

Métodos Numéricos II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Métodos Numéricos II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Resolución numérica de ecuaciones y sistemas	5
1.1.1. Relación 1	5
1.1.2. Relación 2	14
1.2. Derivación e integración numérica	38
1.2.1. Relación 1. Derivación Numérica	38
1.2.2. Relación 2. Derivación Numérica	43

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Resolución numérica de ecuaciones y sistemas

1.1.1. Relación 1

Ejercicio 1.1.1.1. Se considera el problema de encontrar las soluciones reales de la ecuación $x + 1/2 - 2 \operatorname{sen}(\pi x) = 0$ en el intervalo $[1/2, 3/2]$.

1. ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $[1/2, 3/2]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} f : [1/2, 3/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1/2 - 2 \operatorname{sen}(\pi x) \end{aligned}$$

Sabemos que $f \in C^\infty([1/2, 3/2])$, y además:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1/2, 3/2]$. Por tanto, podemos aplicar el método de bisección. Calculamos las tres primeras iteraciones:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0,5	1,5	1	1,5
1	0,5	1	0,75	-0,1642
2	0,75	1	0,875	0,6096
3	0,75	0,875	0,8125	

2. Halle una cota del error que se comete si consideramos la última de las iteraciones del apartado anterior como el valor de la solución del problema dado.

Tenemos que:

$$|e_3| \leq \frac{1}{2^4} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

3. ¿Cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para garantizar un error menor que 10^{-5} ?

Para garantizar un error menor que 10^{-5} necesitamos que:

$$|e_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-5} \iff 10^5 \leq 2^{n+1} \iff n \geq \log_2(10^5) - 1 \approx 15,6096$$

Como n debe ser entero, necesitamos al menos 16 iteraciones.

Ejercicio 1.1.1.2. Se quiere calcular el inverso de un número real $c > 0$ sin efectuar divisiones. Para ello, se elige un valor $x_0 > 0$ y se considera el método iterativo dado por $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, $n \geq 0$.

1. Demuestre que la sucesión generada por dicho método converge a $1/c$ si y sólo si $0 < x_0 < 2/c$.

Observación. Comience demostrando por inducción que $r_n = r_0^{2^n} \forall n \geq 0$ siendo $r_n = 1 - cx_n$.

Demostramos por inducción dicha observación:

- Caso base: $n = 0$.

$$r_0^{2^0} = r_0^1 = r_0$$

- Paso inductivo: Supongamos que $r_n = r_0^{2^n}$.

$$\begin{aligned} r_0^{2^{n+1}} &= (r_0^{2^n})^2 = r_n^2 = (1 - cx_n)^2 = 1 - 2cx_n + c^2 x_n^2 = 1 - cx_n(2 - cx_n) = \\ &= 1 - cx_{n+1} = r_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_n = r_0^{2^n}$ para todo $n \geq 0$. Por la suma geométrica, tenemos que:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \text{ es convergente} &\iff \{r_n\} \text{ es convergente} \iff \\ &\iff |r_0| < 1 \iff |1 - cx_0| < 1 \iff 0 < cx_0 < 2 \iff \\ &\iff 0 < x_0 < \frac{2}{c} \end{aligned}$$

En el caso de que sea convergente, por la unicidad del límite, se tiene que:

$$1 - c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - cx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{c}$$

2. Demuestre que la convergencia referida en el apartado anterior es al menos cuadrática. ¿Cuál es la constante asintótica del error?

Definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} g : [0, \frac{2}{c}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(2 - cx) \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$g\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c} \left(2 - \frac{c}{c}\right) = \frac{1}{c}$$

Calculamos las dos primeras derivadas de g :

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2 - cx - cx = 2(1 - cx) \\g''(x) &= -2c\end{aligned}$$

Evaluando en el punto fijo de g :

$$\begin{aligned}g'\left(\frac{1}{c}\right) &= 2(1 - c \cdot \frac{1}{c}) = 2(1 - 1) = 0 \\g''\left(\frac{1}{c}\right) &= -2c \neq 0\end{aligned}$$

Por tanto, el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ tiene orden de convergencia cuadrático, con constante asintótica del error:

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2c = c$$

3. Compruebe que el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a una cierta ecuación $f(x) = 0$ cuya única raíz es $1/c$.

Sea f la función que buscamos. Entonces:

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x) = x(2 - cx) \implies \frac{f(x)}{f'(x)} = x - 2x + cx^2 = cx^2 - x$$

Podríamos intentar resolver dicha ecuación diferencial en variables separadas, pero directamente probaremos con varias funciones que tienen a $1/c$ como raíz, y veamos con cuál se da lo anterior.

■ $f(x) = x - 1/c.$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \\ \frac{f(x)}{f'(x)} &= f(x) = x - 1/c\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que esta no es la función que buscamos.

■ $f(x) = c - 1/x.$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1/x^2 \\ \frac{f(x)}{f'(x)} &= cx^2 - x\end{aligned}$$

Por tanto, esta es la función que buscamos.

Por tanto, el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x) = c - 1/x$, cuya única raíz es $1/c$.

Ejercicio 1.1.1.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} f : [1, 4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 - 2x^2 - 5 \end{aligned}$$

Sabemos que $f \in C^\infty([1, 4])$, y además:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 2 - 5 = -6 < 0 \\ f(4) &= 64 - 32 - 5 = 27 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1, 4]$. Veamos ahora que esta es única:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$$

- Si $x \in [1, 4/3]$, entonces $f'(x) \leq 0$.

Como $f(1) < 0$ y f es continua, entonces f no tiene raíces reales en $[1, 4/3]$.

- Si $x \in [4/3, 4]$, entonces $f'(x) \geq 0$.

Como $f(4/3) < 0$ y f en este intervalo es inyectiva, entonces, de tener una raíz, sería única.

Por tanto, la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[4/3, 4]$. Buscamos ahora demostrar la convergencia de Newton-Raphson:

1. $f(4/3)f(4) < 0$.
2. $f'(x)$ no se anula en $]4/3, 4]$.
3. $f''(x) = 6x - 4$ no se anula en $]4/3, 4]$.
4. Comprobemos que tomar $x_0 = 4$ sirve para garantizar la convergencia.

$$f(4)f''(4) = 27 \cdot 20 = 540 > 0$$

Por tanto, podemos aplicar el método de Newton-Raphson empleando como semilla $x_0 = 4$. Calculamos las dos primeras iteraciones:

n	x_n
0	4
1	3,15625
2	2,77860

Ejercicio 1.1.1.4. Deduzca la fórmula para el cálculo de las iteraciones del método de la secante a partir de su interpretación gráfica.

Dados dos puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, la recta secante que pasa por ellos es:

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

El punto de corte de la recta secante con el eje x es:

$$\begin{aligned} \frac{0 - f(x_n)}{x - x_n} &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \\ x - x_n &= -f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ x &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

Por tanto, denotamos por x_{n+1} a dicho punto de corte, y obtenemos la fórmula del método de la secante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ejercicio 1.1.1.5. Dada la ecuación $x - 1/2 \cos(x) = 0$, se pide:

1. Demuestre que tiene una única solución real en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} f : [0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - 1/2 \cos(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $f \in C^\infty([0, \pi/2])$. Estudiemos su monotonía:

$$f'(x) = 1 + 1/2 \sin(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Por tanto, f es inyectiva. Veamos ahora que tiene una única raíz:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 1/2 \cos(0) = -1/2 < 0 \\ f(\pi/2) &= \pi/2 - 1/2 \cos(\pi/2) = \pi/2 - 1/2 > 0 \end{aligned}$$

2. Describa un método de iteración funcional, distinto del método de Newton-Raphson, que permita aproximar dicha solución, razonando la respuesta.
3. Realice las dos primeras iteraciones del método descrito en el apartado anterior.
4. ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-2} en el método dado en el apartado 2?

Ejercicio 1.1.1.6. Usando algún resultado sobre convergencia para los métodos de iteración funcional, demuestre el teorema de convergencia local para ceros simples del método de Newton-Raphson.

Ejercicio 1.1.1.7. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se considera el método $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/m$, donde $m \neq 0$.

1. Interprete gráficamente el cálculo de las iteraciones según dicho método.
2. ¿Qué condiciones para la función f , para la constante m y para el valor inicial x_0 asegurarían unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado?

Ejercicio 1.1.1.8. Localice un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, y sepárelas. Tomando $x_0 = -2$ como semilla, calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson usando el algoritmo de Horner.

Ejercicio 1.1.1.9. Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{con} \quad g(x) = ax + \frac{x^3}{3} + bx^2.$$

Halle los valores de a y b para que, partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a s , se asegure la convergencia al menos cuadrática. Para tales valores, calcule x_3 para $x_0 = 1$.

Ejercicio 1.1.1.10. Se desea aplicar un método iterativo del siguiente tipo para obtener $\sqrt[3]{7}$.

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + q \cdot 7/x_n^2 + r \cdot 7^2/x_n^5$$

Halle los valores de p , q , r para que la convergencia local del método sea al menos cúbica. Realice dos iteraciones partiendo de $x_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.1.11. Sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$.

1. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$?
2. Pruebe que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{\frac{1}{x_n^3 + 1}}$$

converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raíz de $f(x) = 0$.

