Topología I
Examen XI

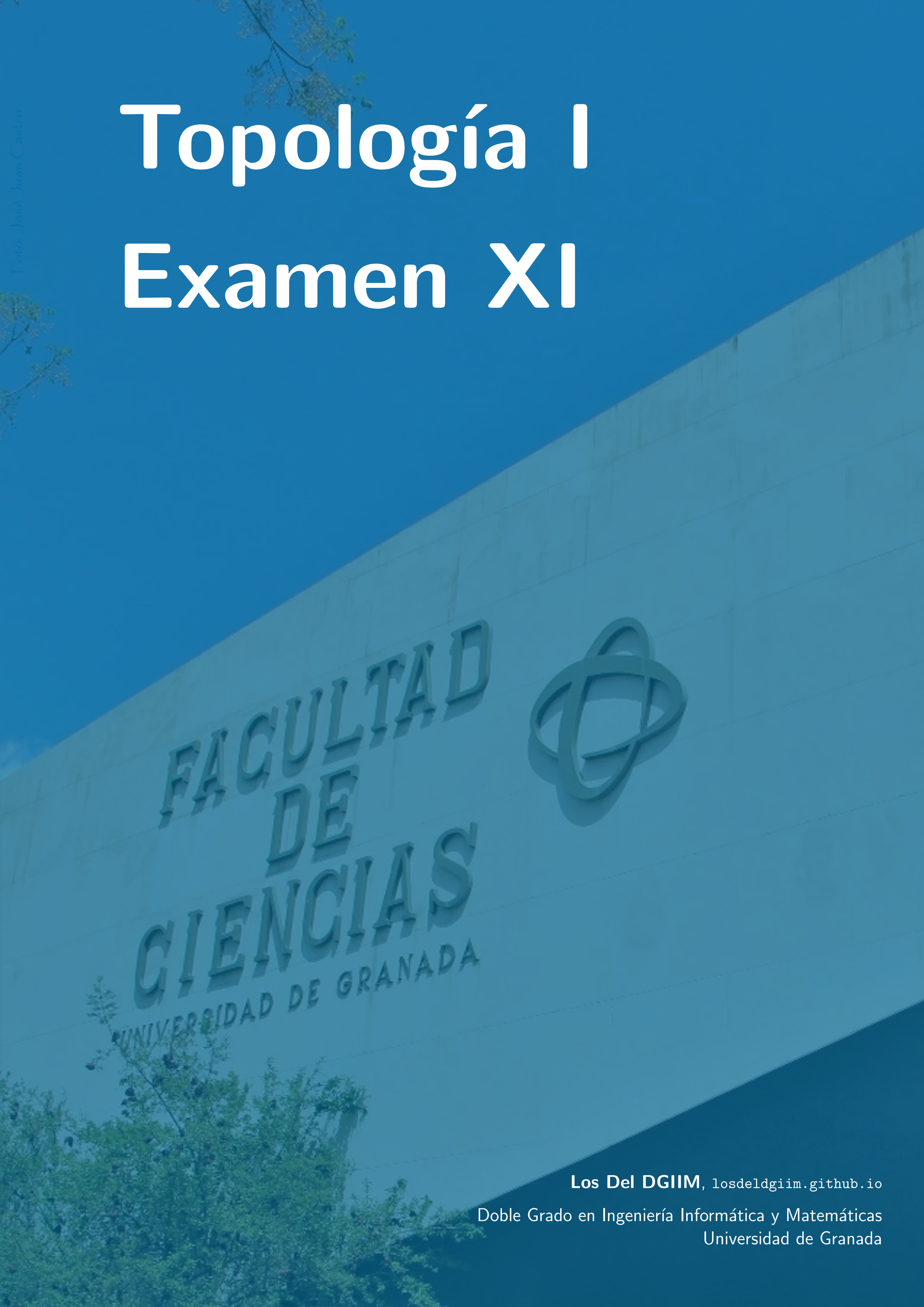

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen XI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2024-2025

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 13 de diciembre de 2024.

Duración 90 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Dados espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$, demuestra que la proyección

$$\pi_Y : (X, Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$$

es continua y abierta. Da un ejemplo que demuestre que, en general, no es cerrada.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio tologógico y supongamos que para todo espacio topológico $(Y, \mathcal{T}')$ se tiene que toda aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** En la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ consideramos la topología $\mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}$ inducida por la topología usual $\mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Sea R la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ dada por

$$(x, y)R(x', y') \iff x = x'.$$

   Demuestra que el espacio topológico cociente $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ es homeomorfo a $([-1, 1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$, donde $\mathcal{T}_u|_{[-1,1]}$ es la topología en el intervalo $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ inducida por la topología usual $\mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}$.

2. Sea R' la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ dada por

$$(x, y)R'(x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ o } x = x' \neq 0.$$

   Demuestra que los espacios topológicos cociente $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ y $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R')$ no son homeomorfos, donde R es la relación de equivalencia del apartado anterior.