Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Inducción

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- <u>Para $n = 0$</u>:
$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$
  Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
  y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) &\overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$
  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. □

Ejercicio 1.1.2. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

- $n = 0$:
$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

- $n = 1$:
$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

- $n > 1$:
$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) n \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

- En el caso base $n = 0$:
$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2$$

  Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ se tiene, como se pedía. □

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, a la hora de demostrar que un predicado vale para $n+1$, se usa que es cierto para todo $n \in \{0, \dots, n\}$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

"n tiene un factor primo"

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.
En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- <u>n es primo:</u>

  En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en estey caso, por lo que se tiene el caso base).

- <u>n no es primo:</u>

  Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p. Así pues, $p \mid u$ y por tanto:
$$p \mid n$$
  Luego $P(n)$ vale.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$. □

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso)**.** Sea p la función dada por:

$$p(a,0) = 0,$$
$$p(a,b) = \begin{cases} p\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\[2ex] p\left(2a, \dfrac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a,b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

"Para todo número natural m, $p(m,n) = mn$."

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- $\underline{n = 0, \text{ (sea cual sea } m)}$:
$$p(m,0) = 0 = m \cdot 0$$
Luego $P(0)$ vale.
- <u>En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale</u>:
Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:
  1. $\underline{n \equiv 0 \mod 2}$ (es par):
  $$p(m,n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \overset{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$
  Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n}{2} < n$.
  2. $\underline{n \equiv 1 \mod 2}$ (es impar):
  $$\begin{aligned} p(m,n) = p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m &\overset{(*)}{=} \left(\cancel{2}m \cdot \frac{n-1}{\cancel{2}}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$
  donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n, vale $P(n)$. □

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$
Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$, se tiene que:
$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$
Esto se debe a que:
$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$
Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:
$$\begin{aligned}\left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}\right) - \left(5^n + 3^{n-1}\right) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 5^n + 3^{n-1}\right)\end{aligned}$$
Como $2 \mid \left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1})\right)$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. □

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$
Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$, se tiene que:

  $$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$

  Esto se debe a que:

  $$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$

  Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) &= \\
  &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + \cancel{1} - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - \cancel{1} = \\
  &= 5^n(5-1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) = \\
  &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\
  &= 4\left(5^n + 3^{n-1}\right) \overset{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k
  \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he usado el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid \left[\left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)\right]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.8. Demouestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- En el caso base, $n = 1$:

  $$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 2 \geqslant \sqrt{2}$$

  Como $2 \geqslant \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leqslant (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leqslant (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff \cancel{4n^3} + \cancel{4n^2} + n + \cancel{8n^2} + \cancel{8n} + 2 \leqslant \cancel{4n^3} + \cancel{8n^2} + 4n + \cancel{4n^2} + \cancel{8n} + 4 \iff \\ &\iff 2+n \leqslant 4+4n \iff 0 \leqslant 2+3n\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ es cierto, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } (n+1)^2 < n^3 \text{ ”}$$

- En el caso base, $n=3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1+1)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} n^3 + 2n + 1 \leqslant n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } n^3 < n! \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 6$:

  $$6^3 \leqslant 6! \iff 6^2 \leqslant 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leqslant 4 \cdot 5$$

  Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$n^3 < n!$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

  $$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \overset{(*)}{<} n^3(n+1) \overset{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 5 \mid 8^n - 3^n \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

  $$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

  Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$5 \mid 8^n - 3^n$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:
$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8-1) - 3^n \cdot (3-1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. □

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales. Para ello, emplearemos el mínimo común múltiplo, cuya definición vamos a recordar:

Definición 1.1 (Mínimo común múltiplo)**.** Sea A un Dominio de Integridad y $a, b \in A$. Un elemento $m \in A$ diremos que es un **mínimo común múltiplo** (abreviado como mcm) y notado $m = \text{mcm}(a, b)$ si verifica:

1. $a|m \wedge b|m$,
2. $\forall c \in A$ tal que $a|c \wedge b|c \Longrightarrow m|c$.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b, existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b:

- $a = 0$ o $b = 0$:

  Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b. Además, es el mínimo múltiplo común de a y b, ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $a, b > 0$:

  Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b. Es claro que se tiene que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b. Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:
$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$
  Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Veamos que $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b.

