Geometría I

Examen V

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez[1].

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 15 de febrero de 2022.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1. [**4 puntos**] Sean V y V' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal y $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente.

   b) $\mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_k\}) \cap Ker(f) = \{0\}$

   Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

   a) $\Longrightarrow$ **b**) Partimos de que $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset V$ es linealmente independiente. Como además $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente, tenemos que un conjunto linealmente independiente se aplica en otro linealmente independiente, de lo que deducimos que f es un monomorfismo. Por tanto:

   $$f \text{ monomorfismo} \Longrightarrow Ker(f) = \{0\} \Longrightarrow \mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_k\}) \cap Ker(f) = \{0\}$$

   quedando demostrada la primera implicación.

   b) $\Longrightarrow$ **a**) Partimos de que $\mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_k\}) \cap Ker(f) = \{0\}$ y buscamos demostrar que $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente. Equivalentemente, demostraremos que f es un monomorfismo.

   Sea $v \in \mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_k\}) \subseteq V, \quad v \neq 0$. Si fuese $f(v) = 0$, llegamos a la siguiente contradicción:

   $$f(v) = 0 \Longrightarrow v \in Ker(f) \Longrightarrow v \in \{0\} \Longrightarrow v = 0$$

   pero es una contradicción, ya que $v \neq 0$. Por tanto, tenemos que $f(v) \neq 0$. Como $v \in \mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_k\})$, es combinación lineal de los vectores del sistema generador. Por tanto,

   $$v = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k \qquad a_i \in \mathbb{K}$$

   Aplicando f, sabiendo que esta es una aplicación lineal, y que $f(v) \neq 0$; tenemos que:

   $$f(v) = f(a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k) = a_1 f(w_1) + \cdots + a_k f(w_k) \neq 0$$

   Por tanto, $f(v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0$. Por tanto, $Ker(f) = 0$ y por tanto f es un monomorfismo. Por tanto, queda demostrado que $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente.

   □

2. Si V y V' son finitamente generados y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f y f^t son ambas inyectivas.

b) f es biyectiva.

Demostración. Tenemos que:

$$f^t : (V')^* \longrightarrow V^*$$

Además, adoptamos las siguientes notaciones:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \qquad\qquad \dim_{\mathbb{K}}(V') = n'$$

Sean también $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V, V' respectivamente y $\mathcal{B}^*, (\mathcal{B}')^*$ sus respectivas bases duales.

Procedemos mediante doble implicación:

a) $\Longrightarrow$ **b**) Partimos de que f, f^t son inyectivas.

$$\begin{aligned} f \text{ inyectiva} &\Longrightarrow rg(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})) = n \\ f^t \text{ inyectiva} &\Longrightarrow rg(M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*)) = \dim_{\mathbb{K}}(V')^* = n' \end{aligned}$$

Por tanto, como $(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}))^t = M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*) \Longrightarrow n = n'$. Por tanto,

$$rg(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = n = n' = \dim_{\mathbb{K}}(V')$$

Por tanto, tenemos que $Im(f) = V'$ y, por tanto, f es sobreyectiva. Como hemos supuesto que es inyectiva, tenemos que es biyectiva.

b) $\Longrightarrow$ **a**) Partimos de que f es biyectiva, por lo que tenemos de forma directa que f es inyectiva.

Como f es sobreyectiva, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V') = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f^t))$$

Aplicando las propiedades del espacio dual, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V')^* = \dim_{\mathbb{K}}(Im(f^t)) \Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(Ker(f)) = 0 \Longrightarrow Ker(f^t) = \{0\}$$

por tanto, tenemos que f^t es inyectiva.

□

3. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial y $\{w_1 + U, \dots, w_k + U\}$ es un conjunto linealmente independiente en V/U, entonces $\{w_1, \dots, w_k\}$ es linealmente independiente en V.

Demostración. Sea $0 = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k \in V \qquad a_i \in \mathbb{K}$.

