Probabilidad

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Probabilidad

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de problemas

1.0. Preeliminares

Ejercicio 1. Se estudian las plantas de una determinada zona donde ha atacado un virus. La probabilidad de que cada planta esté contaminada es 0,35.

1. ¿Cuál es el número esperado de plantas contaminadas en 5 analizadas?
   Sea X la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 5 análisis. Como la probabilidad de que una planta esté contaminada es 0,35, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$X \sim B(5, 0{,}35)$$
   En este caso, como nos piden el número esperado de plantas contaminadas, tenemos que calcular la esperanza:
   $$E[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}35 = 1{,}75$$
   Por tanto, y como el número de plantas contaminadas ha de ser un número entero, el número esperado de plantas contaminadas en 5 análisis es 2.

2. Calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas en 9 exámenes.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 9 análisis. De igual forma que en el apartado anterior, sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 9$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$Y \sim B(9, 0{,}35)$$
   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas. Es decir:
   $$P[2 \leqslant Y \leqslant 5] = F_Y(5) - F_Y(1) = P[Y \leqslant 5] - P[Y \leqslant 1] \overset{(*)}{=} 0{,}9464 - 0{,}1211 = 0{,}8253$$
   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución binomial.

3. Hallar la probabilidad de encontrar 4 plantas no contaminadas en 6 análisis.

   Sea Z la variable aleatoria que representa el número de plantas contaminadas en 6 análisis. De igual forma que en los apartados anteriores, sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 6$ y $p = 0{,}35$. Es decir:
   $$Z \sim B(6, 0{,}35)$$

En este caso, nos piden calcular la probabilidad de encontrar 4 plantas no contaminadas. Es decir, la probabilidad de que 2 plantas estén contaminadas. Es decir:

$$P[Z = 2] = \binom{6}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^4 = 0{,}328$$

Ejercicio 2. Cada vez que una máquina dedicada a la fabricación de comprimidos produce uno, la probabilidad de que sea defectuoso es 0,01.

1. Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de comprimidos correctos en un tubo de 25. Como la probabilidad de que un comprimido sea defectuoso es 0,01, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 25$ y $p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Es decir:

   $$X \sim B(25, 0{,}99)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que en un tubo de 25 comprimidos todos sean buenos. Es decir:

   $$P[X = 25] = \binom{25}{25} \cdot 0{,}99^{25} \cdot 0{,}01^0 \approx 0{,}7778$$

2. Si los tubos se colocan en cajas de 10, ¿cuál es la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso?

   En primer lugar, obtenemos cuál es la probabilidad de que un tubo tenga un comprimido defectuoso. Tenemos que:

   $$P[X = 24] = \binom{25}{24} \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01^1 = \frac{25!}{24!1!} \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01 = 25 \cdot 0{,}99^{24} \cdot 0{,}01 \approx 0{,}1964$$

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de tubos con un comprimido defectuoso en una caja de 10. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 10$ y $p = 0{,}1964$. Es decir:

   $$Y \sim B(10, 0{,}1964)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso. Es decir:

   $$P[Y = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}1964^5 \cdot (1 - 0{,}1964)^5 \approx 0{,}02467$$

Ejercicio 3. Un pescador desea capturar un ejemplar de sardina que se encuentra siempre en una determinada zona del mar con probabilidad 0,15. Hallar la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de:

1. Pescar la sardina buscada.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de peces de especies distintas de la deseada que el pescador tiene que pescar antes de pescar la sardina buscada. Como la probabilidad de que la sardina buscada se encuentre en la zona es 0,15, tenemos que sigue una distribución de probabilidad geométrica con $p = 0{,}15$. Es decir:
   $$X \sim G(0{,}15)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de pescar la sardina buscada. Es decir:

   $$\begin{aligned} P[X = 10] &= P[X \leqslant 10] - P[X \leqslant 9] = (1 - (1 - 0{,}15)^{11}) - (1 - (1 - 0{,}15)^{10}) = \\ &= (1 - 0{,}15)^{10} - (1 - 0{,}15)^{11} = 0{,}85^{10} \cdot (1 - 0{,}85) \approx 0{,}029 \end{aligned}$$

