

Resúmenes Análisis Matemático I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Resúmenes Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán “JJ”
Irina Kuzyshyn

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Espacios euclídeos, normados y métricos	7
1.1. Espacio Euclídeo	7
1.2. Espacios normados	8
1.3. Espacio métrico	8
2. Topología de un espacio métrico	9
2.1. Topología de un espacio métrico	9
2.2. Primeras nociones topológicas	10
2.3. Convergencia de sucesiones	11
3. Continuidad y límite funcional	13
3.1. Continuidad	13
3.2. Límite funcional	14
3.3. Composición de funciones	14
3.4. Ejemplos de funciones continuas	15
4. Compacidad y conexión	17
4.1. Acotación	17
4.2. Compacidad	17
4.3. Conexión	18
5. Complitud y continuidad uniforme	19
5.1. Complitud	19
5.2. Continuidad uniforme	20
5.3. Teorema del punto fijo	20
5.4. Aplicaciones lineales	21
6. Práctica 1. Continuidad	23
6.1. Teoremas relacionados	23
6.2. Parte rutinaria del problema	23
6.3. El límite no existe	24
6.3.1. Límites parciales	24
6.3.2. Límites direccionales	24
6.4. Existencia del límite	25
6.4.1. Acotación por límites direccionales	26
6.4.2. Acotación por uso de coordenadas polares	26
6.4.3. Acotación por uso de coordenadas cartesianas	26
6.5. Último recurso	26

6.6. Límites famosos	27
6.6.1. Cambiar forma de la función	27

Introducción

En el presente libro se podrán encontrar resúmenes de lo básico del temario de la asignatura Análisis Matemático I, sin demostración alguna. En ningún caso con esto basta para comprender a la perfección la asignatura, simplemente es un recurso más para no olvidar lo básico.

1. Espacios euclídeos, normados y métricos

1.1. Espacio Euclídeo

Definición 1.1.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N \quad N \in \mathbb{N} \quad \text{fijo} \quad \Delta_N &= \{k \in \mathbb{N} / k \leq N\} \\ \mathbb{R} &= \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_N) / x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}\} \\ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N &\longleftrightarrow X : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad x(k) = x_k \quad \forall k \in \Delta_N \end{aligned}$$

Definición 1.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- Suma: $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N) \quad (x + y)(k) = x(k) + y(k) \quad \forall k \in \Delta_N$
- Producto por escalares: $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) \quad (\lambda x)(k) = \lambda x(k)$

Así, \mathbb{R}^N es un espacio vectorial sobre \mathbb{R}

Definición 1.3 (Base usual). $\phi = \{e_1, \dots, e_N\}$

$$e_k(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad \forall k \in \Delta_N$$

$$x = \sum_{k=1}^N x(k)e_k \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Definición 1.4 (Producto escalar). Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^N x(k)y(k)$$

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $(\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y)$
2. $(x|y) = (y|x)$
3. $(x|x) > 0$

Un espacio pre-hilbertiano es un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

1.2. Espacios normados

Definición 1.5 (Norma).

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Propiedades.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x\| > 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$
4. Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X$
5. $||x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$
6. $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot \|x_k\|$$

Un espacio normado es un espacio vectorial X dotado de una norma.

Ejemplo (Norma de la suma). $\|x\|_1 = \sum |x(k)|$

Ejemplo (Norma infinito). $\|x\|_\infty = \max\{|x(k)|/k \in \Delta_N\}$

1.3. Espacio métrico

Definición 1.6 (Distancia). $d(x, y) = \|y - x\|$; $\|x\| = d(0, x)$

1. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
4. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$
5. $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$
6. $d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^n d(x_{k-1}, x_k)$

Cuando tenemos definida una distancia $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, cumpliendo D1, D2 y D3, decimos que E es un espacio métrico. E no tiene que ser un espacio vectorial.

Todo espacio normado X se considera un espacio métrico con la distancia asociada a su norma:

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

Ejemplo (Distancia discreta).

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

2. Topología de un espacio métrico

2.1. Topología de un espacio métrico

Para lo que sigue sea E un espacio métrico con distancia d .

