Modelos Matemáticos I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos Matemáticos I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

0. Introducción

1. ¿Qué modelos vamos a estudiar?
   - ¿Cómo se "usan" los modelos?
   - ¿Modelos discretos o continuos?
2. Ejemplos de modelos que vamos a estudiar
   a) Dinámica de poblaciones:
      - Modelo de Malthus.
      - Modelo logístico.
      - Modelo de Leslie.

   b) Modelos aplicados a la economía.
      - Interés compuesto.
      - Ley de la oferta y la demanda (Modelo de la telaraña).
      - Modelo de la renta de Samelson.

   c) Modelo de Malthus (discreto y continuo). Ejemplo motivador de la asignatura.
      - ¿Es el modelo "bueno"?
      - Mejoras del modelo → Modelo logístico.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de interés compuesto. Supongamos que el capital inicial es de 1000€, y el interés anual del 3 %. ¿Cuánto dinero tenemos pasados 5 años?

$$1000 \cdot 1{,}03^5 = 1159{,}27€$$

Suponiendo que el capital inicial es c_0, el número de años viene dado por n, y el interés viene dado por I, tenemos que:

$$c_n = c_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n$$

También se puede plantear como una Ley de Recurrencia (también llamada ecuación en diferencias). Es decir:

$$c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{I}{100}\right)$$

Ejemplo. Supongamos que estamos estudiando una población de bacterias. Supongamos que la tasa de bacterias que han muerto cada vez que se ve la muestra es de $m = 75\,\%$. Además, supongamos que la tasa de nacimiento es del $f = 150\,\%$. Notando la población de las bacterias por p_n, tenemos que:

$$p_{n+1} = p_n + 1{,}5p_n - 0{,}75p_n = 1{,}75p_n$$

Esto es una ecuación en diferencias, y es un ejemplo del *Modelo de Malthus*. De forma análoga al ejemplo anterior, tenemos que:

$$p_n = 1{,}75^n \cdot p_0$$

Como $1{,}75 > 1$, tenemos que la población crece de forma ilimitada, diverge.

En estos ejemplos hemos introducido lo que era una ecuación en diferencias. Definámoslo:

Definición 0.1 (Ecuación en diferencias)**.** Una ecuación en diferencias (también llamada Ley de Recurrencia) es una relación que se establece entre los términos de una sucesión $\{x_n\}$ de forma que podemos calcular el término x_{n+1} en función de algunos de los anteriores términos mediante una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

A dicha función f se le denomina función asociada a la Ley de Recurrencia.

Notemos que, si queremos dar una sucesión que cumpla la ecuación en diferencias dada, será tan simple como dar un término $x_0 \in \mathbb{R}$ y obligar a que dicha sucesión cumpla la ecuación en diferencias.

Por tanto, resolver una ecuación en diferencias no consistirá en dar una sucesión que cumpla la relación especificada, sino dar una expresión explícita del término x_n, para cualquier sucesión que satisfaga la ecuación.

Definición 0.2 (Orden de una ecuación en diferencias)**.** Dada una ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

Diremos que la ecuación es de orden $k \in \mathbb{N}$.

Por tanto, una ecuación de orden 1 será del estilo:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Una ecuación de orden 2 será del estilo:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación en diferencias dada por $x_{n+2} + x_{n+1} - 3 = 0$. Aunque parezca que se trata de una ecuación de orden 2, en realidad es de orden 1, ya que se puede expresar como $x_{n+1} + x_n - 3 = 0$.

0.1. Modelo de Malthus

Sea t el tiempo, y sea $P(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t. Sea f la tasa de fertilidad y m la tasa de mortalidad ($0 \leqslant m \leqslant 1$). Tras contar la población pasado un tiempo Δt, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(t+\Delta t) &= \text{La que había} + \text{Nace} - \text{Muere} = \\ &= P(t) + \Delta t \cdot f \cdot P(t) - \Delta t \cdot m \cdot P(t) = \\ &= P(t)\left(\Delta t \cdot (f-m) + 1\right) \end{aligned}$$

Modelo discreto. Denominando $p_{n+1} = P(t+\Delta t)$, $p_n = P(t)$, tenemos que:

$$p_{n+1} = p_n \cdot (\Delta t \cdot (f-m) + 1)$$

Esta es la ecuación en diferencias. Su solución es una *sucesión*.

También se puede expresar como:

$$p_n = p_0 \left(1 + \Delta t(f-m)\right)^n$$

Notemos que, debido a que los parámetros se mantienen constantes, será muy común también expresar este modelo como:

$$x_{n+1} = r x_n \qquad r \in \mathbb{R}^+$$

Con $r = \Delta t \cdot (f-m) + 1$

- Si $f > m$, tenemos que la población crece.
- Si $f < m$, la base de la potencia es menor que 1 y decrece.

El modelo obliga a la población a reproducirse indefinidamente o a extinguirse, por lo que no es un buen modelo.

Si nos preguntamos por una solución constante (si nos preguntamos qué pasa si p_n es constante), tendríamos que o bien, $f = m$, o bien $p_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Modelo continuo. La tasa de crecimiento es:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} &= P'(t) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (f-m)P(t) = (f-m)P(t) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$P'(t) = (f-m)P(t)$$

Esta es la ecuación diferencial. Su solución es una *función*.

Suponiendo que $P(t)$ es siempre positiva o igual a 0[1]:

[1]No tiene sentido considerar poblaciones con un número negativo de individuos.

- Si $f > m$, el producto es positivo y la derivada también $\Rightarrow$ la función crece.
- Si $f < m$, el producto es negativo y la derivada también $\Rightarrow$ la función decrece.

De ahora en adelante, apenas consideraremos modelos continuos, y nos centraremos en modelos discretos. Los modelos continuos serán objeto de estudio en la asignatura de Modelos Matemáticos II.

0.1.1. Bondad del Modelo de Malthus

Estudiamos ahora si el Modelo de Malthus es “bueno”. Algunas desventajas son:

- Las tasas de fertilidad y mortalidad constantes no son realistas (al menos para tiempos largos ni para poblaciones grandes de seres vivos).
- En el modelo discreto, como hemos visto, la población o crece ilimitadamente o se extingue. No admite comportamientos intermedios.

Una ventaja de este es lo sencillo que es de calcular en el caso discreto. En otros modelos, podemos encontrar ecuaciones en diferencias que no seamos capaces de resolver.

0.1.2. Solución del Modelo de Malthus

Veamos en qué consiste resolver una ecuación en diferencias:

Definición 0.3. Una sucesión $\{x_n\}$ es una solución de la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ si satisface la ecuación. Es decir, si cada término se obtiene del anterior haciendo su imagen por f.

La solución del Modelo de Malthus es:

$$p_n = p_0 \cdot (\Delta t \cdot (f - m) + 1)^n = r^n p_0$$

0.1.3. Vida Media

Para el Modelo de Malthus en los casos en los que la población decrece (es decir, en $r \in]0, 1[$), se define la vida media de la siguiente forma:

Definición 0.4 (Vida media en ley de desintegración)**.** El tiempo de vida media es el tiempo medio estimado que debe pasar para que una sustancia se desintegre.

La vida media se define formalmente de la siguiente forma, en el caso de que la sucesión $\sum_{n\geqslant 0} n(x_{n-1} - x_n)$ converja:

$$VM := \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n)$$

Veamos cómo calcularla de forma concreta en el caso del Modelo de Malthus:

$$x_{n+1} = rx_n \qquad 0 < r < 1$$

Demostremos que se calcula de la siguiente forma:

$$VM := \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n) = \frac{1}{1-r}$$

Demostración. Partimos de la definición de la vida media:

$$\begin{aligned} VM &= \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n) = \\ &= \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1}x_0 - r^n x_0) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1} - r^n) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(1-r) = \\ &= (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \overset{(*)}{=} \frac{1-r}{(1-r)^2} = \frac{1}{1-r} \end{aligned}$$

donde en $(*)$, hemos usado el Lema 0.1, demostrado a continuación. □

Lema 0.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Demostración. Sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = r^0 + r^1 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Derivando respeto de r, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{i-1} = 1 + 2r + \cdots + nr^{n-1} = \frac{-(n+1)r^n(1-r) + (1-r^{n+1})}{(1-r)^2}$$

Como $|r| < 1$, tomando límite con $n \to \infty$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

□

0.2. Modelo Logístico

El presente modelo mejorará el modelo de Malthus. Para concretar los fallos de este último modelo, hemos de incluir las siguientes definiciones (sea $\{p_n\}$ una sucesión de números reales que nos indica el tamaño de población en el $n-$ésimo instante):

Definición 0.5 (Tasa de crecimiento)**.** Se define la tasa de crecimiento de una población como:

$$TC := \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

Nos informa de si la población crece o decrece (mayor o menor que 1).

Definición 0.6 (Tasa neta de crecimiento)**.** Se define la tasa neta de crecimiento de una población como:

$$TNC := \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = TC - 1$$

Nos informa de cuánto crece la población.

En el caso del Modelo de Malthus notado de la forma:

$$p_{n+1} = r \cdot p_n \qquad \text{con } r = 1 + \Delta t(f - m)$$

se tendría que:

$$TC = r \qquad TCN = r - 1$$

Ejemplo. Supongamos un modelo de Malthus dado por:

$$p_{n+1} = 1{,}25 p_n$$

Tenemos que:

$$TC = 1{,}25 \qquad TCN = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$$

La tasa de crecimiento neto nos dice que la población aumenta en el 25 %.

El fallo del modelo de Malthus es tener una tasa de crecimiento constante. El modelo logístico resuelve esto. Cambiamos la tasa de crecimiento por una recta de la forma:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = a - b \cdot p_n, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Esto se acerca más a un comportamiento real, ya que conforme la población aumenta, se tiene que:

- La tasa de mortalidad m tiende a crecer.
- La tasa de fertilidad f tiende a decrecer.

Y, conforme la población decrece, se tiene lo contrario, es decir:

- La tasa de mortalidad m tiende a decrecer.

- La tasa de fertilidad f tiende a crecer.

Por tanto, sabiendo la TC, el modelo logístico viene dado por:

$$p_{n+1} = p_n(a - b \cdot p_n) \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Observación. ¿Pueden a, b tomar cualquier valor no negativo garantizando que se tenga $p_n \geqslant 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, suponiendo que $p_0 \geqslant 0$?

No, veámoslo. Para que $p_n \geqslant 0$, necesitamos que:

$$a - b \cdot p_n \geqslant 0 \Longleftrightarrow a \geqslant b \cdot p_n \Longleftrightarrow p_n \leqslant \frac{a}{b} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La función asociada a la ecuación logística es la parábola:

$$f(x) = x(a - bx)$$

Y, por lo visto anteriormente, necesitamos que la función sea de la siguiente forma:

$$f : \left[0, \frac{a}{b}\right] \to \left[0, \frac{a}{b}\right]$$

Al valor a/b se le denomina *población tope.*

Este modelo no es lineal, como bien podemos ver, ya que su función asociada es una parábola.

0.2.1. Solución del Modelo Logístico

Al contrario de lo que ocurría con Malthus, no podemos buscar una solución a este modelo de forma tan fácil. Veámoslo:

$$x_0 \Rightarrow x_1 = x_0(a - bx_0) \Rightarrow x_2 = x_1(a - bx_1) = x_0(a - bx_0)(a - bx_0(a - bx_0)) \Rightarrow x_3 = ...$$

Como vemos, no es fácil encontrar la sucesión de las soluciones. Esto es un caso concreto de un problema de valores iniciales, que trataremos en la próxima sección.

0.3. Soluciones de un modelo.

Como hemos visto, solucionar una ecuación en diferencias no tiene por qué ser fácil. Se trata de un problema de valores iniciales (PVI).

Definición 0.7 (PVI)**.** Un problema de valores iniciales es buscar las soluciones de una ley de recurrencia dado x_0 fijado.

$$x_1 = f(x_0) \quad \dots \quad x_{n+1} = f^n(x_0)$$

Por norma general, resolverlo no es fácil sin el uso de ordenadores, ya que para valores altos de n requiere gran cantidad de cómputos.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de PVI particular. Sea la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = \log(x_n)$$

En este caso, se resuelve de forma sencilla, ya que $x_1 = 0$ y ya no se puede continuar, ya que no pertenece al dominio de definición del logaritmo.

Observación. Veamos si podemos encontrar $I \subset \mathbb{R}$ tal que si tomamos $x_0 \in I$ la sucesión dada por la Ley de Recurrencia $x_{n+1} = \log(x_n)$ tenga infinitos términos.

La ecuación en diferencias siempre viene asociada a una funciónf f dada por:

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Basta que $f(I) \subseteq I$ para poder sacar una sucesión que resuelva el PVI.

Definición 0.8 (Órbita o trayectoria)**.** Se define la órbita o trayectoria de la solución que empieza en x_0 como:

$$\{x_0, f(x_0), (f \circ f)(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

Esta es la sucesión de todos los términos de la solución de un modelo.

Definición 0.9 (Retrato de fases)**.** El retrato de fases es la representación gráfica de la órbita.

Ejemplo. Resolver el modelo de Malthus dado por:

$$x_{n+1} = 2x_n$$

Dado x_0, la solución tiene término general $x_n = 2^n x_0$.

$$\text{órbita}_{x_0} = \{x_0, 2x_0, 2^2x_0, \dots, 2^nx_0, \dots\}$$

Su retrato de fases sería el siguiente:

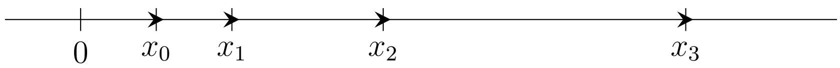


Figura 1: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = 2x_n$.

La función f asociada sería:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

La ecuación tiene sentido para cualquier dato de $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tratamos el modelo de Malthus en poblaciones (por ejemplo), no tiene sentido considerar todo $\mathbb{R}$.

Definición 0.10 (Soluciones constantes)**.** Una solución constante, también llamado punto de equilibrio, es una órbita que es una sucesión constante $x_c = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$ que cumplen la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ y que tienen todos sus términos iguales:

$$x_c = \{c, c, \dots, c, \dots\}$$

Es decir; se trata de encontrar $c \in I$ tal que $c = f(c)$. Determinamos entonces las soluciones constantes encontrando los puntos fijos de f.

Ejemplo. Si el modelo fuera $x_{n+1} = 0 \cdot x_n$, la órbita sería:

$$\{0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

Se trata de una solución constante, con retrato de fases:

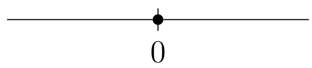


Figura 2: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = 0 \cdot x_n$.

Centrémonos ahora en hallar las soluciones constantes de los modelos vistos hasta el momento. Trabajemos con el modelo de **Malthus** dado por:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n$$

Las soluciones constantes son:

- Si $r \neq 1$: Entonces $x_c = 0$, $c = 0$.
- Si $r = 1$: $x_{x_0} = \{x_0, x_0, \dots, x_0, \dots\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Para el modelo **logístico** dado por:

$$p_{n+1} = p_n(a - b \cdot p_n) \qquad 0 \leqslant p_0 \leqslant \frac{a}{b}$$

Las soluciones constantes son:

$$x_0 = \{0, 0, \dots, \}$$

$$x_{\frac{a-1}{b}} = \left\{ \frac{a-1}{b}, \frac{a-1}{b}, \dots \right\}$$

Veamos cómo las hemos obtenido. La f asociada es: $f(x) = x(a - bx)$, por lo que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación $c = c(a - bc)$.

- $c = 0$
- $c = \dfrac{a-1}{b}$

Definición 0.11 (Ciclos)**.** Un n-ciclo es una solución de la ecuación que cumple que $x_n = x_0$, es decir:

$$f^n(x_0) = x_0$$

Por tanto, los puntos fijos de f^n son los $n-$ciclos. La órbita de un n-ciclo es de la forma:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

Para que los ciclos sean no triviales, sus elementos no deben ser puntos fijos de f^m, con $m < n$.

Ejemplo. Sea el modelo dado por:

$$x_{n+1} = -x_n$$

La f asociada es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = -x$. Su órbita es:

$$\text{Órbita}_{x_0} = \{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots\}$$

Se trata de un 2-ciclo. El retrato de fases sería el siguiente:

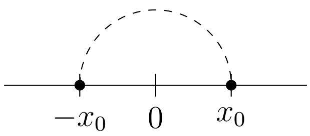
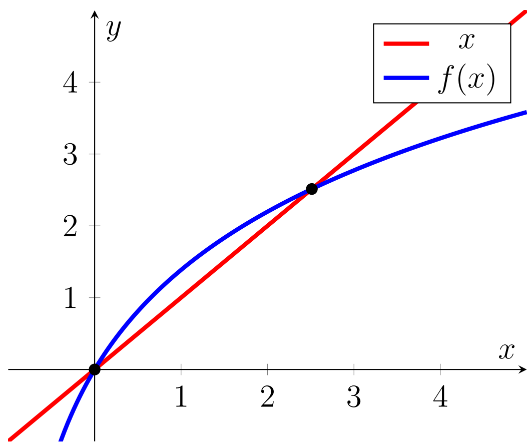


Figura 3: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = -x_n$.

Veamos ahora qué ocurre en el caso de que no se pueda calcular de forma explícita la solución constante del modelo.



Como bien podemos observar, las soluciones constantes serán los puntos de corte entre las gráficas $y = x$ y la función asociada al modelo f. El trabajo con gráficas será muy común en esta asignatura para entender resultados intuitivos.

1. Ecuaciones en diferencias de orden 1

En este tema, vamos a estudiar funciones de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

- Si f es una recta, $f(x) = ax + b$, la ecuación se dice que es lineal.
- Si f no es una recta, $x_{n+1} = f(x_n)$. No es una ecuación lineal. Se dice que no es lineal.

Algunos ejemplos de modelos que veremos son:

- Modelo de la oferta y demanda (o Modelo de la Telaraña).
- Modelo logístico.

1.1. Ecuación lineal de orden 1

Una ecuación lineal general de orden 1 es una ecuación con forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b_n$$

Con $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ (Aunque se podrían considerar $a, b \in \mathbb{C}$, en esta asignatura por norma general no lo consideraremos). Esta se denomina ecuación lineal completa.

A $x_{n+1} = ax_n$ se le llama la parte **homogénea** de la ecuación. Por tanto, una ecuación lineal homogénea será de la forma:

$$x_{n+1} = ax_n$$

Definición 1.1 (Ecuación autónoma)**.** Una ecuación autónoma es una ecuación donde la dependencia del tiempo está vista a lo largo de la solución. Son del tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Notemos que no todas las ecuaciones han de ser autónomas. Una ecuación no autónoma sería de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

Con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Por tanto, la ecuación lineal general de orden 1 es una ecuación no autónoma, ya que el término independiente b_n es una sucesión que depende del valor de n.

1.1.1. Ecuación lineal de orden 1 autónoma

En esta sección estudiaremos las ecuaciones lineales de orden 1 autónomas; es decir, el caso en el que $b_n = b \ \forall n \in \mathbb{N}$. Su ecuación por tanto toma la siguiente forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Vamos a estudiar dos formas de resolverla.

Primera forma

Iterando y buscando una expresión general para x_n. Dado x_0, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\
x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
&\vdots \\
x_n &= a^n x_0 + a^{n-1}b + \ldots + b = a^n x_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k
\end{aligned}$$

donde el valor de x_n lo hemos obtenido de forma intuitiva. Demostrémoslo mediante inducción:

Demostración. Vamos a probar que la expresión general para la ecuación anterior es:

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1}b + \ldots + b$$

Por inducción:

- Caso base $n = 1$:

  Para $n = 1$, tenemos efectivamente $x_1 = ax_0 + b$.

- Supuesto para n, demostramos para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + b \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} a\left(a^n x_0 + a^{n-1}b + \ldots + b\right) + b = \\
&= a^{n+1}x_0 + a^n b + \cdots + ab + b
\end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos aplicado la hipótesis de inducción.

$\square$

Por tanto, hemos demostrado que en el PVI $x_{n+1} = ax_n + b$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
x_n &= a^n x_0 + a^{n-1}b + \ldots + b = \\
&= a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a + 1) = \\
&= a^n x_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k \overset{(*)}{=} a^n x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado el resultado de dicha suma de una serie geométrica. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales (PVI) descrito es:

$$x_n = a^n x_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Segunda forma

Si $b = 0$, sabríamos resolver la ecuación, ya que sería $x_{n+1} = ax_n$ y sus soluciones sabemos que son de la forma $x_n = a^n x_0$. Por tanto, en este caso tratamos de buscar un cambio de variable para obtener una ecuación de ese tipo, que sí sabemos resolver. Buscamos un cambio de variable de la forma $y_n = x_n - k$ $(k \in \mathbb{C})$ tal que y_n sea solución de la ecuación $y_{n+1} = ay_n$. Calculemos el valor de k:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - k = ax_n + b - k \overset{(*)}{=} ay_n + ak + b - k$$

donde en $(*)$ he usado que $x_n = y_n + k$. Como buscamos que $y_{n+1} = ay_n$, el valor de k viene dado por la ecuación:

$$ak + b - k = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{b}{1 - a}$$

Por tanto, consideramos el cambio $y_n = x_n - \dfrac{b}{1 - a}$, y tenemos que $y_{n+1} = ay_n$. La solución a dicha ecuación es conocida:

$$y_n = y_0 \cdot a^n$$

Sabiendo esto, encontramos la solución del PVI:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + k = y_n + \frac{b}{1 - a} = y_0 \cdot a^n + \frac{b}{1 - a} = \\ &= \left(x_0 - \frac{b}{1 - a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1 - a} = \\ &= a^n x_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} \end{aligned}$$

Como no podía ser de otra forma, hemos llegado a la misma solución que en el caso anterior.

Observación. Notamos ahora que el k encontrado es precisamente la solución constante de la ecuación $x_{n+1} = ax_n + b$.

$$c = ac + b \Longleftrightarrow c = \frac{b}{1 - a} = x_c$$

Observación. Notemos que, siguiendo ambos métodos para resolver, llegamos a un problema para $a = 1$, ya que estaríamos dividiendo entre 0. Pensamos ahora cómo solventar este problema.

En este caso, simplemente, se nos queda una ecuación del estilo:

$$x_{n+1} = x_n + b$$

Su solución podemos pensar fácilmente que es la siguiente:

$$x_n = x_0 + n \cdot b$$

Notemos que la ecuación no tiene soluciones constantes, salvo que $b = 0$.

Por tanto, a modo de resumen, las soluciones de una ecuación lineal de primer orden autónoma son:

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 1: & x_n = \left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) a^n + \dfrac{b}{1-a} \\ \\ \text{Si } a = 1: & x_n = x_0 + n \cdot b \end{cases}$$

Comportamiento de las soluciones a largo plazo

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones a largo plazo, también llamado comportamiento asintótico del modelo. Esto es cuando $n \to \infty$. Distinguimos en función del valor de a:

- $|a| \neq 1$:
  - $|a| < 1$:
    $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$
  - $|a| > 1$:
    - $x_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$:
      $$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$
      En este caso, como $|a| > 1$, tenemos que no converge.
    - $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$:
      $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \lim_{n\to\infty} 0 + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$
- $|a| = 1$:
  - $a = 1$:
    - Si $b \neq 0$:
      Entonces, $x_n = x_0 + b \cdot n$
      $$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_0 + b \cdot n| = \infty$$
    - Si $b = 0$: Todas las soluciones son constantes.
  - $a = -1$:
    $$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right) (-1)^n + \frac{b}{2}$$
    - $x_0 = \dfrac{b}{2}$:
      Tenemos que $x_n = \dfrac{b}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es una solución constante.

- $x_0 \neq \dfrac{b}{2}$:
  Distinguimos el caso de los n pares o impares:
  $$x_{2n} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^{2n} + \frac{b}{2} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = x_0$$
  $$x_{2n+1} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^{2n+1} + \frac{b}{2} = -\left(x_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = b - x_0$$
  En este caso, tenemos que no converge en el infinito, y se trata de un $2-$ciclo.

- $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\},\ |a| = 1$:
  Como bien mencionamos, en esta asignatura solo consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$. Se deja al lector el ejercicio de pensar qué ocurriría en este caso.

Ejercicio. Estudia el comportamiento asintótico de:

1. $x_{n+1} = 2x_n + 5$
   En este caso, las soluciones son:
   $$x_n = (x_0 + 5)\, a^n - 5$$
   Como $|a| > 1$, tenemos que no converge asintóticamente.
2. $2x_{n+1} = x_n + 6$
   Tenemos que $x_{n+1} = {}^1\!/_2 x_n + 3$. Por tanto, como $|a| < 1$, converge a $\dfrac{3}{{}^1\!/_2} = 6$.

1.1.2. Ecuación lineal de orden 1 no autónoma

$$x_{n+1} = ax_n + b_n$$

Es la ecuación lineal no autónoma, donde b_n es una sucesión. La función asociada es $f(x, n) = ax + b_n$, de forma que:
$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

Vamos a estudiar las formas de resolver la ecuación.

Conociendo una solución particular

Si conocemos $\overline{x_n}$ una solución particular de la ecuación, entonces aplicamos el cambio de variable
$$y_n = x_n - \overline{x_n}$$

De esta forma, nos queda que:
$$y_{n+1} = x_{n+1} - \overline{x_{n+1}} = ax_n + b_n - \overline{x_{n+1}} = ax_n - a\overline{x_n} = ay_n$$

Por tanto, como dicha ecuación sí sabemos resolverla, tenemos que:
$$x_n = y_n + \overline{x_n} = y_0 a^n + \overline{x_n} = (x_0 - \overline{x_0})\, a^n - \overline{x_n}$$

Veamos ahora algunos ejemplos de resolución de ecuaciones lineales de orden 1 no autónomas:

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?

   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:

   $$c = \frac{c}{2} + n \Longrightarrow \frac{c}{2} = n \Longrightarrow c = 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Como c no puede ser igual a todos los naturales pares al mismo tiempo, tenemos que no hay soluciones constantes.

2. Determina $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha n + \beta$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

   $$\begin{aligned}\overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + n \Longrightarrow \alpha(n+1) + \beta = \frac{\alpha n + \beta}{2} + n \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 2\alpha n + 2\alpha + 2\beta = \alpha n + \beta + 2n \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \alpha n + 2\alpha + \beta = 2n\end{aligned}$$

   Tomando $n = 1, 2$, tenemos el siguiente sistema:

   $$\left\{\begin{array}{ll} 3\alpha + \beta & = 2 \\ 4\alpha + \beta & = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow -\alpha = -2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -4 \end{array}\right.$$

   Por tanto, $\overline{x_n} = 2n - 4$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.

   Tenemos que:

   $$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_n}{2} + n - [2(n+1) - 4] = \frac{x_n}{2} - n + 2 = \frac{x_n}{2} - (n-2) = \\ &= \frac{x_n}{2} - \frac{2n-4}{2} = \frac{x_n - \overline{x_n}}{2} = \frac{y_n}{2} \end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:

   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0}) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0 + 4}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.

   Tenemos que:

   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0 + 4}{2^n} + 2n - 4$$

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?

   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:

   $$c = \frac{c}{2} + 2^n \Longrightarrow \frac{c}{2} = 2^n \Longrightarrow c = 2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Como c no puede ser igual a distintos números al mismo tiempo, tenemos que la ecuación en diferencias no presenta soluciones constantes.

2. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha 2^n$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

   $$\begin{aligned}\overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + 2^n &\Longrightarrow \alpha 2^{n+1} = \alpha 2^{n-1} + 2^n \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow \alpha(2^{n+1} - 2^{n-1}) = 2^n \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{2^n}{2^{n+1} - 2^{n-1}} \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2 - 1/2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   Por tanto, $\overline{x_n} = \frac{2}{3} \cdot 2^n$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.

   $$\begin{aligned}y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{2}{3}2^{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2^n - \frac{2}{3}2^{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2^n\left(1 - \frac{4}{3}\right) =\\ &= \frac{1}{2}x_n - \frac{2^n}{3} = \frac{1}{2}x_n - \frac{2 \cdot 2^n}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}(x_n - \overline{x_n}) = \frac{1}{2}y_n\end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:

   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0})\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0 - \frac{2}{3}}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.

   Tenemos que:

   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0 - \frac{2}{3}}{2^n} + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{2^n}\left(x_0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2^{n+1}}{3}$$

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2^n}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?
   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:
   $$c = \frac{c}{2} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \frac{c}{2} = \frac{1}{2^n} \Longrightarrow c = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   Como c no puede ser igual a distintos números al mismo tiempo, tenemos que la ecuación en diferencias no presenta soluciones constantes.

2. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha n \cdot \frac{1}{2^n}$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:
   $$\overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \alpha(n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\alpha n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow \alpha(n+1) = \alpha n + 2 \Longrightarrow \alpha = 2$$
   Por tanto, $\overline{x_n} = 2n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.
   $$y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n}\left(1 - (n-1)\right) =$$
   $$= \frac{1}{2}x_n - \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}x_n - \frac{n}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2}(x_n - \overline{x_n}) = \frac{1}{2}y_n$$
   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:
   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0})\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.
   Tenemos que:
   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0}{2^n} + \frac{n}{2^{n-1}}$$

1.2. Modelo de la oferta y la demanda (o Modelo de la Telaraña)

Suponemos que la oferta y la demanda son funciones que dependen del precio. Las notamos por:

- Sea $D(p)$ la demanda en función del precio p.
- Sea $O(p)$ la oferta en función del precio p.

En función del precio p, es lógico pensar que la demanda debe ser decreciente y la oferta creciente. Esto se debe a que, conforme el precio aumenta, los clientes tendrán menor interés por comprar el producto; mientras que las empresas querrán venderlo más. Para simplificar, supondremos que son rectas:

$$\begin{aligned} D(p) &= a - bp \qquad && a, b \in \mathbb{R}^+ \\ O(p) &= c + dp \qquad && d \in \mathbb{R}^+, \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A b y a d se les llama **marginal de demanda** y **marginal de la oferta**, respectivamente. En los siguientes casos, tratamos de buscar un precio de equilibrio del mercado.

1.2.1. Sistema estático

En este caso, suponemos que $D(p) = O(p)$. Este es un caso ideal, ya que toda la demanda es cubierta por la oferta. Se busca el precio de equilibrio, que es el que permite que se dé este caso, y es el que se mantendrá constante para que la demanda se siga cubriendo.

$$D(p) = O(p) \Longleftrightarrow a - bp = c + dp \Longleftrightarrow p_{equilibrio} = \frac{a-c}{b+d}$$

Para que esto tenga sentido (obtengamos un precio de equilibrio positivo), necesitamos que $a > c$.

1.2.2. Sistema dinámico

En este caso el precio va cambiando, por lo que se considera una sucesión p_n, que representa el precio en el periodo n. Se supone que para la oferta se considera con el precio del periodo p_{n-1} y la demanda con p_n. Es decir, se intenta prever la demanda que va a haber en función de la oferta que había en el periodo anterior.

$$O(p_{n-1}) = D(p_n) \Longleftrightarrow c + dp_{n-1} = a - bp_n \Longleftrightarrow p_n = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} \cdot p_{n-1}$$

Esta es una ecuación lineal de orden 1 autónoma, por ser el término independiente una constante. La solución constante del modelo, denominada precio de equilibro y notada por p_e es $p_e = \dfrac{a-c}{b+d}$, veámoslo:

$$p_e = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_e \Longleftrightarrow bp_e = a - c - dp_e \Longleftrightarrow p_e = \frac{a-c}{b+d}$$

Por tanto, la solución de dicha ecuación es:

$$p_n = (p_0 - p_e)\left(\frac{-d}{b}\right)^n + p_e$$

Precio a largo plazo

- $0 < \dfrac{d}{b} < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left[(p_0 - p_e)\left(\frac{-d}{b}\right)^n + p_e\right] = p_e$$

Entonces, el precio tiende al precio de equilibrio, y lo hace oscilando (ya que tenemos un negativo elevado a n, a veces se le suma un precio o se le resta, aunque finalmente tiende a 0). Esto ocurre cuando la marginal de la oferta, d es menor que la marginal de la demanda, b. Esto es, cuando la oferta crece más lenta que la demanda.

- $1 < \frac{d}{b}$:

  Entonces, la ecuación deja de tener sentido, porque toma valores negativos.

$$\lim_{n\to\infty} |p_n| = \infty$$

- $b = d$:

  Entonces, $p_n = (p_0 - p_e)(-1)^n + p_e$. Como hemos visto anteriormente, se trata de un $2-$ciclo.

Veamos ahora por qué se conoce como modelo de la telaraña. Supuesto $d < b$, hemos visto que el precio converge al precio de equilibrio. Veamos gráficamente qué implica esto:

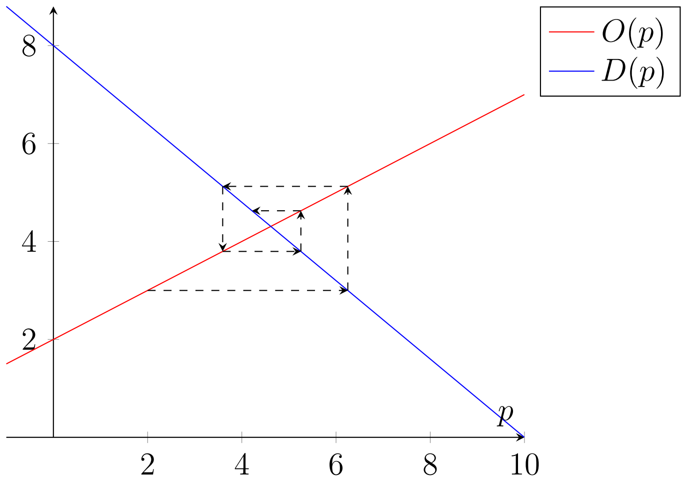


Figura 1.1: Representación del modelo de la Telaraña.

Como podemos ver, el precio va convergiendo a al precio de equilibro en forma de telaraña, de ahí el nombre.

1.3. Ecuación no lineal de orden 1

En esta sección, estudiaremos buscar soluciones para ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x_n & \longmapsto & f(x_n) = x_{n+1} \end{array}$$

con I un intervalo de $\mathbb{R}$ y con f no lineal. Es decir, no es de la forma: $f(x) = ax + b$. Recordamos que en la introducción vimos un modelo en esta familia, el modelo logístico, introducido en la Sección 0.2 y desarrollado en la Sección 1.4.

$$p_{n+1} = p_n(a - bp_n)$$

En general, no podemos encontrar una solución de forma general. En estos casos, debemos ver cómo se comportan las soluciones en torno a las soluciones que conocemos de forma sencilla. Recordamos que hay dos tipos de soluciones que suelen ser más fáciles de encontrar, que son:

- Las soluciones constantes: $x_c \equiv c = \{c, c, \dots\}$ es solución si c es un punto fijo de f.
- Los ciclos: x_0 genera un $n-$ciclo si x_0 es un punto fijo de $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n}$. Luego: $x_n = f^n(x_0) = x_0$.

1.3.1. Puntos de equilibrio

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{x_n} \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x} \end{array}$$

Tenemos que el sistema es siempre un $2-$ciclo, para cualquier valor de $x_0 \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{x_0} \\ x_2 &= \frac{4}{x_1} = \frac{4}{\frac{4}{x_0}} = x_0 \end{aligned}$$

Por tanto, x_n es el $2-$ciclo $\{x_0, {}^4/_{x_0}, \dots\}$. En el caso particular de que $x_0 = 2$, el $2-$ciclo es el ciclo trivial $x \equiv 2 = \{2, 2, \dots\}$; es decir, es una solución constante.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 \text{ dada} \end{cases}$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0^2 \\ x_2 &= x_1^2 = x_0^4 \\ x_3 &= x_2^2 = x_0^8 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que el término general es (hágase la inducción):

$$x_n = x_0^{(2^n)}$$

Las soluciones constantes tenemos que son:

$$x \equiv 0 \qquad x \equiv 1$$

Usando conocimientos de límites, tenemos que:

- Si $|x_0| < 1$:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{(2^n)} = 0$$
- Si $|x_0| > 1$:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{(2^n)} = \infty$$

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n} \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{x_0} \\ x_2 &= \sqrt{x_1} = \sqrt[4]{x_0} \\ x_3 &= \sqrt{x_2} = \sqrt[8]{x_0} \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que el término general es (hágase la inducción):

$$x_n = \sqrt[2^n]{x_0} = x_0^{\frac{1}{2^n}}$$

Las soluciones constantes tenemos que son:

$$x \equiv 0 \qquad x \equiv 1$$

Usando conocimientos de límites, para $x_0 \neq 0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

En el caso de $x_0 = 0$, ya hemos visto anteriormente que es una solución constante.

El caso anterior se podría haber probado sin necesidad de obtener el término general, como se puede ver en el siguiente ejemplo, más bien teórico.

Ejemplo (Genérico)**.** Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_1^*, +\infty[& \longrightarrow &]x_1^*, +\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Con f continua, estrictamente creciente y con dos puntos fijos: x_1^* y x_2^*, con $x_1^* < x_2^*$. Además, sabemos que:

- Si $x \in]x_1^*, x_2^*[$, se tiene que $x < f(x)$.
- Si $x \in]x_2^*, +\infty[$, se tiene que $f(x) < x$.

Estudiar cómo se comporta la ecuación en diferencias cuando $n \to \infty$.

Demostración. Distinguimos en función del valor inicial x_0.

- Supongamos $x_1^* < x_0 < x_2^*$:

  Como $x_1^* < x_0 < x_2^*$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_1^* = f(x_1^*) \leqslant f(x_0) = x_1 \leqslant f(x_2^*) = x_2^*$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_1^* < x_n < x_2^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un mayorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente: $x_n < x_{n+1}$. Como $x_n \in]x_1^*, x_2^*[$, se tiene que $x_n < f(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(x) = x$, tenemos que el límite x es un punto fijo de f. Como la sucesión es creciente, tenemos que $x = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

- Supongamos $x_2^* < x_0$:

  Como $x_2^* < x_0$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_2^* = f(x_2^*) \leqslant f(x_0) = x_1$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_2^* < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un minorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente: $x_n > x_{n+1}$. Como $x_n \in]x_2^*, +\infty[$, se tiene que $x_n > f(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(x) = x$, tenemos que el límite x es un punto fijo de f. Como un punto fijo suyo es x_2^* y ya es un minorante, tenemos que $x = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Por tanto, hemos demostrado que $\{x_n\} \to x_2^*$. □

Veamos ahora qué ocurre si no hay dos puntos fijos, sino que tan solo hay uno.

