Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Propiedades de los Lenguajes Regulares

Ejercicio 1.1.1. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o libres de contexto. Justificar las respuestas.

1. $L_1 = \{0^i b^j \mid i = 2j \text{ ó } 2i = j\}$

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^{2n}b^n \in L_1$ con $|z| = 3n \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0, b\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{2n-k-l}b^n \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = 0^{k+2l+2n-k-l}b^n = 0^{2n+l}b^n \notin L_1$, ya que, como $l \geqslant 1$:

   $$2n + l \neq 2n \quad \text{y} \quad 2(2n + l) \neq n$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Veamos ahora que sí es libre de contexto. Consideramos la gramática $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{0, b\}, P, S)$ con P definido por:

   $$\begin{aligned} S &\to S_1 \mid S_2 \\ S_1 &\to 00S_1b \mid \varepsilon \\ S_2 &\to 0S_2bb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   Tenemos que G es una gramática libre de contexto tal que $\mathcal{L}(G) = L_1$, por lo que L_1 es libre de contexto.

2. $L_2 = \{uu^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^*, |u| \leqslant 1000\}$

   Consideramos el lenguaje auxiliar:

   $$L_2' = \{u \in \{0, 1\}^* \mid |u| \leqslant 2 \cdot 1000\}$$

   Veamos que L_2' es finito. Como el número de combinaciones de n elementos de $\{0, 1\}$ es 2^n, entonces el número de palabras de longitud menor o igual a $2 \cdot 1000$ es:

   $$|L_2'| = \sum_{i=0}^{2\cdot 1000} 2^i < \infty$$

   Por tanto, como $L_2 \subset L_2'$ finito, tenemos que L_2 es finito y por tanto regular.

3. $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^*, |u| \geqslant 1000\}$

   Sabemos que el siguiente lenguaje es independiente del contexto:

   $$L_3' = \{uu^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^*\}$$

   Además, tenemos que $L_3' = L_2 \cup L_3$. Supongamos que L_3 es regular. Entonces, como L_2 es regular, tendríamos que L_3' es regular, lo cual es una contradicción.

Por tanto, L_3 no es regular. Para ver que es libre de contexto, consideramos la gramática $G = (V, \{0,1\}, P, S)$ con:

$$V = \{S\} \cup \{A_i \mid i \in \{1, \dots, 1000\}\}$$

Tenemos que P está definido por:

$$\begin{aligned} S &\to 0A_10 \mid 1A_11, \\ A_i &\to 0A_{i+1}0 \mid 1A_{i+1}, \qquad i \in \{1, \dots, 999\}, \\ A_{1000} &\to 0A_{1000}0 \mid 1A_{1000}1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Notemos que, en A_i, ya hemos leído i caracteres de u (la palabra que forma la mitad del palíndromo). Una vez hemos llegado a A_{1000}, hemos leído 1000 caracteres de u. Por tanto, podemos añadir los que queramos sin restricción, y podemos también terminar. Como $L_3 = \mathcal{L}(G)$, tenemos que L_3 es independiente del contexto.

4. $L_4 = \{0^i1^j2^k \mid i = j \text{ ó } j = k\}$

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n1^n2^{2n} \in L_4$ con $|z| = 3n \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1,2\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l}1^n2^{2n} \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = 0^{k+2l+n-k-l}1^n2^{2n} = 0^{n+l}1^n2^{2n} \notin L_4$, ya que, como $l \geqslant 1$:

   $$n + l \neq n \quad \text{y} \quad n \neq 2n$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Veamos ahora que sí es libre de contexto. Consideramos la gramática $G = (V, \{0,1,2\}, P, S)$ donde $V = \{S, S_1, S_2, A_0, A_2\}$ y P está definido por:

   $$\begin{aligned} S &\to S_1A_2 \mid A_0S_2 \\ S_1 &\to 0S_11 \mid \varepsilon \\ A_2 &\to 2A_2 \mid \varepsilon \\ S_2 &\to 1S_22 \mid \varepsilon \\ A_0 &\to 0A_0 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   Tenemos que G es una gramática libre de contexto tal que $\mathcal{L}(G) = L_4$, por lo que L_4 es libre de contexto.

Ejercicio 1.1.2. Determinar qué lenguajes son regulares o libres de contexto de los siguientes:

1. $\{u0u^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*\}$

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n10^n \in L$ con $|z| = 2n+1 \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l}10^n \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = 0^{k+2l+n-k-l}10^n = 0^{n+l}10^n \notin L$, ya que, como $l \geqslant 1$:

$$n + l \neq n$$

Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Veamos ahora que sí es libre de contexto. Consideramos la gramática $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$, con P definido por:

$$S \to 0S01S1 \mid 0 \mid 1$$

Tenemos que G es una gramática libre de contexto tal que $\mathcal{L}(G) = L$, por lo que L es libre de contexto.

2. Números en binario que sean múltiplos de 4

   Tenemos que todos los números en binario que son múltiplos de 4 terminan en 00, por lo que vienen dados por la siguiente expresión regular:

   $$0^* + (1 + 0)^*00$$

   Notemos que hemos incluido 0^*, porque el 0 también es múltiplo de 4. Por tanto, es regular.

3. Palabras de $\{0, 1\}^*$ que no contienen la subcadena 0110.

   Notemos que podríamos dar un autómata que reconociese ese lenguaje, pero no es la opción más sencilla. Veamos en primer lugar que el lenguaje formado por las palabras que sí contienen la subcadena 0110 es regular dando una expresión regular asociada a él:

   $$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

   Como el lenguaje descrito es su complementario y el complementario de un regular es regular, tenemos que el lenguaje dado es regular.

Ejercicio 1.1.3. Determinar qué lenguajes son regulares y qué lenguajes son libres de contexto entre los siguientes:

1. Conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ en las que cada 1 va precedido por un número par de ceros.

   Un reconocedor del lenguaje es el autómata de la figura 1.1, que tiene los siguientes estados:

   - q_0: Llevo un número par de ceros consecutivos, puedo leer un 1.
   - q_1: Llevo un número impar de ceros consecutivos, no puedo leer un 1.
   - q_2: Acabo de leer un 1.

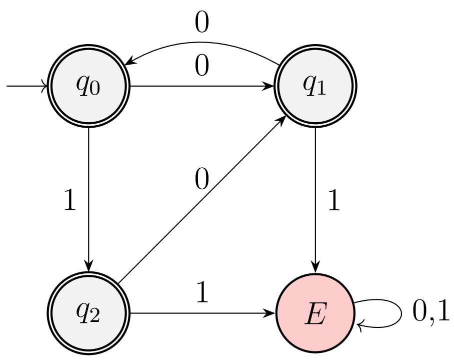


Figura 1.1: Autómata que reconoce el lenguaje del ejercicio 1.1.3.1.

Por tanto, como hemos dado un autómata que reconoce el lenguaje, es regular.

2. Conjunto $\{0^i 1^{2j} 0^{i+j} \mid i, j \geqslant 0\}$

   Usaremos el Lema de Bombeo para demostrar que no es regular. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n 1^{2n} 0^{2n}$ con $|z| = 5n \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l} 1^{2n} 0^{2n} \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^i w = 0^{k+2l+n-k-l} 1^{2n} 0^{2n} = 0^{n+l} 1^{2n} 0^{2n} \notin L$, ya que, como $l \geqslant 1$:

   $$2n \neq n + n + l$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Veamos ahora que es libre de contexto. Consideramos la gramática $G = (\{S, X\}, \{0,1\}, P, S)$, con P definido por:

   $$\begin{aligned} S &\to 11S0 \mid X, \\ X &\to 0X0 \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

   Tenemos que G es una gramática libre de contexto tal que $\mathcal{L}(G) = L$, por lo que L es libre de contexto.

3. Conjunto $\{0^i 1^j 0^{i*j} \mid i, j \geqslant 0\}$

   Usaremos el Lema de Bombeo para demostrar que no es regular. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n 1^n 0^{n^2}$ con $|z| = n + n + n^2 \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n-k-l} 1^n 0^{n^2} \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^i w = 0^{k+2l+n-k-l} 1^n 0^{n^2} = 0^{n+l} 1^n 0^{n^2} \notin L$, ya que, como $l \geqslant 1$:

   $$(n + l) \cdot n = n^2 + nl \neq n^2$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Además, este lenguaje no es libre de contexto (algo que aún no podemos demostrar).

Ejercicio 1.1.4. Determina si los siguientes lenguajes son regulares. Encuentra una gramática que los genere o un reconocedor que los acepte.

1. $L_1 = \{0^i 1^j \mid j < i\}$.

   Usaremos el Lema de Bombeo para demostrar que no es regular. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^{n+1}1^n \in L_1$ con $|z| = 2n+1 \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0,1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n+1-k-l}1^n \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 0$, tenemos que $uv^iw = 0^{k+n+1-k-l}1^n = 0^{n+1-l}1^n \notin L_1$, ya que:

   $$n < n + 1 - l \Longleftarrow l < 1$$

   Pero esto es una contradicción, ya que $l \geqslant 1$. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Veamos ahora que es libre de contexto. Consideramos la gramática $G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$, con P definido por:

   $$\begin{aligned} S &\to 0S \mid 0S' \\ S' &\to 0S'1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

   Tenemos que G es una gramática libre de contexto tal que $\mathcal{L}(G) = L_1$, por lo que L_1 es libre de contexto. Notemos que la producción $S \to 0S'$ fuerza a que haya al menos un 0 más que 1, y la producción $S \to 0S$ permite que la diferencia no sea de una sola unidad, sino que pueda ser mayor.

2. $L_2 = \{001^i 0^j \mid i, j \geqslant 1\}$.

   Tenemos que un reconocedor de L_2 es:

   $$001^+0^+$$

   Por tanto, tenemos que L_2 es regular.

3. $L_3 = \{010u \mid u \in \{0,1\}^*, u \text{ no contiene la subcadena } 010\}$.

