

# Variable Compleja I

## Examen VII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

## Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2018-19.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Prueba Intermedia.

**Fecha** 25 de Abril de 2019.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1** (3.5 puntos). Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  donde

$$f_n(z) = \left( \frac{z-1-i}{z+1+i} \right)^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-i\}.$$

**Ejercicio 2** (3.5 puntos). Estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = \log(1 + z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de  $f$  centrado en el origen.

**Ejercicio 3.**

1. **(1.5 puntos)** Calcular  $\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$ .
2. **(1.5 puntos)** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones enteras verificando  $f(z) = g(z)$  para cada  $z \in \mathbb{T}$ . Demostrar que  $f(z) = g(z)$  para cada  $z \in \overline{D}(0, 1)$ .
3. **Extra (1.5 puntos)** Probar que, de hecho,  $f = g$ .

**Ejercicio 1** (3.5 puntos). Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  donde

$$f_n(z) = \left( \frac{z-1-i}{z+1+i} \right)^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-i\}.$$

Se trata de una serie geométrica de razón  $\varphi(z)$ , donde:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} \setminus \{-1-i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \left( \frac{z-1-i}{z+1+i} \right)^2 \end{aligned}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-i\}$ :

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| < 1 &\iff |z-1-i|^2 < |z+1+i|^2 \\ &\iff (\operatorname{Re}(z)-1)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2 < (\operatorname{Re}(z)+1)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2 \\ &\iff \operatorname{Re}^2(z) - 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) - 2\operatorname{Im}(z) + 1 < \operatorname{Re}^2(z) + 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) + 2\operatorname{Im}(z) + 1 \\ &\iff 0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Por tanto, definimos el conjunto:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0\}$$

De esta forma, la serie converge absolutamente (y puntualmente) en  $\Omega$  y diverge para  $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq H \iff \rho = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in B\} < 1$$

$\Leftarrow$ ) Supuesto que  $\rho < 1$ , es fácil probar la convergencia uniforme de la serie en  $B$ :

$$|f_n(z)| = |\varphi(z)|^n \leq \rho^n \quad \forall z \in B, n \in \mathbb{N}$$

Y sabemos que  $\sum_{n \geq 0} \rho^n$  converge por ser  $\rho < 1$ . Por el Test de Weierstrass, tenemos que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformemente en  $B$ .

$\Rightarrow$ ) Supuesto que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformemente en un conjunto  $B \subseteq H$ , por reducción al absurdo, supongamos que  $\rho \geq 1$ , en cuyo caso (por la definición de supremo), tendremos la existencia de una sucesión  $\{|\varphi(z_n)|\}$  con  $z_n \in B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  de forma que:

$$\{|\varphi(z_n)|\} \rightarrow \rho \geq 1$$

En cuyo caso, para dicha sucesión tendremos que:

$$|f_n(z_n)| = |\varphi(z_n)|^n$$

Y esta sucesión no podrá converger a 0, por ser  $\rho \geq 1$ , lo que contradice que la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converja uniformemente en  $B$ , por no converger uniformemente su término general a 0 en  $B$ .

**Ejercicio 2** (3.5 puntos). Estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = \log(1 + z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de  $f$  centrado en el origen.

Sabemos que el logaritmo principal es holomorfo en  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ . Sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ , y supongamos  $1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^-$ .

$$1 + z^2 = 1 + \operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z) + 2i \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \implies \begin{cases} \operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z) \leq -1 \\ 2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

- Si  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , entonces  $\operatorname{Im}^2(z) \geq 1 \implies |\operatorname{Im}(z)| \geq 1$ .
- Si  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , entonces  $\operatorname{Re}^2(z) \leq -1$ , lo que es una contradicción puesto que  $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ .

Por tanto, definimos el siguiente conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^-\} = \{ai \mid a \in \mathbb{R}, |a| \geq 1\}$$

Tenemos por tanto que  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$ . Por el Teorema de Taylor,  $f$  admite un desarrollo en serie de potencias en  $D(0, 1)$ .

$$f'(z) = \frac{2z}{1 + z^2} = 2z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} z^{2n+2} + C \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Para determinar la constante de integración  $C$ , basta con evaluar en  $z = 0$ :

$$f(0) = \log(1 + 0^2) = 0 \implies C = 0$$

Por tanto, el desarrollo en serie de potencias de  $f$  centrado en el origen es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{2n} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

**Ejercicio 3.**

1. **(1.5 puntos)** Calcular  $\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$ .

Definimos la función  $f$  como:

$$\begin{aligned} f : D(0, 2) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{e^z}{(z-3)^3} \end{aligned}$$

Como  $f$  es racional,  $f \in \mathcal{H}(D(0, 2))$ . Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} i$$

2. **[1.5 puntos]** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones enteras verificando  $f(z) = g(z)$  para cada  $z \in \mathbb{T}$ . Demostrar que  $f(z) = g(z)$  para cada  $z \in \overline{D}(0, 1)$ .

Como son funciones enteras, para cada  $z \in D(0, 1)$  se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w - z} dw = g(z)$$

Además, para cada  $z \in \mathbb{T}$  también se tiene por hipótesis que  $f(z) = g(z)$ . Por tanto,  $f(z) = g(z)$  para cada  $z \in \overline{D}(0, 1)$ .

3. **[1.5 puntos Extra]** Probar que, de hecho,  $f = g$ .

Si consideramos las restricciones a  $\Omega = \overline{D}(0, 1)$ , se tiene que:

$$f|_{\Omega} = g|_{\Omega}$$

Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, como  $f, g$  son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en  $\mathbb{C}$ . De hecho, considerando el desarrollo de Taylor centrado en el origen, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$