

Foto: José Juan Castro

Cálculo II

Examen VIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen VIII

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Primer Parcial. Derivación.

Ejercicio 1. Función uniformemente continua. Teorema de Heine.

Definición 1 (Continuidad Uniforme). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Teorema 1 (Teorema de Heine).

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ uniformemente continua en } [a, b] \iff f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua en } [a, b]$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación.

\implies) Trivialmente, tomando $y = a$, tenemos que f es continua en todo $y \in [a, b]$, por lo que f es continua.

\impliedby) Demostramos mediante reducción al absurdo. Suponemos que f es continua pero que no es uniformemente continua.

Por tanto, por no ser uniformemente continua, podemos encontrar $x_n, y_n \in [a, b]$ con $y_n - x_n \rightarrow 0$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Como x_n, y_n están acotadas, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar una parcial σ tal que $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$ y $y_{\sigma(n)} \rightarrow y$.

Puesto que $y_n - x_n \rightarrow 0$ y $y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)} \rightarrow y - x$, por la unicidad del límite, concluimos que $y - x = 0 \implies x = y$.

Por la continuidad de f , ha de ser que $f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)}) \rightarrow f(y) - f(x) = 0$ (por ser $x = y$). Esto, sin embargo, contradice que $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Por tal contradicción, deducimos que la hipótesis es falsa, y que por tanto f es uniformemente continua.

□

Ejercicio 2. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ dos funciones uniformemente continuas. Entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

Tenemos que f es uniformemente continua; es decir:

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon}$$

Tenemos que g es uniformemente continua; es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\delta} > 0 \mid \text{Si } x, y \in B, \text{ con } |x - y| < \hat{\delta} \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta}$, y usando que $f(A) \subset B$, la continuidad uniforme de g queda:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\varepsilon} > 0 \mid \text{Si } f(x), f(y) \in B, \text{ con } |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon} \implies |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$$

Uniando lo que tenemos, queda:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \implies |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \varepsilon$$

Es decir, se ha demostrado que $g \circ f$ es uniformemente continua, por lo que es **cierto**.

2. Toda función $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua está acotada.

Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

3. Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

4. Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

Por reducción al absurdo, supongamos que f no está acotada. Entonces,

$$\exists \{x_n\} (x_n \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}) \mid \{|f(x_n)|\} \rightarrow +\infty$$

Como f tiene límite en $+\infty$, se tiene que:

$$\forall \{x'_n\} \rightarrow +\infty (x'_n \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}) \implies \{f(x'_n)\} \rightarrow L \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ no diverge, por lo que está acotada.

$$\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideramos ahora $f_{]0,M[}$. Como f es uniformemente continua, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Por tanto, $f_{]0,M[}$ está acotado.

Por tanto, tenemos que $f(x_n) \in f_{]0,M[} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f(x_n)$ acotado. Pero como $\{|f(x_n)|\}$ diverge, llegamos a una contradicción.

Por tanto, f está acotada.

Observación. Tenemos que $\forall \{x_n\} \rightarrow +\infty$, tenemos que la imagen de la cola está acotada por $L + \varepsilon$, y que la imagen de los primeros términos, por ser un conjunto acotado y ser f uniformemente continua, también es uniformemente continua.

5. Toda función integrable tiene una primitiva. Pon un ejemplo.

Si f fuese continua, es cierto. No obstante, hay función integrables que no son continuas. Ejemplo de esto es la función de las palomitas o la función parte entera. Estas son integrables pero no admiten una primitiva.

De admitir la función parte entera $E(x)$ una primitiva, tendríamos que $E(x)$ sería la derivada de una función continua, y esto no es posible por ser $E(x)$ discontinua.

Ejercicio 3. Calcula los extremos relativos de la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

Tenemos que el integrando es una función par y que es localmente integrable, por lo que:

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt = 2 \int_0^x \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt$$

Como el intervalo es Riemman Integrable, tenemos que, por el TFC tenemos que:

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{x^2(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0 \iff x = 0, \pm 1$$

Estudiamos la monotonía:

- Para $x < -1$: $F'(x) < 0 \implies F(x)$ estrictamente decreciente.
- Para $-1 < x < 0$: $F'(x) > 0 \implies F(x)$ estrictamente creciente.
- Para $0 < x < 1$: $F'(x) > 0 \implies F(x)$ estrictamente creciente.
- Para $1 < x$: $F'(x) < 0 \implies F(x)$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Ejercicio 4. Calcula:

1. Una primitiva de la función $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Se pide la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}} dt = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt - \int t^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{t} - \frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C = \\ &= 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\cos x} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{\cos x} + C \end{aligned}$$

Por tanto, una primitiva de $f(x)$ es:

$$F(x) = 2\sqrt{\cos x} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{\cos x}$$

2. $\int \sin(x)e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned} \int \sin(x)e^{-2x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u(x) = e^{-2x} & u'(x) = -2e^{-2x} \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{array} \right] = -\cos x e^{-2x} - 2 \int \cos x e^{-2x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u(x) = e^{-2x} & u'(x) = -2e^{-2x} \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{array} \right] = -\cos x e^{-2x} - 2 \sin x e^{-2x} + 4 \int e^{-2x} \sin x dx \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una integral cíclica. Tenemos:

$$\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{-2x}}{3} (\cos x + 2 \operatorname{sen} x) + C$$