3. Localice todas las raíces reales de $f(x)$.

Ejercicio 1.1.1.12. A partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra, determine gráficamente las dos aproximaciones siguientes que generan los métodos de Newton-Raphson y de la secante partiendo de las semillas que aparecen en cada caso. Deduzca si hay convergencia y hacia qué solución de $f(x) = 0$.

1. Método de Newton-Raphson: Figura 1.1.
2. Método de la secante: Figura 1.2.

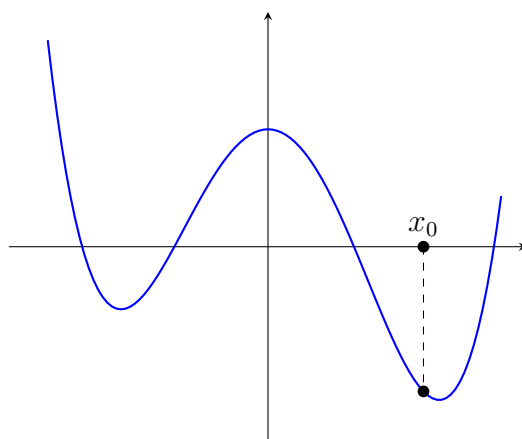


Figura 1.1: Semilla para el método de Newton-Raphson en el Ejercicio 1.1.1.12.

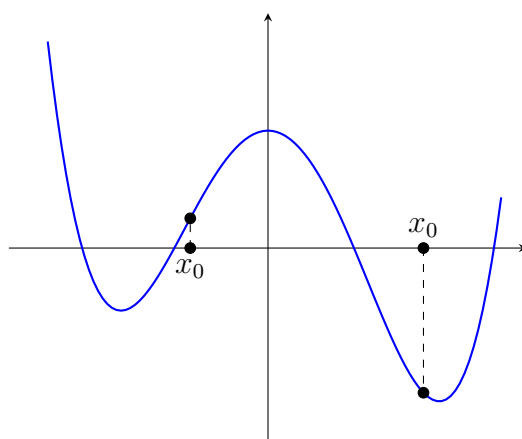


Figura 1.2: Semilla para el método de la Secante en el Ejercicio 1.1.1.12.

Ejercicio 1.1.1.13. Se considera la ecuación $xe^{-x^3} + 1 = 0$ y los métodos de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ dados por las funciones

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -e^{x/3}, & g_2(x) &= e^{x/3}, \\ g_3(x) &= 3 \ln(-x), & g_4(x) &= \frac{x - e^{x/3}}{2}. \end{aligned}$$

1. Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación.
2. Averigüe cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada; es decir, para cuáles de ellos la solución es punto fijo.
3. De entre los métodos compatibles con la ecuación ¿cuáles son convergentes localmente? Justifique la respuesta.
4. De entre los métodos convergentes localmente ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?
5. Para los métodos que hayan resultado divergentes, aplique Steffensen con $x_0 = -0,5$ hasta que dos iteraciones consecutivas disten menos de 10^{-3} .

Ejercicio 1.1.1.14. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto de división del intervalo por el valor $a + \frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente dicho método? ¿Cuál es la cota del error absoluto después de n iteraciones?

Ejercicio 1.1.1.15. Demuestre el teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional para sistemas.

Observación. Generalice al caso k -dimensional la demostración del teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional unidimensional.

Ejercicio 1.1.1.16. Sea $D = \prod_{i=1}^k [a_i, b_i]$ y sea $G : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $G = (g_1, \dots, g_k)$ tal que $G \in C^1(D)$. Demuestre que si existe $L \in]0, 1[$ tal que $\forall i, j = 1, \dots, k$ se verifique

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L}{k} \quad \forall x \in D,$$

entonces G es contráctil.

Observación. Considere la norma $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 1.1.1.17. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2} - x + \frac{7}{24} &= 0, \\ xy - y + \frac{1}{9} &= 0. \end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0,4] \times [0, 0,4]$.
2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

3. Calcule, tomando $x_0 = (0,1,0,2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

Ejercicio 1.1.1.18. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - xy &= 1/16, \\ x^2 - y &= -1/8.\end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 1/8] \times [0, 1/4]$.
2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.
3. Calcule, tomando $x_0 = (0,1,0,2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

1.1.2. Relación 2

Ejercicio 1.1.2.1. Sea la función $f(x) = e^x - ax^2$ con $a \in [3, 4]$.

1. Demuestra que tiene una raíz negativa, otra raíz en $[0, 1]$ y otra mayor que 1.

Evaluamos f en los extremos del intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - a \cdot 0^2 = 1 \\ f(1) &= e^1 - a \cdot 1^2 = e - a < 0 \iff e < a \end{aligned}$$

Calculamos además los límites de f en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -ax^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - ax^2 = \infty \end{aligned}$$

Para demostrar lo pedido, y debido a que f es continua, emplearemos el Teorema de Bolzano.

- Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $f(0) = 1 > 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en \mathbb{R}^- .
 - Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = e - a < 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[0, 1]$.
 - Como $f(1) = e - a < 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[1, \infty[$.
2. Demuestra que $x = g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{a}}$ y $x = g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{a}}$ son ecuaciones equivalentes a la de partida.

Partiendo de las ecuaciones dadas, elevamos al cuadrado ambos lados, llegando en ambos casos a:

$$x^2 = \frac{e^x}{a} \iff a \cdot x^2 = e^x \iff e^x - ax^2 = 0$$

Por tanto, efectivamente son equivalentes. La ecuación $x = g_1(x)$ tiene sentido para $x \geq 0$ y la ecuación $x = g_2(x)$ para $x \leq 0$.

3. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a $-0,5$ partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_2(x)$ y realiza dos iteraciones.

Trabajaremos en el intervalo $[-1, 0]$. Veamos que $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$. Para ello, como $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{a}}} \cdot \frac{e^x}{a} = -\frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_2 es continua y estrictamente decreciente en \mathbb{R} . Además, evaluamos g_2 en los extremos del intervalo:

$$g_2(-1) = -\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3e}} \approx -0,35$$

$$g_2(0) = -\sqrt{\frac{e^0}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58$$

Por tanto, $g_2([-1, 0]) = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3e}}\right] \subset [-1, 0]$. Por tanto, podemos considerar $g_2 : [-1, 0] \rightarrow [-1, 0]$. Veamos ahora que g_2 es una contracción en $[-1, 0]$:

$$|g_2'(x)| = \left| \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} \right| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} \leq \frac{e^0}{6\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}}} \approx 0,47 < 1 \quad \forall x \in [-1, 0]$$

Por tanto, g_2 es una contracción en $[-1, 0]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_2 tiene un único punto fijo en $[-1, 0]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_2(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [-1, 0]$.

Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_2(x_n)$
0	0	-0,57735
1	-0,57735	-0,4325829
2	-0,4325829	-0,4650559

4. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a 1 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_1(x)$ y realiza dos iteraciones.

Trabajaremos en el intervalo $[0, 2]$. Veamos que $g_1([0, 2]) \subset [0, 2]$. Para ello, como $g_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

$$g_1'(x) = -g_2'(x) = \frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_1 es continua y estrictamente creciente en \mathbb{R} . Además, evaluamos g_1 en los extremos del intervalo:

$$g_1(0) = -g_2(0) = \sqrt{\frac{e^0}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$$

$$g_1(2) = \sqrt{\frac{e^2}{3}} = \frac{e}{\sqrt{3}} \approx 1,5694$$

Por tanto, $g_1([0, 2]) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{e}{\sqrt{3}}\right] \subset [0, 2]$. Por tanto, podemos considerar $g_1 : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$. Veamos ahora que g_1 es una contracción en $[0, 2]$:

$$|g_1'(x)| = |g_2'(x)| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} < 1 \iff e^{2x} < 36 \cdot \frac{e^x}{3} \iff e^x < 12 \iff x < \ln 12 \approx 2,48$$

Por tanto, g_1 es una contracción en $[0, 2]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_1 tiene un único punto fijo en $[0, 2]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_1(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [0, 2]$.

Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_1(x_n)$
0	0	0,57735
1	0,57735	0,770565
2	0,770565	0,848722

5. Toma $a = 3$. Comprueba que la raíz mayor que 1 está en $[3, 4]$. Demuestra la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella (pero diferente de ella) usando $g_1(x)$ y encuentra una función para la iteración funcional, alternativa a las anteriores que converja a la raíz cercana a 4. Partiendo de $x_0 = 3,98$ obtén x_1 y x_2 con el método propuesto.

Evaluamos f en los extremos del intervalo $[3, 4]$:

$$\begin{aligned} f(3) &= e^3 - 3 \cdot 3^2 = e^3 - 3^3 < 0 \\ f(4) &= e^4 - 3 \cdot 4^2 = e^4 - 3 \cdot 4^2 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[3, 4]$.

Para estudiar la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella, anteriormente vimos que:

$$|g'(x)| < 1 \iff x < \ln 12 \approx 2,48$$

Por tanto, como el punto fijo s está en $[3, 4]$, tenemos que $g'(s) > 1$. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ no converge a s si x_0 es muy próximo a s .