   Sea $L' = \{u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ contiene la subcadena } 010\}$. Entonces sabemos que L' es regular con reconocedor:

   $$(0+1)^*010(0+1)^*$$

   Por tanto, $\overline{L'}$ es regular, por lo que está asociado a una expresión regular, sea esta $\widetilde{r}$. Entonces, L_3 es regular y está asociado a la expresión regular:

   $$010\widetilde{r}$$

Ejercicio 1.1.5. Sea el alfabeto $A = \{0, 1, +, =\}$, demostrar que el lenguaje

$$\text{ADD} = \{x = y + z \mid x, y, z \text{ son números en binario, y } x \text{ es la suma de } y \text{ y } z\}$$

no es regular.

Usaremos el Lema de Bombeo para demostrar que no es regular. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $w = [1^n = 0+1^n]$, donde hemos empleado los corchetes para facilitar la notación (ya que el $=$ lo estamos usando para igualdades entre cadenas y entre números en binario). Tenemos que $|w| = n + 3 + n \geqslant n$. Toda descomposición $w = uvw$, con $u, v, w \in \{0, 1, +, =\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

$$u = 1^k \quad v = 1^l \quad w = [1^{n-k-l} = 0 + 1^n] \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = [1^{k+2l+n-k-l} = 0+1^n] = [1^{n+l} = 0+1^n] \notin \text{ADD}$, ya que, como $l \geqslant 1$, en números binarios:

$$1^{n+l} \neq 0 + 1^n = 1^n$$

Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular.

Ejercicio 1.1.6. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no:

1. $L = \{uvu^{-1} \mid u, v \in \{0, 1\}^*\}$.

   Veamos en primer lugar que $L = \{0, 1\}^*$ por doble inclusión:

   $\subset$) Se tiene trivialmente que $L \subset \{0, 1\}^*$.

   $\supset$) Sea $w \in \{0, 1\}^*$. Entonces, podemos tomar $u = \varepsilon$ y $v = w$ para obtener $w \in L$.

   Por tanto, tenemos que L es regular, con reconocedor:

   $$(0 + 1)^*$$

2. L es el lenguaje sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ formado de las palabras de la forma $u0v$ donde u^{-1} es un prefijo de v.

   Usaremos el Lema de Bombeo para demostrar que no es regular. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 1^n01^n \in L$ con $|z| = 2n + 1 \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0, 1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

   $$u = 1^k \quad v = 1^l \quad w = 1^{n-k-l}01^n \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = 1^{k+2l+n-k-l}01^n = 1^{n+l}01^n \notin L$, ya que, como $l \geqslant 1$:

   $$n + l \neq n \Longrightarrow (1^{n+l})^{-1} = 1^{n+l} \neq 1^n$$

   Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular.

3. L es el lenguaje sobre el alfebeto $\{0, 1\}$ formado por las palabres en las que el tercer símbolo empezando por el final es un 1.

   Este lenguaje es regular, con reconocedor:

   $$(0 + 1)^*1(0 + 1)(0 + 1)$$

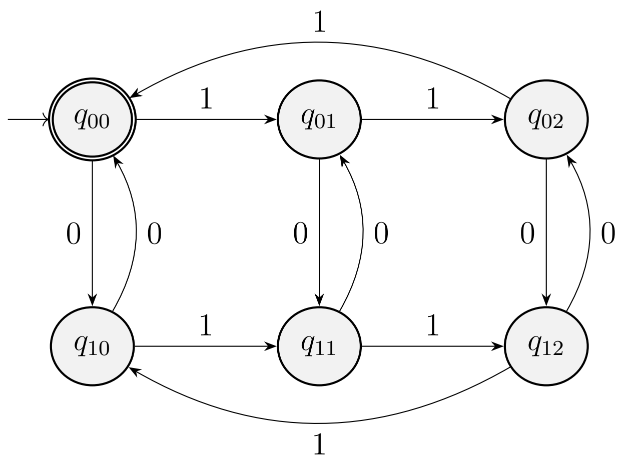


Figura 1.2: Autómata que reconoce el lenguaje del ejercicio 1.1.7.1.

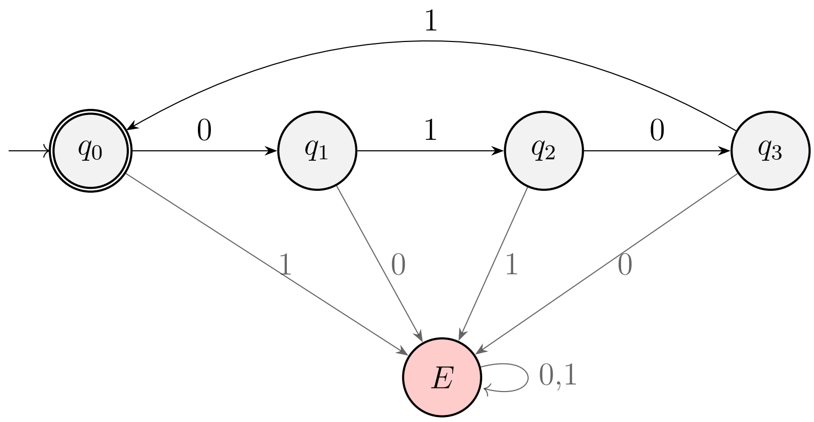


Figura 1.3: Autómata que reconoce el lenguaje del ejercicio 1.1.7.2.

Ejercicio 1.1.7. Obtener autómatas finitos determinísticos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

1. Palabras en las que el número de 1 es múltiplo de 3 y el número de 0 es par.

   El estado q_{ij} para $i = 0, 1, 2$ y $j = 0, 1$ indica que:

   - $n_1(u) \mathrm{mod} 3 = i$,
   - $n_0(u) \mathrm{mod} 2 = j$.

   Entonces, el autómata es el de la Figura 1.2.

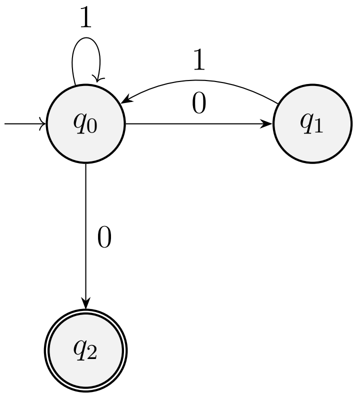
2. $\{(01)^{2i} \mid i \geqslant 0\}$

   El autómata es el de la Figura 1.3.

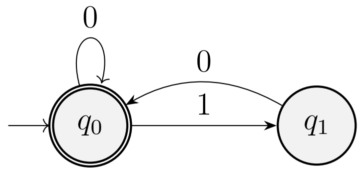
3. $L_3 = \{(0^{2i}1^{2i}) \mid i \geqslant 0\}$

   Veamos que este lenguaje no es regular con el Lema de Bombeo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^{2n}1^{2n} \in L_3$ con $|z| = 4n \geqslant n$. Toda descomposición $z = uvw$, con $u, v, w \in \{0, 1\}^*$, $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ debe cumplir que:

$$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{2n-k-l}1^{2n} \qquad \text{con } l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ l \geqslant 1,\ k + l \leqslant n$$



(a) AFND asociado a r_1.



(b) AFND asociado a r_2.

Figura 1.4: AFND asociados a las expresiones regulares r_1 y r_2.

Para $i = 2$, tenemos que $uv^iw = 0^{k+2l+2n-k-l}1^{2n} = 0^{2n+l}1^{2n} \notin L_3$, ya que, como $l \geqslant 1$:

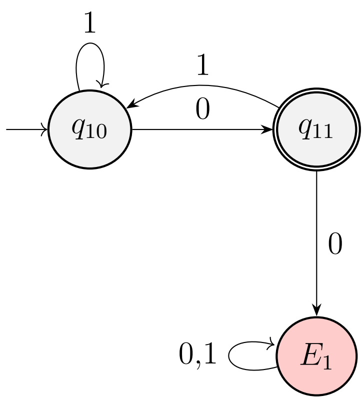
$$2n + l \neq 2n$$

Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, no es regular. Por tanto, no es posible construir un autómata finito determinístico que reconozca L_3.

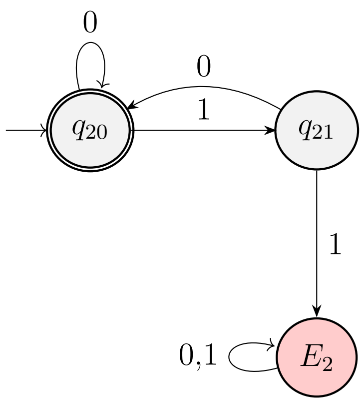
Ejercicio 1.1.8. Dar una expresión regular para la intersección de los lenguajes asociados a las expresiones regulares $(01 + 1)^*0$ y $(10 + 0)^*$. Se valorará que se construya el autómata que acepta la intersección de estos lenguajes, se minimice y, a partir del resultado, se construya la expresión regular.

Sea $r_1 = (01+1)^*0$ y $r_2 = (10+0)^*$. Construimos los AFND asociados a r_1 y r_2, mostrados en las figuras 1.4a y 1.4b, respectivamente.

Para poder aplicar el algoritmo de intersección de autómatas, antes hemos de convertir los autómatas en AFD. Los AFD asociados a r_1 y r_2 son los de las figuras 1.5a y 1.5b, respectivamente.



(a) AFD asociado a r_1.



(b) AFD asociado a r_2.

Figura 1.5: AFD asociados a las expresiones regulares r_1 y r_2.

Por tanto, el AFD que acepta la intersección de los lenguajes asociados a r_1 y r_2 es el de la figura 1.6.

