Cálculo II
Examen II

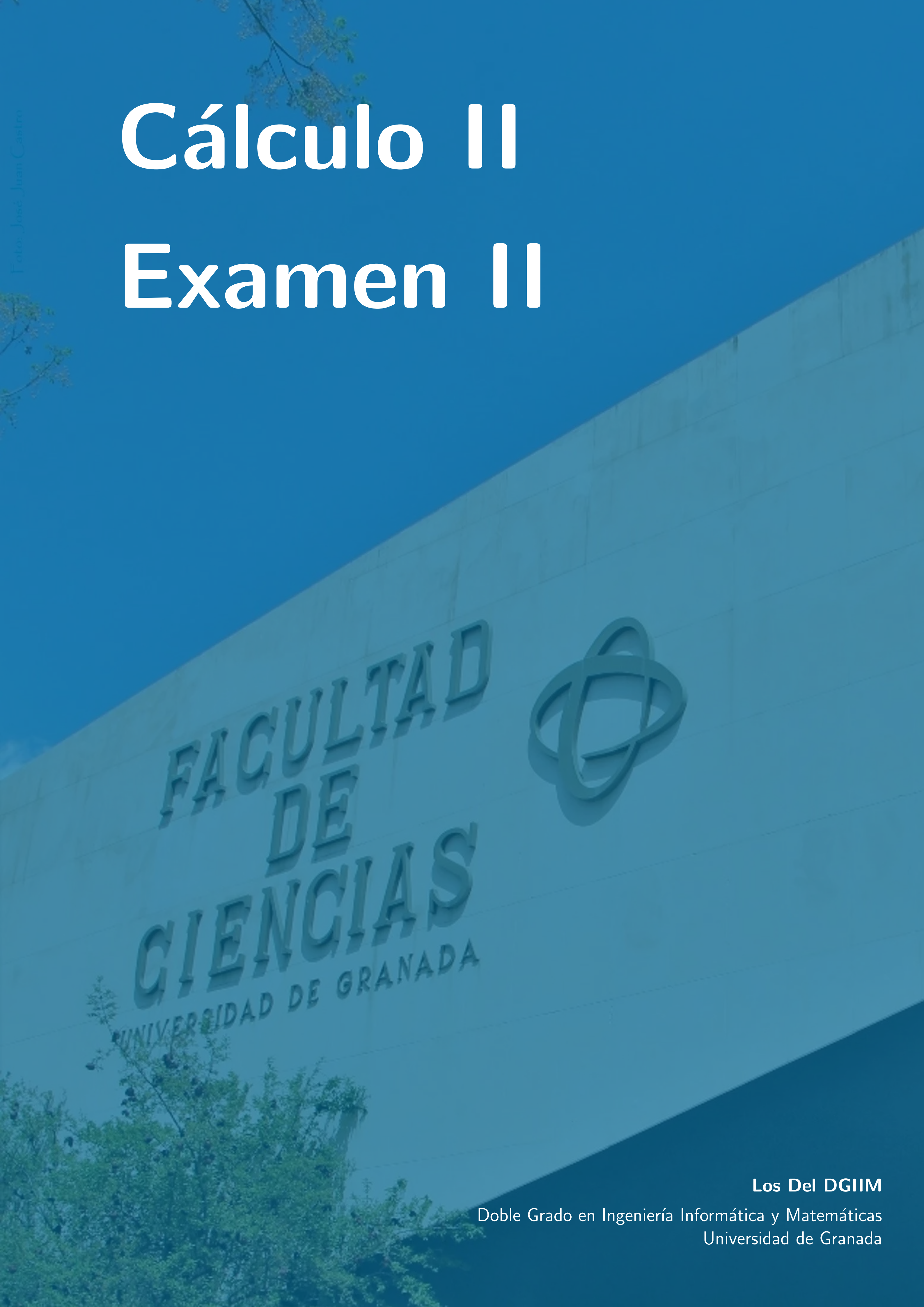


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen II

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 11 de julio de 2022.

Ejercicio 1. [1.5 puntos] Determinar, en función de los valores de $c \in \mathbb{R}$, el número de soluciones que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ tiene en el intervalo $[0, 1]$.

Definimos $f(x) = x^3 - 3x + c = 0$, y buscamos cuántas raíces tiene en dicho intervalo.

$$f(0) = c \qquad f(1) = 1 - 3 + c = -2 + c$$

Estudiamos ahora la monotonía en dicho intervalo:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

- Para $x < -1$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente.
- Para $-1 < x < 1$: $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ estrictamente decreciente.
- Para $x > 1$: $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ estrictamente creciente.

Por tanto, en nuestro intervalo $[0, 1]$ tenemos que es continua y estrictamente decreciente.