Para encontrar una función que converja a la raíz próxima a 4, tenemos que:

$$f(x) = 0 \iff e^x = ax^2 \iff x = \ln(ax^2)$$

Por tanto, consideramos la función $h(x) = \ln(3x^2)$. Veamos que $h([3, 5]) \subset [3, 5]$. Para ello, calculamos la derivada de h :

$$h'(x) = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, h es continua y estrictamente creciente en $[3, 5]$. Además, evaluamos h en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} h(3) &= \ln(3 \cdot 3^2) = \ln 27 \approx 3,3 \\ h(5) &= \ln(3 \cdot 5^2) = \ln 75 \approx 4,32 \end{aligned}$$

Por tanto, $h([3, 5]) = [\ln 27, \ln 75] \subset [3, 5]$. Por tanto, podemos considerar $h : [3, 5] \rightarrow [3, 5]$.

Veamos ahora que h es una contracción en $[3, 5]$:

$$|h'(x)| = \left| \frac{2}{x} \right| = \frac{2}{x} < \frac{2}{3} < 1 \quad \forall x \in [3, 5]$$

Por tanto, h es una contracción en $[3, 5]$. Por el Teorema del Punto Fijo, h tiene un único punto fijo en $[3, 5]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = h(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [3, 5]$.

Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 3,98$:

n	x_n	$h(x_n)$
0	3,98	3,861176
1	3,861176	3,800556
2	3,800556	3,7689

Ejercicio 1.1.2.2. Sea la ecuación $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 15,2 = 0$.

1. Prueba que no tiene ninguna raíz menor que 1.

Como $p \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de p y estudiar su signo:

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3x^2 - 16x + 20 = 0 \iff \\ \iff x &= \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20}}{2 \cdot 3} \iff x = \frac{16 \pm 4}{6} \iff x \in \{2, 10/3\} \end{aligned}$$

Por tanto, p es estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - 8 + 20 - 15,2 = -2,2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &= -\infty \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que p no tiene raíces menores que 1.

2. Prueba que Newton-Raphson converge partiendo de $x_0 = 0$ hacia la raíz más pequeña y realiza dos iteraciones.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= -2,2 < 0 \\ p(2) &= 8 - 32 + 40 - 15,2 = 0,8 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, p tiene una raíz en $[1, 2]$, y sabemos que es única por ser p estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Por último, es la raíz más pequeña por no tener ninguna raíz menor que 1. Comprobemos ahora que cumple las condiciones del Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson en $[1, 2]$:

$$a) \quad p(1)p(2) < 0.$$

b) $p'(x) \neq 0$ en $]1, 2[$.

c) $p''(x) = 6x - 16$ no cambia de signo en $]1, 2[$, ya que:

$$p''(x) = 6x - 16 = 0 \iff x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \notin]1, 2[$$

d) $p(x_0)p''(x_0) = (-15,2) \cdot (-16) > 0$.

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge en $[1, 2]$ a la raíz más pequeña partiendo desde $x_0 = 0$. Este método genera la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 8x_n^2 + 20x_n - 15,2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} = \\ &= \frac{2x_n^3 - 8x_n^2 + 15,2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	0,76
2	1,196844

3. Calcula la sucesión de Sturm y decide si existen raíces múltiples.

Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - \frac{76}{5} \\ f_1(x) &= f'_0(x) = 3x^2 - 16x + 20 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 20x - \frac{76}{5} & 3x^2 - 16x + 20 \\ -x^3 + \frac{16}{3}x^2 - \frac{20}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ \hline -\frac{8}{3}x^2 + \frac{40}{3}x - \frac{76}{5} & \\ -\frac{8}{3}x^2 - \frac{128}{9}x + \frac{160}{9} & \\ \hline -\frac{8}{9}x + \frac{116}{45} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -45 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -45 \cdot \left(-\frac{8}{9}x + \frac{116}{45} \right) \\ &= 40x - 116 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 16x + 20 & 40x - 116 \\ -3x^2 + \frac{87}{10}x & \frac{3}{40}x - \frac{73}{400} \\ \hline -\frac{73}{10}x + 20 & \\ -\frac{73}{10}x - \frac{2117}{100} & \\ \hline -\frac{117}{100} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{100}{117} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{100}{117} \cdot \left(-\frac{117}{100} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - 8x^2 + 20x - 15,2 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 16x + 20 \\ f_2(x) &= 40x - 116 \\ f_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la existencia de raíces múltiples. Por el algoritmo extendido de euclides, sabemos que:

$$\text{mcd}(f_0, f_1) = \text{mcd}(p, p') = 1$$

Supongamos ahora que existe una raíz múltiple de multiplicidad $m > 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_0)^m \cdot q(x) \\ p'(x) &= (x - x_0)^{m-1} [m \cdot q(x) + (x - x_0)q'(x)] \end{aligned}$$

Entonces, $(x - x_0)^{m-1}$ divide a p, p' , lo que contradice que $\text{mcd}(p, p') = 1$. Por tanto, no existen raíces múltiples. De forma general, como el último resto no nulo es constante, entonces no existen raíces múltiples.

4. Separa las raíces reales de dicha ecuación.

En primer lugar, buscamos acotar las raíces reales. Tenemos:

$$\alpha = 20 \implies |s| \leq 21$$

Por tanto, sabemos que todas las raíces reales están en $[-21, 21]$. Por el primer apartado, sabemos que están en $[1, 21]$. Separemos ahora las raíces:

x	$\text{sgn}(f_0(x))$	$\text{sgn}(f_1(x))$	$\text{sgn}(f_2(x))$	$\text{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
1	—	+	—	+	3
2	+	0	—	+	2
3	—	—	+	+	1
4	+	+	+	+	0
21	+	+	+	+	0

Por tanto, tenemos una raíz en $[1, 2]$, otra en $[2, 3]$ y otra en $[3, 4]$.

Ejercicio 1.1.2.3. Sea la ecuación $f(x) = e^{x-1} - ax^3 = 0$ siendo $a > 1$.

1. Demuestra que tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

Como f es continua, podemos aplicar el Teorema de Bolzano. Evaluamos f en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned}f(0) &= e^{-1} > 0 \\f(1) &= e^0 - a = 1 - a < 0\end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

2. A partir de ahora considera $a = 2$. Calcula las dos primeras aproximaciones x_1 y x_2 obtenidas con bisección (siendo $x_0 = 0,5$). Indica el error máximo que se comete con x_2 .

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	0,5	0,3565
1	0,5	1	0,75	-0,0649
2	0,5	0,75	0,625	0,1990

El error máximo que se comete con x_2 es:

$$|e_2| < \frac{1-0}{2^{2+1}} = \frac{1}{8} = 0,125$$

3. Realiza dos iteraciones con el método de la secante tomando como valores iniciales (o semillas) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Debes calcular x_2 y x_3 .

El método de la secante se define como:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \\&= x_n - \frac{(e^{x_n-1} - 2x_n^3)(x_n - x_{n-1})}{e^{x_n-1} - 2x_n^3 - e^{x_{n-1}-1} + 2x_{n-1}^3}\end{aligned}$$

Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	1
2	0,2689
3	0,4932

4. Evalúa la función en la segunda aproximación x_2 obtenida con bisección e indica, razonadamente con los resultados que se te han pedido, si se puede asegurar, o no, que la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

Evaluamos f en x_2 obtenido con el método de bisección:

$$f(x_2) = f(0,625) = 0,199 > 0$$

Además, sabemos que $f(0,75) < 0$. Por tanto, si la raíz es s :

$$x_2 = 0,625 < s < 0,75$$

Como la segunda iteración del método de secante es $x_3 = 0,4932$, tenemos que:

$$x_3 = 0,4932 < x_2 = 0,625 < s < 0,75$$

Por tanto, la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

Ejercicio 1.1.2.4. Considera la ecuación $x^2 = a$ siendo $a > 0$.

1. Se pretende usar el método de Newton-Raphson en la ecuación anterior para hallar la raíz cuadrada de a . Deduce que el método se puede expresar, en este caso, de la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Sea la función $f(x) = x^2 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

2. Demuestra que el método es convergente partiendo de $x_0 = \max\{1, a\}$.

Si $a = 1$, entonces $f(x_0) = f(1) = 0$. Por tanto, x_0 es raíz de f y hemos terminado. Suponemos por tanto en adelante que $a \neq 1$.

Emplearemos el intervalo $[\min\{1, a\}, \max\{1, a\}]$. Calculamos la derivada de f :

$$f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostramos ahora los 4 puntos necesarios para el Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson:

- a) $f(a)f(1) < 0$:

$$f(a) = a^2 - a = a(a - 1)f(1) = 1 - a$$

Por tanto:

$$f(a)f(1) = a(a - 1)(1 - a) = -a(a - 1)^2 < 0$$

- b) $f'(x) \neq 0$ en $[\min\{1, a\}, \max\{1, a\}]$, pues el 0 no pertenece a dicho intervalo.
- c) $f''(x) = 2 > 0$ no cambia de signo en \mathbb{R} .

$$d) f(x_0)f''(x_0)$$

$$f(x_0)f''(x_0) = 2f(x_0) > 0 \iff x_0^2 > a \iff (\max\{1, a\})^2 > a$$

que sabemos que es cierto.

Por tanto, sabemos que el método de Newton-Raphson es convergente partiendo de $x_0 = \max\{1, a\}$.

3. Apoyándose en la expresión anterior obtén la segunda aproximación x_2 de la raíz cuadrada positiva de 13, partiendo de $x_0 = 13$.

