Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

El presente documento es un resumen del microcredencial de "Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos", que recoge los principales conceptos que se impartieron en el mismo. Si cursa el microcredencial se recomienda ver los recursos proporcionados por el profesorado. Si está cursando actualmente la asignatura de "Lógica y Métodos Discretos" del grado de Informática, los dos primeros capítulos pueden serle de gran ayuda.

A lo largo del curso trabajaremos en $\mathbb{Z}_2$, por lo que se recomienda al lector repasar los apuntes de Álgebra I en caso de no estar familiarizado con dicho cuerpo.

1. Lógica Proposicional

Consideraremos un conjunto finito de proposiciones atómicas, que serán para nosotros enunciados indivisibles. Nos interesará la veracidad o falsedad de cada una de estas proposiciones. Consideraremos sobre estas las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. De esta forma, somos capaces de definir lo que es una proposición en nuestro lenguaje.

Definición 1.1 (Proposición)**.** Definimos las proposiciones de forma recursiva[1]:

1. Las proposiciones atómicas son proposiciones.

2. Si α y β son proposiciones, también lo son:

$$\neg\alpha,\ \alpha\wedge\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\rightarrow\beta,\ \alpha\leftrightarrow\beta$$

3. No hay más proposiciones que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Una vez definida lo que es una proposición, pasamos a lo que nos interesa, asignar un valor de verdad o de falsedad a cada una de las proposiciones que nos encontremos. Para ello, consideraremos una aplicación del conjunto de las proposiciones en $\mathbb{Z}_2$, e interpretaremos el valor de 0 como falso y el valor de 1 como verdad.

Definición 1.2 (Interpretación)**.** Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las proposiciones de un lenguaje proposicional, una interpretación sobre el mismo es una aplicación $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $I(\neg a) = 1 + I(a)$.

2. $I(a \wedge b) = I(a)I(b)$.

3. $I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b)$.

4. $I(a \rightarrow b) = 1 + I(a) + I(a)I(b)$.

5. $I(a \leftrightarrow b) = 1 + I(a) + I(b)$.

Para cualesquiera proposiciones $a, b \in \mathcal{P}$.

Definición 1.3. Sea α y β dos proposiciones de forma que $I(\alpha) = I(\beta)$ para cualquier interpretación I, entonces escribiremos que $\alpha \equiv \beta$.

[1] Algo que será habitual en este curso.

Definición 1.4. Sea α una proposición:

- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 1$, diremos que p es **satisfacible**.
- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 0$, diremos que p es **refutable**.
- Si $I(\alpha) = 1$ para cualquier interpretación I, diremos que p es una **tautología**.
- Si $I(\alpha) = 0$ para cualquier interpretación I, diremos que p es una **contradicción**.

1.1. Semántica

Definición 1.5 (Consecuencia lógica)**.** Sea $\Gamma \cup \{p\}$ un conjunto de proposiciones, decimos que p es consecuencia lógica de Γ (notado por $\Gamma \vDash p$), si dada una interpretación I, siempre que se tenga que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, entonces se tiene que $I(p) = 1$.

Notación. Por comodidad, si p es una proposición de forma que $\emptyset \vDash p$, entonces notaremos:

$$\vDash p$$

Notemos que en este caso p es una tautología, ya que estamos diciendo que $I(p) = 1$ para cualquier[2] interpretación I.

Proposición 1.1. *Se verifica que* $\Gamma \vDash p$ *si y solo si* $(1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

$\Longrightarrow$) Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces tenemos el resultado.
- En caso contrario, tendremos que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$. En dicho caso, como $\Gamma \vDash p$, se tendrá que $I(p) = 1$, por lo que:

$$1 + I(p) = 0 \Longrightarrow (1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$$

$\Longleftarrow$) Sea I una interpretación que verifica $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como $\mathbb{Z}_2$ es un dominio de integridad, de $(1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$ deducimos que $I(p) + 1 = 0$, por lo que $I(p) = 1$ y entonces se tiene que $\Gamma \vDash p$.

$\square$

Teorema 1.2 (de la deducción)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *un conjunto de proposiciones, equivalen:*

[2]Cualquiera que haga ciertos todos los elementos del vacío.