2. Pescar tres ejemplares de la sardina buscada.

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de peces de especies distintas de la deseada que el pescador tiene que pescar antes de pescar tres ejemplares de la sardina buscada. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad negativa binomial con $k = 3$ y $p = 0{,}15$. Es decir:

   $$Y \sim BN(3, 0{,}15)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de pescar tres ejemplares de la sardina buscada. Es decir:

   $$\begin{aligned} P[Y = 10] &= \frac{(10 + 3 - 1)!}{10!(3 - 1)!} \cdot (1 - 0{,}15)^{10} \cdot 0{,}15^3 = \frac{12!}{10!2!} \cdot 0{,}85^{10} \cdot 0{,}15^3 = \\ &= \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 0{,}85^{10} \cdot 0{,}15^3 \approx 0{,}0438 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Un científico necesita 5 monos afectados por cierta enfermedad para realizar un experimento. La incidencia de la enfermedad en la población de monos es siempre del 30 %. El científico examinará uno a uno los monos de un gran colectivo, hasta encontrar 5 afectados por la enfermedad.

1. Calcular el número medio de exámenes requeridos.

   Consideraremos como éxito encontrar un mono afectado por la enfermedad. Sea X la variable aleatoria que representa el número de monos sanos que el científico tiene que examinar antes de encontrar 5 afectados. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad negativa binomial con $k = 5$ y $p = 0{,}3$. Es decir:
   $$X \sim BN(5, 0{,}3)$$

   En este caso, nos piden calcular el número medio de exámenes requeridos. Es decir:
   $$5 + E[X] = 5 + \frac{k(1 - p)}{p} = 5 + \frac{35}{3} = 16.\overline{6}$$

Por tanto, se espera que se tengan que examinar 17 monos para encontrar 5 afectados.

2. Calcular la probabilidad de que encuentre 10 monos sanos antes de encontrar los 5 afectados.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X=10] &= \frac{(10+5-1)!}{10!(5-1)!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{10} = \frac{14!}{10!45!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{10} = \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{10} \approx 0{,}0687 \end{aligned}$$

3. Calcular la probabilidad de que tenga que examinar por lo menos 20 monos.

   Como 5 de ellos serían afectados, se pide la probabilidad de que tenga que examinar al menos 15 monos sanos. Es decir:

$$P[X \geqslant 15] = 1 - P[X \leqslant 14] = 1 - 0{,}3^5 \cdot \sum_{i=0}^{14} \binom{i+4}{4} 0{,}7^i \approx 0{,}2822$$

Ejercicio 5. Se capturan 100 peces de un estanque que contiene 10000. Se les marca con una anilla y se devuelven al agua. Transcurridos unos días se capturan de nuevo 100 peces y se cuentan los anillados.

1. Calcular la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de peces anillados en la segunda captura. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10000$, $N_1 = 100$ y $n = 100$. Es decir:

$$X \sim H(10000, 100, 100)$$

   La probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado es:

$$\begin{aligned} P[X \geqslant 1] = 1 - P[X=0] = 1 - \frac{\binom{100}{0} \cdot \binom{9900}{100}}{\binom{10000}{100}} &= \\ = 1 - \frac{1 \cdot \dfrac{9900!}{100!9800!}}{\dfrac{10000!}{100!9900!}} = 1 - \frac{9900! \cdot 100! \cdot 9900!}{10000! \cdot 100! \cdot 9800!} \end{aligned}$$

   Como podemos ver, calcular dicha probabilidad de esta forma es complicado debido a la cantidad de factoriales que hay que calcular. Por ello, aproximaremos la distribución hipergeométrica a una binomial, tomando $n = 100$ y $p = \dfrac{N_1}{N} = \dfrac{100}{10000} = 0{,}01$. Es decir:

$$X \sim B(100, 0{,}01)$$

Por lo que la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado es:

$$P[X \geqslant 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{100}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{100} \approx 1 - 0{,}366 = 0{,}634$$

2. Calcular el número esperado de peces anillados en la segunda captura.

   El número esperado de peces anillados en la segunda captura es:

$$E[X] = n \cdot \frac{N_1}{N} = 100 \cdot \frac{100}{10000} = 1$$

   Usando la aproximaxión a la binomial, tenemos que:

$$E[X] = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}01 = 1$$

   Efectivamente vemos que el resultado en ambos casos coincide.

Ejercicio 6. Cada página impresa de un libro tiene 40 líneas, y cada línea tiene 75 posiciones de impresión. Se supone que la probabilidad de que en cada posición haya error es $1/6000$.