Definición 2.1. Bolas abiertas de centro x y radio r :

$$B(x, r) = \{y \in E / d(x, y) < r\} \quad x \in E, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

1. $B(x, r) \neq \emptyset$
2. $0 < s < r \implies B(x, s) \subset B(x, r)$
3. $\forall y \in B(x, r) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$
4. Se dice $U \subset E$ abierto si $\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(x, \varepsilon) \subset U$

Definición 2.2 (Topología). En un conjunto no vacío Ω es una familia $T \subset P(\Omega)$ que verifica:

$$(A1) \quad \emptyset, \Omega \in T$$

$$(A2) \quad S \subset T \implies \cup S \in T$$

$$(A3) \quad U, V \in T \implies U \cap V \in T$$

Un espacio topológico es un conjunto no vacío provisto de una topología.

Definición 2.3 (Normas equivalentes). Dos distancias/normas en un mismo conjunto/espacio vectorial son equivalentes cuando generan una misma topología.

Proposición 2.1 (Inclusion entre las topologías de dos normas). Para dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ definidas en un mismo espacio vectorial X , equivalen:

- (i) $\exists \rho > 0 \quad / \quad \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$
- (ii) $T_2 \subset T_1$

Corolario 2.1.1 (Criterio de equivalencia entre normas).

$$T_1 = T_2 \iff \exists \lambda, \rho > 0 \quad / \quad \lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Definición 2.4 (Topología inducida). Si T es la topología de un espacio métrico E y T_A la de un subconjunto $A \subset E$, entonces:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$$

En particular si $A \in T$, entonces:

$$V \in T_A \iff V \in T$$

2.2. Primeras nociones topológicas

En todo lo que sigue E espacio métrico, d distancia y T topología.

Definición 2.5 (Interior y entornos).

1. **Interior:**

$$A^\circ = \cup \{U \in T : U \subset A\}$$

Si $x \in A^\circ$ entonces decimos que x es **punto interior** de A o que A es entorno de x . Denotamos por $\mathcal{U}(x)$ a la **familia de entornos** de x .

2. A° es el máximo abierto de E contenido en A .

3. $x \in A^\circ \iff A \in \mathcal{U}(x) \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$

4. $A \in T \iff A = A^\circ \iff A \in \mathcal{U}(x) \quad \forall x \in A$

5. $A \in \mathcal{U}(x), \quad A \subset C \subset E \implies C \in \mathcal{U}(x)$

6. $\{A_i\}_{i=1..n} \subset \mathcal{U}(x) \implies \cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}(x)$

Definición 2.6 (Conjuntos cerrados). Decimos que C es un conjunto cerrado, o simplemente **cerrado** si $E \setminus C \in T$.

$$C_T = \{E \setminus U : U \in T\}$$

1. $\emptyset, E \in C_T$

2. $D \subset C_T \implies \cap D \in C_T$

3. $C, D \in C_T \implies C \cup D \in C_T$

Definición 2.7 (Cierre).

$$\overline{A} = \cap \{C \in C_T : A \subset C\}$$

1. \overline{A} es el mínimo conjunto cerrado que contiene a A .

2. $A \in C_T \iff A = \overline{A}$

3. $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ \quad \forall A \in E$

4. $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A} \quad \forall A \in E$

Definición 2.8 (Punto adherente a un conjunto). Sea $x \in A \implies$

$$x \in \overline{A} \iff U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \iff B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$$

Definición 2.9 (Bola cerrada). $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$

Definición 2.10 (Esfera). $S(x, r) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$

Definición 2.11 (Frontera). $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$

1. $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$

2. $Fr(A) \in C_T$
3. $Fr(A) = Fr(E \setminus A)$
4. $\bar{A} = A \cup Fr(A)$ y $A^o = A \setminus Fr(A)$
5. $A \in T \iff A \cap Fr(A) = \emptyset$
6. $A \in C_T \iff Fr(A) \subset A$
7. $E = A^o \cup Fr(A) \cup (E \setminus A)^o$ es una partición de E , es decir:

$$A^o \cap Fr(A) = Fr(A) \cap (E \setminus A)^o = A^o \cap (E \setminus A)^o = \emptyset$$

Definición 2.12 (Puntos de acumulación). Se dice de $x \in A$ si es punto adherente de $A \setminus \{x\}$

$$\begin{aligned} A' &= \overline{A \setminus \{x\}} = \{x \in E : \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in E : B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

Definición 2.13 (Puntos aislados).