1. $\Gamma \models \alpha \to \beta$

2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) $\Longrightarrow$ 2) Sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$ y que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces (por 1) deducimos que $I(\alpha \to \beta) = 1$, luego:

$$1 = I(\alpha \to \beta) = 1 + \cancelto{1}{I(\alpha)} + \cancelto{1}{I(\alpha)} I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta)$$

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$:

- Si $I(\alpha) = 0$, entonces:

  $$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1$$

  Por lo que se tiene 1.

- Si $I(\alpha) = 1$, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $I(\beta) = 1$, por lo que:

  $$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + 1 = 1$$

□

Ejemplo. Demostraremos ahora que varias proposiciones son tautologías:

$\models \alpha \to \alpha$

Por el Teorema de la deducción (1.2), $\models \alpha \to \alpha$ es equivalente a ver que $\{\alpha\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$, tenemos que $I(\alpha) = 1$.

$\models \alpha \to (\beta \to \alpha)$

Por el Teorema de la deducción, es equivalente ver que $\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$; que nuevamente por el Teorema de la deducción es equivalente ver que $\{\alpha, \beta\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$, entonces $I(\alpha) = 1$.

$\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

Por el Teorema de la deducción aplicado 3 veces, es equivalente ver que:

$$\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha\} \models \gamma$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = I(\alpha \to \beta) = I(\alpha)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&1 = I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta) \Longrightarrow I(\beta) = 1 \\
&1 = I(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta \to \gamma) \\
&\quad = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)(1 + I(\beta) + I(\beta)I(\gamma)) = 1 + 1 + 1(1 + 1 + I(\gamma)) \\
&\quad = I(\gamma) \Longrightarrow \underline{I(\gamma) = 1}
\end{aligned}$$

$\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$

Por el Teorema de la deducción aplicado 2 veces, es equivalente ver que:

$$\{\neg\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha \to \beta\} \models \alpha$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\neg\alpha \to \neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\neg\beta)$$
$$1 = I(\neg\alpha \to \beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta)$$

Entonces (sumando):

$$0 = I(\neg\alpha \to \neg\beta) + I(\neg\alpha \to \beta) = I(\neg\alpha)(I(\neg\beta) + I(\beta)) \overset{(*)}{=} I(\neg\alpha)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $I(\neg\beta) = 1 + I(\beta) \implies I(\neg\beta) + I(\beta) = 1$.

Como $I(\neg\alpha) = 0$, se tiene que $I(\alpha) = 1$, como queríamos demostrar.

Definición 1.6. Sea Γ un conjunto de proposiciones, decimos que Γ es **inconsistente** si para toda interpretación I existe $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$.

Proposición 1.3. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de proposiciones, equivalen:*

1. $\Gamma \models \alpha$.
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es inconsistente.*

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

$1) \implies 2)$ Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces Γ es inconsistente, de donde $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ también lo es.
- Si $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, aplicando que $\Gamma \models \alpha$ deducimos que $I(\alpha) = 1 \implies I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha) = 0$, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

$2) \implies 1)$ Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente, deducimos que $I(\neg\alpha) = 0$, luego $I(\alpha) = 1$.

□

1.2. Demostraciones

Definición 1.7 (Demostración)**.** Sean $\mathcal{A}$ y $\Gamma \cup \{p\}$ dos conjuntos de proposiciones (nos referiremos al conjunto $\mathcal{A}$ como "conjunto de axiomas" y a Γ como "conjunto de hipótesis"), una demostración de p a partir de Γ (notado por $\Gamma \vdash p$) es una secuencia de proposiciones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de forma que $\alpha_n = p$ y se verifica para todo i menor o igual que n:

- bien $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$.
- bien $\exists k, j < i$ siendo $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$.

Notación. Si p es una proposición de forma que $\emptyset \vdash p$, podremos notar $\vdash p$ y diremos que p es un teorema.

Ejemplo. Como ejemplo demostración, veamos que $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$. Para ello, consideramos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha \\
\alpha_2 &= \alpha \to \beta \\
\alpha_3 &= \beta
\end{aligned}$$

Como vemos, es una demostración de β a partir de $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ porque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son proposiciones, $\alpha_3 = \beta$ y:

- $\alpha_1 \in \Gamma$.
- $\alpha_2 \in \Gamma$.
- $1, 2 < 3$ y $\alpha_2 = \alpha_1 \to \alpha_3$.