- Para $0 \leq c \leq 2$:

  Tenemos que $f(0) \geq 0$ y $f(1) \leq 0$, por lo que por el Teorema de Bolzano hay una solución en $[0, 1]$. Además, como es estrictamente decreciente, tenemos que la solución es única.

- Para $0 < c$:

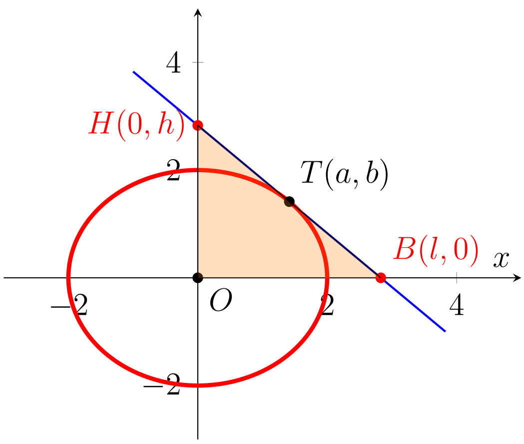
  Tenemos que $f(0) < 0$, y al ser estrictamente decreciente, es el máximo absoluto del intervalo. Por tanto, no hay soluciones en el intervalo $[0, 1]$.

- Para $2 < c$:

  Tenemos que $f(1) > 0$, y al ser estrictamente decreciente, es el mínimo absoluto del intervalo. Por tanto, no hay soluciones en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 2. [2 puntos] De todos los puntos (a, b) de la circunferencia de radio 2, ¿cuáles son los que tienen la propiedad de que la recta tangente a la circunferencia por dichos puntos determina con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?

Restrinjo mi procedimiento al primer cuadrante; es decir, a calcular la recta formada con los semiejes positivos.



En el primer cuadrante, tenemos que la ecuación de la circunferencia es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Sea la recta buscada es $t(x) = m_t x + n$. Para hallar m_t, empleamos la interpretación geométrica de la derivada:

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \Longrightarrow y'(a) = m_t = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

Para hallar n, tenemos que el punto T pertenece a la circunferencia, por lo que:

$$b = \sqrt{r^2 - a^2}$$

No obstante, tenemos que

$$t(a) = b = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot a + n$$

Igualando ambas expresiones de b, obtenemos que:

$$\frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot a + n = \sqrt{r^2 - a^2} \Longrightarrow -a^2 + \sqrt{r^2 - a^2} n = r^2 - a^2 \Longrightarrow n = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

Por tanto, la recta es:

$$t(x) = \frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot x + \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

Para hallar h, l, como $t(0) = h$ y $0 = t(l)$, tenemos que:

$$t(l) = 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot l = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} \Longleftrightarrow al = r^2 \Longleftrightarrow l = \frac{r^2}{a}$$

$$t(0) = h \Longleftrightarrow h = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a}}$$

La función a minimizar es, por tanto:

$$\begin{aligned} A : \,]0, r[\, &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a \, &\longrightarrow A(a) = \frac{1}{2} lh = \frac{r^4}{2a\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^8}{a^2(r^2 - a^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^8}{-a^4 + a^2 r^2}} \end{aligned}$$

Como $A(a) \geq 0$, tenemos que minimizar A equivale a minimizar A^2. Por tanto,

$$(A^2)'(a) = -\frac{r^8(-4a^3 + 2ar^2)}{4a^4(r^2 - a^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow 4a^3 = 2ar^2 \Longleftrightarrow a = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Comprobemos que se trata de un mínimo relativo:

- Para $0 < a < \frac{r}{\sqrt{2}}$:

  $$(A^2)'(a) < 0 \Longleftrightarrow -4a^3 + 2ar^2 > 0 \Longleftrightarrow 2ar^2 > 4a^3 \Longleftrightarrow r^2 > 2a^2 \Longleftrightarrow r > \sqrt{2}a \Longleftrightarrow \frac{r}{\sqrt{2}} > a$$

  Por tanto, tenemos que es estrictamente decreciente en este intervalo.

- Para $a > \frac{r}{\sqrt{2}}$:

  $$(A^2)'(a) > 0 \Longleftrightarrow -4a^3+2ar^2 < 0 \Longleftrightarrow 2ar^2 < 4a^3 \Longleftrightarrow r^2 < 2a^2 \Longleftrightarrow r < \sqrt{2}a \Longleftrightarrow \frac{r}{\sqrt{2}} < a$$

  Por tanto, tenemos que es estrictamente creciente en este intervalo.

Por tanto, se ha demostrado que $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$ es un mínimo relativo. Además, es absoluto, ya que es el único extremo relativo de una función continua.