Veamos que $a_1 = \cdots = a_k = 0$.

$$\begin{aligned} &0 = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k \Longrightarrow \\ &\quad \Longrightarrow 0 + U = (a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k) + U = a_1(w_1 + U) + \cdots + a_k(w_k + U) \end{aligned}$$

Como tenemos que $\{w_1 + U, \dots, w_k + U\}$ es un conjunto linealmente independiente en V/U, tenemos que $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Por tanto, queda demostrado que $\{w_1, \dots, w_k\}$ es linealmente independiente en V. □

Ejercicio 2. [2 puntos] Sean V y V' espacios vectoriales finitamente generados sobre un mismo cuerpo K. Demostrar que la aplicación transposición

$$\begin{array}{rcl} {}^t : Hom_{\mathbb{K}}(V, V') & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*) \\ f & \longmapsto & f^t \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Suponemos que es una forma lineal (habría que demostrarlo).

Veamos en primer lugar que es un monomorfismo.

$$Ker({}^t) = \{f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, V') \mid f^t = c_0\}$$

para todo $f \in Ker({}^t)$, se tiene que $f^t = 0$. Por tanto,

$$\forall \varphi' \in (V')^*, f^t(\varphi') = \varphi' \circ f = c_0 \Longrightarrow f = c_0 \Longrightarrow Ker({}^t) = 0 \Longrightarrow^t \text{ inyectiva}$$

Veamos ahora que es un epiformismo, es decir, $Im({}^t) = Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$.

$$\dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(V, V')) = \cancelto{0}{\dim_{\mathbb{K}}(Ker({}^t))} + \dim_{\mathbb{K}}(Im({}^t)) = \dim_{\mathbb{K}}(Im({}^t))$$

$$\dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(V') = \dim_{\mathbb{K}}(V^*) \cdot \dim_{\mathbb{K}}((V')^*) = \dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*))$$

Por tanto, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)) = \dim_{\mathbb{K}}(Im({}^t))$$

Como además tenemos que $Im({}^t) \subseteq Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$, tenemos que $Im({}^t) = Hom_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$. Por tanto, ^{t} es un epiformismo.

Por tanto, ^{t} es un isomorfismo. □

Ejercicio 3. [4 puntos] Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\begin{array}{rcl} U_k & = & \mathcal{L}\left(\{(1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}\right), \\ V & = & \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} y - x = 0 \\ t - x = 0 \end{array} \right\}. \end{array}$$

1. Obtener una base y la dimensión de U_k para todo $k \in \mathbb{R}$.

   Para hallar el número de vectores linealmente independientes del sistema generador y, por tanto la dimensión y la base del subespacio vectorial, calculamos el rango de la siguiente matriz:

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Para facilitar los cálculos, realizamos la transformación elemental $F_4' = 2F_4 - F_2$, que no cambia el rango.

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango, vemos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} =$$

$$= 2[2(2-k) + k(k+1) + 4 - 4k - 2 - (k+1)(2-k)] =$$
$$= 2[4 - 2k + k^2 + k + 4 - 4k - 2 - 2k + k^2 - 2 + k] =$$
$$= 2[2k^2 - 6k + 4] = 4[k^2 - 3k + 2] = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = 2 \\ \vee \\ k = 1 \end{array} \right.$$

Realizamos por tanto la siguiente distinción de casos:

- Para $k = 1, 2$:
  Tenemos que $rg(A) = 2$, por lo que hay dos vectores linealmente independientes. Veamos cuáles son:

  $$\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(k+1) - 8 = 2[k+1-4] = 2[k-3] = 0 \Longleftrightarrow k = 3$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$U_k = \mathcal{L}\left(\{(k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}\right)$$
  $$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 2$$

- Para $k \neq 1, 2$:
  Tenemos que $rg(A) = 3$, por lo que los tres vectores son linealmente independientes.

  $$U_k = \mathcal{L}\left(\{(1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}\right)$$
  $$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 3$$

2. Calcular una base de $U_k + V$ y de $U_k \cap V$. ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus V$?

$$V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} y - x = 0 \\ t - x = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}\right)$$

Tenemos que:

$$U_k + V = \mathcal{L}\left(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}\right)$$

Veamos cuántos vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & k & 2-k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 4 - 2 - 1 = -1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que esos 4 vectores son linealmente independientes.

$$U_k + V = \mathcal{L}\left(\{(0,0,1,0),(1,1,1,1),(1,2,k,1),(2,2,2-k,1)\}\right) = \mathbb{R}^4 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Ahora procedemos a calcular $U_k \cap V$:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) &= \dim_{\mathbb{R}}(U_k) + \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(U_k + V) = \dim_{\mathbb{R}}(U_k) + 2 - 4 = \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U_k) - 4\end{aligned}$$