Notación. Para abreviar las demostraciones, a partir de ahora no daremos una secuencia numerada de proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, sino que numeraremos los pasos de la demostración y entenderemos que para formalizarla totalmente debemos coger como α_i el paso $i-$ésimo de la demostración.

Más aún, para no pararnos a comprobar las condiciones abstractas que han de cumplir cada una de las propiedades de la demostrción, incluiremos junto a los pasos de la demostración un comentario sobre por qué dicho paso es válido.

Con esta notación, la demostración de $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$ quedaría de la forma:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \to \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens de 1 y 2.

Finalmente, como conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas, consideraremos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$$

Con:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{\alpha \to (\beta \to \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\} \\
\mathcal{A}_2 &= \{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \text{ son proposiciones}\} \\
\mathcal{A}_3 &= \{(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Ejemplos de algunas demostraciones:

- $\{\alpha\} \vdash \beta \to \alpha$
  1. $\alpha \to (\beta \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$
  2. α es una hipótesis

3. $\beta \to \alpha$ Modus ponens de 1 y 2.

- $\vdash \alpha \to \alpha$

  1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)) \in \mathcal{A}_2$
  2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$
  3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ Modus ponens de 1 y 2
  4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \in \mathcal{A}_2$
  5. $\alpha \to \alpha$ Modus ponens de 3 y 4

Teorema 1.4 (de Herbrand o de la deducción)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *un conjunto de proposiciones, equivalen:*

1. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) $\Longrightarrow$ 2) Como $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, podemos construir una demostración de n pasos de $\alpha \to \beta$ a partir de Γ. En cuyo caso, podemos añadir 2 pasos más a su demostración, de forma que:

1. ...
   ⋮

n. $\alpha \to \beta$

$n+1$. α es hipótesis

$n+2$. β por Modus ponens de n y $n+1$

Como en los n primeros pasos solo hemos usado como hipótesis Γ, hemos conseguido demostrar en $n+2$ pasos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, podemos obtener una demostración β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de n pasos: $\beta_1, \dots, \beta_n$ (con $\beta_n = \beta$). Por inducción sobre n (el número de pasos de la demostración):

- <u>Si $n = 1$</u>: Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gracias a la demostración $\beta_1 = \beta$, distinguimos casos:

  (a) $\beta_1 \in \mathcal{A}$. En dicho caso, podemos considerar la demostración:
     1. $\beta_1 \in \mathcal{A}$
     2. $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) \in \mathcal{A}_1$
     3. $\alpha \to \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2

     Y con esto tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

  (b) $\beta_1 \in \Gamma$. En dicho caso, podemos considerar una demostración similar al caso anterior:
     1. $\beta_1 \in \Gamma$
     2. $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) \in \mathcal{A}_1$

3. $\alpha \to \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2

Y con esto también tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

(c) $\beta_1 = \alpha$. En dicho caso, podemos copiar la demostración de $\vdash \beta \to \beta$ del ejemplo anterior, llegando a que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

- En el paso de inducción, supuesto que de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_m$ podemos deducir que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_m$ para todo $m \leqslant n$, suponemos ahora que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_{n+1}$ y queremos ver que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_{n+1}$.

  En dicho caso, supuesto que $\beta_{m+1} \notin \mathcal{A} \cup \Gamma \cup \{\alpha\}$ (ya que si no la demostración es análoga al caso $n = 1$), la única posibilidad es que hayan de existir $i, j < n + 1$ con $\beta_i = \gamma$ y $\beta_j = \gamma \to \beta_{m+1}$.

  Si ahora consideramos los i primeros pasos de la demostración, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ y si consideramos los j primeros pasos, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \to \beta_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, como $i, j < n + 1$, tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ y que $\Gamma \vdash \alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})$. En este momento, podemos realizar la demostración (con hipótesis Γ):

  1. ...

     $\vdots$

  p. $\alpha \to \gamma$

  $p+1$. ...

  $\vdots$

  q. $\alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})$

  $q+1$. $(\alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta_{n+1})) \in \mathcal{A}_2$

  $q+2$. $(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta_{n+1})$ por Modus ponens de q y $q+1$.

  $q+3$. $\alpha \to \beta_{n+1}$ por Modus ponens de p y $q+2$.

