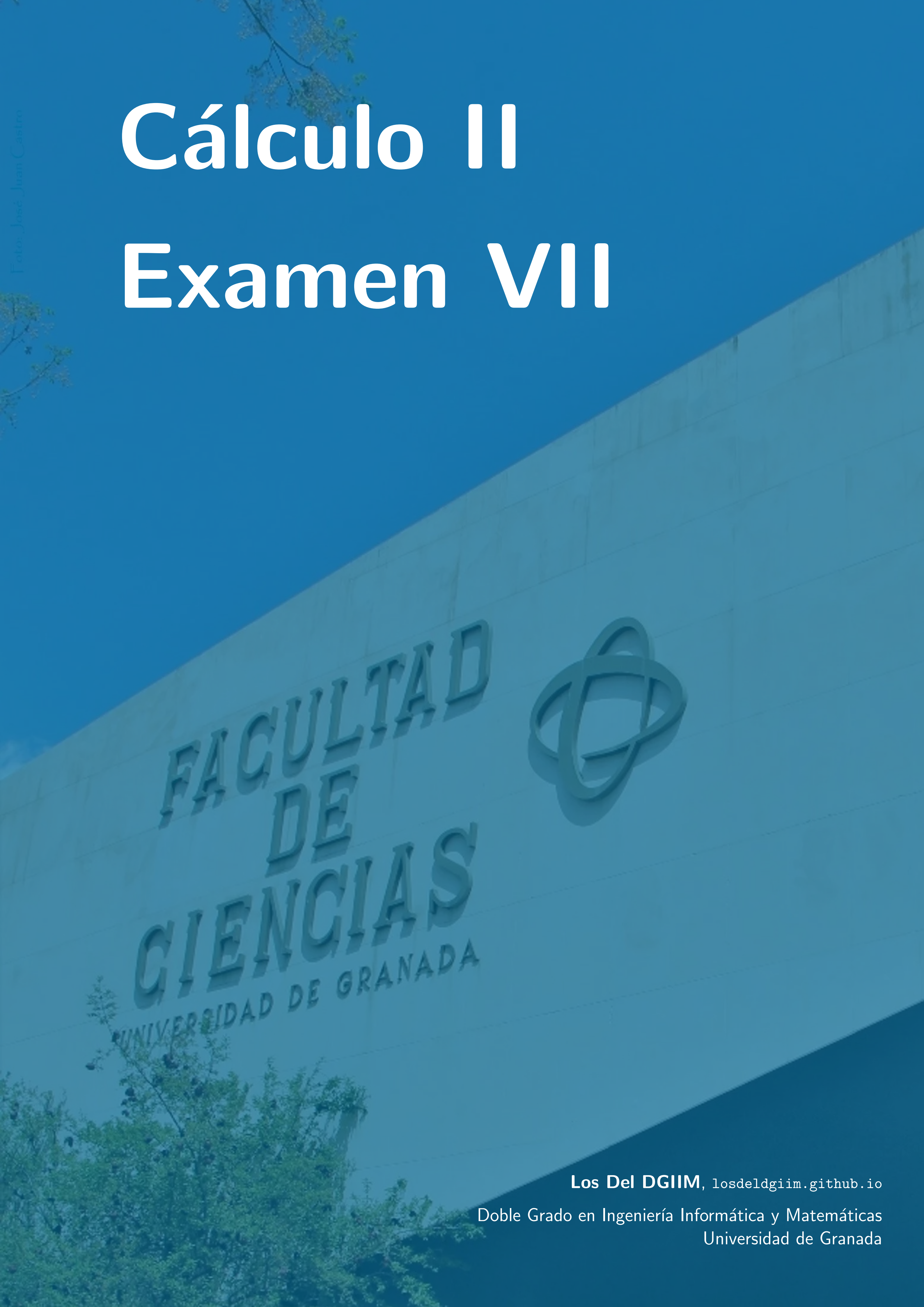
Cálculo II

Examen VII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2018-19.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Primera Parte. Derivación.

Fecha 24 de abril de 2019.