Tomando $a = 13$, la segunda aproximación de la raíz cuadrada positiva de 13 es:

n	x_n
0	13
1	7
2	4,428571

4. Determina la expresión del método de Newton-Raphson para la raíz cúbica de un número diferente de cero y aplícalo dos veces para aproximar la raíz cúbica de 13 partiendo de $x_0 = 13$.

Sea la función $g(x) = x^3 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$$

Por tanto, tomando $a = 13$, las dos primeras iteraciones para aproximar la raíz cúbica de 13 son:

n	x_n
0	13
1	8,692308
2	5,852224

Notemos que la convergencia a la raíz cúbica de 13 no la tenemos asegurada, sería necesario estudiarlo en este caso (similar al segundo apartado).

Ejercicio 1.1.2.5. Sea S la única solución en el dominio cuadrado $D = [0, 1] \times [0, 1]$ del sistema no lineal

$$\begin{cases} xy^2 + 4x - 1 = 0 \\ 4yx^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

¿Es convergente a S la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional definido por

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4 + y_n^2} \\ y_{n+1} = \frac{1}{6 + 4x_n^2} \end{cases}$$

cualquiera que sea la aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$?

Podemos reescribir el sistema dado como sigue:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4 + y^2} \\ y = \frac{1}{6 + 4x^2} \end{cases}$$

Definimos ahora la función siguiente:

$$G = (G_1, G_2) : \quad D \longrightarrow D \\ (x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{4 + y^2}, \frac{1}{6 + 4x^2} \right)$$

Por tanto, la solución del sistema dado es el punto fijo de G . Veamos ahora si el método de iteración funcional converge a dicho punto fijo. En primer lugar, veamos que $G(D) \subset D$:

$$G_1(x, y) = \frac{1}{4 + y^2} \in [0, 1] \\ G_2(x, y) = \frac{1}{6 + 4x^2} \in [0, 1]$$

Por tanto, $G(D) \subset D$. Veamos ahora que G es una contracción en D . Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G :

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2y}{(4 + y^2)^2} \\ -\frac{8x}{(6 + 4x^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in D$$

Además, tenemos que:

$$\frac{2y}{(4 + y^2)^2} \leq \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8} \quad \forall y \in [0, 1] \\ \frac{8x}{(6 + 4x^2)^2} \leq \frac{8}{6^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Por tanto, $\|J_G(x, y)\|_\infty \leq 2/9 < 1$. Como además sus derivadas parciales son continuas, G es una contracción en D . Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo, G tiene un único punto fijo $S \in D$, y la sucesión:

$$X_{n+1} = G(X_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a dicho punto fijo para cualquier $X_0 \in D$. Por tanto, la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional converge a S para cualquier aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 1.1.2.6. Se sabe que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y posee un único cero en dicho intervalo. ¿Se puede aproximar siempre dicho cero mediante el método de bisección?

No, no siempre se puede aproximar el cero de una función mediante el método de bisección. Por ejemplo, sea la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

En este caso, sabemos que hay una única raíz en $[-1, 1]$, que es $x = 0$. Sin embargo, el método de bisección no converge a dicha raíz, puesto que no hay un cambio de signo en dicho intervalo, por lo que no podemos construir la sucesión x_n que converge a la raíz. De hecho:

$$f(-1) = f(1) = 1 > 0$$

Por tanto, la condición que falla es que no hay cambio de signo en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que no se puede aplicar el método de bisección en este caso.

Ejercicio 1.1.2.7. Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Se pide:

1. Demuestra que la ecuación anterior tiene una única solución real s .

Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de f y estudiar su signo:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Estudiamos la monotonía de f , estudiando a su vez si hay raíces en dicho intervalo (por el Teorema de Bolzano):

- En $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$: f es estrictamente creciente. Además:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

- En $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$: f es estrictamente decreciente. Además:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

- En $\left] \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right[: f$ es estrictamente creciente. Además:

$$f(1) = -1 < 0 \qquad f(2) = 5 > 0$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$.

Por tanto, f tiene una única raíz real s , y sabemos que:

$$s \in]1, 2[$$

2. Encuentra un intervalo $[a, b]$ en el que al tomar cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ como aproximación inicial del método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$ se asegure que la sucesión de iteraciones de dicho método converja a s con convergencia al menos cuadrática y demuestra que eso es así.

Tomamos el intervalo $[1, 2]$. Estudiamos la función f en dicho intervalo:

- a) $f(1)f(2) < 0$.
b) $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \iff 1 < \sqrt{3} \iff 1 < 3$$

Por tanto, $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.

- c) $f''(x) = 6x$ no cambia de signo en $[1, 2]$.
d) Comprobemos la última condición:

$$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \left| \frac{-1}{2} \right| < 1 \qquad \left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| = \frac{5}{11} < 1$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática partiendo de cualquier punto $x_0 \in [1, 2]$.

Para demostrar que efectivamente la convergencia es al menos cuadrática, consideramos la función g siguiente:

$$\begin{aligned} g : [1, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Dada la raíz s de f , entonces:

$$g(s) = s - \frac{f(s)}{f'(s)} = s - \frac{0}{f'(s)} = s$$

Calculamos ahora la derivada de g :

$$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)f'(s) - f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 1 - \frac{f'(s)^2}{f'(s)^2} = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, el método iterativo de Newton-Raphson aplicado a f , que coincide con el método iterativo de punto fijo aplicado a g , converge a s con convergencia al menos cuadrática.

3. Calcula las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación dada tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$.

El método de Newton-Raphson se define como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	1
1	1,5
2	1,347826

Ejercicio 1.1.2.8. Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

1. Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4} ?

Sea la función f siguiente:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^7 - 2 \end{aligned}$$

Estudiamos la función f en el intervalo $[1, 2]$:

$$f(1) = -1 < 0 \quad f(2) = 2^7 - 2 > 0$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$; y podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo. Calculamos el número de iteraciones necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4} :

$$\begin{aligned} e_n < \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-4} &\iff 2^{n+1} > 10^4 \iff \\ &\iff n+1 > \log_2(10^4) = 13,2877 \iff n > 12,2877 \end{aligned}$$

Por tanto, necesitamos al menos 13 iteraciones para conseguir un error inferior a 10^{-4} .

2. Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

Consideramos el intervalo $[1, 2]$. Veamos que podemos aplicar el método de Newton-Raphson en dicho intervalo:

- a) $f(1)f(2) < 0$.
 b) $f'(x) = 7x^6$ no se anula en $[1, 2]$.
 c) $f''(x) = 42x^5$ no cambia de signo en $[1, 2]$.
 d) Comprobamos la última condición:

$$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \left| \frac{-1}{7} \right| < 1 \quad \left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| = \frac{2^7 - 2}{7 \cdot 2^6} = \frac{2^6 - 1}{7 \cdot 2^5} = \frac{63}{7 \cdot 32} < 1$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ para cualquier semilla $x_0 \in [1, 2]$. Realizamos 3 iteraciones del método tomando $x_0 = 1$:

n	x_n
0	1
1	1,142857
2	1,107819
3	1,104127

3. Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7}$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

Realizamos 3 iteraciones del método propuesto:

n	x_n
0	1
1	1,1
2	1,1040893
3	1,1040895

4. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

En primer lugar, hemos de demostrar que si $s \in \mathbb{R}$ es una raíz de f , $f(s) = 0$, entonces s es un punto fijo de la función g definida como:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{8x + 3x^8}{6 + 4x^7} \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$g(s) = \frac{8s + 3s^8}{6 + 4s^7} = \frac{8s + 3 \cdot 2s}{6 + 4 \cdot 2} = \frac{14s}{14} = s$$

De forma análoga, definimos la función h empleada en Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Tenemos que $h(s) = g(s) = s$. Estudiamos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{(8 + 8 \cdot 3s^7)(6 + 4s^7) - (8s + 3s^8)(28s^6)}{(6 + 4s^7)^2} = \\ &= \frac{8(1 + 3s^7)}{6 + 4s^7} - \frac{28(8s^7 + 3s^{14})}{(6 + 4s^7)^2} = \\ &= \frac{8(1 + 3 \cdot 2)}{6 + 4 \cdot 2} - \frac{28(8 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2)}{(6 + 4 \cdot 2)^2} = 0 \\ h'(s) &= 1 - \frac{f'(s)f'(s) - f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 0 \end{aligned}$$

Como $g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ y s es un punto fijo de ambas funciones, entonces sabemos que ambos métodos convergen a la raíz s con convergencia al menos cuadrática. Estudiamos si convergerán con orden cúbico:

$$\begin{aligned} g''(s) &= 8 \cdot \frac{3 \cdot 7s^6(6 + 4s^7) - (1 + 3s^7)(4 \cdot 7s^6)}{(6 + 4s^7)^2} - \\ &\quad - 28 \cdot \frac{[8 \cdot 7s^6 + 3 \cdot 14s^{13}](6 + 4s^7) - [8s^7 + 3s^{14}] \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7s^6}{(6 + 4s^7)^3} = \\ &= 8 \cdot \frac{3 \cdot 7s^6 \cdot 14 - 7(4 \cdot 7s^6)}{14^2} - 28 \cdot \frac{[8 \cdot 7s^6 + 3 \cdot 28s^6]14 - 28 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7s^6}{14^3} = \\ &= 4s^6 - 4s^6 = 0 \\ h''(s) &= \frac{[f'(s)f''(s) + f(s)f'''(s)]f'(s)^2 - 2f(s)f''(s)f'(s)f''(s)}{f'(s)^4} = \\ &= \frac{[f'(s)f''(s) + \cancel{f(s)}^0 f'''(s)]f'(s) - 2\cancel{f(s)}^0 f''(s)^2}{f'(s)^3} = \\ &= \frac{[f'(s)f''(s)]f'(s)}{f'(s)^3} = \frac{f''(s)}{f'(s)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot s^5}{7 \cdot s^6} = \frac{6}{s} \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática, mientras que el método propuesto converge a s con convergencia al menos cúbica. Por tanto, el método propuesto converge más rápidamente a la solución.