$\square$

1.2.1. Resultados útiles a la hora de realizar demostraciones

Proposición 1.5 (regla de reducción al absurdo clásica). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones: si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.*

Demostración. Supuesto que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, por el Teorema de Herbrand (1.4), se tiene que $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$ y que $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$. En dicho caso:

1. ...

$\vdots$

p. $\neg\alpha \to \neg\beta$

$p+1$. ...

$\vdots$

q. $\neg\alpha \to \beta$

$q+1$. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) \in \mathcal{A}_3$

$q+2$. $((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ por Modus ponens de $q+1$ y p.

$q+3$. α por Modus ponens de $q+2$ y q.

Como desde el paso 1 hasta el q solo hemos usado como hipótesis Γ, deducimos que $\Gamma \vdash \alpha$. □

Proposición 1.6 (leyes de silogismo o transitividad de la flecha)**.** *Sean α, β y γ proposiciones, se verifican:*

1. $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
2. $\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

Demostración. Demostraremos la primera y dejamos la segunda como ejercicio. Para ello, aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, llegamos a que 1 es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con la demostración:

1. $\alpha \to \beta$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. β por Modus ponens de 1 y 2
4. $\beta \to \gamma$ es una hipótesis
5. γ por Modus ponens de 3 y 4

□

Corolario 1.6.1 (regla del silogismo)**.** *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones, si $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.*

Proposición 1.7 (ley de conmutación de premisas)**.** *Sean α, β y γ proposiciones:*

$$\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con:

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. $\beta \to \gamma$ por Modus ponens de 1 y 2
4. β es una hipótesis
5. γ por Modus ponenes de 3 y 4

□

Corolario 1.7.1 (regla de conmutación de premisas)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *un conjunto de proposiciones, si* $\Gamma \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$*, entonces* $\Gamma \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$*.*

Proposición 1.8 (ley de la doble negación)**.** *Sea* α *una proposición:*

$$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, ya que:

1. $\{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$
2. $\{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$

Luego concluimos que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$. □

Proposición 1.9 (ley débil de la doble negación)**.** *Sea* α *una proposición:*

$$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, con lo que partimos que $\{\alpha, \neg\neg\neg\alpha\}$ y tenemos que demostrar una proposición y su negación. Para ello:

1. $\neg\neg\neg\alpha \to \alpha$ por la ley de la doble negación
2. $\neg\neg\neg\alpha$ es una hipótesis
3. α por Modus ponens de 1 y 2
4. $\neg\alpha$ es una hipótesis

Concluimos por la regla de la reducción al absurdo que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$. □

2. Lógica de Primer Orden

Es necesario introducir ahora lenguajes en los que podamos cuantificar cosas. Como primer ejemplo, si sabemos que "Todo hombre es mortal" y que "Sócrates es un hombre", nos gustaría deducir que, entonces, "Sócrates es mortal". Sin embargo, para esto hemos de poder cuantificar, cosa que no es posible con los lenguajes proposicionales pero sí con los lenguajes de primer orden.

Los lenguajes de primer orden estarán formados por:

- Constantes: $c_1, c_2, \ldots, a, b, c, \ldots$
- Variables: $x_1, x_2, \ldots, x, y, z, \ldots$
- Símbolos de función: $f_1, f_2, \ldots, f, g, h, \ldots$
- Símbolos de relación: $R_1, R_2, \ldots, R, S, T, \ldots$
- Conectivas lógicas: $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Cuantificadores: $\forall$, $\exists$

A los conjuntos de todas las constantes, de todas la variables y de todos los símbolos de función los notaremos por $Cons(\mathcal{L}), Var(\mathcal{L}), Fun(\mathcal{L})$, si $\mathcal{L}$ es nuestro lenguaje de primer orden.

Notación. En otros libros o contextos, en vez de denotar a los símbolos de función o variables con una letra que pueda llevar o no superíndice, estos las denotan con un superíndice:

- $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots$
- $R_1^{m_1}, R_2^{m_2}, \ldots$

En este caso, el superíndice indica la ariedad de la función o relación. Por ejemplo, si consideramos f^3, tenemos un símbolo de función que se aplica a 3 variables.

Definición 2.1 (Término)**.** Un término es:

1. Cualquier constante.
2. Cualquier variable.
3. Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función $n-$ario, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.

4. No hay más términos que los que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todos los términos de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ lo denotamos por $Term(\mathcal{L})$.

Ejemplo.

