

Enviado José Juan Castro

# Análisis

# Matemático II

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024



# Índice general

<b>1. Ejercicios Voluntarios</b>	<b>5</b>
<b>2. Prácticas</b>	<b>9</b>
2.1. Sucesiones de funciones . . . . .	9
2.2. Series de funciones . . . . .	20
2.3. Cálculo de Integrales Simples . . . . .	31
2.3.1. Repaso teórico . . . . .	31
2.3.2. Ejercicios . . . . .	35
2.4. Teorema de Fubini . . . . .	49
2.4.1. Repaso teórico . . . . .	49
2.4.2. Ejercicios . . . . .	50
2.5. Teorema de Cambio de Variable . . . . .	62
2.5.1. Repaso teórico . . . . .	62
2.5.2. Ejercicios . . . . .	64



# 1. Ejercicios Voluntarios

**Teorema 1.1** (Aproximación de Weierstrass). *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces, existe una sucesión de polinomios  $\{P_n\}$  de manera que  $\{P_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Definimos la sucesión de polinomios de Bernstein como:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Tenemos claramente que  $k, n-k \in \mathbb{N}$ , por lo que  $B_n(f)(x)$  es un polinomio. Veamos ahora que  $\{B_n(f)\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ . Para ello, usaremos el siguiente lema relacionado con el binomio de Newton:

**Lema 1.2.** *Para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que:*

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1. \\ 2. \quad & \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Demostramos cada uno de los apartados por separado:

1. Usamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

En concreto, para  $p = x$  y  $q = 1 - x$ , se tiene que:

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.2)$$

2. Derivando la fórmula del binomio de Newton (Ecuación 1.1) respecto de  $p$ , se tiene que:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k p^{k-1} q^{n-k} \implies p(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} \cdot p^k q^{n-k} \quad (1.3)$$

Derivando ahora la Ecuación 1.3 respecto de  $p$ , se tiene que:

$$(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$$

Multiplicando todo por  $p$  y dividiendo por  $n$ , se tiene que:

$$\frac{p}{n} \cdot (p+q)^{n-1} + \frac{p^2}{n} (n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \cdot p^k q^{n-k} \quad (1.4)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x^2 - 2x \cdot \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} x^2 - 2x \cdot x(x+1-x)^{n-1} + \frac{x}{n} \cdot (x+1-x)^{n-1} + \frac{x^2}{n} (n-1)(x+1-x)^{n-2} = \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n} (n-1) = -x^2 + \frac{x}{n} + x^2 - \frac{x^2}{n} = \frac{x-x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  se han usado las Ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.4.

□

Fijado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [0, 1]$ , la acotación entonces la obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \cdot 1 \right| \stackrel{\text{Ec. 1.2}}{=} \\ &\stackrel{\text{Ec. 1.2}}{=} \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$



donde en la última desigualdad se usó la desigualdad triangular y se quitó el valor absoluto ya que  $x, 1 - x > 0$ . Ahora, usamos el Teorema de Heine para afirmar que, como  $f$  es continua en  $[0, 1]$  (cerrado y acotado), es uniformemente continua en  $[0, 1]$ . Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si } |x - y| < \delta \quad \text{entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Fijado  $\varepsilon > 0$ , consideramos el  $\delta$  dado por la continuidad uniforme para  $\varepsilon/2$ . Consideramos el siguiente conjunto:

$$F = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}$$

Veamos qué ocurre en los puntos de  $F$  y en los que no están en  $F$ :

- Si  $k \in F$ , entonces  $|x - k/n| < \delta$ , por lo que  $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$ .
- Si  $k \notin F$ , el razonamiento es algo más complejo. Por el Teorema de Weierstrass, sabemos que  $f$  es acotada en  $[0, 1]$ , es decir, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Además, como  $k \notin F$ , se tiene que:

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \implies \left( x - \frac{k}{n} \right)^2 \geq \delta^2 \implies \frac{\left( x - \frac{k}{n} \right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

Uniando ambos resultados, se tiene que:

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2M \leq 2M \left( \frac{\left( x - \frac{k}{n} \right)^2}{\delta^2} \right)$$

Por tanto, en función de si  $k \in F$  o no, tenemos que:

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k \in F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\ &\quad + \sum_{k \notin F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k \in F} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \notin F} 2M \frac{\left( x - \frac{k}{n} \right)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \stackrel{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \quad \forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  se usó el Lema 1.2 y en  $(**)$  se usó que la función  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x(1-x) = x - x^2$  es una parábola con imagen  $g([0, 1]) = [0, 1/4]$ .

Por tanto, buscamos que  $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ :

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon\delta^2}{M} \iff n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

Sea  $m = E\left(\frac{M}{\varepsilon\delta^2}\right) + 1$  el primer natural que cumple la condición. Entonces, para  $n \geq m$ , se tiene que:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

queda así demostrado que  $\{B_n(f)\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ .  $\square$

**Definición 1.1.** Un monstruo de Weierstrass es una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ningún punto.

**Ejercicio.** Encontrar un monstruo de Weierstrass y demostrar que lo es.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos((n!)^2 x)$$

## 2. Prácticas

### 2.1. Sucesiones de funciones

**Ejercicio 2.1.1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + nx)}{1 + nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de la sucesión  $\{f_n\}$  en el intervalo  $[0, \rho]$  y en la semirrecta  $[\rho, +\infty[$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para  $x = 0$ , tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en 0. Para  $x \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + nx)}{1 + nx} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1 + nx}}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx} = 0$$

En resumen, tenemos que  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función  $f_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ , estudiamos su derivada:

$$f'_n(x) = \frac{\frac{n}{1+nx} \cdot (1 + nx) - \log(1 + nx) \cdot n}{(1 + nx)^2} = \frac{n - \log(1 + nx) \cdot n}{(1 + nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $f_n$  son:

$$f'_n(x) = 0 \iff \log(1 + nx) = 1 \iff 1 + nx = e \iff x = \frac{e - 1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in [0, \frac{e-1}{n}]$ , entonces  $f'_n(x) > 0$ , por lo que  $f_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in [\frac{e-1}{n}, +\infty[$ , entonces  $f'_n(x) < 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:

- Si  $n < \frac{e-1}{\rho}$   $\left(\rho < \frac{e-1}{n}\right)$ , entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$  (podría haber tomado cualquier valor  $x_n \in [0, \rho]$ , ya que no afecta al límite).
- Si  $n \geq \frac{e-1}{\rho}$   $\left(\rho \geq \frac{e-1}{n}\right)$ , entonces  $x_n = \frac{e-1}{n} \in [0, \rho]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \rho]$ . Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \rightarrow \frac{1}{e}$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

*Observación.* También sirve tomar  $x_n = \frac{1}{n}$ , y tendríamos que  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$ .

Para el caso de la semirrecta  $[\rho, +\infty[$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho > \frac{e-1}{m}$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\rho > \frac{e-1}{n}$ . Por tanto, tenemos que  $[\rho, +\infty[ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty[$ , por lo que  $f_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$ . Por tanto, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(\rho) \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{f_n(p)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

**Ejercicio 2.1.2.** Probar que la sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ , donde  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de  $x$ :

- Si  $|x| < 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$1 \leq 1 + x^{2n} \leq 1 + 1 = 2 \implies 1 \leq g_n(x) \leq \sqrt[n]{2}$$

Como  $\{\sqrt[n]{2}\} \rightarrow 1$ , por el Lema del Sándwich tenemos que  $\{g_n(x)\} \rightarrow 1$ .

- Si  $|x| = 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

Por tanto,  $\{g_n(x)\} \rightarrow 1$ .

- Si  $|x| > 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}} + 1$$

Como  $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n(x)\} \rightarrow x^2$ .

Por tanto, tenemos que  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \max\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para la convergencia uniforme, en primer lugar tenemos en cuenta que:

$$\sqrt[n]{1+x^{2n}} \geq \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2, \sqrt[n]{1} = 1 \implies \sqrt[n]{1+x^{2n}} \geq \max\{1, x^2\} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, buscamos acotar  $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x)$ . Para ello, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , usaremos la función

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto t^{1/n} = \sqrt[n]{t} \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en todo su dominio, y su derivada es:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot t^{n-1/n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Por el Teorema del valor medio, tenemos que para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ , con  $t_1 < t_2$ , existe un  $c \in ]t_1, t_2[$  tal que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(c) \cdot (t_2 - t_1)$$

Diferenciamos ahora si  $|x| \leq 1$  o  $|x| > 1$ :

- Si  $|x| \leq 1$ , aplicamos el Teorema del valor medio a la función  $\varphi_n$  en el intervalo  $[1, 1+x^{2n}]$ , obteniendo que existe un  $c \in ]1, 1+x^{2n}[$  tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(1) = \varphi'_n(c) \cdot (1+x^{2n} - 1) = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}}$$

Como  $|x| \leq 1$ , tenemos que  $|x^{2n}| \leq 1$ ; y como  $c > 1$  y  $\frac{n-1}{n} > 1$ , tenemos que  $c^{n-1/n} > 1$ , por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \quad \forall x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}$$

- Si  $|x| > 1$ , aplicamos el Teorema del valor medio a la función  $\varphi_n$  en el intervalo  $[x^{2n}, 1+x^{2n}]$ , obteniendo que existe un  $d \in ]x^{2n}, 1+x^{2n}[$  tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \varphi'_n(d) \cdot (1+x^{2n} - x^{2n}) = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}}$$

Como  $|x| > 1$ , tenemos que  $|x^{2n}| > 1$ , por tanto,  $d > 1$ . Como también se tiene que  $\frac{n-1}{n} > 1$ , tenemos que  $d^{n-1/n} > 1$ , por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados se tiene que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.1.3.** Sea  $\{h_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$h_n(x, y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{h_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ , pero no converge uniformemente en  $\mathbb{R}^2$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto,  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}^2$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$ , como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\max\{|x|, |y|\} < M$ . De esta forma, para todo  $(x, y) \in A$ , tenemos que:

$$|h_n(x, y)| = \left| \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \right| \leq \frac{M^2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $A$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}^2$ . Tomemos  $x_n = y_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^2$  de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\{h(x_n, y_n)\} \rightarrow \frac{1}{3} \neq 0$ , tenemos que  $\{h_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 2.1.4.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$  si y solo si  $C$  está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$ , distinguimos en función de si  $C$  está acotado o no:

- Si  $C$  está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| < M$  para todo  $x \in C$ . De esta forma, para todo  $x \in C$ , tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\left\{ \frac{M}{n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $C$ .

- Si  $C$  no está acotado, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $x_n \in C$  tal que  $|x_n| > n$ . Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:

$$|f_n(x_n)| = \left| \frac{x_n}{n} \right| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que  $\{f_n(x_n)\}$  no puede converger a 0, por lo que se tiene que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 2.1.5.** Sea  $\{g_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , probar que la sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $[\delta, +\infty[$ , pero no converge uniformemente en  $[0, \delta]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para  $x = 0$ , tenemos que  $g_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ . Para  $x > 0$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} = 0$$

Por tanto,  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:

- Si  $n < \frac{1}{\delta^2}$   $\left( \delta < \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , entonces  $x_n = \delta \in [0, \delta]$ .
- Si  $n \geq \frac{1}{\delta^2}$   $\left( \delta \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , entonces  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \delta]$ . Veamos lo siguiente:

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1 + n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \{g_n(x_n)\} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\{g_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \delta]$ .

Para el caso de la semirrecta  $[\delta, +\infty[$ , estudiamos en primer lugar la monotonía de la función  $g_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ , estudiamos su derivada:

$$g'_n(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{-4n^3x^5 + 4nx}{(1+n^2x^4)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $g_n$  son:

$$g'_n(x) = 0 \iff -4n^3x^5 + 4nx = 0 \iff 4xn(-n^2x^4 + 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ , entonces  $g'_n(x) > 0$ , por lo que  $g_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$ , entonces  $g'_n(x) < 0$ , por lo que  $g_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta > \frac{1}{\sqrt{m}}$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\delta > \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Por tanto, tenemos que  $[\delta, +\infty[ \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$ , por lo que  $g_n$  es decreciente en  $[\delta, +\infty[$ . De esta forma, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(\delta) \quad \forall x \in [\delta, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{g_n(\delta)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $[\delta, +\infty[$ .

**Ejercicio 2.1.6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $h_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como:

$$h_n(x) = n \cos^n x \sin x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , probar que la sucesión  $\{h_n\}$  converge uniformemente en  $[\rho, \pi/2]$ , pero no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son positivos. Considerando fijo  $x \in ]0, \pi/2[$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos^{-n} x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} = 0$$

donde he usado que  $|\cos x| < 1$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ . Por tanto, tenemos que:

$$0 \leq n \cos^n x \sin x \leq n \cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Por el Lema del Sándwich, tenemos que  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $]0, \pi/2[$ .

Sumándole que, en  $x = 0, \pi/2$  se tiene que  $h_n(x) = 0$ , se tiene que  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $[0, \pi/2]$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:



- Si  $n < 1/\rho$  ( $\rho < 1/n$ ), entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$ .
- Si  $n \geq 1/\rho$  ( $\rho \geq 1/n$ ), entonces  $x_n = 1/n \in [0, \rho]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \rho]$ . Veamos lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \left( \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos^n \left( \frac{1}{n} \right) \sin \left( \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{(*)}{=} e^0 \cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite en (\*), hemos tomado en primer lugar el logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left( \frac{1}{n} \right)}{\cos \left( \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\tan \left( \frac{1}{n} \right) = 0$$

Por tanto, como se tiene que  $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\{h_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

Para el caso de  $[\rho, \pi/2]$ , buscamos una acotación.

### Opción 1: Estudiar su monotonía.

Estudiamos en primer lugar la monotonía de la función  $h_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $h_n \in C^\infty ]0, \pi/2[$ , estudiamos su derivada:

$$h'_n(x) = n \left( -n \cos^{n-1} x \sin^2 x + \cos^{n+1} x \right) = n \cos^{n-1} x \left( -n \sin^2 x + \cos^2 x \right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $h_n$  son:

$$h'_n(x) = 0 \iff \cos^2 x = n \sin^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in \left[ 0, \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]$ , entonces  $h'_n(x) > 0$ , por lo que  $h_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \pi/2 \right]$ , entonces  $h'_n(x) < 0$ , por lo que  $h_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho > \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \right)$ , lo cual es posible ya que  $\left\{ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \rightarrow 0$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\rho > \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ . Por tanto, tenemos que  $[\rho, \pi/2] \subset \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \pi/2 \right]$ , por lo que  $h_n$  es decreciente en  $[\rho, \pi/2]$ . Por tanto, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leq h_n(\rho) \quad \forall x \in [\rho, \pi/2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{h_n(\rho)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, \pi/2]$ .