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} \setminus A' &\iff \exists U \in \mathcal{U}(x) / U \cap A = \{x\} \iff \exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\} \\ \bar{A} &= A' \cup A \implies A \in C_T \iff A' \subset A \end{aligned}$$

2.3. Convergencia de sucesiones

En lo que sigue $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E y $x \in E$

$$\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies x_n \in U]$$

Proposición 2.2 (Caracterización de la convergencia usando distancias).

- En cualquier espacio métrico: $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies d(x_n, x) < \varepsilon]$
- En un espacio normado: $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies \|x_n - x\| < \varepsilon]$
- En \mathbb{R} : $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies |x_n - x| < \varepsilon]$
- $\{x\} \longrightarrow x \iff \{d(x_n, x)\} \longrightarrow 0$
- $\{x_n\} \longrightarrow x, \{x_n\} \longrightarrow y \implies x = y$

Por tanto a ese x al que tiende la sucesión, por ser único, lo llamamos límite.

Proposición 2.3 (Convergencia de parciales).

1. $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x$

$$2. \{x_n\} \longrightarrow x \iff \{x_{k+n}\} \longrightarrow x$$

$$3. \{x_n\} \longrightarrow x \iff \{x_{2n}\} \longrightarrow x \wedge \{x_{2n+1}\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.4 (Caracterización del cierre).

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subset A : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.5 (Caracterización de un conjunto cerrado).

$$A \in C_T \iff \forall x \in A \quad \exists \{x_n\} \subset A : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.6 (Criterio de equivalencia de dos distancias). *Equivalen:*

- (1) La topología generada por d_1 está incluida en la generada por d_2
- (2) Toda sucesión convergente para d_2 lo es para d_1 .

Proposición 2.7 (Convergencia en \mathbb{R}^N).

$$\{x_n\} \longrightarrow x \iff \{x_n(k)\} \longrightarrow x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$$

3. Continuidad y límite funcional

3.1. Continuidad

Definición 3.1. Se dice que una función $f : E \longrightarrow F$ es continua en un punto cuando:

$$V \in \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Proposición 3.1 (Caracterización). Para $f : E \longrightarrow F$, $x \in E$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- (i) f es continua en el punto x
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
- (iii) Sea $x_n \in E$, $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$

Proposición 3.2 (Caracter local).

$$f : E \longrightarrow F, \quad \emptyset \neq A \subset E, \quad x \in A$$

- f continua en $x \implies f|_A$ continua en x
- $f|_A$ continua en x , $A \in \mathcal{U}(x) \implies f$ continua en x

Definición 3.2. Se dice que f es continua en A , cuando es continua en todos los puntos de A . Si f es continua en todo E se dice simplemente que f es continua.

Proposición 3.3 (Caracterización). Para $f : E \longrightarrow F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f es continua
- (ii) La preimagen de todo abierto es abierta.
- (iii) La preimagen de todo cerrado es cerrada.
- (iv) Para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E , la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

Proposición 3.4 (Caracter local de la continuidad global).

- $A = A^\circ$

$$f \text{ continua en } A \iff f|_A \text{ continua}$$

- $E = U \cup V$ donde $U = U^\circ$, $V = V^\circ$

$$f \text{ continua} \iff f|_U \text{ y } f|_V \text{ continuas}$$

- $f \text{ continua} \iff \forall x \in E \exists U \in \mathcal{U}(x) : f|_U \text{ continua.}$

3.2. Límite funcional

Definición 3.3. $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene **límite** en el punto α cuando $\exists L \in F$ /

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad x \in A, 0 < d(x, \alpha) < \delta \implies d(f(x), L) < \varepsilon$$

Además el L es único y decimos que es el límite de f en α :

$$L = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$$

Proposición 3.5 (Caracterización). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $L = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$
- (ii) $\forall V \in \mathcal{U}(L) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) \quad / \quad f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V$
- (iii) $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}, \quad \{x_n\} \longrightarrow \alpha \implies \{f(x_n)\} \longrightarrow L$

Proposición 3.6 (Caracter local). $B = \{x \in A : 0 < d(x, \alpha) < r\}, \quad \alpha \in B' \implies$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha} f|_B(x) = L$$

Proposición 3.7 (Relación con la continuidad).

