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado con una gramática independiente del contexto es finito o infinito.

21. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1L_2 \cup L_1)^*$ es independiente del contexto.

22. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1 - L_2)$ es independiente del contexto.

23. Existe un algoritmo para determinar si una palabra u tiene más de un árbol de derivación en una gramática independiente del contexto G.

24. La intersección de dos lenguajes independientes de contexto con un número finito de palabras produce siempre un lenguaje regular.

25. El complementario de un lenguaje con un número finitos de palabras es siempre libre de contexto.

26. Todo lenguaje aceptado por un autómata con pila por el criterio de estados finales cumple la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes libres de contexto.

27. No existe algoritmo que para toda gramática libre de contexto G nos indique si el lenguaje generado por esta gramática $L(G)$ es finito o infinito.

28. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1L_2 \cup L_1)^*$ puede ser representado por un autómata con pila.

29. Existe un algoritmo para determinar si un autómata con pila es determinista.

30. La demostración del lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto se basa en que si las palabras superan una longitud determinada, entonces en el árbol de derivación debe de aparecer una variable como descendiente de ella misma.

31. La unión de dos lenguajes independientes contexto puede ser siempre aceptada por un autómata con pila.

32. El complementario de un lenguaje libre de contexto con una cantidad finita de palabras no tiene porque producir otro lenguaje libre de contexto.

33. El lema de bombeo para lenguajes libres de contexto es útil para demostrar que un lenguaje determinado no es libre de contexto.

34. La intersección de dos lenguajes independientes del contexto da lugar a un lenguaje aceptado por un autómata con pila determinista.

35. No existe algoritmo que reciba como entrada una gramática independiente del contexto y nos devuelva si el lenguaje generado por esta gramática es finito o infinito.

36. En el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si $A \in V_{1,2}$ y $B \in V_{3,2}$ y $C \to AB$, podemos deducir que $C \in V_{1,4}$.

37. Si L es independiente del contexto, entonces L^{-1} es independiente del contexto.

38. No existe un algoritmo que nos diga si son iguales los lenguajes generados por dos gramáticas independientes del contexto G_1 y G_2.

39. La intersección de dos lenguajes infinitos da lugar a un lenguaje independiente del contexto.

40. La unión de dos lenguajes independientes del contexto puede ser aceptado por un autómata con pila.

41. El lenuaje $L = \{0^i 1^j 2^k \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ es independiente del contexto.

42. Si L_1 y L_2 son independientes del contexto, no podemos asegurar que $L_1 \cap L_2$ también lo sea.

43. Si un lenguaje satisface la condición necesaria del lema de bombeo para lenguajes regulares, entonces también tiene que satisfacer la condición necesaria del lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto.