Foto: José Juan Castro

Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Ejercicios Voluntarios

Teorema 1.1 (Aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ de manera que $\{P_n\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.*

Demostración. Definimos la sucesión de polinomios de Bernstein como:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Tenemos claramente que $k, n-k \in \mathbb{N}$, por lo que $B_n(f)(x)$ es un polinomio. Veamos ahora que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. Para ello, usaremos el siguiente lema relacionado con el binomio de Newton:

Lema 1.2. *Para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$

Demostración. Demostramos cada uno de los apartados por separado:

1. Usamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \qquad p,q \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

   En concreto, para $p = x$ y $q = 1-x$, se tiene que:

$$1 = (x+(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{1.2}$$

2. Derivando la fórmula del binomio de Newton (Ecuación 1.1) respecto de p, se tiene que:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kp^{k-1}q^{n-k} \Longrightarrow p(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\cdot p^kq^{n-k} \tag{1.3}$$

Derivando ahora la Ecuación 1.3 respecto de p, se tiene que:

$$(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$$

Multiplicando todo por p y diviendo por n, se tiene que:

$$\frac{p}{n} \cdot (p+q)^{n-1} + \frac{p^2}{n}(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \cdot p^k q^{n-k} \tag{1.4}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - 2x \cdot \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} x^2 - 2x \cdot x(x+1-x)^{n-1} + \frac{x}{n} \cdot (x+1-x)^{n-1} + \frac{x^2}{n}(n-1)(x+1-x)^{n-2} = \\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n}(n-1) = -x^2 + \frac{x}{n} + x^2 - \frac{x^2}{n} = \frac{x-x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se han usado las Ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.4.

$\square$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, la acotación entonces la obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \cdot 1 \right| \overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \\
&\overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad triangular y se quitó el valor absoluto ya que $x, 1-x>0$. Ahora, usamos el Teorema de Heine para afirmar que, como f es continua en $[0,1]$ (cerrado y acotado), es uniformemente continua en $[0,1]$. Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \text{tal que si} \quad |x-y|<\delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Fijado $\varepsilon>0$, consideramos el δ dado por la continuidad uniforme para $\varepsilon/2$. Consideramos el siguiente conjunto:

$$F=\left\{k\in\{0,\dots,n\} : \left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta\right\}$$

Veamos qué ocurre en los puntos de F y en los que no están en F:

- Si $k\in F$, entonces $|x-k/n|<\delta$, por lo que $|f(x)-f(k/n)|<\varepsilon/2$.
- Si $k\notin F$, el razonamiento es algo más complejo. Por el Teorema de Weierstrass, sabemos que f es acotada en $[0,1]$, es decir, existe $M>0$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ para todo $x\in[0,1]$. Además, como $k\notin F$, se tiene que:

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta \quad\Longrightarrow\quad \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geqslant\delta^2\Longrightarrow\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}\geqslant 1$$

Uniendo ambos resultados, se tiene que:

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant 2M\leqslant 2M\left(\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}\right)$$

Por tanto, en función de si $k\in F$ o no, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\\
&=\sum_{k\in F}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\\
&\qquad+\sum_{k\notin F}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{k\in F}\frac{\varepsilon}{2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\notin F}2M\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\\
&<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\overset{(*)}{=}\\
&\overset{(*)}{=}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}\overset{(**)}{\leqslant}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4n}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}\qquad\forall x\in[0,1], n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usó el Lema 1.2 y en $(**)$ se usó que la función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=(x)=x(1-x)=x-x^2$ es una parábola con imagen $g([0,1])=[0,1/4]$.

Por tanto, buscamos que $\dfrac{M}{2n\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon\delta^2}{M} \Longleftrightarrow n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

Sea $m = E\left(\dfrac{M}{\varepsilon\delta^2}\right) + 1$ el primer natural que cumple la condición. Entonces, para $n \geqslant m$, se tiene que:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [0,1]$$

queda así demostrado que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. $\square$

Definición 1.1. Un monstruo de Weierstrass es una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ningún punto.

Ejercicio. Encontrar un monstruo de Weierstrass y demostrar que lo es.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos\left((n!)^2 x\right)$$

2. Prácticas

2.1. Sucesiones de funciones

Ejercicio 2.1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0, \rho]$ y en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en 0. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

En resumen, tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función f_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{1+nx} \cdot (1+nx) - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2} = \frac{n - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de f_n son:

$$f_n'(x) = 0 \iff \log(1+nx) = 1 \iff 1+nx = e \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{e-1}{n}\right]$, entonces $f_n'(x) > 0$, por lo que f_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, entonces $f_n'(x) < 0$, por lo que f_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho < \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$ (podría haber tomado cualquier valor $x_n \in [0, \rho]$, ya que no afecta al límite).
- Si $n \geqslant \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho \geqslant \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{e-1}{n} \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \dfrac{1}{e}$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Observación. También sirve tomar $x_n = \frac{1}{n}$, y tendríamos que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$.

Para el caso de la semirrecta $[\rho, +\infty[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \frac{e-1}{m}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \frac{e-1}{n}$. Por tanto, tenemos que $[\rho, +\infty[\ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{f_n(p)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

Ejercicio 2.1.2. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, donde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de x:

- Si $|x| < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$1 \leqslant 1 + x^{2n} \leqslant 1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 \leqslant g_n(x) \leqslant \sqrt[n]{2}$$

  Como $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$, por el Lema del Sándwich tenemos que $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| = 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

  Por tanto, $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| > 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}$$

  Como $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n(x)\} \to x^2$.

Por tanto, tenemos que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \text{máx}\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para la convergencia uniforme, en primer lugar tenemos en cuenta que:

$$\sqrt[n]{1 + x^{2n}} \geqslant \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2,\ \sqrt[n]{1} = 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \geqslant \text{máx}\{1, x^2\} = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, buscamos acotar $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x)$. Para ello, fijado $n \in \mathbb{N}$, usaremos la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & t^{1/n} = \sqrt[n]{t} \end{array}$$

Tenemos que es derivable en todo su dominio, y su derivada es:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n \cdot t^{n-1/n}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Por el Teorema del valor medio, tenemos que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, con $t_1 < t_2$, existe un $c \in]t_1, t_2[$ tal que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(c) \cdot (t_2 - t_1)$$

Diferenciamos ahora si $|x| \leqslant 1$ o $|x| > 1$:

- Si $|x| \leqslant 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[1, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe un $c \in]1, 1 + x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(1) = \varphi_n'(c) \cdot (1 + x^{2n} - 1) = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}}$$

  Como $|x| \leqslant 1$, tenemos que $|x^{2n}| \leqslant 1$; y como $c > 1$ y $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $c^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

- Si $|x| > 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[x^{2n}, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe un $d \in]x^{2n}, 1 + x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \varphi_n'(d) \cdot (1 + x^{2n} - x^{2n}) = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}}$$

  Como $|x| > 1$, tenemos que $|x^{2n}| > 1$, por tanto, $d > 1$. Como también se tiene que $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $d^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados se tiene que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1.3. Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$h_n(x, y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto, $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$, como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\max\{|x|, |y|\} < M$. De esta forma, para todo $(x, y) \in A$, tenemos que:

$$|h_n(x, y)| = \left| \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{M^2}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \to 0$, tenemos que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en A.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{h(x_n, y_n)\} \to \frac{1}{3} \neq 0$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.1.4. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si y solo si C está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, distinguimos en función de si C está acotado o no:

- Si C está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C$, tenemos que:
$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, como $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

- Si C no está acotado, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in C$ tal que $|x_n| > n$. Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:
$$|f_n(x_n)| = \left|\frac{x_n}{n}\right| > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, tenemos que $\{f_n(x_n)\}$ no puede converger a 0, por lo que se tiene que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en C.