Ejercicio 1.1.2.9. Relacionado con la Sucesión de Sturm:

1. Sea $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a, b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \dots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x)\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

En primer lugar, como el producto de funciones continuas por una constante es una función continua, $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}[a, b]$. Hemos de comprobar ahora las 4 propiedades de la sucesión de Sturm:

- a) Como $f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$, entonces $\tilde{f}_0 = k_0 f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$.

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0(x) = k_0 f_0(x) = 0 &\iff f_0(x) = 0 \implies f'_0(x) f_1(x) \neq 0 \implies \\ &\implies \tilde{f}'_0(x) \tilde{f}_1(x) = k_0 k_1 f'_0(x) f_1(x) \neq 0\end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_0, k_1 > 0$.

c) Fijado $j = 1, \dots, m-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_j(x) = k_j f_j(x) = 0 &\iff f_j(x) = 0 \implies f_{j-1}(x) f_{j+1}(x) \neq 0 \implies \\ &\implies \tilde{f}_{j-1}(x) \tilde{f}_{j+1}(x) = k_{j-1} k_{j+1} f_{j-1}(x) f_{j+1}(x) \neq 0\end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_{j-1}, k_{j+1} > 0$.

d) $\tilde{f}_m(x) = k_m f_m(x) \neq 0$ en $[a, b]$.

Por tanto, $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x)\}$ es una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

2. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el máximo de los valores absolutos de los coeficientes de p ; es decir, $\alpha = \max\{1, 1, 1\} = 1$. Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1 - \alpha, 1 + \alpha] = [-2, 2]$.

3. Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en los que se encuentran.

Definimos:

$$\begin{aligned}f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 1\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x + 1 \\ -x^3 + \frac{1}{3}x & \\ \hline & -\frac{2}{3}x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 1 \\ \hline \frac{1}{3}x \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -3 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 1 \right) \\ &= 2x - 3\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 & -1 \\ -3x^2 + \frac{9}{2}x & \\ \hline \frac{9}{2}x & -1 \\ -\frac{9}{2}x + \frac{27}{4} & \\ \hline & \frac{23}{4} \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{4}{23} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{4}{23} \cdot \left(\frac{23}{4}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 1 \\ f_2(x) &= 2x - 3 \\ f_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

Separamos ahora las raíces:

x	$\text{sgn}(f_0(x))$	$\text{sgn}(f_1(x))$	$\text{sgn}(f_2(x))$	$\text{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	-	+	-	-	2
-1	+	+	-	-	1
0	+	-	-	-	1
1	+	+	-	-	1
2	+	+	+	-	1

Por tanto, p tiene una única raíz real, y está contenida en el intervalo $[-2, -1]$.

- Realiza dos iteraciones del método de la secante para calcular de forma aproximada el valor de la raíz más pequeña justificando la convergencia.

Tomemos como semillas los extremos del intervalo, $x_0 = -2$ y $x_1 = -1$. El método de la secante se define, para $n \geq 1$, como:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Realizamos dos iteraciones del método de la secante:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-2	-5
1	-1	1
2	-7/6	0,578704
3	3,101627	

Observación. Con los conocimientos vistos, no podemos asegurar la convergencia del método de la secante.

Ejercicio 1.1.2.10. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

1. Se pretende resolver la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson sabiendo que es convergente localmente ¿Qué debe cumplir (condición suficiente, no necesaria) la función f para que dicho método tenga convergencia local al menos cúbica?

Sea I el intervalo de convergencia en el que además se encuentra la raíz s de f . Supongamos que $f \in \mathcal{C}^4(I)$ (algo que no es muy restrictivo por las funciones que se suelen estudiar en cálculo numérico).

Definimos la función g auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Vemos que el método de Newton-Raphson para f consiste en el método iterativo para g . Por tanto, estudiaremos el orden de convergencia para g . Como $f \in \mathcal{C}^4(I)$, entonces, $g \in \mathcal{C}^3(I)$. Calculamos las derivadas de g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ g''(x) &= \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)f'(x)f''(x)}{f'(x)^4} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f'(s) = 0$, es decir, que no se trata de una raíz simple. Distinguimos casos, donde m es la multiplicidad de la raíz s :

- $m = 2$: $f(x) = (x - s)^2 q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - s)q(x) + (x - s)^2 q'(x) = (x - s)[2q(x) + (x - s)q'(x)] \\ f''(x) &= 2q(x) + 2(x - s)q'(x) + (x - s)[2q'(x) + q'(x) + (x - s)q''(x)] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cancel{(x-s)^2} q(x) [2q(x) + 2(x-s)q'(x) + (x-s)[2q'(x) + q'(x) + (x-s)q''(x)]]}{\cancel{(x-s)^2} [2q(x) + (x-s)q'(x)]^2} \\ g'(s) &= \frac{2q^2(s)}{4q^2(s)} = \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

- $m \geq 3$: $f(x) = (x - s)^m q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - s)^{m-1} r(x) & r(s) &\neq 0 \\ f''(x) &= (x - s)^{m-2} t(x) & t(s) &\neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$g'(x) = \frac{(x-s)^m q(x) (x-s)^{m-2} t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{(x-s)^{2m-2} q(x) t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{q(x) t(x)}{r(x)^2}$$

$$g'(s) = \frac{q(s) t(s)}{r(s)^2} \neq 0$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

Por tanto, hemos de suponer $m = 1$, es decir, $f'(s) \neq 0$. En ese caso, los denominadores no se anulan, y tenemos que:

$$g'(s) = \frac{0}{f'(s)^2} = 0$$

$$g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)} = 0 \iff f''(s) = 0$$

Por tanto, si $f \in \mathcal{C}^4(I)$, $f'(s) \neq 0$ y $f''(s) = 0$, entonces el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia al menos cúbica.

- Si sabemos que f tiene una única raíz real en el intervalo $[-1, 1]$, ¿Cuántas iteraciones del método de bisección hay que realizar para conseguir un error menor que 10^{-7} ?

Supongamos que podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo; es decir, que $f(-1)f(1) < 0$. Entonces:

$$|e_n| < \frac{1+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-7} \iff 2^n \geq 10^7 \iff n \geq 23,52$$

Por tanto, serán necesarias, como máximo (ya que en iteraciones anteriores podría haber un error menor) 24 iteraciones, y a partir de entonces el error siempre será menor que 10^{-7} .

- ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$ invariante frente a transformaciones lineales de F ?

Observación. Que sea invariante frente a transformaciones lineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0 .

Consideramos el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1} F(X_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dada ahora $A \in GL_k(\mathbb{R})$, consideramos ahora el método aplicado a $AF(X) = 0$:

$$X'_{n+1} = X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1} (AF)(X'_n)$$

Por conocimientos de Análisis Matemático I, por ser F diferencial, entonces AF es diferenciable con:

$$J(AF)(X) = A \cdot JF(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Además, como A es regular, si $JF(X)$ es regular, entonces $J(AF)(X)$ también lo es, cumpliendo:

$$(J(AF)(X))^{-1} = (A \cdot JF(X))^{-1} = JF(X)^{-1} \cdot A^{-1} \quad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1}(AF)(X'_n) = X'_n - JF(X'_n)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot F(X'_n) \\ &= X'_n - JF(X'_n)^{-1} F(X'_n) \end{aligned}$$

Por tanto, y partiendo de la misma semilla $X_0 = X'_0$, el método de Newton-Raphson aplicado a $F(X) = 0$ es invariante frente a transformaciones lineales de F ; es decir,

$$X_n = X'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.1.2.11. El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $\alpha/3$, conociendo las de $\alpha \in]0, \pi/2[$.

1. Llamando $x = \sin(\alpha/3)$ y $a = \sin \alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[2 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 2 \left(1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[3 - 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] = 3 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \sin(\alpha/3)$ es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

2. Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada al polinomio dado por $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.

Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = -4x^3 + 3x - a \\ f_1(x) &= p'(x) = -12x^2 + 3 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -4x^3 + 3x - a & -12x^2 + 3 \\ 4x^3 - x & \frac{1}{3}x \\ \hline & 2x - a \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -1 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -1 \cdot (2x - a) \\ &= -2x + a \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -12x^2 & +3 \\ 12x^2 - 6ax & 6x + 3a \\ \hline -6ax & +3 \\ 6ax & -3a^2 \\ \hline & (3 - 3a^2) \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{1}{3} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (3 - 3a^2) \\ &= -1 + a^2 \end{aligned}$$

Además, como $\alpha \in]0, \pi/2[$, entonces $a \in]0, 1[$, por lo que $-1 + a^2 < 0$. Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -4x^3 + 3x - a \\ f_1(x) &= -12x^2 + 3 \\ f_2(x) &= -2x + a \\ f_3(x) &= -1 + a^2 \end{aligned}$$

Para ver cuántas raíces reales tiene, en primer lugar hemos de acotarlas. Definimos:

$$\alpha = \max \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{a}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$

Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1 - \alpha, 1 + \alpha] = \left[-\frac{7}{4}, \frac{7}{4} \right]$.