**Opción 2:** Acotación directa.

Tenemos que:

$$0 \leq |h_n(x)| \leq n \cos^n x \leq n \cos^n \rho$$

donde he empleado que, como el coseno en  $[0, \pi/2]$  es decreciente,  $\cos x \leq \cos \rho$  para  $x > \rho$ ; y por ser la potencia de índice  $n$  en  $\mathbb{R}_0^+$  creciente, se tiene que  $\cos^n x \leq \cos^n \rho$ .

Veamos que  $\{n \cos^n \rho\} = \left\{ \frac{n}{\frac{1}{\cos^n \rho}} \right\} \rightarrow 0$ . Tenemos que:

$$\left\{ \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{\cos^{n+1} \rho} - \frac{1}{\cos^n \rho}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\frac{1 - \cos \rho}{\cos^{n+1} \rho}} \right\} = \left\{ \frac{\cos^{n+1} \rho}{1 - \cos \rho} \right\} \rightarrow 0$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos lo pedido.

Por tanto, tenemos que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, \pi/2]$ .

**Ejercicio 2.1.7.** Sea  $\{\varphi_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1 + n|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ , pero no converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + n|x|} = 0$$

Por tanto,  $\{\varphi_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$  acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| < M$  para todo  $x \in C$ . De esta forma, para todo  $x \in C \setminus \{0\}$ , tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{x^2}{1 + n|x|} \right| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, en el caso de que se tenga que  $0 \in C$ , se tiene que  $|\varphi_n(0)| = 0 \leq \frac{M}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En cualquier caso, como se tiene que  $\left\{ \frac{M}{n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $C$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}$ . Tomamos  $x_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}$  de forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + n^2} = 1$$

Como  $\{\varphi_n(n)\} \rightarrow 1 \neq 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.1.8** (Parcial DGIIM 23-24). Se considera la sucesión de funciones  $\{\varphi_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados  $r, \rho \in \mathbb{R}$ , con  $0 < r < 1 < \rho$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{\varphi_n\}$  en los intervalos  $[0, r]$ ,  $[r, \rho]$  y  $[\rho, +\infty[$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de  $x$ :

- Si  $|x| < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{0} + 1} = 0$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función nula en  $[0, 1[$ .

- Si  $|x| > 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + 1} = 1$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función constante 1 en  $]1, +\infty[$ .

- Si  $x = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función constante  $1/2$  en  $\{1\}$ .

Por tanto, de forma directa deducimos que  $\{\varphi_n\}$  no converge uniformemente en  $[r, \rho]$ , ya que a pesar de ser continua para todo  $n \in \mathbb{N}$  (es racional), su función límite no lo es, por lo que no se preserva la continuidad.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $[0, r]$ . Tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \left| \frac{r^n}{1} \right| = r^n \quad \forall x \in [0, r], \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $0 \leq x \leq r < 1$ , y por tanto  $x^n < r^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, como  $\{r^n\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[0, r]$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[\rho, +\infty[$ . Tenemos que:

$$|\varphi_n(x) - 1| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{1+x^n} \right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{\rho^n} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $x \geq \rho > 1$ , y por tanto  $x^n \geq \rho^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, como  $\left\{ \frac{1}{\rho^n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 1 en  $[\rho, +\infty[$ .

**Ejercicio 2.1.9.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = x - x^n \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in [0, 1[$ , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x - x^n = x$$

Fijado  $x = 1$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la continuidad de  $f$  en  $[0, 1]$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$$

Por tanto,  $f$  no es continua en 1. No obstante,  $f_n$  sí es continua en 1 para todo  $n \in \mathbb{N}$  (es un polinomio). Por tanto, se tiene que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 2.1.10.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado un  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{f_n\}$  en  $\mathbb{R}_0^+$  y en  $[0, \rho]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Además, tenemos que  $f_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ . Consideramos la sucesión  $x_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}_0^+$  de forma que:

$$f_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\{f_n(n)\} \rightarrow 1/2 \neq 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[0, \rho]$ . Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{x+n} \right| \leq \frac{\rho}{n} \quad \forall x \in [0, \rho], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $0 \leq x \leq \rho$ . Entonces, como  $\{\frac{\rho}{n}\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[0, \rho]$ .

**Ejercicio 2.1.11.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{f_n\}$  en  $[\rho, \infty[$  y en  $[0, \rho]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Para estudiar la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ , consideramos la sucesión dada por:

- Si  $n < 1/\rho$  ( $\rho < 1/n$ ), entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$ .
- Si  $n \geq 1/\rho$  ( $\rho \geq 1/n$ ), entonces  $x_n = 1/n \in [0, \rho]$ .

Por tanto, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}_0^+$ . Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\text{sen}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\text{sen } 1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \rightarrow \frac{\text{sen } 1}{2} \neq 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[\rho, +\infty[$ . Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + n\rho} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $x \geq \rho$ . Entonces, como sabemos que  $\left\{ \frac{1}{1+n\rho} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, +\infty[$ .

## 2.2. Series de funciones

**Ejercicio 2.2.1.** Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ , siendo:

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Buscaremos aplicar el Test de Weierstrass. Para ello, hemos de acotar  $f_n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar, estudiaremos su monotonía. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f_n$  es derivable en  $\mathbb{R}$  con:

$$f'_n(x) = \frac{n(1+nx^2) - xn \cdot 2xn}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{n(1+nx^2) - 2x^2n^2}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{(1+nx^2) - 2x^2n}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

Tenemos por tanto que hay dos candidatos a extremos relativos,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Estudiaremos la monotonía en cada uno de los intervalos:

- Si  $x \in \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  $f'_n(x) \leq 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente.
- Si  $x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  $f'_n(x) \geq 0$ , por lo que  $f_n$  es creciente.
- Si  $x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$ :  $f'_n(x) \leq 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente.

Para acotar, tenemos en cuenta que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \quad y \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

Sabiendo eso, acotamos en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta la monotonía:

- Si  $x \in \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  

$$0 \geq f_n(x) \geq f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si  $x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  

$$-\frac{1}{2n\sqrt{n}} = f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si  $x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$ :  

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

En cualquier caso, uniendo los tres resultados, tenemos que:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el criterio límite de comparación, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}}$  es convergente por serlo la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ , ( $3/2 > 1$ ). Por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.2.2.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. Para  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\rho > 1$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

Fijado  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $g_n$  es derivable en  $[\rho, +\infty[$  con:

$$g'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^{2x}} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Por tanto, como la primera derivada de  $g_n$  no se anula, tenemos que es estrictamente monótona. Además, como  $n \geq 1$ , tenemos que  $g'_n(x) \leq 0$  para todo  $x \in [\rho, +\infty[$ , por lo que  $g_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$ . Por tanto,

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(\rho) = \frac{1}{n^\rho} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Como la serie  $\sum_{n \geq 1} 1/n^\rho$  es convergente ( $\rho > 1$ ), por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

2. La sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente a la función nula en  $[1, +\infty[$ .

De nuevo, usando que  $g_n$  es decreciente en  $[1, +\infty[$ , tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(1) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Como  $\{1/n\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a la función nula en  $[1, +\infty[$ .

3. La serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  no converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ , y por el Criterio de Cauchy tenemos que esto equivale a que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  sea uniformemente de

Cauchy en  $]1, +\infty[$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q g_n(x) \right| = \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in ]1, +\infty[$$

Por tanto, tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} 1/n$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que sabemos que la serie armónica no converge. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  no converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ .

**Ejercicio 2.2.3.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{ \frac{n!}{(n+1)^n} \right\}$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\} &= \left\{ \frac{c_{n+1}}{c_n} \right\} = \left\{ \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} \right\} = \left\{ \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \right\} = \\ &= \left\{ \left[ \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right\} = \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right\} \rightarrow \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{e} \implies R = e$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-e, e[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-e, e]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = \pm e$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = \pm e$ :

Equivale a ver si la serie  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$  es convergente, con  $x = \pm e$  fijo. Tenemos que:

$$\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x = x \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1}$$



donde hemos usado los cálculos ya realizados. Además, sabemos que el segundo término converge a  $1/e$  y es estrictamente decreciente. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n} \right| = \left| x \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right| > \left| x \cdot \frac{1}{e} \right| = \left| \frac{x}{e} \right| = 1$$

Por tanto, tenemos que la sucesión  $\{|c_nx^n|\}$  es estrictamente creciente, por lo que  $\{c_nx^n\}$  no puede converger a 0. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  no converge en  $x = \pm e$  por no converger a 0 su término general, luego su campo de convergencia es  $J$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Supongamos que la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q c_nx^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow e$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow e} \sum_{n=p+1}^q c_nx^n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con  $x$  tendiendo a  $e$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  diverge por divergir su término general. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  no converge uniformemente en  $J$ .

**Ejercicio 2.2.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n} \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1[$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset ] - 1, 1[$ ; pero no converge uniformemente en  $] - 1, 1[$ .

En  $\mathbb{R}$ , los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Por tanto, se tiene que  $K \subseteq [-\rho, \rho] \subsetneq ] - 1, 1[$ , con  $\rho \in \mathbb{R}$ . Tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1 - x^n} \right| = \frac{|x^n|}{|1 - x^n|} \leq \frac{|x^n|}{1 - |x|^n} = \frac{|x|^n}{1 - |x|^n} \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho^n} \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver si la serie de término general  $a_n = \frac{\rho^n}{1 - \rho^n}$  es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general  $b_n = \rho^n$ , que sabemos

que es convergente por ser  $|\rho| = \rho < 1$ .

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - \rho^n} \right\} \rightarrow 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ es convergente}$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ .

Estudiamos ahora la convergencia absoluta en  $] - 1, 1[$ .

**Opción 1.** Forma rutinaria.

Fijando  $x \in ] - 1, 1[$ , para ver si la serie  $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$  es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general  $a_n = |x|^n$ , que sabemos que es convergente por ser  $|x| < 1$ .

$$\left\{ \frac{|f_n(x)|}{|x|^n} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - |x|^n} \right\} \rightarrow 1 \implies \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1[$ .

**Opción 2.** Usando unión de compactos.

Como converge absolutamente en cada compacto  $K \subset ] - 1, 1[$ , tenemos que converge absolutamente en  $[-1 + 1/n, 1 - 1/n]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, y por ser la convergencia absoluta una propiedad local, tenemos que converge absolutamente en la unión de todos estos conjuntos, es decir, es:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-1 + 1/n, 1 - 1/n] = ] - 1, 1[$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1[$ .

Tan solo falta por ver que no converge uniformemente en  $] - 1, 1[$ . Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, por el Criterio de Cauchy tenemos que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $] - 1, 1[$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{1 - x^n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in ] - 1, 1[$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{1 - x^n} \leq \lim_{x \rightarrow 1} \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{1 - x^n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con  $x$  tendiendo a 1, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n}$  no converge por no converger a 0 su término su general, veámoslo.

Sea  $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$  y tenemos que  $\sqrt[n]{2} > 1 \iff 2 > 1^n = 1$ , por lo que  $x_n \in ]0, 1[$ .

$$\{f_n(x_n) - 0\} = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n} \right\} = \left\{ \frac{1/2}{1 - 1/2} \right\} = \{1\} \rightarrow 1 \neq 0$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  no converge uniformemente en  $] -1, 1[$ .

**Ejercicio 2.2.5.** Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y que, si  $\alpha > 1$ , dicha serie converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Supongamos en primer lugar que  $\alpha > 1$ . Entonces, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$$

donde he aplicado que la arctan está acotada por  $\frac{\pi}{2}$ . Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  es convergente ( $\alpha > 1$ ), tenemos que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$  es convergente; y por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Sin suponer ahora que  $\alpha > 1$ , veamos que la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ . Fijado  $C \subset \mathbb{R}$  acotado, existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| \leq M$  para todo  $x \in C$ . Notemos que vamos a necesitar acotar por  $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ , por lo que buscamos acotar  $\operatorname{arctan} \left( \frac{x}{n} \right)$  por  $\frac{M}{n}$ . Para ello, veremos que  $\operatorname{arctan} x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

**Opción 1:** Usando la definición mediante integrales de la arcotangente.

En efecto, si  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\operatorname{arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

**Opción 2:** Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{arctan} x - x \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en  $\mathbb{R}_0^+$  con:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto,  $f$  es decreciente en  $\mathbb{R}_0^+$ , por lo que se tiene que  $f(x) \leq f(0) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Como  $f(x) = \arctan x - x \leq 0$ , tenemos que  $\arctan x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

En cualquier caso, hemos demostrado que  $\arctan x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Supongamos ahora que  $x \in \mathbb{R}^-$ . Usando que  $\arctan$  es impar ( $\arctan(-x) = -\arctan x$ ), tenemos que:

$$\arctan x = -\arctan(-x) \geq -(-x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

Como la función valor absoluto es creciente en  $\mathbb{R}_0^+$  y decreciente en  $\mathbb{R}^-$ , tenemos que:

$$|\arctan x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, para  $x \in C$ , tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \arctan \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{M}{n} = \frac{M}{n^{\alpha+1}} \quad \forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^{\alpha+1}}$  es convergente ( $\alpha + 1 > 1$ ), por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 2.2.6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \log \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ .

Para probar lo pedido, en primer lugar, demostraremos que  $\log x \leq x - 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ . Para ello, hay dos opciones:

**Opción 1:** Usando la definición mediante integrales del logaritmo.

En efecto, si  $x \geq 1$ , tenemos que:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x 1 dt = x - 1 \quad \forall x \in ]1, +\infty[$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{t} \leq 1$  para todo  $t \geq 1$ .

Si  $x \in ]0, 1[$ , tenemos que:

$$\log x = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt \leq - \int_x^1 1 dt = -(1 - x) = x - 1 \quad \forall x \in ]0, 1[$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{t} \geq 1$  para todo  $t \in ]0, 1[$ .

**Opción 2:** Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log x - x + 1 \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en  $\mathbb{R}^+$  con:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \iff x = 1$$

Por tanto,  $f$  tiene un único punto crítico en  $x = 1$ . Además,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , por lo que  $f$  tiene un máximo en  $x = 1$ . Por tanto,  $f(1) = 0$  y  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , por lo que  $\log x - x + 1 \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .

En cualquier caso, tenemos que:

$$|h_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \log \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \left( 1 + \frac{|x|}{n} - 1 \right) = \frac{|x|}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde además hemos usado que  $|\sin(nx)| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Fijado  $C \subset \mathbb{R}$  acotado, existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| \leq M$  para todo  $x \in C$ . Tenemos por tanto que:

$$|h_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} \quad \forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$  es convergente, por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 2.2.7.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de funciones:

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}.$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$ . Tenemos que:

$$\left\{ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\log(n+3)} \cdot \frac{\log(n+2)}{1} \right\} = \left\{ \frac{\log(n+2)}{\log(n+3)} \right\} \rightarrow 1$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \implies R = 1$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-1, 1[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = \pm 1$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = 1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$ . Como  $\log(n+2) \leq n+1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (visto en el ejercicio anterior), tenemos que:

$$\frac{1}{\log(n+2)} \geq \frac{1}{n+1}$$

Usando el contrarrecíproco del Criterio de Comparación, como la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$  no converge, tenemos que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$  no converge.