Ejercicio. Fijado $a \in \mathbb{R}^+$, sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \\ x_0 \geqslant -a \end{array}\right.$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccl} f: & [-a, \infty[& \longrightarrow & [0, \infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+a} \end{array}$$

Veamos los primeros términos de la sucesión:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{x_0 + a} \\ x_2 &= \sqrt{x_1 + a} = \sqrt{\sqrt{x_0 + a} + a} \\ x_3 &= \sqrt{x_2 + a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0 + a} + a} + a} \end{aligned}$$

Por tanto, no es fácil encontrar un término general de la sucesión. Busquemos cuántos puntos fijos tiene:

$$x = \sqrt{x+a} \Longleftrightarrow x^2 = x + a \Longleftrightarrow x^2 - x - a = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

Consideremos $x_1^* = \dfrac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$. Tenemos que:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < 0 \Longleftrightarrow 1 < \sqrt{1+4a} \Longleftrightarrow 1 < 1 + 4a \Longleftrightarrow 0 < a$$

Por tanto, tenemos que x_1^* no es una solución. Es decir, tan solo hay una solución constante, $x_2^* = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Para ver su comportamiento en el infinito, distinguimos en función del valor inicial x_0.

- Supongamos $-a \leqslant x_0 < x_2^*$:

  Como $-a \leqslant x_0 < x_2^*$ y f es creciente, tenemos que:

  $$0 = f(-a) \leqslant f(x_0) = x_1 \leqslant f(x_2^*) = x_2^*$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $0 < x_n < x_2^*$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, x_2^* es un mayorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente: $x_n < x_n < x_{n+1}$. Se tiene que:

  $$x_n < x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \Longleftrightarrow x_n^2 < x_n + a \Longleftrightarrow x_n^2 - x_n - a < 0$$

Como $a > 0$, sabemos que esto se da si $x_n < x_2^*$, que es el caso, por lo que es cierto.

Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(L) = L$, tenemos que el límite L es un punto fijo de f. Como la sucesión es creciente, tenemos que $L = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

- Supongamos $x_2^* < x_0$:

  Como $x_2^* < x_0$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_2^* = f(x_2^*) \leqslant f(x_0) = x_1$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_2^* < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un minorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente: $x_n > x_{n+1}$. Tenemos que:

  $$x_n > x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \Longleftrightarrow x_n^2 - x_n - a > 0$$

  Como en este caso $x_n \geqslant x_2^*$, es fácil ver que se tiene.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(L) = L$, tenemos que el límite L es un punto fijo de f. Como un punto fijo suyo es x_2^* y ya es un minorante, tenemos que $L = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Por tanto, hemos demostrado que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = e^{-x_n} \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

Tratamos de buscar alguna solución constante. Para ello, buscamos el punto de intersección de las gráficas de las funciones $y = x$ e $y = e^{-x}$.

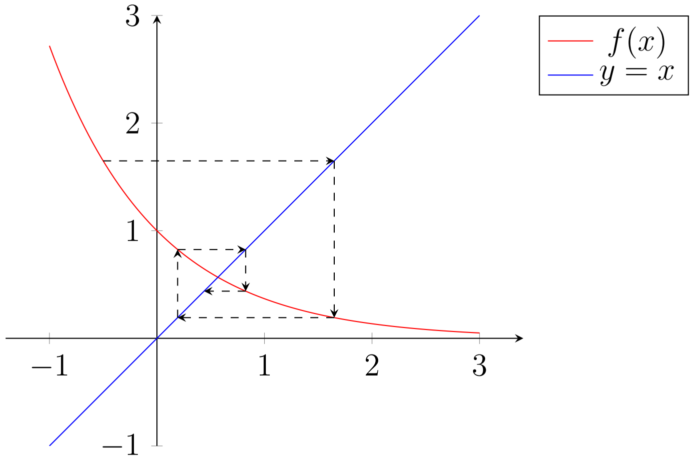


Figura 1.2: Intersección de f con $y = x$.

Como podemos ver de forma intuitiva, tenemos que convergerá al punto fijo, el cual no el posible calcular ya que la ecuación $x = e^{-x}$ es trascendente. Suponiendo que x_{n+1} fuese convergente a L, tendríamos que:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

donde he empleado que f es continua. Por tanto, L es un punto fijo, por lo que ya tendríamos el valor del límite. Es decir, en el caso de que converja sabemos el límite.

La convergencia de dicha Ley de Recurrencia no es fácil de probar, y por el momento no sabemos hacerlo de forma formal. Como no es monótona (hemos visto que oscila), no podemos aplicar que es monótona y acotada. Veamos si podemos sacar un término general:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-x_0} \\ x_2 &= e^{-x_1} = e^{(-e^{x_0})} \\ x_3 &= e^{-x_2} = e^{-(e^{(-e^{x_0})})} \end{aligned}$$

Tampoco es fácil encontrar un término general. Como hemos mencionado, de forma formal no sabemos demostrar que, efectivamente, converge.

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente decreciente y continua. Si $\{x_n\}$ es una ecuación en diferencias de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, entonces:

- $\{x_n\}$ tiende al equilibrio.
- $\{x_n\}$ es un $2-$ciclo.
- $\{x_n\}$ diverge.

En todos los casos lo hace de forma oscilatoria.

Demostración. Veamos en primer lugar que f tiene, al menos, un punto fijo. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, y consideramos $f(x_0) \neq x_0$, ya que en dicho caso estaría demostrado.

Supongamos $f(x_0) > x_0$ (el caso contrario es análogo), y consideremos $x_1 := f(x_0)$. Como f es estrictamente decreciente, tenemos que:

$$x_0 < f(x_0) = x_1 \Longrightarrow x_1 = f(x_0) > f(x_1)$$

Por tanto, se tiene $f(x_0) > x_0$, $f(x_1) < x_1$ por el Teorema de los Ceros de Bolzano aplicado a la función $g = f - Id_{\mathbb{R}}$, $\exists c \in]x_0, x_1[$ tal que $f(c) = c$.

Veamos ahora la unicidad del punto fijo. Supongamos que existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$, tal que $f(c_1) = c_1$ y $f(c_2) = c_2$. Entonces, como f es estrictamente decreciente, tenemos que $f(c_1) > f(c_2)$. Por tanto:

$$c_1 = f(c_1) > f(c_2) = c_2$$

que es una contradicción ya que $c_1 < c_2$. Por tanto, f tiene un único punto fijo, $x^* \in \mathbb{R}$.

Demostramos ahora que f^{2n} es estrictamente creciente y f^{2n-1} es estrictamente decreciente para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

- Para $n = 1$:

  Tenemos que $f^{2n-1} = f$ es estrictamente decreciente, y $f^{2)} = f^{2n}$ es estrictamente creciente, ya que para $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$:

  $$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b) \Longrightarrow f^{2)}(a) < f^{2)}(b)$$

- Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

  Sea $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces, como f^{2n-1} es estrictamente decreciente, tenemos:

  $$a < b \Longrightarrow f^{2n-1}(a) > f^{2n-1}(b) \Longrightarrow f^{2n}(a) < f^{2n}(b)$$

  y por tanto concluimos que $f^{2n-1+1)} = f^{2n}$ es estrictamente creciente. De forma análoga se comprueba la otra parte.

Sabiendo eso, y sabiendo que $x_n = f^{n)}(x_0)$, veamos que oscila alrededor de x^*:

- Si $x_0 < x^*$, tenemos que $f^{2n}(x_0) < x^* < f^{2n+1}(x_0)$, y por tanto:

  $$x_{2n} < x^* < x_{2n+1}$$

- Si $x_0 > x^*$, tenemos que $f^{2n+1}(x_0) < x^* < f^{2n}(x_0)$, y por tanto:

  $$x_{2n+1} < x^* < x_{2n}$$

Por tanto, en todo caso oscila. Estudiemos ahora el comportamiento asintótico. Suponemos que $x_2 \neq x_0$, ya que en dicho caso tendríamos un $2-$ciclo (o una solución constante si $x_1 = x_2 = x_0 = x^*$). Por tanto, tenemos que:

- Si $x_0 < x_2$:

  Tenemos que $x_1 = f(x_0) > f(x_2) = x_3$ y $x_2 = f^{2)}(x_0) < f^{2)}(x_2) = x_4$. Por inducción probamos que $\{x_{2n+1}\}$ es estrictamente decreciente y $\{x_{2n}\}$ es estrictamente creciente.

- Si $x_0 > x_2$:

  Tenemos que $x_1 = f(x_0) < f(x_2) = x_3$ y $x_2 = f^{2)}(x_0) > f^{2)}(x_2) = x_4$. Por inducción probamos que $\{x_{2n+1}\}$ es estrictamente creciente y $\{x_{2n}\}$ es estrictamente decreciente.

En cualquier caso, ambas sucesiones son monótonas. Distinguimos ahora en función de si $\{x_{2n}\}$ está acotada o no:

- Si $\{x_{2n}\}$ está acotada, por ser monótona tenemos que es convergente. Notemos su límite por $x_{par} = \lim\{x_{2n}\}$. Además, por ser estrictamente monótona tenemos que x_{2n} está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser la sucesión de los impares también monótona, tenemos que estará mayorada y minorada (dependiendo del caso) por $f(x_{par})$; es decir, estará acotada también, por lo que converge. Notémoslo por $x_{impar} = \lim\{x_{2n+1}\}$.

  Como f es continua, tenemos que:

  $$x_{impar} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_{2n}\right) = f(x_{par})$$

  donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Tenemos entonces dos posibilidades:

  1. $x_{impar} = x_{par}$. En este caso, tenemos que $f(x_{par}) = x_{par}$, por lo que se trata de un punto fijo. La solución tiende al equilibrio, x^*.
  2. $x_{impar} \neq x_{par}$. La solución tiende a un $2-$ciclo. Como hemos visto, el equilibrio queda entre los dos valores del $2-$ciclo.

- Si $\{x_{2n}\}$ no está acotada, entonces $\lim |x_{2n}| = \infty$, y por ende también se tiene que $\lim |x_{2n+1}| = \infty$, es decir, tampoco está acotada. Por tanto, la solución diverge oscilando.

$\square$

Hasta el momento, todas las recurrencias que hemos planteado tenían un punto fijo, una solución constante. Veamos que esto no tiene por qué ser así.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 1 + e^{x_n} \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

Nos preguntamos si tiene equilibrio (es decir, puntos fijos). Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + e^x \end{array}$$

Para ello, buscamos el punto de corte de la función f con $y = x$:

$$x = 1 + e^x$$

Esta es una ecuación trascendental, que no podemos resolver. Para estudiar la existencia de soluciones, buscamos aplicar el Teorema de Bolzano. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1+e^x-x \end{array}$$

Y tratamos de buscar un $x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0$. Se tiene que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que estudiamos la monotonía derivando.

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Luego la función g tiene un candidato a extremo relativo en $x = 0$. Como $g''(x) = e^x > 0$, tenemos que tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

$$g(0) = 1 \Longrightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la función f no tiene puntos fijos, por lo que nuestra recurrencia no tiene soluciones constantes.

El siguiente teorema nos hablará sobre la existencia o no de los puntos de equilibrio.

Teorema 1.1. *Sea $f : [a,b] \to f([a,b])$ y continua, tal que $[a,b] \subseteq f([a,b])$ y:*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces tiene al menos un equilibrio (una solución constante).

Demostración. Sea la función definida por:

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-x \end{array}$$

Como g es diferencia de funciones continuas, es continua; por lo que la imagen de un compacto y conexo es un compacto conexo. En particular, la imagen de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado; es decir, se tiene que $f([a,b]) = [c,d]$, con $c, d \in \mathbb{R},\ c < d$. Entonces, se deduce que:

$$c \leqslant f(x) \leqslant d \quad \forall x \in [a,b]$$

Consideramos ahora $t, s \in [a,b]$ tal que $f(t) = c,\ f(s) = d$. Como $[a,b] \subset f([a,b])$, se deduce que $c \leqslant a \leqslant t, s \leqslant b \leqslant d$. Por tanto:

$$g(t) = f(t) - t = c - t \leqslant 0$$
$$g(s) = f(s) - s = d - s \geqslant 0$$

Luego, por el Teorema de Bolzano, $\exists x \in [t,s]$ tal que $g(x) = 0$, y por tanto se deduce que $f(x) = x$, quedando así demostrada la existencia. □

1.3.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Notación. En lo que sigue, consideramos una función f dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Sea además una Ley de Recurrencia dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Por último, sea $x_c = \{c, c, \dots\}$ una solución constante, también llamada punto de equilibrio.

La siguiente definición trata sobre la estabilidad de un modelo, concepto de gran utilidad para saber qué ocurre "cerca" de las soluciones constantes.

Definición 1.2 (Solución estable)**.** Decimos que x_c es estable si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Visualmente, esto implica que si se toma x_0 cercano a una solución estable, se mantendrá cercana a c para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que una recurrencia es estable si todos sus puntos de equilibrio lo son.

Definición 1.3 (Solución inestable)**.** Decimos que x_c es inestable si no es estable, esto es:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists\ x_{0\delta} \in I,\ n_\delta \in \mathbb{N} \text{ con } \left\{ \begin{array}{c} |x_{0\delta} - c| < \delta \\ \wedge \\ |x_{n_\delta} = f^{n_\delta}(x_{0\delta}) - c| \geqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de sistemas estables:

1. $x_{n+1} = -x_n$.

   La solución de este modelo sabemos que es $x_n = (-1)^n x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, el punto de equilibrio es $x_c = 0$. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, consideramos $\delta = \varepsilon$, de forma que tenemos que:

   $$|x_0 - 0| = |x_0| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = |(-1)^n x_0| = |x_0| < \varepsilon$$

   Por tanto, tenemos que el sistema es estable. En concreto, vemos que se trata de un 2−ciclo: $\{x_n\} = \{x_0, -x_0, x_0, \dots\}$.

2. $y_{n+1} = \dfrac{1}{y_n}$.

   Tenemos que los puntos de equilibrio son $c_1 = 1,\ c_2 = -1$. La solución de este sistema sabemos que es un 2−ciclo, con:

   $$\{y_n\} = \left\{ y_0, \frac{1}{y_0}, y_0, \frac{1}{y_0}, \dots \right\}$$

Intuitivamente, vemos claramente que si y_0 está cerca de ± 1, entonces $\frac{1}{y_0}$ estará cerca de $\frac{1}{\pm 1} = \pm 1$, por lo que intuitivamente se ve de forma directa que el modelo es estable. La demostración rigurosa es un poco más compleja.

Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta_1 = \varepsilon$ se tiene claramente que:

$$|y_0 - c| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |y_{2n} - c| = |y_0 - c| < \varepsilon$$

Veamos ahora qué ocurre con los términos impares, sabiendo que $y_{2n+1} = {}^1/_{y_0}$. Consideramos $\delta = {}^{\varepsilon}/_2$, y sea $|y_0 - c| < \delta$, donde $c = \pm 1$. Tenemos que:

$$\left|\frac{1}{y_0} - c\right| = \left|\frac{1 - y_0 c}{y_0}\right| \overset{(*)}{=} \left|\frac{c - y_0}{y_0}\right| < \frac{\delta}{|y_0|} < \frac{\delta}{\delta + |c|} < \frac{\delta}{\delta + 1} = \frac{{}^{\varepsilon}/_2}{{}^{\varepsilon}/_2 + 1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2} < \varepsilon$$

donde es directo comprobar que, para $c = \pm 1$, se tiene que $|1 - y_0 c| = |c - y_0|$, y se ha empleado en $(*)$. Por tanto, tomando $\delta = {}^{\varepsilon}/_2$, se tiene que el modelo es estable.

A continuación, introducimos el concepto de atractor, el cual sirve para estudiar el comportamiento del modelo a largo plazo.

Definición 1.4 (Atractor local)**.** Decimos que $x_c \equiv c$ es localmente atractiva o que c es un punto atractor local si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{\begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Es decir, la sucesión solución tenderá a c si valor $x_0 \in I$ escogido está cerca de c.

Definición 1.5 (Atractor global)**.** Dada una solución constante $x_c \equiv c$, decimos que c es un punto atractor global o atractiva globalmente si:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \qquad \forall x_0 \in I$$

Es decir, la sucesión solución tenderá a c independientemente del valor $x_0 \in I$ escogido.

Como es directo deducir, todo atractor global es a su vez un atractor local. No obstante, que un punto de equilibrio sea estable no implica que sea un atractor, como es el caso de los ejemplos de la página 34. Asimismo, un atractor no tiene por qué ser estable, ya que puede darse el caso de que en las primeras iteraciones no cumpla que $|x_n - c| < \varepsilon$ (los límites tan solo trabajan con colas de la sucesión).

Ejemplo. Veamos un ejemplo de atractor.

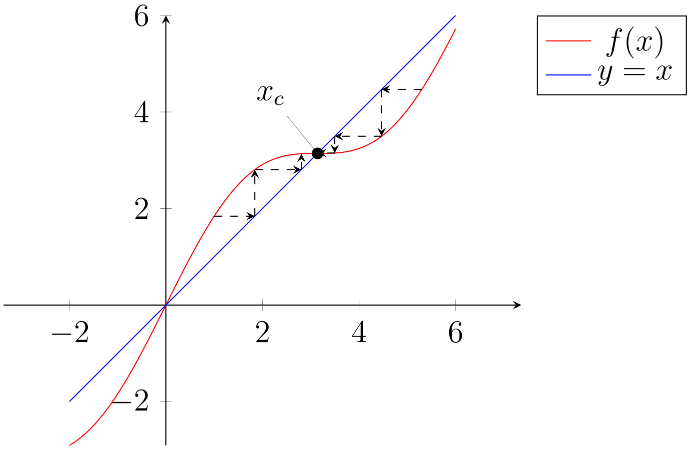


Figura 1.3: Ejemplo de atractor local pero no global.

Sea la solución constante x_c de la figura. Tenemos que es un atractor local, ya que gráficamente se ve que si $x_0 \in]0, 6[$, entonces $\{x_n\} \to x_c$. No obstante, no es global, ya que si $x_0 < 0$ a priori no se da.

Definición 1.6 (Estabilidad asintótica)**.** Decimos que $x_c \equiv c$ es globalmente (localmente) asintóticamente estable si es estable y es un atractor global (local).

En el caso de que no se indique si es global o localmente asintóticamente estable, se entenderá que es localmente.

Veamos ahora un importante teorema para saber si una solución constante es atractiva.

Teorema 1.2. *Sea I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, y consideramos una función f dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos que f es una función contractiva (lipschitziana con constante de Lipschitz menor que 1), es decir:

$$\exists M \in \mathbb{R}_0^+, M < 1 \mid |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Sea la Ley de Recurrencia dada por f, es decir, $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces:

1. *La ecuación tiene una única solución constante, $x_c \equiv c$.*
2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión solución, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

Demostración. Se trata de una versión más débil del Teorema del Punto Fijo de Banach[1], por lo que no se incluye la demostración. Si desea demostrarlo, le recomendamos seguir los siguientes pasos:

1. Si hay un punto fijo (supuesta la existencia), demostrar que es único.
2. Demostrar que $\{x_n\}$ tiene límite L.

[1]Visto en Análisis Matemático I.

3. Demostrar que L es el punto fijo.

$\square$

Proposición 1.3. *Si la función es contractiva y estamos en $\mathbb{R}$, la solución constante que encontremos (por ser contractiva), es asintóticamente estable globalmente.*

Proposición 1.4 (Criterio de la primera derivada)**.** *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^1(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio.

- *Si $|f'(c)| < 1$, entonces x_c es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $|f'(c)| > 1$, entonces x_c es inestable.*
- *Si $|f'(c)| = 1$, no podemos afirmar nada.*

Demostración. Distinguimos en función de los valores de $|f'(c)|$:

- Si $|f'(c)| < 1$:

  Por ser f' continua, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, $r \in [0, 1[$ tal que, si $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f'(x)| \leqslant r < 1$. Tomando $t, s \in]c - \delta, c + \delta[$, por el Teorema del Valor Medio, $\exists x^* \in \,]c - \delta, c + \delta[$ tal que:

  $$|f(t) - f(s)| = |f'(x^*)||t - s| \leqslant r|t - s| \qquad \forall t, s \in]c - \delta, c + \delta[$$

  Veamos ahora que, si $|x_0 - c| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) = x_n - c| < r^n\delta$. Demostramos por inducción sobre n:

  - Para $n = 1$:

    $$|f(x_0) - c| = |f(x_0) - f(c)| \leqslant r|x_0 - c| < r\delta$$

  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$|f^{n+1}(x_0) - c| = |f(f^n(x_0)) - f(c)| \leqslant r|f^n(x_0) - c| < r \cdot r^n\delta = r^{n+1}\delta$$

  Para ver la estabilidad de c, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomamos $\widetilde{\delta} = \min\{\delta, \varepsilon\}$. Tenemos entonces que, tomando $|x_0 - c| < \widetilde{\delta} \leqslant \delta$, entonces:

  $$|f^n(x_0) = x_n - c| < r^n\widetilde{\delta} < \widetilde{\delta} \leqslant \varepsilon$$

  Por tanto, c es estable. Además, como $r < 1$, tomando límite tenemos que:

  $$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n - c| \leqslant \lim_{n\to\infty} r^n\delta = 0$$

  de lo que se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, deduciendo entonces que es un atractor local. Por tanto, hemos concluido que c es asintóticamente estable localmente.

- Si $|f'(c)| > 1$:

  Por ser f' continua, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, $r > 1$, tal que, si $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f'(x)| \geqslant r > 1$. Tomando $t, s \in]c - \delta, c + \delta[$, por el Teorema del Valor Medio, $\exists x^* \in]c - \delta, c + \delta[$ tal que:

  $$|f(t) - f(s)| = |f'(x^*)||t - s| \geqslant r|t - s| \qquad \forall t, s \in]c - \delta, c + \delta[$$

  Veamos ahora que, si $|x_0 - c| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) = x_n - c| > r^n|x_0 - c|$. Demostramos por inducción sobre n:

  - Para $n = 1$:
    $$|f(x_0) - c| = |f(x_0) - f(c)| \geqslant r|x_0 - c|$$
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:
    $$|f^{n+1}(x_0) - c| = |f^n(f(x_0)) - c| > r^n|f(x_0) - c| > r^{n+1}|x_0 - c|$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$|f^n(x_0) = x_n - c| > r^n|x_0 - c| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Tomando límite con $n \to \infty$, tenemos que:

  $$\lim_{n\to\infty} |x_n - c| \geqslant \lim_{n\to\infty} r^n|x_0 - c| = \infty$$

  Por tanto, no solo la solución no se mantiene cerca del punto fijo, sino que se va alejando de él. Tenemos por tanto que es inestable.

□

Notemos que el criterio anterior nos da información local, no global.

Ejemplo. Sea la Ley de Recurrencia dada por:

$$x_{n+1} = x_n^3 + \frac{3}{4}x_n$$

Estudiar la estabilidad de sus soluciones constantes.

Sea la función asociada:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 + \frac{3}{4}x \end{array}$$

Buscamos las soluciones constantes, aquellas que cumplen que $f(x) = x$:

$$x = x^3 + \frac{3}{4}x \Longleftrightarrow x^3 - \frac{1}{4}x = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad\vee \\ x^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow x = \quad \pm\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Las soluciones constantes son: $\{0, 1/2, -1/2\}$. Estudiamos ahora la estabilidad de estas soluciones, mediante el criterio de la primera derivada. Para ello, primero calculamos $f'(x)$, al ser f derivable:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{4}$$

Evaluamos en cada punto fijo, y usaremos el criterio de la primera derivada:

- $\underline{x = 0}$:
$$|f'(0)| = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$$
Luego x_0 es asintóticamente estable localmente.

- $\underline{x = 1/2}$:
$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}\right| > 1$$
Luego $x_{1/2}$ es inestable.

- $\underline{x = -1/2}$:
$$\left|f'\left(\frac{-1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}\right| > 1$$
Luego $x_{-1/2}$ es inestable.

Ejercicio. Sea la Ley de Recurrencia dada por:
$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$
Estudiar la estabilidad de sus soluciones constantes.

Sea la función asociada:
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

Veamos que tiene un punto fijo. Tenemos que $f(0) = 1$, $f(1) = 1/e$. Definiendo $g = f - Id$, tenemos que:
$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0 \\ g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \Longleftrightarrow 1 < e \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x^* \in]0,1[\mid g(x^*) = 0$$

Por tanto, hemos visto que $\exists x^* \in]0,1[$ tal que $f(x^*) = x^*$. Para aplicar el criterio de la primera derivada, calculamos esta en primer lugar.
$$f'(x) = -e^{-x} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que $f'(x^*) > -1$:
$$f'(x^*) > -1 \Longleftrightarrow -e^{-x^*} > -1 \Longleftrightarrow e^{-x^*} < 1 \Longleftarrow -x^* < 0 \Longleftrightarrow x^* > 0$$

Como $x^* \in]0,1[$, tenemos que es cierto, por lo que se tiene que la derivada está entre -1 y 0; es decir, $f'(x^*) \in]-1,0[$. En cualquier caso, $|f'(x^*)| < 1$, por lo que es asintóticamente localmente estable.

Ahora, nos preguntamos qué ocurre si $|f'(c)| = 1$ (ya que el criterio no aporta información en este caso). Comenzamos introduciendo más conceptos para poder estudiar este caso.

Definición 1.7. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es estable por arriba (o semiestable por arriba) si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \text{si } c \leqslant x_0 < c + \delta \Longrightarrow |f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Decimos que es estable por abajo (o semiestable por abajo) si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \text{si } c - \delta < x_0 \leqslant c \Longrightarrow |f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición 1.8. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es inestable desde arriba si no es estable desde arriba.
- Decimos que es inestable desde abajo si no es estable desde abajo.

Definición 1.9. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es atractiva desde arriba (o que el punto fijo es atractor por arriba) si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid c \leqslant x_0 < c + \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

- Decimos que es atractiva desde abajo (o que el punto fijo es atractor por abajo) si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid c - \delta < x_0 \leqslant c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Definición 1.10. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es asintóticamente estable desde arriba si es estable por arriba y atractiva por arriba.
- Decimos que es asintóticamente estable desde abajo si es estable por abajo y atractiva por abajo.

Proposición 1.5 (Criterio de la Segunda Derivada)**.** *Sea la función dada por:*

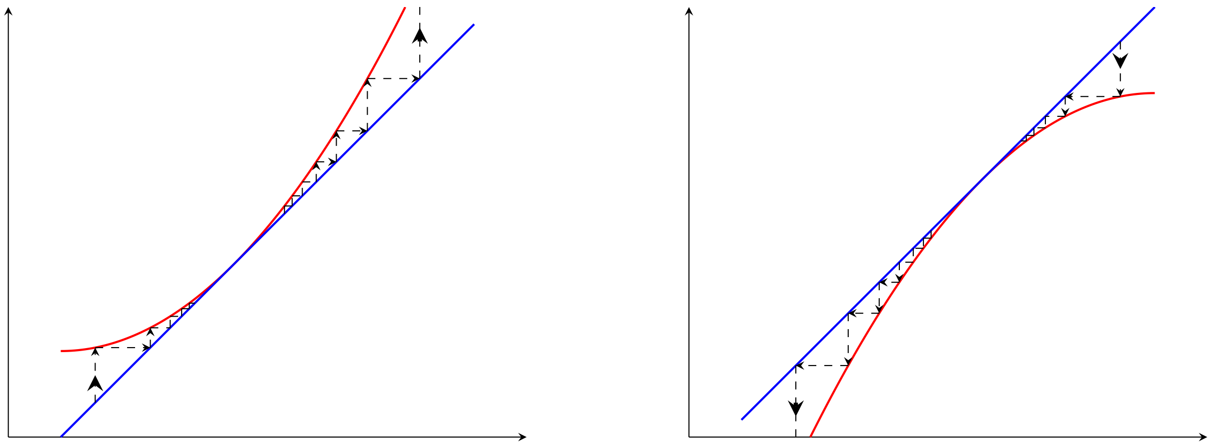
$$\begin{array}{rrcl} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^2(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio con $f'(c) = 1$.

- *Si $f''(c) > 0$, entonces $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable por abajo e inestable por arriba.*
- *Si $f''(c) < 0$, entonces $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable por arriba e inestable por abajo.*

- *Si $f''(c) = 0$, entonces no podemos asegurar nada.*

Demostración. Veamos el razonamiento intuitivo con las siguientes gráficas:



(a) Caso de f convexa, $f''(c) > 0$.

(b) Caso de f cóncava, $f''(c) < 0$.

Figura 1.4: Idea intuitiva de la demostración.

□

Volvemos a tener en esta ocasión un caso en el que no tenemos nada que asegurar. Tratamos a su vez de estudiar este caso, con la siguiente proposición:

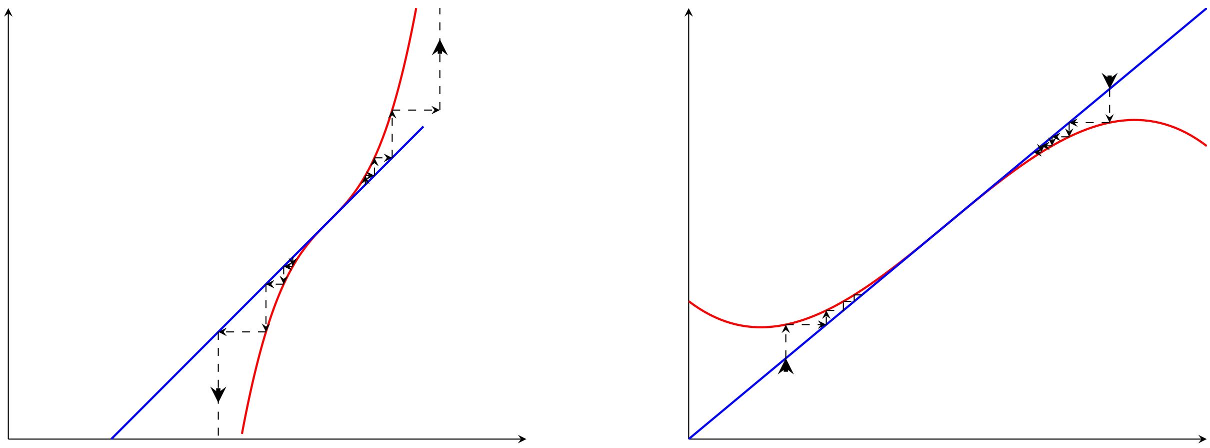
Proposición 1.6 (Criterio de la Tercera Derivada)**.** *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^3(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio con $f'(c) = 1$ y $f''(c) = 0$.

- *Si $f'''(c) > 0$, entonces $x_c \equiv c$ es inestable.*
- *Si $f'''(c) < 0$, entonces $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente.*

Demostración. Veamos el razonamiento intuitivo con las siguientes gráficas:



(a) Caso de $f'''(c) > 0$.
Paso de cóncava a convexa.

(b) Caso de $f'''(c) < 0$.
Paso de convexa a cóncava.

Figura 1.5: Idea intuitiva de la demostración.

En el caso de que $f'''(c) > 0$, tenemos que se trata de un punto inflexión que pasa de cóncava a convexa. Por tanto, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $|x - c| < \delta$, $x < c$, entonces $f(x)$ es cóncava. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es inestable por abajo.
- $|x - c| < \delta$, $x > c$, entonces $f(x)$ es convexa. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es inestable por arriba.

Por tanto, concluimos que x_c es inestable.

En el caso de que $f'''(c) < 0$, tenemos que se trata de un punto inflexión que pasa de convexa a cóncava. Por tanto, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $|x - c| < \delta$, $x < c$, entonces $f(x)$ es convexa. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es asintóticamente estable por debajo.
- $|x - c| < \delta$, $x > c$, entonces $f(x)$ es cóncava. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es asintóticamente estable por encima.

Por tanto, concluimos que x_c es asintóticamente estable localmente. □

Nuevamente surge la pregunta de qué hacer cuando $f'''(c) = 0$. Para no alargar más el asunto, pararemos aquí, informando de que en este caso se debería actuar de forma similar, suponiendo que $f \in C^4(I)$ y aplicando criterios de concavidad y convexidad en c para f. También hemos de tener en cuenta que, antes de recurrir al estudio analítico de puntos fijos, es aconsejable (y muy habitual) dibujar la gráfica de la función y observar el comportamiento de las órbitas de puntos cercanos al punto fijo.

Recordamos que el Criterio de la Primera Derivada no aportaba información si $|f'(c)| = 1$. Ya hemos estudiado con criterios de derivadas de orden mayor si $f'(c) = 1$. Estudiaremos ahora el caso de $f'(c) = 1$, y para ello emplearemos el siguiente lema.

Lema 1.7. *Sea una función $f : I \to I$ continua, con $I \subset \mathbb{R}$, y sea su ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$. Un equilibrio $x_c \equiv c$ de la ecuación en diferencias es asintóticamente estable localmente si, y sólo si $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente para la ecuación en diferencias $x_{n+1} = (f \circ f)(x_n)$.*

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que x_c es asintóticamente localmente estable para f. Entonces, por ser estable para f, tenemos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular ocurre para los múltiplos de 2, por lo que es estable para f^2. Además, por ser un atractor local para f, tenemos que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = c$$

De igual forma, si esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular ocurre para los múltiplos de 2, por lo que es un atractor local para f^2. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente para f^2.

$\Longleftarrow$) Supongamos que x_c es asintóticamente estable localmente para f^2. Entonces, por ser estable para f^2, tenemos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^{2n}(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, ya está resuelto para las iteradas pares. Para las iteradas impares, buscamos aplicarle la estabilidad a $f(x_0)$, y para ello necesitamos que se tenga que $|f(x_0) - c| < \delta$. Usando la continuidad de f en c, fijado $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \delta/2\}$ podemos encontrar $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$|x_0 - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x_0) - f(c)| = |f(x_0) - c| < \varepsilon_1 < \delta$$

Por tanto, tenemos que:

$$|f^{2n+1}(x_0) - c| = |f^{2n}(f(x_0)) - c| < \varepsilon$$

Por tanto, como ocurre tanto para las iteradas pares como para las impares, es estable para f. Además, por ser un atractor local para f^2, tenemos que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f^{2n}(x_0) = c$$

Análogamente al caso anterior, llegamos sin problema a que:

$$\lim_{n \to \infty} f^{2n+1}(x_0) = \lim_{n \to \infty} f^{2n}(f(x_0)) = c$$

Por tanto, vemos que x_c es asintóticamente estable para f.

□

Observación. Nótese que, mediante una sencilla inducción en las hipótesis de la proposición anterior, puede probarse que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_c \equiv c$ es un equilibrio de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ es asintóticamente estable localmente si, y sólo si $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente para la ecuación en diferencias dada por $x_{n+1} = f^{(2^n)}(x_n)$.

Demostración. Notemos que el caso $n = 0$ es obvio. Procedemos mediante inducción:

- <u>Caso $n = 1$:</u> Por la proposición anterior, tenemos que es cierto:

$$x_{n+1} = f^{(2^1)}(x_n) = (f \circ f)(x_n)$$

- <u>Supuesto que se cumple para $n - 1$, probémoslo para n:</u> Sabemos por hipótesis de inducción que $x_c \equiv c$ es un equilibrio asintóticamente estable localmente de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ si, y sólo si lo es para la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f^{(2^{n-1})}(x_n) = \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}}(x_n)$$

Sea $g = f^{(2^{n-1})}$ y aplicando el caso $n = 1$, tenemos que dicho equilibrio es asintóticamente estable localmente para la ecuación anterior si, y sólo si lo es para:

$$x_{n+1} = (g \circ g)(x_n) = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}} \circ \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}})(x_n)$$

La composición de f se realiza $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ veces, luego se tiene que:

$$x_{n+1} = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}} \circ \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}})(x_n) = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^n})(x_n) = f^{(2^n)}(x_n)$$

Tal y como queríamos probar.

$\square$

Observación. Notemos además que, si x_c es un equilibrio para f, implica que lo es para f^2. No obstante, el recíproco no tiene por qué ser cierto, como el caso de que f tenga un $2-$ciclo.

Llegado este momento, estudiamos entonces el caso de $f'(c) = -1$.

Proposición 1.8. *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^3(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio con $f'(c) = -1$.

- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 > 0$, entonces $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 < 0$, entonces $x_c \equiv c$ es inestable.*
- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 = 0$, entonces no podemos asegurar nada.*

Demostración. Consideramos $g = f^2$, y sabemos que $f \in C^3(I)$. Aplicando la regla de la cadena tenemos que, para todo $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(f(x))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) \\ g''(x) &= f''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) \\ g'''(x) &= f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 2f'(x)f''(x) \cdot f''(f(x)) + f''(f(x)))f'(x) \cdot f''(x) + f'''(x) \cdot f'(f(x)) = \\ &= f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 3f'(x)f''(x) \cdot f''(f(x)) + f'''(x) \cdot f'(f(x)) \end{aligned}$$

Por tanto, evaluando en c, tenemos que:

$$\begin{aligned}
g'(c) &= f'(c) \cdot f'(c) = 1 \\
g''(c) &= f''(c) - f''(c) = 0 \\
g'''(c) &= -f'''(c) - (3f''(c))^2 - f'''(c) = -\left(2f'''(c) + 3(f''(c))^2\right)
\end{aligned}$$

Como $g(c) = f^2(c) = f(c) = c$, $g'(c) = 1$, $g''(c) = 0$, estamos en condiciones de aplicar el Criterio de la Tercera Derivada para g. De esta forma:

- Si $g'''(c) > 0$, entonces x_c es inestable para g, es decir, no se tiene la estabilidad para los términos pares de la sucesión $\{x_n\}$ asociada a f. Por tanto, al o tenerse para los términos pares, podemos asegurar que x_c es inestable para f.
- Si $g'''(c) < 0$, entonces x_c es asintóticamente estable para g. Por el Lema anterior (Lema 1.7), tenemos que x_c es asintóticamente estable para f.

Debido al valor de $g'''(c)$, se deduce directamente lo buscado. □

Observación. Sea f un polinomio de grado 2 la función asociada a una ecuación en diferencias, que es claro que $f \in C^3(I)$. Supongamos que $x_c \equiv c$ es un equilibrio con $f'(c) = -1$. Tenemos que:

$$2f'''(c) + 3(f''(c))^2 = 3(f''(c))^2 > 0$$

Entonces, $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente.

