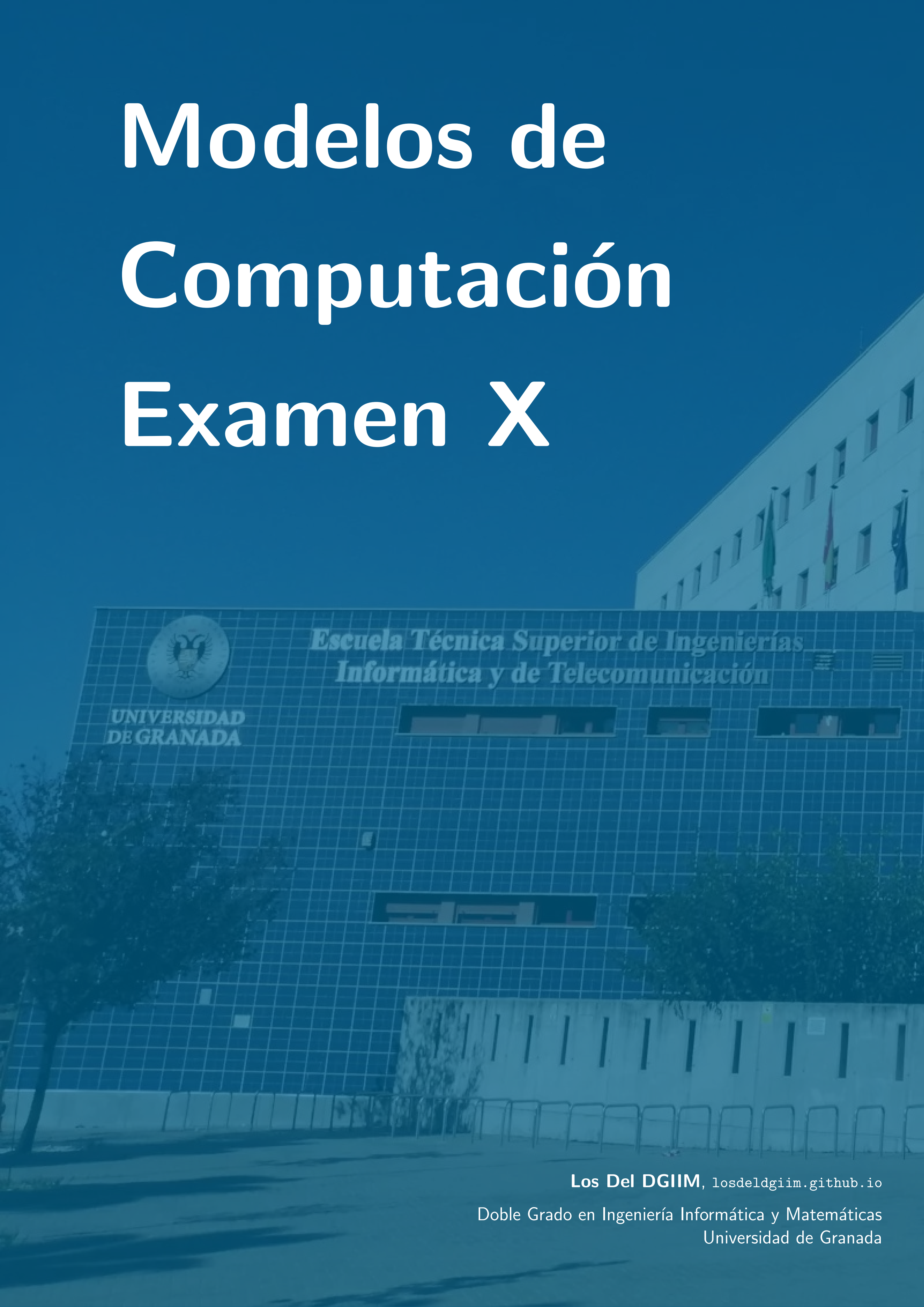
Modelos de Computación Examen X



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Modelos de Computación

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas o ADE.