- Si $a \in A \setminus A' \implies f$ continua en a
- Si $a \in A \cap A' \implies f$ continua en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Si $\alpha \in A' \setminus A \implies f$ continua $\iff \exists g : A \cup \{\alpha\} \longrightarrow F$, continua en α con $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A \implies g$ es única y $g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$

3.3. Composición de funciones

Proposición 3.8 (Continuidad de la composición). Sean G, E, F espacios métricos. $\varphi : G \longrightarrow E$, $f : E \longrightarrow F$, $f \circ \varphi : G \longrightarrow F$

$$\varphi \text{ continua en } z \in G \quad \wedge \quad f \text{ continua en } x = \varphi(z) \implies f \circ \varphi \text{ continua en } z$$

$$\varphi, f \text{ continuas} \implies f \circ \varphi \text{ continua}$$

Proposición 3.9 (Cambio de variable para calcular un límite). $f : A \longrightarrow F$, $A \subset E$, $\varphi : T \longrightarrow E$, $T \subset G \quad z \in T', \alpha \in E$. Si se verifica:

$$\lim_{t \rightarrow z} \varphi(t) = \alpha \quad \wedge \quad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall t \in T \setminus \{z\} \implies$$

$$\alpha \in A' \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \implies \lim_{t \rightarrow z} f(\varphi(t)) = L$$

3.4. Ejemplos de funciones continuas

- f constante $\implies f$ continua
- $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$, $F^o = \emptyset$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$ continua $\implies f$ constante
- La función inclusión es continua
- La función identidad es continua
- La función distancia es continua
- La norma, la suma y el producto por escalares en un espacio normado son funciones continuas.

Definición 3.4 (Proyecciones y componentes). Sea $F = F_1 \times \dots \times F_M \neq \emptyset$

- Proyecciones coordenadas: $\pi_k : F \longrightarrow F_k$, $\pi_k(y) = y(k) \quad \forall y \in F, \quad k \in \Delta_M$
- Componentes de f : $f : E \longrightarrow F$, $f_k = \pi_k \circ f : E \longrightarrow F_k \quad \forall k \in \Delta_M$

Proposición 3.10 (Caracterización de la continuidad y límite funcional).

- Si $F = F_1 \times \dots \times F_M$ es un producto de espacios métricos $\implies \pi_k$ es continua $\forall k \in \Delta_M$
- $f : E \longrightarrow F \implies f$ continua en $x \in E \iff f_k$ continua en $x \quad \forall k \in \Delta_M$
- $f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$, $y \in F \implies$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = y \iff \lim_{x \rightarrow \alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

Definición 3.5. $\mathcal{F}(E, Y)$ conjunto de todas las funciones de E en Y , $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, Y espacio vectorial, $f, g \in \mathcal{F}(E, Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$

- Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto: $(\Lambda g)(x) = \Lambda(x)g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto por escalares: $(\lambda g)(x) = \lambda g(x) \quad \forall x \in E$

Si $f, g \in \mathcal{F}(E)$, $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$

- Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in E$

Así. $\mathcal{F}(E, Y)$ es un **espacio vectorial** y $\mathcal{F}(E)$ es un **anillo conmutativo** con unidad.

Proposición 3.11 (Preservación de la continuidad). En las condiciones de la definición anterior:

- (i) f, g, Λ continuas $x \implies f + g, \Lambda g$ continuas x
- (ii) f, g continuas x , $g(E) \subset \mathbb{R}^* \implies \frac{f}{g}$ continua en x

Definición 3.6 (Espacio de funciones continuas). $\mathcal{C}(E, Y)$ conjunto de todas las funciones continuas de E en Y .

$$\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$$

$\mathcal{C}(E, Y)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E, Y)$, $\mathcal{C}(E)$ subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E)$

Proposición 3.12 (Calculo de limites).