1.3.3. Estabilidad de soluciones periódicas. Ciclos

Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia. Recordamos que un $n-$ciclo se determina encontrando los puntos fijos de f^n. Además, que no existe ningún $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que dicho $n-$ciclo genere un $k-$ciclo. A lo largo de esta sección, debido al trabajo intensivo que realizaremos con ciclos, notaremos un $m-$ciclo como $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_{m-1}}\}$

Definición 1.11 (Iterada $k-$ésima)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia con f su función asociada, definimos la iterada $k-$ésima de f como la función f^k, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notemos que, si $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_{m-1}}\}$ es un $m-$ciclo de la ley de recurrencia dada por $x_{n+1} = f(x_n)$ entonces, $x_c = \overline{x_k}$ es un punto fijo de la iterada $(m \cdot n)-$ésima de f, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir:

$$\overline{x_k} = f^{n \cdot m}(\overline{x_k}) = f^{n \cdot m + k}(\overline{x_0}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Definición 1.12 (Estabilidad de un $m-$ciclo)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es estable si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_k - \overline{x_k}| < \delta \Longrightarrow |f^{m \cdot n + k}(x_0) - \overline{x_k}| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \forall k \in \{0, \ldots, m-1\}$$

Es decir, es necesario que todos los puntos fijos de la iterada $m-$ésima (los elementos del $m-$ciclo) sean estables para f^m, cada uno con su δ_k asociado. Bastará tomar $\delta = \min\limits_k \delta_k$ para obtener lo escrito en la definición anterior.

Definición 1.13 ($m-$ciclo localmente atractor)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es localmente atractor si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_k - \overline{x_k}| < \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^{m\cdot n+k}(x_0) = \overline{x_k} \qquad \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$$

Es decir, es necesario que todos los puntos fijos de la iterada $m-$ésima (los elementos del $m-$ciclo) sean atractores locales para f^m, cada uno con su δ_k asociado. Bastará tomar $\delta = \min\limits_k \delta_k$ para obtener lo escrito en la definición anterior.

Definición 1.14 ($m-$ciclo asintóticamente localmente estable)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es asintóticamente localmente estable si es estable y además es atractor local.

No obstante, al igual que en el caso de los puntos de equilibrio, tenemos un importante criterio para analizar la estabilidad asintótica sin necesidad de emplear la definición formal.

Teorema 1.9. *Sea $f : I \to I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$ y $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo para $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces:*

- *Si $|f'(\overline{x_0}) \cdot f'(\overline{x_1}) \cdot \ldots \cdot f'(\overline{x_{m-1}})| < 1$ entonces, el $m-$ciclo es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $|f'(\overline{x_0}) \cdot f'(\overline{x_1}) \cdot \ldots \cdot f'(\overline{x_{m-1}})| > 1$ entonces, el $m-$ciclo es inestable.*

Demostración. Veamos que $\overline{x_k}$ es asintóticamente localmente estable para f^m. Para calcular $(f^m)'$, demostramos por inducción que, para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$(f^m(x))' = \prod_{k=0}^{m-1} f'(f^k(x)) \qquad \forall x \in I$$

donde $f^0(x) = x$.

- Para $m = 2$:
$$(f^2(x))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = \prod_{k=0}^{1} f'(f^k(x))$$
- Supuesto cierto para m, demostramos para $m + 1$:
$$\begin{aligned}(f^{m+1}(x))' = (f(f^m(x))' = f'(f^m(x)) \cdot (f^m(x))' = \\ = f'(f^m(x)) \prod_{k=0}^{m-1} f'(f^k(x)) = \prod_{k=0}^{m} f'(f^k(x))\end{aligned}$$

Por tanto, como en ese producto se recorrerá el ciclo completo, tenemos que:

$$(f^m(\overline{x_k}))' = \prod_{j=0}^{m} f'(\overline{x_j})$$

Aplicando por tanto el Criterio de la Primera Derivada para f^m, se tiene de forma directa. □

1.4. Modelo logístico

Recordamos que este modelo se presentó en la sección 0.2, motivado por evitar el crecimiento ilimitado o la extinción del modelo de Malthus. Para evitar la tasa de crecimiento constante, se definía esta como una recta, de la forma:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = a - bp_n \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

De esta forma, se tiene que $p_{n+1} = p_n(a - bp_n)$. Además, vimos que para este modelo tenga sentido y no haya poblaciones negativas, es necesario que se tenga que $0 \leqslant p_0 \leqslant {}^a/_b$, llamada esta última *población tope*. Veamos que haciendo un cierto cambio de variable, este modelo también lo podemos escribir como:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Demostración. Proponemos realizar el cambio de variable:

$$x_n = \frac{p_n}{{}^a/_b} = b \cdot \frac{p_n}{a}$$

De esta forma, tenemos que:

$$x_{n+1} = b \cdot \frac{p_{n+1}}{a} = \frac{b}{a} \cdot p_n(a - bp_n) = \frac{b}{a} \cdot p_n a \left(1 - \frac{b}{a} \cdot p_n\right) = ax_n(1 - x_n)$$

□

Como ventaja de esta forma de escribirlo, tenemos que es adimensional; ya que x_n es una cantidad sin unidades al serlo a y bp_n. Representa por tanto porcentajes de la población, ya que buscamos que $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si $x_n = 0$, implica que no hay individuos en la población.
- Si $x_n = 1$, implica que la población toma el valor número de individuos, que se ha visto que es la *población tope*, ${}^a/_b$.

Nos preguntamos ahora qué es necesario para que el modelo esté bien planteado, es decir, que $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.10. *Sea un modelo logístico de la forma:*

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}^+.$$

Para que $x_n \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *necesitamos que* $a \in]0, 4]$

Demostración. Sea la función asociada al modelo logístico,

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax(1-x) \end{array}$$

Tenemos que es derivable, y su único punto crítico es el valor que anula su primera derivada:

$$f'(x) = a(1 - x) - ax = 0 \Longleftrightarrow 1 - x = x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Además, tenemos que $f''(x) = -2a < 0$, por lo que la función alcanza su máximo absoluto en $x = \frac{1}{2}$, con valor $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$. Para conseguir que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, exigimos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leqslant 1 \Longleftrightarrow a \leqslant 4$$

Por tanto, tenemos que $0 < a \leqslant 4$, por lo que $a \in]0,4]$ y se tiene lo pedido. □

La anterior proposición se ve claramente en la siguiente Figura, ya que para valores mayores que 4 se tiene que $f(x) \not\subset [0,1]$.

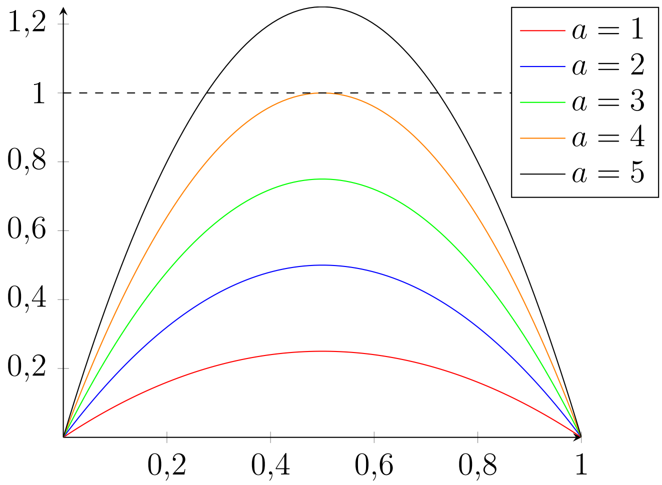


Figura 1.6: Modelo logístico, $f(x) = ax(1-x)$ para distintos valores de a.

Ahora, trataremos de buscar soluciones del modelo logístico. Comenzamos por lo que nos es más natural, estudiar primero los puntos fijos del modelo.

1.4.1. Puntos fijos

Estudiando los puntos fijos de la función $f(x) = ax(1-x)$, tenemos que:

$$c = ac(1-c) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ \vee \\ 1 = a - ac_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{a-1}{a} \end{array} \right.$$

Notemos que la segunda solución constante no tiene sentido biológico (poblacional) si $a \in [0,1]$.

Estudiemos ahora la estabilidad de dichas soluciones constantes. Tenemos que la función asociada al modelo logístico es $f(x) = ax(1-x)$, derivable con:

$$f'(x) = a - 2ax$$

Sustituyendo en las soluciones constantes, y aplicando el Criterio de la Primera Derivada, obtenemos que:

$$f'(0) = a \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } a < 1 & \text{entonces, es asintóticamente estable localmente} \\ \text{Si } a > 1 & \text{entonces, es inestable} \end{array} \right.$$

$$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2-a \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } 1 < a < 3 & \text{entonces, es asintóticamente estable localmente} \\ \text{Si } a > 3 & \text{entonces, es inestable} \end{cases}$$

Nos queda por tanto estudiar los casos $a = 1$ para x_0 y $a = 3$ para $x_{\frac{a-1}{a}}$:

- <u>$a = 1$</u>: En este caso solo hay una solución constante, $x_c = 0$. Tenemos que:

  $$f'(0) = 1 \qquad f''(x) = -2a < 0$$

  Aplicando el Criterio de la Segunda Derivada, obtenemos que $x_c \equiv 0$ es asintóticamente estable localmente por arriba e inestable por abajo. Como el modelo está definido en $[0, 1]$, tan solo nos interesa lo que ocurre por encima del 0, por lo que lo consideramos asintóticamente localmente estable.

- <u>$a = 3$</u>:

  $$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = -1$$

  Por la observación de la página 45, tenemos que es asintóticamente estable localmente.

En resumen, tenemos el siguiente resultado, donde *a.e.l.* representa *asintóticamente estable localmente*.

$0 < a \leqslant 1$	0 es a.e.l.
$1 < a \leqslant 3$	0 es inestable y $\frac{a-1}{a}$ es a.e.l.
$3 < a \leqslant 4$	0 y $\frac{a-1}{a}$ son inestables.

2. Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

Notación. A lo largo del tema, notaremos a $\mathbb{N} \cup \{0\}$ por $\mathbb{N}_0$, considerando que $0 \notin \mathbb{N}$.

Las ecuaciones lineales de orden superior son un caso particular de ecuaciones en diferencias de la forma:

$$h(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, n) = 0$$

Con h una función $h : I^{k+1} \times \mathbb{N}_0 \to I$, donde I es un abierto de un cuerpo $\mathbb{K}$[1] en su topología usual. También se puede escribir en su <u>forma normal</u>:

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}, n)$$

Con f una función $f : I^k \times \mathbb{N}_0 \to I$.

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias lineales de orden superior:

1. Consideramos la siguiente ecuación en diferencias:

   $$x_{n+1} = ax_n + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   Esta es ecuación lineal autónoma de orden 1, que es un caso particular de una ecuación lineal de orden superior. Su función asociada es:

   $$\begin{array}{rrcl} g: & I^2 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, n) & \longmapsto & y - ax - b \end{array}$$

   En su forma normal, vendrá dada por una función dada por:

   $$\begin{array}{rrcl} f: & I \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, n) & \longmapsto & ax + b \end{array}$$

2. Consideramos la siguiente ecuación en diferencias:

   $$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$$

[1] En esta asignatura, trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Se trata de una ecuación lineal autónoma de orden 2, que puede darse por la forma $h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, n) = 0$ con h:

$$\begin{array}{rccc} h: & I^3 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, z, n) & \longmapsto & z - \dfrac{y+x}{2} \end{array}$$

Que puede expresarse de forma normal por:

$$\begin{array}{rccc} f: & I^2 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, n) & \longmapsto & \dfrac{x+y}{2} \end{array}$$

3. Consideramos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+3} = e^{x_n - x_{n+1}} \cdot x_{n+2}$$

Es una ecuación no lineal autónoma de orden 3, que puede darse por la ecuación $h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, n) = 0$, con h:

$$\begin{array}{rccc} h: & I^4 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, z, t, n) & \longmapsto & t - ze^{x-y} \end{array}$$

Dada en forma normal por:

$$\begin{array}{rccc} f: & I^3 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, z, n) & \longmapsto & ze^{x-y} \end{array}$$

4. Consideramos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} = x_n + 2^n$$

Se trata de una ecuación lineal no autónoma, de orden 2 que puede darse por la forma $h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, n) = 0$ con h:

$$\begin{array}{rccc} h: & I^3 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, z, n) & \longmapsto & z - x - 2^n \end{array}$$

Que en forma normal viene dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & I^2 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & I \\ & (x, y, n) & \longmapsto & x + 2^n \end{array}$$

Definición 2.1 (Solución)**.** Una solución de una ecuación en diferencias lineal de orden k se trata de una sucesión de términos $\{x_n\} \subseteq I$ que verifica la ecuación $h(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, para su función asociada $h : I^{k+1} \times \mathbb{N}_0 \to I$.

Definición 2.2 (Problemas de Valores Iniciales)**.** Un PVI se trata de un problema cuya solución es buscar la solución de una ecuación en diferencias de la cual se dan unas ciertas condiciones iniciales:

$$(\text{PVI}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} h(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, n) = 0 \\ x_i = \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad i \in \{0, \ldots, k-1\} \end{array} \right.$$

Para una ecuación en diferencias de orden k, debemos tener k datos iniciales para que tenga una única solución.

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de PVI con y sin solución única.

- Un ejemplo de PVI sin solución única es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+2} = e^{x_n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

- Un ejemplo de PVI con solución única es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+2} = e^{x_n} \\ x_0 = x_1 = 1 \end{cases}$$

En este tema nos vamos a centrar en las ecuaciones lineales de orden $k \in \mathbb{N}$, que son de la forma:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = b_n$$
$$a_i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{0, \ldots, k-1\}, a_0 \neq 0, \quad b_n \in \mathbb{K} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

Definición 2.3 (Parte homogénea)**.** Dada una ecuación de la forma 2.1, llamamos parte homogénea de la ecuación a una nueva ecuación dada por:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = 0 \qquad a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{K}$$

Exigimos la no nulidad de a_0 para que la ecuación sea realmente de orden k, ya que en caso contrario podríamos rebajar el orden de la ecuación.

2.1. Soluciones

Vamos a ver que las soluciones de 2.1 se construyen con las soluciones de su parte homogénea y una solución particular de 2.1. Es decir, una solución de 2.1 la obtendremos sumando a una solución de la homogénea una solución particular de 2.1. Para probarlo, primero recordaremos que el espacio de las sucesiones en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita, que nos ayudará a realizar el trabajo necesario.

Notación. A continuación, notaremos por $\mathcal{S}$ al espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$. Es decir:

$$\mathcal{S} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Proposición 2.1. *Se verifica que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.*

Demostración. Gracias a las operaciones dadas por:

1. $\{x_n\} + \{y_n\} := \{x_n + y_n\} \quad \forall \{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{S}$
2. $a \cdot \{x_n\} := \{a \cdot x_n\} \quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall \{x_n\} \in \mathcal{S}$.

puede comprobarse fácilmente que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial. Veamos ahora que es de dimensión infinita. Fijado $k \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación que a cada sucesión le asigna sus primeros k términos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^k \\ & \{x_n\} & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{array}$$

Veamos que es lineal y sobreyectiva:

- Lineal: Dados $a, b \in \mathbb{K}$, $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\{ax_n + by_n\}) &= (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \ldots, ax_k + by_k) \\ &= a(x_1, x_2, \ldots, x_k) + b(y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &= a \cdot \varphi(\{x_n\}) + b \cdot \varphi(\{y_n\}) \end{aligned}$$

- Sobreyectiva: Dado $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$, construimos la siguiente sucesión:

$$x_n = \left\{ \begin{array}{lll} x_n & \text{si} & n \leqslant k \\ 0 & \text{si} & n > k \end{array} \right. \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $\dim \mathcal{S} \geqslant \dim \mathbb{K}^k = k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\mathcal{S}$ tiene dimensión infinita. □

Aunque el lector ya conozca el concepto de independencia lineal en un espacio vectorial, incluimos a continuación su definición por ser esta de vital importancia en el presente tema.

Definición 2.4 (Linealmente independientes)**.** Dadas $\{x_n^1\}, \ldots, \{x_n^m\}$ sucesiones en $\mathbb{K}$, decimos que son linealmente independientes si cada vez que tengamos:

$$a_1\{x_n^1\} + \ldots + a_m\{x_n^m\} = 0 \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{0, \ldots, m\}$$

Entonces, tendremos que $a_i = 0$, $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$.

Definición 2.5. Dada una ecuación en diferencias como 2.1 definimos una función $L : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ de forma que a cualquier sucesión $X \equiv \{x_n\} \in \mathcal{S}$ le haga corresponder:

$$L(X) = \{x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0x_n\}$$

Y será usual notar $Y \equiv \{y_n\} = L(X)$. De esta forma, tendremos que:

$$L(X) = \{y_n\} = \{b_n\}.$$

Proposición 2.2. *El conjunto de soluciones de la parte homogénea de una ecuación del tipo 2.1 es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Notemos que por ser la ecuación en diferencias 2.1 lineal, obtenemos que L es una aplicación lineal y, por tanto, tendremos que

$$\ker L = \{X \in \mathcal{S} \mid L(X) = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$. Notemos que este subespacio vectorial corresponde con el conjunto de soluciones de la parte homogénea de 2.1. □

Ejemplo. Consideramos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

En este ejemplo, tenemos que $L(\{x_n\}) = \{x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n\}$ y nos preguntamos por:

1. $L(\{1\}) = \{6\}$
2. $L(\{2^n\}) = \{2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n\} = \{2^{n+2} + 4 \cdot 2^{n+1}\} = \{3 \cdot 2^{n+2}\} = \{12 \cdot 2^n\}$
3. $L(\{n\}) = \{(n+2) + 3(n+1) + 2n\} = \{6n+5\}$
4. $L(\{(-1)^n\}) = \{(1-3+2)(-1)^n\} = \{0 \cdot (-1)^n\} = \{0\}$
5. $L(\{(-2)^n\}) = \{(-2)^n[(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2]\} = \{(-2)^n \cdot 0\} = \{0\}$

Esto nos lleva a que $\{(-1)^n\}$ y $\{(-2)^n\}$ son soluciones de la ecuación en diferencias $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$. Asimismo, como $L(\{1\}) = \{6\}$, tenemos que es una solución de la ecuación $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 6$.

Proposición 2.3. *Cualquier solución X de 2.1 es de la forma una solución particular de 2.1 más una solución de su parte homogénea.*

Demostración. Supongamos ahora que $\overline{X}$ es una solución particular de la ecuación 2.1. Estudiemos ahora cómo son el resto de soluciones X de la ecuación 2.1. Sea por tanto X otra solución de 2.1 distinta $\overline{X}$, y consideramos el cambio de variable $Y = X - \overline{X}$. Tenemos que:

$$L(Y) = L\left(X - \overline{X}\right) = L(X) - L\left(\overline{X}\right) = \{b_n\} - \{b_n\} = \{0\}$$

Llegamos por tanto a que Y verifica la ecuación homogénea de 2.1 y, despejando X llegamos a que $X = Y + \overline{X}$, siendo X cualquier solución de 2.1, que ha resultado ser suma de la solución de la parte homogénea más una solución particular. □

Proposición 2.4. *Dada una ecuación en diferencias de la forma 2.1 de orden k y dada su función L, se tiene que* $\dim \ker L = k$.

Demostración. Para probarlo, consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \ker L & \longrightarrow & \mathbb{K}^k \\ & \{x_n\} & \longmapsto & (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \end{array}$$

Dicha función le asigna a cada sucesión de $\ker L$ una $k-$upla con sus primeros k términos. Veamos ahora que:

1. ψ es lineal. Dadas dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ker L$ y $a, b \in \mathbb{K}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \psi(a\{x_n\} + b\{y_n\}) &= \psi(\{ax_n + by_n\}) = (ax_0 + by_0, ax_1 + by_1, \ldots, ax_k + by_k) \\ &= a(x_0, x_1, \ldots, x_k) + b(y_0, y_1, \ldots, y_k) = a\psi(\{x_n\}) + b\psi(\{y_n\}) \end{aligned}$$

2. ψ es biyectiva.

- Veamos que es inyectiva. Sean dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ker L$ tal que $\psi(\{x_n\}) = (x_0, x_1, \ldots, x_k) = (y_0, y_1, \ldots, y_k) = \psi(\{y_n\})$. Entonces, tenemos un PVI (cuya solución era única), luego $\{x_n\} = \{y_n\}$.
- Dado $(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$, acabamos de dar k valores iniciales a una ecuación en diferencias de orden k, obteniendo un PVI, de donde podemos construir una solución $\{x_n\}$ de forma recursiva. De esta forma, tendremos que $\{x_n\} \in \ker L$ por ser solución de la parte homogénea, con $\psi(\{x_n\}) = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

Por tanto, como ψ es lineal y biyectiva, tenemos que el dominio y el codominio tienen la misma dimensión, por lo que $\dim \ker L = \dim \mathbb{K}^k = k$. □

Por tanto, buscamos una base del espacio de soluciones de la parte homogénea de 2.1, es decir, del espacio $\ker L$. Esta base serán k sucesiones linealmente independientes que pertenezcan a $\ker L$. Introducimos la siguiente proposición, que nos servirá para ver cuándo distintas sucesiones son linealmente independientes.

Proposición 2.5. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, sea una aplicación lineal $f : V \to W$ y $v_1, \ldots, v_k \in V$, si $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ son linealmente independientes, entonces $v_1, \ldots, v_k$ también lo son.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente dependientes. Por tanto, existen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ no todos ellos nulos tales que:

$$a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = 0$$

Y aplicando L llegamos a que:

$$0 = f(0) = f(a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k) = a_1 f(v_1) + \ldots + a_k f(v_k)$$

Con no todos los $a_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}$ nulos, luego $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ son linealmente dependientes y llegamos a contradicción. □

Corolario 2.5.1. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, entonces $\{\lambda_1^n\}, \ldots, \{\lambda_m^n\}$ son linealmente independientes.*

Demostración. Empleamos la siguiente función, que en la Proposición 2.1 vimos que era lineal:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & \{x_n\} & \longmapsto & (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{gathered} \varphi(\{\lambda_1^n\}) = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1^{m-1}) \\ \vdots \\ \varphi(\{\lambda_m^n\}) = (1, \lambda_m, \ldots, \lambda_m^{m-1}) \end{gathered}$$

Para ver que son linealmente independientes, necesitamos que el siguiente determinante, conocido como el determinante de Vandermonde[2], no sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Por tanto, por la proposición anterior tenemos que $\{\lambda_1^n\}, \ \dots, \ \{\lambda_m^n\}$ son linealmente independientes. □

2.1.1. Soluciones con multiplicidad simple

Como idea intuitiva, si recordamos la ecuación lineal de orden 1 dada por la ecuación $x_{n+1} + a_0 x_n = 0$, vimos en el tema anterior que $x_n = (-a_0)^n x_0$. Por tanto, esto nos hace pensar que podremos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $x_n = \lambda^n$. Para que esto sea así, es necesario que:

$$0 = \lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_0\lambda^n = \lambda^n \left(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0\right)$$

Tras haber sacado como factor común λ^n, llegamos al polinomio

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$$

A este lo llamaremos polinomio característico de la ecuación en diferencias, ya que en la Sección 3.1.1 veremos que está asociado al polinomio característico de cierta matriz tal y como se definió en la asignatura Geometría II.

Definición 2.6 (Polinomio característico)**.** Dada una ecuación en diferencias de orden k de la forma 2.1, se define su polinomio característico asociado como:

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$$

Por tanto, tenemos que $x_n = \lambda^n$ es una solución de la parte homogénea de 2.1 si y sólo si $\lambda^n p(\lambda) = 0$. La solución trivial $\lambda = 0$ no nos interesa, porque genera la sucesión $\{0^n\} = \{0\}$, que es cierto que pertenece a $\ker L$ pero es linealmente dependiente respecto de cualquier otra, por lo que no pertenecerá a la base. Por tanto, buscaremos las k raíces del polinomio característico.

Supongamos que las k raíces que encontramos son reales y además, distintas. Entonces, por el Corolario 2.5.1 las sucesiones generadas son linealmente independientes, y por tanto forman base de $\ker L$ y habremos calculado las soluciones de la parte homogénea de 2.1.

Ejemplo. Consideramos el PVI dado por:

$$(\text{PVI}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \\ x_0 = x_1 = 1 \end{array} \right.$$

[2]Ya estudiado en Métodos Numéricos I.

El polinomio característico asociado a dicha ecuación en diferencias es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Tenemos que:

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right.$$

Vemos entonces que tiene dos raíces distintas, luego $\{\lambda_1^n\}$ y $\{\lambda_2^n\}$ son soluciones de la ecuación, linealmente independientes por la Corolario 2.5.1. Por tanto, como se trataba de una ecuación de orden 2 y $\dim \ker L = 2$, tenemos que forman base del subespacio de las soluciones de la parte homogénea, $\ker L$. Por tanto, si $\{x_n\}$ es una solución de la parte homogénea, expresándolo en dicha base tendremos:

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n = a(-1)^n + b(-2)^n \qquad a, b \in \mathbb{K}$$

Para hallar los valores de a, b que satisfacen el PVI, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = a + b \\ 1 = -a - 2b \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución única al PVI dado es:

$$x_n = 3 \cdot (-1)^n - 2 \cdot (-2)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo. Buscamos ahora resolver el PVI dado por:

$$(\text{PVI}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 6 \\ x_0 = x_1 = 1 \end{array} \right.$$

Por el ejemplo de la página 55, sabemos que $\{1\}$ es una solución particular. Por el ejemplo anterior, veíamos que cualquier solución de la parte homogénea es de la forma:

$$x_n = a(-1)^n + b(-2)^n \qquad a, b \in \mathbb{K}$$

Como toda solución de una ecuación en diferencias no homogénea es la solución de la homogénea más una particular, deducimos que cualquier solución de la ecuación en diferencias planteada es de la forma:

$$x_n = a(-1)^n + b(-2)^n + 1 \qquad a, b \in \mathbb{K}$$

Para hallar los valores de a, b que satisfacen el PVI, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = a + b + 1 \\ 1 = -a - 2b + 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución única al PVI dado es:

$$x_n = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.2. Soluciones complejas

Dado el polinomio característico de una ecuación del tipo 2.1, estamos interesados en ver qué ocurre cuando este tiene raíces complejas. Mostramos los siguientes ejemplos como motivación:

Ejemplo. Tratar de encontrar todas las soluciones de la ecuación en diferencias dada por:

$$(PVI) \equiv \begin{cases} x_{n+2} + x_n = 0 \\ x_0, x_1 \text{ dados.} \end{cases}$$

Esta ecuación tiene como polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, de raíces $\lambda = \pm i$. Sabemos por tanto que la sucesión es:

$$x_n = a \cdot i^n + b \cdot (-i)^n$$

Es solución de la ecuación, para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$. Tratamos ahora de encontrar dichos a y b solucionando el sistema:

$$\begin{cases} x_0 = a + b \\ x_1 = (a - b)i \end{cases}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustituyendo, tenemos:

$$x_1 = (x_0 - 2b)i \Longrightarrow b = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{x_1}{i}\right) \Longrightarrow b = \frac{x_0 + ix_1}{2} \Longrightarrow a = x_0 - b = \frac{x_0 - ix_1}{2}$$

Por tanto, cualquier solución al PVI dado es de la forma:

$$x_n = \frac{x_0 - ix_1}{2} i^n + \frac{x_0 + ix_1}{2} (-i)^n$$

Sabiendo que i^n es un $4-$ciclo, al multiplicarlo por una constante seguirá siendo un $4-$ciclo. Además, como la ecuación es lineal, sabemos que al sumar dos $4-$ciclos obtendremos otro $4-$ciclo, ya que la composición de aplicaciones lineales es lineal:

$$f^4(x_n + y_n) = f^4(x_n) + f^4(y_n) = x_n + y_n$$

Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} x_{4n} &= x_0 \\ x_{4n+1} &= x_1 \\ x_{4n+2} &= -\frac{x_0 - ix_1}{2} - \frac{x_0 + ix_1}{2} = -x_0 \\ x_{4n+3} &= -i\frac{x_0 - ix_1}{2} + i\frac{x_0 + ix_1}{2} = i^2 x_1 = -x_1 \end{aligned}$$

Notemos que, a pesar de que el término general de $\{x_n\}$ es un número complejo, si x_0 y x_1 son números reales, la solución será una sucesión real por ser $\mathbb{R}$ cerrado para operaciones.

Ejemplo. Dada la ecuación en diferencias del ejemplo anterior, nos preguntamos qué pasa si tomamos como soluciones:

$$x_n^{(1)} = i^n$$
$$x_n^{(2)} = (-i)^n$$

Iterando, llegamos a que:

$$\{x_n^{(1)}\} = \{1, i, -1, -i, 1, \dots\}$$
$$\{x_n^{(2)}\} = \{1, -i, -1, i, 1, \dots\}$$

Ambas soluciones son un $4-$ciclo. Quedándonos con las partes real e imaginaria, tenemos:

$$\Re(\{x_n^{(1)}\}) = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$$
$$\Im(\{x_n^{(1)}\}) = \{0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$
$$\Re(\{x_n^{(2)}\}) = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$$
$$\Im(\{x_n^{(2)}\}) = \{0, -1, 0, 1, 0, \dots\}$$

Notamos que las 4 sucesiones de números reales obtenidas también son soluciones a la ecuación en diferencias.

Recordamos que, dado un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es raíz de p, entonces $\overline{\lambda}$ también es raíz de p. Por tanto, siempre que $\lambda \in \mathbb{C}$ sea raíz de un polinomio característico de una ecuación de la forma 2.1, entonces $\{\lambda^n\}$ y $\left\{\overline{\lambda}^n\right\}$ serán soluciones de la ecuación en diferencias asociada al polinomio característico. Recordamos también que dado un número complejo λ con módulo ρ y argumento θ, podemos expresarlo en forma polar como:

$$\lambda = \rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen} \theta)$$
$$\overline{\lambda} = \rho(\cos(\theta) - i \operatorname{sen} \theta) = \rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$$

Usando la Fórmula de Moivre, tenemos:

$$\lambda^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen} n\theta)$$
$$\overline{\lambda}^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Además, si $\lambda = a + bi$, $\overline{\lambda} = a - bi$, podemos obtener su parte real y su parte imaginaria como:

$$a = \Re(\lambda) = \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} \in \mathbb{R} \qquad\qquad b = \Im(\lambda) = \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i} \in \mathbb{R}$$

Por tanto, ahora consideramos las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ siguientes, que toman valores reales puesto que $a, b \in \mathbb{R}$ y $\overline{\lambda}^n = \overline{\lambda^n}$:

$$x_n = \frac{\lambda^n + \overline{\lambda}^n}{2} = \Re(\lambda^n) \qquad\qquad y_n = \frac{\lambda^n - \overline{\lambda}^n}{2i} = \Im(\lambda^n)$$

Y como $\{\lambda^n\}$ y $\left\{\overline{\lambda}^n\right\}$ son soluciones de la ecuación en diferencias dada, entonces $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son también soluciones porque son combinaciones lineales de dos soluciones. Además, estas dos son reales y linealmente independientes en el espacio de sucesiones de $\mathbb{C}$, luego en el de $\mathbb{R}$.

Resumiendo, si nuestro polinomio característico tiene una raíz compleja, entonces sabemos que tiene al menos 2 y que la ecuación en diferencias asociada tiene también dos soluciones reales, que coinciden con la parte real e imaginaria de la solución dada por la raíz y que además son linealmente independientes, luego si el orden de la ecuación era 2, la tenemos resuelta.

Por tanto, y a modo de resumen, con un polinomio característico con coeficientes reales asociado a una ecuación en diferencias de orden 2 ocurrirán las siguientes casuísticas:

- Si tiene raíces reales distintas, sabemos ya resolverlo.
- Si no tiene raíces reales, tendrá dos raíces complejas (conjugadas), y la parte real e imaginaria de estas formarán dos soluciones linealmente independientes.
- Si tiene una raíz reales con multiplicidad doble, no sabemos aún qué hacer. Lo veremos en la siguiente sección.

Por otra parte, notemos que si el polinomio característico dado tiene coeficientes complejos, no podemos asegurar que si λ es una raíz de dicho polinomio, entonces $\overline{\lambda}$ también lo será, luego no podemos aplicar lo dicho. No obstante, por norma general esta situación no se nos dará en la asignatura de Modelos Matemáticos I.

Ejercicio. Resolver la ecuación en diferencias siguiente:

$$(\text{PVI}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_0, \ x_1 \text{ dado} \end{array} \right.$$

Como caso particular, emplear $x_0 = x_1 = 1$.

2.1.3. Soluciones con multiplicidad múltiple

A continuación, veremos qué ocurre cuando la multiplicidad es múltiple, ya que en este caso no podríamos obtener una base de $\ker L$ de forma directa. Veamos el siguiente ejemplo concreto para multiplicidad doble.

Ejemplo. Se pide resolver la recurrencia:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$$

Su polinomio característicos es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Luego $\{x_n\} = \{1^n\} = \{1\}$ es solución de la ecuación. No obstante, como sabemos que $\dim \ker L = 2$, nos falta otra solución linealmente independiente con $\{1\}$ para poder obtener la forma general de todas las soluciones. Nos preguntamos ahora si $\{x_n\} = \{n\}$ es solución de la ecuación:

$$(n+2) - 2(n+1) + n = n + 2 - 2n - 2 + n = 0$$

Por tanto, sí que es solución. Nos preguntamos ahora si $\{1\}$ y $\{n\}$ son linealmente independientes. La respuesta es afirmativa, luego todas las sucesiones de la ecuación se encuentran en el subespacio vectorial generado por los vectores $\{\{1\}, \{n\}\}$. Es decir, son de la forma:

$$\{x_n\} = \{a + b \cdot n\} \qquad a, b \in \mathbb{K}$$

En el ejemplo anterior, se podría decir que hemos tenido la "suerte" de obtener que $\{n\}$ es una solución. A continuación, vamos a razonar por qué se ha obtenido dicho valor. Para ello, recordamos el siguiente lema, cuya demostración no se incluye por ser materia de Álgebra I.

Lema 2.6. *Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$. Supongamos que λ es una raíz de p con multiplicidad m, es decir,*

$$p(x) = (x - \lambda)^m q(x) \qquad q \in \mathbb{K}[x]$$

Entonces, $p^{r)}(\lambda) = 0$ para todo $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ y $p^{m)} \neq 0$.

Usando dicho lema, vamos a demostrar la siguiente proposición, que será un caso particular del Teorema 2.8 para multiplicidad doble:

Proposición 2.7. *Sea una ecuación lineal de orden k de la forma 2.1, y sea λ una raíz del polinomio característico con multiplicidad 2. Entonces, $\{n\lambda^n\}$ es una solución de la ecuación de la parte homogénea de dicha ecuación.*

Demostración. Tenemos que el polinomio característico de la ecuación es:

$$p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$$

Definimos ahora el polinomio siguiente:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{n+k} + a_{k-1}x^{n+k-1} + \cdots + a_0 x^n = \\ &= x^n p(x) \end{aligned}$$

Derivando g, obtenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (n+k)x^{n+k-1} + a_{k-1}(n+k-1)x^{n+k-2} + \cdots + a_0 n x^{n-1} = \\ &= n x^{n-1} p(x) + x^n p'(x) \end{aligned}$$

Como λ es raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2, tenemos:

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= (n+k)\lambda^{n+k-1} + a_{k-1}(n+k-1)\lambda^{n+k-2} + \cdots + a_0 n \lambda^{n-1} = \\ &= n\lambda^{n-1} \cancelto{0}{p(\lambda)} + \lambda^n \cancelto{0}{p'(\lambda)} = 0 \end{aligned}$$

Queremos ver ahora que $\{n\lambda^n\}$ es solución de la ecuación. Veamos si la verifica:

$$\begin{aligned} &(n+k)\lambda^{n+k} + (n+k-1)a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \cdots + n a_0 \lambda^n = \\ &\quad = \lambda \cdot \left[(n+k)\lambda^{n+k-1} + (n+k-1)a_{k-1}\lambda^{n+k-2} + \cdots + n a_0 \lambda^{n-1}\right] = \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\{n\lambda^n\}$ es solución. □

Ejercicio. Dada una recurrencia de orden k de la forma 2.1 y $\lambda \in \mathbb{K}$ raíz del polinomio característico con multiplicidad 2, se pide ver si $\{q(n)\lambda^n\}$ con q un polinomio de grado 1 es solución de la recurrencia.

Sí, porque al ser q de grado 1, tenemos que $q(n) = a + bn$ para ciertos $a, b \in \mathbb{K}$ y por tanto:

$$\{q(n)\lambda^n\} = \{(a + bn)\lambda^n\} = \{a\lambda^n + bn\lambda^n\}$$

Como se ha visto que $\{\lambda^n\}$, $\{n\lambda^n\}$ son soluciones, una combinación lineal de ambas también lo será, por lo que $\{q(n)\lambda^n\}$ es solución de la recurrencia.

El teorema general es el siguiente, solo que no se incluirá la demostración por ser esta de excesiva complejidad.

Teorema 2.8. *Sea una ecuación lineal de orden k de la forma 2.1, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ una raíz del polinomio característico con multiplicidad $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$. Entonces, $\{\lambda^n\}, \{n\lambda^n\}, \ldots, \{n^{m-1}\lambda^n\}$ son soluciones de la ecuación de la parte homogénea de dicha ecuación. Además, se tiene que $\{\lambda^n\}, \{n\lambda^n\}, \ldots, \{n^{m-1}\lambda^n\}$ son linealmente independientes.*

2.1.4. Forma general de la solución de la parte homogénea

A modo de resumen, dada una ecuación lineal de orden k de la forma 2.1, su polinomio característico lo podemos escribir como:

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $\forall i \in \{1, \ldots, \sigma\}$ es una raíz del polinomio característico, $m_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \{1, \ldots, \sigma\}$ es su multiplicidad y σ es el número de soluciones distintas del polinomio característico.

Como consecuencia de todo lo anteriormente visto, tenemos que las soluciones de la ecuación lineal 2.1 son de la forma:

$$x_n = \sum_{i=1}^{\sigma} f_i(n)\lambda_i^n$$

Con cada $f_i \in \mathbb{K}[x]$ polinomios con $\deg(f_i) < m_i$.