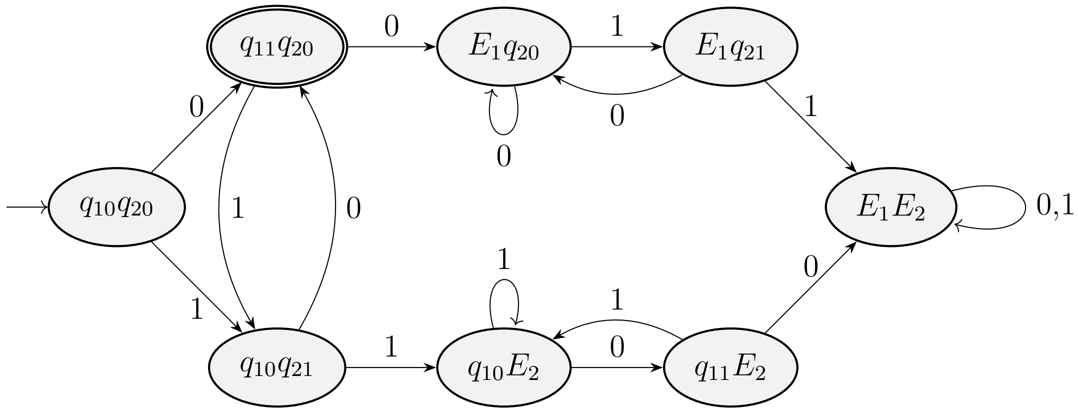


Figura 1.6: AFD que acepta la intersección de los lenguajes asociados a r_1 y r_2.

Para minimizarlo, consideramos en primer lugar que los siguientes estados son indistinguibles:

$$q_E := \{E_1q_{20}, E_1q_{21}, q_{10}E_2, q_{11}E_2, E_1E_2\}$$

Estos son indistinguibles puesto que desde ninguno de ellos se puede llegar a un estado final. Por tanto, el AFD minimal es el de la figura 1.7.

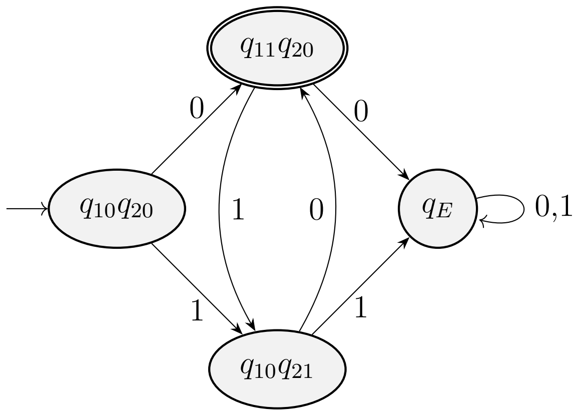


Figura 1.7: AFD minimal que acepta la intersección de los lenguajes asociados a r_1 y r_2.

Tenemos que es minimal, puesto que todos los estados son alcanzables y no hay estados distinguibles:

- $q_{11}q_{20}$ es distinguible del resto de estados por ser el único estado final.
- q_E es distinguible de $q_{10}q_{20}$ y $q_{10}q_{21}$, ya que leyendo un 0:

$$\delta(q_E, 0) = q_E \notin F \qquad \delta(q_{10}q_{20}, 0) = \delta(q_{10}q_{21}, 0) = q_{11}q_{20} \in F$$

- $q_{10}q_{20}$ y $q_{10}q_{21}$ son distinguibles, ya que leyendo 10:

$$\delta(q_{10}q_{20}, 1) = q_{11}q_{20} \in F \qquad \delta(q_{10}q_{21}, 1) = q_E \notin F$$

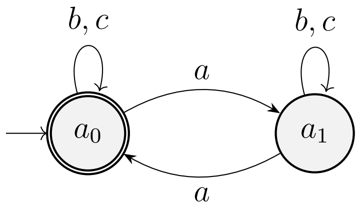


Figura 1.8: AFD que acepta palabras con número par de a's.

Por tanto, el AFD minimal que acepta la intersección de los lenguajes asociados a r_1 y r_2 es el de la figura 1.7. Para obtener la expresión regular asociada, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
q_{10}q_{20} &= 0q_{11}q_{20} + 1q_{10}q_{21} \\
q_{11}q_{20} &= 0q_E + 1q_{10}q_{21} + \varepsilon \\
q_{10}q_{21} &= 0q_{11}q_{20} + 1q_E \\
q_E &= 0q_E + 1q_E = (0+1)q_E
\end{aligned}$$

Por el Lema de Arden, como $q_E = (0+1)q_E + \emptyset$, tenemos que $q_E = (0+1)^*\emptyset = \emptyset$. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
q_{10}q_{20} &= 0q_{11}q_{20} + 1q_{10}q_{21} \\
q_{11}q_{20} &= 1q_{10}q_{21} + \varepsilon \\
q_{10}q_{21} &= 0q_{11}q_{20}
\end{aligned}$$

Sustituyendo $q_{10}q_{21}$ en la segunda ecuación, obtenemos:

$$q_{11}q_{20} = 1q_{11}q_{20} + \varepsilon \Longrightarrow q_{11}q_{20} = 10q_{11}q_{20} + \varepsilon = (10)^*\varepsilon = (10)^*$$

Sustituyendo ambos en la primera ecuación, obtenemos:

$$q_{10}q_{20} = 0(10)^* + 10q_{11}q_{20} = 0(10)^* + 10(10)^* = (0+10)(10)^*$$

Por tanto, la expresión regular asociada al AFD minimal de la figura 1.7 es

$$(0+10)(10)^*.$$

Ejercicio 1.1.9. Construir un Autómata Finito Determinista Minimal que acepte el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ de todas aquellas palabras que verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones.

1. La palabra contiene un número par de a's.
2. La longitud de la palabra es un múltiplo de 3.
3. La palabra no contiene la subcadena abc.

La condición 1 se puede cumplir con el autómata de la figura 1.8.
La condición 2 se puede cumplir con el autómata de la figura 1.9.
La condición 3 se puede cumplir con el autómata de la figura 1.10.

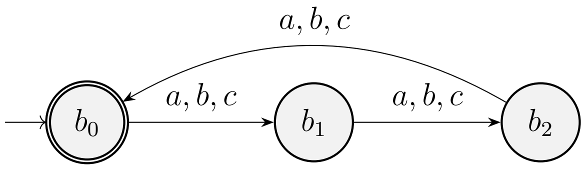


Figura 1.9: AFD que acepta palabras de longitud múltiplo de 3.

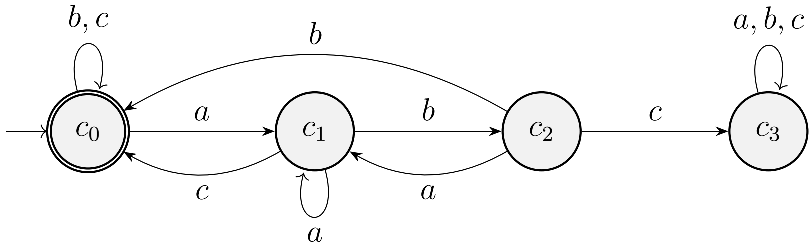


Figura 1.10: AFD que acepta palabras que no contienen la subcadena *abc*.

El autómata producto tiene los siguientes estados:

$$Q = \{a_i b_j c_k \mid i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2\}, k \in \{0,1,2,3\}\}$$
$$F = \{a_0 b_0 c_0\}$$

El autómata producto es $M = (Q, \{a,b,c\}, \delta, a_0b_0c_0, F)$, donde δ viene dado por la tabla 1.1. Además, todos sus estados son accesibles.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
δ	$a_0b_0c_0$	$a_0b_0c_1$	$a_0b_0c_2$	$a_0b_0c_3$	$a_0b_1c_0$	$a_0b_1c_1$	$a_0b_1c_2$	$a_0b_1c_3$	$a_0b_2c_0$	$a_0b_2c_1$	$a_0b_2c_2$	$a_0b_2c_3$
a	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_3$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_3$	$a_1b_0c_1$	$a_1b_0c_1$	$a_1b_0c_1$	$a_1b_0c_3$
b	$a_0b_1c_0$	$a_0b_1c_2$	$a_0b_1c_0$	$a_0b_1c_3$	$a_0b_2c_0$	$a_0b_2c_2$	$a_0b_2c_0$	$a_0b_2c_3$	$a_0b_0c_0$	$a_0b_0c_2$	$a_0b_0c_0$	$a_0b_0c_3$
c	$a_0b_1c_0$	$a_0b_1c_0$	$a_0b_1c_3$	$a_0b_1c_3$	$a_0b_2c_0$	$a_0b_2c_0$	$a_0b_2c_3$	$a_0b_2c_3$	$a_0b_0c_0$	$a_0b_0c_0$	$a_0b_0c_3$	$a_0b_0c_3$

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
δ	$a_1b_0c_0$	$a_1b_0c_1$	$a_1b_0c_2$	$a_1b_0c_3$	$a_1b_1c_0$	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_2$	$a_1b_1c_3$	$a_1b_2c_0$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_2$	$a_1b_2c_3$
a	$a_0b_1c_1$	$a_0b_1c_1$	$a_0b_1c_1$	$a_0b_1c_3$	$a_0b_2c_1$	$a_0b_2c_1$	$a_0b_2c_1$	$a_0b_2c_3$	$a_0b_0c_1$	$a_0b_0c_1$	$a_0b_0c_1$	$a_0b_0c_3$
b	$a_1b_1c_0$	$a_1b_1c_2$	$a_1b_1c_0$	$a_1b_1c_3$	$a_1b_2c_0$	$a_1b_2c_2$	$a_1b_2c_0$	$a_1b_2c_3$	$a_1b_0c_0$	$a_1b_0c_2$	$a_1b_0c_0$	$a_1b_0c_3$
c	$a_1b_1c_0$	$a_1b_1c_0$	$a_1b_1c_3$	$a_1b_1c_3$	$a_1b_2c_0$	$a_1b_2c_0$	$a_1b_2c_3$	$a_1b_2c_3$	$a_1b_0c_0$	$a_1b_0c_0$	$a_1b_0c_3$	$a_1b_0c_3$

Tabla 1.1: Transiciones del autómata producto para el ejercicio 1.1.9.

Ejercicio 1.1.10. Encontrar un AFD minimal para el lenguaje

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

Para ello, primero construimos el AFND asociado a la expresión regular, mostrado en la figura 1.11.