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  no converge en  $x = 1$ .

■ Convergencia puntual en  $x = -1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ . Por el Criterio de Leibnitz, sabemos que la serie converge si la sucesión  $\left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$  converge a 0 y es decreciente. Como  $\{\log(n+2)\}$  es estrictamente creciente y diverge positivamente, tenemos que  $\left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$  converge a 0 y es decreciente. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$  converge, y por tanto la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  converge en  $x = -1$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Suponemos por reducción al absurdo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{\log(n+2)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{\log(n+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{\log(n+2)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para  $x = 1$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  no converge uniformemente en  $J$ .

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n \quad (\text{Parcial DGIIM 23-24}).$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ . Tenemos que:

$$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2n}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \implies R = 2$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-1, 3[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = -1$  y  $x = 3$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = -1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (-1)^n 2^n = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n$$

Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n$  no converge, por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge en  $x = -1$ .

■ Convergencia puntual en  $x = 3$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n \geq 1} n$$

Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie  $\sum_{n \geq 1} n$  no converge, por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge en  $x = 3$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Suponemos por reducción al absurdo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} (x-1)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 3$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} 2^n = \lim_{x \rightarrow 3} \sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} (x-1)^n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} 2^n$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para  $x = 3$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge uniformemente en  $J$ .



## 2.3. Cálculo de Integrales Simples

### 2.3.1. Repaso teórico

Repasamos ahora los conceptos teóricos necesarios para realizar el cálculo de integrales simples. Destacamos 4 reglas que nos ayudan a resolver el cálculo de integrales, todas ellas tendrán su versión elemental<sup>1</sup> y su versión general.

#### Regla de Barrow

**Teorema 2.1** (Regla de Barrow versión elemental).

Si  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $G$  una primitiva de  $f$ , se tiene:

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \quad \forall a, b \in J$$

**Teorema 2.2** (Versión general de la Regla de Barrow).

Si  $f \in \mathcal{L}_1(J)$  y  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva de  $f$ , entonces  $G$  tiene límite, tanto en  $\alpha$  como en  $\beta$ , y se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \beta} G(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x) = [G(x)]_\alpha^\beta$$

**Corolario 2.2.1.** Si  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$  y  $G$  una primitiva de  $f$ , entonces se tiene:

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \quad \forall a, b \in J$$

Notemos que ninguno de los dos teoremas anteriores nos permite averiguar si  $f$  es integrable o no, ya que suponen que lo es para llegar a la tesis. A continuación, vemos un criterio que nos permite comprobar esto, como consecuencia de la versión general de la regla de Barrow.

**Teorema 2.3** (Criterio de integrabilidad).

Dada una función  $f : J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , sea  $G$  una primitiva de  $f$ . Entonces  $f \in \mathcal{L}_1$  si, y sólo si,  $G$  tiene límite en  $\alpha$  y  $\beta$ , en cuyo caso:

$$\int_\alpha^\beta f(t) \, dt = [G(x)]_\alpha^\beta$$

Notemos que sólo es válido para funciones con codominio  $\mathbb{R}_0^+$ . Sin embargo, si tenemos una función con imagen negativa  $f$  de forma que  $-f$  (función con imagen positiva) cumpla las hipótesis del criterio,  $-f$  será integrable, luego  $f$  también. De esta forma, si tenemos una función que pasa de ser positiva a negativa (o viceversa) un número finito de veces, podemos, en cada trozo donde el signo de su imagen es constante, aplicar el criterio, obteniendo que la función es integrable (en caso de que cada uno de sus “trozos” cumpla con las hipótesis del criterio).

<sup>1</sup>Las cuales ya se vieron en Cálculo II.

### Criterio de comparación

A continuación, desarrollaremos el criterio de comparación con paso al límite, que nos permite averiguar si una función dada es integrable o no, comparándola con funciones conocidas. Para poder realizar dicho estudio, es necesario desarrollar un “catálogo” de funciones conocidas.

**Ejercicio.** Dados  $s \in \mathbb{R}$  y  $c \in \mathbb{R}^+$ , la función  $x \mapsto x^s$  es:

- $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ .
- integrable en  $]0, c[$  si, y sólo si,  $s > -1$ .
- integrable en  $]c, +\infty[$  si, y sólo si,  $s < -1$ .

**Ejercicio.** Dados  $s \in \mathbb{R}^*$  y  $c \in \mathbb{R}$ , la función  $x \mapsto e^{sx}$  es:

- $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .
- integrable en  $] -\infty, c[$  si, y sólo si,  $s > 0$ .
- integrable en  $]c, +\infty[$  si, y sólo si,  $s < 0$ .

**Ejercicio.** Sea  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , la función  $x \mapsto e^{-\rho|x|} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ .

*Observación.* Si  $f$  y  $g$  son dos funciones medibles tales que  $g \in \mathcal{L}_1(A)$  para un cierto  $A \subset \mathbb{R}$  y se tiene que  $|f| \leq |g|$ , entonces  $f \in \mathcal{L}_1(A)$ .

*Demostración.*

$$\int_A |f| \leq \int_A |g| < \infty$$

□

**Proposición 2.4** (Criterio de comparación por paso al límite).

Sea  $I = [a, \beta[$  con  $a \in \mathbb{R}$  y  $a < \beta \leq +\infty$  y  $f, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(I)$  con  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$

- Si  $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $f \in \mathcal{L}_1(I) \iff g \in \mathcal{L}_1(I)$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ , entonces  $g \in \mathcal{L}_1(I) \implies f \in \mathcal{L}_1(I)$
- Si  $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow \beta$ ), entonces:  $g \notin \mathcal{L}_1(I) \implies f \notin \mathcal{L}_1(I)$

En el caso  $I = ]\alpha, b]$  con  $b \in \mathbb{R}$  y  $-\infty \leq \alpha < b$ , se verifica el resultado análogo, con  $\alpha$  en lugar de  $\beta$ .

### Integración por partes

Este método es muy útil para calcular integrales de funciones que ya sabemos que son integrables, pero no nos da una forma de comprobar que lo sean.

**Teorema 2.5** (Fórmula de integración por partes versión elemental).

Si  $F, G : J \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de clase  $C^1$  en  $J$ , se tiene:

$$\int_a^b F(t)G'(t) dt = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(t)G(t) dt \quad a, b \in J$$

A continuación, destacamos el resultado general, que nombramos como “primera versión”.

**Teorema 2.6** (Fórmula de integración por partes (primera versión general)).

Dadas  $F, G : J \rightarrow \mathbb{R}$ , supongamos que, para cada intervalo compacto  $K \subset J$  las restricciones  $F|_K$  y  $G|_K$  son absolutamente continuas. Entonces,  $FG'$  y  $GF'$  son localmente integrables en  $J$  con:

$$\int_a^b F(t)G'(t) dt = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(t)G(t) dt \quad a, b \in J$$

Como podemos ver, pese a ser satisfactorio teóricamente, no nos aporta utilidad práctica. Por ello, destacamos el siguiente teorema, más débil pero de gran utilidad práctica.

**Teorema 2.7** (Fórmula de Integración por partes (segunda versión general)).

Sean  $F, G : J \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables en  $J = ]\alpha, \beta[$ , tales que  $F'G$  y  $FG'$  son integrables en  $J$ . Entonces,  $FG$  tiene límite, tanto en  $\alpha$  como en  $\beta$ , y se verifica que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)G'(t) dt = [F(x)G(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F'(t)G(t) dt$$

### Cambio de variable

**Teorema 2.8** (Cambio de variable versión elemental).

Dados dos intervalos no triviales  $I, J \subset \mathbb{R}$ , sea  $\varphi : I \rightarrow J$  una función de clase  $C^1$  en  $I$  y  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \forall a, b \in I$$

**Teorema 2.9** (Fórmula de cambio de variable).

Dados dos intervalos no triviales  $I, J \subset \mathbb{R}$ , sea  $\varphi : I \rightarrow J$  tal que  $\varphi|_H$  es absolutamente continua, para todo intervalo compacto  $H \subset I$ . Si  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente integrable en  $J$  y verifica que  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es localmente integrable en  $I$ , entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \forall a, b \in I$$

Sin embargo, al igual que sucedía antes, carece de utilidad práctica (no nos dice si alguna de las dos es integrable o no, y las integrales siguen siendo en conjuntos compactos). Vemos ahora otro segundo teorema que podemos usar, que además caracteriza la integabilidad de la función  $f$  con la función  $(f \circ \varphi)\varphi'$ .

**Teorema 2.10** (Teorema de cambio de variable).

*Dado un intervalo abierto no vacío  $I \subset \mathbb{R}$ , sea  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $I$ , con  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ , y sea  $J = \varphi(I)$ .*

*Entonces, una función  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $J$  si, y sólo si,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $I$ , en cuyo caso:*

$$\int_J f = \int_I (f \circ \varphi)|\varphi'|$$

Este teorema suele usarse de la siguiente forma:

$I = ]\alpha, \beta[$  con  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  y  $J = ]\gamma, \delta[$  con  $-\infty \leq \gamma < \delta \leq +\infty$

$\{\gamma, \delta\} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$  con  $\varphi(t) \rightarrow \tilde{\alpha} \ (t \rightarrow \alpha)$  y  $\varphi(t) \rightarrow \tilde{\beta} \ (t \rightarrow \beta)$

Entonces:

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt$$

### 2.3.2. Ejercicios

**Ejercicio 2.3.1.** En cada uno de los siguientes casos, probar que la función  $f$  es integrable en el intervalo  $J$  y calcular su integral:

1.  $f(x) = x^2 \ln x \quad \forall x \in J = ]0, 1[.$

Veamos varias formas de demostrar que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

**Opción 1.** Extendiendo la función a  $\bar{J}$ .

Veamos el valor de los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \ln x = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $f$  tiene límite en 0 y 1, por lo que extendemos  $f$  a  $\bar{J}$  de forma continua. Sea  $\bar{f} : \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$  su extensión continua. Tenemos que  $\bar{f}$  es continua en un compacto, luego  $\bar{f} \in \mathcal{L}_1(\bar{J})$ . Por tanto, restringiendo a  $J$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

**Opción 2.** Criterio de comparación.

Sea  $\tilde{f}, g : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in J$ ,  $\tilde{f}(1) = 0$  y  $g(x) = x$  para todo  $x \in ]0, 1]$ . Tenemos que  $\tilde{f}, g$  son continuas en  $]0, 1]$ , por lo que  $\tilde{f}, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}([0, 1])$ . Además,  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in ]0, 1]$ . Estamos entonces en las hipótesis del Criterio de Comparación:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\tilde{f}|}{g} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x \ln x \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Como  $g \in \mathcal{L}_1([0, 1])$ , tenemos que  $\tilde{f} \in \mathcal{L}_1([0, 1])$ , y por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

Para calcular la integral buscada, empleamos la integración por partes. Sean  $F, G : J \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones dadas por:

$$F(x) = \ln x \quad G(x) = \frac{x^3}{3}$$

Tenemos que  $F, G$  son derivables en  $J$ , con:

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad G'(x) = x^2$$

Como hemos demostrado,  $FG' = f \in \mathcal{L}_1(J)$ . Además,  $F'G = \frac{x^2}{3} \in \mathcal{L}_1(J)$  por ser una función continua en  $\bar{J}$ . Por tanto, por el Teorema de Integración por Partes, tenemos que:

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3} \left[ x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{3} \right] = -\frac{1}{9}$$

donde en (\*) hemos empleado la versión elemental de la Regla de Barrow. Además, en la última igualdad, hemos usado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-3}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{3} = 0$$

Veamos ahora otra forma de demostrar que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

**Opción 3.** Uso del Criterio de Integrabilidad.

Probaremos ahora que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ . Probemos que  $G$  es una primitiva de  $f$ , donde:

$$\begin{aligned} G : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{3} \left[ x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Tenemos que  $G$  es derivable en  $J$ , con:

$$G'(x) = \frac{1}{3} [3x^2 \ln x + x^2 - x^2] = x^2 \ln x = f(x) \quad \forall x \in J$$

Por tanto, tenemos que  $G$  es una primitiva de  $f$ , y hemos visto que  $G$  tiene límite en 0 y 1. Empleando el Criterio de Integrabilidad de la Regla de Barrow para  $-f$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ , como queríamos demostrar.

*Observación.* Notemos que  $G$  la hemos deducido a partir del método de integración por partes, para lo cual hemos usado que  $f$  era integrable. Notemos que el proceso sería aun así correcto, puesto que en esta segunda opción demostramos que, efectivamente,  $G$  es una primitiva de  $f$ . Se podría haber escrito esta segunda opción al principio, y entonces  $G$  podríamos decir que habría sido una intuición o, usando la expresión empleada en clase, una primitiva que “nos ha caído de la chimenea”.