2.2. Comportamiento asintótico de las soluciones

Introducimos la siguiente definición que, al igual que ocurría con la definición de polinomio característico de una recurrencia, se entenderá en el siguiente tema, donde generalizaremos dicha definición.

Definición 2.7 (Espectro)**.** Llamamos "espectro" de una recurrencia al conjunto de raíces de un polinomio característico p de la ecuación 2.1, y lo notaremos por $\sigma(p)$:

$$\sigma(p) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p(\lambda) = 0\}$$

Habitualmente, notaremos por σ al número de valores propios distintos; es decir, $\sigma = |\sigma(p)|$.

Definición 2.8 (Radio Espectral)**.** Llamamos "radio espectral" de una recurrencia al máximo de los valores absolutos de los elementos de $\sigma(p)$:

$$\rho(p) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(p)\}$$

Proposición 2.9. *Dada una ecuación lineal de orden k de la forma 2.1 con polinomio característico p, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todas las soluciones de la ecuación homogénea tienden a 0.*
2. $\rho(p) < 1$.

Demostración. Demostramos por doble implicación:

1) $\Longrightarrow$ 2) Demostraremos el recíproco. Supongamos que $\exists \lambda_i \in \sigma(p)$ con $|\lambda_i| \geqslant 1$. Entonces, tenemos que $\{\lambda_i^n\}$ es una solución, con:

$$|\lambda_i^n| = |\lambda_i|^n \geqslant 1 \qquad \forall n$$

Por tanto, tenemos que no es posible que $\{\lambda_i^n\}$ converja a 0.

2) $\Longrightarrow$ 1) Como hemos visto, todas las soluciones son de la forma:

$$x_n = \sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} f_i(n)\lambda_i^n$$

Tomando módulos, tenemos que:

$$|x_n| = \left|\sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} f_i(n)\lambda_i^n\right| \leqslant \sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} |f_i(n)||\lambda_i^n| = \sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} |f_i(n)||\lambda_i|^n \leqslant \rho(p)^n \sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} |f_i(n)|$$

Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, \sigma\}$, tenemos que $f_i \in \mathbb{K}[n]$ con $\deg f_i < m \leqslant k$. Por tanto, y usando la notación O grande usual en Algorítmica[3], tenemos que $f_i \in O(n^{k-1})$, por lo que $\exists C_i \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f_i(n)| \leqslant C_i \cdot n^{k-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos que:

$$0 \leqslant |x_n| \leqslant n^{k-1}\rho(p)^n \cdot \sum_{i=1}^{|\sigma(p)|} C_i$$

Como $\{n^{k-1}\rho(p)^n\} \to 0$ por ser $\rho(p) \in [0, 1[$, se tiene que $\{x_n\} \to 0$.

□

[3] Debido a que estos ejercicios están orientados a alumnos del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas, se presupone conocida esta notación. En caso contrario, se ha de probar que dado un polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$ de grado n, existe una constante $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leqslant C \cdot x^n$ para todo $x \geqslant 1$.

La utilidad de esta proposición no es tanto calcular las raíces y luego aplicarla, sino aplicarla sin incluso conocer las raíces. Esto se debe a que existen diversos criterios que nos informan sobre este hecho, como el siguiente (válido para polinomios de grado 2):

Lema 2.10. *Sea $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ y sean λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ las raíces de p. Entonces, se tiene que:*

$$|\lambda_1|,\ |\lambda_2| < 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} p(1) > 0 & \Longleftrightarrow & 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) > 0 & \Longleftrightarrow & 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ p(0) < 1 & \Longleftrightarrow & a_0 < 1 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Demostración. Si λ_1 y λ_2 son raíces de p, entonces:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Por tanto, concluimos que $\lambda_1\lambda_2 = a_0$.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $|\lambda_1| < 1$ y que $|\lambda_2| < 1$:

$$|a_0| = |\lambda_1||\lambda_2| = |\lambda_1\lambda_2| < 1 \Longrightarrow a_0 < 1 \Longrightarrow p(0) < 1$$

Veamos ahora que $p(1), p(-1) > 0$ mediante contradicciones.

- Supongamos que $p(1) \leqslant 0$. Como la parábola es convexa, tenemos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} p(\lambda) = \infty$. Por tanto, por el Teorema de los Ceros de Bolzano, $\exists \lambda \in [1, +\infty[$ tal que $p(\lambda) = 0$. No obstante, es una contradicción, ya que todas las raíces del polinomio cumplen que $|\lambda| < 1$.
- Supongamos que $p(-1) \leqslant 0$. Como la parábola es convexa, tenemos que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} p(\lambda) = \infty$. Por tanto, por el Teorema de los Ceros de Bolzano, $\exists \lambda \in]-\infty, -1]$ tal que $p(\lambda) = 0$. No obstante, es una contradicción, ya que todas las raíces del polinomio cumplen que $|\lambda| < 1$.

$\Longleftarrow$) Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que p tiene dos raíces; sean estas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Distinguimos en función de si son reales o complejas:

- Si $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tenemos que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, de donde:

$$a_0 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 < 1 \Longrightarrow |\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1$$

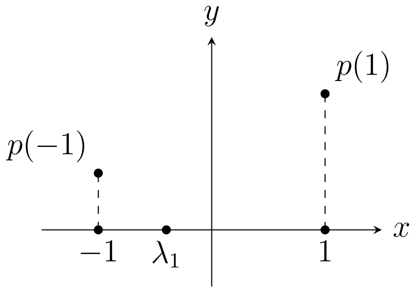
- Si λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:
  Sabemos que $\lambda_1\lambda_2 = a_0 < 1$. Además, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \end{array} \right.$$

  Sumando, tenemos que $2 + 2a_0 > 0 \Longleftrightarrow a_0 > -1$, de lo que deducimos que $|a_0| < 1$. Por tanto, tenemos que:

$$|a_0| = |\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| < 1$$

Por tanto, al menos una raíz tiene módulo menor que 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que es λ_1; es decir, $|\lambda_1| < 1$.



Por los valores que toma la parábola p en las abscisas $-1, \lambda_1, 1$, deducimos que se produce un cambio de monotonía en el intervalo $]-1, 1[$. Por tanto, respecto de su monotonía tenemos:

- Si $\lambda \leqslant -1$: Tenemos que p es estrictamente decreciente, por lo que $p(\lambda) \geqslant p(-1) > 0$. Por tanto, λ_2 no pertenece a este intervalo.
- Si $\lambda \geqslant 1$: Tenemos que p es estrictamente creciente, por lo que $p(\lambda) \geqslant p(1) > 0$. Por tanto, λ_2 no pertenece a este intervalo.

Por tanto, deducimos que $\lambda_2 \in]-1, 1[$, y por tanto también llegamos a que $|\lambda_2| < 1$.

□

Corolario 2.10.1. *Como consecuencia, si $\{x_n\}$ es solución de una ecuación lineal de orden 2 y se cumplen las tres condiciones del Lema 2.10, de la Proposición 2.9 deducimos que $\{x_n\} \to \{0\}$.*

A continuación, estudiaremos aplicaciones de las ecuaciones en diferencias lineales a la economía. Vamos a ver dos modelos que describen la evolución de la renta de un país, el primero de orden 1 (Modelo del efecto multiplicador) y el segundo de orden 2 (Modelo de Samuelson).

2.3. Modelo del efecto multiplicador

El siguiente modelo macro-económico incluye las siguientes magnitudes:

- Y representa la renta nacional.
- C el consumo privado (de empresas o particulares).
- I representa la inversión (puede ser privada, pública, ...)

Las hipótesis que se consideran en este modelo son:

- Suponemos que se gasta toda la renta en el consumo y la inversión.
- Suponemos que no hay déficits.
- Suponemos también que la inversión I es constante, $I \in \mathbb{R}^+$.

Modelo estático

En este caso, el consumo privado, $C \in \mathbb{R}^+$, es constante también, por lo que:

$$Y = C + I \qquad C, I \in \mathbb{R}^+$$

Esto implica que la renta no cambia a lo largo del tiempo, se mantiene de igual forma constante. Notemos que este modelo no tiene gran interés.

Modelo dinámico

Sea n el número de unidades temporales (posiblemente años, o meses), y buscamos obtener la renta nacional de cada etapa. En este caso, el consumo C_n es lineal en función de la renta:

$$C_n = \alpha Y_{n-1} + a, \qquad\qquad a \in \mathbb{R}^+,\ \alpha \in]0,1[$$

La marginal α indica la tendencia al gasto (qué porcentaje de la renta gastamos), mayor cuanto más cercano es el valor de α a 1. La renta nacional de cada etapa queda:

$$Y_n = C_n + I_n = \alpha Y_{n-1} + a + I \qquad a, I \in \mathbb{R}^+,\ \alpha \in]0,1[\tag{2.3}$$

2.3.1. Soluciones del modelo

Buscamos ahora las soluciones del modelo del efecto multiplicador dinámico. Primero, resolvemos la ecuación homogénea:

$$Y_n^{(h)} = \alpha^n Y_0^{(h)}$$

Posteriormente, buscamos una solución particular de 2.3. La forma más fácil es buscar una solución constante Y_e:

$$Y_e = \alpha Y_e + a + I \Longleftrightarrow Y_e = \frac{a+I}{1-\alpha} = \frac{a}{1-\alpha} + \frac{I}{1-\alpha}$$

De esta forma, todas las soluciones del modelo son de la forma:

$$Y_n = \alpha^n Y_0^{(h)} + \frac{a+I}{1-\alpha}$$

Si conocemos Y_0, la evolución de la renta viene dada por:

$$Y_n = (Y_0 - Y_e)\alpha^n + Y_e \qquad \text{con} \quad Y_e = \frac{a+I}{1-\alpha}$$

Por ser $\alpha \in]0,1[$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y_e$.

Como $0 < \alpha < 1$, tenemos que $1 < \frac{1}{1-\alpha}$ por lo que $Y_e > I$. Por tanto, a largo plazo tendremos una renta mayor que la inversión realizada, produciéndose un efecto “multiplicador”. De aquí viene el nombre del modelo.

2.4. Modelo de Samuelson

También llamado modelo del efecto acelerador/desacelerador, se trata de una modificación del modelo del efecto multiplicador. Parte de las mismas premisas pero en este caso se supone que la inversión no es constante, y que está dividida en inversión pública y privada:

$$I = I_{\text{pública}} + I_{\text{privada}}$$

- La inversión pública (también llamada gasto) se supone constante:

$$I_{\text{pública}} = G \in \mathbb{R}^+$$

- La inversión privada viene dada por:

$$I_{\text{privada}_n} = \beta(C_n - C_{n-1}) \qquad \beta \in \mathbb{R}^+$$

  De esta forma, si el producto fue rentable en el año anterior y el consumo aumentó, la inversión aumenta (se acelera). Por otra parte, la inversión disminuye (desacelera) si el consumo disminuyó. El valor β se conoce como *coeficiente acelerador*.

De esta forma, tenemos que la inversión es:

$$I_n = I_{\text{pública}} + I_{\text{privada}_n} = G + \beta(C_n - C_{n-1}) \qquad G, \beta \in \mathbb{R}^+$$

El consumo, no obstante, no cambia respecto del modelo anterior.

$$C_n = \alpha Y_{n-1} + a \qquad a \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha \in \,]0,1[$$

Escribimos la ecuación del modelo:

$$\begin{aligned} Y_n &= C_n + I_n \\ &= \alpha Y_{n-1} + a + G + \beta(C_n - C_{n-1}) \\ &= \alpha Y_{n-1} + a + G + \beta(\alpha Y_{n-1} + \cancel{a} - \alpha Y_{n-2} - \cancel{a}) \\ &= \alpha Y_{n-1} + a + G + \beta\alpha Y_{n-1} - \beta\alpha Y_{n-2} \\ &= \alpha(\beta + 1)Y_{n-1} - \beta\alpha Y_{n-2} + a + G \end{aligned}$$

Muchos autores simplifican la parte constante $G + a$, llamándole G (entendiendo que engloba al gasto más la constante a). De esta forma, la ecuación del modelo de Samuelson nos queda:

$$Y_n = \alpha(\beta + 1)Y_{n-1} - \alpha\beta Y_{n-2} + G \tag{2.4}$$

Una ecuación de orden 2, que puede escribirse también de la forma:

$$Y_{n+2} = \alpha(\beta + 1)Y_{n+1} - \alpha\beta Y_n + G$$

2.4.1. Soluciones del modelo

Comenzamos pues buscando primero una solución particular de la ecuación 2.4. Suponemos que existe una solución constante Y_e y procedemos a calcularla:

$$\begin{aligned} Y_e &= \alpha(\beta+1)Y_e - \alpha\beta Y_e + G \\ &= \alpha Y_e(\beta+1-\beta) + G \\ &= \alpha Y_e + G \end{aligned}$$

Por tanto, la solución constante tenemos que es:

$$Y_e = \frac{G}{1-\alpha}$$

A continuación, resolvemos la parte homogénea de 2.4:

$$Y_n = \alpha(1+\beta)Y_{n-1} - \alpha\beta Y_{n-2}$$

Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha(1+\beta)\lambda + \alpha\beta$$

Buscamos aplicar el Lema 2.10, para evitar calcular las raíces de p:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta = 1 - \alpha > 0 \\ p(-1) &= 1 + \alpha(1+\beta) + \alpha\beta > 0 \\ p(0) &= \alpha\beta \end{aligned}$$

Aplicando dicho Lema, tenemos que:

- Si $\alpha\beta < 1$, entonces las soluciones de la parte homogénea tienden a cero, de donde cualquier solución de 2.4 tiende a la solución de equilibrio $Y_e = \frac{G}{1-\alpha}$.
- Si $\alpha\beta \geqslant 1$, entonces Y_e no es atractor, puesto que las soluciones de la parte homogénea no tenderán a 0.

3. Sistemas de Ecuaciones en Diferencias

En este tema, estudiaremos sistemas de ecuaciones en diferencias no autónomos. Es decir, los que son de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{array}\right.$$

Con $f, g : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, donde a menudo podremos sustituir el cuerpo $\mathbb{K}$ por cualquier subconjunto no vacío suyo $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{K}$, de forma que $f(I) \subseteq I$.

Ejemplo. Dado el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + a \\ y_{n+1} = 2y_n + y_n^2 \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$$

Donde $f(x, y) = x + a$ y $g(x, y) = 2y + y^2$. Observamos que la relación entre x_n e y_n es inexistente, son variables desacopladas, que podríamos ver como dos ecuaciones independientes.

Ejemplo. Un ejemplo de sistema de ecuaciones en diferencias es:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n(ax_n + by_n + c) \\ y_{n+1} = y_n(dx_n + ey_n + f) \end{array}\right. \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

donde:

$$f(x, y) = x(ax + by + c)$$
$$g(x, y) = y(dx + ey + f)$$

Es un sistema no lineal, ya que las ecuaciones que aparecen no son lineales. Se trata de la versión discreta de un modelo presa-depredador, donde tenemos dos entidades (dos especies, dos empresas, ...) que compiten entre ellas.

Ejemplo. Un ejemplo de un sistema de ecuaciones en diferencias lineal es:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{array}\right. \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Donde podemos observar que las funciones asociadas son lineales:

$$f(x, y) = ax + by$$
$$g(x, y) = cx + dy$$

Ejemplo. Además, podemos tener sistemas de ecuaciones en diferencias no autónomas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = nx_n y_n \\ y_{n+1} = y_n^2 + n^2 \end{array}\right.$$

donde tenemos:

$$f(x, y, n) = nxy$$
$$g(x, y, n) = y^2 + n^2$$

en este caso, f y g son funciones con dominio $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{N}_0$.

3.1. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Comenzaremos el estudio de los sistemas de ecuaciones en diferencias estudiando primero el tipo más sencillo: los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales. Estos sistemas estarán dados por $m \in \mathbb{N}$ ecuaciones en diferencias lineales, siendo el sistema de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_{1,n+1} & = & a_{1,1}x_{1,n} & + & a_{1,2}x_{2,n} & + & \cdots & + & a_{1,m}x_{m,n} & + & b_{1,n} \\ x_{2,n+1} & = & a_{2,1}x_{1,n} & + & a_{2,2}x_{2,n} & + & \cdots & + & a_{2,m}x_{m,n} & + & b_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m,n+1} & = & a_{m,1}x_{1,n} & + & a_{m,2}x_{2,n} & + & \cdots & + & a_{m,m}x_{m,n} & + & b_{m,n} \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Con $a_{j,n},\ b_{j,n} \in \mathbb{K} \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dado un sistema de ecuaciones lineales en diferencias de la forma 3.1, podemos expresarlo de forma matricial definiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, los vectores $X_n,\ B_n$ de la forma:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \qquad B_n = \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \\ \vdots \\ b_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Definimos también la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

Tenemos entonces que el sistema puede expresarse de forma matricial como:

$$X_{n+1} = MX_n + B_n \tag{3.2}$$

3.1.1. Equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de orden superior

En la presente sección, veremos la equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de orden superior, ya que todo sistema de ecuaciones lineales en diferencias se puede expresar como una ecuación lineal de orden superior, y viceversa.

Sistemas de ecuaciones lineales como ecuaciones lineales.

Estos sistemas de m ecuaciones pueden convertirse en ecuaciones en diferencias de orden m. Este proceso es complejo cuando hay más de dos ecuaciones, por lo que lo planteamos tan solo para un sistema de 2 ecuaciones como el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = ax_n + by_n + e_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f_n \end{array}\right. \qquad a,b,c,d \in \mathbb{K}, \quad e_n, f_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

De la primera ecuación, tenemos que $by_n = x_{n+1} - ax_n - e_n$. Sustituimos el valor de y_n de la segunda ecuación en la primera, obteniendo:

$$x_{n+1} = ax_n + b\left(cx_{n-1} + dy_{n-1} + f_{n-1}\right) + e_n$$

Sustituyendo ahora el valor de y_n despejado inicialmente, tenemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b\left(cx_{n-1} + \frac{d}{b}\left(x_n - ax_{n-1} - e_{n-1}\right) + f_{n-1}\right) + e_n \\ &= (a+d)x_n + (bc - ad)x_{n-1} - de_{n-1} + bf_{n-1} + e_n \end{aligned}$$

Notemos que el polinomio característico de la ecuación de orden 2 obtenida es el asociado a la matriz M formada por los coeficientes de las partes homogéneas del sistema dado:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad\qquad p_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Ecuaciones lineales como sistemas de ecuaciones lineales en diferencias.

Por un lado, en el apartado anterior hemos visto para el caso de 2 ecuaciones, que un sistema de ecuaciones lineales en diferencias se puede expresar como una única ecuación de orden mayor. Veamos ahora el proceso opuesto, que cada ecuación en diferencias lineal de orden k se puede escribir como un sistemas lineal de ecuaciones en diferencias.

- $\underline{k=1}$:

  $$x_{n+1} = ax_n + b_n$$

  Trivialmente, se trata de un sistema lineal de ecuaciones, aunque con tan solo una ecuación.

- $\underline{k=2}$:

  $$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b_n$$

  Podemos escribirla de forma matricial. Sean la matrices $X_n,\ B_n$ dadas por:

  $$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ b_n \end{pmatrix}$$

  Definimos la matriz de coeficientes M por:

  $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que $X_{n+1} = MX_n + B_n$, llegando entonces a lo buscado. Además, puede probarse que el polinomio característico de M es:

$$p_M(\lambda) = \det|M - \lambda I| = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Efectivamente, coincide con el polinomio característico de la recurrencia, de ahí el origen del nombre.

- Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k > 2$:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_0x_n = 0$$

Que también escribimos de forma matricial, con:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sea la matriz de coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Obtenemos entonces el sistema $X_{n+1} = MX_n + B_n$, llegando a lo buscado. Además, puede probarse que el polinomio característico de M es:

$$p_M(\lambda) = \det|M - \lambda I| = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$$

Efectivamente, coincide con el polinomio característico de la recurrencia, de ahí el origen de las definiciones vistas en el Tema 2, como polinomio característico de una recurrencia, espectro de una recurrencia, etc.

3.1.2. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones lineales en diferencias de la forma 3.1 con el término independiente $B_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (es decir, un sistema homogéneo), el sistema en forma matricial queda de la forma:

$$X_{n+1} = MX_n \tag{3.3}$$

Veamos algunas formas de resolver este tipo de sistemas.

Opción 1. Convertir a única ecuación.

En primer lugar, para resolver el sistema podemos convertirlo en una única ecuación de orden superior, y resolver dicha ecuación en diferencias lineal como se vio en el Tema 2. No obstante, para un número elevado de ecuaciones esto puede ser complejo, por lo que no suele ser la opción aconsejada.

Opción 2. Calcular potencia $n-$ésima.

El sistema que nos ha quedado nos recuerda al Modelo de Malthus ya estudiado, por lo que podemos deducir (se demuestra fácilmente mediante inducción) que las soluciones a los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales homogéneos serán de la forma:

$$X_n = M^n X_0$$

Para calcular la potencia $n-$ésima, en el caso de que M sea diagonalizable podremos resolver dicha potencia sin problema ninguno usando conocimientos de Diagonalización, estudiado en Geometría II. Otra opción (a priori más complicada) es calcular directamente la potencia $n-$ésima, usando para ello inducción.

Ejemplo. Resuelve el sistema de ecuaciones en diferencias linea homogéneo siguiente en función de $X_0 \in \mathbb{K}^2$ dado:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X_n$$

Tenemos que la solución es:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n X_0$$

Para calcular la matriz $n-$ésima, diagonalizamos la matriz. Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Calculamos los vectores propios asociados:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - Id \right] x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2Id \right] x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad X_n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} X_0$$

Opción 3. Obtener base del espacio de soluciones.

Siguiendo la misma notación que se vio en el Tema 2, sea $\mathcal{S}^m = (\mathbb{K}^m)^{\mathbb{N}}$ el espacio de sucesiones de vectores de m componentes sobre $\mathbb{K}$. Debido a la equivalencia entre sistemas y ecuaciones lineales, tenemos que el sistema matricial de la forma 3.3

se puede expresar como una ecuación de orden m, luego el núcleo de la función definida en la Definición 2.5 (que coincide con el espacio de soluciones de la ecuación homogénea) tendrá a su vez dimensión m, que era el número de ecuaciones del sistema. Por tanto, tenemos que la dimensión del espacio de soluciones de un sistema de m ecuaciones en diferencias lineales es m; $\dim \ker L = m$. Veamos ahora cómo obtener elementos $\ker L$.

Proposición 3.1. *Sea un sistema de ecuaciones en diferencias lineales homogéneo de la forma 3.3. Si λ es un valor propio de M y v_λ es un vector propio asociado a λ, entonces:*

$$X_n = \lambda^n v_\lambda \in \ker L$$

Demostración. Hemos de ver que $X_{n+1} = MX_n$, usando que $X_n = \lambda^n v_\lambda$. Tenemos:

$$X_{n+1} = \lambda^{n+1} v_\lambda = \lambda^n \cdot \lambda v_\lambda = \lambda^n M \cdot v_\lambda = M\lambda^n v_\lambda = MX_n$$

Por tanto, queda demostrado lo buscado. □

Ejemplo. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales en diferencias, dado por:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X_n$$

El polinomio característico de la matriz es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 - 8 = \lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3)$$

Calculemos los vectores propios asociados:

$$\begin{aligned} V_3 &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 3Id \right] x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{-3} &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 3Id \right] x = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, como $\dim \ker L = m = 2$, hemos encontrado una base del espacio de soluciones. Tenemos que una solución X_n genérica de la ecuación será:

$$X_n = c_1 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

Opción 4. Usaremos el Teorema de Cayley-Hamilton.

Recordamos el Teorema de Cayley-Hamilton, cuya demostración no se incluye por ser materia del temario de Geomtría II.

Teorema 3.2 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, y sea $p(\lambda)$ su polinomio característico. Entonces, A anula al polinomio característico:*

$$p(A) = 0$$

Veamos ahora cómo nos ayuda este Teorema a estudiar los sistemas homogéneos, de la forma 3.3. Sea el polinomio característico de M el siguiente:

$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$$

donde, recordamos, m es el número de ecuaciones que forman el sistema. Entonces, por el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que:

$$M^m + a_{m-1}M^{m-1} + \cdots + a_0 \cdot Id = 0 \Longrightarrow M^m = -a_{m-1}M^{m-1} - \cdots - a_0 \cdot Id$$

Estudiemos ahora la solución de X_n. Sea $n > m$, ya que nos interesarán iteraciones mayores, ya que las primeras las podremos calcular manualmente. Tenemos:

$$\begin{aligned}
X_n &= M^n X_0 = M^{n-m} M^m X_0 \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} M^{n-m}\left(-a_{m-1}M^{m-1} - \cdots - a_0 \cdot Id\right) X_0 = \\
&= -a_{m-1}M^{n-1}X_0 - \cdots - a_0 \cdot M^{n-m}X_0 \\
&= -a_{m-1}X_{n-1} - \cdots - a_0 \cdot X_{n-m}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos aplicado el Teorema de Cayley-Hamilton. Por tanto, hemos llegado a una recurrencia de vectores, donde no encontramos matrices, por lo que se trata de resolver una recurrencia por cada componente de X_n, es decir, m recurrencias, que sabemos resolver tal y como se vio en el Tema 2. Notemos que todas ellas son iguales salvo los valores iniciales, por lo que este hecho nos facilitará el cálculo de las soluciones, al solo tener que resolver de forma general una de las recurrencias.

Comportamiento asintótico de los sistemas lineales homogéneos.

En la presente sección, estudiaremos el comportamiento asintótico de un sistema de ecuaciones en diferencias lineales homogéneo, de la forma 3.3. Incluimos las siguientes definiciones, que dan sentido a las respectivas definiciones que hicimos en el Tema 2 para recurrencias.

Definición 3.1 (Espectro)**.** Sea el espectro de una matriz $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ el conjunto sus valores propios:

$$\begin{aligned}
\sigma(M) :&= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p(\lambda) = 0\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists v \in \mathbb{K}^m,\ v \neq 0,\ \text{con } Mv = \lambda v\}
\end{aligned}$$

Definición 3.2 (Radio Espectral)**.** Sea el radio espectral de una matriz $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ el máximo de los valores absolutos (en el caso de $\mathcal{C}$, el módulo) de sus valores propios:

$$\rho(M) := \text{máx}\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}$$

Definición 3.3 (Valor propio dominante)**.** Sea $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ una matriz, y sea $\sigma(M)$ su espectro. Se dice que $\lambda_i \in \sigma(M)$ es el valor propio dominante de M si $\lambda_i > 0$, la multiplicidad de λ_i es simple y, además:

$$\lambda_i > |\lambda| \quad \forall \lambda \in \sigma(M),\ \lambda \neq \lambda_i$$

Incluimos además el siguiente lema, cuya demostración no se incluye por no formar parte del objetivo de la presente asignatura, sino de Álgebra Lineal.

Lema 3.3. *Sea $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ una matriz, y sea $\rho(M)$ su radio espectral. Tenemos que:*

$$\lim_{n\to\infty} M^n = 0 \Longleftrightarrow \rho(M) < 1$$

El anterior lema tiene un importante corolario, que nos será de utilidad y que es de demostración inmediata.

Corolario 3.3.1. *Dado un sistema de ecuaciones lineales en diferencias homogéneo de la forma 3.3, se verifica que:*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \Longleftrightarrow \rho(M) < 1$$

Demostración. Se ha visto que $X_n = M^n X_0$, con $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Como $\rho(M) < 1$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} M^n X_0 = 0 \cdot X_0 = 0$$

□

Veamos ahora cómo determinar $\rho(M)$ de formas más sencillas. De forma directa por la definición, tenemos lo siguiente:

Observación. Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ valor propio dominante de A. Entonces, tenemos que:

$$\rho(A) = \lambda_i$$

Veamos ahora cómo acotar $\rho(M)$ con el siguiente resultado, el cual no se demuestra por ser materia de Álgebra Lineal.

Proposición 3.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, y sea $\|\cdot\|$ una norma matricial cualquiera. Tenemos que:*

$$\rho(A) \leqslant \|A\|$$

Proposición 3.5. *Dado un sistema de ecuaciones lineales en diferencias homogéneo de la forma 3.3, si M es una matriz con valor propio dominante λ_i, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\lambda_i^n} = \alpha v_{\lambda_i}$$

donde $v_{\lambda_i} \in \mathbb{K}^m$ es un vector propio asociado a λ_i y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demostración. Dado $v \in \mathbb{K}^m$, usaremos la notación $v(k)$ para notar la componente $k-$ésima de v, donde $k \in \{1, \dots, m\}$.

Por la forma de resolver los sistemas homogéneos empleando el Teorema de Cayley-Hamilton vista, para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ tenemos que

$$x_n(k) = c_i(k)\lambda_i^n + \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{|\sigma(p)|} c_j(k)p_j(n)\lambda_j^n$$

donde hemos usado que λ_i tiene multiplicidad simple y, por lo visto en el Tema 2, para cada $j \in \{1, \dots, |\sigma(M)|\}$, $j \neq i$ tenemos que $p_j \in \mathbb{K}[n]$ es un polinomio con grado $\deg p_j(n) < m_j$, donde m_j es la multiplicidad de λ_j. Dividiendo entre λ_i^n, tenemos:

$$\left(\frac{x_n}{\lambda_i^n}\right)(k) = c_i(k) + \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{|\sigma(p)|} c_j(k)p_j(n)\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^n$$

Como se vio en su momento, debido a la notación O grande usual en Algorítmica, para cada $j \in \{1, \dots, |\sigma(M)|\}$, $j \neq i$ tenemos que $p_j \in O(n^{m_j-1})$, por lo que $\exists C_j \in \mathbb{R}^+$ tal que $|p_j(n)| \leqslant C_j \cdot n^{m_j-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ que:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left|\left(\frac{x_n}{\lambda_i^n}\right)(k)\right| - |c_i(k)| &\leqslant \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{|\sigma(p)|} |c_j(k)| \cdot |p_j(n)| \cdot \left(\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right|\right)^n \\ &\leqslant \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{|\sigma(p)|} |c_j(k)| \cdot C_j \cdot n^{m_j-1} \cdot \left(\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right|\right)^n \end{aligned}$$

como λ_i es el valor propio dominante, tomando límite tenemos lo buscado, notando por α a:

$$\alpha = \frac{c_i(k)}{v_i(k)} \qquad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

Se puede probar que ese cociente es constante, por lo que dicha definición de α tiene sentido. □

La siguiente Proposición nos muestra el crecimiento a largo plazo de a población, algo que nos será de vital importancia para estudiar el comportamiento asintótico.

Proposición 3.6. *Dado un sistema de ecuaciones lineales en diferencias homogéneo de la forma 3.3, si M es una matriz con valor propio dominante λ_i, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} = \lambda_i$$

Demostración. Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} \cdot \frac{\lambda_i^{n+1}}{\lambda_i^{n+1}} = \lambda_i \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\dfrac{X_{n+1}}{\lambda_i^{n+1}}\right\|}{\left\|\dfrac{X_n}{\lambda_i^n}\right\|} = \lambda_i \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\dfrac{X_{n+1}}{\lambda_i^{n+1}}\right\|}{\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\dfrac{X_n}{\lambda_i^n}\right\|}$$

donde he empleado que $\lambda_i > 0$ y que el límite del cociente es el cociente de los límites. Usando que la aplicación norma vectorial es una función continua, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} = \lambda_i \cdot \frac{\left\| \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_{n+1}}{\lambda_i^{n+1}} \right\|}{\left\| \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\lambda_i^n} \right\|} = \lambda_i \cdot \frac{\|\alpha v_{\lambda_i}\|}{\|\alpha v_{\lambda_i}\|} = \lambda_i$$

□

Razonemos ahora cuál es la utilidad de esta Proposición. Supuesto que sepamos que una matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tiene un valor propio dominante λ_i, sabemos que $\rho(A) = \lambda_i$. No obstante, a veces no es fácil determinar dicho valor propio dominante, por lo que (supuesta su existencia) podemos aproximarlo calculando los cocientes presentes en el apartado anterior.

El problema que encontramos aún es demostrar la existencia de dicho valor propio dominante, algo que no siempre es fácil. En nuestro caso, como en la gran mayoría de los casos trabajaremos con matrices cuyos coeficientes son todos ellos no negativos, tenemos un resultado que nos ayuda.

Definición 3.4. Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Decimos que A es positiva (respectivamente estrictamente positiva) si $a_{ij} \geqslant 0$ (respectivamente $a_{ij} > 0$) para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 3.5 (Matriz de Probabilidad)**.** Sea $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Decimos que A es una matriz de probabilidad si es positiva y, además, la suma de sus columnas es 1, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

El siguiente teorema nos resolverá el problema anterior que teníamos, ya que nos afirma la existencia del valor propio dominante. Su demostración, como otros resultados del tema, no se incluirá por ser materia de Álgebra Lineal.

Teorema 3.7 (Perron-Frobenius)**.** *Sea $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ positiva, y supongamos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que M^k es estrictamente positiva. Entonces, M tiene valor propio dominante $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y, además, podemos encontrar un vector propio $v_{\lambda_i} \in \mathbb{K}^m$ asociado a λ_i con todas sus entradas estrictamente positivas ($v_{\lambda_i}(k) > 0$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$).*

Notemos que este Teorema cobra mayor relevancia cuando $k = 1$, es decir, cuando la misma matriz M es estrictamente positiva.

3.1.3. Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

Nos disponemos al fin a estudiar sistemas de ecuaciones lineales en diferencias de m ecuaciones, de la forma 3.2, con $B_n \neq 0$.

Repitiendo el razonamiento visto en el Tema 2, llegamos a que todas las soluciones de 3.2 son de la forma una solución $\overline{X_n}$ particular más una solución de la parte homogénea, al igual que sucedía con ecuaciones en diferencias de orden superior. Por tanto, la resolución de estos sistemas se reduce a resolver los sistemas homogéneos.

Ejemplo. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales en diferencias, dado por:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos una solución constante:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo de la página 76 resolvimos la parte homogénea, por lo que:

$$X_n = c_1 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

3.2. Sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales

Ejemplo. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(a + bx_n + cy_n) \\ y_{n+1} = y_n(d + ex_n + fy_n) \end{cases} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Notemos que podemos definir las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x(a + bx + cy)$$
$$g(x, y) = y(d + ex + fy)$$

De esta forma, llegamos a la siguiente expresión del sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Sea entonces la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x, y), g(x, y)) \end{array}$$

Es decir, $F = (f, g)$, tenemos $X_{n+1} = F(X_n)$.

Los sistemas de ecuaciones en diferencias de orden 1 no lineales son de la forma:

$$\begin{cases} x_{1,n+1} & = & f_1(x_{1,n}, \dots, x_{m,n}) \\ x_{2,n+1} & = & f_2(x_{1,n}, \dots, x_{m,n}) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m,n+1} & = & f_m(x_{1,n}, \dots, x_{m,n}) \end{cases}$$

con $f_i : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Como se ha visto en el ejemplo anterior, los sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales de m ecuaciones de la forma anterior se pueden expresar como sigue:

$$X_{n+1} = F(X_n) \tag{3.4}$$

donde $X_n \in \mathbb{K}^m$ y F una función $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$.

3.2.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

En la presente sección buscamos estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales, concepto que ahora introduciremos. No obstante, al lector les serán familiares dichos conceptos, debido a la similitud de esta sección con la Sección 1.3.2, en la que se vieron estos resultados para tan solo una ecuación en diferencias.

Definición 3.6. Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4. Decimos que $X_e \in \mathbb{K}^m$ es un punto de equilibrio de dicho modelo si:

$$X_e = F(X_e)$$

En adelante, X_e denotará siempre un punto de equilibrio.

Mencionemos entonces la versión para sistemas de ecuaciones de las definiciones que se vieron en la Sección 1.3.2. Notemos que las definiciones son exactamente análogas, tan solo cambiando el valor absoluto (norma en $\mathbb{R}$) por la norma en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Por tanto, esta generalización cobra sentido.

Definición 3.7 (Solución estable)**.** Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4. Decimos que $X_e \in \mathbb{K}^m$ punto de equilibrio es estable si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \|X_0 - X_e\| < \delta \Longrightarrow \|X_n = F^n(X_0) - X_e\| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Visualmente, esto implica que si se toma X_0 cercano a X_e, se mantendrá cercana a X_e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.8 (Solución inestable)**.** Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4. Decimos que $X_e \in \mathbb{K}^m$ punto de equilibrio es inestable si no es estable, esto es:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists\ X_{0\delta} \in \mathbb{K}^m,\ n_\delta \in \mathbb{N} \text{ con } \left\{ \begin{array}{c} \|X_{0\delta} - X_e\| < \delta \\ \wedge \\ \|X_{n\delta} = F^{n_\delta}(X_{0\delta}) - X_e\| \geqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

Definición 3.9 (Atractor local)**.** Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4. Decimos que $X_e \in \mathbb{K}^m$ punto de equilibrio es localmente atractivo o que X_e es un atractor local si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} X_0 \in \mathbb{K}^m \\ \wedge \\ \|X_0 - X_e\| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = X_e$$

Es decir, la solución tenderá a X_e si valor $X_0 \in \mathbb{K}^m$ escogido está cerca de X_e.

Definición 3.10 (Estabilidad asintótica)**.** Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4. Decimos que $X_e \in \mathbb{K}^m$ punto de equilibrio es asintóticamente estable localmente si es estable y es un atractor local.

Al igual que ocurría para tan solo una ecuación, emplear la definición formal de estabilidad no es para nada sencillo, y podremos usar el siguiente resultado, que nos es de gran ayuda.

Proposición 3.8. *Sea un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales de la forma 3.4, tenemos que:*

- *Si* $\rho(JF(X_e)) < 1$*, entonces* X_e *es asintóticamente estable localmente.*
- *Si* $\rho(JF(X_e)) > 1$*, entonces* X_e *es inestable.*

donde $JF(X_e)$ *denota la matriz jacobiana de* F *en* X_e*.*

3.3. Modelo de Leslie

El modelo que vamos a estudiar trata la dinámica de una población que se estructura en grupos de edad. Mostramos el siguiente ejemplo como motivación.

Ejemplo. Una población de gatos, cuya vida media son 15 años.

Con esos años podemos, por ejemplo, agruparlos en 3 grupos:

- Grupo 1: $[0, 5[$.
- Grupo 2: $[5, 10[$.
- Grupo 3: $[10, 15[$.