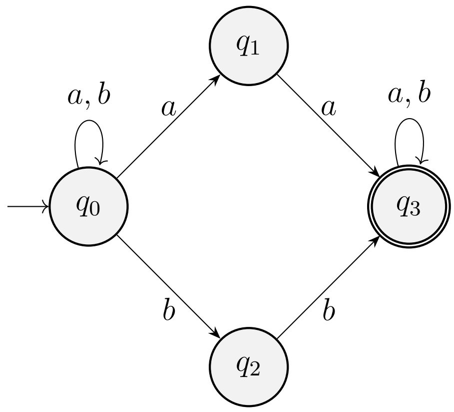


Figura 1.11: AFND asociado a la expresión regular $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$.

Convertimos el AFND en un AFD, mostrado en la figura 1.12.

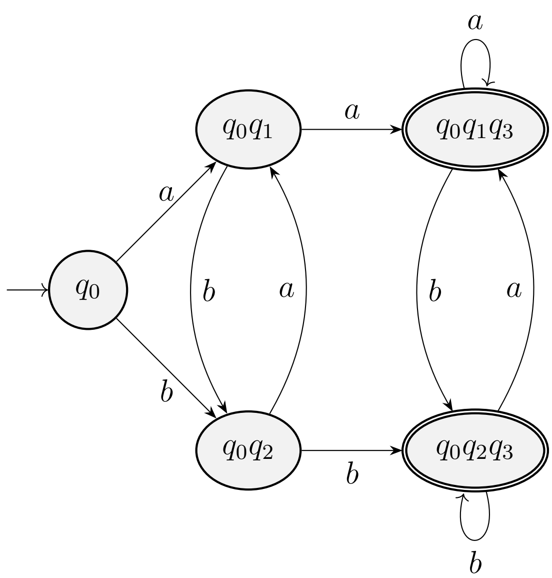


Figura 1.12: AFD asociado a la expresión regular $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$.

No obstante, este no es minimal. En primer lugar, vemos que los estados $q_0q_1q_3$ y $q_0q_2q_3$ son indistinguibles, ya que para cualquier palabra $w \in \{a,b\}^*$:

$$\delta(q_0q_1q_3, w) \in F \qquad \delta(q_0q_2q_3, w) \in F$$

Por tanto, notemos $q_F = \{q_0q_1q_3, q_0q_2q_3\}$. El AFD minimal es el de la figura 1.13.

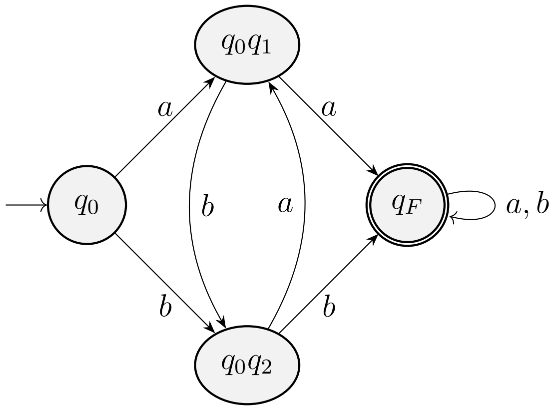


Figura 1.13: AFD minimal asociado a la expresión regular $(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$.

- q_F es distinguible del resto de estados por ser el único estado final.
- q_0q_1 y q_0q_2 son distinguibles, ya que leyendo un a:
$$\delta(q_0q_1, a) = q_F \in F \qquad \delta(q_0q_2, a) = q_0q_1 \notin F$$
- q_0 y q_0q_1 son distinguibles, ya que leyendo un a:
$$\delta(q_0, a) = q_0q_1 \notin F \qquad \delta(q_0q_1, a) = q_F \in F$$
- q_0 y q_0q_2 son distinguibles, ya que leyendo un b:
$$\delta(q_0, b) = q_0q_2 \notin F \qquad \delta(q_0q_2, b) = q_F \in F$$

Por tanto, el AFD minimal es el de la figura 1.13.

Ejercicio 1.1.11. Para cada uno de los siguientes lenguajes regulares, encontrar el autómata minimal asociado, y a partir de dicho autómata minimal, determinar la gramática regular que genera el lenguaje:

1. a^+b^+

   En primer lugar, construimos el AFD asociado al lenguaje, mostrado en la figura 1.14.

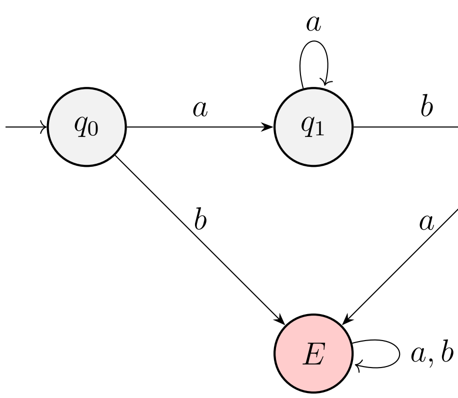


Figura 1.14: AFD asociado al lenguaje a^+b^+ del ejercicio 1.1.11.1.

   Veamos que este es minimal:

- q_2 es distinguible del resto de estados por ser el único estado final.
- q_0 y q_1 son distinguibles, ya que leyendo un b:

$$\delta(q_0, b) = E \notin F \qquad \delta(q_1, b) = q_2 \in F$$

- q_0 y E son distinguibles, ya que leyendo un ab:

$$\delta^*(q_0, ab) = q_2 \in F \qquad \delta^*(E, ab) = E \notin F$$

- q_1 y E son distinguibles, ya que leyendo un b:

$$\delta(q_1, b) = q_2 \in F \qquad \delta(E, b) = E \notin F$$

Por tanto, el AFD minimal es el de la figura 1.14. La gramática regular que genera el lenguaje es $G = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, P, \{q_0\})$ con P:

$$\begin{aligned} q_0 &\longrightarrow aq_1 \\ q_1 &\longrightarrow aq_1 \mid bq_2 \\ q_2 &\longrightarrow bq_2 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2. $a(a+b)^*b$

   En primer lugar, construimos el AFND asociado al lenguaje, mostrado en la figura 1.15.

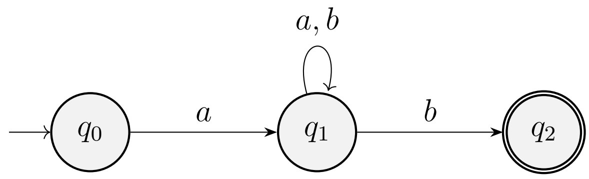


Figura 1.15: AFND asociado al lenguaje $a(a+b)^*b$ del ejercicio 1.1.11.2.

Convertimos el AFND en un AFD, mostrado en la figura 1.16.

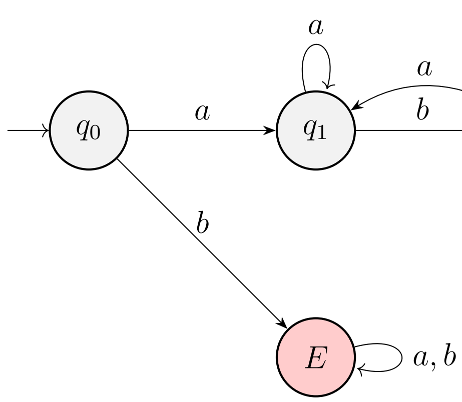


Figura 1.16: AFD asociado al lenguaje $a(a+b)^*b$ del ejercicio 1.1.11.2.

Veamos que este es minimal:

- q_1q_2 es distinguible del resto de estados por ser el único estado final.
- q_0 y q_1 son distinguibles, ya que leyendo un b:

$$\delta(q_0, b) = E \notin F \qquad \delta(q_1, b) = q_1q_2 \in F$$

- q_0 y E son distinguibles, ya que leyendo un ab:

$$\delta^*(q_0, ab) = q_1q_2 \in F \qquad \delta^*(E, ab) = E \notin F$$

- q_1 y E son distinguibles, ya que leyendo un b:

$$\delta(q_1, b) = q_1q_2 \in F \qquad \delta(E, b) = E \notin F$$

Por tanto, el AFD minimal es el de la figura 1.16. La gramática regular que genera el lenguaje es $G = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, P, \{q_0\})$ con P:

$$\begin{aligned}
q_0 &\longrightarrow aq_1 \\
q_1 &\longrightarrow aq_1 \mid bq_2 \\
q_2 &\longrightarrow bq_2 \mid aq_1 \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.12. Considera la gramática cuyas producciones se presentan a continuación y donde el símbolo inicial es S:

$$\begin{aligned}
S &\to xN \mid x \\
N &\to yM \mid y \\
M &\to zN \mid z
\end{aligned}$$

1. Escribe el diagrama de transiciones para el AFD que acepte el lenguaje $\mathcal{L}(G)$ generado por G.

   Las siguientes producciones generan el mismo lenguaje:

$$\begin{aligned}
S &\to xN \\
N &\to yM \mid \varepsilon \\
M &\to zN \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

   Por tanto, el AFD asociado al lenguaje $\mathcal{L}(G)$ es el de la figura 1.17.

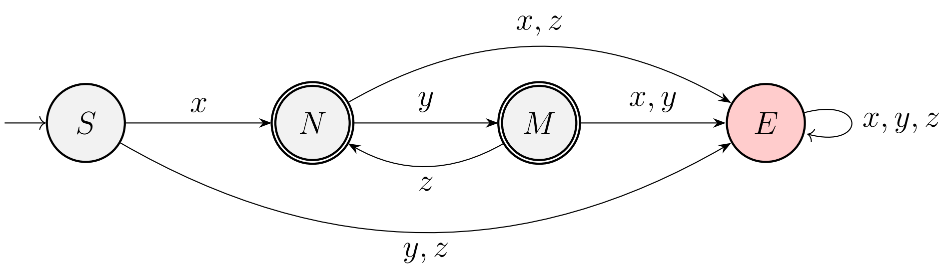


Figura 1.17: AFD asociado al lenguaje $\mathcal{L}(G)$ del ejercicio 1.1.12.

2. Encuentra una gramática regular por la izquierda que genere ese mismo lenguaje $\mathcal{L}(G)$.

   La expresión regular asociada al lenguaje $\mathcal{L}(G)$ es:

   $$x(yz)^*(y+\varepsilon)$$

   Sea $G' = (\{S,N,M,F\},\{x,y,z\},P,F)$ con P:

   $$\begin{aligned} F &\to N \mid M \\ N &\to Sx \mid Mz \\ M &\to Ny \\ S &\to \varepsilon \end{aligned}$$

   Tenemos que G' es una gramática regular por la izquierda, y $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$.

