

# Variable Compleja I

## Examen VI

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

## Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2019-20.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Prueba Intermedia.

**Fecha** 20 de Abril de 2020.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  donde:

$$f_n(z) = \left( \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

**Ejercicio 2** (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\bar{z}} \quad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Ejercicio 3** (1 punto). Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2} dz.$$

**Ejercicio 4** (3 puntos). Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $a \neq b$  y sea  $R > 0$  de modo que  $R > \max\{|a|, |b|\}$ . Probar que, si  $f$  es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

**Ejercicio 5** (Extra: 1.5 puntos). Sea  $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$  y sean  $g, g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$  en cada compacto de  $\Omega$  si, y sólo si, para cada  $a \in \Omega$  existe un entorno de  $a$  en el que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$ .

**Ejercicio 1** (3 puntos). Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  donde:

$$f_n(z) = \left( \frac{z^2 - i}{z^2 + i} \right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Se trata de una serie geométrica de razón  $\varphi$ , donde:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} \right\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z^2 - i}{z^2 + i} \end{aligned}$$

Sabemos que esta converge puntualmente si la razón tiene módulo menor que uno. Fijado  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} \right\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^2 - i}{z^2 + i} \right| < 1 &\iff |z^2 - i|^2 < |z^2 + i|^2 \\ &\iff (\cancel{\text{Re}^2 z} - \cancel{\text{Im}^2 z})^2 + (2 \text{Re } z \text{Im } z - 1)^2 < (\cancel{\text{Re}^2 z} - \cancel{\text{Im}^2 z})^2 + (2 \text{Re } z \text{Im } z + 1)^2 \iff \\ &\iff 4 \text{Re}^2 z \text{Im}^2 z - 4 \text{Re } z \text{Im } z + 1 < 4 \text{Re}^2 z \text{Im}^2 z + 4 \text{Re } z \text{Im } z + 1 \iff \\ &\iff \text{Re } z \text{Im } z > 0 \end{aligned}$$

Definimos por tanto el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \text{Im } z > 0\}.$$

Tenemos por tanto que converge puntualmente y absolutamente en  $\Omega$  y no converge en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Respecto a la convergencia uniforme, dado  $A \subset \mathbb{C}$ , veamos que la serie converge uniformemente en  $A$  si y solo si:

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq H \iff \rho = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in B\} < 1$$

$\Leftarrow$ ) Supuesto que  $\rho < 1$ , es fácil probar la convergencia uniforme de la serie en  $B$ :

$$|f_n(z)| = |\varphi(z)|^n \leq \rho^n \quad \forall z \in B, n \in \mathbb{N}$$

Y sabemos que  $\sum_{n \geq 0} \rho^n$  converge por ser  $\rho < 1$ . Por el Test de Weierstrass, tenemos que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformemente en  $B$ .

$\Rightarrow$ ) Supuesto que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformemente en un conjunto  $B \subseteq H$ , por reducción al absurdo, supongamos que  $\rho \geq 1$ , en cuyo caso (por la definición de supremo), tendremos la existencia de una sucesión  $\{|\varphi(z_n)|\}$  con  $z_n \in B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  de forma que:

$$\{|\varphi(z_n)|\} \rightarrow \rho \geq 1$$

En cuyo caso, para dicha sucesión tendremos que:

$$|f_n(z_n)| = |\varphi(z_n)|^n$$

Y esta sucesión no podrá converger a 0, por ser  $\rho \geq 1$ , lo que contradice que la serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converja uniformemente en  $B$ , por no converger uniformemente su término general a 0 en  $B$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\bar{z}} \quad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Distinguiamos en función del valor de  $z \in \mathbb{C}$ :

- Si  $z \neq 0$ :

Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Además, sabemos que:

$$h(z) = \frac{f(z)}{z^2}$$

Supuesto que  $f$  es derivable en  $z$ , entonces  $h$  también lo es. Pero se ha visto que  $h$  no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}$ . Por tanto,  $f$  no es derivable en  $z$ .

- Si  $z = 0$ :

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 e^{\bar{z}}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z e^{\bar{z}} = 0.$$

Por tanto,  $f$  es derivable en 0 y no lo es en ningún otro punto de  $\mathbb{C}$ .

Para  $g$ , distinguimos también en función del valor de  $z \in \mathbb{C}$ . Para ello, veamos antes dónde se anula el seno:

$$\operatorname{sen}(x+iy) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \\ \cos x \sinh y = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \sinh y = 0 \end{array} \right\} \iff x+iy \in \pi\mathbb{Z}$$

Distinguimos por tanto en función de si  $z \in \pi\mathbb{Z}$  o no:

- Si  $z \notin \pi\mathbb{Z}$ :

$$f(z) = \frac{g(z)}{\operatorname{sen} z}$$

Si  $g$  es derivable en  $z$ , entonces  $f$  también lo es. Pero se ha visto que  $f$  no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}^*$ . Por tanto,  $g$  no es derivable en  $z$ .

- Si  $z = 0$ :

Como  $f$  es derivable en 0, también lo es  $g$  en 0, con:

$$g'(0) = \cos(0)f(0) + \operatorname{sen}(0)f'(0) = f(0)$$

*Observación.* Este caso no habría por qué distinguirlo (puesto que está incluido en el siguiente), pero se incluye por ser el más directo.

