

# Topología I

## Examen V

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

## Examen V

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2021-22.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas<sup>1</sup>.

**Grupo** Único.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 19 de enero de 2021.

**Duración** 3 horas.

---

<sup>1</sup>El examen lo pone el departamento.

**Ejercicio 1.** Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sea  $R_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha\}$ . Se considera la topología  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}^2$  con base  $\mathcal{B} = \{R_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

1. (0.25 puntos) Estudiar si  $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_u$  y si  $\mathcal{T}_u \leq \mathcal{T}$ , donde  $\mathcal{T}_u$  es la topología usual en  $\mathbb{R}^2$ .
2. (0.25 puntos) ¿Es  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  un espacio de Hausdorff?
3. (0.5 puntos) Calcular el cierre, el interior y la frontera de los ejes coordenados.
4. (0.25 puntos) ¿Es cierto que todo conjunto acotado en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  tiene interior vacío?
5. (0.5 puntos) Identificar la topología inducida por  $\mathcal{T}$  sobre cada  $R_\alpha$  y sobre  $L = \{0\} \times \mathbb{R}$ .
6. (0.75 puntos) Construir explícitamente un homeomorfismo  $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ , donde  $\mathcal{T}'$  es la topología en  $\mathbb{R}^2$  con base  $\mathcal{B}' = \{R'_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  (en este caso,  $R'_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha\}$ ).
7. Probar que  $A \subset \mathbb{R}^2$  es conexo en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  si y solo si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $A \subset R_\alpha$ . Determinar las componentes conexas de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ .
8. Demostrar que  $A$  es compacto en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  si y solo si existe  $J \subset \mathbb{R}$  finito tal que  $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} R_\alpha$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Teoría.

1. Definir la topología final asociada a la aplicación  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  entre espacios topológicos, y la noción de identificación entre espacios topológicos.
2. Probar que si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una identificación, entonces existe una relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  en  $X$  tal que el espacio cociente  $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$  es homeomorfo a  $(Y, \mathcal{T}')$ .

**Ejercicio 3** (3 puntos). Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

1. ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto? ¿Y si el espacio es metrizable?
2. Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  la recta de Sorgenfrey. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_S \times \mathcal{T}_S) &\longrightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_S \times \mathcal{T}_S) \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y^3) \end{aligned}$$

Analizar si  $f$  es continua, abierta o cerrada.

3. Una aplicación  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  entre espacios topológicos se dice que es *propia* si para cada  $C'$  compacto en  $(Y, \mathcal{T}')$ , verifica que  $f^{-1}(C')$  es compacto en  $(X, \mathcal{T})$ . Probar que si  $f$  es propia,  $(X, \mathcal{T})$  es de Hausdorff e  $Y$  es compacto, entonces  $f$  es continua.