Grupo Único.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 16 de enero de 2023.

Duración 2,5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Decir cuales de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ son regulares y/o independientes del contexto. Justificar las respuestas.

1. $L_1 = \{a^k b^m c^n : (k = n \ \vee \ m = n) \ \wedge \ k + m + n \geqslant 2\}$
2. $L_2 = \{a^k b^m c^n : (k = n \ \vee \ m = n) \ \wedge \ k + m + n \leqslant 2\}$
3. $L_3 = \{a^k b^m c^n : k + m + n \geqslant 2\}$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$, procurando que sean deterministas cuando sea posible.

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \neq j \ \vee \ j \neq k\}$
2. L_2: conjunto de palabras u tales que en todo prefijo de u el número de a's más el número de b's es menor o igual al doble del número de c's.

Ejercicio 3 (1.25 puntos)**.** Decir si las siguientes afirmaciones sobre expresiones regulares son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. $(rr + \varepsilon)^*(r + \varepsilon) = r^*$
2. $(r_1 r_1 + r_1 r_2 + r_2 r_1 + r_2 r_2)^* = (r_1 + r_2)^*(r_1 + r_2)$

Ejercicio 4 (1.25 puntos)**.** Pon ejemplos de lenguajes que cumplan las siguientes condiciones:

1. Un lenguaje independiente del contexto y no regular L y un homomorfismo f, tal que $f(L)$ es regular.
2. Un lenguaje independiente del contexto y no regular tal que su complementario es independiente del contexto.
3. Un lenguaje independiente del contexto L y otro regular R, tal que $R \cap L$ no es independiente del contexto.

Ejercicio 5 (1.25 puntos)**.** Describe la función ELIMINA$_2(A)$ en el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach.

Ejercicio 6 (1.25 puntos)**.** Describe el paso de "Terminación" en el algoritmo de Early.

Ejercicio 7 (1 punto)**.** Dado un autómata finito determinista M que acepta el lenguaje L, determinar cómo se construiría un autómata finito (puede ser no determinista) que acepta el lenguaje:

$$\text{Ciclo}(L) = \{vu : uv \in L\}$$

¿Es cierto que si Ciclo(L) es regular, entonces L es siempre regular?

Observación. Este ejercicio es opcional y sirve como nota complementaria (sólo suma). Tiene una dificultad mayor y no es recomendable hacerlo sin haber terminado antes las otras preguntas.

Soluciones

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Decir cuales de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ son regulares y/o independientes del contexto. Justificar las respuestas.

1. $L_1 = \{a^k b^m c^n : (k = n \ \vee \ m = n) \ \wedge \ k + m + n \geqslant 2\}$

   Sea L_1^1 el siguiente lenguaje:

   $$L_1^1 = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid |u| \geqslant 2\}$$

   Este es un lenguaje regular por ser el complementario de uno regular (por ser finito). Definimos los siguientes lenguajes auxiliares:

   $$L_1^2 = \{a^k b^m c^n : k = n\}$$
   $$L_1^3 = \{a^k b^m c^n : m = n\}$$

   Ambos lenguajes, L_1^2 y L_1^3, son independientes del contexto porque podemos construir sencillamente un APND que los acepta (por ejemplo, por el criterio de la pila vacía). Por tanto, como los lenguajes independientes del contexto son cerrados por unión, tenemos que $L_1^2 \cup L_1^3$ es independiente del contexto. Además, como la intersección de un lenguaje regular y uno independiente del contexto es independiente del contexto, tenemos que:

   $$L_1 = (L_1^2 \cup L_1^3) \cap L_1^1 \text{ es independiente del contexto}$$

   Aunque no se pide (ya habríamos terminado), daremos la gramática que genera L_1. Tendremos $S \to A \mid B$, que representan:

   - A: $k = n$ y $k + m + n \geqslant 2$. Sus producciones son:

     $$A \to aAc \mid aA'c \mid bbA'$$
     $$A' \to bA' \mid \varepsilon$$

   - B: $m = n$ y $k + m + n \geqslant 2$. Sus producciones son:

     $$B \to aaB'' \mid B''B'$$
     $$B' \to bB'c \mid bc$$
     $$B'' \to aB'' \mid \varepsilon$$

   Por tanto, una gramática independiente del contexto que genera L_1 es:

   $$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to aAc \mid aA'c \mid bbA' \\ A' &\to bA' \mid \varepsilon \\ B &\to aaB'' \mid B''B' \\ B' &\to bB'c \mid bc \\ B'' &\to aB'' \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Veamos ahora que no es regular por el recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos la palabra $z = a^n b^{n+1} c^n \in L_1$ pues $N_a(z) = N_c(z) = n$, con $|z| = 3n+1 \geqslant n$. Toda descomposición de $z = uvw$ con $u, v, w \in \{a, b, c\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

$$u = a^k, \quad v = a^l, \quad w = a^{n-k-l} b^{n+1} c^n, \qquad 0 \leqslant k + l \leqslant n, \quad l \geqslant 1$$

Bombeando con $i = 2$, obtenemos la palabra:

$$uv^2w = a^{k+l} a^l a^{n-k-l} b^{n+1} c^n = a^{n+l} b^{n+1} c^n \notin L_1$$

pues $n + l, n + 1 > n$. Por tanto, L_1 no es regular.

2. $L_2 = \{a^k b^m c^n : (k = n \ \vee \ m = n) \ \wedge \ k + m + n \leqslant 2\}$

   Tenemos la siguiente inclusión entre lenguajes:

$$L_2 \subset \{a^k b^m c^n : k + m + n \leqslant 2\} \subset \{u \in \{a, b, c\}^* \mid |u| \leqslant 2\}$$

   El último lenguaje es finito, con un total de $3^2 = 9$ palabras. Por tanto, L_2 es finito y por tanto regular.

3. $L_3 = \{a^k b^m c^n : k + m + n \geqslant 2\}$

   Sea L_3^1 el lenguaje regular con expresión regular $a^* b^* c^*$, y L_3^2 el siguiente lenguaje:

$$L_3^2 = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid |u| \geqslant 2\}$$

   El lenguaje L_3^2 es regular por ser el complementario de uno regular (por ser finito). Por tanto, como los lenguajes independientes del contexto son cerrados por intersección, tenemos que:

$$L_3 = L_3^1 \cap L_3^2 \text{ es regular}$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$, procurando que sean deterministas cuando sea posible.

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \neq j \ \vee \ j \neq k\}$

   Hay varias opciones, aunque como el lenguaje es inherentemente ambiguo no podremos conseguir un autómata determinista.

   Opción 1 A partir de la gramática independiente del contexto que genera L_1.

   La gramática que lo genera es $G = (V, \{a, b, c\}, P, S)$, con:

$$V = \{S, X, X', Y, Y', A, B, C\}$$

$$P = \begin{cases} S \to XC \mid AY \\ X \to aX'b \\ X' \to aX'b \mid A \mid B \\ Y \to bY'c \\ Y' \to bY'c \mid B \mid C \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b \\ C \to cC \mid c \end{cases}$$

Por tanto, el autómata es:

$$M = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\} \cup V, \delta, q, S, \emptyset)$$

donde la función de transición δ es:

$$\begin{aligned} \delta(q, \varepsilon, D) &= \{(q, \alpha) \mid D \to \alpha \in P\} \qquad \text{para } D \in V \\ \delta(q, i, i) &= \{(q, i)\} \quad \text{para } i \in \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Opción 2 Autómata resultante de una intersección con un lenguaje regular. Definimos los siguientes lenguajes:

$$\begin{aligned} &L_1^1 = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid N_a(u) \neq N_b(u) \ \vee \ N_b(u) \neq N_c(u)\} \\ &L_1^2 \text{ regular con expresión regular } a^+b^+c^+ \end{aligned}$$

Tenemos que $L_1 = L_1^1 \cap L_1^2$. El AFD de L_1^2 se muestra en la Figura 1.