Para deducir cuántas raíces reales tiene, hemos de estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm en los extremos del intervalo:

x	$\text{sgn}(f_0(x))$	$\text{sgn}(f_1(x))$	$\text{sgn}(f_2(x))$	$\text{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	+	-	+	-	3
0	-	+	+	-	2
$a/2$	+	+	0	-	1
1	-	-	-	-	0
2	-	-	-	-	0

donde las evaluaciones más problemáticas han sido:

$$f_0(a/2) = -4 \left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3 \left(\frac{a}{2}\right) - a = -\frac{a^3}{2} + \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}(1 - a^2) > 0$$

$$f_1(a/2) = -12 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3 = -3a^2 + 3 = 3(1 - a^2) > 0$$

$$f_2(a/2) = -2 \cdot \frac{a}{2} + a = -a + a = 0$$

Por tanto, p tiene exactamente 3 raíces reales.

3. Demuestra que $\sin(\alpha/3)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $]0, a/2[$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.

Sabemos que $\sin(\alpha/3)$ es solución de la ecuación $p(x) = 0$, y además sabemos que la solución del intervalo $]0, a/2[$ es única. Por tanto, tan solo nos queda demostrar que $\sin(\alpha/3) \in]0, a/2[$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{2} > \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) &\iff \sin \alpha = 3 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \iff \\ &\iff 3 - 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2 \iff \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{4} \iff \\ &\iff \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{2} \iff \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} \iff \alpha < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $\sin(\alpha/3) \in]0, a/2[$, y te tiene demostrado que es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en dicho intervalo.

Comprobamos ahora que el método de Newton-Raphson converge para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$. Para ello, calculamos $p'(x)$:

$$p'(x) = -12x^2 + 3 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{2}$$

Comprobamos las 4 condiciones de convergencia para aplicar el método de Newton-Raphson en el intervalo $[0, a/2]$:

- a) $p(0)p(a/2) < 0$ se tiene, como hemos comprobado al estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm.
- b) $p'(x) \neq 0$ para $x \in [0, a/2]$ por ser $a < 1$.
- c) $p''(x)$ no cambia de signo en $[0, a/2]$.

d) Comprobemos la última condición:

$$\begin{aligned}p(0) &= -a \\p'(0) &= 3 \\p\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{a}{2}(1 - a^2) \\p'\left(\frac{a}{2}\right) &= 3(1 - a^2)\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(0)}{p'(0)}\right| &= \frac{a}{3} < \frac{a}{2} \\ \left|\frac{p(a/2)}{p'(a/2)}\right| &= \frac{a/2(1 - a^2)}{3(1 - a^2)} = \frac{a}{6} < \frac{a}{2}\end{aligned}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge para todo $x_0 \in [0, a/2]$, y en particular para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$.

4. Para resolver la ecuación anterior, se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{a}{3 - 4x_n^2}$$

Estudia bajo qué condiciones el método converge localmente a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

Vemos en primer lugar lo siguiente:

$$\frac{a}{2} < \frac{3}{4} \iff a < \frac{3}{2}$$

que se tiene de forma directa. Por tanto, podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned}g: [0, a/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{a}{3 - 4x^2}\end{aligned}$$

Tenemos que $g \in \mathcal{C}^1([0, a/2])$, y que:

$$|g'(x)| = \left| \frac{-8ax}{(3 - 4x^2)^2} \right| = \frac{8a|x|}{(3 - 4x^2)^2} \leq \frac{8a \cdot a/2}{(3 - 4 \cdot 0^2)^2} = \frac{4a^2}{9} < 1 \quad \forall x \in [0, a/2]$$

Por tanto, el método propuesto converge localmente a la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en el intervalo $[0, a/2]$.

Respecto al orden de convergencia, como p tiene tres raíces reales sabemos que la multiplicidad de cada una de ellas es simple, por lo que el orden de convergencia es cuadrático. Por otro lado, para que este método tenga convergencia cuadrática es necesario que $g'(s) = 0$, siendo s la solución de la ecuación $p(x) = 0$.

$$\begin{aligned}g'(x) = 0 &\iff x = 0 \\ g(0) = 0 &\iff a = \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

No obstante, esto no es posible, ya que $\alpha \in]0, \pi/2[$. Por tanto, $g'(s) \neq 0$, y el método de Newton-Raphson converge más rápidamente que el método propuesto.

5. Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de $\sin(\pi/18)$.

Tomamos $a = 1/2$, $x_0 = 1/6$ y aplicamos una iteración del método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = \frac{1}{6} - \frac{-4\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}}{-12\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{6} - \frac{-1/54 + 1/2 - 1/2}{-1/3 + 3} = \frac{1}{6} + \frac{3}{54 \cdot 8} = \frac{25}{144} \approx 0,173611 \end{aligned}$$

n	x_n
0	$1/6$
1	0,173611

1.2. Derivación e integración numérica

1.2.1. Relación 1. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.1.1.

1. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia progresiva en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a$, $x_1 = a + h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - (a + h)}{a - (a + h)} = \frac{x - a - h}{-h} = \frac{a + h - x}{h} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{a + h - a} = \frac{x - a}{h} \\ \ell'_0(x) &= -1/h \\ \ell'_1(x) &= 1/h\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a)\ell_0(x) + f(a + h)\ell_1(x) + E(x) \\ f'(x) &= f(a)\ell'_0(x) + f(a + h)\ell'_1(x) + E'(x)\end{aligned}$$

Además, el error cometido al interpolar f en $a, a + h$ mediante dos nodos es:

$$\begin{aligned}E(x) &= f[a, a + h, x]\Pi(x) \\ E'(x) &= f[a, a + h, x, x]\Pi(x) + f[a, a + h, x]\Pi'(x)\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + R(f) \\ R(f) = E'(a) &= f[a, a + h, a]\Pi'(a) = -h \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \quad \xi \in]a, a + h[\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en \mathbb{P}_1 , puesto que en estos casos se anulará la segunda derivada. No es exacta en \mathbb{P}_2 porque el error no se anula.

2. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f \in C^2[a, a + h]$.

Desarrollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1) \quad \xi_1 \in]a, a + h[$$

Por tanto, tenemos que:

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_1) \quad \xi_1 \in]a, a + h[$$

3. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia centrada en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a - h, x_1 = a + h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - (a + h)}{a - h - (a + h)} = \frac{x - a - h}{-2h} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - (a - h)}{a + h - (a - h)} = \frac{x - a + h}{2h} \\ \ell'_0(x) &= -1/2h \\ \ell'_1(x) &= 1/2h\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a - h)\ell_0(x) + f(a + h)\ell_1(x) + E(x) \\ f'(x) &= f(a - h)\ell'_0(x) + f(a + h)\ell'_1(x) + E'(x)\end{aligned}$$

Además, el error cometido al interpolar f en $a - h, a + h$ mediante dos nodos es:

$$\begin{aligned}E(x) &= f[a - h, a + h, x]\Pi(x) \\ E'(x) &= f[a - h, a + h, x, x]\Pi(x) + f[a - h, a + h, x]\Pi'(x)\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} + R(f) \\ R(f) &= E'(a) = f[a - h, a + h, a, a]\Pi(a) = -h^2 \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 , puesto que en estos casos se anulará la tercera derivada. Por tanto, el grado de exactitud de esta fórmula es 2.

4. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f''' \in C^3[a - h, a + h]$.

Desarrollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

$$\begin{aligned}f(a + h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) & \xi_1 \in]a, a + h[\\ f(a - h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) & \xi_2 \in]a - h, a[\end{aligned}$$

Realizamos una combinación lineal de ambas expresiones, forzando a que el coeficiente de $f'(a)$ sea 1 y el coeficiente de $f(a)$ sea 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha_0 = 1/2h \\ \alpha_1 = -1/2h \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + R(f) \\ R(f) &= -\frac{h^2}{12} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \quad \xi_1, \xi_2 \in]a-h, a+h[\\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \quad \xi \in]a-h, a+h[\end{aligned}$$

donde en (*) hemos empleado el Teorema del Valor Medio.

Ejercicio 1.2.1.2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Ejercicio 1.2.1.3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolviente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in C^4[a, a+2h]$.

Ejercicio 1.2.1.4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en \mathbb{P}_n siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in C^{n+3}[a, b]$ con $[a, b]$ tal que $x_0, x_1, \dots, x_n, c \in [a, b]$, entonces

$$R(f) = 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!} \Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} \Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \Pi''(c)$$

siendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in]\min\{x_0, c\}, \max\{x_n, c\}[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Sabemos que el error cometido con la interpolación de f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n mediante $p \in \mathbb{P}_n$ es:

$$E(x) = f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \Pi(x)$$

Calculemos cada una de las derivadas de $E(x)$:

$$\begin{aligned} E'(x) &= f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \Pi(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \Pi'(x) \\ E''(x) &= 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x] \Pi(x) + 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x] \Pi'(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \Pi''(x) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} R(f) &= L(f - p) = L(E) = E''(c) = \\ &= 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, c, c, c]\Pi(c) + 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, c, c]\Pi'(c) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, c]\Pi''(c) = \\ &= 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c) \end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in]\min\{x_0, c\}, \max\{x_n, c\}[$, donde hemos empleado que los nodos están ordenados; es decir, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Ejercicio 1.2.1.5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in C^5[a - 2h, a]$.