Ejercicio 2.1.5. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:
$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty[$, pero no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$. Para $x > 0$, tenemos que:
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = 0$$
Por tanto, $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \delta \in [0, \delta]$.
- Si $n \geqslant \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \delta]$. Veamos lo siguiente:
$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1+1} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, como se tiene que $\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \{g_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Para el caso de la semirrecta $[\delta, +\infty[$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función g_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$g_n'(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{-4n^3x^5 + 4nx}{(1+n^2x^4)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de g_n son:

$$g_n'(x) = 0 \iff -4n^3x^5 + 4nx = 0 \iff 4xn(-n^2x^4+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, entonces $g_n'(x) > 0$, por lo que g_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, entonces $g_n'(x) < 0$, por lo que g_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{\sqrt{m}}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\delta > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Por tanto, tenemos que $[\delta, +\infty[\ \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, por lo que g_n es decreciente en $[\delta, +\infty[$. De esta forma, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(\delta) \qquad \forall x \in [\delta, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{g_n(\delta)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\underline{\{g_n\} \text{ converge uniformemente en } [\delta, +\infty[}$.

Ejercicio 2.1.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$h_n(x) = n\cos^n x \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $\rho \in]0, \pi/2[$, probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, \pi/2]$, pero no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son positivos. Considerando fijo $x \in]0, \pi/2[$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos^{-n} x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} = 0$$

donde he usado que $|\cos x| < 1$ para todo $x \in]0, \pi/2[$. Por tanto, tenemos que:

$$0 \leqslant n\cos^n x \operatorname{sen} x \leqslant n\cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $]0, \pi/2[$.

Sumándole que, en $x = 0, \pi/2$ se tiene que $h_n(x) = 0$, se tiene que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $[0, \pi/2]$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in]0, \pi/2[$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < {}^1\!/\!_\rho$ $(\rho < {}^1\!/\!_n)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $n \geqslant {}^1\!/\!_\rho$ $(\rho \geqslant {}^1\!/\!_n)$, entonces $x_n = {}^1\!/\!_n \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} e^0\cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite en $(*)$, hemos tomado en primer lugar el logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} -\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Por tanto, como se tiene que $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Para el caso de $[\rho, {}^\pi\!/\!_2]$, buscamos una acotación.

Opción 1: Estudiar su monotonía.

Estudiamos en primer lugar la monotonía de la función h_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $h_n \in C^\infty\left(]0, {}^\pi\!/\!_2[\right)$, estudiamos su derivada:

$$h_n'(x) = n\left(-n\cos^{n-1}x\operatorname{sen}^2 x + \cos^{n+1}x\right) = n\cos^{n-1}x\left(-n\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de h_n son:

$$h_n'(x) = 0 \iff \cos^2 x = n\operatorname{sen}^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$, entonces $h_n'(x) > 0$, por lo que h_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), {}^\pi\!/\!_2\right]$, entonces $h_n'(x) < 0$, por lo que h_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in]0, {}^\pi\!/\!_2[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, lo cual es posible ya que $\left\{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \to 0$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Por tanto, tenemos que $[\rho, {}^\pi\!/\!_2] \subset \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), {}^\pi\!/\!_2\right]$, por lo que h_n es decreciente en $[\rho, {}^\pi\!/\!_2]$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leqslant h_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, {}^\pi\!/\!_2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{h_n(\rho)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, {}^\pi\!/\!_2]$.

Opción 2: Acotación directa.

Tenemos que:

$$0 \leqslant |h_n(x)| \leqslant n\cos^n x \leqslant n\cos^n \rho$$

donde he empleado que, como el coseno en $[0, \pi/2]$ es decreciente, $\cos x \leqslant \cos\rho$ para $x > \rho$; y por ser la potencia de índice n en $\mathbb{R}_0^+$ creciente, se tiene que $\cos^n x \leqslant \cos^n \rho$.

Veamos que $\{n\cos^n \rho\} = \left\{\dfrac{n}{\frac{1}{\cos^n \rho}}\right\} \to 0$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{\cos^{n+1}\rho} - \frac{1}{\cos^n \rho}}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{1-\cos\rho}{\cos^{n+1}\rho}}\right\} = \left\{\frac{\cos^{n+1}\rho}{1-\cos\rho}\right\} \to 0$$

Aplicndo el criterio de Stolz, tenemos lo pedido.