2.  $f(x) = e^{-x} \cos(2x) \quad \forall x \in J = \mathbb{R}^+.$

Sabiendo que la función  $x \mapsto e^{-x}$  es integrable en  $\mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} < +\infty$$

Por tanto, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$ . Para calcular su integral, usamos la fórmula de integración por partes. Sean  $F, G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones dadas por:

$$F(x) = \cos(2x) \quad G(x) = -e^{-x}$$

Tenemos que  $F, G$  son derivables en  $\mathbb{R}^+$ , con:

$$F'(x) = -2 \sin(2x) \quad G'(x) = e^{-x}$$

Tenemos que  $FG' = f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$  como hemos visto antes, y  $F'G = 2e^{-x} \sin(2x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$  por el mismo razonamiento que  $f$ . Por tanto, por la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) dx &= [-e^{-x} \cos(2x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2e^{-x} \sin(2x) dx = \\ &= [-e^{-x} \cos(2x)]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(2x) dx \end{aligned}$$

Usamos ahora la fórmula de integración por partes para la integral que nos queda. Sean  $G_1 = G$  y  $F_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $F_1(x) = \sin(2x)$ . Tenemos que  $F_1, G_1$  son derivables en  $\mathbb{R}^+$ , con:

$$F_1'(x) = 2 \cos(2x) \quad G_1'(x) = -e^{-x}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) \, dx &= [-e^{-x} \cos(2x)]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(2x) \, dx = \\ &= [-e^{-x} \cos(2x)]_0^{+\infty} - 2 [-e^{-x} \sin(2x)]_0^{+\infty} - 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) \, dx = \\ &= [-e^{-x}(\cos(2x) - 2 \sin(2x))]_0^{+\infty} - 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) \, dx \end{aligned}$$

Despejando el valor de la integral buscada, obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{5} [-e^{-x}(\cos(2x) - 2 \sin(2x))]_0^{+\infty} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{5} \cdot (0 + 1) = \frac{1}{5}$$

donde en  $(*)$  hemos usado los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x}(\cos(2x) + 2 \sin(2x)) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} -e^{-x}(\cos(2x) + 2 \sin(2x)) = -e^0 = 1$$

$$3. \, f(x) = \frac{1}{x^4 - 1} \quad \forall x \in J = ]2, +\infty[.$$

Sea  $\tilde{f} : \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in J$  y  $\tilde{f}(2) = 1/15$ . Sea  $g : \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^{-4}$  para todo  $x \in \bar{J}$ . Tenemos que  $\tilde{f}, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\bar{J})$  por ser continuas. Además,  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in \bar{J}$ . Estamos entonces en las hipótesis del Criterio de Comparación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{f}|}{|g|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^4 - 1}{1/x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4 - 1} = 1$$

Como  $g \in \mathcal{L}_1(\bar{J})$ , tenemos que  $\tilde{f} \in \mathcal{L}_1(\bar{J})$ , y por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

Aplicamos ahora la descomposición en fracciones simples de  $f$  para calcular su integral. Tenemos que  $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ , por lo que, siendo  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Igualando el denominador, tenemos:

- $x = 1$ : Tenemos  $1 = 4A$ , por lo que  $A = 1/4$ .
- $x = -1$ : Tenemos  $1 = -4B$ , por lo que  $B = -1/4$ .
- $x = 0$ : Tenemos  $1 = A - B - D$ , por lo que  $D = A - B - 1 = -1/2$ .
- $x = -2$ : Tenemos  $1 = -5A - 15B + 3(-2C + D)$ , por lo que:

$$C = -\frac{1}{6}(1 + 5A + 15B - 3D) = -\frac{1}{6}\left(1 + 5 \cdot \frac{1}{4} - 15 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

Por tanto, y usando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{A}{x - 1} dx + \int_2^{+\infty} \frac{B}{x + 1} dx + \int_2^{+\infty} \frac{Cx + D}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{4} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} [\ln(x - 1)]_2^{+\infty} - \frac{1}{4} [\ln(x + 1)]_2^{+\infty} - \frac{1}{2} [\arctan x]_2^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{4} [\ln(x - 1) - \ln(x + 1)]_2^{+\infty} - \frac{1}{2} [\arctan x]_2^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \ln \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2} [\arctan x]_2^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{4} \left[ 0 - \ln \left( \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan 2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan 2 \end{aligned}$$

donde en (\*) empleamos la versión general de la Regla de Barrow. Además, también se usa que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} \right) = \ln(1) = 0$$

donde ahora hemos empleado que la función logaritmo es continua.

4.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$

Sea el cambio de variable  $x = \varphi(t)$  dado por  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = \ln t$ . Tenemos que  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi$  es biyectiva y  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ . Además, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = -\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  si, y sólo si,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $\mathbb{R}^+$ . Tenemos que:

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{e^{\ln t} + e^{-\ln t}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t + 1/t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

Por tanto, tenemos que  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $\mathbb{R}^+$ , por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . Además, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$



$$5. f(x) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \quad \forall x \in J = ]0, 1[.$$

Sea el cambio de variable  $x = \varphi(t)$  dado por  $\varphi : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = t^2$  para todo  $t \in ]0, 1[$ . Tenemos que  $\varphi \in C^1(]0, 1[)$ ,  $\varphi$  es biyectiva y  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in ]0, 1[$ . Además, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = 1$$

Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(]0, 1[)$  si, y sólo si,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $]0, 1[$ . Tenemos que:

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{t^4 + \sqrt{t^2}} \cdot 2t = \frac{2t}{t^4 + t} = \frac{2}{t^3 + 1}$$

Tenemos que la extensión continua de  $f$  a  $\overline{J}$  es integrable por ser continua en un compacto, por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ . Además, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{2}{t^3 + 1} dt = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^3 + 1} dt$$

Para calcular la integral, descomponemos en fracciones simples. Para ello, en primer lugar hallamos las raíces del denominador:

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Por tanto,  $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$ . Además, no tiene más raíces reales, puesto que el discriminante del segundo factor es  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ . Entonces, queda:

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1} = \frac{A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

Igualando el numerador, tenemos:

- $t = -1$ : Tenemos  $1 = 3A$ , por lo que  $A = 1/3$ .
- $t = 0$ : Tenemos  $1 = A + C$ , por lo que  $C = 1 - A = 2/3$ .
- $t = 1$ : Tenemos  $1 = A + 2(B + C) = A + 2B + 2C$ , por lo que:

$$B = \frac{1 - A - 2C}{2} = \frac{1 - 1/3 - 2 \cdot 2/3}{2} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, y usando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^3 + 1} dt = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t + 1} dt + \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \frac{-t + 2}{t^2 - t + 1} dt$$

Resolvemos ahora la nueva integral que tenemos, cuyo denominador tiene raíces complejas.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t-4}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-3}{t^2-t+1} dt = \\ &= -\frac{1}{2} [\ln |t^2-t+1|]_0^1 + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt\end{aligned}$$

Buscamos ahora encontrar un binomio al cuadrado en el denominador para resolver esta última integral. Para ello, completamos cuadrados:

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[1 + \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2\right]$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt &= \int_0^1 \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2} dt = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi\end{aligned}$$

Resolviendo ahora los resultados que hemos obtenido, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx &= \frac{2}{3} \cdot [\ln(t+1)]_0^1 + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} [\ln |t^2-t+1|]_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi\right) = \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi = \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi\end{aligned}$$

6.  $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in J = ]1, +\infty[.$

Sea el cambio de variable  $x = \varphi(t)$  dado por  $\varphi : ]\pi/4, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = \operatorname{tg}(t)$  para todo  $t \in ]\pi/4, \pi/2[.$  Tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(t) = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \varphi(t) = 1$$

Además,  $\varphi \in C^1(]\pi/4, \pi/2[), \varphi(]\pi/4, \pi/2[) = J$  y  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in ]\pi/4, \pi/2[.$  Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo

que  $f \in \mathcal{L}_1([1, +\infty[)$  si, y sólo si,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $] \pi/4, \pi/2[$ . Tenemos que:

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

La función obtenida tiene límite en  $\pi/4$  y  $\pi/2$ , por lo que admite una extensión continua a  $[\pi/4, \pi/2]$ , por lo que es integrable en  $(] \pi/4, \pi/2[)$ . Por tanto,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $] \pi/4, \pi/2[$ , por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

Por el Teorema de Cambio de Variable, y posteriormente por la Regla de Barrow, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx = \left[ -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

7.  $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} \quad \forall x \in J = ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

La función  $f$  tiene límite en los extremos de  $J$ , por lo que admite una extensión continua a  $\overline{J}$  compacto, por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ .

Sea ahora el cambio de variable  $x = \varphi(t)$  dado por  $\varphi : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = 2 \arctan t$  para todo  $t \in ]0, 1[$ , y tenemos que  $\varphi \in C^1([0, 1])$  y  $f$  es continua, por lo que estamos en las hipótesis de la versión elemental del Teorema de Cambio de Variable.

Antes, veamos cómo expresar  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$  en función de  $t$ . Como  $x = \varphi(t)$ , tenemos que:

$$\frac{x}{2} = \arctan t \implies \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) = t \quad \forall t \in ]0, 1[$$

Usamos ahora la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left( 2 \cdot \frac{x}{2} \right) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \stackrel{(*)}{=} \frac{2t}{1 - t^2}$$

donde en  $(*)$  hemos usado de nuevo el cambio de variable. Por tanto, empleando el razonamiento sobre un triángulo rectángulo, tenemos que el cateto opuesto mide  $2t$  y el cateto contiguo mide  $1 - t^2$ , por lo que la hipotenusa mide:

$$\sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = 1 + t^2$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Retomando el uso del Teorema de Cambio de Variable, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2 + 1-t^2 + 2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{2t+2} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in J = ]1, +\infty[.$$

Sea  $I = ]0, \pi/2[$ , y consideramos el cambio de variable  $x = \varphi(t)$  dado por  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = \frac{1}{\cos x}$  para todo  $t \in I$ . Tenemos que  $\varphi \in C^1(I)$ ,  $\varphi(I) = J$  y  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Además, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(t) = +\infty$$

Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$  si, y sólo si,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $I$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^3(t)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} - 1}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(t) \cos(t)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(t)}} = \frac{\operatorname{sen}(t) \cos(t)}{\operatorname{tg}(t)} = \cos^2(t) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

La función obtenida es integrable en  $I$  por ser acotada y ser  $I$  un conjunto de medida finita (acotado). Por tanto,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  es integrable en  $I$ , por lo que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ . Usando el Teorema de Cambio de Variable, y posteriormente la Regla de Barrow, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos empleado la conocida forma de expresar el cuadrado del coseno en función del coseno del ángulo doble<sup>2</sup>.

**Ejercicio 2.3.2.** En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función  $f$  en el intervalo  $J$ :

$$1. f(x) = \frac{x^a}{e^x - 1} \quad \forall x \in J = \mathbb{R}^+. \quad (a \in \mathbb{R})$$

<sup>2</sup>Para evitar la extensión innecesaria de estos apuntes, no se incluirá la fácil demostración de esta fórmula.

En estos casos, calcular la integral de  $f$  en  $J$  será un proceso demasiado complejo, por lo que buscamos aplicar el criterio de comparación. Para ello, sabemos que  $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$  por ser  $f$  continua. Partimos entonces el conjunto  $J$  en dos subconjuntos  $J_1 = ]0, 1]$  y  $J_2 = [1, +\infty[$ , y los estudiamos por separado.

■  $J_1 = ]0, 1]$ :

Buscamos  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ , con  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in J_1$ , y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{(e^x - 1)|g(x)|} = L \in \mathbb{R}^+$$

Sea entonces  $g(x) = x^{a-1} > 0$ , función continua luego  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ . Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{(e^x - 1)|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$  si y sólo si  $g \in \mathcal{L}_1(J_1)$ , y sabemos que esto equivale a que  $a - 1 > -1$ , es decir,  $a > 0$ . Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$  si, y sólo si,  $a \in \mathbb{R}^+$ .

■  $J_2 = [1, +\infty[$ :

Sea ahora  $g(x) = e^{-x/2} > 0$ , función continua luego  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_2)$ . además, como  $-1/2 < 0$ , tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1(J_2)$ . Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(e^x - 1)|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(e^x - 1)e^{-x/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1(J_2)$  implica que  $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$ , por lo que siempre se tiene.

Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(J)$  si, y sólo si,  $a \in \mathbb{R}^+$ .

2.  $f(x) = x^n e^{-x^2} \cos x \quad \forall x \in J = \mathbb{R}. \quad (n \in \mathbb{N})$

En este caso, la función  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ . Partimos entonces el conjunto  $J$  en dos subconjuntos  $J_1 = \mathbb{R}_0^-$  y  $J_2 = \mathbb{R}_0^+$ , y los estudiamos por separado.

■  $J_1 = \mathbb{R}_0^-$ :

Sea  $g : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = e^x > 0$ , función continua luego  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^n e^{-x^2} \cos x|}{|e^x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^n \cos x|}{e^{x^2+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|(-x)^n \cos(-x)|}{e^{x^2-x}} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como  $g \in \mathcal{L}_1(J_1)$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$ .

■  $J_2 = \mathbb{R}_0^+$ :

Sea  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = e^{-x} > 0$ , función continua luego  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_2)$ . Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^n e^{-x^2} \cos x|}{|e^{-x}|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^n \cos x|}{e^{x^2-x}} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como  $g \in \mathcal{L}_1(J_2)$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$ .

Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(J)$  en todo caso, independientemente del valor de  $n \in \mathbb{N}$ .

$$3. f(x) = \frac{x^\rho}{1 - \cos x} \quad \forall x \in J = ]0, \pi[. \quad (\rho \in \mathbb{R})$$

Definiendo  $f(\pi) = \frac{\pi^\rho}{2}$ , extendemos  $f$  para que sea continua, luego localmente integrable, en  $]0, \pi]$ . Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}([0, \pi])$ . Definimos ahora  $g : ]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^{\rho-2} > 0$ , función continua luego  $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}([0, \pi])$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^\rho|}{|(1 - \cos x)| \cdot |x^{\rho-2}|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \\ &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1([0, \pi])$  si, y sólo si,  $g \in \mathcal{L}_1([0, \pi])$ , y sabemos que esto equivale a que  $\rho - 2 > -1$ , es decir,  $\rho > 1$ . Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1([0, \pi])$  si, y sólo si,  $\rho > 1$ .

$$4. f(x) = \frac{x^a(1-x)^b \ln(1+x^2)}{\ln^2(x)} \quad \forall x \in J = ]0, 1[. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Sabemos que  $f$  es continua en  $J$ , por lo que  $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ . Partimos entonces el conjunto  $J$  en dos subconjuntos  $J_1 = ]0, 1/2]$  y  $J_2 = [1/2, 1[$ , y los estudiamos por separado.

■  $J_1 = ]0, 1/2]$ :

Para estudiar este caso, haremos uso del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/1+x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

Definimos la función  $g_1 : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_1(x) = x^{a+2}$ , función continua luego  $g_1 \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g_1(x)|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^a(1-x)^b \ln(1+x^2)|}{|x^{a+2}| \cdot |\ln^2(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^b}{\ln^2(x)} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^b}{\ln^2(x)} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $g_1 \in \mathcal{L}_1(J_1) \implies f \in \mathcal{L}_1(J_1)$ . Sabemos que  $g \in \mathcal{L}_1(J_1)$  si, y sólo si,  $a + 2 > -1$ , es decir,  $a > -3$ . Por tanto, para  $a > -3$ ,  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$ .

Para  $a < -3$ , sea  $c \in ]a, -3[$ , y definimos  $h_1 : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h_1(x) = x^{c+2}$ , función continua luego  $h_1 \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|h_1(x)|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^a(1-x)^b \ln(1+x^2)|}{|x^{c+2}| \cdot |\ln^2(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^b}{x^{c-a} \ln^2(x)} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^b}{x^{c-a} \ln^2(x)} = \infty \end{aligned}$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_1) \implies h_1 \in \mathcal{L}_1(J_1)$ . No obstante, como  $c + 2 < -3 + 2 = -1$ , sabemos que  $h_1 \notin \mathcal{L}_1(J_1)$ , por lo que para  $a < -3$ ,  $f \notin \mathcal{L}_1(J_1)$ .