3. Encuentra el AFD que acepte el complementario del lenguaje $\mathcal{L}(G)$.

   Intercambiando los estados finales por no finales y viceversa en el AFD de la figura 1.17, obtenemos el AFD asociado al complementario del lenguaje $\mathcal{L}(G)$, mostrado en la figura 1.18.

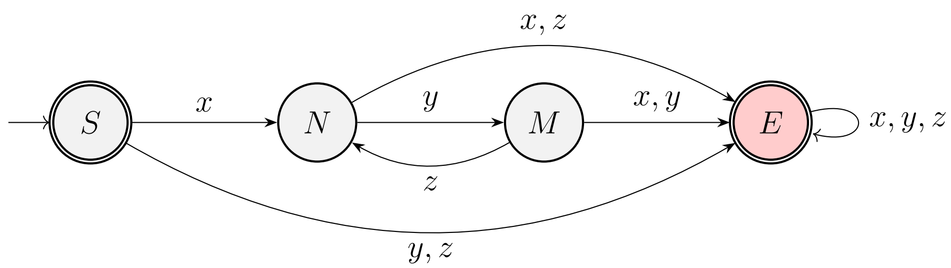


Figura 1.18: AFD asociado al lenguaje $\overline{\mathcal{L}(G)}$ del ejercicio 1.1.12.

Ejercicio 1.1.13. Determinar autómatas minimales para los lenguajes $L(M_1) \cup L(M_2)$ y $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$ donde,

- $M_1 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{a,b,c\},\delta_1,q_0,\{q_2\})$ donde

δ_1	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_2	q_1	q_1	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

- $M_2 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\{a,b,c\},\delta_2,q_0,\{q_2\})$ donde

δ_2	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_1	q_2	q_2	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

En primer lugar, minimizamos M_1 y M_2. La miminización de M_1 se muestra en la Tabla 1.2.

q_1	$\times$		
q_2	$\times$	$\times$	
q_3	$\times$	(q_0, q_3)	$\times$
	q_0	q_1	q_2

Tabla 1.2: Tabla de minimización de M_1.

Por tanto, $\{q_1, q_3\}$ son indistinguibles, por lo que el AFD minimal asociado a M_1 es $M_1^m = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta_1^m, q_0, \{q_2\})$ donde:

δ_1^m	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_1	q_1
b	q_2	q_1	q_1
c	q_1	q_1	q_0

La miminización de M_2 se muestra en la Tabla 1.3.

q_1	$\times$		
q_2	$\times$	$\times$	
q_3	$\times$	$\times$	$\times$
	q_0	q_1	q_2

Tabla 1.3: Tabla de minimización de M_2.

Por tanto, el AFD minimal asociado a M_2 es $M_2^m = M_2$ minimal. A continuación, construimos los autómatas finitos deterministas asociados a $L(M_1) \cup L(M_2)$ y $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$.

1. $L(M_1) \cup L(M_2)$

   En primer lugar, construimos el AFD asociado a $L(M_1) \cup L(M_2)$. Sea este $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta, (q_0, q_0'), F)$, donde:

   - $Q = \{q_i q_j' \mid i = 0, 1, 2 \text{ y } j = 0, 1, 2, 3\}$.
   - $F = \{(q_2, q_j') \mid j = 0, 1, 2, 3\} \cup \{(q_i, q_2') \mid i = 0, 1, 2\}$.
   - δ viene dada por la Tabla 1.4.

δ	(q_0, q_0')	(q_0, q_1')	(q_0, q_2')	(q_0, q_3')	(q_1, q_0')	(q_1, q_1')	(q_1, q_2')	(q_1, q_3')	(q_2, q_0')	(q_2, q_1')	(q_2, q_2')	(q_2, q_3')
a	q_1q_1'	q_1q_1'	q_1q_3'	q_1q_3'	q_1q_1'	q_1q_1'	q_1q_3'	q_1q_3'	q_1q_1'	q_1q_1'	q_1q_3'	q_1q_3'
b	q_2q_1'	q_2q_2'	q_2q_2'	q_2q_3'	q_1q_1'	q_1q_2'	q_1q_2'	q_1q_3'	q_1q_1'	q_1q_2'	q_1q_2'	q_1q_3'
c	q_1q_3'	q_1q_3'	q_1q_0'	q_1q_3'	q_1q_3'	q_1q_3'	q_1q_0'	q_1q_3'	q_0q_3'	q_0q_3'	q_0q_0'	q_0q_3'

Tabla 1.4: Transiciones del autómata producto para $L(M_1),\ L(M_2)$.

Los estados accesibles son:

$$\{q_0q_0', q_0q_3', q_1q_0', q_1q_1', q_1q_2', q_1q_3', q_2q_1', q_2q_3'\}$$

La minimización de M se muestra en la Tabla 1.5.

q_0q_3'	$\times$						
q_1q_0'	$\times$	$\times$					
q_1q_1'	$\times$	$\times$	$\times$				
q_1q_2'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
q_1q_3'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
q_2q_1'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
q_2q_3'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	q_0q_0'	q_0q_3'	q_1q_0'	q_1q_1'	q_1q_2'	q_1q_3'	q_2q_1'

Tabla 1.5: Tabla de minimización de M para $L(M_1) \cup L(M_2)$.

Por tanto, el AFD minimal asociado a $L(M_1) \cup L(M_2)$ es $M^m = M$, el cual se puede ver en la Figura 1.19.

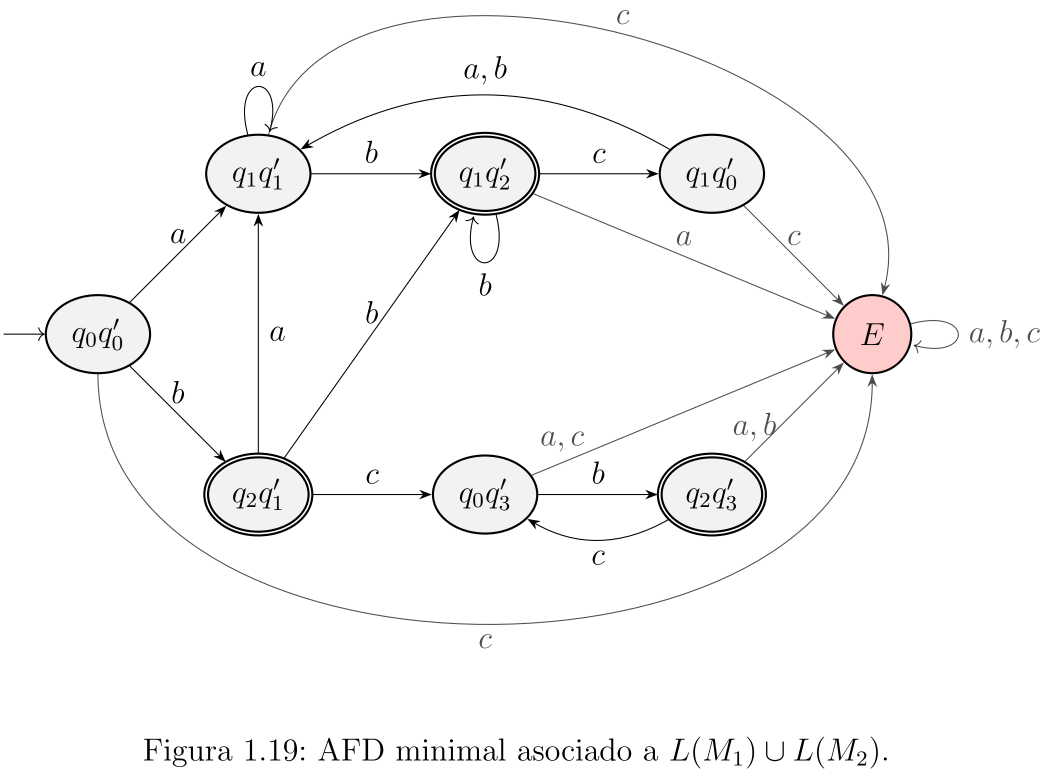


Figura 1.19: AFD minimal asociado a $L(M_1) \cup L(M_2)$.

2. $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$

   Ya tenemos del apartado anterior el AFD minimal asociado a $L(M_1)$. La minimización de $\overline{L(M_2)}$ se muestra en la Tabla 1.6.

q_1	$\times$		
q_2	$\times$	$\times$	
q_3	$\times$	$\times$	$\times$
	q_0	q_1	q_2

Tabla 1.6: Tabla de minimización de $\overline{M_2}$.

Por tanto, el AFD minimal asociado a $\overline{L(M_2)}$ es ya minimal. A continuación, construimos el AFD asociado a $L(M_1)\cap\overline{L(M_2)}$. Sea este $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta, (q_0, q_0'), F)$, donde:

- $Q = \{q_iq_j' \mid i = 0, 1, 2 \text{ y } j = 0, 1, 2, 3\}$.
- $F = \{(q_2, q_j') \mid j = 0, 1, 3\}$.
- δ viene dada por la Tabla 1.4.

Los estados accesibles son los mismos que antes:

$$\{q_0q_0', q_0q_3', q_1q_0', q_1q_1', q_1q_2', q_1q_3', q_2q_1', q_2q_3'\}$$

La minimización de M se muestra en la Tabla 1.7.

q_0q_3'							
q_1q_0'	$\times$	$\times$					
q_1q_1'	$\times$	$\times$					
q_1q_2'	$\times$	$\times$		(q_1q_2', q_1q_0') (q_qq_1', q_1q_0')			
q_1q_3'	$\times$	$\times$	(q_1q_2', q_1q_3') (q_1q_2', q_1q_0') (q_1q_1', q_1q_2') $(q0q_3', q_1q_0')$	(q_2q_3', q_2q_1') (q_1q_3', q_1q_0') (q_1q_1', q_1q_2')	(q_2q_3', q_2q_1') (q_1q_1', q_1q_3')		
q_2q_1'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
q_2q_3'	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	(q_0q_3', q_0q_0')
	q_0q_0'	q_0q_3'	q_1q_0'	q_1q_1'	q_1q_2'	q_1q_3'	q_2q_1'

Tabla 1.7: Tabla de minimización de M para $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$.

