Álgebra II
Examen III

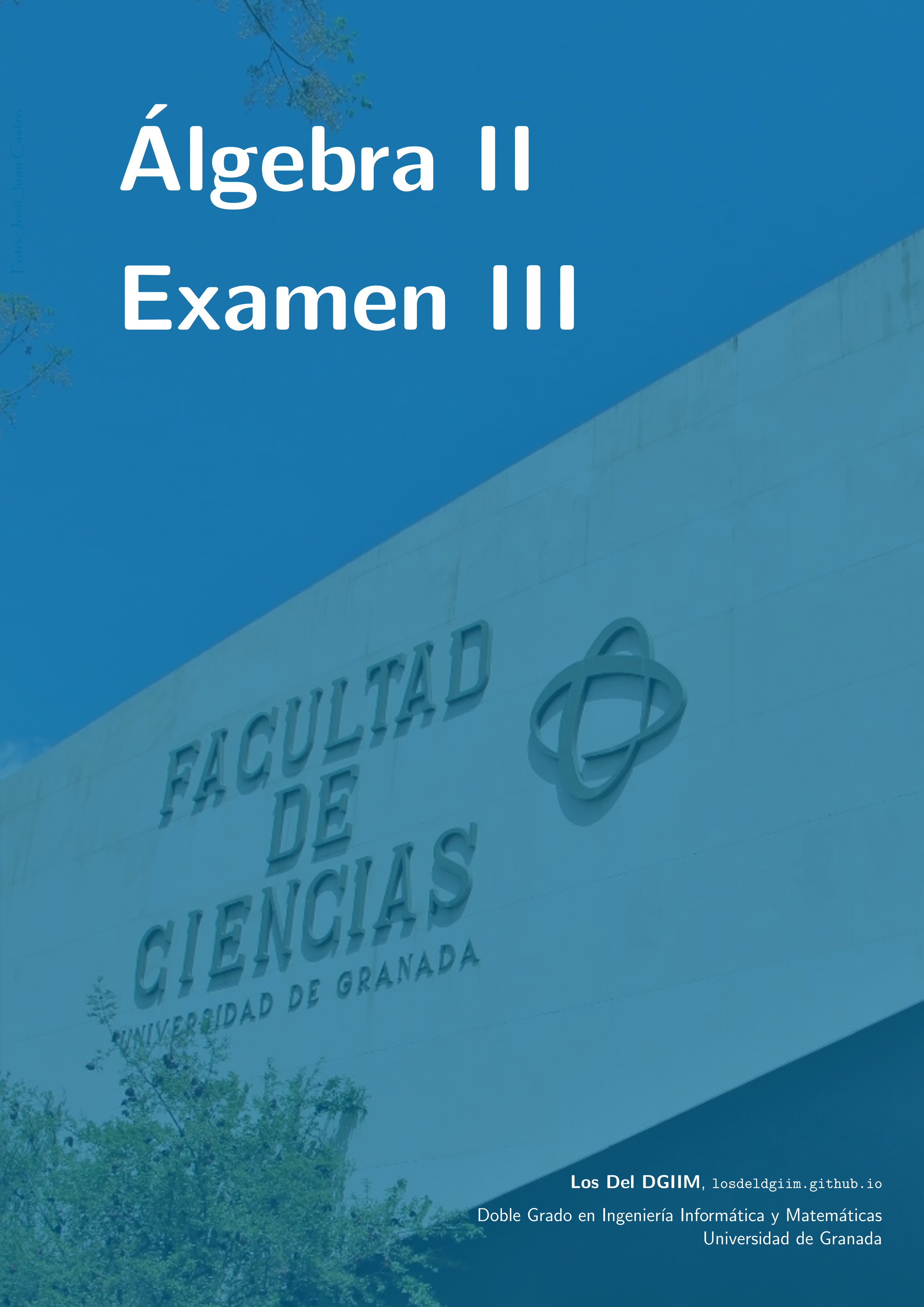

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2018-19.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial I.

Fecha Octubre de 2018.

Ejercicio 1.

1. Sea $f : S_4 \to S_6$ la aplicación dada por $f(\sigma) = \tau$ donde τ actúa igual que σ sobre los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ y los elementos $\{5, 6\}$ los fija si σ es par o bien los intercambia si σ es impar. Demuestra que f es un homomorfismo inyectivo de grupos y que su imagen está contenida en A_6.

2. Considera los grupos $Q_2 = \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = x^2, yx = x^{-1}y\rangle$ y S_4. Demuestra que la asignación

$$\begin{aligned} x &\mapsto (12)(34), \\ y &\mapsto (34) \end{aligned}$$

determina un homomorfismo de grupos. Calcula su imagen y su núcleo, dando todos sus elementos.

Ejercicio 2. Razona cuál es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Sean C_8 y C_{12} los grupos cíclicos de órdenes 8 y 12 respectivamente. El número de homomorfismos de grupos de C_8 en C_{12} es:
   a) Dos.
   b) Tres.
   c) Cuatro.

2. Si $\sigma = (2\ 5\ 8\ 4\ 1\ 3)(4\ 6\ 7\ 8\ 5)(8\ 10\ 11)$ en S_{11}, entonces la permutación σ^{1000}:
   a) Es impar.
   b) Tiene orden 3.
   c) Es un 6-ciclo.

3. La ecuación $x(1\ 2\ 3)x^{-1} = (1\ 3)(5\ 7\ 8)$ en S_8:
   a) No tiene solución.
   b) Tiene una única solución.
   c) Tiene solución pero no es única.

4. La ecuación $x(1\ 2)(3\ 4)x^{-1} = (5\ 6)(1\ 3)$ en S_6:
   a) No tiene solución.
   b) Tiene una única solución.
   c) Tiene solución pero no es única.

5. Si $G \neq 1$ es un grupo cíclico que tiene un solo generador entonces:
   a) G es infinito.
   b) No existe G en esas condiciones.
   c) G tiene como mucho 2 elementos.

6. Sea $G \neq 1$ un grupo. Entonces:

   a) G puede tener un subgrupo propio isomorfo a G.

   b) Si todos los subgrupos propios de G son abelianos entonces G es abeliano.

   c) Si todos los subgrupos propios de G son cíclicos entonces G es cíclico.

7. El grupo simétrico S_4:

   a) Es cíclico.

   b) No es cíclico pero se puede generar por dos elementos.

   c) No tiene subgrupos de orden 6.

8. Si se consideran los grupos aditivos Z de los enteros, Q de los racionales y Z_n de los enteros módulo $n = 2, 5, 10$, se tiene que:

   a) Los grupos $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}_2$ y Z son isomorfos.

   b) Los grupos $\mathrm{Q} \times \mathrm{Z}_{10}$ y $\mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Q} \times \mathrm{Z}_5$ son isomorfos.

   c) Los grupos $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}_2$ y $\mathrm{Q} \times \mathrm{Z}_2$ son isomorfos.

9. El subgrupo $\mathrm{GL}_3(\mathrm{Z}_2) < \mathrm{GL}_3(\mathrm{Z}_2)$ de las matrices invertibles 3×3 con entradas en Z_2 y de determinante 1:

   a) Es un subgrupo impropio.

   b) Es un grupo abeliano de orden 168.

   c) Es un grupo no abeliano de orden 84.