

Lógica y Métodos



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Problemas de sesiones prácticas	5

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Demuestre que para todo número natural n :

$$\left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

Demostración. La demostración es por casos:

$n = 0$;

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

$n = 1$;

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

$n > 1$;

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\frac{(n-1)n}{2}n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3\end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.1.2 (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$” \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 ”$$

- En el caso base $n = 0$;

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k \right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ vale.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ vale, es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ vale.

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción.

donde en $(**)$ he utilizado el ejercicio 1.4.4.

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n , $P(n)$ vale como se pedía.

□

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n , usar una verdad como $n - k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n + 1$.