Variable Compleja

Examen VI

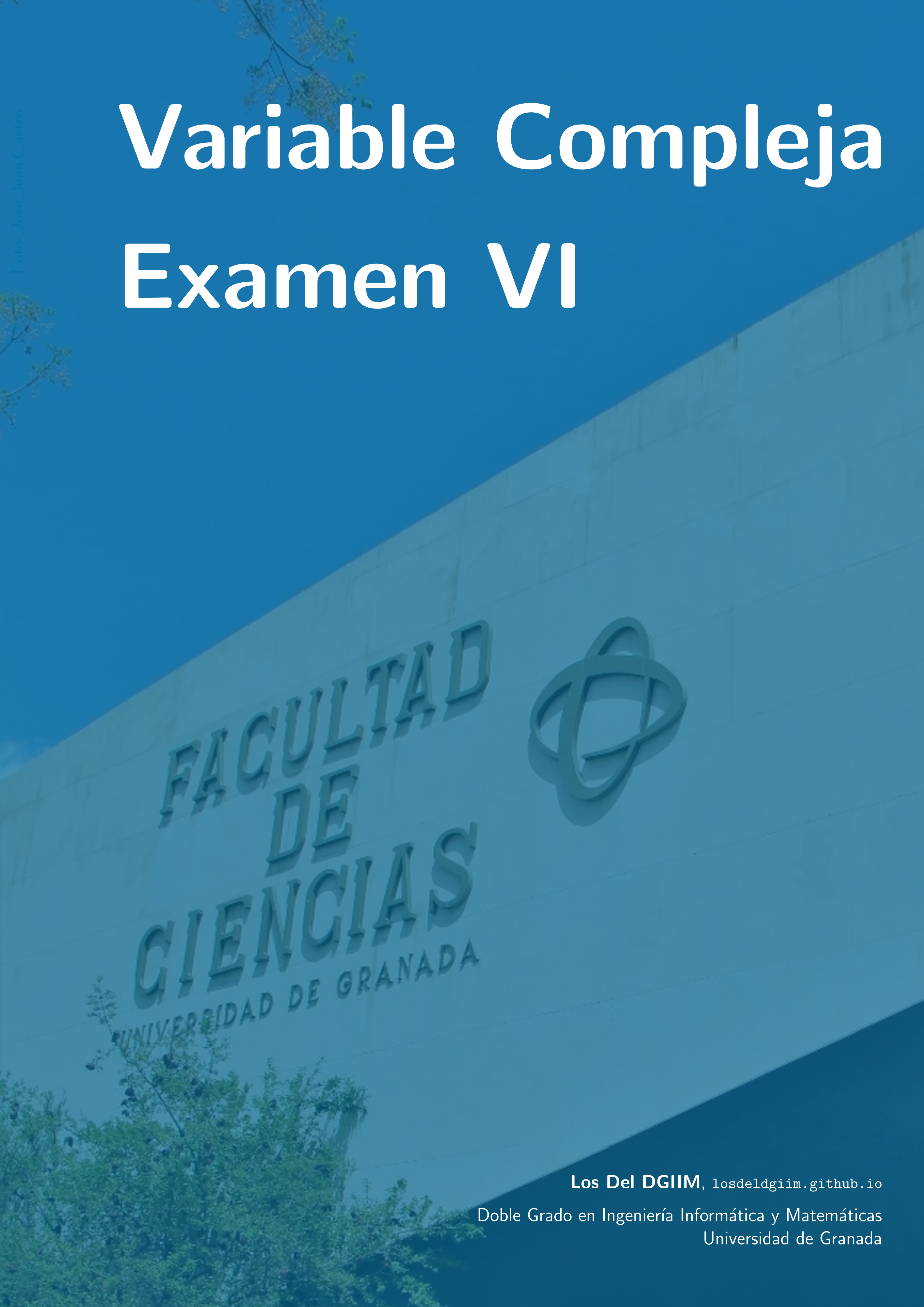

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2019-20.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 20 de Abril de 2020.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\overline{z}} \qquad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2}\, dz.$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Ejercicio 5 (Extra: 1.5 puntos)**.** Sea $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y sólo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2-i}{z^2+i}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Se trata de una serie geométrica. Sabemos que esta converge puntualmente si la razón tiene módulo menor que uno. Fijado $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z^2-i}{z^2+i}\right| < 1 &\iff |z^2-i|^2 < |z^2+i|^2 \\
&\iff \cancel{\left(\operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z\right)^2} + (2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z - 1)^2 < \cancel{\left(\operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z\right)^2} + (2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1)^2 \iff \\
&\iff 4\operatorname{Re}^2 z \operatorname{Im}^2 z - 4\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1 < 4\operatorname{Re}^2 z \operatorname{Im}^2 z + 4\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1 \iff \\
&\iff \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z > 0
\end{aligned}$$