En el Modelo de Leslie es necesario que las longitudes de los intervalos tengan el mismo tamaño. Suponemos además que conocemos las tasas de fertilidad de cada grupo, notadas por $f_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Consideremos además probabilidades de pasar de un grupo al siguiente, notadas por $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Si un gato no pudo pasar al grupo siguiente, entendemos que falleció. Suponemos que inicialmente hay:

- Grupo 1: 10 gatos.
- Grupo 2: 10 gatos.
- Grupo 3: 10 gatos.

Nos preguntamos por cuántos gatos nos encontraremos en los siguientes instantes. Los periodos del grupo de Leslie se corresponden con las longitudes de los intervalos considerados; luego nos preguntamos por las poblaciones pasados 5 años. Notando:

- Población del grupo 1 en el instante n: x_n.
- Población del grupo 2 en el instante n: y_n.
- Población del grupo 3 en el instante n: z_n.

Tenemos que el sistema viene dado por:

$$\begin{cases} x_n = f_1 x_{n-1} + f_2 y_{n-1} + f_3 z_{n-1} \\ y_n = p_1 x_{n-1} \\ z_n = p_2 y_{n-1} \end{cases}$$

Tomamos $x_0 = 10$, $y_0 = 10$ y $z_0 = 10$; y definimos la siguiente matriz:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Empleando esa matriz, llegamos al sistema $X_{n+1} = LX_n$, que tiene como solución:

$$X_{n+1} = L^n X_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.3.1. Hipótesis del modelo

Dada una población de cualquier especie, el Modelo de Leslie agrupa a los individuos de las especies en $m \in \mathbb{N}$ grupos de edades[1] de longitud $l \in \mathbb{R}^+$, siendo la última edad a considerar la edad media de la especie.

Los periodos del modelo se corresponden con la longitud l (es decir, entre el recuento 0 y el 1 habrán pasado l años). A cada grupo del modelo se le asocia una tasa de fertilidad $f_i \in [0, 1[$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Como los intervalos son de longitud l y en cada periodo habrán pasado l años, ningún individuo que se encontraba anteriormente en el grupo $k \in \{1, \dots, m\}$ seguirá en el grupo k, sino que pasará al siguiente grupo con una posibilidad p_k o fallecerá. Consideramos que todos los individuos del grupo m fallecen en el siguiente recuento, al superar la edad media de la especie.

Con el planteamiento del modelo presentado, podemos ya deducir que, si notamos por p_n^k a la población del grupo $k \in \{1, \dots, m\}$ en el recuento n-ésimo, llegamos a que el modelo viene dado por el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} p_n^1 & = & f_1 p_{n-1}^1 & + & f_2 p_{n-1}^2 & + & \dots & + & f_m p_{n-1}^m \\ p_n^2 & = & p_1 p_{n-1}^1 & & & & & & \\ \vdots & = & \vdots & & & & & & \\ p_n^m & = & p_{m-1} p_{n-1}^{m-1} & & & & & & \end{array}\right.$$

Matricialmente, para m grupos de edad tenemos un sistema de la forma $P_{n+1} = LP_n$, donde:

$$P_n = \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \\ \vdots \\ p_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

donde la matriz L es llamada *matriz de Leslie*. Notemos que el modelo está bien definido, ya que como L es una matriz positiva entonces P_n es positiva para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, nunca llega a haber una población negativa en cierto grupo de edad, como era de esperar. Además, el polinomio característico de L es:

$$p(\lambda) = (-1)^m [\lambda^m - f_1 \lambda^{m-1} - f_2 p_1 \lambda^{m-2} - \dots - f_m p_1 \cdots p_{m-1}]$$

Demostración. Demostramos por inducción sobre m, $m \geqslant 2$:

- Para $m = 2$:

$$p(\lambda) = |L - \lambda Id| = \begin{vmatrix} f_1 - \lambda & f_2 \\ p_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(f_1 - \lambda) - f_2 p_1 = \lambda^2 - f_1 \lambda - f_2 p_1$$

Por tanto, para $m = 2$ es cierto.

[1] Que comenzaremos a numerar en 1.

- Supuesto cierto para m, demostramos para $m+1$:

  Tenemos que el polinomio característico de L para $m+1$ es:

$$p(\lambda) = |L - \lambda Id| = \begin{vmatrix} f_1-\lambda & f_2 & f_3 & \dots & f_m & f_{m+1} \\ p_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{m-1} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_m & -\lambda \end{vmatrix}$$

  Desarrollando por la última columna, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^{m+2} f_{m+1} \cdot p_1 \dots p_m - \\ &\quad - \lambda \cdot (-1)^{2\cdot(m+1)} \cdot \left[(-1)^m [\lambda^m - f_1\lambda^{m-1} - f_2p_1\lambda^{m-2} - \dots - f_m p_1 \cdots p_{m-1}]\right] \\ &= (-1)^{m+2} f_{m+1} \cdot p_1 \dots p_m - \\ &\quad - \lambda \cdot (-1)^m \cdot \left[\lambda^m - f_1\lambda^{m-1} - f_2p_1\lambda^{m-2} - \dots - f_m p_1 \cdots p_{m-1}\right] \\ &= -(-1)^{m+1} \cdot f_{m+1}p_1 \dots p_m + \\ &\quad + \lambda \cdot (-1)^{m+1} \cdot \left[\lambda^m - f_1\lambda^{m-1} - f_2p_1\lambda^{m-2} - \dots - f_m p_1 \cdots p_{m-1}\right] \\ &= (-1)^{m+1} \left[\lambda^{m+1} - f_1\lambda^m - f_2p_1\lambda^{m-1} - \dots - f_m p_1 \cdots p_{m-1}\lambda - f_{m+1}p_1 \cdots p_m\right] \end{aligned}$$

  Tenemos entonces demostrado el caso para $m+1$.

Por inducción, tenemos que es cierto para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. □

3.3.2. Comportamiento asintótico del modelo

Para estudiar el comportamiento de este modelo, introducimos distintos conceptos, muchos de ellos posiblemente conocidos (al menos de forma no rigurosa) por el lector.

Definición 3.11 (Pirámide de edad)**.** Definimos la pirámide de edad asociada a una población P_n en el periodo $n-$ésimo como el vector $P_n \in \mathbb{K}^m$ normalizado, es decir:

$$\frac{P_n}{\|P_n\|}$$

donde la norma empleada es la población total en dicho periodo (norma 1), es decir,

$$\|P_n\| := \sum_{i=1}^{m} |p_n^i|$$

En adelante, al hablar de poblaciones siempre emplearemos esta norma.

Notemos que la componente $k-$ésima de la pirámide de edad representa la proporción de individuos del grupo de edad k respecto del total de la población. Este concepto se denomina pirámide de edad porque, en un principio, una población sana debe tener más proporción de individuos jóvenes que ancianos, de forma que si representamos las componentes de este vector vemos que las poblaciones más jóvenes son más anchas, como se puede ver en la Figura 3.1.

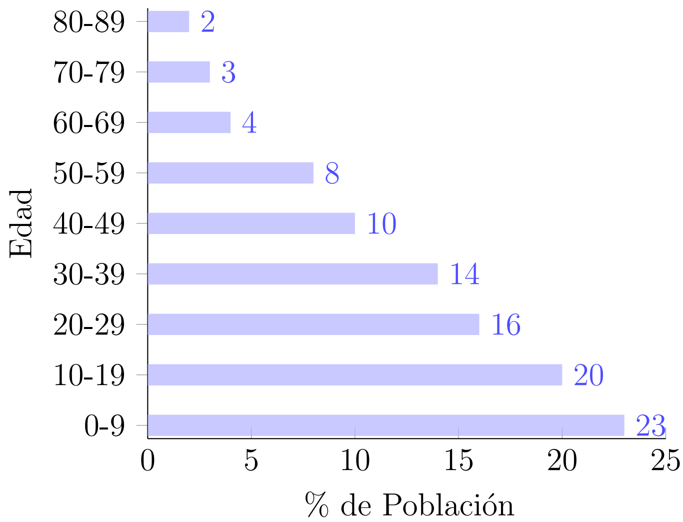


Figura 3.1: Ejemplo de Pirámide de Edad

Definición 3.12 (Tasa de Crecimiento)**.** Definimos la tasa de crecimiento asociada a una población P_n en el periodo $n-$ésimo como:

$$\frac{\|P_n\| - \|P_{n-1}\|}{\|P_{n-1}\|} = \frac{\|P_n\|}{\|P_{n-1}\|} - 1$$

Definición 3.13 (Tasa neta de reproducción)**.** Se define la tasa neta de reproducción asociada a un modelo de Leslie dado como sigue:

$$R := f_1 + p_1 f_2 + p_1 p_2 f_3 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_{m-1} f_m$$

Este valor representa la tasa de fertilidad asociado a una hembra a lo largo de toda su vida.

Podríamos pensar que basta considerar simplemente: $R = \sum_{k=1}^{m} f_k$, pero debemos tener en cuenta la probabilidad de cada individuo en llegar al grupo $k-$ésimo, antes de considerar la tasa de fertilidad del grupo k.

Una vez introducidos estos conceptos, procedemos al análisis del comportamiento asintótico, suponiendo que L **tiene un valor propio dominante** λ_i. La siguiente proposición nos proporcionará el valor de v_{λ_i}.

Proposición 3.9. *Consideramos la matriz de Leslie $L \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, y supongamos que λ_i es el valor propio dominante de L. Entonces, si notamos por $v_{\lambda_i}(k)$ a la componente $k-$ésima del vector v_{λ_i}, tenemos que $v_{\lambda_i}(1) = 1$ y:*

$$v_{\lambda_i}(k) = \prod_{t=1}^{k-1} \frac{p_t}{\lambda_i} = \frac{p_1 \ldots p_{k-1}}{\lambda_i^{k-1}} \qquad \forall k \in \{2, \ldots, m\}$$

Es decir, el vector propio asociado a λ_i es:

$$v_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{p_1}{\lambda_i} \\ \dfrac{p_1 p_2}{\lambda_i^2} \\ \vdots \\ \dfrac{p_1 \cdots p_{m-1}}{\lambda_i^{m-1}} \end{pmatrix}$$

Demostración. Para determinar el vector v_{λ_i}, resolvemos el sistema siguiente:

$$Lv_{\lambda_i} = \lambda_i v_{\lambda_i} \Longleftrightarrow (L - \lambda_i Id)v_{\lambda_i} = 0$$

Tenemos entonces el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (f_1 - \lambda_i)v_{\lambda_i}(1) + f_2 v_{\lambda_i}(2) + \cdots + f_m v_{\lambda_i}(m) & = & 0 \\ p_1 v_{\lambda_i}(1) - \lambda_i v_{\lambda_i}(2) & = & 0 \\ p_2 v_{\lambda_i}(2) - \lambda_i v_{\lambda_i}(3) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_{m-1} v_{\lambda_i}(m-1) - \lambda_i v_{\lambda_i}(m) & = & 0 \end{array} \right.$$

Como sabemos que el subespacio propio es de dimensión 1 por ser la multiplicidad del valor propio dominante simple, podemos descartar la primera ecuación e imponer $v_{\lambda_i}(1) = 1$ (imponiendo otro valor nos saldría uno proporcional). Resolvemos ahora las soluciones en escalera, teniendo de forma directa el resultado buscado. □

Sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\lambda_i^n} = \alpha v_{\lambda_i} \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Respecto a la pirámide de edad, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\|P_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha v_{\lambda_i} \cdot |\lambda_i|^n}{\|\alpha v_{\lambda_i}\| \cdot \lambda_i^n} = \frac{v_{\lambda_i}}{\|v_{\lambda_i}\|}$$

donde hemos empleado que la homogeneidad de la norma y que esta es una función continua. Respecto a la tasa de crecimiento, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\|P_{n-1}\|} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\|P_n\|}{\|P_{n-1}\|} \cdot \frac{\lambda_i^{n-1}}{\lambda_i^n} \cdot \lambda_i - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\alpha v_{\lambda_i}\|}{\|\alpha v_{\lambda_i}\|} \cdot \lambda_i - 1 = \lambda_i - 1$$

En resumen, tenemos que:

- Si $\lambda_i > 1$: La población crece ilimitadamente.
- Si $\lambda_i < 1$: La población decrece y $\{P_n\} \to 0$; es decir, tiende a extinguirse.
- Si $\lambda_i = 1$: La población tiende a una población constante.

Además, la pirámide de edad a largo plazo es constante.

Notemos que todo este análisis se ha realizado suponiendo que hay un valor propio dominante; algo que no tenemos probado. Aunque podríamos pensar en usar el Teorema de Perron-Frobenious, no estamos en las hipótesis del enunciado, por lo que no es posible. La siguiente proposición nos es de gran ayuda.

Proposición 3.10. *Dado un modelo de Leslie, si hay dos tasas de fertilidad f_i consecutivas no nulas, entonces L tiene valor propio dominante.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\exists! \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq 0$, tal que λ_i es un valor propio de L. Tenemos que λ_i es valor propio de L si y solo si:

$$\begin{aligned} p(\lambda_i) = 0 &\Longleftrightarrow \lambda_i^m - f_1\lambda_i^{m-1} - f_2 p_1 \lambda_i^{m-2} - \ldots - f_m p_1 \ldots p_{n-1} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda_i^m \left(1 - \frac{f_1}{\lambda_i} - \frac{f_2 p_1}{\lambda_i^2} - \ldots - \frac{f_m p_1 \ldots p_{m-1}}{\lambda_i^m}\right) = 0 \end{aligned}$$

Definimos ahora el polinomio dado por:

$$q(\lambda_i) = \frac{f_1}{\lambda_i} + \frac{f_2 p_1}{\lambda_i^2} + \cdots + \frac{f_m p_1 \ldots p_{m-1}}{\lambda_i^m}$$

Por lo visto anteriormente, como $\lambda_i \neq 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(\lambda_i) = 0 &\Longleftrightarrow \lambda_i^m (1 - q(\lambda_i)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow q(\lambda_i) = 1 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} q(\lambda) = +\infty \qquad\qquad \lim_{\lambda \to \infty} q(\lambda) = 0$$

Por tanto, como q es continua, tenemos que $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ tal que $q(\lambda_i) = 1$, por lo que tenemos demostrada la existencia buscada. Además, por la monotonía de p, tenemos que λ_i es único. Demostremos ahora que su multiplicidad es simple, es decir, que $p'(\lambda_i) \neq 0$.

$$p'(\lambda) = m\lambda^{m-1}(1 - q(\lambda)) - \lambda^m q'(\lambda) \Longrightarrow p'(\lambda_i) = -\lambda_i^m q'(\lambda_i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(\lambda_1) = 0 \\ p'(\lambda_1) = -\lambda_1^m q'(\lambda_1) > 0 \end{array} \right.$$

donde hemos empleado que q es estrictamente decreciente (pruébese).

Tan solo nos falta por demostrar que si hay dos tasas consecutivas f_i no nulas, entonces $|\lambda| < \lambda_i$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p(\lambda) = 0$, $\lambda \neq \lambda_i$. $\square$

Veamos ahora qué relación hay entre la Tasa Neta de Reproducción R y el valor propio dominante de la matriz de Leslie, λ_i. Según la demostración de la proposición anterior, tenemos que $R = q(1)$, por lo que:

$$\lambda_i > 1 \Longleftrightarrow R > 1$$

3.4. Aplicaciones a la genética

Ejemplo. Supongamos que tenemos un jardín con flores, cuyos fenotipos se codifican en genotipos de la siguiente manera:

Rojas (AA) Rosas (Aa) Blancas (aa)

Usaremos la siguiente notación:

- Sea x_n la proporción de flores rojas en el recuento n.
- Sea y_n la proporción de flores rosas en el recuento n.
- Sea z_n la proporción de flores blancas en el recuento n.

Supongamos que tan solo polinizamos con flores rojas (AA). Tenemos que:

- El 100 % de las flores rojas producirán flores rojas al polinizarse con flores rojas.
- El 50 % de las flores rosas producirán flores rojas, mientras que el otro 50 % serán flores rosas, al polinizarse con flores rojas.
- El 100 % de las flores blancas producirán flores rosas al polinizarse con flores rojas.

Por tanto, tenemos el sistema $X_{n+1} = MX_n$, con:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\sigma(M) = \{1, 1/2, 0\} \Longrightarrow \rho(M) = 1$$

Por tanto, el valor propio dominante de M es $\lambda_i = 1$. Calculemos su vector propio asociado:

$$V_1 = \left\{ (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{1^n} = \lim_{n\to\infty} X_n = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No obstante, por el concepto del problema, sabemos que $1 = x_n + y_n + z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\alpha = 1$. De esta forma, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, deducimos que la población de flores tenderá a estar formada solo por flores rojas.

4. Relaciones de Problemas

4.1. Ecuaciones en diferencias lineales de orden 1

Ejercicio 4.1.1 (Depósito de capital)**.** Un banco ofrece un interés compuesto del $7\,\%$ anual para depósitos de capital a medio plazo.

1. Si disponemos de un capital inicial de 10000 euros, ¿de qué capital dispondremos al cabo de 4 años?

   En este caso, si C_n denota el capital en el $n-$ésimo año, y el interés es $I = 0{,}07$, tenemos que:
   $$C_n = (1 + I)^n C_0$$
   Por tanto, tenemos $C_4 = 1{,}07^4 \cdot 10^4 = 13107{,}96$ euros.

2. Si se pretende disponer de 25000 euros dentro de 4 años, ¿cuál debe ser el capital inicial?

   En este caso, la incógnita es C_0. Tenemos:
   $$25 \cdot 10^3 = 1{,}07^4 \cdot C_0 \Longrightarrow C_0 = 19072{,}38 \text{ euros.}$$

3. Supongamos ahora que no conocemos el interés que proporciona el banco. Si inicialmente disponemos de 10000 euros y pasados 5 años tenemos 12000, ¿cuál es el interés anual aplicado?

   En este caso, tenemos que la incógnita es I. Tenemos:
   $$12 \cdot 10^3 = (1 + I)^5 \cdot 10 \cdot 10^3 \Longrightarrow I = \sqrt[5]{\frac{12}{10}} - 1 \approx 0{,}0371$$
   Por tanto, tenemos que $I \approx 3{,}71\,\%$.

Ejercicio 4.1.2 (Explosión demográfica)**.** Una población sigue un modelo de crecimiento malthusiano con tasa de crecimiento neta $\alpha = 0{,}16$, es decir: si x_n es el número de individuos en el periodo n, entonces
$$x_{n+1} = 1{,}16x_n.$$

1. Calcula el número de periodos necesarios para que la población se duplique y cuadruplique.

   Tenemos que:
   $$x_n = 1{,}16^n x_0$$

Calculemos el menor $n \in \mathbb{N}$ de forma que $1{,}16^n \geqslant 2$, que nos indicará el número de periodos necesarios para que la población se duplique. Aplicando el logaritmo en base 1,16, tenemos que:

$$n \geqslant \log_{1{,}16} 2 \approx 4{,}67$$

Por tanto, tenemos que el número de periodos necesarios para que la población se duplique es $n = 5$ periodos.

Para el caso de que la población se cuadruplique, necesitamos que $1{,}16^n \geqslant 4$. Por tanto,

$$n \geqslant \log_{1{,}16} 4 \approx 9{,}34$$

El número de periodos necesarios para que la población se cuadruplique es $n = 10$ periodos.

2. Calcula el tiempo promedio de duplicación.

   En este caso, no se pide un número de periodos, sino el tiempo promedio. En este caso, tenemos que el tiempo medio de duplicación es:

$$\log_{1{,}16} 2 \approx 4{,}67$$

3. Calcula el tiempo promedio de quintuplicación.

   De forma análoga, tenemos que el tiempo medio de quintuplicación es:

$$\log_{1{,}16} 5 \approx 10{,}84$$

Ejercicio 4.1.3 (Eliminación de un fármaco en sangre)**.** Un fármaco se elimina en sangre siguiendo un modelo malthusiano. Según dicho modelo, su vida media es de 2 semanas.

1. Calcula la concentración inicial de fármaco si a los 5 días encontramos una concentración en sangre de 3 $^{mg}/_{cm^3}$.

   Como la vida media es de 2 semanas, tenemos que:

$$VM = 14 \text{ días} = \frac{1}{1-r} \Longrightarrow r = -\left(\frac{1}{14} - 1\right) = \frac{13}{14} \approx 0{,}9286$$

   Sabiendo que $x_5 = 3$, tenemos que:

$$x_5 = 3 = r^5 x_0 \Longrightarrow x_0 = \frac{3}{r^5} \approx 4{,}2455 \ ^{mg}/_{cm^3}$$

   Por tanto, la concentración inicial es de 4,2455 $^{mg}/_{cm^3}$.

2. ¿Cada cuánto tiempo se diezma en promedio la concentración de fármaco?

   En este caso, se pide el tiempo promedio para que la concentración sea la décima parte. Tenemos que:

$$x_n = \cancel{x_0} \cdot r^n \geqslant \frac{\cancel{x_0}}{10}$$

   Por tanto, de promedio han de pasar $\log_r \frac{1}{10} \approx 31{,}07$ días para que la concentración se diezme.

3. Calcula el tiempo necesario para que la concentración de fármaco sea menor que 0,1 $^{mg}/_{cm^3}$.

   Tenemos que:
$$x_n = x_0 \cdot r^n < 0{,}1 \Longrightarrow r^n < \frac{0{,}1}{x_0}$$

   Por tanto, se pide el primer $n \in \mathbb{N}$ tal que se cumple eso. Como se tiene que $\log_r \frac{0{,}1}{x_0} \approx 50{,}89$, han de pasar 51 días.

Ejercicio 4.1.4 (Desintegración del carbono-14)**.** Para la datación de los restos arqueológicos se utiliza el isótopo carbono-14, porque está presente en los organismos vivos y va desapareciendo de ellos cuando mueren. Esta desintegración se modela mediante la ley malthusiana:

$$x_{n+1} = rx_n \qquad 0 < r < 1$$

donde cada periodo representa un milenio, x_n es el número de átomos de carbono-14 en el periodo n y r es la constante de desintegración radiactiva. Sabemos que la vida media del carbono-14 se estima en 5730 años.

1. En un monte se han encontrado restos arqueológicos de una determinada especie. Sabiendo que la cantidad de carbono-14 de los restos, en el momento del hallazgo, corresponde al 15,27 % de la cantidad que tiene un cuerpo vivo, determina la antigüedad de los restos hallados.

   Como la vida media del carbono-14 se estima en 5730 años (5,73 milenos), tenemos que:

$$VM = 5{,}73 \text{ milenios } = \frac{1}{1-r} \Longrightarrow r = -\left(\frac{1}{5{,}73} - 1\right) \approx 0{,}825$$

   donde hemos usado milenios ya que es la unidad del periodo.

   Sabemos que $x_n = r^n x_0$, y se pide el valor de n tal que $x_n = 0{,}1527x_0$. Por tanto,
$$0{,}1527\cancel{x_0} = r^n \cancel{x_0}$$

   Como $\log_r 0{,}1527 \approx 9{,}7986$ milenios, tenemos que la antigüedad es de 9798 años.

2. ¿Qué tanto por ciento de la cantidad de carbono-14 que tiene un cuerpo vivo debe tener un resto arqueológico de aproximadamente 1000 años de antigüedad?

   Como 1000 años equivale a un milenio, nos piden calcular $\frac{x_1}{x_0}$. Tenemos que:

$$x_1 = rx_0 \Longrightarrow \frac{x_1}{x_0} = r \approx 0{,}825 \approx 82{,}5\,\%$$

Ejercicio 4.1.5. En un hospital está llevándose a cabo un estudio sobre una enfermedad rara. Para ello se supone que la enfermedad desaparece siguiendo un modelo malthusiano al aplicarle un determinado fármaco. Los datos de que se disponen son los siguientes:

- Fueron puestos en observación 20 pacientes afectados por dicha enfermedad.
- Transcurridos 7 días, la mitad de personas ingresadas con motivo de la enfermedad fueron dadas de alta.

¿Qué puede decirse del modelo propuesto si tras 25 días (desde que se inició la observación de las 20 personas) hay 3 personas que aún no han superado la enfermedad?

Sea x_n la variable que representa el número de pacientes que no han superado la enfermedad en el día n. Tenemos que:

$$x_0 = 20 \qquad x_7 = 10 \qquad x_{25} = 3$$

Como sabemos sigue un modelo malthusiano, tenemos que $x_n = r^n x_0$. Veamos cuánto vale r.

$$x_7 = 10 = r^7 \cdot 20 \Longrightarrow r^7 = \frac{1}{2} \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} \approx 0{,}9057$$

Veamos si el modelo de Malthus predice correctamente el valor de x_{25}:

$$x_{25} = r^{25} x_0 \approx 1{,}6823$$

Como en la realidad se da que $x_{25} = 3$, tenemos que en realidad el Modelo de Malthus no es idóneo para este fármaco.

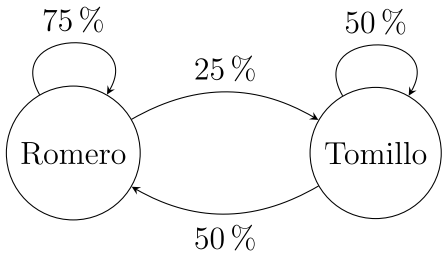
Ejercicio 4.1.6. Una apicultora de la Alpujarra está estudiando el comportamiento de sus abejas. Ha observado que se distribuyen entre el romero y el tomillo en primavera. Empíricamente ha observado que cada día cambian de unas flores a otras de la siguiente forma:

- El 75 % de las abejas que están en las flores de romero en un determinado día permanecen en ellas al día siguiente, mientras que el resto cambia a las flores de tomillo.
- El 50 % de las abejas que están en las flores de tomillo en un determinado día permanecen en ellas al día siguiente, mientras que el resto cambia a las flores de romero.

Al comienzo de su estudio había 3400 abejas en las flores de romero y 2600 en las de tomillo. La apicultora pretende estudiar cómo evoluciona la población de abejas en relación con las dos clases de flores, para lo cual llama x_n al número de abejas que hay en el romero en el $n-$ésimo día e y_n al número de abejas que hay en el tomillo en el $n-$ésimo día.

1. Escribe las leyes de recurrencia que modelan la cantidad de abejas en cada tipo de flor según las observaciones de la apicultora.

   Tenemos la siguiente situación:



- Sea x_n el número de abejas en romero en el n-ésimo día.
- Sea y_n el número de abejas en tomillo en el n-ésimo día.

La ley de recurrencia que modela la cantidad de abejas en el romero es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}25x_n + 0{,}5y_n \\ x_0 = 3400 \end{cases}$$

La ley de recurrencia que modela la cantidad de abejas en el tomillo es:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - 0{,}5y_n + 0{,}25x_n \\ y_0 = 2600 \end{cases}$$

2. Demuestra que $x_n + y_n = 6000$.

   Demostramos por inducción sobre n:

   - Caso base $n = 1$:

     Tenemos que:

     $$x_1 = x_0 - 0{,}25x_0 + 0{,}5y_0$$
     $$y_1 = y_0 - 0{,}5y_0 + 0{,}25x_0$$

     Por tanto, se tiene:

     $$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= x_0 - \cancel{0{,}25x_0} + \cancel{0{,}5y_0} + y_0 - \cancel{0{,}5y_0} + \cancel{0{,}25x_0} \\ &= x_0 + y_0 = 3400 + 2600 = 6000 \end{aligned}$$

   - Supuesto cierto para n, lo demostramos para $n + 1$:

     $$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n - \cancel{0{,}25x_n} + \cancel{0{,}5y_n} + y_n - \cancel{0{,}5y_n} + \cancel{0{,}25x_n} = x_n + y_n \overset{(*)}{=} 6000$$

     donde en $(*)$ hemos empleado la hipótesis de inducción.

3. Escribe una ecuación en diferencias para x_n y resuélvela.

   Como $x_n + y_n = 6000$, tenemos que $y_n = 6000 - x_n$. Por tanto, de la Ley de Recurrencia calculada antes, deducimos que:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}75x_n + 0{,}5y_n = 0{,}75x_n + 0{,}5\,(6000 - x_n) = \\ &= 0{,}75x_n + 3000 - 0{,}5x_n = \\ &= 0{,}25x_n + 3000 \end{aligned}$$

Para resolverla, por lo visto en teoría sabemos que:

$$\begin{aligned} x_n &= 0{,}25^n x_0 + 3000 \cdot \frac{1-0{,}25^n}{1-0{,}25} = 0{,}25^n x_0 + 4000 \cdot (1-0{,}25^n) = \\ &= 0{,}25^n x_0 + 4000 - 4000 \cdot 0{,}25^n = 0{,}25^n\,(x_0 - 4000) + 4000 \end{aligned}$$

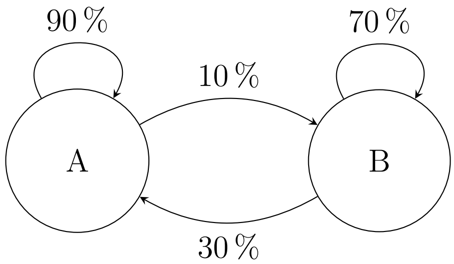
4. Determina el comportamiento asintótico de la población de abejas en ambas flores.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}25^n\,(x_0 - 4000) + 4000 = 4000$$

Por tanto, se quedarán 4000 en el romero y 2000 en el tomillo.

Ejercicio 4.1.7. Dos países, A y B, compiten por el abastecimiento del crudo mundial. Se sabe que el país A cuida más a su clientes y, por tanto, el 90 % de quienes un año contratan el abastecimiento con dicho país vuelven a hacerlo el año siguiente. Sin embargo, solo el 70 % de los clientes de B vuelven a concertar de nuevo su abastecimiento con este país. Se supone que todos los países tienen que contratar su abastecimiento con A o con B. Este año la situación política del país A impide que pueda abastecer a ningún otro país. ¿Cómo evolucionarán a partir de ahí las cuotas de mercado, es decir, el número de países que contratan el abastecimiento con A y con B medido en tanto por uno?

Tenemos la siguiente situación:



- Sea a_n los clientes del país A en el año n.
- Sea b_n los clientes del país B en el año n.

Las leyes de recurrencia que modelan ambos datos son:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0{,}9a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} &= 0{,}7b_n + 0{,}1a_n \end{aligned}$$

Además, sabemos que $a_n + b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que se reparten la totalidad del mercado en tanto por cierto. Por hipótesis, tenemos también que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Como $b_n = 1 - a_n$, tenemos que:

$$a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}3(1-a_n) = 0{,}6a_n + 0{,}3$$

Por lo visto en teoría, tenemos que:

$$a_n = \left(a_0 - \frac{0{,}3}{1-0{,}6}\right) \cdot 0{,}6^n + \frac{0{,}3}{1-0{,}6} = -\frac{0{,}3}{0{,}4} \cdot 0{,}6^n + \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75\,(1-0{,}6^n)$$

Por tanto, se tiene que:

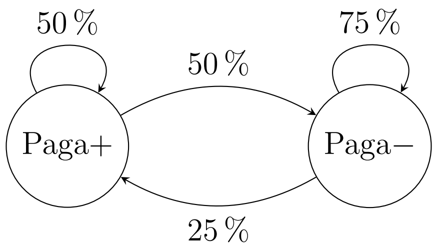
$$b_n = 1 - a_n = 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}6^n$$

A largo plazo, cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}75 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0{,}25$$

Ejercicio 4.1.8. Las compañías Paga+ y Paga− se han repartido el mercado de la telefonía. A pesar de la agresiva campaña desarrollada por Paga+, Paga− viene consiguiendo una mayor fidelización. Se ha observado que cada año el 25 % de los clientes de Paga− se pasan a Paga+, mientras que el 50 % de los de Paga+ cambian a Paga−. ¿Qué se puede decir sobre el mercado de la telefonía a largo plazo?

Tenemos la siguiente situación:



- Sea x_n el número de clientes de Paga+ en el año n-ésimo.
- Sea y_n el número de clientes de Paga− en el año n-ésimo.

Las leyes de recurrencia que modelan ambos datos son:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}25y_n \\ y_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}75y_n \end{aligned}$$

Como se han repartido la totalidad del mercado, tenemos que $x_n + y_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver observación debajo). Por tanto:

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}25y_n = 0{,}5x_n + 0{,}25(1-x_n) = 0{,}25x_n + 0{,}25$$

Por tanto, la solución de este modelo es:

$$x_n = 0{,}25^n x_0 + 0{,}25 \cdot \frac{1-0{,}25^n}{0{,}75} = 0{,}25^n x_0 + \frac{1-0{,}25^n}{3}$$

Tomamos límite para ver el comportamiento del mercado a largo plazo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}25^n x_0 + \frac{1-0{,}25^n}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{2}{3}$$

En conclusión, el número de empleados de Paga+ se establecerá en el 33 % del total del mercado, mientras que Paga− en el 66 % del total del mercado.

Observación. Notemos que la elección de $x_n + y_n = 1$ es insignificante: ante cualquier constante obtendríamos el mismo resultado. Esto se debe a que se trata de un sistema "cerrado", ningún cliente sale de las dos compañías al mismo tiempo y tampoco tenemos clientes nuevos que se apunten a alguna y no estuvieran apuntados antes.

Esto nos permite fijar un valor cualesquiera para $x_n + y_n$ constante.

Ejercicio 4.1.9. Una jugadora de ajedrez es contratada por la compañía Galactic Chess. Su trabajo consiste en jugar 40 partidas simultáneas cada semana. La jugadora dispone de dos estrategias, A y B. Gana en el 80 % de los casos con la estrategia A y en el 60 % de los casos con la B. Para diversificar su juego decide que cada semana empleará la estrategia B tantas veces como derrotas o tablas haya cosechado la semana anterior. Después de algunas semanas de practicar este sistema observa que siempre acaba jugando el mismo número de partidas con la estrategia B. ¿Cómo se explica este hecho?

- Sea a_n el número de partidas que se juegan la semana n con la estrategia A.
- Sea b_n el número de partidas que se juegan la semana n con la estrategia B.
- Sea g_n el número de partidas ganadas en la semana n.

Veremos dos formas de plantear el ejercicio:

Opción 1.

Sabemos que $a_n + b_n = 40$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que:

$$g_n = 0{,}8a_n + 0{,}6b_n = 0{,}8(40 - b_n) + 0{,}6b_n = 32 - 0{,}2b_n$$

Como cada semana juega con la estrategia B tantas partidas como derrotas o tablas (no victorias) haya cosechado la semana anterior, tenemos que $b_n = 40 - g_{n-1}$. Por tanto,

$$g_n = 32 - 0{,}2 \cdot (40 - g_{n-1}) = 24 + 0{,}2g_{n-1}$$

La solución por tanto de dicha recurrencia es:

$$g_n = \left(x_0 - \frac{24}{1 - 0{,}2}\right) 0{,}2^n + \frac{24}{1 - 0{,}2} = (x_0 - 30)\, 0{,}2^n + 30$$

Para $n \to \infty$, tenemos que $\{g_n\} \to 30$, por lo que el número de partidas perdidas en tablas se estabilizará en 10, que será el número de partidas que jugará con la estrategia B.

Opción 2.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} a_n + b_n = 40 &\Longrightarrow a_n = 40 - b_n \\ b_{n+1} &= 0{,}2a_n + 0{,}4b_n \end{aligned}$$

Combinando las dos:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 0{,}2a_n + 0{,}4b_n = 0{,}2(40 - b_n) + 0{,}4b_n \\ &= 0{,}2b_n + 8 \end{aligned}$$

La solución de dicha recurrencia nos es conocida:

$$b_n = 0{,}2^n b_0 + 8\frac{1 - 0{,}2^n}{1 - 0{,}2} = 0{,}2^n b_0 + 10(1 - 0{,}2^n)$$

Para $n \to \infty$, tenemos que $\{b_n\} \to 10$, el número en el que se estabilizará el número de partidas a partir de una en adelante.

Ejercicio 4.1.10. Una compañía maderera tala el 10 % de un bosque anualmente. Para compensar el perjuicio causado, cada año se planta un número fijo de árboles K. Si no se tienen en cuenta otros condicionantes:

1. Escribe la ley de recurrencia que modela el tamaño del bosque.

   Tenemos que:
   $$x_{n+1} = x_n + K - 0{,}1x_n = 0{,}9x_n + K$$

2. Si el tamaño inicial del bosque es de 10000 árboles, calcula la solución de la ecuación del modelo.

   Opción 1. Demostramos mediante inducción que:
   $$x_n = 0{,}9^n \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(0{,}9^i K)$$

   - Para $n = 1$:
     $$x_1 = 0{,}9 \cdot x_0 + K$$
   - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:
     $$\begin{aligned} x_{n+1} = 0{,}9x_n + K &= 0{,}9\left[0{,}9^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 0{,}9^i K\right] + K = \\ &= 0{,}9^{n+1}x_0 + \sum_{i=1}^{n} 0{,}9^i K + K = 0{,}9^{n+1}x_0 + \sum_{i=0}^{n} 0{,}9^i K \end{aligned}$$

   Por tanto, resolviendo la suma, tenemos que:
   $$\begin{aligned} x_n &= 0{,}9^n \cdot x_0 + K\sum_{i=0}^{n-1} 0{,}9^i = 0{,}9^n \cdot x_0 + K \cdot \frac{1 - 0{,}9^n}{1 - 0{,}9} = \\ &= 0{,}9^n x_0 + 10K(1 - 0{,}9^n) \end{aligned}$$

Opción 2. Notando $a = 0{,}9$ y $b = K$, por lo visto en teoría sabemos que:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = (x_0 - 10K)0{,}9^n + 10K$$

3. Si plantar un árbol tiene un coste de 1 euro, calcula el precio mínimo al que deben venderse los árboles talados para que la explotación sea rentable a largo plazo.

   Veamos en primer lugar cuántos árboles hay a largo plazo. Tenemos que:

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_0 - 10K)0{,}9^n + 10K = 10K$$

   Sea v el precio de venta, y notemos por v_n las ganancias en el periodo n. Tenemos que:

   $$v_n = 0{,}1vx_n - 1\cdot K$$

   Como se busca que sea rentable a largo plazo, necesitamos que:

   $$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}1vx_n - 1\cdot K = 0{,}1v\cdot 10K - K = vK - K = K(v-1) > 0 \Longleftrightarrow v > 1$$

   Por tanto, para que no haya pérdidas a largo plazo el precio mínimo es $v = 1$.