1. Como $m_{a,b} \in M_{a,b}$, se tiene que $a|m_{a,b}$ y $b|m_{a,b}$.
2. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $a|m$ y $b|m$. Buscamos demostrar que $m_{a,b}|m$. Como $m_{a,b} \neq 0$, por el Teorema de la División de Euclides, existen únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $m = qm_{a,b} + r$ con $0 \leqslant r < m_{a,b}$. Por tanto, $r = m - qm_{a,b}$, por lo que r es un múltiplo común de a y de b, $r \in M_{a,b}$. Como $r < m_{a,b}$, se tiene que $r \notin v_{a,b}$, por lo que:

$$r \in M_{a,b} \setminus v_{a,b} = M_{a,b} \setminus (M_{a,b} \setminus \{0\}) = \{0\}$$

Por tanto, $r = 0$, por lo que $m = qm_{a,b}$, es decir, $m_{a,b}|m$, teniendo lo buscado.

Por tanto, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b, como se pedía.

Observación. Notemos que la definición del mínimo común múltiplo no es el mínimo de los múltiplos comunes de a y de b, algo en lo que el lector podría caer fácilmente.

□

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de $n \in \mathbb{N}$ para el que

$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden)**.** Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (es decir, S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea el conjunto de los mayorantes de S, $M(S)$, dado por:

$$M(S) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \leqslant m \text{ para todo } x \in S\}$$

Se tiene entonces que $n \in M(S)$, por lo que $M(S) \neq \emptyset$. Por el principio del buen orden, $M(S)$ tiene mínimo, al que llamaremos m_0. Veamos que m_0 es el máximo de S. Para ello, es necesario demostrar que $m_0 \in S$ y que $m_0 \geqslant x$ para todo $x \in S$.

- Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x \leqslant m_0$ para todo $x \in S$, por lo que efectivamente m_0 es un mayorante de S.
- Veamos ahora que $m_0 \in S$.

  Observación. A continuación, restaremos 1 a m_0, considerando $m_0 - 1$. Para poder trabajar en $\mathbb{N}$, es necesario que $m_0 \neq 0$. Como $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$, sea $x_0 \in S \setminus \{0\}$, por lo que $x_0 \neq 0$ y $x_0 \in \mathbb{N}$. Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x_0 \leqslant m_0$, por lo que $0 < x_0 \leqslant m_0$.

Supongamos que que $x < m_0$ para todo $x \in S$. Por tanto:

$$x \leqslant m_0 - 1 \text{ para todo } x \in S \Longrightarrow m_0 - 1 \in M(S)$$

Además, $m_0 - 1 < m_0$, lo que contradice que m_0 sea el mínimo de $M(S)$, por lo que la hipótesis era falsa y $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 \geqslant m_0$. Como además $m_0 \geqslant x_0$ por ser $x_0 \in S$, tenemos que $m_0 = x_0$, por lo que $m_0 \in S$. Por tanto, como $m_0 \in S \cap M(S)$, se tiene que m_0 es el máximo de S. □

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leqslant n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Caso base: $n = 2$.

  Tenemos que:

$$1 < 2 \Longleftrightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \Longleftrightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Longleftrightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

  Veamos ahora que $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}}$:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

  Por tanto, $P(2)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que vale $P(n)$, es decir

$$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. En primer lugar, veamos que:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Supongando 1 a cada lado de la desigualdad, se tiene que:

$$n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \Longrightarrow (\sqrt{n+1})^2 < \sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} <$$
$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

donde en la última desigualdad se ha usado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \leqslant 2$, $P(n)$ vale. □

Ejercicio 1.1.16. Demostrar **no inductivamente** que para todo número natural n se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$2\sum_{k=0}^{n} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k + (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)$$

Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicio 1.1.17. Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos solo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de superior a 13.

El razonamiento es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

"Es posible franquear una carta de n céntimos con sellos de 3 y 8 céntimos."

Como hipótesis de inducción, supongamos que $14 \leqslant n$ y que $P(k)$ es cierto para todo $14 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- Caso base: $n = 14$.

  Tenemos que $14 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 8$, por lo que $P(14)$ es cierto.

- Caso base: $n = 15$.

  Tenemos que $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$, por lo que $P(15)$ es cierto.