1. ¿Cuál es la distribución del número de errores por página?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de errores por página. Tenemos que hay $n = 40 \cdot 75 = 3000$ posiciones de impresión por página; y la probabilidad de que en cada posición haya error es $p = 1/6000$. Por lo que sigue una distribución de probabilidad binomial con:

$$X \sim B(3000, 1/6000)$$

   Tenemos además que X se puede aproximar a una distribución de Poisson con $\lambda = np = 3000 \cdot 1/6000 = 0{,}5$. Es decir:

$$X \sim \mathcal{P}(0{,}5)$$

2. Calcular la probabilidad de que una página no contenga errores y de que contenga como mínimo 5 errores.

   En primer lugar, calculamos la probabilidad de que una página no contenga errores. Es decir:

$$P[X = 0] = e^{-0{,}5} \cdot \frac{0{,}5^0}{0!} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$$

   Por otro lado, calculamos la probabilidad de que una página contenga como mínimo 5 errores. Es decir:

$$P[X \geqslant 5] = 1 - P[X \leqslant 4] \overset{(*)}{=} 1 - 0{,}998 = 0{,}002$$

   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución de Poisson.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores?

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de páginas sin errores en un capítulo de 20 páginas. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 20$ y $p = 0{,}6065$ (calculada en el apartado anterior). Es decir:
   $$Y \sim B(20, 0{,}6065)$$

   En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga errores. Es decir:
   $$P[Y = 20] = \binom{20}{20} \cdot 0{,}6065^{20} \cdot (1 - 0{,}6065)^0 \approx 4{,}53 \cdot 10^{-5}$$

Ejercicio 7. En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. La probabilidad de que cada unidad sea defectuosa es 0,05.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de unidades correctas inspeccionadas hasta encontrar la segunda defectuosa. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial negativa con $k = 2$ y $p = 0{,}05$. Es decir:
   $$X \sim BN(2, 0{,}05)$$

   Como buscamos la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa, hemos de calcular la probabilidad de encontrar 18 unidades no defectuosas antes de encontrar la segunda defectuosa. Es decir:
   $$\begin{aligned} P[X = 18] &= \frac{(18 + 2 - 1)!}{18!(2 - 1)!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} = \frac{19!}{18!1!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} = \\ &= 19 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx 0{,}0188 \end{aligned}$$

2. ¿Cuántas unidades deben inspeccionarse por término medio hasta encontrar cuatro defectuosas?

   Sea Y la variable aleatoria que representa el número de unidades correctas inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad binomial negativa con $k = 4$ y $p = 0{,}05$. Es decir:
   $$Y \sim BN(4, 0{,}05)$$

   En este caso, nos piden calcular el número medio de unidades que deben inspeccionarse hasta encontrar cuatro defectuosas. Es decir:
   $$4 + E[Y] = 4 + \frac{k(1 - p)}{p} = 4 + \frac{4 \cdot 0{,}95}{0{,}05} = 4 + 76 = 80$$

3. Calcular la desviación típica del número de unidades inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas.

   Tenemos que:

$$\mathrm{Var}[Y+4] \overset{(*)}{=} \mathrm{Var}[Y] = \frac{k(1-p)}{p^2} = \frac{4\cdot 0{,}95}{0{,}05^2} = 1520$$

   donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X] \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

   Por tanto:

$$\sigma_{Y+4} = \sqrt{1520} \approx 38{,}98$$

Ejercicio 8. Los números $1, 2, 3, ..., 10$ se escriben en diez tarjetas y se colocan en una urna. Las tarjetas se extraen una a una y sin devolución. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. Hay exactamente tres números pares en cinco extracciones.

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de números pares en cinco extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10$, $N_1 = 5$ y $n = 5$. Es decir:

$$X \sim H(10, 5, 5)$$

   La probabilidad de que haya exactamente tres números pares en cinco extracciones es:

$$P[X=3] = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{(5!)^4}{10!(3!)^2(2!)^2} = \frac{5^4\cdot 4^4\cdot 3^4\cdot 2^4}{10!\cdot 3^2\cdot 2^4} =$$
$$= \frac{5^4\cdot 3^4\cdot 2^{12}}{5^2\cdot 3^6\cdot 2^{12}\cdot 7} = \frac{5^2}{7\cdot 3^2} = \frac{25}{63} \approx 0{,}3968$$

2. Se necesitan cinco extracciones para obtener tres números pares.

   Definimos dos sucesos distintos:

   - A: Sacar 2 números pares en las primeras cuatro extracciones.
   - B: Sacar un número par en la quinta extracción.