Ejercicio 4.1.11. Los precios de cierto producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña con funciones de oferta y demanda dadas por

$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - 2p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:

   $$1 + p_n = 2 - 2p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:

   $$p^* = -\frac{1}{2}p^* + \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2}p^* = \frac{1}{2} \Longrightarrow p^* = \frac{1}{3}$$

   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{1}{3}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:

$$p_n = (p_0 - p^*) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n + p^*$$

   Como $|{-1}/2| < 1$, tenemos que $\{p_n\} \to p^*$, es decir, a largo plazo el precio se estabiliza en el precio de equilibrio. Sabemos además que lo hace oscilando.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

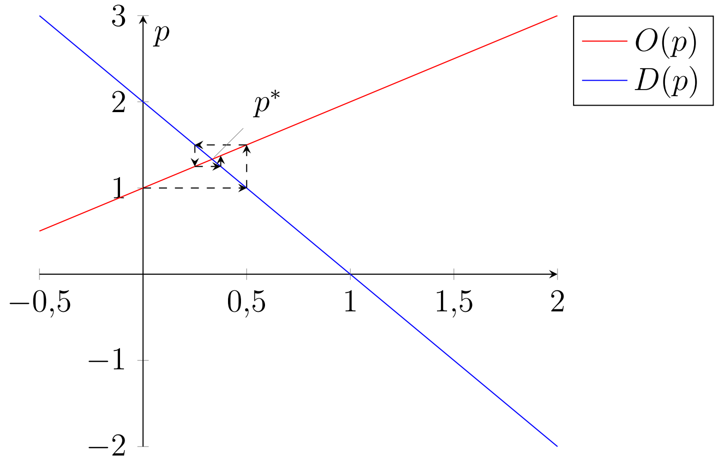


Figura 4.1: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 4.1.11.

Ejercicio 4.1.12. Resuelve el Ejercicio 4.1.11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - 0{,}5p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:

$$1 + p_n = 2 - 0{,}5p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -2p_n + 2$$

   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:

$$p^* = -2p^* + 2 \Longrightarrow p^* = \frac{2}{3}$$

   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{2}{3}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:
   $$p_n = (p_0 - p^*) \cdot (-2)^n + p^*$$
   Como $|-2| > 1$, tenemos que $\{|p_n|\} \to +\infty$, es decir, a largo plazo el precio se dispara. No tiene sentido considerarlo.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

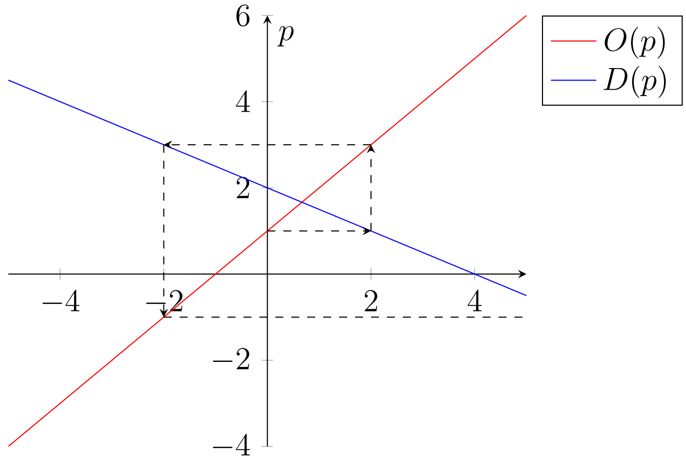


Figura 4.2: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 4.1.12.

   Como podemos ver, claramente el precio se dispara, oscilando entre valores positivos y negativos.

Ejercicio 4.1.13. Resuelve el Ejercicio 4.1.11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por
$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:
   $$1 + p_n = 2 - p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -p_n + 1$$
   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:
   $$p^* = -p^* + 1 \Longrightarrow p^* = \frac{1}{2}$$
   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{1}{2}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:

$$p_n = (p_0 - p^*) \cdot (-1)^n + p^*$$

   Veamos que es un 2−ciclo:

$$\begin{aligned} p_{2n} &= p_0 \\ p_{2n+1} &= -(p_0 - p^*) + p^* = 2p^* - p_0 \end{aligned}$$

   Por tanto, irá alternando.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

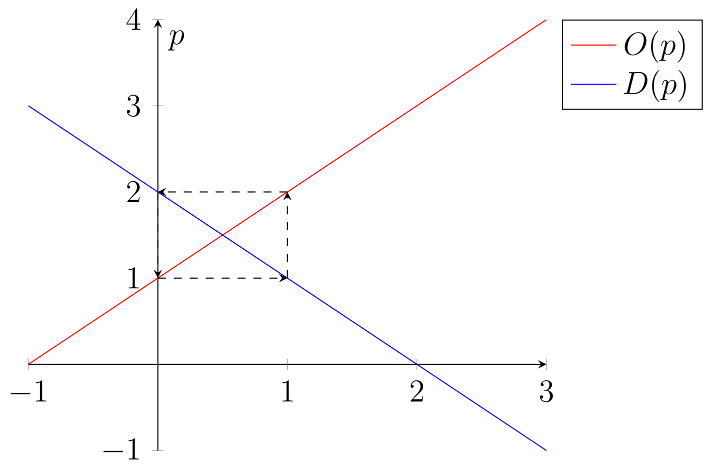


Figura 4.3: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 4.1.13.

   Como podemos ver, claramente se trata de un 2−ciclo, ya que el esquema vuelve al valor de p_0.

Ejercicio 4.1.14 (Modelo de von Bertalanffy)**.** El modelo de von Bertalanffy se emplea para describir la longitud de ciertos seres vivos o de partes de ellos. En su versión discreta se puede formular como una ecuación lineal de orden 1:

$$L_{n+1} = a + bL_n,$$

donde L_n representa la longitud esperada en el periodo n, $a > 0$ es una constante relativa a la capacidad de absorción celular y $0 < b < 1$ es una constante relacionada con la degradación celular.

1. Supongamos que la altura en metros de un árbol se ajusta a la expresión dada por $L_n = 3{,}8(1 - (0{,}9)^n)$, donde n es el número de años. Haz una tabla con las alturas del árbol en los 5 primeros años. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ e interpreta el resultado.

n [años]	L_n $[m]$
0	$0\ m$
1	$0{,}38\ m$
2	$0{,}722\ m$
3	$1{,}0298\ m$
4	$1{,}30682\ m$
5	$1{,}556138\ m$

Tabla 4.1: Altura del árbol del ejercicio 4.1.14.

Además, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 3{,}8(1-(0{,}9)^n) = 3{,}8(1-0) = 3{,}8 \text{ m}$$

Por tanto, tenemos que el árbol no crecerá indefinidamente, sino que llegará a una altura máxima de 3,8 metros.

2. La longitud en centímetros de las hojas de los árboles de una determinada especie se aproxima por el modelo $L_{n+1} = 3{,}9 + 0{,}7L_n$. Una hoja que tiene una longitud de 3 cm, ¿llegará a medir 10 cm? ¿Y 15 cm? Determina la longitud que se estima que pueden llegar a alcanzar las hojas de cualquier árbol de dicha especie.

   Por lo visto en teoría, sabemos que la solución de dicha ecuación en diferencias es:
$$L_n = \left(L_0 - \frac{3{,}9}{1-0{,}7}\right)0{,}7^n + \frac{3{,}9}{1-0{,}7} = (L_0-13)0{,}7^n + 13$$

   Demostramos ahora que $L_{n+1} > L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}L_{n+1} > L_n &\iff 3{,}9 + 0{,}7L_n > L_n \iff 13 > L_n \iff \\ &\iff 13 > (L_0-13)0{,}7^n + 13 \iff 0 > (L_0-13)0{,}7^n \iff \\ &\iff L_0 < 13\end{aligned}$$

   donde he empleado que $0{,}7^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para $3 = L_0 < 13$ cm, se tiene que la sucesión es creciente; es decir, que las hojas siempre crecen.

   Veamos ahora el valor límite de L_n:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} (L_0-13)0{,}7^n + 13 = 13$$

   donde he empleado que $|0{,}7| < 1$. Por tanto, como las hojas siempre crecen y su tamaño máximo es 13 cm, tenemos que sí podrá llegar a medir 10 cm, pero no 15 cm.

   Como observación, veamos que no tiene sentido físico dar $L_0 \geqslant 13$.

   - En el caso de $L_0 = 13$, se tiene que el tamaño de las hojas es constantemente $L_n = 13$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que las hojas nunca crecerían, que no tiene sentido.

- En el caso de $L_0 > 13$, veamos que el tamaño de las hojas va decreciendo; es decir, $L_{n+1} < L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} L_{n+1} < L_n &\iff 3{,}9 + 0{,}7L_n < L_n \iff 13 < L_n \iff \\ &\iff 13 < (L_0 - 13)0{,}7^n + 13 \iff 0 < (L_0 - 13)0{,}7^n \iff \\ &\iff L_0 > 13 \end{aligned}$$

  Esto por norma general tampoco tendría sentido, ya que no hay motivos aparentes por lo que una hoja sana deba menguar de tamaño.

4.2. Ecuaciones en diferencias no lineales de orden 1

Ejercicio 4.2.1. Estudia el comportamiento local en torno a los puntos fijos de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 4x_n^2 - x_n^3}{5}$$

Su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x + 4x^2 - x^3}{5} \end{array}$$

Calculamos los puntos fijos de dicha ecuación en diferencias:

$$x = \frac{2x + 4x^2 - x^3}{5} \Longleftrightarrow 5x = 2x + 4x^2 - x^3 \Longleftrightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array} \right.$$

Para aplicar el criterio de la 1ª derivada, calculamos dicha derivada:

$$f'(x) = \frac{2 + 8x - 3x^2}{5}$$

Tenemos entonces que:

- $|f'(0)| = 2/5 < 1$, por lo que $x_1 = 0$ es asintóticamente estable.
- $|f'(1)| = 7/5 > 1$, por lo que $x_2 = 1$ es inestable.
- $|f'(3)| = 1/5 < 1$, por lo que $x_3 = 3$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 4.2.2. La *ecuación logística de Pielou* es una ecuación en diferencias no lineal de la forma

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

Su uso es frecuente en dinámica de poblaciones. Dado que no tiene sentido hablar de poblaciones negativas, la ecuación se plantea en $[0, \infty[$.

1. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación y demuestra que, para las elecciones $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, el punto de equilibrio positivo es asintóticamente estable.

   La función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \infty[& \longrightarrow & [0, \infty[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{\alpha x}{1 + \beta x} \end{array}$$

   Los puntos fijos de dicha ecuación son:

$$x = \frac{\alpha x}{1 + \beta x} \Longleftrightarrow x + \beta x^2 = \alpha x \Longleftrightarrow x(1 - \alpha + \beta x) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{\alpha - 1}{\beta} \end{array} \right.$$

Para estudiar la estabilidad usando el criterio de la primera derivada, derivamos:

$$f'(x) = \frac{\alpha(1+\beta x) - \beta \cdot \alpha x}{(1+\beta x)^2} = \frac{\alpha}{(1+\beta x)^2}$$

Evaluando en x_2, que para los valores de α y β dados es el punto de equilibrio positivo, se tiene:

$$f'(x_2) = \frac{\alpha}{\alpha^2}$$

Para $\alpha = 2$ tenemos que $f'(x_2) = 1/2 < 1$, por lo que x_2 es asintóticamente estable.

2. Efectúa el cambio de variable $x_n = 1/z_n$ y calcula la expresión de todas las soluciones.

Notemos que se supone que $x_0 > 0$, ya que si fuese igual a 0 tendríamos una solución constante y el ejercicio estaría resuelto. En caso contrario, el cambio de variable queda:

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{\alpha/z_n}{1+\beta/z_n} = \frac{\alpha}{z_n+\beta} \Longrightarrow z_{n+1} = \frac{z_n+\beta}{\alpha}$$

Tenemos que se trata de una ecuación lineal de orden 1 no homogénea. Para resolverla, en primer lugar distinguimos en función del valor de α:

- Si $\alpha \neq 1$:
  Hallamos en primer lugar su solución constante:

  $$z = \frac{z+\beta}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha z = z + \beta \Longleftrightarrow z = \frac{\beta}{\alpha-1}$$

  Por tanto, aplicamos el cambio de variable $y_n = z_n - \dfrac{\beta}{\alpha-1}$, y tenemos que:

  $$\begin{aligned} y_{n+1} &= z_{n+1} - \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{z_n+\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} + \beta}{\alpha} = \\ &= \frac{y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} + \beta - \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha-1}}{\alpha} = \frac{y_n + (1-\alpha)\cdot\frac{\beta}{\alpha-1} + \beta}{\alpha} = \frac{y_n}{\alpha} \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$z_n = y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{y_0}{\alpha^n} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{z_0 - \frac{\beta}{\alpha-1}}{\alpha^n} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)z_0 + (\alpha^n-1)\beta}{\alpha^n(\alpha-1)}$$

  Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que:

  $$\frac{1}{x_n} = \frac{(\alpha-1)\cdot\frac{1}{x_0} + (\alpha^n-1)\beta}{\alpha^n(\alpha-1)} \Longrightarrow x_n = \frac{\alpha^n(\alpha-1)}{(\alpha-1)\cdot\frac{1}{x_0} + (\alpha^n-1)\beta}$$

- Si $\alpha = 1$:
  Tenemos que $z_{n+1} = z_n + \beta$, por lo que:
  $$z_n = z_0 + n \cdot \beta$$
  Deshaciendo el cambio de variable, tenemos:
  $$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} + n \cdot \beta = \frac{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta}{x_0} \Longrightarrow x_n = \frac{x_0}{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta}$$

3. Determina el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación.
   Distinguimos en función de los valores de α:
   - Si $\alpha = 1$:
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta} = 0$$
   - Si $\alpha \in]0, 1[$:
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x_0} + (\alpha^n - 1)\beta} = 0$$
   - Si $\alpha \in]1, +\infty[$:
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x_0} + (\alpha^n - 1)\beta} = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

Ejercicio 4.2.3. Una población de ganado se rige por el modelo discreto dado por $p_{n+1} = 10p_n \cdot e^{-p_n},\ n \in \mathbb{N}$. Calcula sus puntos de equilibrio y comprueba que son todos inestables.

Su función asociada es:
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & 10x \cdot e^{-x} \end{array}$$

Sus puntos fijos son las soluciones de:
$$x = 10xe^{-x}$$

Por tanto, una primera solución constante es $x_1 = 0$. Para la otra, resolvemos la siguiente ecuación:
$$1 = 10e^{-x_2} \Longleftrightarrow 0 = \ln 1 = \ln(10e^{-x_2}) = \ln(10) - x_2 \Longleftrightarrow x_2 = \ln 10$$

Para estudiar la estabilidad, aplicamos el criterio de la primera derivada:
$$f'(x) = 10e^{-x} - 10xe^{-x} = 10e^{-x}(1 - x)$$

- $f'(x_1) = 10 > 1$, por lo que x_1 es inestable.
- $f'(x_2) = 10 \cdot \frac{1}{10}(1 - \ln 10) = 1 - \ln 10 < -1 \Longleftrightarrow 2 < \ln 10 \Longleftrightarrow e^2 < 10$. Por tato, como es cierto, tenemos que x_2 es inestable.

Ejercicio 4.2.4. En relación con el modelo del ejercicio anterior (Ejercicio 4.2.3), se propone vender una fracción α $(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo, lo que da lugar al siguiente otro modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha)p_n \cdot e^{-(1-\alpha)p_n}$$

1. Encuentra el intervalo abierto (de amplitud máxima) al que debe pertenecer α para que esté asegurada la estabilidad asintótica del punto de equilibrio positivo.

   La función asociada es:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & 10(1-\alpha)x \cdot e^{-(1-\alpha)x} \end{array}$$

   Calculamos en primer lugar los puntos fijos. Además de $x_1 = 0$, la otra solución constante es:

$$1 = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x} \Longrightarrow 0 = \ln[10(1-\alpha)] - (1-\alpha)x \Longrightarrow x_2 = \frac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha}$$

   Para estudiar la estabilidad, aplicamos el criterio de la primera derivada:

$$f'(x) = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x} - 10(1-\alpha)^2 x e^{-(1-\alpha)x} = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x}[1-x(1-\alpha)]$$

   Evaluando en x_2, tenemos:

$$f'(x_2) = 10(1-\alpha) \cdot \frac{1}{10(1-\alpha)}[1 - \ln[10(1-\alpha)]] = \ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right)$$

   Como necesitamos que $|f'(x_2)| < 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right) < 1 &\Longleftrightarrow \frac{e}{10(1-\alpha)} < e \Longleftrightarrow \frac{1}{10(1-\alpha)} < 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{10} < 1-\alpha \Longleftrightarrow \alpha < \frac{9}{10} \\ \ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right) > -1 &\Longleftrightarrow \frac{e}{10(1-\alpha)} > \frac{1}{e} \Longleftrightarrow \frac{e^2}{10(1-\alpha)} > 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \frac{e^2}{10} > 1-\alpha \Longleftrightarrow \frac{10-e^2}{10} < \alpha \end{aligned}$$

   Por tanto, se asegura la estabilidad asintótica de x_2 si:

$$\alpha \in \left]\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10}\right[$$

2. Calcula el valor de α para el que la población (no nula) en equilibrio alcanza su valor máximo.

La población no nula en equilibrio es $x_2 = \dfrac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha}$. Para que alcance su valor máximo, es necesario que coincida con el máximo de f, calculémoslo:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - x(1-\alpha) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{1-\alpha}$$

Comprobemos que efectivamente dicho valor es un máximo relativo:

- Si $x < \dfrac{1}{1-\alpha}$, entonces $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente.
- Si $x > \dfrac{1}{1-\alpha}$, entonces $f'(x) < 0$, por lo que f es decreciente.

Por tanto, dicho valor efectivamente es un máximo relativo. Imponemos que dicho máximo sea igual al punto de equilibrio:

$$\frac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow \ln[10(1-\alpha)] = 1 \Longleftrightarrow 1-\alpha = \frac{e}{10} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{10-e}{10}$$

Por tanto, el valor de α buscado es $\alpha = \frac{10-e}{10}$.

Ejercicio 4.2.5. Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$ una función que satisface $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El método de Newton para resolver la ecuación $g(x) = 0$ se describe como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Si α es una raíz de $g(x) = 0$, demuestra que el método es convergente para cualquier dato inicial suficientemente próximo a la raíz.

La función asociada a dicha Ley de Recurrencia es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que:

$$f(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$$

Por tanto, α es un punto fijo de f. Como $g \in C^2(\mathbb{R})$, tenemos que $g' \in C^1(\mathbb{R})$, por lo que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$f'(x) = 1 - \frac{(g'(x))^2 - g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = 1 - 1 + \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$$

Por tanto, tenemos que $|f'(\alpha)| = 0 < 1$, y por el Criterio de la Primera Derivada α es asintóticamente estable localmente para f. En concreto, es un atractor local, por lo que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - \alpha| < \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Queda por tanto demostrado lo pedido.

Ejercicio 4.2.6. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, donde:

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3$.

   Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo la siguiente ecuación:

$$1 - 2x + 3x^2 - x^3 = x \Longleftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 0$$

   Aplicamos el Método de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Figura 4.4: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

   De Ruffini, vemos que:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = -(x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^3$$

   Por tanto, tenemos que el único punto fijo es $x_c \equiv 1$. Para estudiar la estabilidad, como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(x) = -2 + 6x - 3x^2 \qquad f'(1) = 1$$

   Como vemos que el Criterio de la Primera Derivada no aporta información, buscamos aplicar el Criterio de la Segunda Derivada:

$$f''(x) = 6 - 6x \qquad f''(1) = 0$$

   Este tampoco nos aporta información, por lo que recurrimos al Criterio de la Tercera Derivada:

$$f'''(x) = -6 < 0$$

   Por tanto, tenemos que $x = 1$ es un punto de inflexión, en el que pasa de convexa a cóncava. Por el Criterio de la Tercera Derivada, tenemos que $x_c \equiv 1$ es asintóticamente estable localmente.

2. $f(x) = x^2 - x$.

   Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo la siguiente ecuación:

$$x^2 - x = x \Longleftrightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{c_1} \equiv 0 \\ \vee \\ x_{c_2} \equiv 2 \end{array} \right.$$

Para estudiar la estabilidad, como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(x) = 2x - 1 \qquad f'(0) = -1,\ f(2) = 3$$

Por el Criterio de la Primera Derivada, deducimos que $x_{c_2} \equiv 2$ es inestable. Respecto al otro punto fijo, como es una parábola deducimos por la observación de la página 45 tenemos que es asintóticamente estable localmente.

3. $f(x) = \begin{cases} 3/2 - x/2 & \text{si} \quad x \in\ ]-\infty, 1[\\ x^2 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$

Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3}{2} - \frac{x}{2} = x \Longleftrightarrow 3 - x = 2x \Longleftrightarrow x = 1$$
$$x^2 = x \Longleftrightarrow x = 0,\ 1$$

Considerando los intervalos de definición de cada parte de f, tenemos que tan solo hay un punto fijo, $x_c \equiv 1$. Estudiemos ahora su estabilidad. Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{si} \quad x \in\ ]-\infty, 1[\\ 2x & \text{si} \quad x \in]1, \infty[\end{cases}$$

Veamos si es derivable en $x = 1$. Tenemos:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} 2x = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

Por tanto, tenemos que f no es derivable en $x = 1$, por lo que no podemos aplicar ninguno de los criterios ya conocidos. Veamos ahora qué ocurre en cada parte:

- Si $x_0 > 1$:

  Demostramos por inducción que $x_n = x_0^{(2^n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que:
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{(2^n)} = \infty$$

  Por tanto, tenemos que no es estable, ya que para valores cercanos a 1, la solución diverge. Por tanto, es inestable por arriba.

- Si $x_0 < 1$:

  Tenemos que:

  $$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_0}{2} = \frac{3 - x_0}{2} > 1 \Longleftrightarrow 3 - x_0 > 2 \Longleftrightarrow 1 > x_0$$

  Por tanto, como $x_1 > 1$, aplicando lo anterior tenemos que:

  $$x_n = \left(\frac{3 - x_0}{2}\right)^{(2^{n-1})} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Por tanto, con $n \to \infty$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-x_0}{2}\right)^{(2^{n-1})} = \infty$$

Por tanto, es inestable por abajo.

Por tanto, deducimos que $x_c \equiv 1$ es inestable.

4. $f(x) = \begin{cases} 0{,}25x + 1{,}5 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$0{,}25x + 1{,}5 = x \Longleftrightarrow 1{,}5 = 0{,}75x \Longleftrightarrow x = 2$$
$$\sqrt{2x} = x \Longleftrightarrow 2x = x^2 \Longleftrightarrow x = 0, 2$$

Considerando los intervalos de definición de cada parte de f, tenemos que tan solo hay un punto fijo, $x_c \equiv 2$. Estudiemos ahora su estabilidad. Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0{,}25 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Veamos si es derivable en $x = 2$. Tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 0{,}25 = 0{,}25 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{2x}} = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

Por tanto, tenemos que f no es derivable en $x = 2$, por lo que no podemos aplicar ninguno de los criterios ya conocidos.

- Si $x_0 < 2$:
  Veamos en primer lugar que la sucesión solución está mayorada por 2:
  - Para $n = 0$, vemos que $x_0 < 2$.
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$x_n < 2 \Longrightarrow x_{n+1} = 0{,}25x_n + 1{,}5 < 0{,}25 \cdot 2 + 1{,}5 = 2$$

    Por tanto, para $n + 1$ se tiene.

  Veamos ahora que la sucesión solución es creciente:

  $$x_{n+1} = f(x_n) = 0{,}25 \cdot x_n + 1{,}5 > x_n \Longleftrightarrow 1{,}5 > 0{,}75x_n \Longleftrightarrow 2 > x_n$$

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que $\{x_n\} \to 2$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es un atractor local por debajo. Además, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

  $$|x_0 - 2| = 2 - x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 2| = 2 - x_n < 2 - x_0 < \delta = \varepsilon$$

  donde se ha empleado que $x_0 < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es estable por abajo.

- Si $x_0 > 2$:
  Veamos en primer lugar que la sucesión solución está minorada por 2:
  - Para $n = 0$, vemos que $x_0 > 2$.
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n+1$:

    $$x_n > 2 \Longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{2x_n} > \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

    Por tanto, para $n+1$ se tiene.

  Veamos ahora que la sucesión solución es decreciente:

  $$x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{2 \cdot x_n} < x_n \Longleftrightarrow 2x_n < x_n^2 \Longleftrightarrow 2 < x_n$$

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que $\{x_n\} \to 2$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es un atractor local por encima. Además, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

  $$|x_0 - 2| = x_0 - 2 < \delta \Longrightarrow |x_n - 2| = x_n - 2 < x_0 - 2 < \delta = \varepsilon$$

  donde se ha empleado que $x_0 > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es estable por encima.

Uniendo ambos resultados, tenemos que $x_c \equiv 2$ es estable y es un atractor local, por lo que es asintóticamente estable localmente.

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

   En este caso, tenemos que $[-1, 1]$ son todos ellos puntos fijos. No obstante, tenemos que f no es derivable en ± 1, por lo que no podemos aplicar los criterios ya conocidos.

   - Para cualquier $x^* \in]-1, 1[$, tenemos que x no es un atractor local, ya que para $x_0 \neq x^*$, tenemos que:

     $$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \neq x^*$$

     No obstante, tomando $\delta = \varepsilon$ obtenemos que sí es estable.
   - Para $x^* = 1$, tenemos que es estable en ambos lados y atractor local tan solo por arriba.
   - Para $x^* = -1$, tenemos que es estable en ambos lados y atractor tan solo por debajo.

Ejercicio 4.2.7. Demuestra que $\{2/9, 4/9, 8/9\}$ es un $3-$ciclo inestable para la función "tienda" *(tent map)* T definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2(1-x) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2.8. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\{s_0, s_1\}$ un $2-$ciclo de $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestra que entre s_0 y s_1 hay un punto de equilibrio.

Supongamos sin pérdida generalidad $s_0 < s_1$. Buscamos demostrar que $\exists c \in]s_0, s_1[$ tal que $f(c) = c$. Definiendo $g = f - Id$, tenemos que es continua por ser diferencia de continuas. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(s_0) &= f(s_0) - s_0 = s_1 - s_0 \\ g(s_1) &= f(s_1) - s_1 = s_0 - s_1 = -(s_1 - s_0) \end{aligned}$$

donde he hecho uso que, por ser un $2-$ciclo, tenemos que $f(s_0) = s_1$ y $f(s_1) = s_0$. Por tanto, tenemos que $g(s_0)g(s_1) = -(s_1 - s_0)^2 < 0$, por lo que por el Teorema de los Ceros de Bolzano, $\exists c \in]s_0, s_1[$ tal que $g(c) = 0 = f(c) - c$, por lo que $f(c) = c$.

Ejercicio 4.2.9. Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ con función asociada $f(x) = {}^1\!/_2 \cdot x(1 - 3x^2)$. Estudia la estabilidad del ciclo $\{-1, 1\}$. Estudia también la estabilidad del punto de equilibrio deducido en el ejercicio anterior (Ejercicio 4.2.8).

Comprobemos en primer lugar que se trata de un $2-$ciclo:

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 3) = -1 \qquad f(-1) = -\frac{1}{2}(1 - 3) = 1$$

Por tanto, efectivamente se trata de un $2-$ciclo. Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que podemos aplicar el Criterio de la Primera Derivada. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9x^2 = \frac{1 - 9x^2}{2}$$

Tenemos por tanto que $f'(1) = f(-1) = -{}^8\!/_2 = -4 < -1$. Como $|f'(1)f'(-1)| = 16 > 1$, tenemos que dicho ciclo es inestable. Además, en el ejercicio anterior hemos visto que tiene un punto fijo $c \in]-1, 1[$. Calculémoslo explícitamente:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x(1 - 3x^2) = x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ 1 - 3x^2 = 2 \Longleftrightarrow 3x^2 = -1 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que el punto fijo es $x_c \equiv 0$. Tenemos que $|f'(0)| = \frac{1}{2} < 1$, y por el Criterio de la Primera Derivada tenemos que es asintóticamente estable localmente.

Ejercicio 4.2.10. Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

que describe la evolución de una población que se comporta como una exponencial cuando el tamaño de la población es bajo y tiene tendencia a disminuir cuando el tamaño es elevado. La cantidad

$$\lambda = e^{r(1-x_n)}$$

es la tasa de crecimiento de la población.

1. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación.

   Su función asociada es:

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & xe^{r(1-x)}
\end{array}
$$

   Sus puntos fijos son, suponiendo $r \neq 0$, son:

$$
f(x) = x \Longleftrightarrow x = xe^{r(1-x)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad \vee \\ 1 = e^{r(1-x)} \Longleftrightarrow 0 = r(1-x) \Longleftrightarrow x = 1 \end{array} \right.
$$

   En el caso de $r = 0$, se tiene que $f(x) = xe^0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que todos los puntos son puntos fijos.

2. Determina las condiciones bajo las que dichos puntos de equilibrio son asintóticamente estables para $r \neq 0, 2$.

   Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que calculamos la primera derivada:

$$
f'(x) = e^{r(1-x)}(1 - r \cdot x) = e^{r(1-x)}(1 - rx)
$$

   Estudiamos ahora cada uno de los puntos:

   - Para $x = 0$:
     Tenemos $f'(0) = e^r$. Tenemos que e^x es una función estrictamente creciente y positiva. Por tanto, para $r > 0$ ($f'(0) > 1$) se tiene que es inestable; mientras que para $r < 0$ ($f'(0) < 1$) se tiene que es asintóticamente estable localmente.
   - Para $x = 1$:
     Tenemos $f'(1) = e^0(1-r) = 1-r$. Tenemos que, para $r \in]0, 2[$ ($|f'(1)| < 1$) se tiene que es asintóticamente estable localmente; mientras que para $r > 2$ y $r < 0$ ($|f'(1)| > 1$) se tiene que es inestable.

   Los resultados se resumen en la siguiente tabla, donde *a.e.l.* representa *asintóticamente estable localmente.*

$0 < r$	0 es a.e.l. y 1 es inestable.
$r = 0$	No lo sabemos.
$0 < r < 2$	0 es inestable y 1 es a.e.l.
$r = 2$	0 es inestable, y para el 1 no lo sabemos.
$2 < r$	0 y 1 son inestables.

3. Estudia el caso $r = 2$.

Como hemos explicado antes, el 0 es inestable. Veamos el caso de $x_c \equiv 1$. Tenemos que $f'(1) = 1 - r = -1$. Calculamos entonces la derivada segunda y tercera:

$$f''(x) = -re^{r(1-x)}(1 - rx + 1) = -re^{r(1-x)}(2 - rx)$$
$$f'''(x) = r^2e^{r(1-x)}(2 - rx + 1) = r^2e^{r(1-x)}(3 - rx)$$

Por tanto, tenemos que $f''(1) = -r(2-r) = 0$, $f'''(1) = r^2(3-r) = 4$. Usando el Teorema correspondiente, tenemos que:

$$2f'''(1) + 3(f''(1))^2 = 2 \cdot 4 > 0$$

Por tanto, tenemos que $x_c \equiv 1$ es asintóticamente estable localmente.

4. Estudia el caso $r = 0$.

   En este caso, el modelo queda $x_{n+1} = x_n$, por lo que todos los valores iniciales son soluciones constantes. No es un atractor local, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ para cualquier valor de $x_0 \in \mathbb{R}$. No obstante, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que sí es estable.

Ejercicio 4.2.11. Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$, donde $f \in C^2(\mathbb{R})$ es una función que verifica las siguientes propiedades:

- $f(x)$ se anula solo en $x = -1$.
- $f'(x)$ es estrictamente decreciente con $f'(-1) = 0$.

Demuestra que $x^* = -1$ es un punto de equilibrio inestable siempre que $\alpha \neq 0$.

Sea la función asociada a dicha euación en diferencias la siguiente:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + \alpha f(x) \end{array}$$

Veamos que $x^* = -1$ es un punto fijo:

$$g(-1) = -1 + \alpha f(-1) = -1 + \alpha \cdot 0 = -1$$

Por tanto, x^* es un punto fijo. Como $f \in C^2(\mathbb{R})$, tenemos que $g \in C^2(\mathbb{R})$. Calculemos $g'(x^*)$:

$$g'(x) = 1 + \alpha f'(x) \qquad g'(-1) = 1 + \alpha f'(-1) = 1$$

Por tanto, el Criterio de la Primera Derivada no aporta información. Veamos ahora qué ocurre en $x^* = -1$:

- Para $x < -1$, como f' es estrictamente decreciente tenemos que $f'(x) > f'(-1) = 0$. Por tanto, f es estrictamente creciente.
- Para $x > -1$, como f' es estrictamente decreciente tenemos que $f'(x) < f'(-1) = 0$. Por tanto, f es estrictamente decreciente.

Por tanto, podemos afirmar que f tiene un máximo relativo en x^* y que cambia de creciente a decreciente, por lo que es cóncava. *Supongamos* que $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que por tanto que:

$$g''(x) = \alpha f''(x)$$

Por tanto, como $\alpha, f''(-1) \neq 0$, tenemos que $g''(-1) \neq 0$. Por tanto, por el Criterio de la Segunda Derivada, tenemos que $x^* = -1$ será inestable bien por arriba o bien por abajo, pero en cualquier caso será inestable.

Observación. Notemos que hemos supuesto $f''(x) < 0$. Que una función sea cóncava no implica necesariamente que $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y ejemplo de esto es $f''(x) = -\dfrac{(x-1)^4}{4}$.

Ejercicio 4.2.12. En cierto mercado las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p^2, \qquad D(p) = c - dp, \qquad\qquad c \in\,]1, +\infty[,\ d \in \mathbb{R}^+$$

1. Calcula el punto de equilibrio económicamente factible.

   $$O(p) = D(p) \Longleftrightarrow 1+p^2 = c-dp \Longleftrightarrow p^2+dp+1-c = 0 \Longleftrightarrow p = \frac{-d \pm \sqrt{d^2+4(c-1)}}{2}$$

   En el caso de la solución que lleva un -1 como coeficiente de la raíz, podemos confirmar que el valor es negativo, por lo que el punto de equilibrio económicamente estable es:

   $$p^* = \frac{-d + \sqrt{d^2+4(c-1)}}{2}$$

2. Deduce las condiciones sobre c y d que aseguran la estabilidad asintótica de p^*. ¿Qué ocurre si $d = 2$ y $c = 4$?

   El modelo viene dado por la ecuación $O(p_{n-1}) = D(p_n)$:

   $$1 + p_{n-1}^2 = c - dp_n \Longrightarrow p_n = \frac{c-1-p_{n-1}^2}{d}$$

   La función asociada es:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \dfrac{c-1-x^2}{d} \end{array}$$

   Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, y su derivada es:

   $$f'(x) = -\frac{2}{d} \cdot x$$
   $$f'(p^*) = -\frac{-d + \sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} = \frac{d - \sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} = 1 - \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d}$$

Para poder asegurar la estabilidad asintótica de p^*, empleando el Criterio de la Primera Derivada necesitamos que $|f'(p^*)| < 1$. Como sabemos que $\left(-d+\sqrt{d^2+4(c-1)}\right) > 0$ por tener $p^* > 0$ y, además, $d \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $f'(p^*) \leqslant 0$. Por tanto, basta con imponer que $-1 < f'(p^*)$:

$$\begin{aligned} -1 < 1 - \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} &\Longleftrightarrow -2 < -\frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow 2 > \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} &\Longleftrightarrow 2d > \sqrt{d^2+4(c-1)} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow 4d^2 > d^2+4(c-1) &\Longleftrightarrow 3d^2 > 4(c-1) \Longleftrightarrow 3d^2-4c > -4 \end{aligned}$$

Por tanto, hemos de imponer que $3d^2 - 4c > -4$. En el caso de $d = 2$ y $c = 4$, tenemos que:

$$3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 4 = 12 - 16 = -4$$

Por tanto, en este caso no basta con usar el Criterio de la Primera Derivada. Tenemos que:

$$p^* = \frac{-2+\sqrt{4+4\cdot 3}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad f'(-1) = -1$$

En este caso, y debido a la observación de la página 45, tenemos que $p^* = 1$ es asintóticamente localmente estable.

3. Para $c = 3$ y $d = 2$, usa un diagrama de Cobweb para trazar los valores de p_1 y p_2 a partir de $p_0 = 1$. ¿Cómo se comportarán los precios a largo plazo en este caso?

En este caso, tenemos:

$$3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0 > -4$$

Por tanto, tenemos que el punto de equilibrio p^* es asintóticamente estable localmente. En este caso, $p^* = -1+\sqrt{3} \approx 0{,}732$. Sabiendo la Ley de Recurrencia, tenemos que:

$$p_0 = 1 \qquad p_1 = {}^1\!/_2 \qquad p_2 = {}^7\!/_8$$

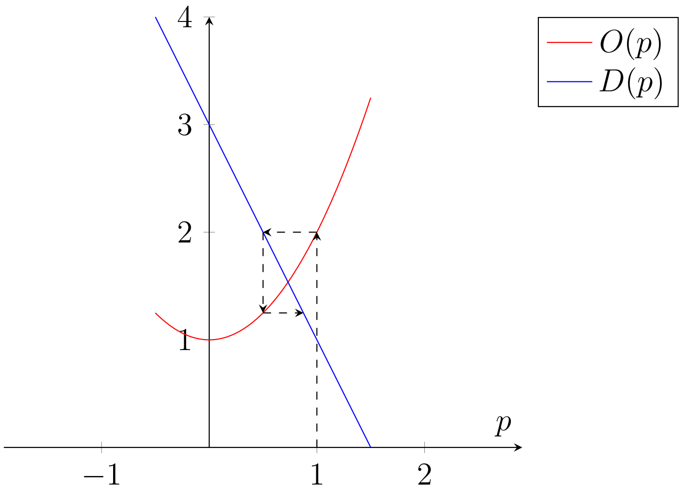


Figura 4.5: Representación del modelo de la Telaraña del Ejercicio 4.2.12.

