

Grafos



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

Grafos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Índice general

Ejemplo. Dados varios ficheros de libros (algunos parecidos pero con leves diferencias), también tenemos libros incluidos dentro de otros. El problema es quedarnos con un conjunto de libros suficientemente pequeño que no contemple libros repetidos (o muy similares).

Podemos llegar a una solución a este problema mediante un grafo, de forma que ciertos libros estén conectados si tienen una estructura similar (mayor que un cierto umbral). Después de conectar todos los nodos similares, sustituiremos la estructura de nodos conectados por un sólo nodo, que cumpla una cierta propiedad (menor tamaño, mayor similitud con el resto, ...).

Definición 0.1 (Grafo). Un grafo es un conjunto de vértices (nodos) y de aristas (que unen los vértices).

- En el caso de que las aristas tengan un inicio y una final determinado (es decir, un sentido), decimos que tenemos grafos dirigidos. En contraparte, grafos no dirigidos.
- Si las aristas presentan un peso (un valor), hablamos de grafos ponderados.

Conceptualmente, todo lo siguiente está permitido (aunque su permisibilidad depende del problema):

- Unir dos vértices con más de una arista.
- Unir un vértice consigo mismo.

Definición 0.2 (Grafo completo). Decimos que un grafo es completo si dados dos vértices cualesquiera, existe una arista que los une. Es decir, si desde cualquier vértice podemos llegar a cualquier vértice mediante una única arista.

En los grafos dirigidos, sólo podremos avanzar en el sentido de las aristas y no al revés.

Definición 0.3 (Grafo denso). Un grafo es denso si el número de aristas que posee es cercano al número máximo de aristas (es decir, al que tendría si fuese completo).

Definición 0.4 (Grafo plano). Un grafo se llama plano si puede dibujarse en un plano o esfera (espacios homeomorfos) sin que se crucen sus aristas.

[Grado de un vértice] El grado de un vértice es el número de aristas que pasan por dicho vértice. En caso de tener una arista que salga de un nodo y llegue a él, añade un grado de 2.

Definición 0.5 (Camino). Es una sucesión (finita) de aristas adyacentes, donde se supone que no hay aristas repetidas en el camino (es decir, sin pasar dos veces por la misma arista).

En grafos dirigidos, la orientación de las aristas es relevante a la hora de considerar caminos.

Definición 0.6 (Ciclo). Un ciclo es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

Definición 0.7 (Grafo conexo). Un grafo se dice conexo si para cualquier par de vértices existe un camino que los una. Es decir,

Teorema 0.1 (Teorema de Euler).

- *Si todos los vértices de un grafo son de grado impar, no existen circuitos eulerianos.*
-

Definición 0.8. Un camino Hamiltoniano es un camino que pasa a través de cada vértice una y sólo una vez, y termina en el vértice que comienza.

Definición 0.9. Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos.

En caso de ser un grafo dirigido, decimos que tiene una relación padre, descendiente (o hijo).

Definición 0.10. Un poliárbol es un grafo dirigido que si lo consideramos no dirigido (puede ser dirigido), resulta conexo. No puede tener ciclos.

0.1. Representaciones

0.1.1. Matriz de adyacencia

Dado un grafo de n vértices, lo representamos con una matriz $n \times n$, de forma que $a[i][j]$ es 1 si los vértices i y j están conectados mediante una arista.

Pros

Simplicidad.

Contras

Una contra de esta representación es el alto coste a la hora de almacenarlo, ya que es de eficiencia $O(n^2)$ en memoria.

0.1.2. Vector de listas de adyacencia

Para cada vértice, tenemos una lista con el conjunto de aristas que salen de él (de forma que en la lista almacenamos el vértice al que llega cada arista).

Podemos representarlo como un vector de listas o como un vector (o conjunto) de pares (la primera coordenada es el vértice del que sale una arista y el segundo al que llega, por ejemplo).

0.1.3. Matriz de incidencia

Para cada vértice, determina qué arcos comienzan por dicho vértice. Dado un grafo, numeramos los vértices y a las aristas. De forma que $a[i][j]$ será 1 si del vértice i comienza la arista j hasta otro vértice.

Presenta una eficiencia de $O(n \cdot p)$, siendo n el número de nodos y p el número de aristas.

En caso de ser dirigido, contamos con 1 o -1 en los valores de la matriz (donde 1 es que parte del vértice y -1 que llega a él).

0.2. Recorridos

0.2.1. Recorrido en anchura (BFS)

Parto de un nodo y visito a todos los adyacentes a ese nodo. Una vez visitados todos, cogemos el primero visitado y visitamos a todos sus adyacentes. Implica que tenemos que usar una cola para mantener los nodos no visitados.

0.2.2. Recorrido en profundidad

Cuando llega a uno nodo, se va a el primer adyacente (hasta abajo).

Los nodos que quedan por visitar los tenemos en una pila.