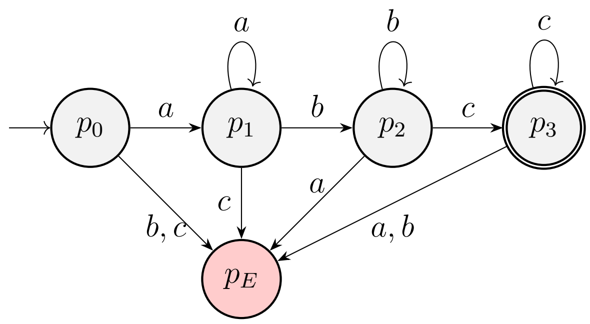


Figura 1: AFD de L_1^2.

Para el APND de L_1^1, tendremos varios estados. El estado inicial será q_0, al que iremos con una transición nula a q_1 y q_2. El estado q_1 representa las palabras con $N_a(u) \neq N_b(u)$, y el estado q_2 las palabras con $N_b(u) \neq N_c(u)$. Ambos estados, cuando efectivamente se cumpla dicha condición, irán a un estado de aceptación q_f en el que no podremos añadir más caracteres. El autómata que lo acepta por el criterio de estados finales sería:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B, C\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$$

donde la función de transición δ la daremos por partes. Las transiciones nulas son:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, Z_0), (q_2, Z_0)\} \\ \delta(q_i, \varepsilon, j) &= \{(q_f, j)\} \quad \text{para } i \in \{1, 2\}, j \in \{A, B, C\} \end{aligned}$$

En q_1, las transiciones son:

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, a, Z_0) &= \{(q_1, AZ_0)\} \\
\delta(q_1, a, A) &= \{(q_1, AA)\} \\
\delta(q_1, a, B) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, Z_0) &= \{(q_1, BZ_0)\} \\
\delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, B) &= \{(q_1, BB)\} \\
\delta(q_1, c, i) &= \{(q_1, i)\} \quad \text{para } i \in \{Z_0, A, B\}
\end{aligned}$$

En q_2, las transiciones son:

$$\begin{aligned}
\delta(q_2, b, Z_0) &= \{(q_2, BZ_0)\} \\
\delta(q_2, b, B) &= \{(q_2, BB)\} \\
\delta(q_2, b, C) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, c, Z_0) &= \{(q_2, CZ_0)\} \\
\delta(q_2, c, B) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, c, C) &= \{(q_2, CC)\} \\
\delta(q_2, a, i) &= \{(q_2, i)\} \quad \text{para } i \in \{Z_0, B, C\}
\end{aligned}$$

El estado de aceptación q_f, como hemos mencionado, no tiene transiciones. Por tanto, y nombrando $M' = (Q', \{a, b, c\}, \delta', p_0, F')$ al AFD de la Figura 1, el autómata con pila que acepta $L_1 = L_1^1 \cap L_1^2$ por el criterio de estados finales es:

$$M'' = (Q' \times Q, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B, C\}, \delta'', Z_0, F' \times \{q_f\})$$

donde la función de transición δ'' viene definida, para cada estado $(p, q) \in Q' \times Q$ y cada símbolo del alfabeto de la pila $D \in \{Z_0, A, B, C\}$:

$$\begin{aligned}
\delta''((p, q), \varepsilon, D) &= \{((p, q'), \alpha) \mid (q', \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, D)\} \\
\delta''((p, q), i, D) &= \{((p', q'), \alpha) \mid \delta'(p, i) = p' \ \wedge \ (q', \alpha) \in \delta(q, i, D)\} \qquad i \in \{a, b, c\}
\end{aligned}$$

2. L_2: conjunto de palabras u tales que en todo prefijo de u el número de a's más el número de b's es menor o igual al doble del número de c's.