Por tanto, tenemos que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, \pi/2]$.

Ejercicio 2.1.7. Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1+n|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+n|x|} = 0$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C \setminus \{0\}$, tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^2}{1+n|x|}\right| \leqslant \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, en el caso de que se tenga que $0 \in C$, se tiene que $|\varphi_n(0)| = 0 \leqslant \frac{M}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, como se tiene que $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Tomamos $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ de forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

Como $\{\varphi_n(n)\} \to 1 \neq 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1.8 (Parcial DGIIM 23-24)**.** Se considera la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$, con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}$ en los intervalos $[0, r]$, $[r, \rho]$ y $[\rho, +\infty[$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de x:

- Si $|x| < 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{0}+1} = 0$$
Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función nula en $[0, 1[$.

- Si $|x| > 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1$$
Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante 1 en $]1, +\infty[$.

- Si $x = 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$
Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante $1/2$ en $\{1\}$.

Por tanto, de forma directa deducimos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $[r, \rho]$, ya que a pesar de ser continua para todo $n \in \mathbb{N}$ (es racional), su función límite no lo es, por lo que no se preserva la continuidad.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $[0, r]$. Tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant \left|\frac{r^n}{1}\right| = r^n \qquad \forall x \in [0, r],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant r < 1$, y por tanto $x^n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $\{r^n\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[0, r]$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho, +\infty[$. Tenemos que:

$$|\varphi_n(x) - 1| = \left|\frac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \left|\frac{-1}{1+x^n}\right| = \frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{\rho^n} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $x \geqslant \rho > 1$, y por tanto $x^n \geqslant \rho^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\left\{\frac{1}{\rho^n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 1 en $[\rho, +\infty[$.

Ejercicio 2.1.9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = x - x^n \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in [0,1[$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - x^n = x$$

Fijado $x = 1$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la continuidad de f en $[0,1]$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$$

Por tanto, f no es continua en 1. No obstante, f_n sí es continua en 1 para todo $n \in \mathbb{N}$ (es un polinomio). Por tanto, se tiene que <u>$\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,1]$</u>.

Ejercicio 2.1.10. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $\mathbb{R}_0^+$ y en $[0,\rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Además, tenemos que $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$. Consideramos la sucesión $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$ de forma que:

$$f_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n(n)\} \to 1/2 \neq 0$, tenemos que <u>$\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$</u>.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[0,\rho]$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n}\right| \leqslant \frac{\rho}{n} \qquad \forall x \in [0,\rho],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant \rho$. Entonces, como $\left\{\frac{\rho}{n}\right\} \to 0$, tenemos que <u>$\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[0,\rho]$</u>.

Ejercicio 2.1.11. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[\rho, \infty[$ y en $[0, \rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$, consideramos la sucesión dada por:

- Si $n < 1/\rho$ $(\rho < 1/n)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $n \geqslant 1/\rho$ $(\rho \geqslant 1/n)$, entonces $x_n = 1/n \in [0, \rho]$.

Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \neq 0$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho, +\infty[$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+n\rho} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $x \geqslant \rho$. Entonces, como sabemos que $\left\{\frac{1}{1+n\rho}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, +\infty[$.

2.2. Series de funciones

Ejercicio 2.2.1. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo:

$$f_n(x) = \frac{x}{n\left(1+nx^2\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Buscaremos aplicar el Test de Weierstrass. Para ello, hemos de acotar $f_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar, estudiaremos su monotonía. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}$ con:

$$f_n'(x) = \frac{n\left(1+nx^2\right) - xn \cdot 2xn}{n^2\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{n\left(1+nx^2\right) - 2x^2n^2}{n^2\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{\left(1+nx^2\right) - 2x^2n}{n\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{1-nx^2}{n\left(1+nx^2\right)^2}$$

Tenemos por tanto que hay dos candidatos a extremos relativos, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Estudiaremos la monotonía en cada uno de los intervalos:

- Si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$: $f_n'(x) \leqslant 0$, por lo que f_n es decreciente.
- Si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$: $f_n'(x) \geqslant 0$, por lo que f_n es creciente.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$: $f_n'(x) \leqslant 0$, por lo que f_n es decreciente.