Definimos por tanto tanto el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Tenemos por tanto que converge puntualmente y absolutamente en Ω y no converge en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Respecto a la convergencia uniforme, dado $A \subset \mathbb{C}$, veamos que la serie converge uniformemente en A si y solo si:

$$\sup\left\{\left|\frac{z^2-i}{z^2+i}\right| : z \in A\right\} < 1.$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\overline{z}} \qquad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Distinguimos en función del valor de $z \in \mathbb{C}$:

- Si $z \neq 0$:

  Definimos la siguiente función:

  $$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

  Además, sabemos que:

  $$h(z) = \frac{f(z)}{z^2}$$

  Supuesto que f es derivable en z, entonces h también lo es. Pero se ha visto que h no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$. Por tanto, f no es derivable en z.

- Si $z = 0$:

  $$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 e^{\overline{z}}}{z} = \lim_{z\to 0} z e^{\overline{z}} = 0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y no lo es en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Para g, distinguimos también en función del valor de $z \in \mathbb{C}$. Para ello, veamos antes dónde se anula el seno:

$$\operatorname{sen}(x+iy) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \iff \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{senh} y = 0 \end{array} \right\} \iff x+iy \in \pi\mathbb{Z}$$

Distinguimos por tanto en función de si $z \in \pi\mathbb{Z}$ o no:

- Si $z \notin \pi\mathbb{Z}$:
$$f(z) = \frac{g(z)}{\operatorname{sen} z}$$
Si g es derivable en z, entonces f también lo es. Pero se ha visto que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}^*$. Por tanto, g no es derivable en z.

- Si $z = 0$:
Como f es derivable en 0, también lo es g en 0, con:
$$g'(0) = \cos(0)f(0) + \operatorname{sen}(0)f'(0) = f(0)$$
Observación. Este caso no habría por qué distinguirlo (puesto que estña incluido en el siguiente), pero se incluye por ser el más directo.

- Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2k\pi$:
$$\frac{g(z) - g(2k\pi)}{z - 2k\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi\}$$
Por la definición formal de derivada del seno en $2\pi k$, se tiene que:
$$1 = \cos(2\pi k) = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(2\pi k)}{z - 2\pi k} \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2\pi k}$$
Por tanto:
$$g'(2\pi k) = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \to 2\pi k} f(z) = f(2\pi k)$$

- Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = (2k+1)\pi$:
$$\frac{g(z) - g((2k+1)\pi)}{z - (2k+1)\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - (2k+1)\pi} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi\}$$
Por la definición formal de derivada del seno en $(2k+1)\pi$, se tiene que:
$$-1 = \cos((2k+1)\pi) = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}((2k+1)\pi)}{z - (2k+1)\pi} \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - (2k+1)\pi}$$
Por tanto:
$$g'((2k+1)\pi) = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \to (2k+1)\pi} f(z) = -f((2k+1)\pi)$$

Por tanto, g es derivable en z si y solo si $z \in \pi\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2}\, dz.$$

Definimos la función f como:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0, {}^1\!/\!_2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\cos(z)}{(z-2)^2} \end{array}$$

Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0, {}^1\!/\!_2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b) + B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

- Para $z = a$: $1 = A(a-b) \Longrightarrow A = \frac{1}{a-b}$.
- Para $z = b$: $1 = B(b-a) \Longrightarrow B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$.

Por tanto, la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{1}{a-b} \left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz \right) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{a-b} \left(2\pi i f(a) - 2\pi i f(b) \right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que la función $f(z)$ es entera y que $a, b \in D(0, R)$, por lo que se puede aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función $f(z)$.

Sea ahora f entera y acotada. Entonces, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, se tiene que:

$$\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| \leqslant \frac{M}{|z-a||z-b|} \leqslant \frac{M}{||z|-|a||\,||z|-|b||} \leqslant \frac{M}{|R-|a||\,|R-|b||} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} \qquad \forall z \in C(0,R)^*$$

donde hemos usado que $z \in C(0,R)^*$, por lo que $|z| = R$; y que $R > \max\{|a|,|b|\}$, por lo que $R-|a| > 0$ y $R-|b| > 0$. Por tanto, se tiene que:

$$\left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| \leqslant \int_{C(0,R)} \left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| dz$$
$$\leqslant 2\pi R \cdot \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} = \frac{2\pi MR}{(R-|a|)(R-|b|)}$$

Como la anterior expresión es válida para todo $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|,|b|\}$, podemos hacer tender $R \to \infty$. Por el Lema del Sándwich, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = 0$$

Por la expresión anterior a la que habíamos llegado, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por la unicidad del límite, se tiene que:

$$f(b) = f(a) \qquad \forall a,b \in \mathbb{C}$$

Por tanto, f es constante.

Ejercicio 5 (Extra: 1.5 puntos)**.** Sea $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y sólo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.