- Caso base: $n = 16$.

  Tenemos que $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$, por lo que $P(16)$ es cierto.

- Supongamos que $n \geqslant 17$, por lo que $14 \leqslant n-3 < n$, y por la hipótesis de inducción, se tiene que $P(n-3)$ es cierto. Es decir, existirán $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $n-3 = 3a + 8b$. En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ es cierto. Tenemos que:

$$n = (n-3) + 3 = 3a + 8b + 3 = 3(a+1) + 8b$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto.

Por tanto, por el segundo principio de inducción, se tiene que para todo número natural n superior a 13, $P(n)$ es cierto, como se pedía.

Ejercicio 1.1.18. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$2|(n+1)(n+2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 2|(n+1)(n+2) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$2|1 \cdot 2$$

Como $2|2$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2|(n+1)(n+2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)(n+1+2) - (n+1)(n+2) &= (n+2)(n+3) - (n+1)(n+2) = \\ &= (n+2)(n+3-n-1) = 2(n+2)\end{aligned}$$

Por tanto, como $2|(n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)$ y, por hipótesis de inducción, $2|(n+1)(n+2)$, se tiene que $2|(n+1+1)(n+1+2)$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, se tiene que $2|(n+1)(n+2)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.19. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$6 \mid 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Como $6 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) &= (n+1)(n+2)[n+3-n] = \\ &= 3(n+1)(n+2) \overset{(*)}{=} 3 \cdot 2k = 6k\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado el Ejercicio 1.1.18. Por tanto, como se tiene que $6|(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)$ y, por hipótesis de inducción, $6|n(n+1)(n+2)$, se tiene que $6|(n+1)(n+2)(n+3)$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, se tiene que $6 \mid n(n+1)(n+2)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.20 (Parcial DGIIM 23/24)**.** Demuestre por inducción que para todo número natural $n \in \omega$ existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

Notación. De aquí en adelante, para cualquier número natural $n \in \omega$, $f_n(x, y)$ denotará un polinomio.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned}x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0\end{aligned}$$

Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(k)$ es cierto para $k \in \omega,\ 0 \leqslant k \leqslant n$, es decir, que:

$$x^k - y^k = (x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - y^{n+1} + x^n y - x^n y + xy^n - xy^n \\
&= (x+y)(x^n - y^n) - xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\
&\overset{(*)}{=} (x+y)(x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy(x-y) \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \\
&= (x-y) \left[(x+y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \right] \\
&= (x-y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^{k+1} \right] \\
&= (x-y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^0 y^n \right] \\
&= (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción, puesto que $n, n-1 \leqslant n$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Así pues, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x, y)$ dado por:

$$f_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

tal que cumple:

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot f_n(x,y)$$

□

Veamos ahora para cada valor de $n \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ el valor de $f_n(x, y)$:

- Para $n = 0$:

$$f_0(x,y) = \sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = (x-y) \cdot 0$$

- Para $n = 1$:

$$f_1(x, y) = \sum_{k=0}^{0} x^{0-k} y^k = 1$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \cdot 1$$

- Para $n = 2$:

$$f_2(x, y) = \sum_{k=0}^{1} x^{1-k} y^k = x + y$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

- Para $n = 3$:

$$f_3(x, y) = \sum_{k=0}^{2} x^{2-k} y^k = x^2 + xy + y^2$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Observación. Proponemos ahora una demostración alternativa para la existencia de $f_n(x, y)$.

Demostración. La demostración es mediante el segundo principio de inducción matemática según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{“ } x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

  Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $Q(0)$ es cierto.

- Supongamos como hipótesis de inducción que n es un número natural y que $Q(k)$ es cierto para todo $k \in \omega,\ 0 \leqslant k < n$. Es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot f_k(x, y)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $Q(n)$ es cierto. Distinguimos dos casos:

  - Para n par:
    Tenemos que $n = 2m$ para algún $m \in \omega$, $m < n$. Por tanto:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m} - y^{2m} \\ &= (x^m)^2 - (y^m)^2 \\ &= (x^m - y^m)(x^m + y^m) \\ &\overset{(*)}{=} (x - y)f_m(x, y)(x^m + y^m) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.
  - Para n impar:
    Tenemos que $n = 2m + 1$ para algún $m \in \omega$, $2m < n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m+1} - y^{2m+1} = x \cdot x^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x \cdot x^{2m} - x \cdot y^{2m} + x \cdot y^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x - y) \\ &\overset{(*)}{=} x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= (x - y)(x \cdot f_m(x, y) + y^{2m}) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $2m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