Por tanto, notando por $\equiv$ a la relación de indistinguibilidad, tenemos que:

$$q_0q_3' \equiv q_0q_0' := q_0 \qquad q_1q_1' \equiv q_1q_0' \equiv q_1q_2' \equiv q_1q_3' := q_1 \qquad q_2q_1' \equiv q_2q_3' := q_2$$

Por tanto, el AFD minimal asociado a $L(M_1)\cap\overline{L(M_2)}$ es $M^m = (Q, \{a, b, c\}, \delta^m, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_0, q_0q_1', q_0q_2', q_1, q_2, q_2q_0', q_2q_2'\}$.
- $F = \{q_2, q_2q_0'\}$.
- Los estados accesibles son $\{q_0, q_1, q_2\}$.

- δ^m viene dada por la Tabla 1.8, donde solo la definimos para los estados accesibles.

δ^m	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_1	q_1
b	q_2	q_1	q_1
c	q_1	q_1	q_0

Tabla 1.8: Transiciones del autómata minimal para $L(M_1)$, $\overline{L(M_2)}$.

El AFD minimal asociado a $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$ es el de la Figura 1.20.

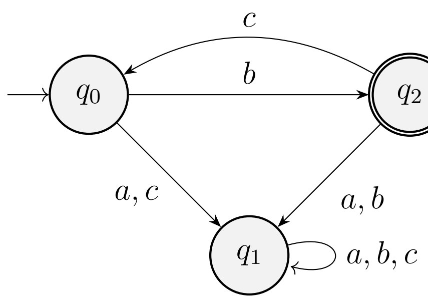


Figura 1.20: AFD minimal asociado a $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$.

Ejercicio 1.1.14. Dado el conjunto regular representado por la expresión regular $a^*b^* + b^*a^*$, construir un autómata finido determinístico minimal que lo acepte.

El AFND con transiciones nulas asociado a la expresión regular dada es el de la Figura 1.21.

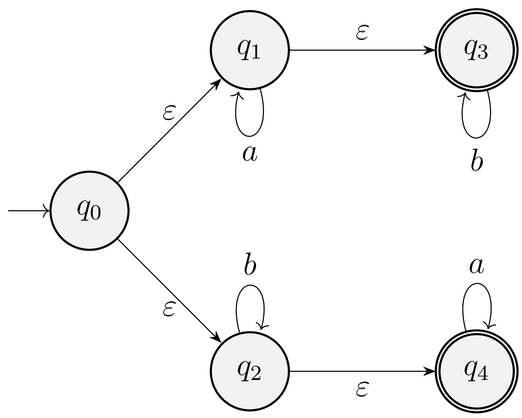


Figura 1.21: AFND con transiciones nulas asociado a la expresión regular $a^*b^*+b^*a^*$.

El AFD asociado a la expresión regular dada es el de la Figura 1.22.
Veamos ahora que el AFD de la Figura 1.22 es minimal.

- El estado E es distinguible de cualquier otro estado pues ser el único estado que no es final.

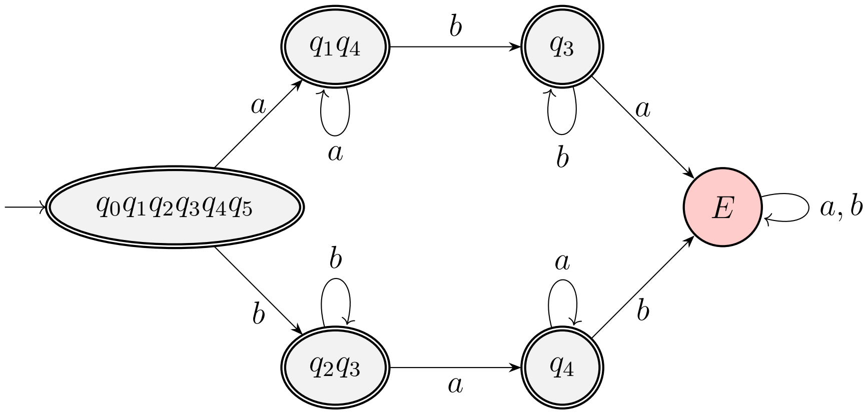


Figura 1.22: AFD asociado a la expresión regular $a^*b^* + b^*a^*$.

- Veamos que q_3 es distinguible del resto de estados finales. Leyendo a, tenemos que:
$$\delta(q_3, a) = E \notin F, \qquad \begin{cases} \delta(q_1q_4, a) = q_1q_4 \in F, \\ \delta(q_2q_3, a) = q_4 \in F, \\ \delta(q_4, a) = q_4 \in F, \\ \delta(q_0q_1q_2q_3q_4q_5, a) = q_1q_4 \in F. \end{cases}$$

- De forma análoga leyendo b, tenemos que q_4 es distinguible del resto de estados finales.

- El estado q_1q_4 es distinguible de q_2q_3 y $q_0q_1q_2q_3q_4q_5$ leyendo ba.

- Finalmente, $q_0q_1q_2q_3q_4q_5$ es distinguible de q_2q_3 leyendo ab.

Ejercicio 1.1.15. Sean los lenguajes:

1. $L_1 = (01 + 1)^*00$

2. $L_2 = 01(01 + 1)^*$

construir un autómata finito determinístico minimal que acepte el lenguaje $L_1 \setminus L_2$, a partir de autómatas que acepten L_1 y L_2.

Veamos que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Sea $z \in L_1$. Entonces, z es admitida por la expresión regular $(01 + 1)^*00$, por lo que termina en 0. Por tanto, $z \notin L_2$, ya que todas las palabras de L_2 terminan por 1. Por tanto, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $L_1 \setminus L_2 = L_1$. Aun así, haremos el proceso algorítmico para obtener el AFD minimal asociado a $L_1 \setminus L_2$.

El AFD asociado a L_1 es el de la Figura 1.23.

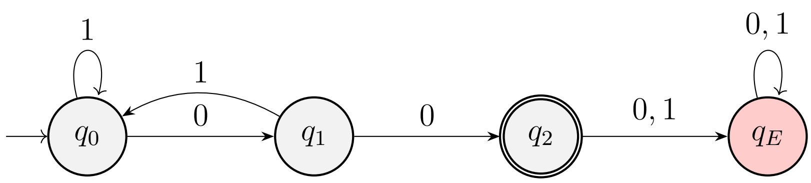


Figura 1.23: AFD minimal asociado a $L_1 = (01 + 1)^*00$.

El AFD asociado a L_2 es el de la Figura 1.24.

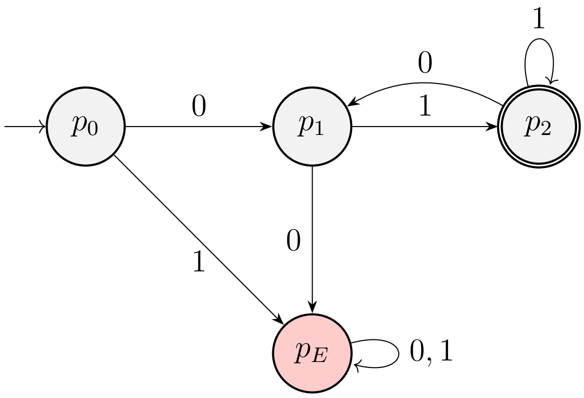


Figura 1.24: AFD minimal asociado a $L_2 = 01(01+1)^*$.

El AFD asociado a $L_1 \setminus L_2$ es el de la Figura 1.25.

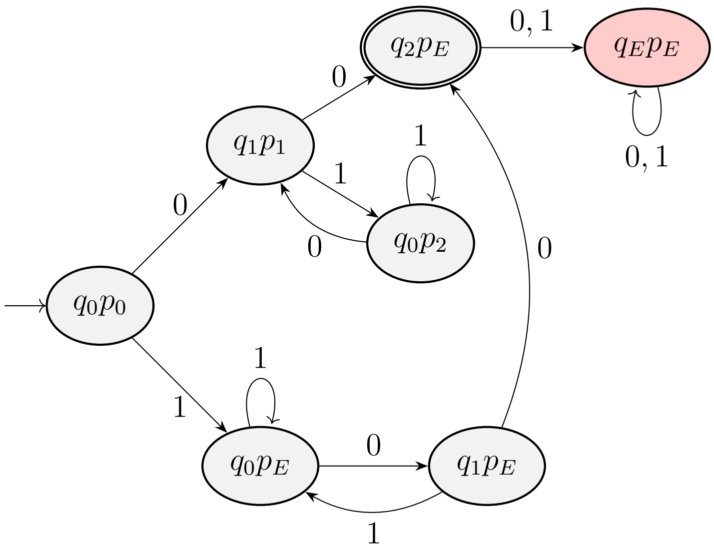


Figura 1.25: AFD asociado a $L_1 \setminus L_2$.

La minimización del AFD de la Figura 1.25 se muestra en la Tabla 1.9.

	q_0p_0	q_1p_1	q_2p_E	q_0p_2	q_0p_E	q_1p_E
q_1p_1	×					
q_2p_E	×	×				
q_0p_2		×	×			
q_0p_E		×	×	$(q_1p_E,\ q_1p_1)$ (q_0p_0, q_0p_2)		
q_1p_E	×	(q_0p_E, q_0p_0) (q_0p_E, q_0p_2)	×	×	×	
q_Ep_E	×	×	×	×	×	×

Tabla 1.9: Tabla de minimización de $L_1 \setminus L_2$.