- $f(x, f(x, y))$ es un término.
- $f(x, f(x))$ no es un término, ya que usamos un mismo símbolo de función, f, para denotar dos objetos: una función unaria y una función binaria.

Definición 2.2 (Fórmulas atómicas)**.** Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y R es un símbolo de relación $n-$ario, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica (o simplemente, un átomo).

Definición 2.3 (Fórmulas)**.** Son fórmulas:

1. Las fórmulas atómicas.
2. Si φ y ψ son fórmulas, también lo son:
$$\neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \to \psi,\ \varphi \leftrightarrow \psi$$
3. Si x es una variable y φ es una fórmula, también lo son: $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$.
4. No hay más fórmulas que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todas las fórmulas de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ lo denotamos por $Form(\mathcal{L})$.

Definición 2.4. Una ocurrencia de una variable en una fórmula es una aparición de su escritura.

- En la fórmula $\forall x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\forall x$.
- En la fórmula $\exists x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\exists x$.

Diremos que x se encuentra cuantificada al ver $\forall x$ o $\exists x$.
Diremos que una ocurrencia de una variable x es ligada si aparece cuantificada o en el radio de acción de $\forall x$ o de $\exists x$.
Finalmente, diremos que una variable es libre si no aparece ligada. Si φ es una fórmula en la que las variables $x_1, \ldots, x_n$ aparecen libres, será usual denotar:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Que no debe coincidirse con un término de una función o relación $n-$aria, ya que φ no es ni un símbolo de función o relación, sino una fórmula.

Ejemplo. En la siguiente fórmula:

$$\forall x(\exists y R(x, y) \to Q(y))$$

- x aparece cuantificada en su primera ocurrencia.

- y aparece cuantificada en su primera ocurrencia.
- x aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece como variable libre en su tercera ocurrencia.

Definición 2.5 (Sentencia)**.** Una sentencia es una fórmula sin ocurrencias de variables libres.

2.1. Semántica

Trataremos de generalizar el concepto de "interpretación", ya visto para lenguajes proposicionales. Para ello, será necesario primero definir los conceptos de "estructura" y de "asignación".

Definición 2.6 (Estructura)**.** Una estructura ε es una cuádrupla

$$\varepsilon = (D, \{c_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}, \{R_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}})$$

de forma que:

- D un conjunto no vacío al que llamamos <u>universo</u> o <u>dominio</u>.
- A cada constante c_i de $\mathcal{L}$ le corresponde un elemento c_i^ε de D.
- A cada símbolo de función f_i de $\mathcal{L}$ le corresponde una función $f_i^\varepsilon : D^n \to D$.
- A cada símbolo de relación R_i de $\mathcal{L}$ le corresponde una aplicación $R_i^\varepsilon : D^m \to \mathbb{Z}_2$, de forma que $R_i^\varepsilon(c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon) = 1$ si c_1^ε y c_2^ε están relacionados y 0 en caso contrario.

Definición 2.7 (Asignación)**.** Una asignación v es una aplicación $v : Var(\mathcal{L}) \to D$. Dada una asignación v, podremos extenderla a $v' : Term(\mathcal{L}) \to D$ de la forma:

$$v'(t) = \begin{cases} c^\varepsilon & \text{si } t = c \text{ una constante} \\ v(x) & \text{si } t = x \text{ una variable} \\ f^\varepsilon(v'(t_1), \dots, v'(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Definición 2.8 (Interpretación)**.** Una interpretación es una tupla (ε, v) con ε una estructura y v una asignación que tiene asociada una aplicación[1] $I_\varepsilon^v : Form(\mathcal{L}) \to \mathbb{Z}_2$ que cumple para cualesquiera fórmulas φ y ψ:

1. $I^v(\neg\varphi) = 1 + I^v(\varphi)$.
2. $I^v(\varphi \wedge \psi) = I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
3. $I^v(\varphi \vee \psi) = I^v(\varphi) + I^v(\psi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
4. $I^v(\varphi \to \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.

[1]A la que próximamente denotaremos simplemente como I^v, por simplicidad, entendiendo que la estructura ε viene dada por el contexto.

5. $I^v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\psi)$.

6. $I^v(\forall x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } a \in D,\ I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

7. $I^v(\exists x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } a \in D \text{ con } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Siendo:

$$v(x \mid a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ a & \text{si } y = x \end{cases}$$