Por último, veamos para el caso de  $a = -3$ . Definimos  $h_2 : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h_2(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$ , función continua luego  $h_2 \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_1)$ . Del Criterio de Integrabilidad, tenemos que  $h_2 \in \mathcal{L}_1(J_1)$ , con:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \left[ -\frac{1}{\ln(x)} \right]_0^{1/2} = -\frac{1}{\ln(1/2)} + 0 = \frac{1}{\ln(2)}$$

Consideramos ahora el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|h_2(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^{-3}(1-x)^b \ln(1+x^2)|}{|\ln^2(x)| \cdot \left| \frac{1}{x \ln^2(x)} \right|} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^b \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$  si, y sólo si,  $h_2 \in \mathcal{L}_1(J_1)$ . Por tanto, para  $a = -3$ ,  $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$ .

■  $J_2 = [1/2, 1[$ :

Definimos la función  $g_2 : [1/2, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_2(x) = (1-x)^{b-2}$ , función continua luego  $g_2 \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J_2)$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|g_2(x)|} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^a(1-x)^b \ln(1+x^2)|}{|(1-x)^{b-2}| \cdot |\ln^2(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} x^a \ln(1+x^2) \cdot \left( \frac{1-x}{\ln(x)} \right)^2 = \\ &= \ln(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1-x}{\ln(x)} \right)^2 \stackrel{L'Hôpital}{=} \ln(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{-1}{1/x} \right)^2 = \ln(2) \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$  si, y sólo si,  $g_2 \in \mathcal{L}_1(J_2)$ , y sabemos que esto equivale a que  $b - 2 > -1$ , es decir,  $b > 1$ .

En resumen, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$  si, y sólo si,  $a \geq -3$  y  $b > 1$ .

**Ejercicio 2.3.3** (Parcial DGIIM 23-34). Estudiar la integrabilidad en la semirrecta  $J = ]1, +\infty[$  de la función  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2}} \quad \forall x \in J$$

Fijado  $c \in ]1, +\infty[$ , estudiamos la integrabilidad por separado:

■  $I_1 = ]1, c]$ :

Tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(I_1)$  por ser continua. Intuimos que hemos de usar el Criterio de Comparación, pero no sabemos con qué función comparar. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , definimos  $g_a : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_a(x) = (x-1)^a$ , función continua luego  $g_a \in \mathcal{L}_1^{loc}(I_1)$ . Además, para que tengamos  $g_a \in \mathcal{L}_1(I_1)$ , suponemos  $a > -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|g_a(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2} \cdot (x-1)^a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2+a}}$$

Como  $a > -1$ , tenemos que  $\frac{3}{2} + a > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$ , por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|g_a(x)|} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{(3/2 + a)(x-1)^{1/2+a}}$$

Para que dicho límite sea 0, necesitamos que  $\frac{1}{2} + a < 0$ , es decir,  $a < -1/2$ . Por tanto, nos bastará con escoger  $a \in ]-1, -1/2[$ , por ejemplo  $a = -3/4$ . Sea  $h_1(x) = (x-1)^{-3/4}$ , con  $h_1 \in \mathcal{L}_1(I_1)$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|h_1(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{\frac{3}{4} \cdot (x-1)^{-1/4}} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como  $h_1 \in \mathcal{L}_1(I_1)$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(I_1)$ .

*Observación.* Evidentemente, en un examen este razonamiento se haría en su-  
cio y tan solo se entregaría el razonamiento hecho directamente con la función  $h_1$ . No obstante, por simples objetivos didácticos, se ha querido mostrar el proceso completo para que el lector sepa razonar cómo obtener dicha función.

■  $I_2 = [c, +\infty[$ : Tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1^{loc}(I_2)$  por ser continua.

De nuevo, intuimos que hemos de usar el Criterio de Comparación, pero no sabemos con qué función comparar. Tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(I_2)$  por ser continua, y dado  $a \in \mathbb{R}$ , definimos  $g_a : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_a(x) = (x-1)^a$ , función continua luego  $g_a \in \mathcal{L}_1^{loc}(I_2)$ . En este caso, suponemos  $a < -1$  para tener que  $g_a \in \mathcal{L}_1(I_2)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g_a(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2} \cdot (x-1)^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2+a}}$$

Para que dicho límite no sea infinito, necesitamos una indeterminación, por lo que buscamos que el denominador también diverga, por lo que necesitamos



que  $\frac{3}{2} + a > 0$ , es decir,  $a > -3/2$ . Supongamos por tanto  $a \in ]-3/2, -1[$ , y tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g_a(x)|} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{(3/2 + a)(x - 1)^{1/2+a}}$$

Al ser un límite con  $x \rightarrow \infty$  de funciones racionales, sabemos que este límite será 0 si y solo si  $-1 < \frac{1}{2} + a$ , es decir,  $-3/2 < a$ , algo que ya tenemos. Por tanto, tan solo necesitamos imponer que  $a \in ]-3/2, -1[$ , por ejemplo  $a = -5/4$ . Sea  $h_2(x) = (x - 1)^{-5/4}$ , con  $h_2 \in \mathcal{L}_1(I_2)$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|h_2(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\frac{5}{4} \cdot (x - 1)^{-1/4}} = \frac{4}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)^{1/4}}{x} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como  $h_2 \in \mathcal{L}_1(I_2)$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(I_2)$ .

*Observación.* De nuevo, se ha querido mostrar el proceso completo para que el lector sepa razonar cómo obtener dicha función. En un examen, tan solo se entregaría el razonamiento hecho directamente con la función  $h_2$ .

En definitiva, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(J)$ , que es lo que queríamos demostrar.

**Ejercicio 2.3.4** (Parcial DGIIM 23-34). Probar que la función  $g : \mathbb{R}_0^+$  definida por

$$g(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

es integrable en  $\mathbb{R}_0^+$  y calcular su integral.

Sean  $I = [1, +\infty[$ ,  $J = \mathbb{R}_0^+$ , definimos  $\varphi : I \rightarrow J$  dada por:

$$\varphi(t) = \ln t \quad \forall t \in I$$

Tenemos que  $\varphi \in C^1(I)$  y  $g$  continua, por lo que definiendo  $h = (g \circ \varphi)\varphi'$ , por el Teorema de cambio de variable tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1(J) \iff h \in \mathcal{L}_1(I)$ .

$$h(t) = [(g \circ \varphi)\varphi'](t) = \frac{t^2 - t}{t(t^3 + 1)} = \frac{t - 1}{t^3 + 1} \quad \forall t \in I$$

Como  $3 - 1 > 1$ , sabemos que  $h \in \mathcal{L}_1(I)$ , de donde tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1(J)$ . Calculamos ahora la integral de  $g$  usando también el Teorema de cambio de variable:

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} h(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{t^3 + 1} dt$$

Para resolver esta integral, descomponemos la fracción en fracciones simples. Tenemos que:

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que  $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$ , y sabemos que  $t^2 - t + 1$  no tiene raíces reales ya que  $\Delta = 1 - 4 < 0$ . Por tanto, podemos descomponer la fracción en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{t-1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1)}{t^3+1}$$

Igualando numeradores, tenemos que:

- Para  $t = -1$ :  $-2 = 3A \implies A = -2/3$ .
- Para  $t = 0$ :  $-1 = A + C \implies C = -1/3$ .
- Para  $t = 1$ :  $0 = A + 2B + 2C \implies B = \frac{-A-2C}{2} = 2/3$ .

Por tanto, usando también la versión general de la Regla de Barrow, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1} dt = \\ &= -\frac{2}{3} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = \\ &= -\frac{2}{3} [\ln(t+1)]_1^{+\infty} + \frac{1}{3} [\ln(t^2-t+1)]_1^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \ln \left( \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} \right) \right]_1^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln 4 \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} \right) = \ln \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} \right) = \ln(1) = 0$$

## 2.4. Teorema de Fubini

### 2.4.1. Repaso teórico

Repasamos ahora los conceptos teóricos necesarios para realizar el cálculo de integrales usando los teoremas de Tonelli y de Fubini. Destacamos estos dos teoremas, que nos ayudan a resolver el cálculo de integrales en varias variables.

**Definición 2.1** (Sección de una función).

Sea  $Z \neq \emptyset$ ,  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow Z$ . Fijado  $x \in \mathbb{R}^p$ , definimos:

$$f_x : \mathbb{R}^q \rightarrow Z \quad f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^q$$

Análogamente, fijado  $y \in \mathbb{R}^q$  se define:

$$f^y : \mathbb{R}^p \rightarrow Z \quad f^y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p$$

**Definición 2.2** (Sección de un conjunto).

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ , fijado  $x \in \mathbb{R}^p$  definimos:

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in E\}$$

Análogamente, fijado  $y \in \mathbb{R}^q$  definimos:

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in E\}$$

**Teorema 2.11** (Teorema de Tonelli).

Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  una función *medible positiva*, entonces:

- $f_x$  es medible p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^p$  y  $f^y$  es medible p.c.t.  $y \in \mathbb{R}^q$ .
- Las funciones  $\varphi$  y  $\psi$ , definidas c.p.d. en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$  respectivamente, por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \text{ p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q$$

son medibles y verifican:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y) dy$$

Por tanto, siempre que tengamos una función **positiva**, entonces sus integrales iteradas **coinciden**.

La siguiente proposición es consecuencia del Teorema de Tonelli.

**Proposición 2.12.** Para todo conjunto medible  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  se tiene:

- $E_x \in \mathcal{M}_q$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^p$  y  $E^y \in \mathcal{M}_p$  p.c.t.  $y \in \mathbb{R}^q$ .
- Las funciones  $x \mapsto \lambda_q(E_x)$  e  $y \mapsto \lambda_p(E^y)$ , definidas c.p.d. en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$  respectivamente, son medibles con:

$$\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E_x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E^y) dy$$

**Teorema 2.13** (Criterio de integrabilidad).

Para  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ , se tiene que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$  si, y sólo si:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \text{ o bien } \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

*Demostración.* Como  $f$  es medible, sabemos que  $|f|$  es una función medible positiva, luego sus integrales iteradas coinciden. Por tanto, si descubrimos que alguna de las dos (que sabemos que son iguales) es finita, sabremos por tanto que  $|f|$  es integrable, de donde  $f$  también lo será.  $\square$

**Teorema 2.14** (Teorema de Fubini). Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ , se tiene:

- $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^p$  y  $f_y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$  p.c.t.  $y \in \mathbb{R}^q$ .
- Las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  definidas c.p.d. en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$  respectivamente, por:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \text{ p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q$$

verifican que  $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$  y  $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ , con:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y) dy$$

A pesar de suponer que  $f$  era integrable, el teorema nos sirve para probar que ciertas funciones no son integrables, ya que si las integrales iteradas no coinciden o no son menores que infinito, tendremos que la función no es integrable.

Finalmente, cabe destacar que si las integrales iteradas coinciden y son finitas y no hemos probado que la función sea integrable, **no podemos asegurar nada**.

## 2.4.2. Ejercicios

**Ejercicio 2.4.1.** Probar que el siguiente conjunto es medible y calcular su área.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \min\{e^y, 1, e^{1-y}\}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Tenemos que  $E$  es la intersección de tres cerrados, luego  $E$  es cerrado y, por tanto,  $E \in \mathcal{M}_2$ . Para calcular el área de  $E$ , en primer lugar veamos cuál es el mínimo de las tres funciones que definen  $E$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} e^y \leq 1 &\iff e^y \leq e^0 \iff y \leq 0 \\ e^y \leq e^{1-y} &\iff y \leq 1-y \iff y \leq 1/2 \\ e^{1-y} \leq 1 &\iff e^{1-y} \leq e^0 \iff 1-y \leq 0 \iff y \geq 1 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

- Si  $y \leq 0$ :  $e^y \leq 1 \leq e^{1-y}$ , luego  $\min\{e^y, 1, e^{1-y}\} = e^y$ .
- Si  $0 \leq y \leq 1/2$ :  $1 \leq e^y \leq e^{1-y}$ , luego  $\min\{e^y, 1, e^{1-y}\} = 1$ .

- Si  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ :  $1 \leq e^{1-y} \leq e^y$ , luego  $\min\{e^y, 1, e^{1-y}\} = 1$ .
- Si  $1 \leq y$ :  $e^{1-y} \leq 1 \leq e^y$ , luego  $\min\{e^y, 1, e^{1-y}\} = e^{1-y}$ .

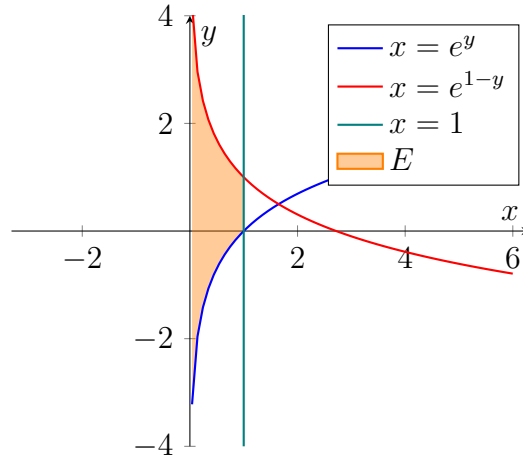
Por tanto, definimos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  como:

$$f(y) = \begin{cases} e^y & \text{si } y \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ e^{1-y} & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Mediante la función  $f$  podemos reescribir  $E$  como:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq f(y)\} \in \mathcal{M}_2$$

Visualmente, el conjunto  $E$  es el siguiente:



Como  $E$  es la subgráfica de  $f$  (función continua, luego medible), entonces el área de  $E$  es:

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$$

Usando la aditividad de la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_2(E) &= \int_{-\infty}^0 e^y dy + \int_0^1 1 dy + \int_1^{\infty} e^{1-y} dy \\ &= [e^y]_{-\infty}^0 + [y]_0^1 + [-e^{1-y}]_1^{\infty} \\ &= e^0 - 0 + 1 - 0 - 0 + e^0 = 3 \end{aligned}$$

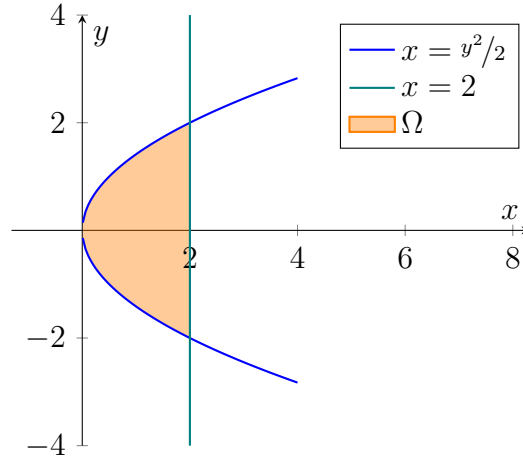
Por tanto, el área de  $E$  es  $\lambda_2(E) = 3$ .

**Ejercicio 2.4.2.** En cada uno de los siguientes casos, probar que la función  $f$  es integrable en  $\Omega$  y calcular su integral.