Sabemos que la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es de la forma:

$$f''(a) \approx \alpha_0 f(a - 2h) + \alpha_1 f(a - h) + \alpha_2 f(a)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ son los coeficientes que debemos determinar. Para ello, imponemos exactitud en \mathbb{P}_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= (a - 2h)\alpha_0 + (a - h)\alpha_1 + a\alpha_2 \\ 2 &= (a - 2h)^2\alpha_0 + (a - h)^2\alpha_1 + a^2\alpha_2 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= a(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - 2h\alpha_0 - h\alpha_1 \\ 2 &= a^2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + 4h^2\alpha_0 + h^2\alpha_1 - 4ah\alpha_0 - 2ah\alpha_1 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= h(2\alpha_0 + \alpha_1) \\ 2 &= 2h^2\alpha_0 + h^2(2\alpha_0 + \alpha_1) - 2ah(2\alpha_0 + \alpha_1) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_0 + \alpha_1 \\ 1 = h^2\alpha_0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1/h^2 \\ \alpha_1 = -2\alpha_0 = -2/h^2 \\ \alpha_2 = -\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_0 = 1/h^2 \end{array} \right\}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es:

$$f''(a) \approx \frac{1}{h^2}f(a - 2h) - \frac{2}{h^2}f(a - h) + \frac{1}{h^2}f(a)$$

Para el error, definimos:

$$\Pi(x) = \prod_{i=0}^2 (x - (a - ih)) = (x - a + 2h)(x - a + h)(x - a)$$

$$\Pi'(x) = (x - a + h)(x - a) + (x - a + 2h)(x - a) + (x - a + 2h)(x - a + h)$$

$$\Pi''(x) = 2(x - a) + 2(x - a + h) + 2(x - a + 2h)$$

Por el Ejercicio 1.2.1.4, puesto que $f \in C^5[a - 2h, a]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} R(f) &= 2 \cdot \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \Pi(a) + 2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \Pi'(a) + \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!} \Pi''(a) = \\ &= 2 \cdot 2h^2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} + 6h \cdot \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!} = \\ &= h^2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{6} + h \cdot f^{(3)}(\xi_0) \end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in]a - 2h, a[$.

Ejercicio 1.2.1.6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando se tenga que $f \in C^4[a - h, a + h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Ejercicio 1.2.1.7.

1. Halle la fórmula de tipo interpolatorio en P_2 de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a - h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a + h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in C^4[a - h_1, a + h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

2. Use la tabla de valores

x	$f(x)$
0,7	-0,1
1,25	0,2
1,5	0,3
1,75	0,25

para dar valores aproximados de $f'(0,7)$, $f'(1,25)$, $f'(1,5)$ y $f'(1,75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

Ejercicio 1.2.1.8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0,8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0,6, 0,8 y 1.

1.2.2. Relación 2. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.2.1.

1. Obtén la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$, mediante desarrollo de Taylor de $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término.

Buscamos obtener $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f'(a) = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) + R(f)$$

Desarrollando en serie de Taylor $f(a)$ y $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término, tenemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\xi) \end{aligned}$$

donde $\xi \in]a, a+h[$. Multiplicando por α_0 y α_1 respectivamente y sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) &= (\alpha_0 + \alpha_1)f(a) + \alpha_1 h f'(a) + \frac{\alpha_1 h^2}{2}f''(a) + \frac{\alpha_1 h^3}{6}f'''(a) + \\ &\quad + \frac{\alpha_1 h^4}{4!}f^{(4)}(a) + \frac{\alpha_1 h^5}{5!}f^{(5)}(\xi) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot h = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{h} \\ \alpha_1 = \frac{1}{h} \end{cases}$$

Por lo tanto, la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$ es:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + R(f)$$

Respecto al error, tenemos que:

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(a) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(\xi) \\ &= -\frac{h}{2}f''(\mu) \quad \text{para algún } \mu \in]a, a+h[\end{aligned}$$

2. Si notamos por $F(a, h)$ la aproximación de $f'(a)$ obtenida anteriormente, expresa el valor exacto de $f'(a)$ en función de $F(a, h)$ y los restantes términos en el desarrollo de Taylor.

3. A partir de una combinación de los valores $F(a, h)$ y $F(a, h = 2)$ obtén una fórmula con mayor orden de precisión que $F(a, h)$.
4. Aplica las dos fórmulas obtenidas para aproximar $f'(2)$ con $h = 0,1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 3]$.

Ejercicio 1.2.2.2. Para evaluar el funcional $L(f) = 2f'(a) - f''(a)$ se propone una fórmula del tipo

$$2f'(a) - f''(a) \approx \alpha_0 f(a - h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a + h) :$$

1. Imponiendo exactitud en el espacio correspondiente halla la fórmula anterior para que sea de tipo interpolatorio clásico.

En este caso, como hay 3 nodos, es necesario imponer exactitud en \mathbb{P}_2 , o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 - 0 &= \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 &= \alpha_0 \cdot (a - h) + \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot (a + h) \\ 2 \cdot 2a - 2 &= \alpha_0 \cdot (a - h)^2 + \alpha_1 \cdot a^2 + \alpha_2 \cdot (a + h)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a - h & a & a + h \\ (a - h)^2 & a^2 & (a + h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4a - 2 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz ampliada, y aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a - h & a & a + h & 2 \\ (a - h)^2 & a^2 & (a + h)^2 & 4a - 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3 = F_3 - (a - h)F_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a - h & a & a + h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a + h) & 2(a + h - 1) \end{array} \right) \xrightarrow{F'_2 = F_2 - (a - h)F_1} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a + h) & 2(a + h - 1) \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3 = F_3 - aF_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 2(h - 1) \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{h - 1}{h^2} \\ \alpha_1 = \frac{2 - 2 \cdot \frac{h-1}{h}}{h^2} = \frac{2}{h^2} \\ \alpha_0 = -\frac{2 + h - 1}{h^2} = -\frac{1 + h}{h^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, al ser exacta en \mathbb{P}_2 , la siguiente fórmula es de tipo interpolatorio clásico:

$$2f'(a) - f''(a) \approx -\frac{1 + h}{h^2} f(a - h) + \frac{2}{h^2} f(a) + \frac{h - 1}{h^2} f(a + h)$$

2. Obtén una expresión del error de la fórmula en función de unas o varias derivadas de la función de órdenes superiores a dos.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= (x - a + h)(x - a)(x - a - h) \\ \Pi'(x) &= (x - a)(x - a - h) + (x - a + h)(x - a - h) + (x - a + h)(x - a) \\ \Pi''(x) &= 2(x - a + h) + 2(x - a) + 2(x - a - h)\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$E(x) = f[a - h, a, a + h, x]\Pi(x)$$

Calculemos su derivada primera y segunda:

$$\begin{aligned}E'(x) &= f[a - h, a, a + h, x]\Pi'(x) + f[a - h, a, a + h, x]\Pi'(x) \\ E''(x) &= 2f[a - h, a, a + h, x, x]\Pi(x) + 2f[a - h, a, a + h, x, x]\Pi'(x) + f[a - h, a, a + h, x]\Pi''(x)\end{aligned}$$

Evaluamos cada una de las derivadas en a :

$$\begin{aligned}E'(a) &= -f[a - h, a, a + h, a]h^2 \\ E''(a) &= -2f[a - h, a, a + h, a, a]h^2\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}R(f) &= L(E) = 2E'(a) - E''(a) \\ &= -2f[a - h, a, a + h, a]h^2 + 2f[a - h, a, a + h, a, a]h^2 = \\ &= 2h^2 (f[a - h, a, a + h, a, a] - f[a - h, a, a + h, a]) = \\ &= 2h^2 \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!} \right) \quad \text{para algún } \xi_1, \xi_2 \in]a - h, a + h[\end{aligned}$$

3. Aplica la fórmula obtenida para aproximar $2f'(2) - f''(2)$ con $h = 0,1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 3]$.

$$\begin{aligned}2f'(2) - f''(2) &\approx -\frac{1+0,1}{0,1^2}f(1,9) + \frac{2}{0,1^2}f(2) + \frac{0,1-1}{0,1^2}f(2,1) \\ &= -\frac{1,1}{0,01}\ln(1,9) + \frac{2}{0,01}\ln(2) + \frac{-0,9}{0,01}\ln(2,1) \approx 1,2511476\end{aligned}$$

4. Compara el error real obtenido en el apartado anterior con respecto a una cota deducida de 2).

El valor real es:

$$2f'(2) - f''(2) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2^2} \right) = \frac{5}{4} = 1,25$$

Por tanto, el error real obtenido es:

$$\text{Error real} \approx 1,25 - 1,2511476 \approx -0,147607 \cdot 10^{-3}$$

El error obtenido en 2) es:

$$2 \cdot 0,1^2 \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!} \right) = 0,02 \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!} \right) \quad \xi_1, \xi_2 \in]1,9, 2,1[$$

Para poder acotarlo, necesitamos acotar las derivadas cuarta y tercera de f . Como $f(x) = \ln(x)$, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Observación. Notemos que este ejercicio carece de sentido práctico, puesto que si podemos calcular las funciones derivadas podemos calcular el funcional pedido. No obstante, en la práctica se supone que no podremos calcular estas derivadas, pero sí las tendremos acotadas de alguna forma (por ejemplo, piénsese en las funciones trigonométricas).