Por tanto, tenemos que:

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Por tanto, tenemos que el único punto en el primer cuadrante con la propiedad buscada es el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Como la circunferencia se encuentra centrada en el $(0, 0)$, tenemos que el resto de puntos son:

$$(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$$

Ejercicio 3. [2 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 3$. Supongamos $0 \leq f(x) \leq 4 - x$ y que $f'(x) = f(x) + x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Calcular $f\left(\frac{1}{10}\right)$ con tres cifras decimales exactas.

Al pedir tres cifras decimales exactas, tenemos que el error de aproximación ha de ser menor que 10^{-4}. Por el resto de Lagrange tenemos que:

$$R^f_{n,0}(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \qquad c \in [0, x]$$

Acotamos para $x = \frac{1}{10}$:

$$\left|R^f_{n,0}\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{10^{n+1}}\right| = \frac{\left|f^{n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^4} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left|f^{n+1)}(c)\right| \leq (n+1)!10^{n-3}$$

Acotamos ahora cada derivada en el intervalo $\left[0, \frac{1}{10}\right]$:

- Para $n = 1$:

  Tenemos que $f'(x) = f(x) + x$. Por tanto,

  $$f'(x) = f(x) + x \leq 4 - x + x = 4 \qquad f'(x) = f(x) + x \geq x \geq 0$$

  Por tanto, $0 \leq f'(x) \leq 4$.

- Para $n = 2$:

  Tenemos que $f''(x) = f'(x) + 1$. Por tanto, $1 \leq f''(x) \leq 5$.

- Para $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

  Se demuestra por inducción que $f^{n)}(x) = f^{n-1)}(x)$. Por tanto, como $1 \leq f''(x) \leq 5$, se tiene que $1 \leq f^{n)}(x) \leq 5$.

Por tanto, como $1 \leq f^{n)}(x) \leq 5$ para todo $n \geq 3$ natural, calculemos un valor de n que cumple la desigualdad obtenida por la acotación del resto de Lagrange:

$$\left|f^{n+1)}(c)\right| \leq 5 \leq (n+1)!10^{n-3}$$

Vemos que $n = 3$ lo cumple, ya que $(4)! \cdot 10^0 = 4! = 24 \geq 5$. Por tanto, tenemos que una aproximación con tres cifras decimales exactas se obtendría con el polinomio de grado 3 centrado en el 0.

$$P_{3,0}^f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Tenemos que $f(0) = 3$ por el enunciado. Por tanto,

$$f'(0) = f(0) + 0 = 3 \qquad f''(0) = f'(0) + 1 = 4 \qquad f'''(0) = f''(0) = 4$$

Por tanto,

$$P_{3,0}^f(x) = 3 + 3x + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

La aproximación buscada es:

$$P_{3,0}^f\left(\frac{1}{10}\right) = 3 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{3 \cdot 10^3} = 3{,}320$$

Ejercicio 4. [2.5 puntos] Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$ para cada $x \geq 0$.

1. Determinar los puntos en los que F alcanza sus extremos relativos y/o absolutos.

   Veamos en primer lugar que el integrando está acotado. Sea $f(x) = e^{-x^2}$. Tenemos que $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$, por lo que es estrictamente decreciente. Además, $f(0) = e^0 = 1$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$. Por tanto, está acotada por 1. Como también es continua, tenemos que es Riemman Integrable. Por tanto, tenemos que:

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt = \int_0^{2x} e^{-t^2}\, dt - \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

   Como es Riemman Integrable y continua, por el TFC, tenemos que F es continua y derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con:

$$F'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 2e^{-4x^2} = e^{-x^2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2e^{-4x^2+x^2} = 1 \Longleftrightarrow -3x^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

   Estudiamos su monotonía:

- Para $x < \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$:

  $$F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} > 0 \Longleftrightarrow 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \Longleftrightarrow$$
  $$\Longleftrightarrow 2e^{-4x^2+x^2} > 1 \Longleftrightarrow -3x^2 > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Longleftrightarrow x < \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

  Por tanto, tenemos que $F'(x)$ es estrictamente creciente.

- Para $x > \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$:

  $$F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} < 0 \Longleftrightarrow 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \Longleftrightarrow$$
  $$\Longleftrightarrow 2e^{-4x^2+x^2} < 1 \Longleftrightarrow -3x^2 < \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Longleftrightarrow x > \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

  Por tanto, tenemos que $F'(x)$ es estrictamente decreciente.

Por tanto, $x = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ es un máximo relativo. Por ser F continua y ser el único extremo relativo, tenemos que es también máximo absoluto.

Como $F(0) = 0$, veamos si es un mínimo absoluto. Veamos si $\exists c \in \mathbb{R} \mid F(c) < 0$.

Como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\int_a^b f(x)\, dx > 0 \quad \forall\ b > a$. Por tanto, como $2x > x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$0 < F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, como $F(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $F(0) = 0$, tenemos que $x = 0$ es un mínimo absoluto.

