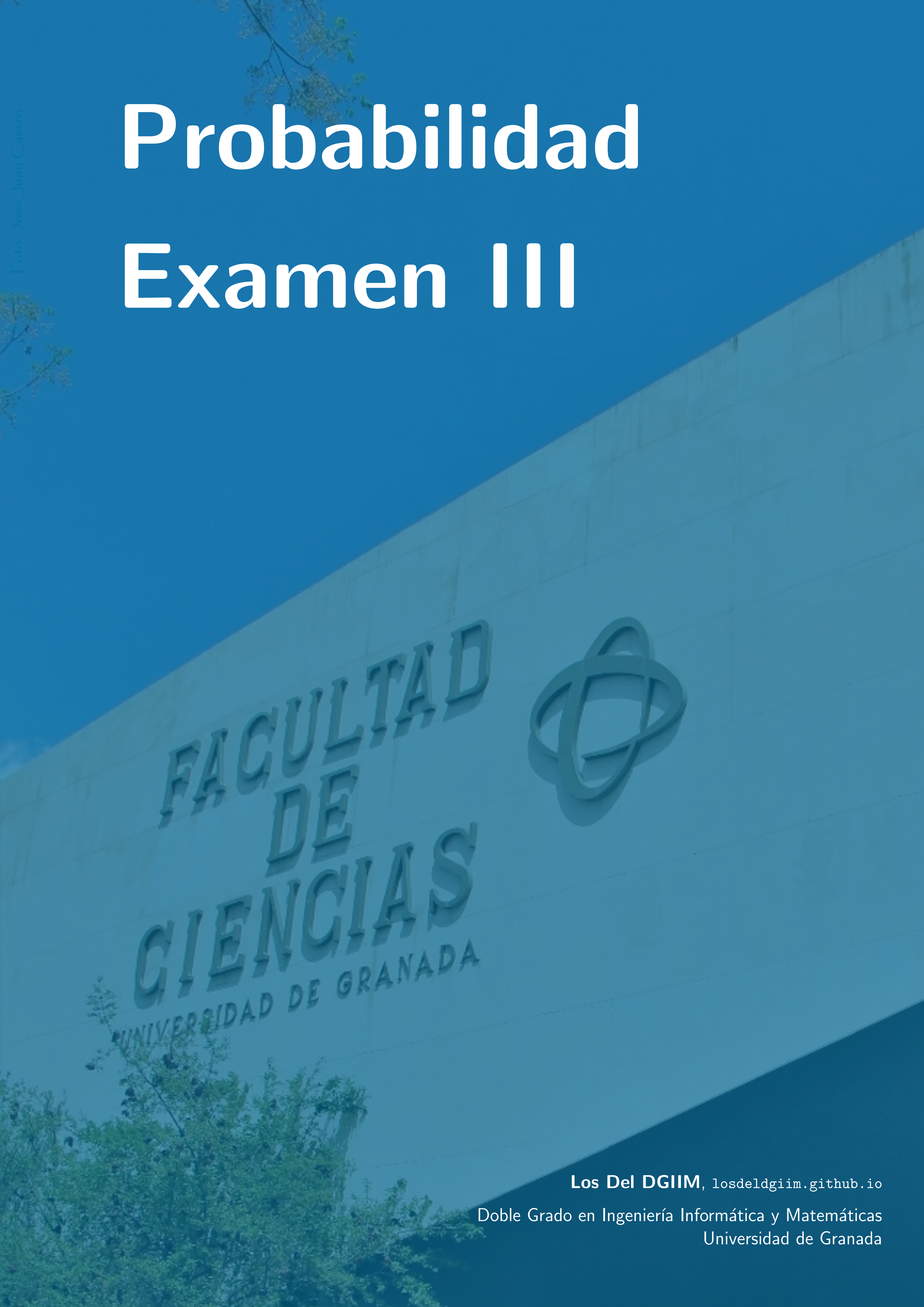
Probabilidad
Examen III



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
Miguel Ángel De la Vega Rodríguez

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Ordinario

Fecha 11 de enero de 2023.

Ejercicio 1 (1.5 puntos)**.** Justificar las siguientes relaciones:

(a) (0.25 puntos) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, \frac{1}{2})$. Justificar que $P[X_1 + X_2 = 8] = 0$.

(b) (0.25 puntos) Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 > 0] = \frac{e^9-1}{e^9}$.

(c) (1 punto) Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Bernoulli de parámetro p. Se considera $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, la variable aleatoria que define las sumas parciales de la sucesión. Justificar que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

Ejercicio 2 (1.5 puntos)**.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $Z = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Ejercicio 3 (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio (X, Y) con distribución uniforme en el recinto acotado limitado por el exterior de la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $2y + x = 1$ y la recta de ecuación $y = 0$:

(a) (0.25 puntos) Obtener la función de densidad conjunta.

(b) (1.50 puntos) Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

(c) (0.75 puntos) Obtener las funciones de densidad condicionadas.

(d) (0.50 puntos) Obtener la probabilidad de que $X \geqslant \frac{1}{2}$.

(e) (1.25 puntos) Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable X conocidos los valores de la variable Y.

(f) (0.50 puntos) Obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y sin observar la variable X y dar una medida del error cuadrático medio cometido en esta aproximación.

(g) (0.25 puntos) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar de forma muy breve la respuesta.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. La moda de Y vale 4 y $\text{Var}[Y \mid X = x_0] = \frac{\text{Var}(Y)}{2} \neq 0$. La curva de regresión de Y/X es $y = x + 5$ y el error cuadrático medio asociado a esta aproximación es 3.

(a) (1.25 puntos) Determinar los parámetros de la distribución de (X, Y).

(b) (0.75 puntos) Especificar la función generatriz de momentos de (X, Y).

Observación. En el apartado 1(c) hay que demostrar el/los resultados empleados para justificar la relación pedida, salvo la Desigualdad de Chebychev. En el apartado 3(b) se obtienen hasta 1,25 puntos si las integrales se dejan indicadas y hasta 1,50 puntos si se obtienen sus valores de forma explícita.