Para acotar, tenemos en cuenta que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

Sabiendo eso, acotamos en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta la monotonía:

- Si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$:
$$0 \geqslant f_n(x) \geqslant f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$:
$$-\frac{1}{2n\sqrt{n}} = f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$:
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

En cualquier caso, uniendo los tres resultados, tenemos que:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el criterio límite de comparación, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^{3/2}}$ es convergente por serlo la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$, ($3/2 > 1$). Por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. Para $\rho \in \mathbb{R},\ \rho > 1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

   Fijado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que g_n es derivable en $[\rho, +\infty[$ con:

   $$g_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^{2x}} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

   Por tanto, como la primera derivada de g_n no se anula, tenemos que es estrictamente monótona. Además, como $n \geqslant 1$, tenemos que $g_n'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [\rho, +\infty[$, por lo que g_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto,

   $$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(\rho) = \frac{1}{n^\rho} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

   Como la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n^\rho$ es convergente ($\rho > 1$), por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

2. La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función nula en $[1, +\infty[$.

   De nuevo, usando que g_n es decreciente en $[1, +\infty[$, tenemos que:

   $$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(1) = \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

   Como $\{1/n\} \to 0$, tenemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función nula en $[1, +\infty[$.

3. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ no converge uniformemente en $]1, +\infty[$.

   Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $]1, +\infty[$, y por el Criterio de Cauchy tenemos que esto equivale a que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ sea uniformemente de

Cauchy en $]1,+\infty[$, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} g_n(x)\right| = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \ ]1,+\infty[$$

Por tanto, tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} {}^1\!/_n$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que sabemos que la serie armónica no converge. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ no converge uniformemente en $]1,+\infty[$.

Ejercicio 2.2.3. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n!}{(n+1)^n}\right\}$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!}\right\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\right\} =$$

$$= \left\{\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right\} = \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right\} \to \frac{1}{e}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{e} \Longrightarrow R = e$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-e, e[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-e, e]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = \pm e$ y la convergencia uniforme en J.

- Convergencia puntual en $x = \pm e$:

  Equivale a ver si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n x^n$ es convergente, con $x = \pm e$ fijo. Tenemos que:

$$\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x = x \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}$$

donde hemos usado los cálculos ya realizados. Además, sabemos que el segundo término converge a $1/e$ y es estrictamente decreciente. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n}\right| = \left|x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right| > \left|x \cdot \frac{1}{e}\right| = \left|\frac{x}{e}\right| = 1$$

Por tanto, tenemos que la sucesión $\{|c_nx^n|\}$ es estrictamente creciente, por lo que $\{c_nx^n\}$ no puede converger a 0. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ no converge en $x = \pm e$ por no converger a 0 su término general, luego su campo de convergencia es J.

- Convergencia uniforme en J:

  Supongamos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

  $$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} c_nx^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in J$$

  Tomando límite cuando $x \to e$, tenemos que:

  $$\lim_{x\to e} \sum_{n=p+1}^{q} c_nx^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con x tendiendo a e, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ diverge por divergir su término general. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ no converge uniformemente en J.

Ejercicio 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$ y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset \ ]-1,1[$; pero no converge uniformemente en $]-1,1[$.

En $\mathbb{R}$, los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Por tanto, se tiene que $K \subseteq [-\rho,\rho] \subsetneq \ ]-1,1[$, con $\rho \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x^n|}{|1-x^n|} \leqslant \frac{|x^n|}{1-|x^n|} = \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \qquad \forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver si la serie de término general $a_n = \dfrac{\rho^n}{1-\rho^n}$ es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general $b_n = \rho^n$, que sabemos que es convergente por ser $|\rho| = \rho < 1$.

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{1}{1-\rho^n}\right\} \to 1 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ es convergente}$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K.

Estudiamos ahora la convergencia absoluta en $]-1,1[$.

Opción 1. Forma rutinaria.

