Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Introducción a la Computación

Ejercicio 1.1.1. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X, Y\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$

1. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \to XYX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$$
$$Y \to bbb$$

Sea $L = \{ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ubbbv$ con $u, v \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX$$

Además, es fácil ver que la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$ nos permite generar cualquier palabra $u \in \{a, b\}^*$. Por tanto, tenemos que $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} u$ y $X \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$; teniendo así que $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} ubbbv$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX \Longrightarrow ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto en el apartado anterior de la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

2. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \to aX$$
$$X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$$

Sea $L = \{au \mid u \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = au$ con $u \in \{a,b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au \mid u \in \{a,b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

3. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to XaXaX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea $L = \{uavawa \mid u,v,w \in \{a,b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $z \in L$. Entonces, $z = uavawa$ con $u,v,w \in \{a,b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} z$:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de z:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa \mid u,v,w \in \{a,b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in L$.

4. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to SS \mid XaXaX \mid \varepsilon \\ X &\to bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea el siguiente lenguaje:

Ejercicio 1.1.2. Sea la gramática $G = (V,T,P,S)$. Determinar en cada caso el lenguaje generado por la gramática.

1. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \\ T &= \{a,b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{rcl} S & \to & abAS \mid a \\ abA & \to & baab \\ A & \to & b \end{array} \right\} \end{aligned}$$

2. Tenga en cuenta que:

$$V = \{\langle \text{número} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle\}$$
$$T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$S = \langle \text{número} \rangle$$
$$P = \left\{ \begin{array}{rcl} \langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{dígito} \rangle & \to & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array} \right\}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G)$ es el conjunto de los números naturales, permitiendo tantos ceros a la izquierda como se quiera. Es decir (usando la notación de potencia y concatenación vista para lenguajes):

$$L = \{0^i n \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Demostrémoslo mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = 0^i n$ con $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos que $\langle \text{número} \rangle \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

- En primer lugar, aplicamos $|w| - 1$ veces la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$ y la regla que lleva de $\langle \text{dígito} \rangle$ a uno de los símbolos terminales, consiguiendo así en cada etapa reemplazar la última variable presente en la cadena por un dígito.
- Finalmente, aplicamos la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{dígito} \rangle$ para reemplazar la última variable por un dígito, que será el primero del número formado.

Por tanto, $\langle \text{número} \rangle \overset{*}{\Longrightarrow} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Como la única regla que aumenta la longitud es la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$, tenemos que w tiene la forma:

$$\begin{aligned} \langle \text{número} \rangle &\Longrightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \overset{|w|-1 \text{ veces}}{\Longrightarrow} \\ &\Longrightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \overset{|w|-1 \text{ veces}}{\cdots} \langle \text{dígito} \rangle \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \langle \text{dígito} \rangle \overset{|w| \text{ veces}}{\cdots} \langle \text{dígito} \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata una sucesión de $|w|$ dígitos, lo que nos lleva a que $w \in L$.

3. Tenga en cuenta que:

$$V = \{A, S\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{rcl} S & \to & aS \mid aA \\ A & \to & bA \mid b \end{array} \right\}$$

Sea $L = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = a^n b^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$:

- En primer lugar, aplicamos $n-1$ veces la regla de producción $S \to aS$ para obtener $a^{n-1}S$,
$$S \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^{n-1}S$$
- Para cambiar a la etapa de añadir b's, aplicamos la regla de producción $S \to aA$, obteniendo así $a^n A$,
- Después, aplicamos $m-1$ veces la regla de producción $A \to bA$ para obtener $a^n b^{m-1} A$.
- Para finalizar, aplicamos la regla de producción $A \to b$ para obtener $a^n b^m$.

Por tanto, $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Vemos que en la palabra siempre va a haber tan solo una variable (ya sea S o A). Se empezará con la S, y en cierto momento se cambiará a la A, sin poder entonces volver a la S.

- Cuando se está en la etapa en la que hay S, tan solo se pueden añadir a's, o bien cambiar a la A.
- Cuando se está en la etapa en la que hay A, tan solo se pueden añadir b's.

Por tanto, tenemos que w estará formada por una sucesión de a's seguida de una sucesión de b's, lo que nos lleva a que $w \in L$.

Ejercicio 1.1.3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras en las que el número de b no es tres.

2. Palabras que tienen 2 ó 3 b.

Ejercicio 1.1.4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras que no contienen la subcadena ab.

2. Palabras que no contienen la subcadena baa.

Ejercicio 1.1.5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

Ejercicio 1.1.6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

Ejercicio 1.1.7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a.
2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b.

Ejercicio 1.1.8. Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que:

1. Genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.
2. Genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

Ejercicio 1.1.9. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$
\begin{aligned}
&V = \{S, X\} \\
&T = \{a, b\} \\
&S = S \\
&P = \left\{ \begin{array}{ccl} S & \to & SS \\ S & \to & XXX \\ X & \to & aX \mid Xa \mid b \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Determinar si el lenguaje generado por la gramática es regular. Justificar la respuesta.

Ejercicio 1.1.10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

Ejercicio 1.1.11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

Ejercicio 1.1.12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \to B^*$, $g : A^* \to B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Ejercicio 1.1.13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i, para todo $i \geqslant 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

1. ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2? Justifica la respuesta.
2. Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L.

   Observación. Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que, para todo alfabeto A, el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

1.1.1. Cálculo de gramáticas

Ejercicio 1.1.15 (Complejidad: Sencilla)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{u \in \{0,1\}^* \mid |u| \leqslant 4\}$
2. Palabras con 0's y 1's que no contengan dos 1's consecutivos y que empiecen por un 1 y que terminen por dos 0's.
3. El conjunto vacío.
4. El lenguaje formado por los números naturales.
5. $\{a^n \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\} \cup \{a^n b^n \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\}$
6. $\{a^n b^{2n} c^m \in \{a,b,c\}^* \mid n,m > 0\}$
7. $\{a^n b^m a^n \in \{a,b\}^* \mid m,n \geqslant 0\}$
8. Palabras con 0's y 1's que contengan la subcadena 00 y 11.
9. Palíndromos formados con las letras a y b.

Ejercicio 1.1.16 (Complejidad: Media)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{uv \in \{0,1\}^* \mid u^{-1} \text{ es un prefijo de } v\}$
2. $\{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid |u| = |v|\}$
3. $\{u1^n \in \{0,1\}^* \mid |u| = n\}$
4. $\{a^n b^{n+1} \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\}$ (observar transparencias de teoría)

Ejercicio 1.1.17 (Complejidad: Difícil)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m c^k \in \{a,b,c\}^* \mid k = m + n\}$
2. Palabras que son múltiplos de 7 en binario.

Ejercicio 1.1.18 (Complejidad: Extrema (no son libres de contexto))**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
2. $\{a^{n^2} \in \{a\}^* \mid n \geqslant 0\}$
3. $\{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es primo}\}$
4. $\{a^n b^m \in \{a,b\}^* \mid n \leqslant m^2\}$