# EDO I


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# EDO I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

# Índice general

# 1. Relaciones de problemas

## 1.1. Ecuaciones y sistemas

**Ejercicio 1.1.1.** En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que $M$ es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo $t$. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos.

**Ejercicio 1.1.2.** Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{1.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{1.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (**??**).

*Demostración.* Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (**??**). Definimos la función auxiliar

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (x'(t))^2 + x^2(t). \end{array}$$

Por ser $x$ una solición de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x,\ x' \in C^1(I)$ y, por tanto $f$ es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\ \ [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que $f$ es constante en $I$. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = 0^2 + 1^2 = 1,$$
$$x''(t) + x(t) = 0 + 1 = 1$$