Ejercicio 1. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

- **Opción 1**: Sin usar la fórmula de Euler/Zapato:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{Ec.\ 1}{=} [1^{\infty}] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}\right)}{x}} \overset{Ec.\ 2}{=} e^0 = 1$$

donde he tenido que hacer uso de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1+\tan^2 x}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}\right)}{x} \overset{Ec.\ 1}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\cos x+1+\tan^2 x)2x-2(\operatorname{sen} x+\tan x)}{4x^2}}{\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+1+\tan^2 x)x-(\operatorname{sen} x+\tan x)}{x(\operatorname{sen} x+\tan x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[-\operatorname{sen} x+2\tan x(1+\tan^2 x)]x+\cancel{(\cos x+1+\tan^2 x)-\cos x-(1+\tan^2 x)}}{(\operatorname{sen} x+\tan x)+x[\cos x+(1+\tan^2 x)]} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[-\operatorname{sen} x+2\tan x(1+\tan^2 x)]x}{(\operatorname{sen} x+\tan x)+x[\cos x+(1+\tan^2 x)]} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(-\operatorname{sen} x+2\tan x+2\tan^3 x)x}{(\operatorname{sen} x+\tan x)+x[\cos x+(1+\tan^2 x)]} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[-\cos x+2(1+\tan^2 x)+6\tan^2 x(1+\tan^2 x)]x+(-\operatorname{sen} x+2\tan x+2\tan^3 x)}{\cos x+(1+\tan^2 x)+[\cos x+(1+\tan^2 x)]+x[-\operatorname{sen} x+2\tan x(1+\tan^2 x)]} = \\
&= \frac{0+0}{1+1+1+1+0} = \frac{0}{4} = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

- **Opción 2**: Usando la fórmula de Euler/Zapato:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{Ec.\ 1}{=} [1^{\infty}] \overset{Euler}{=} e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x}} \overset{Ec.\ 3}{=} e^0 = 1$$

donde he tenido que aplicar el criterio de Euler o del Zapato:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x+\tan x}{2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+\tan x-2x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1+\tan^2 x-2}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x+2\tan x(1+\tan^2 x)}{4} = \frac{0}{4} = 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

Ejercicio 2. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ derivable y tal que $f'(x) \neq 1,\ \forall x \in [0,1]$. Prueba que $\exists!\ c \in [0,1] \mid f(c) = c$.

Defino la función auxiliar $g : [0,1] \to [-1,2] \quad g(x) = f(x) - x$.
Demuestro, en primer lugar, que $\exists c \in [0,1] \mid g(c) = 0$.

- Supongo $f(0) = 0$: El valor buscado es $c = 0$.
- Supongo $f(1) = 1$: El valor buscado es $c = 1$.
- Supongo $f(0) \neq 0 \land f(1) \neq 1$:

$$g(0) = f(0) > 0 \qquad g(1) = f(1) - 1 < 0$$

Como g es continua por ser f derivable y continua, por el Teorema de Bolzano tengo que:

$$\exists c \in]0,1[\mid g(c) = 0 = f(c) - c \Longrightarrow f(c) = c$$

Demuestro ahora la unicidad de c. Supongamos que $\exists c' \in [0,1]$ tal que $f(c') = c'$. Por tanto, $g'(c') = 0$. Como $g(c) = g(c')$, por el Teorema de Rolle (sabiendo que g es derivable), tenemos que:

$$\exists d \in]0,1[\mid g'(d) = f'(d) - 1 = 0 \Longrightarrow f'(d) = 1$$

Sin embargo, llegamos a una contradicción, ya que $f'(x) \neq 1\ \forall x \in [0,1]$. Por tanto, la hipótesis es falsa y tenemos que c es único.

Ejercicio 3. Demuestra la siguiente desigualdad $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\arctan x}{1+x} < \ln(1+x)$$

Definimos $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \frac{\arctan x}{1+x} - \ln(1+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Necesitamos calcular la imagen de g.