Así pues, por el segundo principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x, y)$ tal que $x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$. □

1.2. Recurrencia

Ejercicio 1.2.1. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geqslant 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geqslant 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz $r = 2$ de multiplicidad $m = 2$. La solución general de la recurrencia por tanto es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Y ahora buscar los valores de c_1 y c_2 usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 3$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\ 3 &= (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) 2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right) 2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Observación. Notemos que distinguimos muy bien la reucrrencia en sí, notada por u_n, de la solución particular de la recurrencia, notada por x_n.

Ejercicio 1.2.2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0$$

El orden k de la recurrencia es 2 ($k = 2$). La ecución característica es:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Usando la notación del Teorema visto en Teoría, donde r_i son las raíces de la ecuación característica y m_i son las multiplicidades de las raíces, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_1 = 1 \\ r_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_2 = 1 \end{aligned}$$

En efecto, se tiene $m_1+m_2 = 1+1 = 2 = k$, por lo que estamos en las condiciones del Teorema. Si $\{x_n\}$ es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los valores de c_1 y c_2 se obtendrán a partir de las condiciones iniciales, que no se nos han proporcionado.

Ejercicio 1.2.3. Reuelva el problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 0$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 0 = x_0 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = -c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = x_1 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1\sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema por tanto es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Fibonacci.*

Ejercicio 1.2.4. Calcular la solución del problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema, entonces $x_0 = u_0 = 2$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 2 - c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \cancel{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\cancel{2}} \right) \\ &= c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \Longrightarrow 1 = c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \Longrightarrow 0 = c_1\sqrt{5} - \sqrt{5} \\ &\Longrightarrow c_1\sqrt{5} = \sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = 1 \Longrightarrow c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución por tanto es:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Lucas*.

Ejercicio 1.2.5. Solucionar la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \qquad n \geqslant 0$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 3^n = c_0 + c_1 3^n$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$3 \cdot 3^n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_3 = 3 \\ m_3 = 1 \\ q_3(n) = 3 \\ \deg(q_3(n)) = 0 \end{array} \right\} \qquad 3 \cdot 1^n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 1 \\ q_1(n) = 3 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n \cdot 1^n = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_2 y c_3. Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$3^{n+1} + 3 = x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)}$$

Calculemos dichos valores:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= c_2 n \cdot 3^n + c_3 n = n(c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_2(n+1) \cdot 3^{n+1} + c_3(n+1) = (n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= c_2(n+2) \cdot 3^{n+2} + c_3(n+2) = (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = \\ &= (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) - 4(n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) + 3n(c_2 \cdot 3^n + c_3) = \\ &= c_2 3^n[3^2(n+2) - 4 \cdot 3(n+1) + 3n] + c_3[(n+2) - 4(n+1) + 3n] = \\ &= c_2 3^n[9n + 18 - 12n - 12 + 3n] + c_3[n + 2 - 4n - 4 + 3n] = \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 = 6c_2 3^n - 2c_3$$

Igualando los coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} 6c_2 = 3 \Longrightarrow c_2 = {}^1\!/_2 \\ -2c_3 = 3 \Longrightarrow c_3 = {}^{-3}\!/_2 \end{gathered}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n \cdot 3^n - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}\left(3^n - 3\right)$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \left\{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\right\}$ y entonces:

$$x_n = c_0 + c_1 3^n + \frac{n}{2}\left(3^n - 3\right) = \left(\frac{n}{2} + c_1\right) 3^n + c_0 - \frac{3n}{2}$$

Ejercicio 1.2.6. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0 \qquad n \geqslant 0$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -4$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la ecuación característica son:

$$z_1 = 2i \qquad z_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot (2i)^n + c_2 \cdot (-2i)^n$$

Buscamos ahora expresar la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos. Para ello, tenemos que:

$$|z_1| = |z_2| = 2 \qquad \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión de z_1 y z_2 en términos de senos y cosenos es:

$$z_1 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$z_2 = 2 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Usando que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, tenemos que:

$$z_1 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$z_2 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Elevando a n, por el Teorema de Moivre, tenemos que:

$$(z_1)^n = 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$
$$(z_2)^n = 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + c_2 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\ &= 2^n \left[(c_1 + c_2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\ &= 2^n \left[d_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad n \geqslant 0$$

Ejercicio 1.2.8. Calcular el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como "Torres de Hanoi", en función del número de discos n con los que cuente.