Ejercicio 4.2.13. Determina los 2−ciclos de los siguientes sistema dinámicos y estudia su estabilidad:

1. $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

   Su función asociada es:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x^2 \end{array}$$

   Para estudiar los 2−ciclos, necesitamos obtener f^2. Tenemos que:

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(1-x^2) = 1-(1-x^2)^2 = 1-(1-2x^2+x^4) = 2x^2-x^4 = x^2(2-x^2)$$

   Los elementos del 2−ciclo serán los puntos fijos de f^2, calculémoslos:

$$f^2(x) = x \Longleftrightarrow x^2(2-x^2) = x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad\vee \\ x(2-x^2) = 1 \Longleftrightarrow -x^3 + 2x - 1 \end{array} \right.$$

   Aplicamos el Método de Ruffini para resolver dicha ecuación:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & & -1 & -1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Figura 4.6: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

   Por tanto, tenemos que dos puntos fijos de f^2 son $0, 1$. Además, también tendrá como puntos fijos las soluciones de la ecuación $-x^2 - x + 1 = 0$, pero esas son las soluciones de $f(x) = x$; es decir, son soluciones constantes. Por tanto, el 2−ciclo es:

$$\{0, 1\}$$

2. $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$.
   Su función asociada es:
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5 - \dfrac{6}{x} \end{array}$$
   Para estudiar los $2-$ciclos, necesitamos obtener f^2. Tenemos que:
$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(5 - \frac{6}{x}\right) = 5 - \frac{6}{5 - \dfrac{6}{x}} = 5 - \frac{6x}{5x-6}$$
   Los elementos del $2-$ciclo serán los puntos fijos de f^2, calculémoslos:
$$f^2(x) = x \Longleftrightarrow 5 - \frac{6x}{5x-6} = x \Longleftrightarrow (5-x)(5x-6) = 6x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 25x - 30 - 5x^2 + 6x = 6x \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 3 \\ \vee \\ x = 2 \end{array}\right.$$
   Comprobemos ahora que no son soluciones constantes:
$$f(x) = x \Longleftrightarrow 5 - \frac{6}{x} = x \Longleftrightarrow 5x - 6 = x^2$$
   Como podemos ver, los dos valores anteriores cumplen la ecuación, por lo que son puntos fijos. Por tanto, no hay $2-$ciclos no triviales.

Ejercicio 4.2.14. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la función:
$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax & \text{si} & x < 0 \\ bx & \text{si} & 0 \leqslant x \end{array}\right.$$
demuestra las siguientes propiedades:

1. $\alpha = 0$ es un punto fijo de f para cualesquiera a y b.

   Para cualquier valores de a, b, tenemos que $f(0) = b \cdot 0 = 0$, por lo que $\alpha = 0$ es un punto fijo.

2. Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

   Distinguimos en función del signo de x_0:

   - Si $x_0 < 0$:
     Demostremos en primer lugar que la solución está mayorada por 0:
     - Para $n = 0$, tenemos $x_0 < 0$.
     - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:
$$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n < 0$$
       donde he aplicado que $a \geqslant 0$ y $x_n < 0$.

Veamos ahora que la solución es estrictamente creciente:

$$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n > x_n \Longleftrightarrow a < 1$$

donde, tras simplificar x_n puesto que $x_n \neq 0$, he empleado que $x_n < 0$, por lo que se invierte el sentido de la desigualdad. Por tanto, $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por lo que $\{x_n\} \to 0$. Para demostrar que es estable, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

$$|x_0 - 0| = -x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 0| = -x_n < -x_0 < \varepsilon$$

donde he empleado que $x_0 < x_n$. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente por abajo.

- Si $x_0 > 0$:
  Demostremos en primer lugar que la solución está minorada por 0:
  - Para $n = 0$, tenemos $x_0 > 0$.
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n > 0$$

    donde he aplicado que $b \geqslant 0$ y $x_n > 0$.

  Veamos ahora que la solución es estrictamente decreciente:

  $$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n < x_n \Longleftrightarrow b < 1$$

  donde, tras simplificar x_n puesto que $x_n \neq 0$, he empleado que $x_n > 0$, por lo que se mantiene el sentido de la desigualdad. Por tanto, $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, por lo que $\{x_n\} \to 0$. Para demostrar que es estable, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

  $$|x_0 - 0| = x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 0| = x_n < x_0 < \varepsilon$$

  donde he empleado que la sucesión solución es creciente. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente por encima.

Por tanto, deducimos que es asintóticamente estable localmente.

3. Si $0 < a < 1$ y $b > 1$ entonces $\alpha = 0$ es inestable.

   Veamos que no es estable. Tomado $x_0 > 0$, veamos que la solución es creciente:

   $$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n > x_n \Longleftrightarrow b > 1$$

   Por tanto, la solución es estrictamente creciente. Veamos que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que lo está, y tengamos $\{x_n\} \to L$. Tenemos que:

   $$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

   donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Por tanto, $f(L) = L$, por lo que L es un punto fijo y ha de ser $\alpha = 0$ por ser el único punto fijo. No obstante, la sucesión solución es estrictamente creciente con $x_0 > 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $\{x_n\}$ no está acotada, y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

En concreto, tenemos que es inestable por encima, y por tanto es inestable.

4. Si $a < 0$ y $b < 0$ y $ab < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

   Veamos el valor de f^2. Tenemos que:

   - Si $x < 0$, tenemos que $f(x) = ax > 0$, por lo que $f^2(x) = abx$.
   - Si $x > 0$, tenemos que $f(x) = bx < 0$, por lo que $f^2(x) = abx$.

   En cualquier caso, tenemos que $f^2(x) = abx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $f^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, y su derivada es:

   $$(f^2)'(x) = ab \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Como $|(f^2)'(\alpha)| = |ab| = ab < 1$, tenemos que α es asintóticamente estable localmente para f^2. Debido al Lema 1.7, también lo es para f.

5. ¿Qué puede decirse sobre la estabilidad de los puntos fijos cuando $b = 1$ y $a > 1$?

   En este caso, el conjunto de los puntos fijos es $\mathbb{R}_0^+$. Para los elementos de $\mathbb{R}^+$, tenemos que es estable tomando $\delta = \varepsilon$. No obstante, no es asintóticamente estable, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ para cualquier valor de $x_0 > 0$, y por tanto no es un atractor local.

   En el caso de un punto $x_0 < 0$, tenemos que la solución es decreciente:

   $$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n < x_n \Longleftrightarrow a > 1$$

   Por tanto, la solución es estrictamente decreciente. Veamos que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que lo está, y tengamos $\{x_n\} \to L$. Tenemos que:

   $$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

   donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Por tanto, $f(L) = L$, por lo que L es un punto fijo y ha de ser $\alpha = 0$ por ser el único punto fijo. No obstante, la sucesión solución es estrictamente decreciente con $x_0 < 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $\{x_n\}$ no está acotada, y se tiene:

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

   En concreto, tenemos que es inestable por debajo, y por tanto es inestable.

Ejercicio 4.2.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2}x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Estudia la estabilidad de los puntos fijos de $x_{n+1} = f(x_n)$. ¿Es f contractiva?

Tenemos que $f(0) = 0$. Veamos si hay otro punto fijo:

$$\frac{1}{2}x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = x \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

Por tanto, no hay más puntos fijos. Veamos en primer lugar que $|x_{n+1}| < |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}x_n \operatorname{sen}\left({}^1/_{x_n}\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}x_n\right| < |x_n|$$

Veamos ahora que es estable. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \varepsilon$ tenemos que:

$$|x_0 - 0| = |x_0| < \delta \Longrightarrow |x^n - 0| = |x^n| < |x_0| < \varepsilon$$

Por tanto, el 0 es estable. Veamos ahora que es un atractor local. Como $|x_n|$ es estrictamente decreciente y minorada por 0, tenemos que $\{|x_n|\} \to L$. Por tanto, por la unicidad del límite, como $x_{n+1} = f(x_n)$, tenemos que $L = f(L)$, por lo que $\{|x_n|\} \to 0$. Veamos que $\{x_n\} \to 0$. Por la convergencia del valor absoluto, tenemos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N} \mid \text{Si } m \in \mathbb{N},\ m \geqslant n \Longrightarrow ||x_m| - 0| = |x_m| = |x_m - 0| < \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que $\{x_n\} \to 0$, por lo que es un atractor local. Por tanto, 0 es asintóticamente estable localmente.

Por úĺtimo, veamos si es contractiva. Para ello, hemos de calcular la constante de Lipschitz acotando la derivada. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left({}^1/_x\right) - x\cos\left({}^1/_x\right) \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left({}^1/_x\right) - \cos\left({}^1/_x\right) \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Para que sea Lipschitziana es necesario que la derivada esté acotada. No obstante, cuando $x \to 0$ tenemos que f' diverge (no está acotada), por lo que no es Lipschitziana y por tanto tampoco es contractiva.

Ejercicio 4.2.16. La evolución de una determinada población viene descrita por la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n e^{a - x_n} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

1. Determina los puntos de equilibrio y estudia su estabilidad en función del valor de a.

   Sea su función asociada:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{a-x} \end{array}$$

Tenemos que los puntos fijos, además de $x = 0$, son:

$$1 = e^{a-x} \Longrightarrow 0 = a - x \Longrightarrow x = a$$

Además, sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$f'(x) = e^{a-x}(1 - x)$$

Estudiamos la estabilidad de cada uno de los puntos fijos empleando el Criterio de la Primera Derivada:

- $\underline{x = 0}$:
  Tenemos que $f'(0) = e^a > 0$. Para aplicar el criterio, imponemos que $f'(0) < 1$:
  $$f'(0) < 1 \Longleftrightarrow e^a < e^0 \Longleftrightarrow a < 0$$
  Por tanto, como $a \in \mathbb{R}^+$, tenemos que no se tiene, por lo que $x = 0$ es un equilibrio inestable.
- $\underline{x = a}$:
  Tenemos que $f'(a) = e^0(1-a) = 1-a$. Para aplicar el criterio, imponemos que $|f'(a)| < 1$:
  $$|f'(a)| < 1 \Longleftrightarrow -1 < 1 - a < 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 > a \\ \wedge \\ a > 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow a \in \left]0, 2\right[$$
  Para $a \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$ sabemos que $|f'(a)| > 1$, por lo que es inestable. Veamos qué ocurre para $a = 0, 2$.
  - Para $a = 0$, no se puede tener pues $a \in \mathbb{R}^+$.
  - Para $a = 2$, tenemos que $f'(2) = 1-2 = -1$. Calculamos $f''(2)$, $f'''(2)$:
    $$\begin{array}{ll} f''(x) = e^{a-x}(-1(1-x) - 1) = e^{a-x}(-2 + x) & f''(2) = 0 \\ f'''(x) = e^{a-x}(-1(-2 + x) + 1) = e^{a-x}(3 - x) & f'''(2) = e^{a-2} = e^0 = 1 \end{array}$$
    Tenemos que:
    $$2f'''(2) + 3(f''(2))^2 = 2 > 0$$
    Por tanto, tenemos que $x = a = 2$ es asintóticamente estable localmente.

2. Para el caso $a = 3$, comprueba que $\{0{,}424321, 5{,}57568\}$ es un $2-$ciclo (aproximado). ¿Es asintóticamente estable?

Busquemos calcular f^2. Tenemos que:

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(xe^{a-x}) = xe^{a-x} \cdot e^{a-xe^{a-x}}$$

Los puntos fijos de f^2 son, bien el 0, bien las soluciones de la siguiente ecuación:

$$e^{a-x} \cdot e^{a-xe^{a-x}} = 1 \Longleftrightarrow e^{a-x+a-xe^{a-x}} = e^{2a-x-e^{a-x}} = e^0 \Longleftrightarrow 2a - x = e^{a-x}$$

Dicha ecuación es trascendente, por lo que no podemos obtener de forma explícita los puntos fijos, tan solo aproximarlos, como nos los dan en el enunciado. Sea el ciclo entonces $\{\overline{x_0}, \overline{x_1}\}$. Buscamos demostrar que $f(\overline{x_0}) \approx \overline{x_1}$ y $f(\overline{x_1}) \approx \overline{x_0}$:

$$f(\overline{x_0}) = 5{,}5756782285075 \approx \overline{x_1}$$
$$f(\overline{x_1}) = 0{,}4243207104934 \approx \overline{x_0}$$

Estudiemos ahora su estabilidad. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, buscamos ver el valor de la primera derivada evaluada en los elementos del ciclo.

$$\left.\begin{array}{rr} f'(\overline{x_0}) = & 7{,}5645581220561 \\ f'(\overline{x_1}) = & -0{,}3482186546916 \end{array}\right\} \Longrightarrow |f'(\overline{x_0})f'(\overline{x_1})| = |-2{,}6341202525984| > 1$$

Por tanto, el $2-$ciclo visto es inestable.

Ejercicio 4.2.17. En cierto mercado los precios de un determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña, donde las funciones de oferta y demanda vienen dadas por:

$$D(p) = 5 - p, \qquad O(p) = 2 + \frac{(p-2)^3}{3}.$$

Con el fin de estudiar la evolución de los precios se pide lo siguiente:

1. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y decreciente, entonces $x_{n+1} = f(x_n)$ tiene un único punto de equilibrio.

   Está demostrado como parte de la demostración del ejemplo de la página 30.

2. Construye una ecuación en diferencias para el precio y localiza un intervalo entre dos enteros consecutivos que contenga al precio de equilibrio.

   Para el modelo dinámico, tenemos que $O(p_{n-1}) = D(p_n)$. Por tanto, tenemos que:
   $$2 + \frac{(p_{n-1}-2)^3}{3} = 5 - p_n \Longrightarrow p_n = 3 - \frac{(p_{n-1}-2)^3}{3}$$

   Podríamos intentar buscar explícitamente el punto de equilibrio p^*, pero llegaremos a un problema mayor:

   $$p^* = 3 - \frac{(p^*-2)^3}{3} \Longleftrightarrow 3p^* = 9 - (p^*)^3 + 4p^* - 4 \Longleftrightarrow (p^*)^3 - p^* - 5 = 0$$

   Resolver dicha ecuación de grado 3 explícitamente no es fácil, por lo que buscaremos aplicar el Teorema de Bolzano.

   Sea f la función asociada a la ecuación en diferencias:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3 - \dfrac{(x-2)^3}{3} \end{array}$$

Como buscamos una solución de $f(x) = x$, definimos $g = f - Id$. Tenemos que:

$$g(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1 \qquad g(3) = f(3) - 3 = 3 - \frac{1}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, $\exists p^* \in]2, 3[$ tal que $g(p^*) = 0$ o, equivalentemente, $f(p^*) = p^*$.

3. Calcula la derivada de f en el entorno anterior. Comprueba que el punto de equilibrio obtenido es asintóticamente estable.

Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, y su primera derivada es:

$$f'(x) = -(x-2)^2 < 0$$

Tenemos que f' es estrictamente decreciente, con $f'(2) = 0$, $f'(3) = -1$. Por tanto:

$$2 < p^* < 3 \Longrightarrow -1 = f'(3) < f'(p^*) < f'(2) = 0$$

En definitiva, tenemos que $|f'(p^*)| < 1$, por lo que el punto de equilibrio obtenido es asintóticamente estable.

4. Sea $g(x) = f(f(x))$, donde f es la función del apartado anterior. Prueba que se verifica $g(3) < 3 < 4 < g(4)$, y deduce como consecuencia de ello que la ecuación en diferencias admite un $2-$ciclo.

Tenemos que $g = f^2$. Tenemos que:

$$g(3) = f(f(3)) = f\left(3 - \frac{1}{3}\right) = 3 - \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3}{3} = 3 - \frac{\frac{2^3}{3^3}}{3} = 3 - \frac{2^3}{3^4} < 3 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{2^3}{3^4} > 0$$
$$g(4) = f(f(4)) = f\left(3 - \frac{2^3}{3}\right) = 3 - \frac{\left(1 - \frac{2^3}{3}\right)^3}{3} = 3 - \frac{-\frac{5^3}{3^3}}{3} = 3 + \frac{5^3}{3^4} > 4 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{5^3}{3^4} > 1 \Longleftrightarrow 5^3 = 125 > 81 = 3^4$$

Por tanto, efectivamente tenemos que $g(3) < 3 < 4 < g(4)$. Definimos ahora $h = g - Id = f^2 - Id$. Tenemos que:

$$h(3) = g(3) - 3 < 0$$
$$h(4) = g(4) - 4 > 0$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, $\exists c \in]3, 4[$ tal que $f^2(c) = c$. Además, como $c \neq p^*$ y en el primer apartado hemos visto que el punto fijo es único, tenemos que $f(c) \neq c$. Por tanto, tenemos que presenta un $2-$ciclo dado por:

$$\{c, f(c)\}$$

5. ¿Es el precio de equilibrio un atractor global?

   Buscamos ver si, para cualquier valor de x_0, se tiene que:

   $$\lim_{n\to\infty} p_n = x^*$$

   No es cierto, ya que si por ejemplo $p_0 = c$ el primer elemento del $2-$ciclo descubierto en el apartado anterior, tenemos que $\{p_n\}$ no converge, ya que se mantiene en el $2-$ciclo.

6. Estudia el comportamiento de los precios del modelo teniendo en cuenta la información obtenida en los apartados anteriores.

   Tenemos que si los precios comienzan cercanos al precio de equilibrio, convergerán a dicho precio. Además, presenta un $2-$ciclo.

4.3. Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

Ejercicio 4.3.1. Calcula la solución de la ecuación $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, con condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$. Determina $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

El polinomio característico asociado a dicha recurrencia es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Por tanto, tenemos que la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n = c_1 + c_2 \cdot 2^n$$

Usando las condiciones iniciales, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ x_1 = 0 = c_1 + 2c_2 \end{array} \right.$$

Restándole a la 2ª ecuación la 1ª, tenemos que $-1 = c_2$, por lo que $c_1 = 2$. Entonces, la solución a la recurrencia dada es:

$$x_n = 2 - 2^n$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2 - 2^n = -\infty$$

Ejercicio 4.3.2. Determina el espacio de soluciones de la ecuación $4x_{n+2} - x_n = 0$ que verifica $x_8 = 0$. ¿Qué dimensión tiene?

El polinomio característico asociado a dicha recurrencia es:

$$p(\lambda) = 4\lambda^2 - 1 = (2\lambda - 1)(2\lambda - 2) = 4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

Por tanto, tenemos que la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{c_1}{2^n} + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Usando la condición inicial, tenemos que:

$$x_8 = 0 = \frac{c_1}{2^8} + \frac{c_2}{2^8} = \frac{c_1 + c_2}{2^8} \Longrightarrow c_2 = -c_1$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la recurrencia son:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c_1}{2^n} - c_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \\ &= c_1 \left(\frac{1 - (-1)^n}{2^n}\right) = \\ &= c_1 \left(\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que el espacio de soluciones de la ecuación $4x_{n+2} - x_n = 0$ que verifica $x_8 = 0$, al que notaremos por V_8, es:

$$V_8 = \mathcal{L}\left\{\left\{\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2^n}\right\}\right\}$$

Como la base del espacio vectorial tiene un elemento, tenemos que su dimensión es 1, $\dim V_8 = 1$.

Ejercicio 4.3.3. ¿Pueden ser $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$ y $z_n = 4^n$ soluciones de una misma ecuación de la forma $a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$? Razona tu respuesta.

Sabemos que $\{x_n, y_n, z_n\}$ son linealmente independientes. Notando por V al espacio de las soluciones de la recurrencia dada, suponiendo que $\{x_n, y_n, z_n\} \in V$, tenemos que $\dim V \geqslant 3$. No obstante, sabemos que $\dim V = 2$, por lo que llegamos a una contradicción. Tenemos por tanto que no es posible.

Ejercicio 4.3.4. ¿Pueden ser $x_n = 5^n$ e $y_n = 1 + 2^n + 5^n$ soluciones de una misma ecuación de la forma $x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$? ¿Y de una ecuación de la forma $x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b_n$? Razona tus respuestas.

Supongamos que x_n e y_n sean soluciones de una ecuación de la forma:

$$x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0 \tag{4.1}$$

Entonces, como y_n es solución, tendríamos que:

$$\begin{aligned}
y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n &= (1 + 2^{n+2} + 5^{n+2}) + a_1(1 + 2^{n+1} + 5^{n+1}) + a_0(1 + 2^n + 5^n) \\
&= (1 + 4 \cdot 2^n + 25 \cdot 5^n) + a_1(1 + 2 \cdot 2^n + 5 \cdot 5^n) + a_0(1 + 2^n + 5^n) \\
&= 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Análogamente, como x_n es solución, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n &= 5^{n+2} + a_15^{n+1} + a_05^n \\
&= 25 \cdot 5^n + 5a_15^n + a_05^n \\
&= 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de 2^n, 5^n y los términos independientes a 0, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_1 + a_0 + 1 = 0 \\
2a_1 + a_0 + 4 = 0 \\
5a_1 + a_0 + 25 = 0
\end{array}\right.$$

Este sistema es incompatible, luego dichos a_0, a_1 no existen para que x_n e y_n sean solución de una ecuación de la forma 4.1.

Supongamos ahora que x_n e y_n son soluciones de una ecuación de la forma:

$$x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b_n \tag{4.2}$$

Entonces, como y_n es solución, tenemos:

$$\begin{aligned} y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n &= (1 + 4 \cdot 2^n + 25 \cdot 5^n) + a_1(1 + 2 \cdot 2^n + 5 \cdot 5^n) + a_0(1 + 2^n + 5^n) \\ &= b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como x_n es solución, tenemos:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 25 \cdot 5^n + 5a_1 5^n + a_0 5^n = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De ambos resultados, partiendo de la trivialidad $b_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene: de donde tenemos que:

$$\begin{aligned} b_n &= b_n \\ y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n &= x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n \\ (1 + 4 \cdot 2^n + 25 \cdot 5^n) + a_1(1 + 2 \cdot 2^n + 5 \cdot 5^n) + a_0(1 + 2^n + 5^n) &= 25 \cdot 5^n + 5a_1 5^n + a_0 5^n \\ \cancel{5^n(25 + 5a_1 + a_0)} + 2^n(4 + 2a_1 + a_0) + a_1 + a_0 + 1 &= \cancel{5^n(25 + 5a_1 + a_0)} \\ 2^n(4 + 2a_1 + a_0) + a_1 + a_0 + 1 &= 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La ecuación anterior nos da el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_0 + 1 = 0 \\ 2a_1 + a_0 + 4 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -3 \\ a_0 = 2 \end{array} \right.$$

Entonces, tenemos que el valor de b_n de forma que x_n y y_n sean soluciones es:

$$\begin{aligned} b_n &= 25 \cdot 5^n + 5(-3)5^n + 2 \cdot 5^n \\ &= 5^n(25 - 15 + 2) \\ &= 12 \cdot 5^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tenemos así que x_n e y_n son solución de una ecuación de la forma 4.2:

$$x_{n+2} + -3x_{n+1} + 2x_n = 12 \cdot 5^n$$

Ejercicio 4.3.5. Una empresa fija el precio de su producto haciendo la media de los precios de los dos años anteriores. Si los precios de los dos primeros años son p_0 y p_1, proporciona la expresión del precio en función del año y calcula su valor a largo plazo. ¿Te parece razonable este modelo para fijar el precio del producto?

Sea p_n el precio en el año $n \in \mathbb{N}_0$. Tenemos que:

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}\left(p_{n+1} + p_n\right)$$

Su polinomio característico asociado es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = (x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Tenemos entonces que la solución general a la recurrencia es:

$$p_n = c_1 + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Calculemos ahora los valores de $c_1,\ c_2$ en función de $p_0,\ p_1$:

$$\begin{aligned} p_0 &= c_1 + c_2 \\ p_1 &= c_1 - \frac{c_2}{2} \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$p_0 - p_1 = \frac{3}{2}c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{2}{3}(p_0 - p_1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow c_1 = p_0 - c_2 = p_0 - \frac{2}{3}(p_0 - p_1) = \frac{3p_0 - 2p_0 + 2p_1}{3} = \frac{p_0 + 2p_1}{3}$$

Por tanto, tenemos que la solución a la recurrencia es:

$$p_n = \frac{p_0 + 2p_1}{3} + \frac{2}{3}(p_0 - p_1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

A largo, plazo, tenemos entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{p_0 + 2p_1}{3}$$

Notemos que, económicamente hablando, esto podría no tener sentido; ya que el precio a largo plazo tan solo depende de los valores iniciales de $p_0,\ p_1$. Por ejemplo, en el caso de que la reputación de la empresa aumentase mucho, o que por ejemplo aumentase la inflación, los precios deberían aumentar.

Ejercicio 4.3.6. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, encuentra una sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ que satisfaga:

$$\left\{\begin{array}{rll} x_0 &= 1, & \\ x_1 &= \alpha, & \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n, & \qquad n \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Determina $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

El polinomio característico asociado a dicha recurrencia es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Por tanto, tenemos que la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Usando las condiciones iniciales, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ x_1 = \alpha = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right.$$

Como $c_1 = 1 - c_2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha = (1-c_2)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \\
= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \\
= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \\
= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \sqrt{5}c_2
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \\
&= -\frac{\sqrt{5}\alpha}{5} + \frac{\sqrt{5}+5}{10} = \frac{-(2\sqrt{5})\cdot\alpha + 5 + \sqrt{5}}{10} \\
c_1 &= 1 - c_2 = \frac{(2\sqrt{5})\cdot\alpha + 5 - \sqrt{5}}{10}
\end{aligned}$$

Entonces, la solución a la recurrencia dada es:

$$x_n = \frac{(2\sqrt{5})\cdot\alpha + 5 - \sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-(2\sqrt{5})\cdot\alpha + 5 + \sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para calcular el límite pedido, usaremos la solución general, en función de $c_1,\ c_2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{c_1 + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \\
&= \frac{c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{c_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

donde he usado que $1+\sqrt{5} > 1-\sqrt{5}$, por lo que el límite de ese sumando es 0. Notemos que este límite es bien conocido, y es el número áureo, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 4.3.7. Determina, en función de $a \in \mathbb{R}$, el valor del determinante tridiagonal siguiente:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = |M_n|$$

Para ello, desarrolla por elementos de una línea con el fin de obtener una ecuación de orden 2, y tenga en cuenta que el determinante indicado es el asociado a una matriz $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \\ &= a \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \\ &= aD_{n-1} - D_{n-2} \end{aligned}$$

Calculemos además algunos valores iniciales, para obtener solución única. Tenemos que:

$$\begin{gathered} D_1 = |a| = a \\ D_2 = a^2 - 1 \end{gathered}$$

Por tanto, hemos de resolver el siguiente PVI:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} D_{n+2} = aDn + 1 - D_n \\ D_1 = a \in \mathbb{R} \\ D_2 = a^2 - 1 \end{cases}$$

Su polinomio característico asociado es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + 1$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Distinguimos en función del valor de a:

- Si $|a| \neq 2$:

  Entonces, $a^2! = 4$, por lo que tenemos dos raíces, por lo que:

$$D_n = c_1 \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n$$

  Usando las condiciones iniciales, tenemos que:

$$\begin{aligned}
D_1 = a = c_1 \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right) = \\
= \frac{a(c_1+c_2)+\sqrt{a^2-4}(c_1-c_2)}{2} \\
D_2 = a^2-1 = c_1 \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2 = \\
= \frac{c_1(a^2+a^2-4+2a\sqrt{a^2-4})+c_2(a^2+a^2-4-2a\sqrt{a^2-4})}{4} = \\
= \frac{c_1(2a^2-4+2a\sqrt{a^2-4})+c_2(2a^2-4-2a\sqrt{a^2-4})}{4} = \\
= \frac{c_1(a^2-2+a\sqrt{a^2-4})+c_2(a^2-2-a\sqrt{a^2-4})}{2} = \\
= \frac{(a^2-2)(c_1+c_2)+a\sqrt{a^2-4}(c_1-c_2)}{2}
\end{aligned}$$

  Para facilitar la resolución del sistema, realizamos los cambios de variable $x = c_1 + c_2$ e $y = c_1 - c_2$, obteniendo el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rl} 2a & = ax + \sqrt{a^2-4}y \\ 2a^2-2 & = (a^2-2)x + a\sqrt{a^2-4}y \end{array}\right.$$

  Tenemos entonces que $\sqrt{a^2-4}y = 2a - ax = a(2-x)$, por lo que:

$$2a^2-2 = (a^2-2)x + a^2(2-x) \Longrightarrow -2 = (a^2-2-a^2)x = -2x \Longrightarrow x = 1$$

$$\sqrt{a^2-4}y = a \Longrightarrow y = \frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}$$

  Para deshacer el cambio de variable, nos queda que:

$$\left\{\begin{array}{r} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4} \end{array}\right.$$

  Sumando y restando respectivamente, obtenemos:

$$c_1 = \frac{1+\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}$$

$$c_2 = \frac{1-\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}$$

- Si $a = 2$:

  Entonces, $a^2 = 4$, por lo que tenemos una raíz real con multiplicidad doble, $\lambda = 1$. Tenemos que:
  $$D_n = c_1 + nc_2$$

  Usando las condiciones iniciales, tenemos que:

  $$\begin{aligned} D_1 &= 2 = c_1 + c_2 \\ D_2 &= 3 = c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

  Restándole la 1ª a la 2ª, tenemos que:

  $$1 = c_2 \Longrightarrow c_1 = 1$$

  Por tanto, tenemos que:
  $$D_n = 1 + n$$

- Si $a = -2$:

  Entonces, $a^2 = 4$, por lo que tenemos una raíz real con multiplicidad doble, $\lambda = -1$. Tenemos que:
  $$D_n = (c_1 + nc_2)(-1)^n$$

  Usando las condiciones iniciales, tenemos que:

  $$\begin{aligned} D_1 &= 2 = c_1 + c_2 \\ D_2 &= 3 = c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

  Restándole la 1ª a la 2ª, tenemos que:

  $$1 = c_2 \Longrightarrow c_1 = 1$$

  Por tanto, tenemos que:
  $$D_n = (1 + n)(-1)^n$$

Ejercicio 4.3.8. Encuentra las ecuaciones en diferencias homogéneas y reales de orden mínimo que tienen por solución las siguientes expresiones:

1. $2^{n-1} - 5^{n+1}$.

   Tenemos que:
   $$2^{n-1} - 5^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n - 5 \cdot 5^n$$

   Por tanto, el polinomio característico asociado a dicha recurrencia es:

   $$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Por tanto, la recurrencia buscada es $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$. Calculemos ahora los valores de x_0, x_1 que hacen única la solución:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2} \\ x_1 &= 1 - 5^2 = 1 - 25 = -24 \end{aligned}$$

Por tanto, el PVI dado es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0, \\ x_0 = {}^{-9}/_5, \\ x_1 = -24 \end{cases}$$

2. $3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   Tenemos que $e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i$ es una solución del polinomio característico, por lo que este es:
   $$p(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i) = \lambda^2 - i^2 = \lambda^2 + 1$$

   Por tanto, la recurrencia buscada es $x_{n+2} + x_n = 0$. Calculemos ahora los valores de x_0, x_1 que hacen única la solución:

   $$\begin{aligned} x_0 &= 3\cos 0 = 3 \\ x_1 &= -\operatorname{sen} {}^{\pi}/_2 = -1 \end{aligned}$$

   Por tanto, el PVI dado es:

   $$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+2} + x_n = 0, \\ x_0 = 3, \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

3. $(n+2)5^n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

   Tenemos que $\lambda_1 = 5e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ es una solución del polinomio característico con multiplicidad doble, por lo que este es:

   $$\begin{aligned} p(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1})]^2 = (\lambda^2 - (\lambda_1 + \overline{\lambda_1})\lambda + \lambda_1 \cdot \overline{\lambda_1})^2 = \\ &= (\lambda^2 - 2\Re(\lambda_i)\lambda + |\lambda_i|^2)^2 = (\lambda^2 - 2 \cdot 5 \cdot \cos {}^{\pi}/_4 \cdot \lambda + 5^2)^2 = \\ &= (\lambda^2 - 5\sqrt{2}\lambda + 25)^2 = \\ &= \lambda^4 + 25 \cdot 2 \cdot \lambda^2 + 25^2 - 10\sqrt{2}\lambda^3 + 50\lambda^2 - 5^3 \cdot 2\sqrt{2}\lambda = \\ &= \lambda^4 - 10\sqrt{2}\lambda^3 + 100\lambda^2 - 250\sqrt{2}\lambda + 625 \end{aligned}$$

   Por tanto, la recurrencia buscada es:

   $$x_{n+4} - 10\sqrt{2}x_{n+3} + 100x_{n+2} - 250\sqrt{2}x_{n+1} + 625x_n = 0$$

Calculemos ahora los valores de x_0, x_1, x_2, x_3 que hacen única la solución:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0 \\
x_1 &= 15 \cdot \operatorname{sen} {}^{\pi}/_{4} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \\
x_2 &= 4 \cdot 25 \operatorname{sen} {}^{\pi}/_{2} = 100 \\
x_3 &= 5^4 \operatorname{sen} {}^{3\pi}/_{4} = \frac{625\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, el PVI dado es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+4} - 10\sqrt{2}x_{n+3} + 100x_{n+2} - 250\sqrt{2}x_{n+1} + 625x_n = 0, \\ x_0 = 0, \\ x_1 = \frac{15\sqrt{2}}{2}, \\ x_2 = 100, \\ x_3 = \frac{625\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

4. $(1 + \sqrt{2}n + n^2)7^n$.

   Tenemos que $\lambda_1 = 7$ es una solución del polinomio característico con multiplicidad triple, por lo que este es:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= (\lambda - 7)^3 = \\
&= \lambda^3 - 3 \cdot 7\lambda^2 + 3 \cdot 7^2\lambda - 7^3 = \\
&= \lambda^3 - 21\lambda^2 + 147\lambda - 343
\end{aligned}$$

   Por tanto, la recurrencia buscada es:

$$x_{n+3} - 21x_{n+2} + 147x_{n+1} - 343x_n = 0$$

   Calculemos ahora los valores de x_0, x_1, x_2 que hacen única la solución:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 7(2 + \sqrt{2}) \\
x_2 &= 49(5 + 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

   Por tanto, el PVI dado es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+3} - 21x_{n+2} + 147x_{n+1} - 343x_n, \\ x_0 = 1, \\ x_1 = 7(2 + \sqrt{2}), \\ x_2 = 49(5 + 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

5. $1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$.

   Tenemos que $\lambda_1 = 1$ es una solución del polinomio característico con multiplicidad cuádruple, por lo que este es:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= (\lambda - 1)^4 = \\
&= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la recurrencia buscada es:

$$x_{n+4} - 4x_{n+3} + 6x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$$

Calculemos ahora los valores de x_0, x_1, x_2, x_3 que hacen única la solución:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 + 3 - 5 + 6 = 5 \\
x_2 &= 1 + 6 - 20 + 48 = 35 \\
x_3 &= 1 + 9 - 45 + 27 \cdot 6 = 127
\end{aligned}$$

Por tanto, el PVI dado es:

$$(\text{PVI}) \equiv \begin{cases} x_{n+4} - 4x_{n+3} + 6x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n, \\ x_0 = 1, \\ x_1 = 5, \\ x_2 = 35, \\ x_3 = 127 \end{cases}$$

Ejercicio 4.3.9. Determina el valor de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, donde

$$2x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = x_1 = 1.$$

Tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} = x_0 + x_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$$

Demostremos en primer lugar por inducción que, fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

- <u>Para $n = 0$</u>:
$$\sum_{k=0}^{0} (x_{k+1} - x_k) = x_1 - x_0$$

- <u>Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$</u>:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) + x_{n+2} - x_{n+1} \overset{(*)}{=} x_{n+1} - x_0 + x_{n+2} - x_{n+1} = \\
&= x_{n+2} - x_0
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la hipótesis de inducción.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x_n &= x_0 + x_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) = \\
&= x_0 + x_1 + \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \\
&= x_0 + x_1 + \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_0) = \\
&= x_0 + x_1 + \frac{1}{2}\cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n - x_0\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, tan solo necesitamos calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$. Resolvamos la recurrencia dada, cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = \left(\lambda - \frac{1-\sqrt{7}i}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{7}i}{4}\right)$$

Vemos que tiene dos soluciones complejas, que son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{7}i}{4}, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

Calculemos su módulo y su fase:

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{1+7}{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\theta_1 = \arctan\sqrt{7} \approx 1{,}209$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (k_1\cos(n\theta_1) + k_2\,\mathrm{sen}(n\theta_2))$$

Como $0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, tenemos que $\{x_n\} \to 0$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x_n &= x_0 + x_1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n - x_0\right) = \\
&= x_0 + x_1 - \frac{x_0}{2} = x_1 + \frac{x_0}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.10. Sea una ecuación del tipo:

$$a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b_0,$$

donde $a_2 + a_1 + a_0 \neq 0$.

1. Demuestra que existe una única solución constante y calcúlala.

   Sea $x_c = \{x_c\}$ una solución constante. Entonces, tenemos que:

   $$a_2x_c + a_1x_c + a_0x_c = b_0 \Longleftrightarrow x_c = \frac{b_0}{a_2 + a_1 + a_0}$$

   Por tanto, tenemos que la solución constante es única.

2. Demuestra que si las raíces de la ecuación característica tienen módulo menor que uno, entonces todas las soluciones tienden a la solución constante.

   Se ha demostrado en la Proposición 2.9 que toda solución de la parte homogénea tenderá a 0. Notando por x_n^h a una solución de la parte homogénea y por x_n^p a una solución particular de la ecuación recurrencia, tenemos que:

$$x_n = x_n^h + x_n^p \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n^h + \lim_{n\to\infty} x_n^p = \lim_{n\to\infty} x_n^p$$

   Tomando como solución particular la constante, $x_n^p = x_c$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n^p = \lim_{n\to\infty} x_c = x_c$$

Ejercicio 4.3.11. Se considera la ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} - \beta x_{n+1} + \beta x_n = 1, \qquad \beta \in \mathbb{R}^+$$

1. Calcula la solución constante.

   Sea $x_c = \{x_c\}$ una solución constante. Entonces, tenemos que:

$$x_c - \beta x_c + \beta x_c = 1 \Longrightarrow x_c = 1$$

2. Proporciona condiciones sobre β para que las soluciones de la ecuación converjan a la solución de equilibrio.

   Sea el polinomio característico asociado a la recurrencia el siguiente:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda + \beta$$

   Por lo visto en el ejercicio anterior, que las soluciones de la ecuación converjan a la solución de equilibrio equivale a que las soluciones de la parte homogénea converjan a 0. Por el Corolario del Lema 2.10, tenemos que las condiciones a imponer son:

$$\begin{aligned} p(0) < 1 &\Longleftrightarrow \beta < 1 \\ p(1) > 0 &\Longleftrightarrow 1 - \beta + \beta > 0 \\ p(-1) > 0 &\Longleftrightarrow 1 + 2\beta > 0 \Longleftrightarrow \beta > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Por tanto, tan solo es necesario que $\beta \in]{-1/2}, 1[$. Como $\beta \in \mathbb{R}^+$, tan solo hay que imponer que:

$$\beta \in \,]0, 1[$$

Ejercicio 4.3.12. Se consideran las funciones de oferta y demanda:

$$O(p) = a + bp, \qquad D(p) = c - dp.$$

Se modifica el modelo de la telaraña de acuerdo a la ley (Goodwin, 1941):

$$O(p_n^e) = D(p_n),$$

donde p_n^e es el precio esperado para el año n:

$$p_n^e = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2}),$$

y $\rho \in \mathbb{R}^+$ un parámetro (si $\rho = 0$ se vuelve al modelo de la telaraña).

