Probabilidad
Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Probabilidad
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Ordinario

Fecha 17 de enero de 2024.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio continuo (X, Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x < 1 \ \wedge \ x < 0, \ y > 0\}$$

a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

d) **(0.25 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X - Y > 0$.

e) **(0.25 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X + Y < 0$.

f) **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.

g) **(0.50 puntos)** Obtener una medida de la bondad del ajuste del apartado anterior.

Ejercicio 2 (1 puntos)**.** Dado un vector aleatorio (X, Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = exp\left(\frac{t_2 + 16t_1^2 + 4t_2^2 + 10t_1t_2}{2}\right)$$

a) **(0.25 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X, Y).

b) **(0.25 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y/X = 0$ y $X/Y = 2$.

c) **(0.50 puntos)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y - X)$. Justificar que las variables aleatorias $2X$ y $Y - X$ tienen asociación lineal muy alta en sentido negativo.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea (X, Y) un vector aleatorio. Se pretenden predecir, por mínimos cuadrados, los valores de la variable Y a partir de una función lineal de la variable X, y viceversa.

a) **(2 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal de X sobre Y.

b) **(1 punto)** Si $3y - x + 1 = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$ son las rectas de regresión del vector (X, Y): identificar la recta de regresión de Y sobre X; obtener una medida de la proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal y calcular la esperanza del vector (X, Y).

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Sean X_1, X_2, $\ldots$, X_n n variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley uniforme en el intervalo $[0, \theta]$ con $\theta > 0$. Se considera la sucesión de variables aleatorias cuyo término general es de la forma $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Probar que la sucesión anterior converge en ley a una variable aleatoria degenerada en θ.

Observación. A tener en cuenta:

- En el **apartado 1.b** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.