1. *El límite de la suma es la suma de los límites.*
2. *El límite del producto es el producto de los límites.*
3. *El límite del cociente es el cociente de los límites.*

Definición 3.7 (Campo escalar). $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Definición 3.8 (Campo vectorial). $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Merece la pena también destacar las funciones polinómicas y las racionales (cociente de polinomios donde el denominador no se anula) como funciones continuas. A continuación podemos ver las relaciones que tienen los distintos espacios:

$$\mathcal{P}(E, Y) \subset \mathcal{R}(E, Y) \subset \mathcal{C}(E, Y) \subset \mathcal{F}(E, Y)$$

4. Compacidad y conexión

4.1. Acotación

Definición 4.1 (Conjunto acotado). E espacio métrico. $A \subset E$. A está acotado cuando está incluido en una bola.

$$A \text{ acotado} \implies \forall x \in E \quad \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$$

Ejemplo. Todo subconjunto de E está acotado.

Ejemplo. Toda sucesión convergente está acotada.

La acotación no es una propiedad topológica.

$$\rho = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

La distancia d y la ρ son equivalentes, por lo que dan la misma topología; pero dan conjuntos acotados distintos.

Proposición 4.1. X espacio normado, $A \subset X$:

$$A \text{ acotado} \iff \exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in A$$

Dos normas equivalentes dan lugar a la misma topología.

Proposición 4.2. $X = X_1 \times \dots \times X_N$, $A \subset X$

$$A \text{ acotado} \iff \{x(k) : x \in A\} \text{ acotado} \quad \forall k \in \Delta_N$$

Teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada de vectores de \mathbb{R}^N admite una sucesión parcial convergente.*

4.2. Compacidad

Definición 4.2 (Espacio métrico compacto). E es compacto cuando toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente.

Proposición 4.4. E espacio métrico, $A \subset E$

$$A \text{ compacto} \implies A \text{ acotado} \quad \text{y} \quad \overline{A} = A$$

Proposición 4.5.

$$A \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto} \iff A \text{ acotado y } \overline{A} = A$$

Teorema 4.6 (Weierstrass). E, F espacios métricos, $f : E \rightarrow F$ continua.

$$E \text{ compacto} \implies f(E) \text{ compacto}$$

Proposición 4.7. E espacio métrico compacto, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces:

$$\exists u, v \in E : f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in E$$

Teorema 4.8 (Hausdorff).

(i) Todas las normas en \mathbb{R}^N son equivalentes.

(ii) Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.

4.3. Conexión

Definición 4.3 (Espacio métrico conexo). E es conexo cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos no vacíos disjuntos.

$$E = U \cup V \quad U = U^\circ \quad V = V^\circ \quad U \cap V = \emptyset \implies U = \emptyset \quad \vee \quad V = \emptyset$$

Proposición 4.9 (Caracterización). Sea E espacio métrico. Equivalen:

(i) E es conexo.

(ii) $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies f(E)$ intervalo

(iii) $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ continua $\implies f$ constante

Proposición 4.10.

$$A \subset \mathbb{R} \text{ conexo} \iff A \text{ intervalo}$$

Teorema 4.11 (del valor intermedio). E, F espacios métricos, $f : E \rightarrow F$ continua.

$$E \text{ conexo} \implies f(E) \text{ conexo}$$

Corolario 4.11.1. E espacio métrico compacto y conexo, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado.

Proposición 4.12. E es conexo $\iff \forall x, y \in E \quad \exists C \subset E$ conexo : $x, y \in C$

Definición 4.4 (Conjuntos convexos). Sea $E \subset X$, X espacio vectorial. E es convexo cuando:

$$x, y \in E \implies (1 - t)x + ty \in E \quad \forall t \in [0, 1]$$

Ejemplo. Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.

Ejemplo. Las bolas de un espacio normado son convexas, luego conexas.