Fijando $x \in]-1,1[$, para ver si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general $a_n = |x|^n$, que sabemos que es convergente por ser $|x| < 1$.

$$\left\{\frac{|f_n(x)|}{|x|^n}\right\} = \left\{\frac{1}{1-|x|^n}\right\} \to 1 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$.

Opción 2. Usando unión de compactos.

Como converge absolutamente en cada compacto $K \subset \ ]-1,1[$, tenemos que converge absolutamente en $[-1+1/n, 1-1/n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, y por ser la convergencia absoluta una propiedad local, tenemos que converge absolutamente en la unión de todos estos conjuntos, es decir, es:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-1+1/n, 1-1/n] =]-1,1[$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$.

Tan solo falta por ver que no converge uniformemente en $]-1,1[$. Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, por el Criterio de Cauchy tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $]-1,1[$, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \ ]-1,1[$$

Tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n} \leqslant \lim_{x\to 1} \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con x tendiendo a 1, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1-x^n}$ no converge por no converger a 0 su término su general, veámoslo.

Sea $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ y tenemos que $\sqrt[n]{2} > 1 \Longleftrightarrow 2 > 1^n = 1$, por lo que $x_n \in \ ]0,1[$.

$$\{f_n(x_n) - 0\} = \left\{\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n}\right\} = \left\{\frac{1/2}{1-1/2}\right\} = \{1\} \to 1 \neq 0$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ no converge uniformemente en $]-1,1[$.

Ejercicio 2.2.5. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Supongamos en primer lugar que $\alpha > 1$. Entonces, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$$

donde he aplicado que la arctan está acotada por $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, como $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ es convergente ($\alpha > 1$), tenemos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$ es convergente; y por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sin suponer ahora que $\alpha > 1$, veamos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Fijado $C \subset \mathbb{R}$ acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in C$. Notemos que vamos a necesitar acotar por $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, por lo que buscamos acotar $\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$ por $\dfrac{M}{n}$. Para ello, veremos que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Opción 1: Usando la definición mediante integrales de la arcotangente.

En efecto, si $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^x 1 dt = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

donde hemos usado que $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Opción 2: Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan x - x \end{array}$$

Tenemos que es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, f es decreciente en $\mathbb{R}_0^+$, por lo que se tiene que $f(x) \leqslant f(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$. Como $f(x) = \arctan x - x \leqslant 0$, tenemos que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

En cualquier caso, hemos demostrado que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$. Supongamos ahora que $x \in \mathbb{R}^-$. Usando que arctan es impar ($\arctan(-x) = -\arctan x$), tenemos que:

$$\arctan x = -\arctan(-x) \geqslant -(-x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

Como la función valor absoluto es creciente en $\mathbb{R}_0^+$ y decreciente en $\mathbb{R}^-$, tenemos que:

$$|\arctan x| \leqslant |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, para $x \in C$, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{n^\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{|x|}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{M}{n} = \frac{M}{n^{\alpha+1}} \qquad \forall x \in C,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{M}{n^{\alpha+1}}$ es convergente ($\alpha+1>1$), por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

Ejercicio 2.2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\log\left(1+\frac{|x|}{n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Para probar lo pedido, en primer lugar, demostraremos que $\log x \leqslant x-1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Para ello, hay dos opciones:

Opción 1: Usando la definición mediante integrales del logaritmo.

En efecto, si $x \geqslant 1$, tenemos que:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt < \int_1^x 1dt = x-1 \qquad \forall x \in]1,+\infty[$$

donde hemos usado que $\frac{1}{t} \leqslant 1$ para todo $t \geqslant 1$.

Si $x \in]0,1[$, tenemos que:

$$\log x = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt \leqslant -\int_x^1 1dt = -(1-x) = x-1 \qquad \forall x \in]0,1[$$

donde hemos usado que $\frac{1}{t} \geqslant 1$ para todo $t \in]0,1[$.