1.  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x\}$ ,

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Veamos gráficamente el conjunto  $\Omega$ :



El conjunto  $\Omega$  es la intersección de tres cerrados, luego  $\Omega$  es cerrado y, por tanto,  $\Omega \in \mathcal{M}_2$ . Además, este se puede expresar como:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, |y| \leq \sqrt{2x} \right\}$$

Veamos en primer lugar que  $\Omega$  está acotado. Sabemos que es medible por ser intersección de cerrados, y está acotado ya que para todo  $(x, y) \in \Omega$  se tiene que:

$$|x| \leq 2 \quad |y| \leq \sqrt{2x} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

Por tanto,  $\lambda_2(\Omega) \leq 4^2 < \infty$ . Tenemos además que  $f$  es continua, luego medible. Veamos que está acotada:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right| \leq |x| \leq 2 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Por tanto, veamos que  $f$  es integrable en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} |f(x, y)| \, d(x, y) \leq \int_{\Omega} 2 \, d(x, y) = 2\lambda_2(\Omega) < \infty$$

Por tanto, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ . Calculemos ahora las secciones verticales y horizontales:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \emptyset & \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2] \\ \Omega_x &= [-\sqrt{2x}, \sqrt{2x}] & \forall x \in [0, 2] \\ \Omega_y &= \emptyset & \forall y \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \\ \Omega_y &= \left[ \frac{y^2}{2}, 2 \right] & \forall y \in [-2, 2] \end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^2 \left( \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( \int_{\frac{y^2}{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, dx \right) dy\end{aligned}$$

Como vemos, el Teorema de Fubini nos permite calcular la integral de  $f$  en  $\Omega$  de dos formas distintas. No obstante, la segunda es más sencilla, ya que la integral interna es más sencilla de calcular. Por tanto, optamos por esta última:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{-2}^2 \left( \int_{\frac{y^2}{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[ \sqrt{1+x^2+y^2} \right]_{\frac{y^2}{2}}^2 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( \sqrt{1+4+y^2} - \sqrt{1+\frac{y^4}{4}+y^2} \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( \sqrt{5+y^2} - \sqrt{\left(\frac{y^2}{2}+1\right)^2} \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( \sqrt{5+y^2} - \frac{y^2}{2} - 1 \right) dy\end{aligned}$$

Buscamos ahora resolver la integral de la raíz cuadrada. Tenemos que:

$$\int_{-2}^2 \sqrt{5+y^2} \, dy = \sqrt{5} \int_{-2}^2 \sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2} \, dy$$

Hay dos cambios de variable posibles para resolver esta integral.

**Opción 1.** Cambio de variable trigonométrico:

Sea el intervalo  $I = [-\arctan(2/\sqrt{5}), \arctan(2/\sqrt{5})]$ , que por comodidad lo denotaremos como  $I = [-\alpha, \alpha]$ . Definimos  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\varphi(t) = \sqrt{5} \operatorname{tg}(t)$ . Entonces, tenemos que  $\varphi \in C^1(I)$ ,  $\varphi(I) = [-2, 2]$  y  $\varphi'(t) = \sqrt{5} \sec^2(t) \neq 0$  en  $I$ . Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \sqrt{5+y^2} \, dy &= \sqrt{5} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{tg}(t)}{\sqrt{5}}\right)^2} \sqrt{5} \sec^2(t) \, dt \\ &= 5 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2(t)} \sec^2(t) \, dt \\ &= 5 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) \, dt\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, usamos el método de Integración por Partes. Sean  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como  $F(t) = \sec(t)$  y  $G(t) = \operatorname{tg}(t)$ . Entonces, tenemos que  $F, G \in C^1(I)$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) dt &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{tg}(t) \sec(t) \operatorname{tg}(t) dt \\ &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec(t) \operatorname{tg}^2(t) dt \\ &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec(t) (\sec^2(t) - 1) dt \\ &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec(t) dt \end{aligned}$$

Despejando la integral que queremos calcular, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) dt &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec(t) \cdot \frac{\sec(t) + \operatorname{tg}(t)}{\sec(t) + \operatorname{tg}(t)} dt \\ &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sec^2(t) + \sec(t) \operatorname{tg}(t)}{\sec(t) + \operatorname{tg}(t)} dt \\ &= [\sec(t) \operatorname{tg}(t)]_{-\alpha}^{\alpha} + [\ln |\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= \operatorname{tg}(\alpha) (\sec(\alpha) - \sec(-\alpha)) + \ln \left| \frac{\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{\sec(-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)} \right| \\ &= 2 \operatorname{tg}(\alpha) \sec(\alpha) + \ln \left| \frac{\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{\sec(-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)} \right| \\ &= 2 \operatorname{tg}(\alpha) \sec(\alpha) + \ln \left| \frac{\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{\sec(\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha)} \right| \end{aligned}$$

Veamos ahora cuánto vale  $\sec(\alpha)$ . Tenemos que:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5} \implies \sec(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) dt &= \operatorname{tg}(\alpha) \sec(\alpha) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)}{\sec(\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha)} \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}} \right| \\ &= \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{5}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \right| = \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

Retrocediendo en las integrales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{5+y^2} dy &= 5 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^3(t) dt \\ &= 5 \left( \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \ln(5) \right) = 6 + \frac{5}{2} \ln(5) \end{aligned}$$



**Opción 2.** Cambio de variable con funciones hiperbólicas:

Sea ahora la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$\varphi(t) = \sqrt{5} \sinh(t) = \sqrt{5} \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$$

Entonces, tenemos que  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  y como la función a integrar es continua en  $\mathbb{R}$ , podemos aplicar la versión elemental del Teorema de Cambio de Variable. Calculemos los nuevos límites de integración:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = 2 &\iff \sqrt{5} \sinh(t) = 2 \iff \sinh(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \iff e^t - e^{-t} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ &\iff e^{2t} - 1 = \frac{4}{\sqrt{5}} e^t \iff e^{2t} - \frac{4}{\sqrt{5}} e^t - 1 = 0 \\ &\iff e^t = \sqrt{5} \iff t = \ln(\sqrt{5}) = \frac{\ln(5)}{2} \end{aligned}$$

Como la función es impar, sabemos que  $\varphi\left(-\frac{\ln(5)}{2}\right) = -2$ . Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{5+y^2} \, dy &= \sqrt{5} \int_{-\frac{\ln(5)}{2}}^{\frac{\ln(5)}{2}} \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \cosh(t) \, dt \\ &= 5 \int_{-\frac{\ln(5)}{2}}^{\frac{\ln(5)}{2}} \cosh^2(t) \, dt \end{aligned}$$

Usando relaciones trigonométricas, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \\ \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = \cosh(2t) \end{array} \right\} \implies \cosh^2(t) = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{5+y^2} \, dy &= 5 \int_{-\frac{\ln(5)}{2}}^{\frac{\ln(5)}{2}} \frac{1 + \cosh(2t)}{2} \, dt \\ &= \frac{5}{2} \left[ t + \frac{\sinh(2t)}{2} \right]_{-\frac{\ln(5)}{2}}^{\frac{\ln(5)}{2}} \\ &= \frac{5}{2} \left( \frac{\ln(5)}{2} + \frac{\sinh(\ln(5))}{2} + \frac{\ln(5)}{2} - \frac{\sinh(-\ln(5))}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2} \left( \ln(5) + \frac{e^{\ln(5)} - e^{-\ln(5)}}{4} - \frac{e^{-\ln(5)} - e^{\ln(5)}}{4} \right) \\ &= \frac{5}{2} \left( \ln(5) + \frac{5 - 1/5}{4} - \frac{1/5 - 5}{4} \right) \\ &= \frac{5}{2} \left( \ln(5) + \frac{12}{5} \right) = 6 + \frac{5}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

*Observación.* El lector posiblemente no esté familiarizado con las funciones hiperbólicas, y por ello podría pensar en optar por la primera opción. No obstante, la segunda opción es más sencilla, ya que el cálculo de la integral de  $\sec^3(t)$  es más complejo. No obstante, optamos por dejar ambas opciones para que el lector se familiarice con las funciones hiperbólicas y, de igual forma, conozca cómo calcular la integral de  $\sec^3(t)$ , que es una integral que, sin haberla leído antes, puede resultar complicada.

En cualquier caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{-2}^2 \left( \sqrt{5+y^2} - \frac{y^2}{2} - 1 \right) dy \\ &= 6 + \frac{5}{2} \ln(5) - \int_{-2}^2 \frac{y^2}{2} dy - \int_{-2}^2 1 dy \\ &= 6 + \frac{5}{2} \ln(5) - \left[ \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^2 - [y]_{-2}^2 \\ &= 6 + \frac{5}{2} \ln(5) - \frac{8}{6} - \frac{8}{6} - 2 - 2 \\ &= 6 + \frac{5}{2} \ln(5) - \frac{8}{3} - 4 = \frac{5}{2} \ln(5) - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

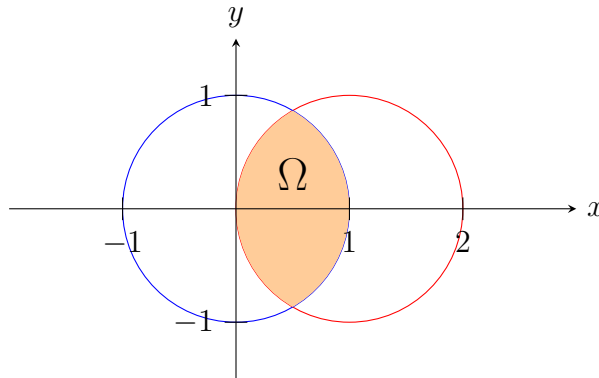
$$2. \, \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \, x^2 + y^2 \leq 2x\},$$

$$f(x, y) = x \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Veamos en primer lugar cómo es el conjunto  $\Omega$ . Tenemos que:

$$x^2 + y^2 \leq 2x \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \iff (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

Por tanto, tenemos que  $\Omega$  gráficamente es:



El conjunto  $\Omega$  es la intersección de dos cerrados, luego  $\Omega$  es cerrado y, por tanto,  $\Omega \in \mathcal{M}_2$ . Además, como  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ , entonces  $\Omega$  está acotado, con  $\lambda_2(\Omega) \leq 2^2 < \infty$ . Por otro lado, la función  $f$  es continua, luego medible. Veamos que  $f$  es integrable en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} |f(x, y)| \, d(x, y) = \int_{\Omega} |x| \, d(x, y) \leq \int_{\Omega} 1 \, d(x, y) = \lambda_2(\Omega) < \infty$$

Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ . Calculemos ahora las secciones verticales. Tenemos que:

$$y^2 \leq 1 - x^2 \quad y^2 \leq 2x - x^2$$

Veamos qué valor es menor en cada caso:

$$1 - x^2 \leq 2x - x^2 \iff 1 \leq 2x \iff \frac{1}{2} \leq x$$

Calculemos ahora las secciones verticales. Como  $x^2 \leq 1$  y  $(x-1)^2 \leq 1$ , entonces tenemos que  $x \in [0, 1]$ . Por tanto, para  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  tenemos que  $\Omega_x = \emptyset$ , en caso contrario:

- Si  $x \in [0, 1/2]$ , entonces  $y^2 \leq 2x - x^2$ , por lo que:

$$\Omega_x = \left[ -\sqrt{2x - x^2}, \sqrt{2x - x^2} \right]$$

- Si  $x \in [1/2, 1]$ , entonces  $y^2 \leq 1 - x^2$ , por lo que:

$$\Omega_x = \left[ -\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2} \right]$$

Por el Teorema de Fubini, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^{1/2} \left( \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} x \, dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx \end{aligned}$$

Resolvamos ahora las integrales internas:

$$\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} x \, dy = x [y]_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} = x \left( \sqrt{2x-x^2} - (-\sqrt{2x-x^2}) \right) = 2x\sqrt{2x-x^2}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy = x [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = x \left( \sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \right) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Calculemos ahora las integrales externas. Para la primera integral, tenemos que:

$$\int_0^{1/2} 2x\sqrt{2x-x^2} \, dx = \int_0^{1/2} 2x\sqrt{1-(x-1)^2} \, dx$$

Sea ahora la función  $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\varphi(t) = \cos(t) + 1$ . Entonces, tenemos que  $\varphi \in C^1([0, 1])$ , y además  $\varphi(\pi) = 0$  y  $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1/2$ . Por tanto, por

el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1/2} 2x\sqrt{1-(x-1)^2} dx &= \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} 2(\cos(t)+1)\sin(t) \cdot (-\sin(t)) dt \\
 &= -2 \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos(t)+1)\sin^2(t) dt = -2 \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(t)\sin^2(t) dt - 2 \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2(t) dt \\
 &= -2 \left[ \frac{\sin^3(t)}{3} \right]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} - 2 \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = -\frac{2}{3} [\sin^3(t)]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} - \left[ t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \\
 &= -\frac{2}{3} \left( \sin^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin^3(\pi) \right) - \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{2} - \pi + \frac{\sin(2\pi)}{2} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Para la segunda integral, definimos  $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\psi(t) = \cos(t)$ . Entonces, tenemos que  $\psi \in C^1([0, 1])$ , y además  $\psi(0) = 1$  y  $\psi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2$ . Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{1/2}^1 2x\sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 2\cos(t)\sin(t) \cdot (-\sin(t)) dt = -2 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos(t)\sin^2(t) dt \\
 &= -2 \left[ \frac{\sin^3(t)}{3} \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 = -\frac{2}{3} \left( \sin^3(0) - \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^{1/2} 2x\sqrt{2x-x^2} dx + \int_{1/2}^1 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

*Observación.* Notemos que, en este ejercicio, no habría sido necesario demostrar que  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  demostrando que  $f$  y  $\Omega$  son acotadas. Como se tiene que  $f(x, y) = x \geq 0$  para todo  $(x, y) \in \Omega$ , entonces podríamos haber trabajado con la integral definida para  $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^2)$ , y al ver que esta integral es finita, como  $|f| = f$ , entonces  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ . No obstante, para acostumbrarnos al otro proceso, se ha optado por la primera forma. Esta segunda opción se trabajará en el siguiente ejercicio.

3.  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < y < z\}$ ,

$$f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

El conjunto  $\Omega$  es un abierto por ser la intersección de tres abiertos, luego  $\Omega \in \mathcal{M}_3$ . Además, como  $f$  es continua, entonces es medible. Para ver si  $f$  es integrable en  $\Omega$  no podemos razonar de la misma forma que en los ejercicios anteriores, ya que  $\Omega$  no está acotado. No obstante, tenemos que  $f(x, y, z) =$

$e^{-(x+y+z)} \geq 0$  para todo  $(x, y, z) \in \Omega$ , por lo que trabajaremos con  $|f| = f$ . Por el Teorema de Tonelli aplicado dos veces consecutivamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, y, z)| \, d(x, y, z) &= \int_{\Omega} e^{-(x+y+z)} \, d(x, y, z) = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_x^{\infty} \left( \int_y^{\infty} e^{-(x+y+z)} \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_x^{\infty} [-e^{-(x+y+z)}]_y^{\infty} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_x^{\infty} e^{-(x+2y)} dy \right) dx = \int_0^{\infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-(x+2y)} \right]_x^{\infty} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-3x} dx = \left[ -\frac{1}{6} e^{-3x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  y  $\int_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \frac{1}{6}$ .