Para $n \geqslant 0$ sea u_n el número de movimientos necesarios para pasar los n discos del poste A al poste C. Si el puzzle tuviese $n+1$ discos entonces hacemos lo siguiente:

- Pasamos los n discos superiores del poste A al poste B. Esto nos cuesta u_n movimientos.
- Pasamos el disco base del poste A al poste C. Esto nos cuesta 1 movimiento.
- Pasamos los n discos superiores del poste B al poste C. Esto nos cuesta u_n movimientos.

Por tanto, lo dicho sugiere la siguiente recurrencia:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 2 = 0$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n \qquad c_1 \in \mathbb{C}$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 1 = 1 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$1 \cdot 1^n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ q_1(n) = 1 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{C}$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener el valor de c_2. Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$1 = x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} = c_2 - 2c_2 = -c_2 \Longrightarrow c_2 = -1$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = -1$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \left\{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\right\}$ y entonces:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Como sabemos que $x_0 = u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_1 \cdot 2^0 - 1 = c_1 - 1 \Longrightarrow c_1 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = 2^n - 1$$

Notemos que esta es la solución al problema de las Torres de Hanoi. Veamos como ilustración los primeros valores de la sucesión:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2^0 - 1 = 0 \\
x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\
x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\
x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\
x_4 &= 2^4 - 1 = 15
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.9. Sea la sucesión $\{u_n\}$ definida por:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n.

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ se tiene:

   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n = u_{n-1} + n2^n$$

   Además, para $n = 0$ se tiene que:

   $$u_0 = \sum_{k=0}^{0} k2^k = 0 \cdot 2^0 = 0$$

   Por tanto, la expresión recurrente para u_n es:

   $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n2^n \qquad n \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n.

   Encontrar una fórmula explícita para u_n es equivalente a resolver la recurrencia. Para ello, su polinomio característico es:

$$x - 1 = 0$$

   Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$u_n^{(h)} = c_0 \qquad c_0 \in \mathbb{C}$$

   La función de ajuste es:

$$f(n) = n2^n$$

   Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$n2^n \Longrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ m = 0 \\ q(n) = n \\ \deg(q(n)) = 1 \end{cases}$$

   Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n$$

   Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_1 y c_2. Para ello, como sabemos que $u_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} n2^n &= u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2(c_1 + c_2 n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2^{n-1}[2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2 n + c_2] = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \end{aligned}$$

   Por tanto, deducimos que:

$$n2^n = 2^{n-1} \cdot 2n = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{array} \right.$$

   Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n = (n-1)2^{n+1}$$

   Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{u_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{u_n\} = \left\{ u_n^{(h)} + u_n^{(p)} \right\}$ y entonces:

$$u_n = c_0 + (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que $u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_0 + (0-1)2^{0+1} = c_0 - 2 \Longrightarrow c_0 = 2$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$u_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Ejercicio 1.2.10. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe hacer al final de cada plazo?

Sea u_n es la cantidad de p̃restamo que todavía debe el ciudadano al final del $n-$ésimo plazo, es decir, a continuación del $n-$ésimo pago. Entonces, para todo $0 \leqslant n \leqslant T-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1+I)u_n - P \end{aligned}$$

El problema entonces se reduce a resolver la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1+I)u_n - P \qquad 0 \leqslant n \leqslant T-1 \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - (1+I) = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n \qquad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es $f(n) = -P = -Pn^0 \cdot 1^n$. Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$-P \Longrightarrow \begin{cases} s = -P \\ q(n) = 1 \\ \deg(q(n)) = 0 \end{cases}$$

Para obtener la multiplicidad del 1 como raíz del polinomio característico, depende del valor de I. Como la única raíz del polinomio característico es $1+I$, realizamos la siguiente distinción de casos:

- $\underline{I = 0}$: En este caso, la raíz del polinomio característico es 1 y por tanto, $m = 1$. Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n = c_0(1)^n = c_0 x_n^{(p)} \qquad\qquad = c_1 n \cdot 1^n = c_1 n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned}-P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1(n+1) - (1+I)c_1 n = \\ &= c_1[n+1-n(1+I)] = c_1(1-I) = c_1\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0 - Pn$$

Para hallar c_0 y P, usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}S = x_0 = c_0 - P\cdot 0 = c_0 &\Longrightarrow c_0 = S \\ 0 = x_T = c_0 - P\cdot T = S - PT &\Longrightarrow P = \frac{S}{T}\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = S - \frac{S}{T}n = S\left(1 - \frac{n}{T}\right)$$

La cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo es:

$$P = \frac{S}{T}$$

- $\underline{I \neq 0}$: En este caso, la raíz del polinomio característico es $1+I$ y por tanto, $m = 0$. Por tanto, tenemos:

  $$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n x_n^{(p)} \qquad\qquad = c_1 n^0 \cdot 1^n = c_1$$

  Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

  $$-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1 - (1+I)c_1 = -Ic_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{P}{I}$$

  Por tanto, la solución de la recurrencia es:

  $$x_n = c_0(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

  Para hallar c_0 y P, usamos las condiciones iniciales:

  $$\begin{aligned}S = x_0 &= c_0(1+I)^0 + \frac{P}{I} = c_0 + \frac{P}{I} \Longrightarrow c_0 = S - \frac{P}{I} \\ 0 = x_T &= c_0(1+I)^T + \frac{P}{I}\end{aligned}$$

  Por tanto, para hallar la cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo, necesitamos despejar P de la ecuación anterior:

  $$\begin{aligned}&0 = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P = (P - SI)(1+I)^T = P(1+I)^T - SI(1+I)^T \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P = \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - I}\end{aligned}$$

La solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Ejercicio 1.2.11. Encuentre la solución la solución general para la siguiente recurrencia:

$$u_n = u_{n-2} + 2^n + (-1)^n \qquad n \geqslant 2$$

y luego soluciona el problema que surge de ella junto a los valores iniciales:

$$u_0 = u_1 = 2.$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

La función de ajuste es $f(n) = 2^n + (-1)^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned}
2^n + (-1)^n = x_n^{(p)} - x_{n-2}^{(p)} &= c_3 2^n + c_4 n(-1)^n - c_3 2^{n-2} - c_4(n-2)(-1)^{n-2} = \\
&= 2^{n-2}(2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n(c_4 n - c_4(n-2)) = \\
&= 2^{n-2} \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$\begin{cases} 3c_3 = 4 \Longrightarrow c_3 = 4/3 \\ 2c_4 = 1 \Longrightarrow c_4 = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

Usando los valores iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned}
2 = x_0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 &\Longrightarrow c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\
2 = x_1 = -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} &\Longrightarrow -c_1 + c_2 = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2/3 \\ c_1 - c_2 = 1/6 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 5/12 \\ c_2 = 1/4 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución de la recurrencia para los valores iniciales dados es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n = \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left(\frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.12. Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3 \cdot 2^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \\ r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-2 + 2\sqrt{3}i)^n + c_2(-2 - 2\sqrt{3}i)^n$$

Para expresar la solución en términos de senos y cosenos, calculamos el módulo y el argumento de las raíces. El módulo de las raíces es:

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^4} = 4$$

Respecto al argumento de las raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1) &= \frac{\Im(r_1)}{\Re(r_1)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{tg}(\theta_2) &= \frac{\Im(r_2)}{\Re(r_2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Moivre, es:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \right)$$