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x) - \arctan x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

Calculamos los puntos que anulan a la primera derivada:

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1+x}{1+x^2} = \arctan x + (1+x) \Longleftrightarrow 1+x = (1+x^2)[\arctan x + (1+x)] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cancel{1+x} = \arctan x + \cancel{1+x} + x^2 \arctan x + x^2 + x^3 \Longleftrightarrow 0 = (1+x^2)\arctan(x) + x^2 + x^3$$

Tenemos que $x = 0$ es una solución. Además, para $x > 0$, tenemos que todos los sumandos son positivos ($\arctan x > 0\ \forall x > 0$). Por tanto, tenemos que el único punto crítico es $x = 0$. No obstante, $x = 0 \notin \mathbb{R}^+$, por lo que no tiene puntos críticos.

Como $g'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que g' es estrictamente decreciente.

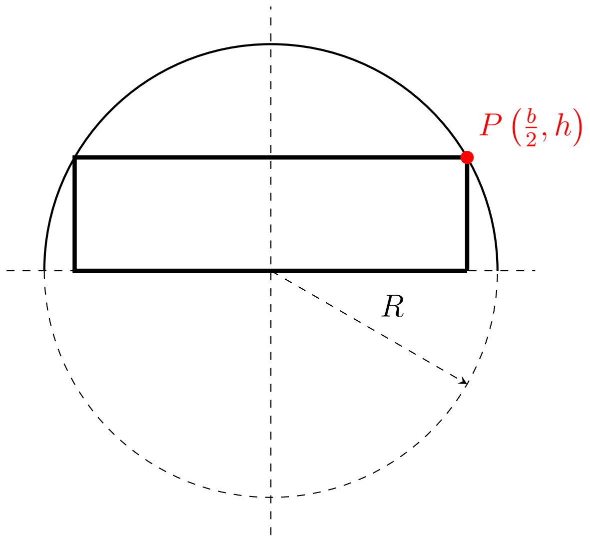
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{1+x} - \ln(1+x) = \frac{0}{1} - \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x}{1+x} - \ln(1+x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} - \infty = 0 - \infty = -\infty$$

Como g es estrictamente decreciente, y tenemos que $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$, sabiendo el valor de los límites en 0 y en $+\infty$ tenemos que $Im(g) = \mathbb{R}^-$. Por tanto,

$$\frac{\arctan x}{1+x} - \ln(1+x) < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \frac{\arctan x}{1+x} < \ln(1+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 4. Halla el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio $R > 0$, teniendo la base inferior sobre el diámetro.



La circunferencia de radio R tiene por ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Por tanto, como el punto P pertenece a la circunferencia, la ecuación de ligadura es:

$$\frac{b^2}{4} + h^2 = R^2 \Longrightarrow b = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

Por tanto, la ecuación que indica el área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A :]0, R[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ h &\longmapsto A(h) = bh = 2h\sqrt{R^2 - h^2} \end{aligned}$$

Como $A(h) \geqslant 0 \forall h \in]0, R[$, maximizar $A(h)$ equivale a maximizar $A^2(h)$:

$$A^2(h) = 4h^2(R^2 - h^2) = 4h^2R^2 - 4h^4$$

$$(A^2)'(h) = 8R^2h - 16h^3 = 0 \Longleftrightarrow h(8R^2 - 16h^2) = 0 \Longleftrightarrow 8R^2 = 16h^2 \Longleftrightarrow h = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Como $(A^2)''(h) = 8R^2 - 48h^2$, tenemos que:

$$(A^2)''\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 8R^2 - 48 \cdot \frac{R^2}{2} = 8R^2 - 24R^2 = -16R^2 < 0$$

Por tanto, $A^2(h)$ tiene un máximo relativo en $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Como $A(h) \geqslant 0 \ \forall h \in]0, R[$, tenemos que $A(x)$ también tiene un máximo relativo en el mismo punto. Además, como es el único extremo relativo de una función de clase 1, tenemos que es máximo absoluto.

Por tanto, el rectángulo de mayor área tiene las siguientes dimensiones:

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \qquad\qquad b = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \sqrt{2}R$$