2. Estudiar la concavidad de F. ¿Tiene F algún punto de inflexión?

   Tenemos que F es dos veces derivable, con:

   $$F''(x) = -8x{\cdot}2e^{-4x^2} + 2xe^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow e^{-x^2} = 8e^{-4x^2} \Longleftrightarrow -x^2 = \ln(8) - 4x^2 \Longleftrightarrow$$
   $$\Longleftrightarrow 3x^2 - \ln 8 = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$$

   donde he supuesto que $x = 0$ no puede ser un punto de inflexión, ya que no es un punto interior.

   Veamos si efectivamente ese valor es un punto de inflexión estudiando su convexidad:

   - Para $x < \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$:

     $$F''(x) = -8x{\cdot}2e^{-4x^2} + 2xe^{-x^2} < 0 \Longleftrightarrow e^{-x^2} < 8e^{-4x^2} \Longleftrightarrow -x^2 < \ln(8) - 4x^2 \Longleftrightarrow$$
     $$\Longleftrightarrow 3x^2 - \ln 8 < 0 \Longleftrightarrow x < \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$$

     Por tanto, tenemos que en este intervalo es cóncava hacia abajo.

- Para $x > \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$:

$$F''(x) = -8x{\cdot}2e^{-4x^2}+2xe^{-x^2} > 0 \Longleftrightarrow e^{-x^2} > 8e^{-4x^2} \Longleftrightarrow -x^2 > \ln(8)-4x^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 3x^2 - \ln 8 > 0 \Longleftrightarrow x > \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$$

  Por tanto, tenemos que en este intervalo es cóncava hacia arriba.

Por tanto, como hay un cambio de curvatura, tenemos que $x = \sqrt{\frac{\ln 8}{3}}$ es un punto de inflexión.

3. Demostrar que $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$, para cada $x \geq 0$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$?

   En el primer apartado de este ejercicio se ha demostrado que $F(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $F(0) = 0$, por lo que se tiene la primera desigualdad.

   Además, por el Teorema del Valor Medio para las integrales, tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \exists c \in [x, 2x]$ tal que:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt = f(c)(2x - x) = xf(c)$$

   Además, se ha demostrado que $f(t)$ es estrictamente decreciente. Como $c \in [x, 2x]$, tenemos que $x \leq c \Longrightarrow f(x) \geq f(c)$. Por tanto,

$$F(x) = xf(c) \leq xf(x)$$

   Uniendo lo demostrado, tenemos que:

$$0 \leq F(x) \leq xf(x) \qquad\qquad \forall x \geq 0$$

   como queríamos demostrar.

   Para calcular el límite en $+\infty$ de $F(x)$, calculamos primero el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = 0$$

   Por tanto, por el Teorema del Sandwich, tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$$

4. Estudiar la continuidad uniforme de la función $H(x) := \frac{F(x)}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $]0, 1[$.

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} 2\sqrt{x}\left(2e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right) = 0{\cdot}(2e^0 - e^0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} H(x) = F(1)$$

Por tanto, definiendo $H(1) = F(1) \in \mathbb{R}$ y $H(0) = 0$, tenemos que H es una función continua. Por tanto, como existe una ampliación del dominio continua, tenemos que H es uniformemente continua en $]0, 1[$.

Ejercicio 5. [2 puntos] Calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de la curva de ecuación $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Tenemos que la función es:

$$y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{x^2}{25}\right) \Longrightarrow y^2 = 16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^3 \Longrightarrow y = \pm 4\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^3}$$

Calculo solo el área que se encuentra por encima del eje OX, que será la mitad del área. Los puntos de corte con el eje OX son:

$$0 = \pm 4\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^3} \Longleftrightarrow 1 - \frac{x^2}{25} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 5$$

Como la función es par, basta con hallar el área del primer cuadrante, que será un cuarto del área total.

$$\frac{A}{4} = \int_0^5 4\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)^3}\,dx = 4\int_0^5 \sqrt{\left(\frac{25 - x^3}{25}\right)^3}\,dx = \frac{4}{125}\int_0^5 \sqrt{(25 - x^2)^3}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 5\operatorname{sen} t = x \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 5\cos t\,dt = dx \end{array}\right] = \frac{4}{125}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(25 - 25\operatorname{sen}^2 t)^3}\;5\cos t\,dt =$$

$$= \frac{4}{125}\cdot 5 \cdot 125\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)^3}\;\cos t\,dt = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt$$

Tenemos que $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Por tanto,

$$\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos^2(2x) + 2\cos(2x)}{4} = \frac{1 + \frac{1+\cos(4x)}{2} + 2\cos(2x)}{4}$$

Por tanto,

$$\frac{A}{4} = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt =$$

$$= 20\left[\frac{3t}{8} + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 20\left[\frac{3\pi}{16}\right] = \frac{15\pi}{4}$$

Por tanto, tenemos que el área es $A = 15\pi\ u^2$.