Usando que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, podemos reescribir la solución anterior como:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left((c_1 + c_3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (c_2 - c_4) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left(d_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Como solución particular de la recurrencia, partimos de:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Calculamos $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2}\left[c_5 \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[c_5 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\pi - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\pi\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\pi + c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\pi\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[-c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n}\left[-16c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(p)} &= 4^{n+1}\left[c_5 \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[c_5 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[-c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n}\left[-4c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4c_6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
&4^n\left[16\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 64\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] = \\
&\quad = 4^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \\
&\quad = x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 16x_n^{(p)} = \\
&\quad = 4^n\left[-16c_5\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_6\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\
&\qquad + 4^n\left[-16c_5\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 16c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\
&\qquad + 4^n\left[16c_5\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 16c_6\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&\quad = 4^n\left[16c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_5\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{aligned}
16c_6 &= 16 \Longrightarrow c_6 = 1 \\
-16c_5 &= -64 \Longrightarrow c_5 = 4
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\
&= 4^n \left(d_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + 4^n \left[4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^n \left(d_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.13 (Función Gamma)**.** Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{ll} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}\right]$$

Por tanto, tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \overset{(*)}{=} n\Gamma(n)$$

donde en $(*)$ hemos usado la Regla de Barrow, junto a:

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0 \qquad\qquad \lim_{t\to 0} t^n e^{-t} = 0^n \cdot e^0 = 0$$

Por tanto, mediante una fácil inducción, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \cdot \Gamma(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos el valor de $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.2.14. Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = 3u_{n-1} + 3^n - 2 \quad n \geqslant 1 \\ u_0 = 2 \end{array}\right.$$

y redúzcalo a un problema de recurrencia homogénea.

Por variación de índices, tenemos que:

$$u_{n-1} = 3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2$$

Por tanto, multiplicando por 3 llegamos a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + 3^n - 2 \\ 3u_{n-1} & = & 9u_{n-2} + 3^n - 6 \\ \hline u_n - 3u_{n-1} & = & 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4 \end{array}$$

donde hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4$$

Repitiendo el proceso, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} & = & 4 \\ u_{n-1} - 6u_{n-2} + 9u_{n-3} & = & 4 \\ \hline u_n - 7u_{n-1} + 15u_{n-2} - 9u_{n-3} & = & 0 \end{array}$$

donde de nuevo hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que la recurrencia homogénea equivalente es:

$$u_n = 7u_{n-1} - 15u_{n-2} + 9u_{n-3}$$

Resolvamos ahora dicha recurrencia homogénea. El orden de la recurrencia es $k = 3$. La ecuación característica es:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

Veamos mediante Ruffini que $x = 1$ es raíz de la ecuación característica:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -7 & 15 & -9 \\ 1 & & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x^2 - 6x + 9) = (x-1)(x-3)^2$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n + c_3 n \cdot 3^n$$

Las condiciones iniciales de contorno que debemos imponer son:

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 = 2 \\ x_1 &= u_1 = 6 + 3 - 2 = 7 \\ x_2 &= u_2 = 21 + 9 - 2 = 28 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 7 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 28 \end{cases} \right\} \Longrightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia dada es:

$$x_n = 1 + 3^n + n \cdot 3^n = 1 + (n+1)3^n$$

Observación. Notemos que este "método" tiene varios inconvenientes: oculta que algunos de los coeficientes son independientes de los valores de contorno, no evita encontrar las raíces de un un polinomio mientras que eleva el grado del polinomio a estudiar, no es algorítmico, el cálculo de los coeficientes indeterminados es efectuado mediante un sitema de mayor orden, etc.; no obstante el método es algebraicamente bello.

Ejercicio 1.2.15. Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} & n \geqslant 2 \\ t_n = s_{n-1} + t_{n-1} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

Solucione y resuelva la primera recurrencia.

Mediante una simple variación de índices, tenemos que:

$$s_{n-1} = 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} - 2s_{n-2} - s_{n-3} - 4t_{n-2} = \\ &= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \end{aligned}$$

Luego:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

Haciendo uso de que $t_n - t_{n-1} = s_{n-1}$, tenemos que:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}$$

La ecuación característica de la recurrencia homogénea obtenida es:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Veamos que $x = -1$ es raíz de la ecuación característica:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & & -1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2(2+\sqrt{3})^n + c_3(2-\sqrt{3})^n$$

Ejercicio 1.2.16. Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

De forma general, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, y consideramos la recurrencia dada por:

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + n\alpha^{n+1} \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1$$