Ejemplo. $C, D \subset E$ conexos, $C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D$ conexo

5. Complitud y continuidad uniforme

5.1. Complitud

Definición 5.1 (Sucesiones de Cauchy). E espacio métrico con distancia d . $\{x_n\} \subset E$ es una sucesión de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \implies d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

No es una propiedad topológica.

Definición 5.2 (Espacios completos). Un espacio métrico E es completo, o su distancia d es completa cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo. Espacio de Banach = espacio normado completo.

Ejemplo. Espacio de Hilbert = espacio pre-hilbertiano completo.

Proposición 5.1. *Dos normas equivalentes dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy. Toda norma equivalente a una completa es completa.*

Teorema 5.2 (Complitud de \mathbb{R}^N).

- (i) *Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.*
- (ii) *El espacio euclídeo N -dimensional es de Hilbert.*

Proposición 5.3 (Subespacios métricos completos). E espacio métrico, A subespacio métrico de E :

- A completo $\implies A = \overline{A}$ en E
- E completo, $A = \overline{A}$ en $E \implies A$ completo
- E completo \implies los subconjuntos completos de E son los cerrados
- $A \subset \mathbb{R}^N$ completo $\iff A = \overline{A}$ en \mathbb{R}^N

5.2. Continuidad uniforme

Definición 5.3 (Funciones uniformemente continuas). Sean E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ es uniformemente continua cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in E, d(x, y) > \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Proposición 5.4 (Caracterización).

- Si f uniformemente continua \implies

$$\{x_n\}, \{y_n\} \subset E, \{d(x_n, y_n)\} \longrightarrow 0 \implies \{d(f(x_n), f(y_n))\} \longrightarrow 0$$

- Si f no es uniformemente continua \implies existen $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E, \varepsilon > 0 :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 5.5 (Heine). Sean E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ continua.

$$E \text{ compacto} \implies f \text{ uniformemente continua}$$

Observación.

- No es una propiedad local
- No es una propiedad topológica.
- Se conserva en espacios normados con normas equivalentes.

Definición 5.4 (Funciones lipschitzianas). E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ es lipschitziana cuando $\exists M \geq 0 :$

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Se dice que f es lipschitziana con constante M . Toda función lipschitziana es uniformemente continua.

5.3. Teorema del punto fijo

Definición 5.5 (Constante de Lipschitz). E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ lipschitziana:

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}$$

Definición 5.6 (Funcion no expansiva).

$$f \text{ no expansiva} \iff M_0 \leq 1$$

Definición 5.7 (Funcion contractiva).

$$f \text{ contractiva} \iff f \text{ lipschitziana con } M < 1 \iff M_0 < 1$$

Teorema 5.6 (del punto fijo). Sea E un espacio métrico completo y $f : E \longrightarrow F$ contractiva $\implies f$ tiene un único punto fijo, $\exists! x \in E : f(x) = x$

5.4. Aplicaciones lineales

Definición 5.8 (Aplicaciones lineales). Una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ se dice lineal si cumple:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X$
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

Proposición 5.7. X, Y espacios normados, $T : X \longrightarrow Y$ lineal. Son equivalentes:

1. T continua.
2. $\exists M \geq 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$

Observación. Si T es continua en x_0 es continua en todo X .

Observación. T continua $\iff T$ uniformemente continua $\iff T$ lipschitziana.

Proposición 5.8. X espacio normado de dimensión finita, Y espacio normado. Por el teorema de Hausdorff:

$$T : X \longrightarrow Y \quad \text{lineal} \implies T \quad \text{continua}$$

Definición 5.9 (Espacio de aplicaciones lineales continuas). X, Y espacios normados. $L(X, Y)$ conjunto de todas las aplicaciones lineales continuas de X en Y . Es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X, Y)$

Definición 5.10 (Norma de una aplicación lineal continua). Sea $T \in L(X, Y)$ se define $\|T\| = M_0$, constante de Lipschitz.

6. Práctica 1. Continuidad

6.1. Teoremas relacionados

Teorema 6.1 (Carácter local de la continuidad). Sean E, F espacios topológicos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $x \in A$.

