Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2016-17.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primer parcial.

Fecha 16 de marzo de 2017.

Ejercicio 1. Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y).

Ejercicio 2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

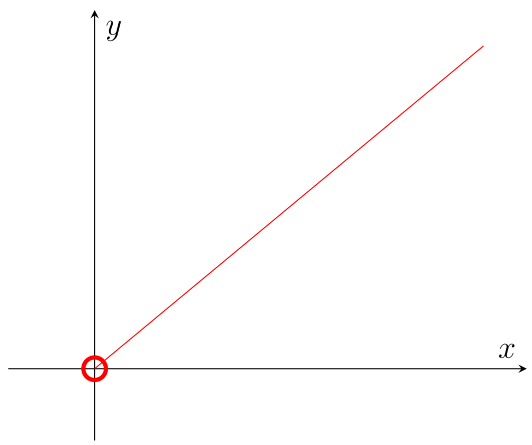
define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

Ejercicio 3. Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases}$$

Este admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

En primer lugar, hemos de representar la órbita pedida. Como $x(t) = y(t)$, tenemos que la órbita está contenida en la recta $y = x$. No obstante, como tenemos que $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, la órbita es la parte de la recta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, sin incluir el origen. Esta es:



Para encontrar la ecuación diferencial de las órbitas, hemos de considerar la derivada de la función $y = y(x)$ que define la órbita. Así, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables

$$\varphi : s = x, y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua? Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$. ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

Para que el cambio de variables sea admisible, hemos de asegurar en primer lugar que es un difeomorfismo de clase C^1. Sea el cambio de variable $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (x,t) \end{array}$$

Vemos que φ se trata de la simetría axial respecto de la recta $y = x$. Comprobemos entonces que φ es un difeomorfismo, para lo cual calculamos su inversa:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (y,s) \end{array}$$

Comprobemos que son inversas:

$$\begin{array}{ll} \varphi^{-1}(\varphi(t,x)) = \varphi^{-1}(x,t) = (t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \\ \varphi(\varphi^{-1}(s,y)) = \varphi(y,s) = (s,y) & \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por tanto, φ^{-1} es la inversa de φ, por lo que φ es biyectiva. Además, como sus componentes son proyecciones, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que φ es un difeomorfismo.

Calculemos ahora la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 0 + 1 \cdot f(t,x) = f(t,x) \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, el cambio de variables es admisible si $f(t,x) \neq 0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0, y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Observación. Se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0.