Probabilidad
Examen VII

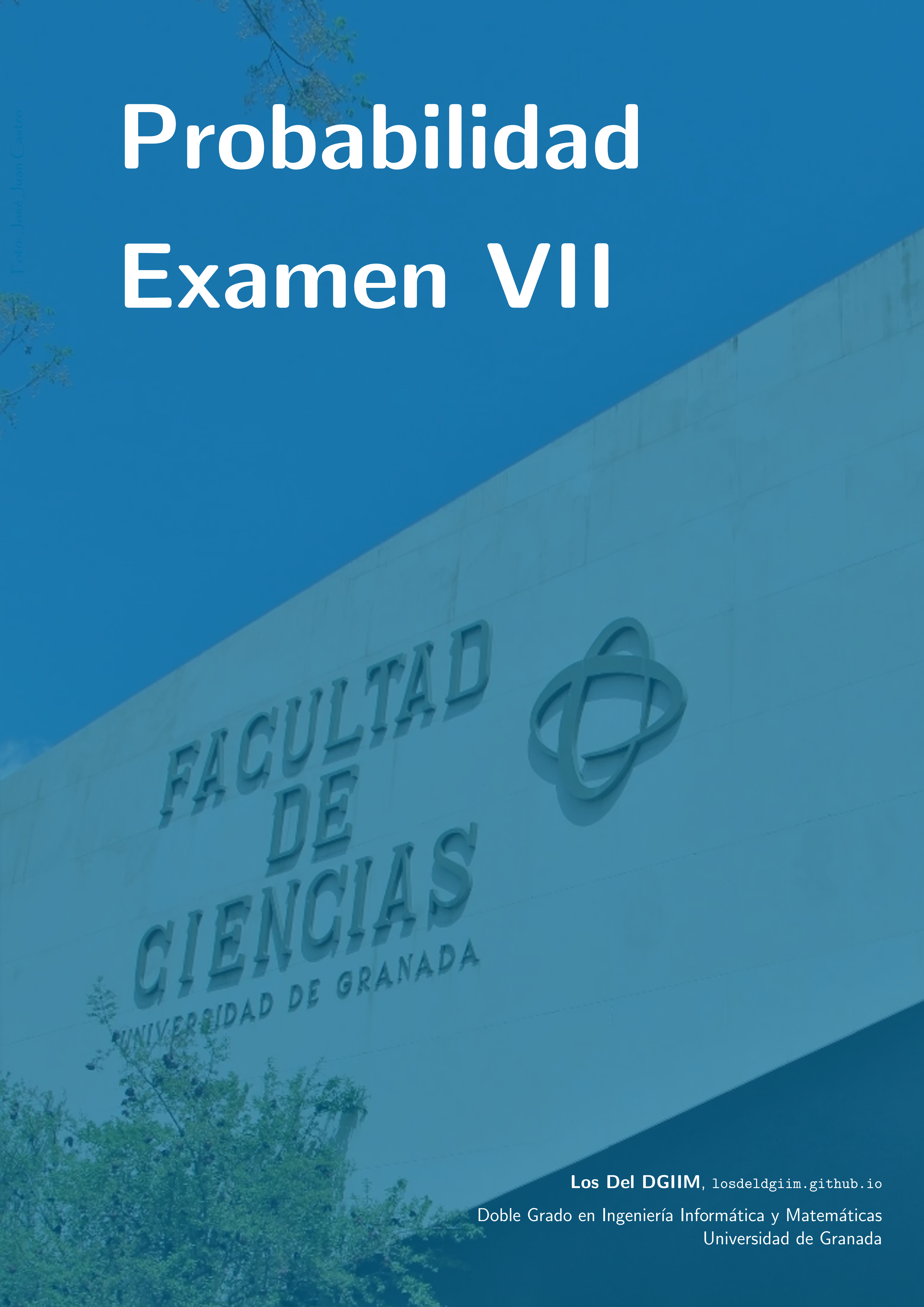


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 15 de febrero de 2022.

Ejercicio 1. Sean X_1, X_2, ..., X_n variables aleatorias continuas e independientes, tales que $\exists E[X_i]$ $\forall i = 1, \ldots, n$, con momento no centrado de orden dos finito. Justificar que:

1. **(0.5 puntos)** $\exists \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{Var}(X_i)$ $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
2. **(0.5 puntos)** $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

Ambos apartados se encuentran demostrados en el Tema correspondiente a independencia de variables aleatorias.

Ejercicio 2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recito

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \quad x, y \geqslant 0\}$$

Observación. Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \operatorname{sen}(t)$.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

   Observación. Se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.25 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.

