Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Diferenciales Exactas

Ejercicio 1.1.1. Calcula, si es posible, una función potencial para las siguientes parejas de funciones. Especifica en cada caso el dominio en el que se trabaja.

1. $P(x,y) = x + y^3$, $Q(x,y) = x^2/2 + y^2$.

   En este caso, $\Omega = \mathbb{R}^2$, que trivialmente es convexo y por tanto estrellado. Además, $P, Q \in C^1(\Omega)$ al ser polinomios. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x$$

   Por tanto, como no se tiene que $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$, no se da la condición de exactitud y no existe por tanto una función potencial para el campo vectorial (P,Q).

2. $P(x,y) = 1/2 \operatorname{sen} 2x - xy^2$, $Q(x,y) = y(1-x^2)$

   En este caso, $\Omega = \mathbb{R}^2$, que trivialmente es convexo y por tanto estrellado. Además, $P, Q \in C^1(\Omega)$ al ser composición, suma y producto de funciones de clase 1. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

   Por tanto, existe una función potencial para este campo vectorial. Para encontrarla, como se busca que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$, tenemos que:

   $$U(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int y(1-x^2)dy = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + \varphi(x)$$

   donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando U respecto de x obtenemos:

   $$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^2}{2} + \varphi'(x)$$
   $$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = -xy^2 + 1/2 \operatorname{sen} 2x$$

   Por tanto, $\varphi'(x) = 1/2 \operatorname{sen} 2x$. Entonces (y eligiendo como constante de integración 0 por ser el potencial único salvo una constante aditiva):

   $$\varphi(x) = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

   Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

   $$U(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{4}\cos 2x$$

3. $P(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$, $Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$.

   Estudiemos en este caso el dominio Ω, que no es trivial. Para que $P, Q \in C^1(\Omega)$, necesitamos que:

   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -x < y < x\}$$

   Representamos el dominio en la Figura 1.1.

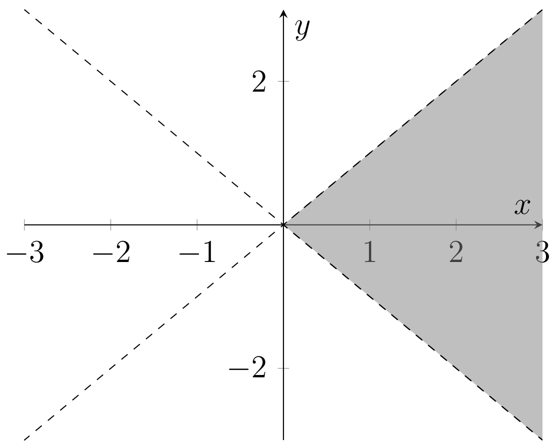

Figura 1.1: Dominio Ω del Ejercicio 1.1.1.3.

   Veamos ahora que Ω es convexo y por tanto estrellado, algo que intuitivamente podemos deducir.

   - Sean $z = (x,y)$, $z' = (x',y') \in \Omega$, y veamos que $[z,z'] \subset \Omega$.

     $$\begin{aligned}[z,z'] &= \{t(x,y) + (1-t)(x',y') \mid t \in [0,1]\} = \\ &= \{(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \mid t \in [0,1]\}\end{aligned}$$

     - Por un lado, como $x, x' > 0$ y $t, 1-t \geqslant 0$ pero no se anulan a la vez, tenemos que $tx + (1-t)x' > 0$.
     - Por otro lado, sabiendo que $-x < y < x$ y $-x' < y' < x'$, razonamos de forma directa que:

       $$-(tx+(1-t)x') = t(-x)+(1-t)(-x') < ty+(1-t)y' < tx+(1-t)x'$$

     Por tanto, $[z,z'] \subset \Omega$ y Ω es convexo.

   Además, como los argumentos de las raíces son positivos, $P, Q \in C^1(\Omega)$. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{1}{2\sqrt{x-y}} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

   Por tanto, existe una función potencial para este campo vectorial. Para encontrarla, como se busca que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$, tenemos que:

   $$U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}dx = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} + \frac{2}{3}(x-y)^{3/2} + \varphi(y)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de y y representa la constante de integración. Derivando U respecto de y obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} + \varphi'(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$$

Por tanto, $\varphi'(y) = 0$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(y) = 0$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} + \frac{2}{3}(x-y)^{3/2}$$

Ejercicio 1.1.2. Resuelve las siguientes ecuaciones, sabiendo que admiten un factor integrante que depende de una sola de las variables x, y.

1. $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

   El dominio de esta ecuación es $\Omega = \mathbb{R}^2$, que es abierto y conexo. Buscamos obtener un factor integrante $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$. Para ello, necesitamos que se cumpla la condición de exactitud tras multiplicar por μ. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 6xy \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 4y + 9x^2 \end{array}$$

   Calculemos las derivadas parciales implicadas en la condición de exactitud:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

   Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

2. $2y\cos x - xy \operatorname{sen} x + (2x\cos x)y' = 0$

Ejercicio 1.1.3. Encuentra p, $q \in \mathbb{R}$ para que la ecuación

$$-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$

admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^p y^q$. Usa dicho factor integrante para resolver la ecuación. Indica un método de resolución alternativo.

Ejercicio 1.1.4. Encuentra una condición suficiente para que la ecuación $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ admita un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(xy)$. Mediante un factor integrante de este tipo, encuentra la solución general de la ecuación

$$1 + xy + y^2 + (1 + xy + x^2)y' = 0.$$

Ejercicio 1.1.5. Dada una función $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $H = H(x, y)$, se considera el sistema Hamiltoniano asociado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Al tratarse de un sistema autónomo, es posible obtener la ecuación de las órbitas.

1. Demuestra que la ecuación de las órbitas se puede escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)y' = 0$$

y comprueba que se trata de una ecuación exacta.

2. Se supone que $H(x, y) = x^2 + 2y^2$. Escribe el sistema, la ecuación de las órbitas y encuentra las soluciones y las órbitas.

Ejercicio 1.1.6. Dado un dominio Ω del plano se considera un campo vectorial $B : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $B = (B_1, B_2)$, $B = B(x, y)$. Se supone $B \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Diremos que B es un campo solenoidal si se cumple

$$\text{div } B := \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0,$$

donde div es el operador divergencia.

1. Determina los valores de las constantes a, b, c, d para los que el campo $B(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ es solenoidal.

2. Demuestra que si el dominio Ω tiene forma de estrella entonces para cada campo solenoidal B existe una función $A \in C^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial A}{\partial x} = B_2$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$.

Ejercicio 1.1.7. Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x, y, z)$, de clase C^1.

1. Demuestra que existe una función $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que cumple $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ si y solo si se cumplen las condiciones de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

2. Generalización a $\mathbb{R}^d$.

Ejercicio 1.1.8. Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, $F = F(x, y)$, de clase C^1. Se define la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T = T(x, y)$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\gamma(t) = (tx, t^2y)$, $t \in [0, 1]$.

1. Demuestra que T es una función de clase C^1.
2. Calcula las derivadas parciales de T.
3. Se define ahora $\widetilde{T}$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\widetilde{\gamma}(t) = (t^2x, ty)$, $t \in [0, 1]$. ¿Se puede asegurar que T y $\widetilde{T}$ coinciden?