Realizamos por tanto la siguiente distinción de casos:

- Para $k = 1,2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 2 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) = 0 \Longrightarrow U_k \cap V = \{0\}$$

- Para $k \neq 1,2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 3 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) = 1$$

Calculo unas ecuaciones implícitas de U_k:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 & x \\ 2 & 4 & 2 & y \\ k & 2 & 2-k & z \\ 1 & 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 =$$

$$= -x\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix}$$

Calculo en primer lugar los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (F_1 = 2F_3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = -2[k^2-3k+2] \qquad \text{(Ya calculado)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (F_2 = 2F_3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4[k^2-3k+2]$$

Por tanto, tenemos que la ecuación implícita es:

$$0 = -0x - 2y[k^2-3k+2] - 0z + 4t[k^2-3k+2] = 2(k^2-3k+2)(-y+2t)$$

Como $k \neq 1,2 \Longrightarrow k^2 - 3k + 2 \neq 0$. Por tanto, las ecuaciones implícitas son:

$$U_k = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, -y + 2t = 0 \right\}$$

Por tanto, el subespacio intersección es:

$$U_k \cap V = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{c} x = y \\ x = t \\ y = 2t \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(0,0,1,0)\})$$

Para ver si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus V$, necesitamos que su intersección sea nula. Por lo visto anteriormente, tenemos que:

$$U_k \oplus V = \mathbb{R}^4 \Longleftrightarrow k = 1,2$$

3. Para $k = 1$, encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(f) = U_1$, $Im(f) = V$ y $f \circ f = f$. Calcular $M(f, B_u)$, donde B_u representa la base usual de $\mathbb{R}^4$.

Tenemos que:

$$V = Im(f) = \mathcal{L}(\{(0,0,1,0), (1,1,1,1)\})$$

$$U_1 = Ker(f) = \mathcal{L}(\{(2,4,2,2), (2,2,1,1)\}) = \mathcal{L}(\{(1,2,1,1), (2,2,1,1)\})$$

Notamos la base usual $\mathcal{B}_u$ como $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$$\begin{aligned}
(1,2,1,1) \in Ker(f) &\Longrightarrow f(1,2,1,1) = f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\
(2,2,1,1) \in Ker(f) &\Longrightarrow f(2,2,1,1) = 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\
(0,0,1,0) \in Im(f) &\Longrightarrow f(e_3) = e_3 \\
(1,1,1,1) \in Im(f) &\Longrightarrow f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = (1,1,1,1)
\end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ f(e_3) = e_3 \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = (1,1,1,1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = (-1,-1,-1,-1) \\ f(e_3) = e_3 \\ f(e_4) = (2,2,1,2) \end{array} \right\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$A = M(f,\ \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que $A^2 = A$, efectivamente se cumple que $f \circ f = f$.

4. Para la aplicación f calculada en el apartado anterior, hallar $Im(f^t)$ y $ker(f^t)$.
   Sea la aplicación $f^t : (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^4)^*$, y definimos la base dual de la usual como:

   $$(\mathcal{B}_u)^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \qquad\qquad \varphi_i(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_i \qquad \forall i = 1, \dots, 4$$

   Por la propiedades de la aplicación lineal traspuesta, tenemos que:

   $$A^t = M(f^t,\ (\mathcal{B}_u)^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$Im(f^t) = \mathcal{L}\left(\{(0, -1, 0, 2)_{(\mathcal{B}_u)^*}, (0, -1, 1, 1)_{(\mathcal{B}_u)^*}\}\right)$$

   $$Ker(f^t) = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4)_{(\mathcal{B}_u)^*} \in (\mathbb{R}^4)^* \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
   $$= \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4)_{(\mathcal{B}_u)^*} \in (\mathbb{R}^4)^* \;\middle|\; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 a_3 = 0 \right\} =$$
   $$= \mathcal{L}\left(\{(1, -1, 0, 0)_{(\mathcal{B}_u)^*}, (1, 0, 0, -1)_{(\mathcal{B}_u)^*}\}\right)$$