Opción 2: Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log x - x + 1 \end{array}$$

Tenemos que es derivable en $\mathbb{R}^+$ con:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Por tanto, f tiene un único punto crítico en $x = 1$. Además, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por lo que f tiene un máximo en $x = 1$. Por tanto, $f(1) = 0$ y $f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $\log x - x + 1 \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

En cualquier caso, tenemos que:

$$|h_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot 1\cdot\left(1 + \frac{|x|}{n} - 1\right) = \frac{|x|}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde además hemos usado que $|\operatorname{sen}(nx)| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Fijado $C \subset \mathbb{R}$ acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in C$. Tenemos por tanto que:

$$|h_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^2} \qquad \forall x \in C,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{M}{n^2}$ es convergente, por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

Ejercicio 2.2.7. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de funciones:

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$.

   Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{1}{\log(n+2)}\right\}$. Tenemos que:

   $$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{1}{\log(n+3)} \cdot \frac{\log(n+2)}{1}\right\} = \left\{\frac{\log(n+2)}{\log(n+3)}\right\} \to 1$$

   Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \Longrightarrow R = 1$$

   Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-1, 1[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = \pm 1$ y la convergencia uniforme en J.

- Convergencia puntual en $x = 1$:

  Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\log(n+2)}$. Como $\log(n+2) \leqslant n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (visto en el ejercicio anterior), tenemos que:
$$\frac{1}{\log(n+2)} \geqslant \frac{1}{n+1}$$
  Usando el contrarrecíproco del Criterio de Comparación, como la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+1}$ no converge, tenemos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\log(n+2)}$ no converge. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$ no converge en $x = 1$.

- Convergencia puntual en $x = -1$:

  Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$. Por el Criterio de Leibnitz, sabemos que la serie converge si la sucesión $\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ converge a 0 y es decreciente. Como $\{\log(n+2)\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente, tenemos que $\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ converge a 0 y es decreciente. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ converge, y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$ converge en $x = -1$.

- Convergencia uniforme en J:

  Suponemos por reducción al absurdo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:
$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{\log(n+2)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in J$$
  Tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:
$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{\log(n+2)} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{\log(n+2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
  Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\log(n+2)}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para $x = 1$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$ no converge uniformemente en J.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ (Parcial DGIIM 23-24).

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2n}\right\} \to \frac{1}{2}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \Longrightarrow R = 2$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-1, 3[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = -1$ y $x = 3$ y la convergencia uniforme en J.

- Convergencia puntual en $x = -1$:
  Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(-1)^n 2^n = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n$$

  Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n n$ no converge, por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge en $x = -1$.

- Convergencia puntual en $x = 3$:
  Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n\geqslant 1} n$$

  Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n$ no converge, por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge en $x = 3$.

- Convergencia uniforme en J:
  Suponemos por reducción al absurdo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniform mente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

  $$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n}(x-1)^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in\ J$$

Tomando límite cuando $x \to 3$, tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n} 2^n = \lim_{x\to 3} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n}(x-1)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n} 2^n$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para $x = 3$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge uniformemente en J.

2.3. Cálculo de Integrales Simples

Ejercicio 2.3.1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el intervalo J y calcular su integral:

1. $f(x) = x^2 \ln x \qquad \forall x \in J =]0,1[.$
2. $f(x) = e^{-x}\cos(2x) \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}^+.$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1} \qquad \forall x \in J =]2,+\infty[.$
4. $f(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}.$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} \qquad \forall x \in J =]0,1[.$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in J =]1,+\infty[.$
7. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x} \qquad \forall x \in J = \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[.$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x \in J =]1,+\infty[.$

Ejercicio 2.3.2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el intervalo J:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1} \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}^+. \qquad (a \in \mathbb{R})$
2. $f(x) = x^n e^{-x^2}\cos x \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}. \qquad (n \in \mathbb{N})$
3. $f(x) = \dfrac{x^\rho}{1-\cos x} \qquad \forall x \in J =]0,\pi[\,. \qquad (\rho \in \mathbb{R})$
4. $f(x) = \dfrac{x^a(1-x)^b\ \ln(1+x^2)}{(\ln x)^2} \qquad \forall x \in J =]0,1[\,. \qquad (a,b \in \mathbb{R})$