   Tenemos que, para cada prefijo v de u, se cumple que:

$$N_a(v) + N_b(v) \leqslant 2N_c(v)$$

   Podemos por tanto interpretarlo como que una c permite que haya 2 símbolos de $\{a, b\}$, y que un símbolo de $\{a, b\}$ no puede aparecer sin haber aparecido antes una c. Por tanto, el autómata con pila M que acepta L_2 por el criterio de estados finales es:

$$M = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q\})$$

donde la función de transición δ es:

$$\begin{aligned}
\delta(q, c, Z_0) &= \{(q, XXZ_0)\} \\
\delta(q, c, X) &= \{(q, XXX)\} \\
\delta(q, a, X) &= \{(q, \varepsilon)\} \\
\delta(q, b, X) &= \{(q, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Además, notemos que es un autómata determinista.

Ejercicio 3 (1.25 puntos)**.** Decir si las siguientes afirmaciones sobre expresiones regulares son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. $(rr + \varepsilon)^*(r + \varepsilon) = r^*$

   En primer lugar, tenemos que:

   $$(rr + \varepsilon)^*(r + \varepsilon) = (rr)^*(r + \varepsilon)$$

   Sea L el lenguaje asociado a r. Demostrémoslo mediante doble inclusión:

   $\subseteq$) Sea u perteneciente al lenguaje asociado a $(rr)^*(r + \varepsilon)$. Entonces, $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

   $$u \in (LL)^n \, (L \cup \{\varepsilon\})$$

   Por tanto, u es de la forma $u = v_1 v_2 \cdots v_{2n} v_{2n+1}$ con $v_j \in L$ para todo $j = 1, \ldots, 2n$ y $v_{2n+1} \in L \cup \{\varepsilon\}$; es decir, $v_{2n+1} \in L$ o $v_{2n+1} = \varepsilon$. Si $v_{2n+1} = \varepsilon$, entonces $u \in L^{2n}$, y si $v_{2n+1} \in L$, entonces $u \in L^{2n+1}$. En cualquier caso, $u \in L^*$, por lo que pertenece al lenguaje asociado a r^*.

   $\supseteq$) Sea $u \in L^*$. Entonces, u es de la forma $u = v_1 v_2 \cdots v_n$ con $v_i \in L$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Si n es par, entonces $u \in (LL)^{n/2} = (LL)^{n/2}\{\emptyset\}$, y si es impar entonces $u \in (LL)^{n-1/2}L$. En cualquier caso:

   $$u \in (LL)^*(L \cup \{\emptyset\})$$

   que es el lenguaje asociado a $(rr)^*(r + \varepsilon)$.

   Por tanto, es cierto.

2. $(r_1r_1 + r_1r_2 + r_2r_1 + r_2r_2)^* = (r_1 + r_2)^*(r_1 + r_2)$

   En primer lugar, tenemos que:

   $$(r_1r_1 + r_1r_2 + r_2r_1 + r_2r_2)^* = (r_1 + r_2)^*$$

   Por tanto, se reduce a demostrar:

   $$(r_1 + r_2)^* = (r_1 + r_2)^*(r_1 + r_2)$$

   Sea L_1 el lenguaje asociado a r_1 y L_2 el asociado a r_2. Entonces, tan solo es cierto si $\varepsilon \in (L_1 \cup L_2)$.

- Si $\varepsilon \notin (L_1 \cup L_2)$, entonces ε pertenece al lenguaje asociado a la expresión regular de la izquierda, pero no pertenece al asociado por la expresión regular de la derecha.
- Si $\varepsilon \in (L_1 \cup L_2)$, sí es cierto.