La función de ajuste es $f(n) = n\alpha^{n+1}$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = (c_2 + c_3 n)\alpha^n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^2 n\alpha^{n-1} &= n\alpha^{n+1} = x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} = (c_2 + c_3 n)\alpha^n - (c_2 + c_3(n-1))\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^n + c_3 n\alpha^n - c_2\alpha^{n-1} - c_3 n\alpha^{n-1} + c_3\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^{n-1}(\alpha - 1) + c_3\alpha^{n-1} + c_3 n\alpha^{n-1}(\alpha - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_3(\alpha - 1) = \alpha^2 \Longrightarrow c_3 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha - 1} \\ c_2(\alpha - 1) + c_3 = 0 \Longrightarrow c_2 = \dfrac{-c_3}{\alpha - 1} = \dfrac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \left(\frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^2}{\alpha - 1} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{-\alpha^2 + n\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que una solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= c_1 + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n \end{aligned}$$

Para hallar el valor de c_1, como sabemos que $x_0 = s_0 = 0$, tenemos que:

$$0 = x_0 = c_1 + \frac{-\alpha^2}{(\alpha-1)^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}$$

Por tanto, la solución a la recurrencia dada es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right)\alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2} - \alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} \end{aligned}$$

Tomando límite con $n \to \infty$, suponiendo $\alpha \in [0, 1[$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora por tanto el ejercicio. Tomando $\alpha = 10^{-3}$, se tiene que:

$$s_n = x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

Tomando límite por tanto con $n \to \infty$, como $\alpha \in [0, 1[$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}} = \lim_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}\right)^2 = \left(110^3 - 1\right)^2 = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{998001}$$

Ejercicio 1.2.17. Demuestre mediante la teoría de recurrencias que $0.\overline{9} = 1$.

Observación. Observe que, sin mucho rigor, se podría tener lo siguiente:

$$0.\overline{9} = 3 \cdot 0.\overline{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Ejercicio 1.2.18 (Parcial DGIIM 23/24)**.** Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \qquad n \geqslant 0$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple con las condiciones iniciales $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow (x-3)^2 = 0$$

La única raíz de la ecuación característica es $x = 3$ con multiplicidad doble. Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

La función de ajuste es $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Calculamos primero $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+2} + c_4(n+2)^2 \cdot 3^{n+2} = 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n \\
x_{n+1}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+1} + c_4(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} = 2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n
\end{aligned}$$

Usando que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= x_{n+2}^{(p)} - 6x_{n+1}^{(p)} + 9x_n^{(p)} \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n - \\
&\quad - 6(2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n) + \\
&\quad + 9(c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n) \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n - \\
&\quad - 12c_3 \cdot 2^n - 18c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n + \\
&\quad + 9c_3 \cdot 2^n + 9c_4 n^2 \cdot 3^n \\
&= 2^n(4c_3 - 12c_3 + 9c_3) + 3^n(9c_4(n^2+4n+4) - 18c_4(n^2+2n+1) + 9c_4 n^2) \\
&= c_3 2^n + c_4 3^n(\cancel{9n^2} + \cancel{36n} + 36 - \cancel{18n^2} - \cancel{36n} - 18 + \cancel{9n^2}) \\
&= c_3 2^n + 18 \cdot c_4 3^n
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} c_3 = 3 \\ 18c_4 = 7 \Longrightarrow c_4 = 7/18 \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n = \\
&= 3^n \left(c_1 + c_2 n + \frac{7}{18} n^2\right) + 3 \cdot 2^n
\end{aligned}$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales, sabiendo que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 4$:

$$\begin{aligned}
x_0 = 1 &\Longrightarrow 1 = 3^0 \left(c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot 0^2\right) + 3 \cdot 2^0 = c_1 + 3 \Longrightarrow c_1 = -2 \\
x_1 = 4 &\Longrightarrow 4 = 3^1 \left(-2 + c_2 \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot 1^2\right) + 3 \cdot 2^1 = \cancel{-6} + 3c_2 + \frac{7}{6} + \cancel{6} \Longrightarrow c_2 = \frac{4 - 7/6}{3} = \frac{17}{18}
\end{aligned}$$

Por tanto, para el caso particular dado tenemos que la solución de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= 3^n\left(-2+\frac{17}{18}n+\frac{7}{18}n^2\right)+3\cdot 2^n \\ &= 3^n\left(-2+\frac{17n+7n^2}{18}\right)+3\cdot 2^n \end{aligned}$$