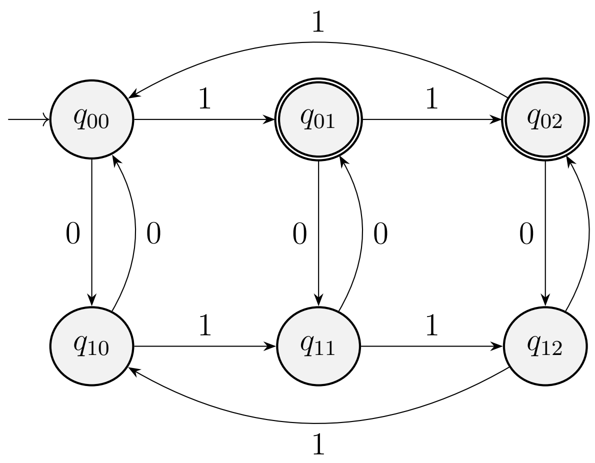


Figura 1.27: AFD que acepta el lenguaje L del Ejercicio 1.1.16.

Por tanto, notando por $\equiv$ a la relación de indistinguibilidad, tenemos que:

$$q_0p_0 \equiv q_0p_E \equiv q_0p_2 \qquad q_1p_1 \equiv q_1p_E$$

El AFD minimal asociado a $L_1 \setminus L_2$ es el de la Figura 1.26. Como vemos, este autómata es isomorfo al autómata de la Figura 1.23 que aceptaba L_1, como ya habíamos predicho.

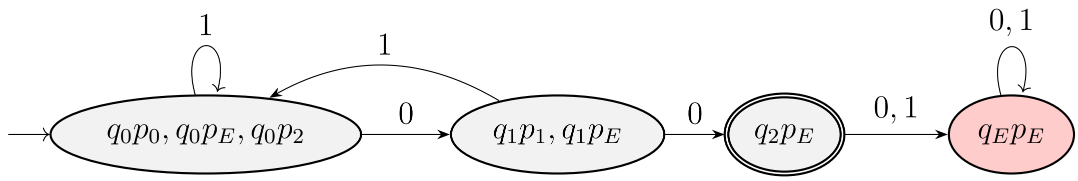


Figura 1.26: AFD minimal asociado a $L_1 \setminus L_2$.

Ejercicio 1.1.16. Dados los alfabetos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$ y el homomorfismo f de A^* en B^* dado por:

$$f(0) = 00, \quad f(1) = 01, \quad f(2) = 10, \quad f(3) = 11$$

Sea L el conjunto de las palabras de B^* en las que el número de símbolos 0 es par y el de símbolos 1 no es múltiplo de 3. Construir un autómata finito determinista que acepte el lenguaje $f^{-1}(L)$.

El AFD que acepta a L se desarrolló en el Ejercicio **??**. Se muestra no obstante de nuevo en la Figura 1.27.

El AFD que acepta a $f^{-1}(L)$ es el de la Figura 1.28.

Ejercicio 1.1.17. Determinar un autómata finito determinístico minimal para el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$ dado por la expresión regular $b(a + b)^* + cb^*$.

El AFD asociado a la expresión regular dada es el de la Figura 1.29.

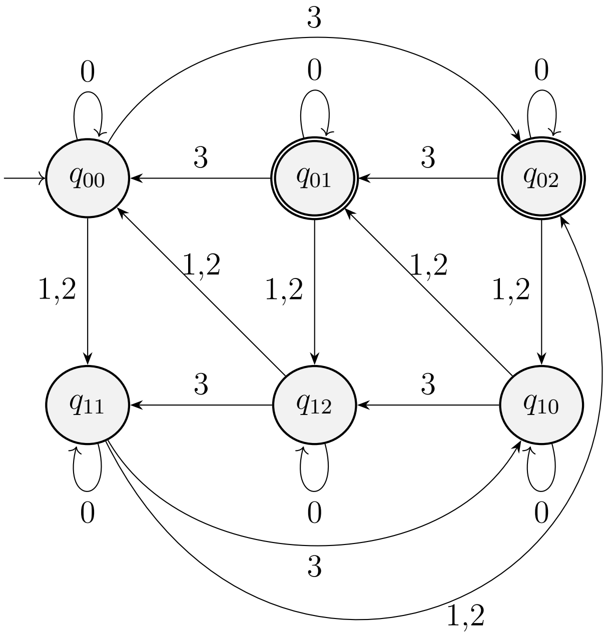


Figura 1.28: AFD que acepta el lenguaje L del Ejercicio 1.1.16.

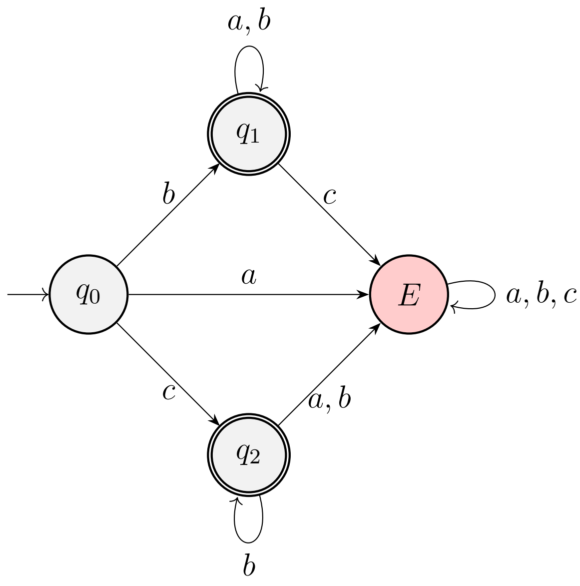


Figura 1.29: AFD asociado a la expresión regular $b(a + b)^* + cb^*$.

Veamos que es minimal:

- E es distinguible de cualquier otro estado puesto que desde él no se puede llegar a un estado final.
- q_0 es distinguible de q_1 y q_2 puesto que no es final.
- q_1 es distinguible de q_2 leyendo a.

Ejercicio 1.1.18. Determinar si las expresiones regulares siguientes representan el mismo lenguaje:

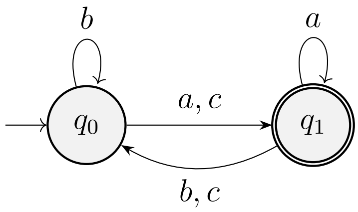


Figura 1.30: AFD minimal asociado a $L_1 = L_3$ del Ejercicio 1.1.18.

1. $L_1 = (b + (c + a)a^*(b + c))^*(c + a)a^*$

2. $L_2 = b^*(c + a)((b + c)b^*(c + a))^*a^*$

3. $L_3 = b^*(c + a)(a^*(b + c)b^*(c + a))^*a^*$

Justificar la respuesta.

Veamos en primer lugar que $L_2 \neq L_1, L_3$. Sea la palabra $u = caaccaaa$. Tenemos que $u \in L_1, L_3$ pero $u \notin L_2$. Por tanto, $L_2 \neq L_1, L_3$.

Veamos ahora que $L_1 = L_3$ obteniendo el autómata finito minimal asociado a cada uno de ellos y viendo que es igual. Este se encuentra en la Figura 1.30.

Ejercicio 1.1.19. Construir un autómata finito determinista minimal que acepte el conjunto de palabras sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$ que representen números no divisibles por dos ni por tres (en binario).

El AFD asociado a los múltiplos de 2 se muestra en la Figura 1.31.

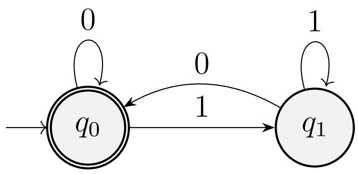


Figura 1.31: AFD minimal asociado a los múltiplos de 2 del Ejercicio 1.1.19.

El AFD asociado a los múltiplos de 3 se muestra en la Figura 1.32.

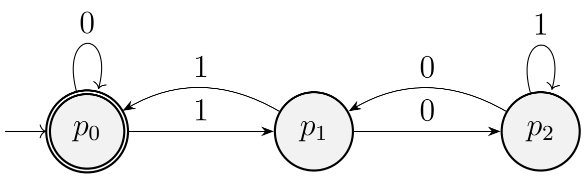


Figura 1.32: AFD minimal asociado a los múltiplos de 3 del Ejercicio 1.1.19.

El autómata descrito en el enunciado es el autómata producto de los complementarios a los dos anteriores, mostrado en la Figura 1.33.

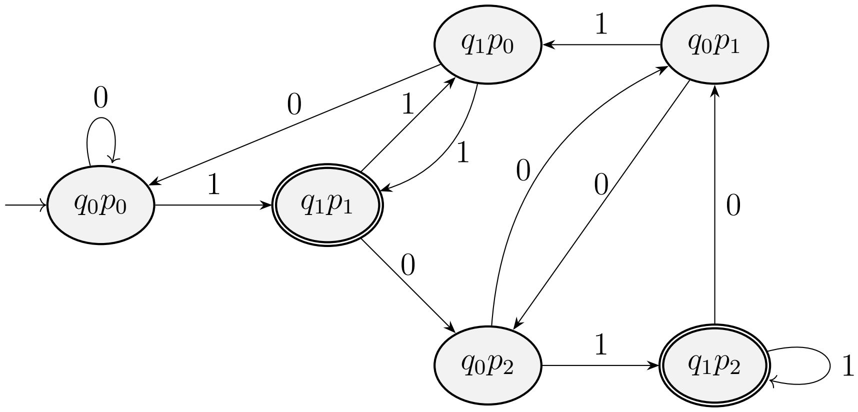


Figura 1.33: AFD asociado al lenguaje del Ejercicio 1.1.19.

La minimización del autómata de la Figura 1.33 se muestra en la Tabla 1.10.

q_1p_1	×				
q_1p_0		×			
q_0p_2	×	×	×		
q_0p_1	×	×	×	×	
q_1p_2	×	×	×	×	×
	q_0p_0	q_1p_1	q_1p_0	q_0p_2	q_1p_1

Tabla 1.10: Tabla de minimización del autómata de la Figura 1.33.

Por tanto, notando por $\equiv$ a la relación de indistinguibilidad, tenemos que:

$$q_0p_0 \equiv q_1p_0 \equiv: p_0$$

Por tanto, el autómata minimal asociado al lenguaje del enunciado es el de la Figura 1.34.