   Nos piden calcular la probabilidad de que ocurra tanto A como B, es decir, $P(A\cap B)$. Tenemos que:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B \mid A)$$

   Calculemos ambas probabilidades por separado:

- Para calcular $P(A)$, sea Y la variable aleatoria que representa el número de números pares en las primeras cuatro extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10$, $N_1 = 5$ y $n = 4$. Es decir:

$$Y \sim H(10, 5, 4)$$

La probabilidad de que haya exactamente dos números pares en las primeras cuatro extracciones es:

$$P(A) = P[Y = 2] = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} =\approx 0{,}476$$

- Para calcular $P(B \mid A)$, usamos la Regla de Laplace. Como se habrán sacado 2 números pares en las primeras cuatro extracciones, en la quinta extracción habrá 3 números pares de un total de 6 candidatos, es decir:

$$P(B \mid A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Por tanto, la probabilidad de que se necesiten cinco extracciones para obtener tres números pares es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 0{,}476 \cdot 0{,}5 = 0{,}238$$

3. Obtener el número 7 en la cuarta extracción.

   Definimos los siguientes sucesos:

   - C: No sacar un número 7 en las tres primeras extracciones.
   - D: Sacar el número 7 en la cuarta extracción.

   Nos piden calcular la probabilidad de que ocurra tanto C como D, es decir, $P(C \cap D)$. Tenemos que:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D \mid C)$$

   Calculemos ambas probabilidades por separado:

   - Para calcular $P(C)$, sea Z la variable aleatoria que representa el número de extracciones distintas a 7 en las tres primeras extracciones. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad hipergeométrica con $N = 10$, $N_1 = 9$ y $n = 3$. Es decir:

$$Z \sim H(10, 9, 3)$$

   La probabilidad de que no haya un número 7 en las tres primeras extracciones es:

$$P(C) = P[Z = 3] = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{1}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{10}$$

- Para calcular $P(D \mid C)$, usamos la Regla de Laplace. Como no se ha sacado un número 7 en las tres primeras extracciones, en la cuarta extracción habrá un número 7 de un total de 7 candidatos, es decir:

$$P(D \mid C) = \frac{1}{7}$$

Por tanto, la probabilidad de obtener el número 7 en la cuarta extracción es:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D \mid C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Ejercicio 9. Supongamos que el número de televisores vendidos en un comercio durante un mes se distribuye según una Poisson de parámetro 10, y que el beneficio neto por unidad es 30 euros.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros?

   Sea X la variable aleatoria que representa el número de televisores vendidos en un mes. En este caso, tenemos que sigue una distribución de probabilidad de Poisson con $\lambda = 10$. Es decir:

   $$X \sim \mathcal{P}(10)$$

   Sabemos que el beneficio neto por unidad es de 30 euros, por lo que para obtener un beneficio neto de al menos 360 euros, el comerciante debe vender al menos 12 televisores. Por lo que la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros es:

   $$P[X \geqslant 12] = 1 - P[X \leqslant 11] \overset{(*)}{=} 1 - 0{,}6968 = 0{,}3032$$

   donde en $(*)$ hemos utilizado la tabla de la distribución de Poisson.

2. ¿Cuántos televisores debe tener el comerciante a principio de mes para tener al menos probabilidad 0,95 de satisfacer toda la demanda?

   Se pide el menor valor de $\widehat{x} \in \mathbb{N}$ tal que:

   $$P[X \leqslant \widehat{x}] \geqslant 0{,}95$$

   Para resolverlo, buscamos el valor en la tabla de la distribución de Poisson que cumpla la condición. En este caso, el valor que cumple la condición es 15. Por tanto, el comerciante debe tener al menos 15 televisores a principio de mes para tener al menos probabilidad 0,95 de satisfacer toda la demanda.