Ejercicio 4 (1.25 puntos)**.** Pon ejemplos de lenguajes que cumplan las siguientes condiciones:

1. Un lenguaje independiente del contexto y no regular L y un homomorfismo f, tal que $f(L)$ es regular.

   Sea $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, el cual sabemos que es independiente del contexto y no regular. Sea $f : \{a, b\}^* \to \{0\}^*$ dado por:

   $$f(a) = 0 \qquad f(b) = 0$$

   Entonces, tenemos que:

   $$\begin{aligned} f(L) &= \{f(u) \mid u \in L\} = \\ &= \{f(u) \mid \exists i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid u = a^i b^i\} = \\ &= \{f(a^i b^i) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \\ &= \{f(a)^i f(b)^i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \\ &= \{0^{2i} \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

   Este lenguaje sabemos que es regular, con expresión regular asociada $(00)^*$.

2. Un lenguaje independiente del contexto y no regular tal que su complementario es independiente del contexto.

   El complementario de un lenguaje independiente del conexto, por norma general, no tiene por qué ser independiente del conexto. No obstante, los que son deterministas sí son cerrados por complementarios, por lo que buscaremos un lenguaje independiente del contexto determinista que no sea regular. Por ejemplo, sea el lenguaje:

   $$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

   Este lenguaje sabemos que es independiente del contexto determinista no regular. Además, por la teoría, sabemos que $\overline{L}$ es también independiente del contexto determinista.

3. Un lenguaje independiente del contexto L y otro regular R, tal que $R \cap L$ no es independiente del contexto.

   No es posible, ya que $R \cap L$ siempre será independiente del contexto.

Ejercicio 5 (1.25 puntos)**.** Describe la función ELIMINA$_2(A)$ en el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach.

Dada una variable A, esta función busca eliminar todas las producciones de la forma $A \to A\alpha$, con $\alpha \in (V \cup T)^*$, ya que esta no se encuentra en las condiciones de la forma normal de Greibach.

Para esto, añadimos la variable B_A, y, para cada una de las producciones de la forma $A \to A\alpha$, con $\alpha \in (V \cup T)^*$; la eliminamos y añadimos la producción $B_A \to \alpha B_A \mid \alpha$.

Por último, cuando ya no queden producciones de dicha forma, para cada producción de la forma $A \to \beta$ (donde β ya no comenzará por A) añadimos la producción $A \to \beta B_A$.

De esta forma, ya no tendremos producciones de la forma $A \to A\alpha$, con $\alpha \in (V \cup T)^*$; y no habremos cambiado el lenguaje generado.

Ejercicio 6 (1.25 puntos)**.** Describe el paso de "Terminación" en el algoritmo de Early.

Este proceso se aplica sobre cada uno de los registros que se denominan completos; es decir, que son de la forma:

$$(i, j, A, \alpha, \varepsilon)$$

donde la clave es que el objetivo es la cadena vacía. Por tanto, ese registro nos informa que $A \to \alpha$ es una producción, y α genera $u[i+1, \dots, j]$.

Por tanto, buscamos en Registros$[i]$ registros de la forma $(h, i, B, \gamma, A\delta)$, que nos informan que $B \to \gamma A\delta$, donde γ genera $u[h+1, \dots, i]$. Para cada uno de estos registros, tenemos que γA genera $u[h+1, j]$, luego introducimos en Registros$[j]$ el registro:

$$(h, j, B, \gamma A, \delta)$$

Ejercicio 7 (1 punto)**.** Dado un autómata finito determinista M que acepta el lenguaje L, determinar cómo se construiría un autómata finito (puede ser no determinista) que acepta el lenguaje:

$$\text{Ciclo}(L) = \{vu : uv \in L\}$$

¿Es cierto que si Ciclo(L) es regular, entonces L es siempre regular?

Observación. Este ejercicio es opcional y sirve como nota complementaria (sólo suma). Tiene una dificultad mayor y no es recomendable hacerlo sin haber terminado antes las otras preguntas.