   Calculamos en primer lugar la función de densidad conjunta. Esta es constante en C, por lo que:

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & x^2 + y^2 < 1, x, y \geqslant 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

   Hay dos opciones:

   Integrando de la forma usual: Es necesario que:

$$1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} k\, dy\, dx = k \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

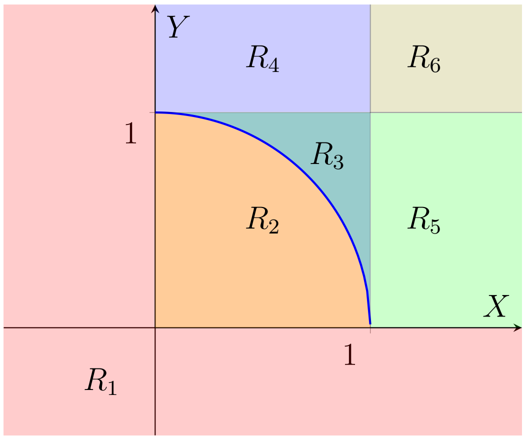
   Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, tenemos que:

$$1 = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)\, dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt =$$
$$= k \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k \left[\frac{\pi}{4}\right] \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

Razonando la forma de C: Sabemos que C es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x,y) = k\int_C 1 = k\cdot\lambda(C) = k\cdot\frac{\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

Para calcular la función de distribución conjunta, dividimos el plano cartesiano en las distintas regiones:



Distinguimos casos:

- Si $x \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \leqslant 0$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

- Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]0,\sqrt{1-x^2}\right[$ (zona R_2):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \int_0^x \frac{4}{\pi}y\,du = \\ &= \frac{4}{\pi}\left[yu\right]_0^x = \frac{4}{\pi}\cdot xy\end{aligned}$$

- Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]\sqrt{1-x^2},1\right[$ (zona R_3):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right]
\end{aligned}$$

Veamos cuánto vale anteriormente $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))$ para cierto $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x))\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{2\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2}}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \\
&\qquad - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}. = \\
&= \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})
\end{aligned}$$

- Si $x \in]0,1[$ y $y \geqslant 1$ (zona R_4):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\
&= \int_0^x \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

Para resolver la integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4}\right] = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

- Si $y \in]0,1[\quad$ y $\quad x \geqslant 1$ (zona R_5):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du =$$
$$= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du =$$
$$= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du$$

Para resolver la segunda integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{4}{\pi} y\,[u]_0^{\sqrt{1-y^2}} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$
$$= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$
$$= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} =$$
$$= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi/2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{4} - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right] =$$
$$= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi} y\sqrt{1-y^2} =$$
$$= \frac{2}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})$$

- Si $x, y \geqslant 1$ (zona R_6):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in R_1, \\ {}^4/_\pi xy, & (x,y) \in R_2, \\ {}^2/_\pi \left[y\sqrt{1-y^2} + x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})\right], & (x,y) \in R_3 \\ {}^2/_\pi \left[\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y) \in R_4, \\ {}^2/_\pi \left[y\sqrt{1-y^2} + {}^\pi/_2 - \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})\right], & (x,y) \in R_5, \\ 1, & (x,y) \in R_6. \end{cases}$$

2. **(1.25 puntos)** Calcular las funciones de densidad condicionadas.

   Para ello, calculamos en primer lugar las funciones de densidad marginales. Para $x \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}\,dy = \frac{4}{\pi}\,[y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Para $y \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\,[x]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}.$$

Una vez calculadas estas, calculamos las funciones de densidad condicionadas. Dado $x^* \in [0,1]$, tenemos para $y \in [0, \sqrt{1-(x^*)^2}]$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(x^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^*)^2}}.$$

Dado $y^* \in [0,1]$, tenemos para $x \in [0, \sqrt{1-(y^*)^2}]$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(y^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^*)^2}}.$$

Ejercicio 3. Sea considera (X,Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $Z = (X+Y, X-Y)$.

   Como cuadrado unidad, entendemos $C = [0,1]\times[0,1]$. La función de densidad conjunta es constante en C, por lo que:

   $$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y)\in C, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que $f_{(X,Y)}$ sea una función de densidad, tenemos que:

   $$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_0^1\int_0^1 k\,dx\,dy = k\int_0^1 [x]_0^1\,dy = k\int_0^1 1\,dy = k\,[y]_0^1 = k. \end{aligned}$$

2. **(1.25 puntos)** La función de densidad de proabbilidad conjunta del máximo y el mínimo.

Ejercicio 4. Dado un vector aleatorio con función generatriz de momentos

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \left(\frac{e^{t_1}}{2} + \frac{e^{t_2}}{4} + \frac{1}{4}\right)^5 \qquad t_1,t_2\in\mathbb{R}$$

Calcular la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables X_1 y X_2.

Ejercicio 5. Dado el vector bidimensional (X, Y) con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

$X \mid Y$	0	1	2
1	$1/4$	0	0
2	0	$1/4$	0
3	$1/4$	0	$1/4$

1. **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X, así como calcular una medida de la bondad del ajuste.

2. **(1.25 puntos)** Obtener las ecuaciones de la rectas de regresión de $Y|X$ y $X|Y$ y el error cuadrático medio.