

Cálculo II

Examen VI

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Segundo Parcial. Integración. Temas 5-7.

Ejercicio 1. [2 puntos] Justificar de forma razonada si las siguientes funciones son o no uniformemente continuas y/o lipschitzianas.

1. $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x \ln x$, para cada $x \in]0, 1[$.

Tenemos que es derivable en $]0, 1[$, con:

$$f'(x) = \ln x + 1 \quad \text{Im}(f') =]-\infty, 1[$$

Por tanto, como la derivada de f no está acotada en $]0, 1[$, tenemos que no es lipschitziana. Veamos si es uniformemente continua.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Por tanto, definiendo $f(0) = f(1) = 0$, tenemos una ampliación continua del dominio de f , por lo que f sí es uniformemente continua.

2. $F : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x g(t) dt$, donde $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona.

Demostremos en primer lugar que g está acotada. Como g es monótona, supongamos g creciente (no es restrictivo). Entonces:

$$g(1) \leq g(x) \leq g(3) \quad \forall x \in [1, 3]$$

Por tanto, tenemos que está acotada.

Por ser g monótona y acotada, tenemos que es Riemman Integrable. Además, por ser acotada, tenemos que $|g(x)| \leq M \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_1^y g(t) dt - \int_1^x g(t) dt \right| = \left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq M|y - x|$$

Por tanto, tenemos que $F(x)$ es uniformemente continua y, por tanto, lipschitziana y continua.

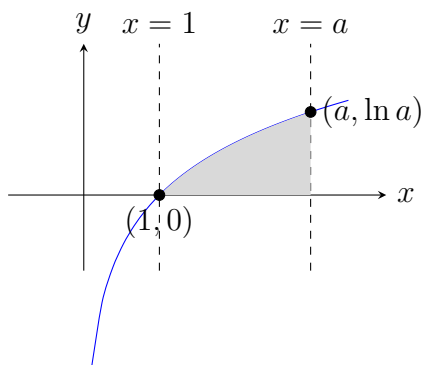
Ejercicio 2. [1 punto] Calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 + \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n+n}{n} \right)^2 \right)$$

Definimos $f(x) = (1+x)^2$. Entonces:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 + 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Ejercicio 3. [2 puntos] Determina para qué valores de $a > 0$, el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1, x = a$ es igual a 1.



- Supongamos $a > 1$:

Tenemos que el área delimitada es:

$$A = \int_1^a \ln x \, dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = \ln & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array} \right] = [x \ln x]_1^a - \int_1^a x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x - x]_1^a = a \ln a - a - \ln(1) + 1 = 1 \iff a \ln a - a = 0 \iff \ln a = 1 \iff a = e$$

Por tanto, tenemos que el valor buscado es $a = e$.

- Supongamos $0 < a \leq 1$:

$$A = \int_a^1 -\ln x \, dx = -\int_a^1 \ln x \, dx = \int_1^a \ln x \, dx = 1 \iff a = e$$

donde he usado el resultado del apartado anterior. Pero $a \leq 1$, por lo que no es posible.

Observación.

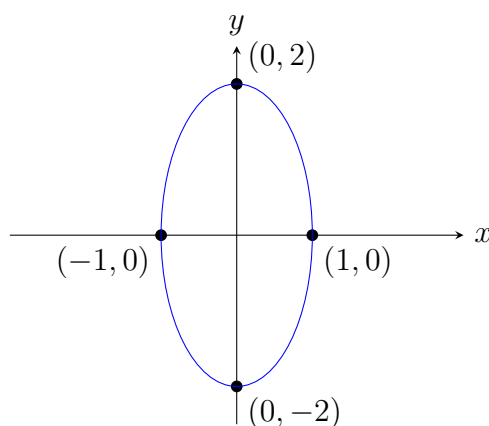
$$A = \int_0^1 -\ln x \, dx = -\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \ln x \, dx = -\lim_{c \rightarrow 0} [x \ln x - x]_c^1 = 1 + \lim_{c \rightarrow 0} c \ln c - c = 1$$

donde he usado que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

Por tanto, tenemos que el valor pedido sería $a = 0$, pero tenemos que $a > 0$.

Ejercicio 4. [2 puntos] Calcular la longitud de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Tenemos que se trata de la elipse centrada en el punto $P(0, 0)$ con los ejes paralelos a los ejes cartesianos. El semieje horizontal mide 1, y el semieje vertical mide 2 unidades. Por tanto, la representación es esta:



Al ser simétrica la figura, calculo solo la longitud contenida en el primer cuadrante, que es $\frac{1}{4}$ de la longitud total.

En el primer cuadrante, tengo que $x, y > 0$. Por tanto, la función queda:

$$y^2 = 4(1 - x^2) \implies y = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Por tanto, la longitud de la elipse en el primer cuadrante es:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Calculo la derivada:

$$y'(x) = 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} \implies [y'(x)]^2 = \frac{4x^2}{1 - x^2}$$

Por tanto,

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x^2 + 4x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + 3x^2}{1 - x^2}} dx$$

Observación. Este ejercicio se impugnó ya que con los conocimientos de la asignatura no es posible calcular dicha integral.

Ejercicio 5. [2 puntos] Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) := \int_0^x e^{t^2} dt$. Estudiar su monotonía, y determinar su imagen. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2 + \int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} t e^{2t^4} dt}$$

Tenemos que el integrando es una función continua, por lo que es localmente integrable. Por tanto, por el TFC, tenemos que $F(x)$ es continua, con $F'(x) = e^{x^2}$. Como $F'(x) > 0$, tenemos que $F(x)$ es estrictamente creciente en \mathbb{R}_0^+ . Para calcular la imagen, antes veamos si el límite en $+\infty$ converge. Tenemos que $e^x < e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, por lo que:

$$\int_0^\infty e^{t^2} dt \text{ convergente} \implies \int_0^\infty e^t dt \text{ convergente}$$

Como la integral de e^x no converge, tenemos que la integral que buscamos tampoco. Por tanto, tenemos que diverge positivamente.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

Además, tenemos que $F(0) = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$Im(F) = \mathbb{R}_0^+$$

Para resolver el límite, tenemos que el numerador diverge positivamente. Veamos el comportamiento del denominador en $+\infty$. Como el integrando diverge positivamente, tenemos que la integral también. Además, como el integrando es positivo, puedo aplicar el TFC para calcular la derivada. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2 + \int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} t e^{2t^4} dt} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2F(x)F'(x) + F'(x)}{\sqrt{x}e^{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2F(x)e^{x^2} + e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4F(x) + 2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Demostrar que $0 \leq \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx \leq \frac{1}{2}$

Definimos $f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Veamos en primer lugar el valor de la siguiente integral:

$$\int_2^\infty g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^b = \frac{1}{2} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

Para razonar la desigualdad, vemos la siguiente desigualdad:

$$f(x) \leq g(x) \iff \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} \iff 1+e^x > 1 \iff e^x > 0$$

Por tanto, tenemos que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Como son Riemman Integrables y la integral conserva el orden, tenemos que:

$$\int_2^\infty 0 dx \leq \int_2^\infty f(x) dx \leq \int_2^\infty g(x) dx$$

Usando el valor calculado de la integral de $g(x)$, tenemos que:

$$0 \leq \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx \leq \frac{1}{2}$$