

Cálculo I

Examen VII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo I

Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2021-2022

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de evaluación continua.

Fecha 23 de noviembre de 2021

Ejercicio 1 (2 puntos). **Enuncia** el Teorema de Bolzano-Weierstrass y el Teorema de Completitud de \mathbb{R} .

- Teorema de Bolzano-Weierstrass:

Toda sucesión (de números reales) acotada admite una parcial convergente

$$\left(\begin{array}{l} \{x_n\} \text{ acotada} \implies \exists \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente} \\ \text{tal que } \{x_{\sigma(n)}\} \text{ converge} \end{array} \right)$$

- Teorema de Completitud de \mathbb{R} :

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, entonces:

$$\{x_n\} \text{ convergente} \iff \{x_n\} \text{ de Cauchy}$$

Ejercicio 2 (2 puntos). **Justifica** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Toda sucesión monótona y mayorada es convergente.

Falso. Contraejemplo:

La sucesión $\{-n\}$ es monótona (decreciente), mayorada (por 0) y no converge.

2. Si un $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y mayorado, existe al menos un mayorante positivo.
Sea $M(A)$ el conjunto de los mayorantes de A y sea $k \in M(A)$. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} k' = \max\{k, 5\} \in M(A) \\ k' \geq 5 \Rightarrow k' \text{ positivo} \end{array} \right\} \implies \text{Verdadero}$$

3. Si un $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y minorado, existe al menos un minorante positivo.
Falso. Contraejemplo:

$$A = \{-2, 8\}, \quad m(A) =]-\infty, -2] \implies m(A) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$$

(ningún minorante es positivo)

4. Toda sucesión que admita una parcial de Cauchy, es acotada.
Falso. Contraejemplo:

$$\{x_n\} \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{l} x_{2n} = 0 \\ x_{2n-1} = n \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Admite una parcial de Cauchy, $\{x_{2n}\}$. Sin embargo, es no acotada.

5. Si $\{x_n\}$ es una sucesión no acotada, admite una parcial divergente.
Verdadero. Demostración:
(Dado $k \in \mathbb{R}^+$, $\{p \in \mathbb{N} : |x_p| > k\}$ es infinito)

Sea $\sigma(1) = \min\{p \in \mathbb{N} : |x_p| > 1\}$. Supuesto conocido $\sigma(n)$, ¿ $\sigma(n+1)$?

$$\sigma(n+1) = \min \left\{ p \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} p > \sigma(n) \\ |x_p| > n+1 \end{array} \right\}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma(n+1) &> \sigma(n) \quad (\sigma \text{ es estrictamente creciente}) \\ |x_{\sigma(n)}| &> n \implies \{|x_{\sigma(n)}|\} \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Sean a y b dos números reales distintos. Demuestra que:

$$\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por inducción:

$$\text{Sea } A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \right\} \subseteq \mathbb{N}$$

¿Es A inductivo? ($1 \in A$ y Si $n \in A \implies n+1 \in A$)

$$* \quad \text{¿} 1 \in A? \quad 1 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^1 a^{1-k} b^k = a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} \quad \text{Sí.}$$

$$* \quad \text{Si } n \in A, \quad \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \quad (\text{hipótesis de inducción})$$

$$\text{¿} n+1 \in A? \iff \text{¿} \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b}?$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k &= \sum_{k=0}^n a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = a \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k + b^{n+1} \stackrel{(*)}{=} a \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} + b^{n+1} = \\ &= \frac{a^{n+2} - \cancel{ab^{n+1}} + \cancel{ab^{n+1}} - b^{n+2}}{a - b} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b} \quad \text{Sí} \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ he aplicado la hipótesis de inducción.

Luego A es inductivo (por el principio de inducción). Por tanto $A = \mathbb{N}$, es decir,

$$\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 4 (4 puntos). Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$1. \left\{ \frac{n3^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1} + 2^n} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n3^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1} + 2^n} \right\} &= \left\{ \frac{n3^{\mathcal{K}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{3^{\mathcal{K}}\sqrt{n+1} + 3^{\mathcal{K}}\left(\frac{2}{3}\right)^n} \right\} = \left\{ \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{n+1} \left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right)} \right\} = \left\{ \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{1 + \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right)} \right\} \end{aligned}$$

Estudiemos ahora por comodidad numerador y denominador por separado:

* Numerador:

$$\begin{aligned} \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}} &= \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n(\mathcal{K} + 1 - \mathcal{K})}{n + 1 + \sqrt{n(n+1)}} = \\ &= \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K} + \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathcal{K}\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{\frac{n+1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Denominador:

$$1 + \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \rightarrow 1 + 0 = 1$$

Por tanto,

$$\left\{ \frac{n3^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1} + 2^n} \right\} \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}$$

$$2. \{x_n\} \text{ Definida por recurrencia: } x_1 = 5, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Voy a demostrar que $\{x_n\}$ es decreciente y minorada por 3.

¿ $3 < x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$? (por inducción)

* $n=1$ $x_2 = \frac{34}{10} = 3,4 \implies 3 < 3,4 < 5$ Sí.

* Supuesto $3 < x_{n+1} < x_n$ (hipótesis de inducción), ¿ $\implies 3 < x_{n+2} < x_{n+1}$?

(1)

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{x_{n+1}^2 + 9}{2x_{n+1}} > 3 \iff x_{n+1}^2 + 9 > 6x_{n+1} \iff \\ &\iff x_{n+1}^2 - 6x_{n+1} + 9 > 0 \iff (x_{n+1} - 3)^2 > 0 \quad \text{Sí} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + 9}{2x_{n+1}} < x_{n+1} &\iff x_{n+1}^2 + 9 < 2x_{n+1}^2 \iff \\ \iff 9 < x_{n+1}^2 &\iff 3 < x_{n+1} \quad \text{Sí (por hipótesis de inducción)}\end{aligned}$$

Luego $\{x_n\}$ decreciente y minorada (por 3), luego es convergente. Por la unicidad del límite y sabiendo que $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n}$,

$$L = \frac{L^2 + 9}{2L} \implies L^2 = 9 \implies \begin{matrix} L = 3 \\ \cancel{L = -3} \end{matrix}$$

Descartamos el -3 ya que $x_n > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Finalmente tenemos que la sucesión dada converge a 3.