1. Demuestra que p_n cumple una ecuación del tipo:

$$p_{n+2} + a_1 p_{n+1} + a_0 p_n = k$$

que tiene como solución constante el precio de equilibrio.

Tenemos que:

$O(p_n^e) = a + bp_n^e = a + b\left(p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2})\right) = a + b(1+\rho)p_{n-1} - b\rho p_{n-2}$
$D(p_n) = c - dp_n$

Igualando de acuerdo con la Ley de Goodwin, tenemos:

$$O(p_n^e) = D(p_n) \iff a + b(1+\rho)p_{n-1} - b\rho \cdot p_{n-2} = c - dp_n$$

Ajustando los índices y operando, llegamos a que:

$$p_{n+2} + \frac{b}{d}(1+\rho)p_{n+1} - \frac{b}{d} \cdot \rho \cdot p_n = \frac{c-a}{d}$$

Identificando términos, es directo ver que cumple una ecuación del tipo del enunciado. Busquemos la solución constante p_e:

$$p_e + \frac{b}{d}(1+\rho)p_e - \frac{b}{d} \cdot \rho \cdot p_e = \frac{c-a}{d} \iff p_e = \frac{c-a}{d\left[1 + \frac{b}{d}(1+\rho) - \frac{b}{d} \cdot \rho\right]} = \frac{c-a}{d+b}$$

Efectivamente, tenemos que se trata del precio de equilibrio visto en el Modelo de la Telaraña.

2. Se supone $b = d = 1$. Calcula las soluciones y describe el comportamiento de los precios a largo plazo. ¿Son las predicciones idénticas a las que produciría el modelo simple de la telaraña?

Tenemos que la ecuación de recurrencia queda:

$$p_{n+2} + (1+\rho)p_{n+1} - \rho \cdot p_n = c - a$$

El polinomio característico queda:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (1+\rho)\lambda - \rho$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda = \frac{-1-\rho \pm \sqrt{(1+\rho)^2 + 4\rho}}{2} = \frac{-1-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 6\rho + 1}}{2}$$

Veamos en primer lugar el signo de las raíces:

$$\lambda_1 = \frac{-1-\rho + \sqrt{(1+\rho)^2 + 4\rho}}{2} > 0 \iff (1+\rho)^2 + 4\rho > 1 + \rho$$
$$\lambda_2 = \frac{-1-\rho - \sqrt{(1+\rho)^2 + 4\rho}}{2} < 0 \iff -\sqrt{(1+\rho)^2 + 4\rho} < 1 + \rho$$

Veamos ahora el intervalo en el que está cada raíz:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \frac{-1-\rho+\sqrt{(1+\rho)^2+4\rho}}{2} < 1 &\Longleftrightarrow -1-\rho+\sqrt{(1+\rho)^2+4\rho} < 2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (1+\rho)^2+4\rho < (3+\rho)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 1+\cancel{\rho^2}+\cancel{6\rho} < 9+\cancel{\rho^2}+\cancel{6\rho} \\
\lambda_2 = \frac{-1-\rho-\sqrt{(1+\rho)^2+4\rho}}{2} < -1 &\Longleftrightarrow -1-\rho-\sqrt{(1+\rho)^2+4\rho} < -2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (1-\rho)^2 < (1+\rho)^2+4\rho \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \cancel{1}+\cancel{\rho^2}-2\rho < \cancel{1}+\cancel{\rho^2}+6\rho \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow -2 < 6
\end{aligned}$$

Por tanto, ya podemos estudiar el comportamiento a largo plazo. Tenemos que:

$$p_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c - a$$

donde he empleado que $p_e = c-a$ es una solución particular. Como $\lambda_1 \in]0,1[$, tenemos que $\{\lambda_1^n\} \to 0$. No obstante, como $\lambda_2 < -1$, tenemos que $\{|\lambda_2^n|\} \to \infty$. Por tanto, y suponiendo que $c_2 \neq 0$ (algo que dependerá de p_0, p_1) tenemos que $\{|p_n|\} \to \infty$.

Además, tenemos que las predicciones no son las mismas que las que se producían en el modelo simple de la telaraña, ya que en dicho caso si $d = b$, como es el caso, se trata de un $2-$ciclo.

Ejercicio 4.3.13. Se considera el siguiente modelo de Samuelson modificado:

$$\begin{aligned}
Y_n &= C_n + I_n \\
C_n &= bI_{n-1} \\
I_n &= C_n - kC_{n-1} + G
\end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual, respectivamente, G es el gasto público (que se supone constante) y $0 < b < 1$, $k > 0$. Escribe la ley de recurrencia que cumplen las inversiones anuales I_n. Haz un análisis del plano de parámetros k, b donde se reflejen la estabilidad y las oscilaciones de la renta en torno al equilibrio económico.

La ley de recurrencia que cumplen las inversiones anuales I_n es:

$$\begin{aligned}
I_n &= C_n - kC_{n-1} + G = \\
&= bI_{n-1} - kbI_{n-2} + G
\end{aligned}$$

Por tanto, las inversiones del equilibrio económico, I^*, cumplen:

$$I^* = bI^* - kbI^* + G \Longrightarrow I^* = \frac{G}{1-b+kb}$$

Además, el coste y la renta del equilibrio económico, C^*, Y^*, cumplen:

$$\begin{aligned}
I^* &= \frac{G}{1-b+kb} \\
C^* &= bI^* = \frac{bG}{1-b+kb} \\
Y^* &= C^* + I^* = \frac{G+bG}{1-b+kb}
\end{aligned}$$

Resolvamos ahora la recurrencia dada. El polinomio característico asociado a la recurrencia es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + kb = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4kb}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b(b-4k)}}{2}$$

Realizamos por tanto la siguiente distinción de casos:

- $\underline{b > 4k}$:

  En este caso, las raíces son reales y distintas, y son:

  $$\lambda_1 = \frac{b+\sqrt{b(b-4k)}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{b-\sqrt{b(b-4k)}}{2}$$

  Veamos que $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$. Para ello, vemos que:

  $$0 < \lambda_2 \Longleftrightarrow b > \sqrt{b(b-4k)} \Longleftrightarrow b^2 > b^2 - 4bk \Longleftrightarrow 0 < 4bk$$

  Cierto por ser $b, k > 0$. Por otro lado, tenemos que:

  $$\lambda_1 = \frac{b+\sqrt{b(b-4k)}}{2} = \frac{b+\sqrt{b^2-4kb}}{2} \leqslant \frac{b+\sqrt{b^2}}{2} = \frac{2b}{2} = b < 1$$

  Como trivialmente $\lambda_2 < 1$, tenemos lo buscado. Por tanto, $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$, por lo que $\{I_n^{(h)}\} \to 0$, y por tanto $\{I_n\} \to I^*$. De aquí se deduce que se tiende al equilibrio económico.

- $\underline{b = 4k}$:

  En este caso, la raíz es real y con multiplicidad doble, y es:

  $$\lambda = \frac{b}{2} = 2k$$

  En este caso, la solución de la parte homogénea es:

  $$I_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n)(2k)^n = (c_1 + c_2 n)\left(\frac{b}{2}\right)^n$$

  Como $0 < b/2 < b < 1$, tenemos que $\{I_n^{(h)}\} \to 0$, y por tanto $\{I_n\} \to I^*$. De aquí se deduce que se tiende al equilibrio económico.

- $\underline{b < 4k}$:

  En este caso, las raíces son complejas, y son:

  $$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b(b-4k)}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4kb}}{2} = \frac{b \pm i\sqrt{4kb - b^2}}{2}$$

  Su módulo es:

  $$|\lambda| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4kb - b^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2 + 4kb - b^2}{4}} = \sqrt{kb}$$

  Por tanto, tenemos que $|\lambda| < 1$ si y solo si $kb < 1$. Por tanto, distingumos:

  - $\underline{kb \geqslant 1}$:

    En este caso, existe una solución $\{I_n^{(h)}\} \to \infty$, por lo que no se tiende al equilibrio económico.

  - $\underline{kb < 1}$:

    En este caso, $\{I_n^{(h)}\} \to 0$, por lo que se tiende al equilibrio económico.

Ejercicio 4.3.14. Se considera el siguiente modelo de Samuelson modificado:

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & \alpha C_n + \beta I_n \\ C_n & = & Y_{n-1} \\ I_n & = & k(C_n - C_{n-1}) + G \end{array}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual, respectivamente, G es el gasto público (que se supone constante) y $k > 0$. Los parámetros $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$ están ligados a impuestos al consumo y la inversión que se destinan a ayuda exterior (los números $1 - \alpha$ y $1 - \beta$ representan las partes proporcionales de consumo e inversión destinadas a dicha ayuda). Efectúa un análisis similar al del ejercicio anterior para el caso en que $\alpha = \beta$.

La ley de recurrencia que cumple la renta anual Y_n es:

$$\begin{aligned} Y_n &= \alpha C_n + \beta I_n = \\ &= \alpha Y_{n-1} + \beta \left(k(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + G\right) = \\ &= (\alpha + \beta k)Y_{n-1} - \beta k Y_{n-2} + \beta G \end{aligned}$$

Por tanto, las rentas del equilibrio económico, Y^*, cumplen:

$$Y^* = (\alpha + \beta k)Y^* - \beta k Y^* + \beta G \Longrightarrow Y^* = \frac{\beta G}{1 - \alpha - \beta k + \beta k} = \frac{\beta G}{1 - \alpha}$$

Además, el coste y la inversión del equilibrio económico, C^*, I^*, cumplen:

$$\begin{aligned} C^* &= Y^* = \frac{\beta G}{1-\alpha} \\ I^* &= k(C^* - C^*) + G = G \end{aligned}$$

Resolvamos ahora la recurrencia dada. El polinomio característico asociado a la recurrencia es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \beta k)\lambda + \beta k = 0$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(0) &= \beta k < 1 \Longleftrightarrow \beta k < 1 \\ p(1) &= 1 - \alpha - \beta k + \beta k = 1 - \alpha > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 1 \\ p(-1) &= 1 + \alpha + \beta k + \beta k > 0 \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1$, tenemos que $\{Y_n^{(h)}\} \to 0$ si y solo si $\beta k < 1$. Por tanto, $\{Y_n\} \to Y^*$. De aquí se deduce que se tiende al equilibrio económico.

Ejercicio 4.3.15. Determina las soluciones x_n de la ecuación siguiente, siendo i la unidad imaginaria:

$$x_{n+2} - (i+1)x_{n+1} + ix_n = 0$$

¿Son $\Re(x_n)$ e $\Im(x_n)$ soluciones de la ecuación en diferencias? (Denotamos por $\Re(z)$ e $\Im(z)$ las partes reales e imaginarias, respectivamente, del número complejo z).

Tenemos que el polinomio característico asociado a la recurrencia es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (i+1)\lambda + i$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda = \frac{i+1 \pm \sqrt{(i+1)^2 - 4i}}{2} = \frac{i+1 \pm \sqrt{i^2 + 2i + 1 - 4i}}{2} = \frac{i+1 \pm \sqrt{-2i}}{2} = \frac{i+1 \pm (1-i)}{2}$$

Tenemos entonces que $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i$. Entonces:

$$x_n = a + b \cdot i^n, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

Usando las potencias de i, tenemos el siguiente $4-$ciclo:

$$\{x_n\} = \{a+b,\ a+bi,\ a-b,\ a-bi, \dots\}$$

Veamos ahora que $\Re(x_n)$, $\Im(x_n)$ no tienen por qué ser soluciones, algo que sí ocurría en el caso de que los coeficientes fuesen reales. Encontremos valores de a, b tal que muestren esto.

Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$, y veamos que $\Re(x_n)$ no es solución. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (a-b) - (i+1)(a) + i(a+b) \\ &= a - b - ia - a + i(a+b) \\ &= -b - ia + ia + ib = -b + ib \end{aligned}$$

Igualando las partes reales, llegamos a que $b = 0$, pero hemos supuesto $b \in \mathbb{R}^*$, por lo que $\Re(x_n)$ no es solución.

Por tanto, $\Re(x_n)$ no tiene por qué ser solución. De igual forma, veamos que $\Im(x_n)$ no es solución:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - (i+1)(b) + 0 \\ &= -b - bi \end{aligned}$$

Igualando las partes reales, llegamos a que $b = 0$, pero hemos supuesto $b \in \mathbb{R}^*$, por lo que de igual forma $\Im(x_n)$ no es solución.

4.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Ejercicio 4.4.1. Se consideran las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determina en cada caso su radio espectral. Para cada matriz, ¿qué ecuación en diferencias de orden superior verifica cada componente del vector solución del sistema lineal homogéneo asociado?

En primer lugar, hallaremos el radio espectral de cada matriz. Para ello, calcularemos los valores propios de cada matriz y tomaremos el mayor de sus módulos.

1. A_1.

   Tenemos que su polinomio característico es:

$$p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 18$$

   Por tanto, sus valores propios son:

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{2^6 - 2^3 \cdot 3^2}}{2} = 4 \pm \sqrt{2^4 - 2 \cdot 3^2} = 4 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\rho(A_1) = |\lambda| = \sqrt{4^2 + 2} = 3\sqrt{2}$$

2. A_2.

   Tenemos que su polinomio característico es:

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\lambda) = |A_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= \\ &= (1+\lambda)^2(1-\lambda) + 2 - 4(1+\lambda) + (1+\lambda) = \\ &= (1+\lambda^2+2\lambda)(1-\lambda) + 2 - 4(1+\lambda) + (1+\lambda) = \\ &= 1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda - 2\lambda^2 + 2 - 4 - 4\lambda + 1 + \lambda = \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda + 2) \end{aligned}$$

   Por tanto, sus valores propios, además de $\lambda_1 = 0$, son:

$$\lambda_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\rho(A_2) = |\lambda_2| = \frac{1}{2}\sqrt{1+7} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

3. A_3.

   Tenemos que su polinomio característico es:

$$p_{A_3}(\lambda) = |A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & -2 & 2 \\ -8 & 1 & -2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)\left[(7-\lambda)(-2-\lambda)+2\right] = (3-\lambda)(4-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-12) =$$

$$= (3-\lambda)(4-\lambda)\left(\lambda - \frac{5-\sqrt{73}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{73}}{2}\right)$$

   Aproximando los valores con la calculadora, vemos que:

$$\rho(A_3) = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$$

Una vez hallado el radio espectral de cada matriz, pasamos a estudiar el sistema lineal homogéneo asociado a cada matriz. Para ello, consideramos el sistema $X_{n+1} = A_i X_n$, y aplicamos el Teorema de Cayley-Hamilton para obtener una ecuación en diferencias de orden superior que verifique cada componente del vector solución del sistema.

1. A_1.

   Por el Teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que:

$$A_1^2 - 8A_1 + 18I = 0$$

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} X_n &= A_1^n X_0 = A_1^{n-2} A_1^2 X_0 \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} A_1^{n-2}(8A_1 - 18I)X_0 = 8A_1^{n-1}X_0 - 18A_1^{n-2}X_0 = 8X_{n-1} - 18X_{n-2} \end{aligned}$$

   donde en $(*)$ hemos empleado el Teorema de Cayley-Hamilton.

2. A_2.

   Por el Teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que:

$$-A_2^3 - A_2^2 - 2A_2 = 0$$

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} X_n &= A_2^n X_0 = A_2^{n-3} A_2^3 X_0 \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} A_2^{n-3}(-A_2^2 - 2A_2)X_0 = -A_2^{n-1}X_0 - 2A_2^{n-2}X_0 = -X_{n-1} - 2X_{n-2} \end{aligned}$$

3. A_3.

   Desarrollamos su polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_{A_3}(\lambda) &= (3-\lambda)(4-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda-12\right) = \\ &= \left(\lambda^2-7\lambda+12\right)\left(\lambda^2-5\lambda-12\right) = \\ &= \lambda^4-12\lambda^3+35\lambda^2+24\lambda-144 \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$A_3^4-12A_3^3+35A_3^2+24A_3-144I=0$$

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} X_n &= A_3^nX_0 = A_3^{n-4}A_3^4X_0 \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} A_3^{n-4}(12A_3^3-35A_3^2-24A_3+144I)X_0 = \\ &= 12A_3^{n-1}X_0-35A_3^{n-2}X_0-24A_3^{n-3}X_0+144A_3^{n-4}X_0 = \\ &= 12X_{n-1}-35X_{n-2}-24X_{n-3}+144X_{n-4} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.4.2. Sea A una matriz real tal que $|A|>1$. Demuestra que el siguiente sistema no es convergente.

$$X_{n+1}=AX_n$$

Proporciona un ejemplo de matriz A tal que dicho sistema no sea convergente y $0<|A|<1$.

Supongamos que A es diagonalizable, de modo que $A=PDP^{-1}$, con D diagonal y P matriz de cambio de base. Tenemos que:

$$|A|=|PDP^{-1}|=|P||D||P^{-1}|=|D|=\prod_{i=1}^n d_i>1$$

Por tanto, tenemos que $d_i>1$ para algún $i\in\{1,\dots,n\}$, por lo que $\rho(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|d_i|>1$, y por tanto el sistema no es convergente.

Para el caso de que A no sea diagonalizable, es necesario emplear la descomposición de Jordan, concepto que no se ha visto en clase.

Un ejemplo de matriz A tal que el sistema no sea convergente y $0<|A|<1$ es:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A|=1/2<1$, pero el sistema no es convergente debido a que $\rho(A)=2>1$.

Ejercicio 4.4.3. Sea A una matriz cuadrada con radio espectral menor que 1. Demuestra las siguientes propiedades:

1. La matriz $I - A$ es invertible.

   Supongamos que $I - A$ no es invertible, por lo que $|I - A| = 0$. Entonces, si $n \in \mathbb{N}$ es la fimensión de la matriz, tenemos que $|A - I| = (-1)^n |I - A| = 0$, por lo que $\lambda = 1 \in \sigma(A)$, y por tanto $\rho(A) \geqslant 1$, por lo que llegamos a una contradicción. Por el contrarrecíproco, tenemos lo pedido.

2. El sistema $X = AX + B$ es compatible determinado para cualquier $B \in \mathbb{R}^k$.

   Tenemos que:

   $$X = AX + B \Longleftrightarrow X - AX = B \Longleftrightarrow (I - A)X = B \Longleftrightarrow X = (I - A)^{-1}B$$

   donde hemos usado que $I - A$ es invertible, como se ha demostrado en el apartado anterior. Por tanto, tenemos que X es único, por lo que el sistema es compatible determinado.

3. Dado $B \in \mathbb{R}^k$, la solución de $X_{n+1} = AX_n + B$ tiene límite para cualquier condición inicial.

   La solución de la parte homogénea sabemos que es:

   $$X_n^{(h)} = A^n X_0$$

   Además, sabemos que la solución del sistema del apartado es una solución constante X^*, por lo que la solución general es:

   $$X_n = A^n X_0 + X^*$$

   Tomando límite, tenemos que:

   $$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} A^n X_0 + X^* \overset{(*)}{=} X^*$$

   donde en $(*)$ hemos usado que $A^n X_0$ tiende a 0 por ser $\rho(A) < 1$.

Ejercicio 4.4.4. Demuestra que las tres componentes de la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} a_{n+1} & = & 0{,}1a_n & +0{,}2b_n & +0{,}3c_n & +1 \\ b_{n+1} & = & 0{,}1a_n & +0{,}1b_n & -0{,}2c_n & +1 \\ c_{n+1} & = & -0{,}2a_n & -0{,}3b_n & +0{,}2c_n & +1 \end{array}\right.$$

con valor inicial $a_0 = 1{,}53$, $b_0 = 1{,}43$ y $c_0 = 2{,}2$, tienen límite y calcúlalo.

Tenemos que el sistema viene dado por $X_{n+1} = MX_n + B$, donde:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1{,}53 \\ 1{,}43 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos una solución constante del sistema, X^*, tal que $X^* = MX^* + B$; es decir, $(I - M)X^* = B$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix} = X^* = \begin{pmatrix} \dfrac{320}{211} \\[2ex] \dfrac{250}{211} \\[2ex] \dfrac{90}{211} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el límite de la solución de la parte homogénea, $X_n^{(h)} = M^n X_0$.

Opción 1. Calculando los valores propios.

$$\begin{aligned}
p_M(\lambda) = |M - \lambda I| = &\begin{vmatrix} 0{,}1-\lambda & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1-\lambda & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (0{,}1-\lambda)^2(0{,}2-\lambda) + 0{,}2^3 - 0{,}3^2 \cdot 0{,}1 + \cancel{0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}1-\lambda)} - \\
&\quad - \cancel{0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}1-\lambda)} - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}2-\lambda) = \\
&= (0{,}01 + \lambda^2 - 0{,}2\lambda)(0{,}2-\lambda) - 0{,}001 - 0{,}004 + 0{,}02\lambda = \\
&= 0{,}002 - 0{,}01\lambda + 0{,}2\lambda^2 - \lambda^3 - 0{,}04\lambda + 0{,}2\lambda^2 - 0{,}001 - 0{,}004 + 0{,}02\lambda = \\
&= -\lambda^3 + 0{,}4\lambda^2 - 0{,}03\lambda - 0{,}003
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la calculadora, vemos que las soluciones aproximadas son:

$$\lambda_1 \approx -0{,}05, \qquad \lambda_2 \approx 0{,}22 + 0{,}056i, \qquad \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$$

Por tanto, deducimos de forma directa que $\rho(M) < 1$.

Opción 2. Usando la norma de la matriz.

Empleando la norma-1, tenemos que:

$$\|M\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant 3} \sum_{i=1}^{3} |m_{ij}| = 0{,}7 < 1$$

Por tanto, tenemos que $\rho(M) \leqslant \|M\|_1 < 1$.

En cualquier caso, $\{X_n^h\} \to 0$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X^*$$

Ejercicio 4.4.5. Se supone que el precio del desayuno en los bares sigue el modelo de la oferta y la demanda en función del precio de la leche en el mercado. Concretamente, si denotamos p^l el precio de la leche y p^d el precio del desayuno, y consideramos:

- La demanda de la leche $D_l(p^l) = 2 - 2p^l$,

- La oferta de la leche $O_l(p^l) = 1 + p^l$,
- La demanda del desayuno $D_d(p^d) = 1 - 3p^d$,
- La oferta del desayuno $O_d(p^d) = 1 + 2p^d - \alpha p^l$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

Entonces, el modelo viene dado por:

$$\begin{aligned} D_l(p_n) &= O_l(p_{n-1}), \\ D_d(p_n) &= O_d(p_{n-1}), \end{aligned}$$

donde hemos denotado p_n^d y p_n^l el precio del desayuno y de la leche en el año n, respectivamente.

1. Escribe el sistema de ecuaciones en diferencias del modelo.

$$\left\{ \begin{aligned} 2 - 2p_n^l &= 1 + p_{n-1}^l \\ 1 - 3p_n^d &= 1 + 2p_{n-1}^d - \alpha p_{n-1}^l \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} p_n^l &= -\frac{1 + p_{n-1}^l}{2} + 1 = -\frac{p_{n-1}^l}{2} + \frac{1}{2} \\ p_n^d &= -\frac{\cancel{1} + 2p_{n-1}^d - \alpha p_{n-1}^l - \cancel{1}}{3} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, notamos el sistema de la forma $X_n = MX_{n-1} + B$ con:

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n^l \\ p_n^d \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \alpha/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Resuelve el sistema en función del dato inicial y del parámetro α.

Como M es diagonal, tenemos que sus valores propios son $\lambda_1 = -1/2$ y $\lambda_2 = -2/3$. Calculemos los vectores propios asociados:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha/3 & -2/3 + 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1/2 + 2/3 & 0 \\ \alpha/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ \alpha/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que la solución de la parte homogénea es:

$$\begin{aligned} X_n^{(h)} = M^n X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 \\ 0 & (-2/3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0 = \\ &= \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 \\ 2\alpha\left[(-1/2)^n - (-2/3)^n\right] & (-2/3)^n \end{pmatrix} X_0 = \\ &= \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 \\ 2\alpha \cdot \frac{(-1)^n - (-3)^n}{2^n} & (-2/3)^n \end{pmatrix} X_0 \end{aligned}$$

Buscamos ahora una solución constante del sistema, X^*:

$$X^* = MX^* + B \Longrightarrow (I - M)X^* = B \Longrightarrow X^* = (I - M)^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como la solución del sistema es una solución de la parte homogénea más una solución de la parte particular, tenemos que:

$$X_n = X_n^{(h)} + X^* = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 \\ 2\alpha \cdot \frac{(-1)^n - (-3)^n}{2^n} & (-2/3)^n \end{pmatrix} X_0 + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.4.6. Los siguientes modelos representan una población compuesta por dos especies en competición. Estudia en cada caso la estabilidad de los puntos fijos.

1. El modelo es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1{,}7 - 0{,}02x_n - 0{,}08y_n) \\ y_{n+1} = y_n(1{,}5 - 0{,}03x_n - 0{,}04y_n) \end{cases}$$

Sean las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x(1{,}7 - 0{,}02x - 0{,}08y) \\ f_2(x, y) &= y(1{,}5 - 0{,}03x - 0{,}04y) \end{aligned}$$

Notando $F = (f_1, f_2)$, tenemos que el sistema viene dado por $X_{n+1} = F(X_n)$. Buscamos los puntos fijos del sistema, es decir, los puntos (x, y) tales que $F(x, y) = (x, y)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(1{,}7 - 0{,}02x - 0{,}08y) & = x \\ y(1{,}5 - 0{,}03x - 0{,}04y) & = y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x(0{,}7 - 0{,}02x - 0{,}08y) & = 0 \\ y(0{,}5 - 0{,}03x - 0{,}04y) & = 0 \end{array}\right.$$

Hay distintas soluciones constantes del modelo, veámoslas:

- $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En este caso $X_1 = (0, 0)$.
- $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$. Tenemos $0{,}5 - 0{,}04y_2 = 0 \Longrightarrow y_2 = 12{,}5$. En este caso, $X_2 = (0, 12{,}5)$.
- $x_3 \neq 0$, $y_3 = 0$. Tenemos $0{,}7 - 0{,}02x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = 35$. En este caso, $X_3 = (35, 0)$.

- $x_4 \neq 0$, $y_4 \neq 0$. En este caso, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}08y &= 0{,}7 \\ 0{,}03x + 0{,}04y &= 0{,}5 \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x = 7{,}5 \\ y = 6{,}875 \end{cases}$$

  Por tanto, $X_4 = (7{,}5, 6{,}875)$.

Estudiemos ahora la estabilidad de los puntos fijos. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de F en cada punto fijo y estudiamos su radio espectral. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Tenemos que:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7 - 0{,}04x - 0{,}08y & -0{,}08x \\ -0{,}03y & 1{,}5 - 0{,}03x - 0{,}08y \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto, tenemos:

$$JF(X_1) = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}, \qquad JF(X_2) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 \\ -0{,}375 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$JF(X_3) = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -2{,}8 \\ 0 & 0{,}45 \end{pmatrix}, \qquad JF(X_4) = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}6 \\ -0{,}20625 & 0{,}725 \end{pmatrix},$$

Estudiamos ahora la estabilidad de cada punto fijo:

- $X_1 = (0, 0)$.
  Como $\rho(JF(X_1)) = 1{,}7 > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.
- $X_2 = (0, 12{,}5)$.
  Como $\rho(JF(X_2)) = 0{,}7 < 1$, tenemos que el punto fijo es asintóticamente estable localmente.
- $X_3 = (35, 0)$.
  Como $\rho(JF(X_3)) = 0{,}45 < 1$, tenemos que el punto fijo es asintóticamente estable localmente.
- $X_4 = (7{,}5, 6{,}875)$.
  Calculamos sus valores propios:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}575\lambda + 0{,}4925$$

  Tenemos que los valores propios son $\lambda_1 \approx 1{,}14$ y $\lambda_2 \approx 0{,}43$, por lo que $\rho(JF(X_4)) \approx 1{,}14 > 1$. Por tanto, el punto fijo es inestable.

2. El modelo es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1{,}8 - 0{,}06x_n - 0{,}03y_n) \\ y_{n+1} = y_n(1{,}9 - 0{,}02x_n - 0{,}04y_n) \end{cases}$$

   Sean las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(x,y) = x(1{,}8 - 0{,}06x - 0{,}03y)$$
$$f_2(x,y) = y(1{,}9 - 0{,}02x - 0{,}04y)$$

Notando $F = (f_1, f_2)$, tenemos que el sistema viene dado por $X_{n+1} = F(X_n)$. Buscamos los puntos fijos del sistema, es decir, los puntos (x, y) tales que $F(x, y) = (x, y)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(1{,}8 - 0{,}06x - 0{,}03y) & = x \\ y(1{,}9 - 0{,}02x - 0{,}04y) & = y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x(0{,}8 - 0{,}06x - 0{,}03y) & = 0 \\ y(0{,}9 - 0{,}02x - 0{,}04y) & = 0 \end{array}\right.$$

Hay distintas soluciones constantes del modelo, veámoslas:

- $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En este caso $X_1 = (0, 0)$.
- $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$. Tenemos $0{,}9 - 0{,}04y_2 = 0 \Longrightarrow y_2 = 22{,}5$. En este caso, $X_2 = (0, 22{,}5)$.
- $x_3 \neq 0$, $y_3 = 0$. Tenemos $0{,}8 - 0{,}06x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = {}^{40}/_{3}$. En este caso, $X_3 = ({}^{40}/_{3}, 0)$.
- $x_4 \neq 0$, $y_4 \neq 0$. En este caso, tenemos el siguiente sistema:

  $$\left\{\begin{array}{ll} 0{,}06x + 0{,}03y & = 0{,}8 \\ 0{,}02x + 0{,}04y & = 0{,}9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = {}^{25}/_{9} \\ y = {}^{190}/_{9} \end{array}\right.$$

  Por tanto, $X_4 = ({}^{25}/_{9}, {}^{190}/_{9})$.

Estudiemos ahora la estabilidad de los puntos fijos. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de F en cada punto fijo y estudiamos su radio espectral. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Tenemos que:

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 - 0{,}12x - 0{,}03y & -0{,}03x \\ -0{,}02y & 1{,}9 - 0{,}02x - 0{,}08y \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto, tenemos:

$$JF(X_1) = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0 \\ 0 & 1{,}9 \end{pmatrix}, \qquad JF(X_2) = \begin{pmatrix} 1{,}125 & 0 \\ -0{,}45 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$
$$JF(X_3) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & {}^{49}/_{30} \end{pmatrix}, \qquad JF(X_4) = \begin{pmatrix} {}^{5}/_{6} & -{}^{1}/_{12} \\ -{}^{19}/_{45} & {}^{7}/_{45} \end{pmatrix},$$

Estudiamos ahora la estabilidad de cada punto fijo:

- $X_1 = (0, 0)$.
  Como $\rho(JF(X_1)) = 1{,}9 > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.
- $X_2 = (0, 22{,}5)$.
  Como $\rho(JF(X_2)) = 1{,}125 > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.
- $X_3 = ({}^{40}/_{3}, 0)$.
  Como $\rho(JF(X_3)) = {}^{49}/_{30} > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.

- $X_4 = (25/9, 190/9)$.
  Calculamos sus valores propios:
  $$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{89}{90}\lambda + \frac{137}{1350}$$
  Tenemos que los valores propios son $\lambda_1 \approx 0{,}87$ y $\lambda_2 \approx 0{,}11$, por lo que $\rho(JF(X_4)) \approx 0{,}87 < 1$. Por tanto, el punto fijo es asintóticamente estable localmente.

Ejercicio 4.4.7. Si en el modelo de crecimiento de una población estructurada por sexos no se asume una distribución equitativa entre hembras y machos, el modelo resultante es

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \alpha_x x_n y_n - \mu_x x_n \\ y_{n+1} = y_n + \alpha_y x_n y_n - \mu_y y_n \end{cases}$$

donde x_n denota el número de hembras e y_n el número de machos en el $n-$ésimo año. Los parámetros α_x y α_y representan la tasa de natalidad por pareja de hembras y machos, respectivamente, y $0 < \mu_x < 1$ y $0 < \mu_y < 1$ son las respectivas mortalidades. Dados $\alpha_x = 0{,}05$, $\alpha_y = 0{,}02$ y $\mu_x = \mu_y = 0{,}3$, estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Sean las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(x, y) = x + \alpha_x xy - \mu_x x$$
$$f_2(x, y) = y + \alpha_y xy - \mu_y y$$

Notando $F = (f_1, f_2)$, tenemos que el sistema viene dado por $X_{n+1} = F(X_n)$. Buscamos los puntos fijos del sistema, es decir, los puntos (x, y) tales que se tiene $F(x, y) = (x, y)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + \alpha_x xy - \mu_x x & = x \\ y + \alpha_y xy - \mu_y y & = y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_x xy - \mu_x x & = 0 \\ \alpha_y xy - \mu_y y & = 0 \end{array} \right.$$

Hay distintas soluciones constantes del modelo, veámoslas:

- $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En este caso $X_1 = (0, 0)$.
- $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$. Se da un absurdo en la segunda ecuación, por lo que no se puede dar.
- $x_3 \neq 0$, $y_3 = 0$. Se da un absurdo en la primera ecuación, por lo que no se puede dar.
- $x_4 \neq 0$, $y_4 \neq 0$. En este caso, tenemos el siguiente sistema:
  $$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_x xy - \mu_x x & = 0 \\ \alpha_y xy - \mu_y y & = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_x y - \mu_x & = 0 \\ \alpha_y x - \mu_y & = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \mu_x/\alpha_x \\ x = \mu_y/\alpha_y \end{array} \right.$$
  Por tanto, $X_4 = \left(\dfrac{\mu_y}{\alpha_y}, \dfrac{\mu_x}{\alpha_x}\right)$.

Estudiemos ahora la estabilidad de los puntos fijos. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de F en cada punto fijo y estudiamos su radio espectral. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Tenemos que:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_x y - \mu_x & \alpha_x x \\ \alpha_y y & 1+\alpha_y x - \mu_y \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto, tenemos:

$$JF(X_1) = \begin{pmatrix} 1-\mu_x & 0 \\ 0 & 1-\mu_y \end{pmatrix}, \qquad JF(X_4) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_x \left(\dfrac{\mu_y}{\alpha_y}\right) \\ \alpha_y \left(\dfrac{\mu_x}{\alpha_x}\right) & 1 \end{pmatrix},$$

Concretando para los valores dados en el enunciado, tenemos que:

$$JF(X_1) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \qquad JF(X_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}12 & 1 \end{pmatrix},$$

Estudiamos ahora la estabilidad de cada punto fijo:

- $X_1 = (0, 0)$.

  Como $\rho(JF(X_1)) = 0{,}7 < 1$, tenemos que el punto fijo es asintóticamente estable localmente.

- $X_4 = \left(\dfrac{\mu_y}{\alpha_y}, \dfrac{\mu_x}{\alpha_x}\right)$.

  Calculamos sus valores propios:

  $$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 0{,}91$$

  Tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 1{,}3$ y $\lambda_2 = 0{,}7$, por lo que $\rho(JF(X_4)) = 1{,}3 > 1$. Por tanto, el punto fijo es inestable.

Ejercicio 4.4.8. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio del siguiente modelo de presa-depredador:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - x_n y_n \\ y_{n+1} = 1{,}5y_n - 2y_n^2 + x_n y_n \end{cases}$$

Sean las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(x,y) = 2x - xy$$
$$f_2(x,y) = 1{,}5y - 2y^2 + xy$$

Notando $F = (f_1, f_2)$, tenemos que el sistema viene dado por $X_{n+1} = F(X_n)$. Buscamos los puntos fijos del sistema, es decir, los puntos (x, y) tales que se tiene $F(x, y) = (x, y)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x - xy & = x \\ 1{,}5y - 2y^2 + xy & = y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x(1-y) & = 0 \\ y(0{,}5 - 2y + x) & = 0 \end{array} \right.$$

Hay distintas soluciones constantes del modelo, veámoslas:

- $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En este caso $X_1 = (0, 0)$.
- $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$. Tenemos $0{,}5 - 2y_2 = 0 \Longrightarrow y_2 = 0{,}25$. En este caso, se tiene $X_2 = (0, 0{,}25)$.
- $x_3 \neq 0$, $y_3 = 0$. Se da un absurdo en la primera ecuación, por lo que no se puede dar.
- $x_4 \neq 0$, $y_4 \neq 0$. En este caso, tenemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1-y & =0 \\ 0{,}5-2y+x & =0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =1{,}5 \\ y & =1 \end{array}\right.$$

  Por tanto, $X_4 = (1{,}5, 1)$.

Estudiemos ahora la estabilidad de los puntos fijos. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de F en cada punto fijo y estudiamos su radio espectral. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Tenemos que:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ y & 1{,}5-4y+x \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto, tenemos:

$$JF(X_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}, \qquad JF(X_2) = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$
$$JF(X_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos ahora la estabilidad de cada punto fijo:

- $X_1 = (0, 0)$.
  Como $\rho(JF(X_1)) = 2 > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.
- $X_2 = (0, 0{,}25)$.
  Como $\rho(JF(X_2)) = 1{,}75 > 1$, tenemos que el punto fijo es inestable.
- $X_4 = (1{,}5, 1)$.
  Calculamos sus valores propios:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 0{,}5$$

  Tenemos que los valores propios son $\lambda = \pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$, por lo que el radio espectral es $\rho(JF(X_4)) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Por tanto, el punto fijo es asintóticamente estable localmente.

Notemos que tan solo sobrevive en el caso de que las dos especies convevivan.