

Cálculo II

Examen X

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen X

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2016-17.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial 2.

Ejercicio 1 (3 puntos). Enuncia con precisión el Teorema Fundamental del Cálculo. Demuéstralo.

Ejercicio 2 (3 puntos). Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba, entonces $f \circ f$ es también cóncava hacia arriba.

En el caso de que f fuese creciente, tendríamos que es cierto (Ejercicio 13 de la Relación 3). Por tanto, para encontrar un contraejemplo, necesitamos buscar una función decreciente y cóncava hacia arriba.

Sea $f(x) = e^{-x}$. Tenemos que es estrictamente decreciente. Veamos ahora que es cóncava hacia arriba.

$$f'(x) = -e^{-x} \quad f''(x) = e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, como $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que f es cóncava hacia arriba.

Veamos ahora si $f \circ f$ es cóncava hacia arriba. Como tenemos que $(f \circ f) \in C^\infty(\mathbb{R})$, usamos el criterio de la segunda derivada.

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x) = -e^{-e^{-x}}(-e^{-x}) = e^{-e^{-x}}e^{-x} = e^{-e^{-x}-x}$$

$$(f \circ f)''(x) = e^{-e^{-x}-x}(e^{-x} - 1)$$

Para $x > 0$, tenemos que $(f \circ f)''(x) < 0$, por lo que $f \circ f$ es cóncava hacia abajo en \mathbb{R}^+ . Por tanto, el enunciado es **falso**.

2. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ dos funciones uniformemente continuas. Entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

Tenemos que f es uniformemente continua; es decir:

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon}$$

Tenemos que g es uniformemente continua; es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\delta} > 0 \mid \text{Si } x, y \in B, \text{ con } |x - y| < \hat{\delta} \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta}$, y usando que $f(A) \subset B$, la continuidad uniforme de g queda:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\varepsilon} > 0 \mid \text{Si } f(x), f(y) \in B, \text{ con } |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon} \implies |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$$

Uniendo lo que tenemos, queda:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \implies |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \varepsilon$$

Es decir, se ha demostrado que $g \circ f$ es uniformemente continua, por lo que es **cierto**.

3. Toda función $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua está acotada.

Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

4. Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

Por reducción al absurdo, supongamos que f no está acotada. Entonces,

$$\exists \{x_n\} (x_n \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}) \mid \{|f(x_n)|\} \rightarrow +\infty$$

Como f tiene límite en $+\infty$, se tiene que:

$$\forall \{x'_n\} \rightarrow +\infty (x'_n \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}) \implies \{f(x'_n)\} \rightarrow L \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ no diverge, por lo que está acotada.

$$\exists M > 0 \mid |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideramos ahora $f_{]0,M[}$. Como f es uniformemente continua, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Por tanto, $f_{]0,M[}$ está acotado.

Por tanto, tenemos que $f(x_n) \in f_{]0,M[} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f(x_n)$ acotado. Pero como $\{|f(x_n)|\}$ diverge, llegamos a una contradicción.

Por tanto, f está acotada.

Observación. Tenemos que $\forall \{x_n\} \rightarrow +\infty$, tenemos que la imagen de la cola está acotada por $L + \varepsilon$, y que la imagen de los primeros términos, por ser un conjunto acotado y ser f uniformemente continua, también es uniformemente continua.

Ejercicio 3 (4 puntos). Definimos $G :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ como $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Calcular la imagen de G .

Como el integrando es una función continua en el intervalo de definición, tenemos que es Riemman Integrable. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que es derivable en $] -1, 1[$ con derivada:

$$G'(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x = \frac{2x^5}{\sqrt{1-x^4}} = 0 \iff x = 0$$

Por tanto, el único punto crítico es $x = 0$. Tenemos $G(0) = 0$. Además, como $\forall x^2 \in]0, 1[$ tenemos que la imagen del integrando es positiva, tenemos que $G(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-1, 1[$. Por tanto, se trata de un mínimo relativo. Al ser G continua y solo tener un punto que anula a la primera derivada, es también absoluto.

Calculamos las siguientes imágenes:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} G(x) &= \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[\begin{array}{l} \text{sen } u = t \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos u \, du = dt \end{array} \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\text{sen}^2 u}{\sqrt{1-\text{sen}^2 u}} \cos u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 u}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u \, du\end{aligned}$$

Por el intervalo empleado para el cambio de variable, tengo que $\cos u > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} G(x) &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\text{sen}^2 u}{\cos u} \cos u \, du = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \text{sen}^2 u \, du = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, du = \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{t - \text{sen}(2t)}{2} \right]_0^b = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Como además $G(-x) = G(x)$ por ser G una función par, tenemos que:

$$Im(G) = \left[0, \frac{\pi}{4} \right[$$

2. Decidir si tiene solución la ecuación $G(x) = \frac{1}{3}$. ¿Y la ecuación $G(x) = 2$?

$G(x)$ es continua y definida en un intervalo. Tenemos que $Im(G) = \left[0, \frac{\pi}{4} \right[$. Por tanto,

$$\exists x \in]-1, 1[\mid G(x) = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{3} \in Im(G) \iff \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4} \iff 4 < 3\pi \quad \text{Cierto}$$

$$\exists x \in]-1, 1[\mid G(x) = 2 \iff 2 \in Im(G) \iff 2 < \frac{\pi}{4} \iff 8 < \pi \quad \text{Falso}$$

Por tanto, tenemos que para la primera ecuación sí hay solución, pero para la segunda no.