Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas **5**
1.1. Introducción a la Computación 5
1.1.1. Cálculo de gramáticas 9

1. Relaciones de Problemas

1.1. Introducción a la Computación

Ejercicio 1.1.1. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \end{aligned}$$

1. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to XYX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \\ Y &\to bbb \end{aligned}$$

Sea $L = \{ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ubbbv$ con $u, v \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX$$

Además, es fácil ver que la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$ nos permite generar cualquier palabra $u \in \{a, b\}^*$. Por tanto, tenemos que $X \overset{*}{\Longrightarrow} u$ y $X \overset{*}{\Longrightarrow} v$; teniendo así que $S \overset{*}{\Longrightarrow} ubbbv$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX \Longrightarrow ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto en el apartado anterior de la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

2. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to aX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea $L = \{au \mid u \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = au$ con $u \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au \mid u \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

3. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \to XaXaX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$$

Sea $L = \{uavawa \mid u, v, w \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $z \in L$. Entonces, $z = uavawa$ con $u, v, w \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} z$:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de z:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa \mid u, v, w \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in L$.

4. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \to SS \mid XaXaX \mid \varepsilon$$
$$X \to bX \mid \varepsilon$$

Sea el siguiente lenguaje:

Ejercicio 1.1.2. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$. Determinar en cada caso el lenguaje generado por la gramática.

1. Tenga en cuenta que:

$$V = \{S, A\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{rcl} S & \to & abAS \\ abA & \to & baab \\ S & \to & a \\ A & \to & b \end{array} \right\}$$

2. Tenga en cuenta que:

$$
\begin{aligned}
V &= \{\langle \text{número} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle\} \\
T &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
S &= \langle \text{número} \rangle \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl}
\langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \\
\langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{dígito} \rangle \\
\langle \text{dígito} \rangle & \to & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
\end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

3. Tenga en cuenta que:

$$
\begin{aligned}
V &= \{A, S\} \\
T &= \{a, b\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{ccc}
S & \to & aS \\
S & \to & aA \\
A & \to & bA \\
A & \to & b
\end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.1.3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras en las que el número de b no es tres.

2. Palabras que tienen 2 ó 3 b.

Ejercicio 1.1.4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras que no contienen la subcadena ab.

2. Palabras que no contienen la subcadena baa.

Ejercicio 1.1.5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

Ejercicio 1.1.6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

Ejercicio 1.1.7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a.

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b.

Ejercicio 1.1.8. Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que:

1. Genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.

2. Genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

Ejercicio 1.1.9. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$
\begin{aligned}
&V = \{S, X\} \\
&T = \{a, b\} \\
&S = S \\
&P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & SS \\ S & \to & XXX \\ X & \to & aX \mid Xa \mid b \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Determinar si el lenguaje generado por la gramática es regular. Justificar la respuesta.

Ejercicio 1.1.10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

Ejercicio 1.1.11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

Ejercicio 1.1.12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \to B^*$, $g : A^* \to B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Ejercicio 1.1.13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i, para todo $i \geqslant 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

1. ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2? Justifica la respuesta.

2. Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L.

   Observación. Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que, para todo alfabeto A, el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

1.1.1. Cálculo de gramáticas

Ejercicio 1.1.15 (Complejidad: Sencilla)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{u \in \{0,1\}^* \mid |u| \leqslant 4\}$
2. Palabras con 0's y 1's que no contengan dos 1's consecutivos y que empiecen por un 1 y que terminen por dos 0's.
3. El conjunto vacío.
4. El lenguaje formado por los números naturales.
5. $\{a^n \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\} \cup \{a^n b^n \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\}$
6. $\{a^n b^{2n} c^m \in \{a,b,c\}^* \mid n,m > 0\}$
7. $\{a^n b^m a^n \in \{a,b\}^* \mid m,n \geqslant 0\}$
8. Palabras con 0's y 1's que contengan la subcadena 00 y 11.
9. Palíndromos formados con las letras a y b.

Ejercicio 1.1.16 (Complejidad: Media)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{uv \in \{0,1\}^* \mid u^{-1} \text{ es un prefijo de } v\}$
2. $\{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid |u| = |v|\}$
3. $\{u1^n \in \{0,1\}^* \mid |u| = n\}$
4. $\{a^n b^{n+1} \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\}$ (observar transparencias de teoría)

Ejercicio 1.1.17 (Complejidad: Difícil)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m c^k \in \{a,b,c\}^* \mid k = m + n\}$
2. Palabras que son múltiplos de 7 en binario.

Ejercicio 1.1.18 (Complejidad: Extrema (no son libres de contexto))**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
2. $\{a^{n^2} \in \{a\}^* \mid n \geqslant 0\}$
3. $\{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es primo}\}$
4. $\{a^n b^m \in \{a,b\}^* \mid n \leqslant m^2\}$