Si $f|_A$ es continua en x con $A \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow f$ es continua en x .

Teorema 6.2 (Cambio de variable). Sean E, F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $f : A \rightarrow F$ y $\alpha \in E$:

Si G es un espacio métrico con $T \subseteq G$ y $\varphi : T \rightarrow E$, $z \in T'$ que cumple:

$$\lim_{t \rightarrow z} \varphi(t) = \alpha \in E \quad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall t \in T \setminus \{z\}$$

Entonces, $\alpha \in A'$ y se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow z} f(\varphi(t)) = L$$

Procedemos por tanto a estudiar el siguiente problema:

Sea $A \subset E^m$ espacio métrico producto. Dada $f : A \rightarrow F^n$, buscamos saber si f es continua. Notemos que podemos expresar $f = (f_1, \dots, f_n)$, con $f_k = \pi_k \circ f$. Sabemos que f es continua si y solo si f_k es continua $\forall k \in \Delta_n$.

Por tanto, el problema se reduce a estudiar la continuidad de $f_k : E^m \rightarrow F$, y por norma general trabajaremos con $F = \mathbb{R}$.

6.2. Parte rutinaria del problema

- Definimos U y comprobamos que U sea abierto.
- Comprobamos que $f|_U$ sea continua.
- Aplicamos el carácter local de la continuidad y tenemos que f es continua en U .

A continuación se nos presentan distintos puntos problemáticos en los que queremos estudiar el límite. Nos fereiremos a un punto de estos como α . Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$$

Normalmente, se presentará una indeterminación. A continuación, la intuición nos dirá si debemos intentar probar que el límite no existe o intentar probar la existencia del límite.

Un camino algo más mecánico es comprobar, en este orden, los límites parciales, límites direccionales, intentar probar la existencia de límite y, por último, intentar probar que el límite no existe con un cambio de variable.

6.3. El límite no existe

Si creemos que el límite en α no existe, el procedimiento a seguir es el siguiente:

6.3.1. Límites parciales

Si e_k es el k -ésimo vector de la base usual. Sea $t \in \mathbb{R} \mid x \rightarrow \alpha$ si $t \rightarrow 0$ con $x \neq \alpha$ si $t \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + te_k) = L$$

En el caso $n = 2$, si $\alpha = (a, b)$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow (a,b)} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = \lim_{x \rightarrow b} f(a, x) = L$$

- Si uno de los límites parciales no existe, podemos afirmar (*).
- Si existen los dos límites parciales y no son iguales, podemos afirmar (*).
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L , por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L , podemos afirmar (*).

$$(*) \quad \nexists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$$

6.3.2. Límites direccionales

$$S = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$$

Sea $u \in S$. Entonces, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + tu) = L \quad \forall u \in S$$

El cálculo lo haremos con un u genérico que cumpla estas premisas, de forma que:

- Si uno de los límites direccionales no existe, podemos afirmar (*).
- Si el límite direccional depende de u , podemos afirmar (*) al saber que si cambiamos u obtenemos distintos valores del límite.
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L , por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L , podemos afirmar (*).

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites direccionales.

Límites radiales

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\alpha + tu) = L \quad \forall u \in S$$

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites radiales.

Caso $n = 2$:

Coordenadas polares

Sea $u = (u_1, u_2) \in S$. Entonces, tenemos que $\exists_1 \theta \in]-\pi, \pi]$ tal que $u = (\cos \theta, \sin \theta)$. Si $\alpha = (a, b)$, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\alpha + tu) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) = L \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Coordenadas cartesianas

Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En vez de normalizar con $\|u\| = 1$, tomamos:

$$u_1 = 1 \text{ y } u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + tu) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a + t, b + \lambda t) \stackrel{t=x-a}{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x, b + \lambda(x-a))$$

Esta última equivalencia es útil para $a = b = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(a + t, b + \lambda t) = L \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

6.4. Existencia del límite

La única forma de probar que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}$ es acotando f :