- Si  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $z = 2k\pi$ :

$$\frac{g(z) - g(2k\pi)}{z - 2k\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi\}$$

Por la definición formal de derivada del seno en  $2\pi k$ , se tiene que:

$$1 = \cos(2\pi k) = \lim_{z \rightarrow 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(2\pi k)}{z - 2\pi k} \quad \lim_{z \rightarrow 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2\pi k}$$

Por tanto:

$$g'(2\pi k) = \lim_{z \rightarrow 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \rightarrow 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow 2\pi k} f(z) = f(2\pi k)$$

- Si  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $z = (2k + 1)\pi$ :

$$\frac{g(z) - g((2k + 1)\pi)}{z - (2k + 1)\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - (2k + 1)\pi} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{(2k + 1)\pi\}$$

Por la definición formal de derivada del seno en  $(2k + 1)\pi$ , se tiene que:

$$-1 = \cos((2k+1)\pi) = \lim_{z \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}((2k + 1)\pi)}{z - (2k + 1)\pi} \quad \lim_{z \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - (2k + 1)\pi}$$

Por tanto:

$$g'((2k+1)\pi) = \lim_{z \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow (2k+1)\pi} f(z) = -f((2k+1)\pi)$$

Por tanto,  $g$  es derivable en  $z$  si y solo si  $z \in \pi\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 3** (1 punto). Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2} dz.$$

Definimos la función  $f$  como:

$$\begin{aligned} f : D(0, 1/2) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\cos(z)}{(z-2)^2} \end{aligned}$$

Como  $f$  es racional,  $f \in \mathcal{H}(D(0, 1/2))$ . Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

**Ejercicio 4** (3 puntos). Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $a \neq b$  y sea  $R > 0$  de modo que  $R > \max\{|a|, |b|\}$ . Probar que, si  $f$  es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b) + B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

- Para  $z = a$ :  $1 = A(a-b) \implies A = \frac{1}{a-b}$ .
- Para  $z = b$ :  $1 = B(b-a) \implies B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$ .

Por tanto, la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{1}{a-b} \left( \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{a-b} (2\pi i f(a) - 2\pi i f(b)) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

donde  $(*)$  se debe a que la función  $f(z)$  es entera y que  $a, b \in D(0, R)$ , por lo que se puede aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función  $f(z)$ .

Sea ahora  $f$  entera y acotada. Entonces,  $\exists M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| &\leq \frac{M}{|z-a||z-b|} \leq \frac{M}{||z| - |a|| |z| - |b||} \leq \frac{M}{|R - |a|| |R - |b||} \leq \\ &\leq \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} \quad \forall z \in C(0, R)^* \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $z \in C(0, R)^*$ , por lo que  $|z| = R$ ; y que  $R > \max\{|a|, |b|\}$ , por lo que  $R - |a| > 0$  y  $R - |b| > 0$ . Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| &\leq \int_{C(0,R)} \left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| dz \\ &\leq 2\pi R \cdot \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} = \frac{2\pi MR}{(R - |a|)(R - |b|)} \end{aligned}$$

Como la anterior expresión es válida para todo  $R \in \mathbb{R}^+$  tal que  $R > \max\{|a|, |b|\}$ , podemos hacer tender  $R \rightarrow \infty$ . Por el Lema del Sándwich, se tiene que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$



Por la expresión anterior a la que habíamos llegado, se tiene que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Por la unicidad del límite, se tiene que:

$$f(b) = f(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Por tanto,  $f$  es constante.

**Ejercicio 5** (Extra: 1.5 puntos). Sea  $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$  y sean  $g, g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$  en cada compacto de  $\Omega$  si, y sólo si, para cada  $a \in \Omega$  existe un entorno de  $a$  en el que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$ .

Demostramos por doble implicación:

$\Rightarrow$ ) Fijado  $a \in \Omega$ , por ser  $\Omega$  abierto  $\exists r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $a \in D(a, r) \subset \Omega$ . Consideramos ahora  $\overline{D}(a, r/2)$  compacto, luego  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$  en  $\overline{D}(a, r/2)$ . Consideramos por tanto  $D(a, r/4)$ , y vemos que este es un entorno de  $a$  en el que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$ , demostrando así lo pedido.

$\Leftarrow$ ) Sea  $K \subset \Omega$  compacto. Para cada  $a \in K \subset \Omega$ ,  $\exists N_a$  entorno de  $a$  en el que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$ . Por ser  $N_a$  un entorno de  $a$ ,  $\exists U_a \subset N_a$  abierto con  $a \in U_a$ , y  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $g$  en  $U_a$ .

Consideramos ahora el recubrimiento de  $K$  por abiertos dado por  $K \subset \bigcup_{a \in K} U_a$ . Por ser  $K$  compacto,  $\exists I \subset K$  *finito* tal que  $K \subset \bigcup_{a \in I} U_a$ . Ahora, para cada  $a \in I$ , como la convergencia en  $U_a$  es uniforme, aplicamos la definición:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N_a \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_a, |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in U_a$$

Por tratarse de una cantidad finita, podemos considerar el mínimo:

$$N = \min\{N_a : a \in I\}$$

Por tanto, para cada  $a \in I$ , se tiene que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in U_a$$

Como  $K \subset \bigcup_{a \in I} U_a$ , se tiene que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in K$$

Por tanto, se tiene la convergencia uniforme en  $K$ .