

Ecuaciones Diferenciales I Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 17 de marzo de 2016.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes funciones F y φ :

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

se define la siguiente función ϕ :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Suponiendo que F y φ son de clase C^2 , expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ .

Veamos en primer lugar que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad F \circ H = \phi \quad} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{\quad H \quad} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad F \quad} \mathbb{R} \\ \\ x \longmapsto (x, \varphi(x)) \longmapsto F(x, \varphi(x)) \end{array}$$

En primer lugar, $H = (Id, \varphi)$, donde Id es la función identidad. Por tanto, se tiene que $H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser ambas componentes $C^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ por hipótesis. Por tanto, $\phi = F \circ H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser composición de funciones de clase $C^2(\mathbb{R})$. Tenemos por tanto que:

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

Derivando de nuevo, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi''(x) + \\ &\quad + \varphi'(x) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Encuentra la solución de la siguiente ecuación diferencial, precisando el intervalo I donde está definida:

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0) = 0$$

Ejercicio 3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

La distancia al origen desde un punto $P = (x, y(x))$, notada por $d(P, O)$, viene dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + (y(x))^2}$$

La recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto $(x, y(x))$ tiene pendiente $y'(x)$ y pasa por el punto $(x, y(x))$. Siendo $(x_0, 0)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas, se tiene que: Tenemos entonces que, de la definición de pendiente dada por dos puntos, tenemos que:

$$y'(x) = m_t = \frac{y(x) - 0}{x - x_0} = \frac{y(x)}{x - x_0}$$

Notemos que el caso $x = x_0$ no es posible, pues la recta tangente no estaría definida al solo tener entonces un punto.

La primera coordenada del punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas es x_0 . Por tanto, esta es:

$$x_0 = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Imponiendo la condición del enunciado de que $d(P, O) = x_0$, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + (y(x))^2} = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Despejando $y'(x)$, tenemos que:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x - \sqrt{x^2 + (y(x))^2}}$$

Expresado con la notación correspondiente a la ecuación diferencial, tenemos:

$$y' = -\frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables $\phi : s = e^t, y = e^{-tx}$. Demuestra que ϕ define un difeomorfismo entre \mathbb{R}^2 y un dominio Ω del plano. Determina Ω . Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = tx^2$ y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y) .

Ejercicio 5. Se considera la función seno hiperbólico $f = \sinh$ definida como:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Demuestra que f tiene una inversa¹ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

¹Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{argsh} x$, argumento del seno hiperbólico