Necesitamos hallar $r \in \mathbb{R}^+$ y $g : B(\alpha, r) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

$$0 \leq |f(x) - L| \leq g(x) \quad \forall x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$$

De tal forma que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

Entonces, por el lema del Sándwich, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$$

El estudio fracasado de los límites direccionales puede ayudarnos a la hora de determinar de forma más fácil una acotación:

6.4.1. Acotación por límites direccionales

Si el estudio de los límites direccionales fracasó fue porque:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha + tu) - L = 0 \quad \forall u \in S$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leq |f(\alpha + tu) - L| \leq h(t) \quad \forall u \in S \quad \forall t \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$$

En el caso $n = 2$:

6.4.2. Acotación por uso de coordenadas polares

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas polares fracasó fue porque:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) - L = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\rho \rightarrow 0} h(\rho) = 0$, de forma que:

$$0 \leq |f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) - L| \leq h(\rho) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall \rho \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$$

6.4.3. Acotación por uso de coordenadas cartesianas

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas cartesianas fracasó fue porque:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t, b + \lambda t) - L = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leq |f(a + t, b + \lambda t) - L| \leq h(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall t \in]-r, r[\setminus \{0\}$$

Tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$$

6.5. Último recurso

Si no pudimos encontrar ninguna acotación de f , deberemos intuir que el límite no existe. Para probar esto, tenemos que idear un cambio de variable nuevo:

Si $L \in \mathbb{R}$ es el único posible límite de f en α , podemos probar con un cambio de variable $x = \varphi(t)$ con $0 < t < r$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \alpha \quad \text{y} \quad \varphi(t) \neq \alpha \quad \forall t \in]0, r[$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t)) = L$$

Luego buscamos φ de forma que $f \circ \varphi$ no tenga límite en 0.

Por ejemplo, en el caso $n = 2$ con $\alpha = (a, b)$, podemos hacer el cambio de variable:

$$\varphi_p(t) = (a + t, b + t^p) \quad p \in \mathbb{R}^+$$

De forma que calculamos el límite con un $p \in \mathbb{R}^+$ cualquiera y luego fijamos un valor de p para el cual el límite no exista.

Otro recurso que podemos usar es que si $n = 2$ y nuestra función f es un cociente entre dos términos que contienen x e y de forma que el exponente de y es siempre el doble de x , podemos usar el cambio de variable:

$$\varphi_2(t) = (a + t, b + t^2)$$

6.6. Límites famosos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} &= \frac{1}{2} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t} &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1 + t)}{t} &= 1 \end{aligned}$$

6.6.1. Cambiar forma de la función

Dada una función a la que le queremos calcular un límite, es recurrente que nos sepamos a qué tiende parte del límite ya que nos es conocido y querramos descomponer la función en dos partes, una de la que conocemos su límite y otra que será más sencillo de calcular. La pregunta es cómo podemos hacer esto formalmente y sin fallos. Para ello, pondremos el ejemplo de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

De tal forma que queremos calcular el límite en el punto $(0, 0)$. Para ello, uno podría pensar que podemos hacer:

$$f(x, y) = \frac{\sin y}{y} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Pero debemos tener cuidado, ya que nuestro dominio es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y al cambiar la expresión de f estamos dividiendo por cero al considerar cualquier punto del estilo $(a, 0)$ con $a \neq 0$ en nuestro dominio. Para solucionar este problema, resolveremos el ejercicio de la siguiente forma:

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

$$\varphi(y) = \frac{\sin y}{y} \quad \forall y \neq 0 \quad \varphi(0) = 1$$

Notemos que φ es continua en todo \mathbb{R} , al ser $\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(y) = 1 = \varphi(0)$.

De esta forma, hemos conseguido una función que nos permite hacer lo siguiente:

$$\sin y = y\varphi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \varphi(y) \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

De esta forma, podemos estudiar f en dos partes:

Por una lado, sabemos que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(y) = \varphi(0) = 1$$

Y por otro, tenemos que podemos acotar fácilmente la función, haciendo que el otro trozo converja a cero:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y|$$

Con $\lim_{y \rightarrow 0} y = 0$. Luego:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Por lo que, finalmente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(y) \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$