**Ejercicio 2.4.3.** En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función  $f$  en el conjunto  $\Omega$ .

$$1. \, f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \quad \forall (x, y) \in \Omega = ]0, \pi/2[ \times \mathbb{R}^+,$$

Veamos si  $f$  es integrable en  $\Omega$ . Para ello, tenemos que:

$$\int_{\Omega} |f(x, y)| \, d(x, y) = \int_{\Omega} \left| \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \right| \, d(x, y) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \, d(x, y)$$

Como se trata de una función medible positiva, por el Teorema de Tonelli tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \, d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} [\arctan(y)]_0^{\infty} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2\sqrt{\sin x}} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx \end{aligned}$$

Resolver esta última integral no es sencillo, aunque no será necesario. Sea  $I = ]0, \pi/2[$ . Definimos  $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g(x) = 1/\sqrt{\sin x}$  y  $h(x) = 1/\sqrt{x}$ . Entonces, como  $g, h$  son continuas, tenemos que  $f, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(I)$ , con  $h(x) \neq 0$  en  $I$ . Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que  $g \in \mathcal{L}_1(I)$  si y solo si  $h \in \mathcal{L}_1(I)$ . Como  $h \in \mathcal{L}_1(I)$  por ser  $h(x) = x^{-1/2}$  y  $-1/2 > -1$ , tenemos que  $h \in \mathcal{L}_1(I)$ , luego  $g \in \mathcal{L}_1(I)$ . Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Omega} |f(x, y)| d(x, y) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} d(x, y) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx < \infty$$

Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ .

$$2. f(x, y) = (x - y)e^{-(x-y)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

Demostremos que  $f \notin \mathcal{L}_1(\Omega)$  por contrarecíproco. Calcularemos en primer lugar las primeras integrales de  $f$  en  $\Omega$ . Tenemos que:

$$\int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dy$$

Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\varphi(t) = x - t$ . Tenemos que  $\varphi(x) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \infty$ . Tenemos entonces por el Teorema de Cambio de Variable que:

$$\int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dy = - \int_x^{-\infty} te^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^x te^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_{-\infty}^x = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

En segundo lugar, tenemos:

$$\int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dx$$

Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\psi(t) = t + y$ . Tenemos que  $\psi(-y) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$ . Tenemos entonces por el Teorema de Cambio de Variable que:

$$\int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dx = \int_{-y}^{\infty} te^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_{-y}^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-y^2}$$

Supongamos que  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ . Entonces, por el Teorema de Fubini, tenemos que sus integrales iteradas coinciden, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dy \right) dx &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} (x - y)e^{-(x-y)^2} dx \right) dy \iff \\ &\iff -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini, sabemos que ambas integrales obtenidas son finitas, y además no son nulas por ser positivas. Por tanto, hemos llegado a un absurdo, puesto que ambas integrales son idénticas pero  $-1/2 \neq 1/2$ . Por tanto, el Teorema de Fubini no es aplicable, de lo que deducimos que  $f \notin \mathcal{L}_1(\Omega)$ .

$$3. f(x, y, z) = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega = \mathbb{R}^3.$$

Veamos si  $f$  es integrable en  $\Omega$ . Para ello, vemos si  $\int_{\Omega} |f(x, y, z)| d(x, y, z) < \infty$ .

Tenemos que:

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{3}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} \leq \frac{3}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

Usando el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, y, z)| d(x, y, z) &\leq \int_{\Omega} \frac{3}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)} d(x, y, z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{3}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)} dz \right) dy \right) dx = \\ &= 3 \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} dz \right) = \\ &= 3\pi^3 < \infty \end{aligned}$$

Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ .

**Ejercicio 2.4.4.** Probar que el siguiente conjunto es medible y calcular su volumen.

$$E = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \mid x + y + z \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Veamos que  $E$  es medible. Para ello, veamos que  $E$  es cerrado. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y, z) = x + y + z$ . Entonces, tenemos que  $E = f^{-1}([-\infty, 1])$ , que es cerrado, luego  $E$  es cerrado. Por tanto,  $E \in \mathcal{M}_3$ . Para calcular el volumen de  $E$ , calculamos sus secciones verticales. Para ello, sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ . Entonces, se tiene que  $E_{(x,y)} = \emptyset$  si  $(x, y) \notin A$ , mientras que:

$$E_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid x + y + z \leq 1\} = [0, 1 - x - y] \quad \forall (x, y) \in A$$

Por tanto, por el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_3(E) &= \int_A \lambda_1(E_{(x,y)}) d(x, y) = \int_A \lambda_1([0, 1 - x - y]) d(x, y) = \\ &= \int_A (1 - x - y) d(x, y) \end{aligned}$$

Para resolver esta nueva integral doble, calculamos las secciones verticales de  $A$ . Tenemos que  $A_x = \emptyset$  si  $x \notin [0, 1]$ , mientras que:

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1 - x\} = [0, 1 - x] \quad \forall x \in [0, 1]$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_3(E) &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ (1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( (1 - x)^2 - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( 1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen de  $E$  es  $1/6$ .

## 2.5. Teorema de Cambio de Variable

### 2.5.1. Repaso teórico

Repasamos ahora los conceptos teóricos necesarios para realizar cambios de variable en varias variables. A diferencia de los cambios de variable en integrales simples, la oportunidad de aplicar estos cambios son muy puntuales, en situaciones donde tengamos claras simetrías.

#### Teoremas

**Definición 2.3** (Difeomorfismo). Dados dos abiertos  $\Omega, G \subseteq \mathbb{R}^N$ , una función  $\phi : \Omega \rightarrow G$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  cuando  $\phi$  es biyectiva y, tanto  $\phi$  como  $\phi^{-1}$  son de clase  $C^1$ .

**Proposición 2.15.** Si  $\phi : \Omega \rightarrow G$  es un difeomorfismo, entonces preserva los conjuntos medibles.

**Teorema 2.16** (Teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas).

Sea  $\phi : \Omega \rightarrow G$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^N$ . Dado un conjunto medible  $E \subseteq \Omega$  y una función medible positiva  $f : \phi(E) \rightarrow [0, \infty]$ , consideramos la función  $g : E \rightarrow [0, \infty]$  definida por  $g(t) = f(\phi(t))|det J\phi(t)|$  para todo  $t \in E$ . Entonces  $g$  es medible y su integral sobre  $E$  coincide con la de  $f$  sobre  $\phi(E)$ , es decir:

$$\int_{\phi(E)} f(x)dx = \int_E f(\phi(t))|det J\phi(t)|dt$$

**Teorema 2.17** (Teorema de cambio de variable).

Sea  $\phi : \Omega \rightarrow G$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^N$ . Dado un conjunto medible  $E \subseteq \Omega$  y una función medible  $f : \phi(E) \rightarrow \mathbb{R}$ , se considera la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(t) = f(\phi(t))|det J\phi(t)|$  para todo  $t \in E$ . Entonces  $f$  es integrable en  $\phi(E)$  si, y sólo si,  $g$  es integrable en  $E$ , en cuyo caso se tiene:

$$\int_{\phi(E)} f(x)dx = \int_E f(\phi(t))|det J\phi(t)|dt$$

Normalmente tendremos un conjunto medible  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  y una función medible  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , y queremos usar el cambio de variable  $\phi : \Omega \rightarrow G$ , por lo que si no tenemos que  $A \subseteq G$  podemos pensar que no podemos aplicarlo. Sin embargo, basta con que  $\lambda(A \setminus G) = 0$ .

Los cambios de variable que veremos a continuación se basan en que  $\lambda(\mathbb{R}^N \setminus G) = 0$ , luego podremos aplicarlos sea cual sea el conjunto  $A$ .

#### Cambios usuales

Normalmente, sólo aplicaremos los siguientes cambios de variable.



**Teorema 2.18** (Cambio de variable a coordenadas polares).

Dado un conjunto medible  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  y una función medible  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos el conjunto medible:

$$E = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A\}$$

y la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , para todo  $(\rho, \theta) \in E$ . Entonces  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si, y sólo si,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , en cuyo caso se tiene:

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_E \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d(\rho, \theta)$$

Donde hemos usado el cambio de variable dado por la función  $\phi : \Omega = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad \forall (\rho, \theta) \in \Omega$$

de esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= 2 \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \end{aligned}$$

y que  $\det J\phi(\rho, \theta) = \rho > 0 \quad \forall (\rho, \theta) \in \Omega$ .

Se trata de un cambio de variable útil cuando el conjunto sobre el que se integra presenta una simetría central, o que se pueda simplificar el integrando sustituyendo varios de sus términos por  $\rho$ .

**Teorema 2.19** (Cambio de variable a coordenadas cilíndricas).

Dado un conjunto medible  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  y una función medible  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos el conjunto medible:

$$E = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \in A\}$$

y la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(\rho, \theta, z) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ , para todo  $(\rho, \theta, z) \in E$ . Entonces  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si, y sólo si,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , en cuyo caso se tiene:

$$\int_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_E \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) d(\rho, \theta, z)$$

Donde hemos usado el cambio de variable dado por la función  $\phi : \Omega = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \Omega$$

de esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= 2 \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \end{aligned}$$

y que  $\det J\phi(\rho, \theta, z) = \rho > 0 \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \Omega$ .

Se trata de un cambio de variable útil cuando el conjunto sobre el que se integra presenta una simetría axial, o que se pueda simplificar el integrando sustituyendo varios de sus términos por  $\rho$ .

**Teorema 2.20** (Cambio de variable a coordenadas esféricas).

Dado un conjunto medible  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  y una función medible  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos el conjunto medible:

$$E = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \mid (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) \in A\}$$

y la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$ , para todo  $(r, \theta, \varphi) \in E$ . Entonces  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si, y sólo si,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , en cuyo caso se tiene:

$$\int_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_E r^2 \cos \varphi f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) d(r, \theta, \varphi)$$

Donde hemos usado el cambio de variable dado por la función  $\phi : \Omega = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) \quad \forall (r, \theta, \varphi) \in \Omega$$

de esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= 2 \arctg \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ \varphi &= \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

$$\text{y que } \det J\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi > 0 \quad \forall (r, \theta, \varphi) \in \Omega.$$

Se trata de un cambio de variable útil cuando el conjunto sobre el que se integra presenta una simetría central, o que se pueda simplificar el integrando sustituyendo varios de sus términos por  $r$ .

## 2.5.2. Ejercicios

**Ejercicio 2.5.1.** En cada uno de los siguientes casos, probar que la función  $f$  es integrable en el conjunto  $A$  y calcular su integral:

$$1. A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1, y > 0\}$$

$$f(x, y) = \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \quad \forall (x, y) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 3/2)$$

Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas polares. Para ello, en primer lugar obtenemos el conjunto  $E$  siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A\} \\ &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho > 1, \sin \theta > 0\} \\ &= ]1, +\infty[ \times ]0, \pi[ \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  como:

$$g(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho^{2\alpha}}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si y solo si  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , y en tal caso:

$$\int_A f = \int_E g$$

Veamos si  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ . Por el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_E |g(\rho, \theta)| d(\rho, \theta) &\leq 2 \int_E \rho^{2-2\alpha} d(\rho, \theta) = 2 \int_0^\pi \left( \int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha} d\rho \right) d\theta = \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha} d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \right]_1^{+\infty} \stackrel{(*)}{=} \frac{2\pi}{2\alpha-3} < \infty \end{aligned}$$

donde, en (\*), hemos usado que  $\alpha > 3/2$ , por lo que  $3-2\alpha < 0$ . Por tanto,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , y por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  con:

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_E g = \int_0^\pi \left( \int_1^{+\infty} \frac{\rho^2(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho^{2\alpha}} d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) \left( \int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha} d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) \left[ \frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \right]_1^{+\infty} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\alpha-3} \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\alpha-3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi = \frac{2}{2\alpha-3} \end{aligned}$$

2.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, z > 1\}$

$$f(x, y, z) = z^\alpha (x^2 + y^2)^\beta \quad \forall (x, y, z) \in A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < -1 < \beta)$$

Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas cilíndricas. Para ello, en primer obtener el conjunto  $E$  siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \in A\} \\ &= \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mid 0 < \rho < 1, z > 1\} \\ &= ]0, 1[ \times ]-\pi, \pi[ \times ]1, +\infty[ \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  como:

$$g(\rho, \theta, z) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = z^\alpha \rho^{2\beta+1}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable para funciones medibles positivas, junto con el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_E g = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_1^{+\infty} z^\alpha \rho^{2\beta+1} dz \right) d\rho \right) d\theta = \\ &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left( \int_0^1 \rho^{2\beta+1} d\rho \right) \left( \int_1^{+\infty} z^\alpha dz \right) = \\ &= 2\pi \left[ \frac{\rho^{2\beta+2}}{2\beta+2} \right]_0^1 \left[ \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = \\ &= -\frac{2\pi}{2\beta+2} \cdot \frac{1}{\alpha+1} = -\frac{\pi}{(\beta+1)(\alpha+1)} \end{aligned}$$

Por tanto, como la integral es finita,  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  y su valor es el calculado.

$$3. A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$$

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} \quad \forall (x, y, z) \in A$$

Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas esféricas. Para ello, en primer lugar obtenemos el conjunto  $E$  siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \mid (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) \in A\} \\ &= \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \mid r > 1, \varphi, \theta \in ]0, \pi/2[\} \\ &= ]1, +\infty[ \times ]0, \pi/2[ \times ]0, \pi/2[ \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  como:

$$\begin{aligned} g(r, \theta, \varphi) &= r^2 \cos \varphi \cdot f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) = \frac{r^5 \cos^3 \varphi \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r^8} = \\ &= \frac{\cos^3 \varphi \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r^3} \end{aligned}$$

Veamos que  $g \in \mathcal{L}_1(E)$  usando el Teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_E |g(r, \theta, \varphi)| d(r, \theta, \varphi) &\leq \int_E \frac{1}{r^3} d(r, \theta, \varphi) = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^3} \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi^2}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi^2}{4} \left[ -\frac{1}{2r^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8} < \infty \end{aligned}$$

Por tanto,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , y por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$ . Para calcular la integral, hay dos formas de proceder: Calcular la integral de forma normal, usando el Teorema de Cambio de Variable y el

Teorema de Fubini.