Ejercicio 10. Sea el experimento de lanzar un dado de 6 caras. Obtener:

1. Función masa de probabilidad. Sea X la variable aleatoria que representa el número de la cara que sale en el dado. El espacio muestral del experimento es:

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Entonces, la función masa de probabilidad de X, notada por $P_X : \Omega \to [0, 1]$, es:

   $$P_X(x) = P[X = x] = \frac{1}{6}, \quad x \in \Omega$$

2. Función de distribución.

   La función de distribución de X, notada por $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, es:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{6}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 6 \end{cases}$$

3. Función generatriz de momentos.

   La función generatriz de momentos de X, notada por $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} e^{tx}$$

4. Valor esperado.

   El valor esperado de X, también conocido como la esperanza, es:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P[X = i] = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

   También se podría calcular como la primera derivada de la función generatriz de momentos evaluada en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E[X] = M_X'(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} e^{tx}\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6}\frac{d}{dt}\left(e^{tx}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} xe^{tx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{7}{2} = 3{,}5 \end{aligned}$$

   Como podemos ver, ambos métodos coinciden.

5. Varianza.

   La varianza de X es:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \approx 2{,}9167$$

6. La distribución de probabilidad que sigue el experimento.

   Tenemos que la variable aleatoria X sigue una distribución uniforme discreta.

$$X \sim \mathcal{U}(1, \dots, 6)$$

Ejercicio 11. Consideramos la variable aleatoria X que representa el número de caras menos número de cruces obtenidas al lanzar tres monedas. Se pide:

1. Espacio muestral del experimento.

   El espacio muestral del experimento es, representando con C a una cara y X a una cruz:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$

   Además, tenemos que:

$$X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$$

2. Función masa de probabilidad.

   Usando la Regla de Laplace, y procesando cada una de las $8 = 2^3$ opciones, tenemos:

$$P[X = -3] = P[X = 3] = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$P[X = -1] = P[X = 1] = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

3. Valor esperado.

   El valor esperado de X es:

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega} x \cdot P[X = x] = -3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$

4. Varianza.

   Tenemos que:

$$\operatorname{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{x \in \Omega} x^2 \cdot P[X = x] - 0 = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

5. Función de distribución.

   La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/8, & -3 \leqslant x < -1 \\ 1/2, & -1 \leqslant x < 1 \\ 7/8, & 1 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

6. Probabilidad de que X sea positiva.

   Tenemos que:

$$P[X > 0] = 1 - P[X \leqslant 0] = 1 - 1/2 = 1/2$$

Ejercicio 12. Dado $k \in \mathbb{R}$, sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} k/x^2 & 1 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener:

1. El valor de k.

   Para obtener el valor de k, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^8 \frac{k}{x^2}dx = k \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^8 = k \cdot \left(-\frac{1}{8} + 1\right) = k \cdot \frac{7}{8}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$k = \frac{8}{7}$$

   Además, con dicho valor de k, tenemos que $f_X(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que la función de densidad es válida.

2. La función de distribución:

   La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{8}{7x^2}dx = \left[-\frac{8}{7x}\right]_1^x = -\frac{8}{7x} + \frac{8}{7}, & 1 \leqslant x < 8 \\ 1, & x \geqslant 8 \end{cases}$$

3. Valor esperado.

   El valor esperado de X es:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_1^8 x \cdot \frac{8}{7x^2}dx = \frac{8}{7}\int_1^8 \frac{1}{x}dx = \frac{8}{7}\left[\ln|x|\right]_1^8 = \frac{8}{7}\ln(8)$$

4. Varianza.

   En primer lugar, calculamos $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_1^8 x^2 \cdot \frac{8}{7x^2}dx = \frac{8}{7}\int_1^8 dx = \frac{8}{7} \cdot 7 = 8$$

   Por tanto, la varianza de X es:

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 8 - \frac{64}{49} \cdot \ln(8)^2 \approx 2{,}352$$

Ejercicio 13. Una gasolinera vende una cantidad X (medida en miles) de litros de gasolina en un día. Supongamos que X tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} {}^3\!/_8 \cdot x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las ganancias de la gasolinera son 100 euros por cada mil litros de gasolina vendidos si la cantidad vendida es menor o igual a 1000 litros. Además, gana 40 euros extra (por cada 1000 litros) si vende por encima de dicha cantantidad. Calcule la ganancia esperada de la gasolinera en un día.