Por tanto, la cota del error es:

$$\begin{aligned} |\text{Error Predicho}| &\leq 0,02 \left(\frac{|f^{(4)}(\xi_1)|}{4!} + \frac{|f^{(3)}(\xi_2)|}{3!} \right) \leq 0,02 \left(\frac{6}{1,9^4 \cdot 4!} + \frac{2}{1,9^3 \cdot 3!} \right) \\ &\leq 0,02 \left(\frac{1}{1,9^4 \cdot 4} + \frac{1}{1,9^3 \cdot 3} \right) \approx 1,355627 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

5. Aplica la fórmula para obtener $2f'(0) - f''(0)$ suponiendo que tienes la siguiente tabla de valores de f :

x_i	$f(x_i)$
-0,2	9
0	10
0,2	9
0,4	12

Tomando $h = 0,2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2f'(0) - f''(0) &\approx -\frac{1+0,2}{0,2^2} f(-0,2) + \frac{2}{0,2^2} f(0) + \frac{0,2-1}{0,2^2} f(0,2) \\ &= -\frac{1,2}{0,04} \cdot 9 + \frac{2}{0,04} \cdot 10 + \frac{-0,8}{0,04} \cdot 9 = 50 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.3. Considera la fórmula de tipo interpolatorio clásico siguiente

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a+3h)$$

1. Da una expresión del error de dicha fórmula.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= (x-a+h)(x-a-3h) \\ \Pi'(x) &= (x-a-3h) + (x-a+h) \end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 2 nodos dados es:

$$E(x) = f[a - h, a + 3h, x]\Pi(x)$$

Calculemos su derivada primera:

$$E'(x) = f[a - h, a + 3h, x]\Pi(x) + f[a - h, a + 3h, x]\Pi'(x)$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned} R(f) &= L(E) = E'(a) = f[a - h, a + 3h, a, a]\Pi(a) + f[a - h, a + 3h, a]\Pi'(a) \\ &= -3h^2 f[a - h, a + 3h, a, a] - 2hf[a - h, a + 3h, a] = \\ &= -3h^2 \left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!} \right) - 2h \left(\frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2!} \right) = \\ &= -h^2 \left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2} \right) - h(f^{(2)}(\xi_2)) \quad \text{para algún } \xi_1, \xi_2 \in]a - h, a + 3h[\end{aligned}$$

2. Úsala para aproximar la derivada $f'(3)$ siendo $f(x) = x^3$ con $h = 0,1$.

Calculamos los polinomios fundamentales de Lagrange:

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - (a + 2h)}{a - h - (a + 3h)} = \frac{x - a - 2h}{-4h} \implies \ell'_0(x) = -\frac{1}{4h} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - (a - h)}{a + 3h - (a - h)} = \frac{x - a + h}{4h} \implies \ell'_1(x) = \frac{1}{4h} \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de derivación numérica es:

$$f'(3) \approx -\frac{1}{0,4}f(3 - 0,1) + \frac{1}{0,4}f(3 + 0,3) = 28,87$$

Ejercicio 1.2.2.4. Determina razonadamente si es posible diseñar una fórmula numérica de tipo interpolatorio en el espacio generado por $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^4\}$ para aproximar

$$\int_{-2}^2 f(x) dx + \int_{-2}^2 |x|f(x) dx$$

usando para ello los datos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx, \quad \int_{-1}^1 |x|f(x) dx, \quad f(0) \quad \text{y} \quad f'(0).$$

En particular determina el peso de $f'(0)$.

Ejercicio 1.2.2.5. Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

Como tiene 3 nodos y se trata de la segunda derivada, sabemos que no puede ser exacta en \mathbb{P}_5 , por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, x_1$ y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

Imponemos exactitud en \mathbb{P}_4 , o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

$$0 = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3$$

$$0 = \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4$$

Veamos qué es necesario para que el sistema sea compatible:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & 2 \\ x_1^3 & x_2^3 & 0 \end{vmatrix} = -2(x_1 x_2^3 - x_1^3 x_2) = -2x_1 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = -2x_1 x_2 (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

Por tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenius, si $x_2 \neq -x_1$, el sistema es incompatible y no tiene solución. Por tanto, imponemos $x_2 = -x_1$ y el sistema queda:

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = x_1(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$2 = x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$0 = x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$0 = x_1^4(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Como $x_1 \neq 0$, obtenemos que este sistema es incompatible. Por tanto, no es posible imponer exactitud en \mathbb{P}_4 . Veamos si es posible imponer exactitud en \mathbb{P}_3 :

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

$$0 = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3$$

Anteriormente vimos que es necesario imponer $x_2 = -x_1$. Por tanto, el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = x_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 2 = x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 = x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = -\frac{2}{x_1^2} \\ \alpha_1 = \frac{1}{x_1^2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{x_1^2} \end{array} \right\}$$

Por tanto, el grado máximo de exactitud es 3 y la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio es:

$$f''(0) = -\frac{2}{x_1^2}f(0) + \frac{1}{x_1^2}f(x_1) + \frac{1}{x_1^2}f(-x_1) + R(f)$$

donde notemos que hemos impuesto que los nodos sean simétricos respecto al origen.

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f . ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= x(x - x_1)(x - x_2) \\ \Pi'(x) &= (x - x_1)(x - x_2) + x(x - x_2) + x(x - x_1) \\ \Pi''(x) &= 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2x \end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$\begin{aligned} E(x) &= f[0, x_1, x_2, x]\Pi(x) \\ E'(x) &= f[0, x_1, x_2, x, x]\Pi(x) + f[0, x_1, x_2, x]\Pi'(x) \\ E''(x) &= 2f[0, x_1, x_2, x, x, x]\Pi(x) + 2f[0, x_1, x_2, x, x]\Pi'(x) + f[0, x_1, x_2, x]\Pi''(x) \end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned} R(f) &= L(E) = E''(0) = -2x_1^2 f[0, x_1, x_2, 0, 0] + 2f[0, x_1, x_2, 0](-x_1 + x_1) \\ &= -2x_1^2 f[0, x_1, x_2, 0, 0] = \\ &= -2x_1^2 \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \right) \quad \text{para algún } \xi_1 \in]\min\{-x_1, x_1\}, \max\{-x_1, x_1\}[\end{aligned}$$

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1} .

Ejercicio 1.2.2.6. Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f), \quad a \neq -1, 1, 2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

Como tiene 4 nodos y se trata de la primera derivada, sabemos que no puede ser exacta en \mathbb{P}_5 , por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

Imponemos exactitud en \mathbb{P}_4 , o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + a\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 4\alpha_2 + a^2\alpha_3 \\ 0 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 8\alpha_2 + a^3\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 16\alpha_2 + a^4\alpha_3 \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & a^3 & 0 \\ 1 & 1 & 16 & a^4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_2=F_2+F_1 \\ F'_4=F_4+F_1}]{\substack{F'_3=F_3-F_1 \\ F'_5=F_5-F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\ 1 & 1 & 16 & a^4 & 0 \end{array}\right) \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F'_4=F_4-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & a(a^2-1) & -1 \\ 0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_5=F_5-5F_3}]{F'_4=F_4-2F_3} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-1)(a-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^4-5a^2+4 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que:

$$\begin{aligned} a^4-5a^2+4=0 &\iff a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \iff a^2 = 4 \vee a^2 = 1 \iff \\ &\iff a \in \{-2, 2, -1, 1\} \end{aligned}$$

Distinguiamos valores:

- Si $a \notin \{1, -1, 2, -2\}$, por la última ecuación $\alpha_3 = 0$, pero entonces la penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a \in \{1, -1, 2\}$, la última penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a = -2$, el sistema queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \begin{cases} \alpha_0 = -2/3 \\ \alpha_1 = 2/3 \\ \alpha_2 = -1/12 \\ \alpha_3 = 1/12 \end{cases}$$

Por tanto, para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible, $a = -2$ y el grado máximo de exactitud es 4. La fórmula es:

$$f'(0) = -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2) + R(f)$$

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f .

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= (x+1)(x-1)(x-2)(x+2) \\ \Pi'(x) &= (x-1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-1)(x+2) + (x+1)(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 4 nodos dados es:

$$\begin{aligned}E(x) &= f[-1, 1, 2, -2, x]\Pi(x) \\ E'(x) &= f[-1, 1, 2, -2, x, x]\Pi(x) + f[-1, 1, 2, -2, x]\Pi'(x)\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}R(f) &= L(E) = E'(0) = f[-1, 1, 2, -2, 0]\Pi(0) + f[-1, 1, 2, -2, 0]\Pi'(0) \\ &= 4f[-1, 1, 2, -2, 0, 0] + f[-1, 1, 2, -2, 0] \cdot (4 - 4 - 2 + 2) = \\ &= 4f[-1, 1, 2, -2, 0, 0] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{30} \quad \text{para algún } \xi \in]-2, 2[\end{aligned}$$

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1} .