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_E g = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 \varphi \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r^3} dr \right) d\theta \right) d\varphi = \\
 &= \left( \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left( \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^3} \right) = \\
 &= \left[ -\frac{\cos^4 \varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[ -\frac{1}{2r^2} \right]_1^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.5.2.** En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función  $f$  en el conjunto  $A$ :

1.  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \forall (x, y) \in A$$

En primer lugar, descomponemos el conjunto  $A$  en dos conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} \\
 A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}
 \end{aligned}$$

tenemos que  $A = A_1 \uplus A_2$ . Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si y solo si  $f \in \mathcal{L}_1(A_1)$  y  $f \in \mathcal{L}_1(A_2)$ . Estudiemos en primer lugar la integrabilidad de  $f$  en  $A_1$ . Para ello, aplicaremos el cambio de variable a coordenadas polares. Obtenemos el conjunto  $E_1$  siguiente:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A_1\} \\
 &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho > 1\} \\
 &= ]1, \infty[ \times ]-\pi, \pi[
 \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$g_1(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \cdot \frac{\sin(\rho \cos \theta) \sin(\rho \sin \theta)}{\rho^3} = \frac{\sin(\rho \cos \theta) \sin(\rho \sin \theta)}{\rho^2}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A_1)$  si y solo si  $g_1 \in \mathcal{L}_1(E_1)$ . Veamos si  $g_1 \in \mathcal{L}_1(E_1)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{E_1} |g_1(\rho, \theta)| d(\rho, \theta) &\leq \int_{E_1} \frac{1}{\rho^2} d(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \right) d\theta = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \\
 &= 2\pi \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_1^{+\infty} = 2\pi < \infty
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $g_1 \in \mathcal{L}_1(E_1)$ , y por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A_1)$ .

*Observación.* Es cierto que no es fácil que se nos ocurra descomponer  $A$  en  $A_1$  y  $A_2$ . No obstante, el razonamiento seguido sería el lógico, y si no se hubiese descompuesto en ambos conjuntos aquí nos encontraríamos con un problema, puesto que la función  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  no es integrable en  $]0, c[$  para ningún  $c \in \mathbb{R}^+$ . Por esto, tomando  $c = 1$ , conseguimos que ahora sí sea integrable en  $A_1$ . Para  $A_2$  será necesario un razonamiento más sutil.

Estudiemos ahora la integrabilidad de  $f$  en  $A_2$ . Para ello, aplicamos el cambio de variable a coordenadas polares. Obtenemos el conjunto  $E_2$  siguiente:

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A_2\} \\ &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho \leq 1\} \\ &= ]0, 1] \times ]-\pi, \pi[ \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$g_2(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \cdot \frac{\sin(\rho \cos \theta) \sin(\rho \sin \theta)}{\rho^3} = \frac{\sin(\rho \cos \theta) \sin(\rho \sin \theta)}{\rho^2}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A_1)$  si y solo si  $g_2 \in \mathcal{L}_1(E_2)$ . Para acotar  $g_2$ , hacemos uso de la Desigualdad del Valor Medio para funciones de una variable, de la que deducimos que:

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leq |t - 0| \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies |\sin(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que:

$$|g_2(\rho, \theta)| = \left| \frac{\sin(\rho \cos \theta) \sin(\rho \sin \theta)}{\rho^2} \right| \leq \frac{|\rho \cos \theta| \cdot |\rho \sin \theta|}{\rho^2} \leq 1 \quad \forall (\rho, \theta) \in E_2$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{E_2} |g_2(\rho, \theta)| \, d(\rho, \theta) \leq \int_{E_2} 1 \, d(\rho, \theta) = \lambda(E_2) = \lambda([0, 1]) \cdot \lambda(]-\pi, \pi[) = 2\pi < \infty$$

Por tanto,  $g_2 \in \mathcal{L}_1(E_2)$ , y por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A_2)$ . Como  $f \in \mathcal{L}_1(A_1)$  y  $f \in \mathcal{L}_1(A_2)$ , tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$ .

2.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > x^2 + y^2\}$

$$f(x, y, z) = (x^3 + y^3) \cos(xy) e^{-z} \quad \forall (x, y, z) \in A$$

Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas cilíndricas. Para ello, en primer lugar obtenemos el conjunto  $E$  siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \in A\} \\ &= \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \mid z > \rho^2\} \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  para cada  $(\rho, \theta, z) \in E$  como:

$$g(\rho, \theta, z) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = \rho^4 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \cos(\rho^2 \cos \theta \sin \theta) e^{-z}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si y solo si  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ . Para estudiar la integrabilidad de  $g$ , veamos si  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , para lo cual usaremos el Teorema de Tonelli dos veces:

$$\begin{aligned} \int_E |g(\rho, \theta, z)| d(\rho, \theta, z) &\leq \int_E \rho^4 e^{-z} d(\rho, \theta, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^{+\infty} \left( \int_{\rho^2}^{+\infty} \rho^4 e^{-z} dz \right) d\rho \right) d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^4 \left( \int_{\rho^2}^{+\infty} e^{-z} dz \right) d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^4 [-e^{-z}]_{\rho^2}^{+\infty} d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^4 e^{-\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

Para ver si dicha última función es integrable, podemos hacer uso del Criterio de Comparación con la función  $x \mapsto e^{-x}$ , integrable en  $\mathbb{R}_0^+$ . Como ambas son continuas, sabemos que son localmente integrables en  $\mathbb{R}_0^+$ . Tenemos el siguiente límite:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho^4 e^{-\rho^2}}{e^{-\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^4 e^{-\rho^2 + \rho} = 0$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, como la función empleada para comparar es integrable, tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} \rho^4 e^{-\rho^2} d\rho < \infty$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_E |g(\rho, \theta, z)| d(\rho, \theta, z) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^4 e^{-\rho^2} d\rho < \infty$$

Por tanto,  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ , y por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$ .

3.  $A = \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} \quad \forall (x, y, z) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$$

Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas esféricas. Para ello, en primer lugar obtenemos el conjunto  $E$  siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \mid (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) \in A\} \\ &= \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \end{aligned}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $(r, \theta, \varphi) \in E$  como:

$$g(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos \varphi}{(1 + r^2)^\alpha}$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(A)$  si y solo si  $g \in \mathcal{L}_1(E)$ . Para estudiar la integrabilidad de  $g$ , usamos el Teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_E g(r, \theta, \varphi) d(r, \theta, \varphi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \cos \varphi}{(1+r^2)^\alpha} dr \right) d\varphi \right) d\theta = \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \cos \varphi}{(1+r^2)^\alpha} dr \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) \left( \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{(1+r^2)^\alpha} dr \right) = \\ &= 4\pi \left( \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{(1+r^2)^\alpha} dr \right) \end{aligned}$$

Para estudiar la integrabilidad de la última integral, como tiene extensión continua en  $\mathbb{R}_0^0$  sabemos que será integrable en  $[0, 1]$ , luego nos centraremos en estudiar su integrabilidad en  $[1, +\infty[$ . Para ello, podemos hacer uso de la función  $r \mapsto r^{2-2\alpha}$ . Como ambas son continuas, sabemos que son localmente integrables en  $[1, +\infty[$ . Tenemos el siguiente límite:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\frac{r^2}{(1+r^2)^\alpha}}{r^{2-2\alpha}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{2\alpha}}{(1+r^2)^\alpha} = 1$$

Por tanto, por el Criterio de Comparación, tenemos que la función cuya integrabilidad queremos estudiar es integrable si y solo si lo es la función  $r \mapsto r^{2-2\alpha}$ . Esta última sabemos que es integrable en  $[1, +\infty[$  si y solo si  $2-2\alpha < -1 \iff \alpha > 3/2$ . Por tanto, la función  $f$  es integrable en  $A$  si y solo si  $\alpha > 3/2$ .

**Ejercicio 2.5.3.** Calcular el volumen de la llamada *bóveda de Viviani*:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x-1)^2 + 4y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

Tenemos que  $B$  es cerrado y acotado, luego es compacto. Por tanto,  $B \in \mathcal{M}_3$ . El conjunto  $B$  podemos expresarlo como sigue:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x-1)^2 + 4y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Definimos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x-1)^2 + 4y^2 \leq 1\}$  y la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \quad A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{1-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Como  $A \in \mathcal{M}_2$  por ser cerrado y  $f$  es medible por ser continua, tenemos que  $\text{Sg}(f) \in \mathcal{M}_3$ . Además, sabemos que  $\lambda_3(B) = \lambda_3(\text{Sg}(f))$ , por lo que:

$$\lambda_3(B) = \int_A \sqrt{1-x^2-y^2} d(x, y)$$



Aplicaremos el cambio de variable a coordenadas polares. Para ello, en primer lugar obtenemos el conjunto  $E$  de las coordenadas polares de los puntos de  $A$ . Si  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , se tiene que  $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A$  si y solo si:

$$\begin{aligned} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A &\iff (2\rho \cos \theta - 1)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \theta \leq 1 \iff \\ \iff 4\rho^2 \cos^2 \theta - 4\rho \cos \theta + 1 + 4\rho^2 \sin^2 \theta &\leq 1 \iff 4\rho^2 - 4\rho \cos \theta \leq 0 \iff \\ \iff \rho^2 - \rho \cos \theta &\leq 0 \iff \rho(\rho - \cos \theta) \leq 0 \iff \rho \leq \cos \theta \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto  $E$  es:

$$E = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \mid \rho \leq \cos \theta\}$$

Definimos por tanto la función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $(\rho, \theta) \in E$  como:

$$g(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \sqrt{1 - \rho^2}$$

Usando el Teorema de Cambio de Variable, junto con el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_3(B) &= \int_A \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, d(x, y) = \int_E \rho \sqrt{1 - \rho^2} \, d(\rho, \theta) = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos \theta} \rho \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos \theta} -2\rho \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ (1 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta)^{3/2} - 1 \, d\theta = -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \theta|^3 \, d\theta + \frac{1}{3} [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \left( \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right) = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \left( [-\cos \theta]_0^{\pi/2} + \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \left[ -\cos(\pi/2) + \frac{\cos^3(\pi/2)}{3} + \cos(0) - \frac{\cos^3(0)}{3} \right] = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 4}{9} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.5.4** (Extraordinaria DGIIM 22-23). Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \alpha < \beta$ , probar que el siguiente conjunto es medible y calcular su volumen:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \alpha^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq \beta^2\}$$

Tenemos que  $E$  es intersección de dos cerrados, luego es cerrado y, por tanto,  $E \in \mathcal{M}_3$ . Para calcular su volumen, dados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , calculamos la sección vertical siguiente:

$$E_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in E\} = \{z \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \beta^2, x^2 + y^2 \leq \alpha^2\}$$

Consideramos el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \alpha^2\}$ , y tenemos claramente que  $E_{(x,y)} = \emptyset$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ . Para  $(x, y) \in A$ , tenemos que:

$$E_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \beta^2\} = \left[-\sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2}\right]$$

Por tanto, por el Teorema de Tonelli en el caso particular de una función característica, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_3(E) &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1(E_{(x,y)}) d(x, y) = \int_A 2\sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2} d(x, y) = \\ &= 2 \int_A \sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2} d(x, y) \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, realizamos un cambio de variable a coordenadas polares. Calculemos  $E$ , el conjunto de coordenadas polares de los puntos de  $A$ :

$$E = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho \leq \alpha\} = ]0, \alpha] \times ]-\pi, \pi[$$

Por el Teorema de Cambio de Variable, junto con el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_3(E) &= 2 \int_A \sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2} d(x, y) = 2 \int_E \rho \sqrt{\beta^2 - \rho^2} d(\rho, \theta) = \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^{\alpha} \rho \sqrt{\beta^2 - \rho^2} d\rho \right) d\theta = 4\pi \int_0^{\alpha} \rho \sqrt{\beta^2 - \rho^2} d\rho = \\ &= -\frac{4\pi}{2} \int_0^{\alpha} -2\rho \sqrt{\beta^2 - \rho^2} d\rho = -2\pi \left[ \frac{(\beta^2 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\alpha} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \left[ (\beta^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^{\alpha} = -\frac{4\pi}{3} \left[ (\beta^2 - \alpha^2)^{3/2} - \beta^3 \right] = \frac{4\pi}{3} \left[ \beta^3 - (\beta^2 - \alpha^2)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.5.5.** Sea  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$ , y sea la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = x \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Probar que la función  $f$  es integrable en  $\Omega$  y calcular su integral.

*Observación.* Notemos que este es el apartado 2 del Ejercicio 2.4.2. No obstante, se incluye aquí para mostrar otra forma de resolverlo, haciendo uso de coordenadas polares.

Sabemos que  $\Omega$  es cerrado y acotado, luego es compacto y, por tanto,  $\Omega \in \mathcal{M}_2$ . Además, como  $f$  es continua y  $\Omega$  es compacto, tenemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ . Para

calcular su integral, haremos uso de coordenadas polares. Para ello, en primer lugar, obtenemos el conjunto  $E$  de las coordenadas polares de los puntos de  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} E &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho \leq 1, \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta\} = \\ &= \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \mid \rho \leq 1, \rho \leq 2 \cos \theta\} \end{aligned}$$

Calculamos ahora las secciones horizontales de  $E$ . Fijado  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , tenemos:

$$\begin{aligned} E^\theta &= \{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid \rho \leq 1, \rho \leq 2 \cos \theta\} = \emptyset \quad \text{si } \cos \theta < 0 \iff \theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus ]-\pi/2, \pi/2[ \\ E^\theta &= [0, 1] \quad \text{si } 1 \leq 2 \cos \theta \iff \theta \in [-\pi/3, \pi/3] \\ E^\theta &= [0, 2 \cos \theta] \quad \text{si } 0 \leq 2 \cos \theta \leq 1 \iff \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus [-\pi/3, \pi/3] \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable, junto con el Teorema de Tonelli, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_E \rho^2 \cos \theta \, d(\rho, \theta) = \\ &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \left( \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 \cos \theta \, d\rho \right) d\theta + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( \int_0^1 \rho^2 \cos \theta \, d\rho \right) d\theta + \\ &\quad + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left( \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 \cos \theta \, d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \cos \theta \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \theta \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \theta \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} \cos^4 \theta \, d\theta + \frac{1}{3} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \theta \, d\theta + \frac{8}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{16}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta + \frac{2}{3} \int_0^{\pi/3} \cos \theta \, d\theta = \\ &= \frac{16}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta + \frac{2}{3} [\text{sen } \theta]_0^{\pi/3} = \frac{16}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

La resolución de la integral restante no es del todo sencilla, ya que requiere una buena idea. No obstante, al ser frecuente es didáctico resolverla. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) &= (\cos^2(\theta))^2 = \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \cos^2(2\theta) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4\theta) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4\theta) \right) d\theta = \\ &= \left[ \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) + \frac{\theta}{8} + \frac{1}{32} \text{sen}(4\theta) \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{64} = \frac{\pi}{16} - \frac{7\sqrt{3}}{64} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) = \frac{16}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16}{3} \left( \frac{\pi}{16} - \frac{7\sqrt{3}}{64} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$