Tenemos que la función que mide la ganancia de la gasolinera en función de la cantidad de litros vendidos es:

$$G(x) = \begin{cases} 100 \cdot x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 140 \cdot x & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Calculamos el valor esperado de la ganancia de la gasolinera en un día:

$$\begin{aligned} E[G(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 G(x) \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \\ &= \int_0^1 100x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx + \int_1^2 140x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 100x^3 dx + \frac{3}{8}\int_1^2 140x^3 dx = \frac{3}{8}\left[25x^4\right]_0^1 + \frac{3}{8}\left[35x^4\right]_1^2 = \\ &= \frac{3}{8} \cdot 25 + \frac{3}{8} \cdot 35 \cdot 15 = \frac{825}{4} = 206{,}25 \end{aligned}$$

Observación. Notemos que piden el valor esperado de la ganancia, no la ganancia del valor esperado. Para calcular este último, habría que calcular el valor esperado de X y luego aplicar la función G.

Calculemos el valor esperado de X, que es la cantidad de litros vendidos en un día:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{3}{2}$$

Tenemos por tanto que la ganancia del valor esperado es:

$$G(E[X]) = \frac{3}{2} \cdot 140 = 210$$

Notemos que ambos conceptos no son iguales.

Ejercicio 14. Demostrar la propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica. Es decir, supuesto que X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p (es decir, $X \sim \mathcal{G}(p)$), demostrar que:

$$P(X \geqslant h + k \mid X \geqslant h) = P(X \geqslant k) \qquad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant h + k \mid X \geqslant h) &= \frac{P(X \geqslant h + k, X \geqslant h)}{P(X \geqslant h)} = \frac{P(X \geqslant h + k)}{P(X \geqslant h)} \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{(1-p)^{h+k}}{(1-p)^h} = (1-p)^k = P(X \geqslant k) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x - 1) = 1 - (1 - (1-p)^x) = (1-p)^x$$

□

Ejercicio 15 (Distribución Reproductiva - Binomial)**.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y $X_i \sim B(k_i, p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

Demostración. Sabemos que la función generatriz de momentos de cada una de las variables aleatorias X_i es:

$$M_{X_i}(t) = (1 - p + pe^t)^{k_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Tenemos por tanto que:

$$M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[e^{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - p + pe^t)^{k_i} = (1 - p + pe^t)^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}$$

Esta es la función generatriz de momentos de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial con parámetros $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i, p\right)$. Por tanto, hemos demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

□

Ejercicio 16 (Distribución Reproductiva - Poisson)**.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Demostración. Sabemos que la función generatriz de momentos de cada una de las variables aleatorias X_i es:

$$M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Tenemos por tanto que:

$$M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[e^{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)(e^t - 1)}$$

Esta es la función generatriz de momentos de una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$. Por tanto, hemos demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

□

Ejercicio 17 (Distribución Reproductiva - Binomial Negativa)**.** Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes y $X_i \sim BN(k_i, p)$ para $i = 1, \dots, n$. Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

Demostración. Sabemos que la función generatriz de momentos de cada una de las variables aleatorias X_i es:

$$M_{X_i}(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^{k_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

Tenemos por tanto que:

$$M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[e^{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^{k_i} = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}$$

Esta es la función generatriz de momentos de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial negativa con parámetros $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i, p\right)$. Por tanto, hemos demostrado que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

□

1.1. Distribuciones Continuas

Ejercicio 1.1.1. Sea X una variable aleatoria continua que sigue una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, es decir:

$$X \sim \mathcal{U}[a, b]$$

Calcular su función generatriz de momentos.

Distinguimos en función del valor de t:

- Para $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\,dx = \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t} \end{aligned}$$

- Para $t = 0$:

$$M_X(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$$

Ejercicio 1.1.2. Comprueba que la función de densidad de la distribución normal es una función de densidad.

Sea X una variable aleatoria continua que sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2, es decir:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Para comprobar lo pedido, debemos comprobar que:

- $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  Tenemos que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \\ &= \left[\begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dt = \frac{dx}{\sigma} \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sigma\sqrt{2\pi} = 1 \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos aplicado la Integral de Gauss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 1.1.3 (Regla de la Probabilidad Normal)**.** Sea X una variable aleatoria continua que sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2, es decir:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Demostrar que:

$$\begin{aligned}
P[\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma] &= P\left[\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right] = \\
&= P[-1 \leqslant Z \leqslant 1] = P[Z \leqslant 1] - P[Z \leqslant -1] = \\
&= P[Z \leqslant 1] - 1 + P[Z \leqslant 1] = 2P[Z \leqslant 1] - 1 \approx \\
&\approx 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \approx 0{,}6826
\end{aligned}$$