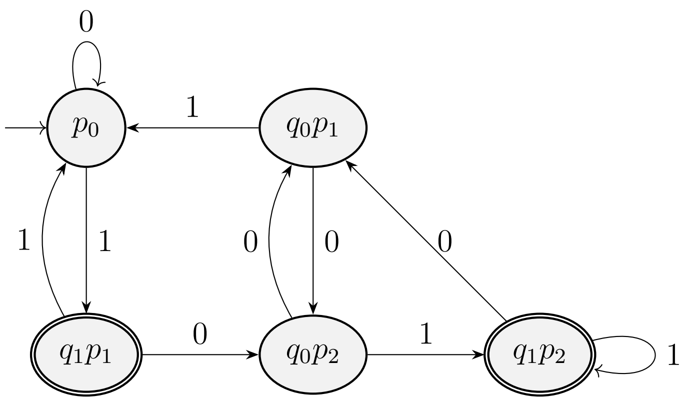


Figura 1.34: AFD Minimal asociado al lenguaje del Ejercicio 1.1.19.

Ejercicio 1.1.20. Determinar una expresión regular para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

- Palabras en las que el tercer símbolo es un 0.

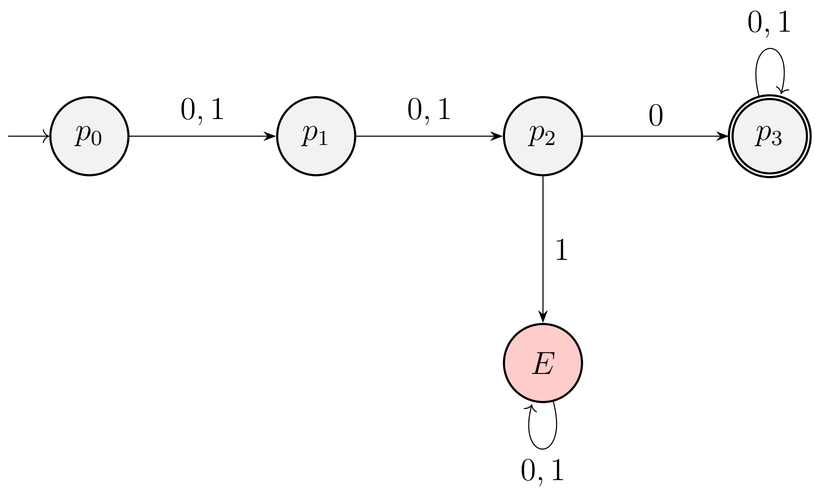


Figura 1.35: AFD minimal que acepta el lenguaje L_1 del ejercicio 1.1.20.

- Palabras en las que el antepenúltimo símbolo es un 1.

Construir un autómata finito minimal que acepte la intersección de ambos lenguajes.

Respecto al leguaje de las palabras en las que el tercer símbolo es un 0 (llamémoslo L_1), su expresión regular es:

$$(0+1)(0+1)\ 0\ (0+1)^*$$

Respecto al leguaje de las palabras en las que el antepenúltimo símbolo es un 1 (llamémoslo L_2), su expresión regular es:

$$(0+1)^*\ 1\ (0+1)(0+1)$$

Opción 1: Autómata Producto.

Obtendremos el AFD de L_1 de forma directa, mostrado en la Figura 1.35.

Podríamos optar con construir el AFD de L_2 de forma directa, pero construiremos un AFND que acepte el lenguaje y luego lo convertiremos a AFD. El AFND se muestra en la Figura 1.36, cuyos estados son:

- q_0: No estamos en la cadena final, por lo que podemos leer 0's y 1's.
- q_1: Acabo de empezar la cadena final. He leído un 1.
- q_2: Estoy en la cadena final. El leído el 1 y el segundo símbolo.
- q_3: Hemos terminado la cadena final.

Convertimos ahora el AFND de la Figura 1.36 en un AFD, representado en la Figura 1.37.

El AFD de la Figura 1.37 acepta el lenguaje L_2, y es idéntico al que podríamos haber razonado de forma directa. Veamos qué representa cada estado:

- q_0: No estamos en un candidado a ser cadena final. Si leemos un 1, empezaremos la que puede ser la cadena final.

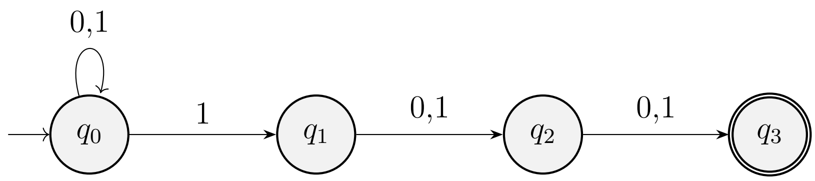


Figura 1.36: AFND que acepta el lenguaje L_2 del ejercicio 1.1.20.

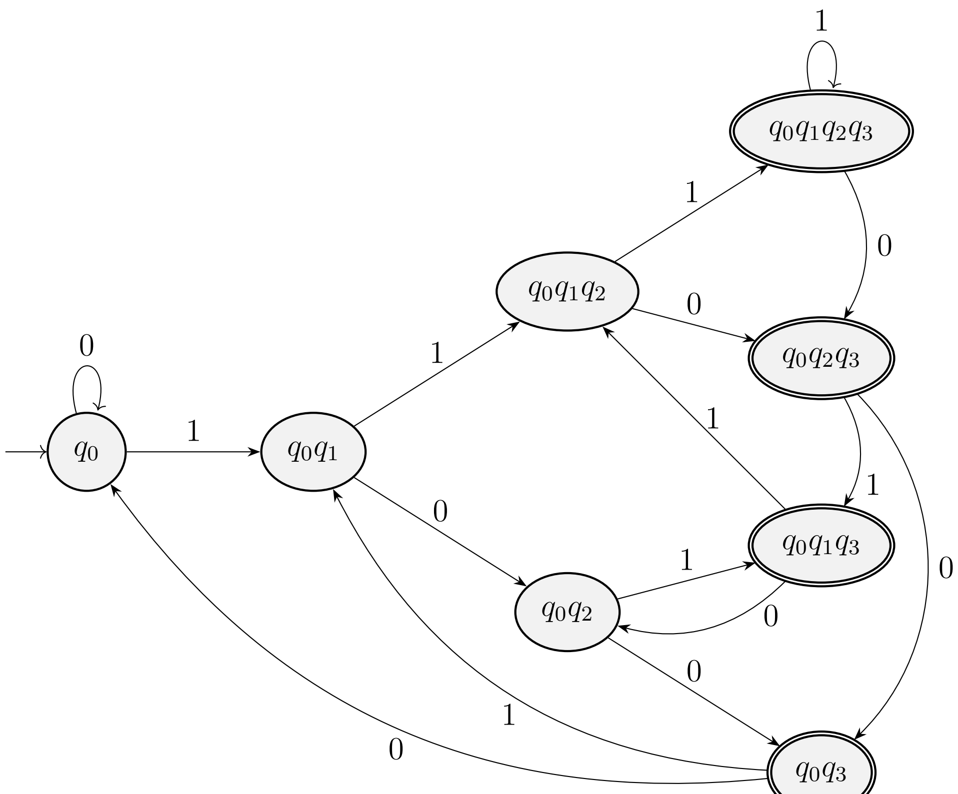


Figura 1.37: AFD que acepta el lenguaje L_2 del ejercicio 1.1.20.

	q_0	q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_0q_2	$q_0q_1q_2q_3$	$q_0q_2q_3$	$q_0q_1q_3$
q_0q_1	$\times$						
$q_0q_1q_2$	$\times$	$\cancel{(q_0q_3, q_0q_1q_3)}$					
q_0q_2	$\cancel{(q_0q_3, q_0q_1q_3)}$	$\times$	$\times$				
$q_0q_1q_2q_3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
$q_0q_2q_3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$q_0q_1q_3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
q_0q_3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Tabla 1.11: Tabla de minimización del autómata de la Figura 1.37.

- q_0q_1: Hemos leído un 1, por lo que hemos empezado la posible cadena final. Llevamos 1.
- $q_0q_1q_2$: Hemos leído un 1 y un 1. Llevamos 11 de cadena final.
- q_0q_2: Hemos leído un 1 y un 0. Llevamos 10 de cadena final.
- $q_0q_1q_2q_3$: Hemos leído un 1, un 1 y un 1. Llevamos 111 de cadena final.
- $q_0q_2q_3$: Hemos leído un 1, un 1 y un 0. Llevamos 110 de cadena final.
- $q_0q_1q_3$: Hemos leído un 1, un 0 y un 1. Llevamos 101 de cadena final.
- q_0q_3: Hemos leído un 1, un 0 y un 0. Llevamos 100 de cadena final.

Lo complejo de hacerlo de forma directa sería ver las transiciones desde los estados finales. Razonando cuál es la cadena final leída, podríamos haberlo hecho de forma directa, pero el AFND nos ha ayudado a hacerlo de forma algorítmica. La minimización del autómata de la Figura 1.37 se muestra en la Tabla 1.11, donde vemos que este era minimal.

Como vemos, obtener el autómata producto será complejo, puesto que tendrá $8 \cdot 5 = 40$ estados. Por tanto, optamos por la segunda opción.

Opción 2: Expresión Regular.

La expresión regular del lenguaje intersección ha de ser la siguiente:

$$(0+1)(0+1)\ 0\ (0+1)^*\ 1\ (0+1)(0+1)$$

Observación. Notemos que esta expresión regular no contempla las palabras de longitud menor o igual a 5. Estudiemos estas:

- Si $|z| = 5$, es necesario que el tercer símbolo sea un 0 y el antepenúltimo $(5-2=3)$ un 1. Por tanto, como el tercer símbolo no puede tomar ambos valores a la vez, no hay palabras de longitud 5.
- Si $|z| = 4$, es necesario que el tercer símbolo sea un 0 y el antepenúltimo $(4-2=2)$ un 1. Por tanto, estas palabras son de la forma $(0+1)\ 10\ (0+1)$.
- Si $|z| = 3$, es necesario que el tercer símbolo sea un 0 y el antepenúltimo $(3-2=1)$ un 1. Por tanto, estas palabras son de la forma $1\ (0+1)\ 0$.
- Si $|z| < 3$, no podemos considerar el tercer símbolo, por lo que no hay palabras de longitud menor que 3.

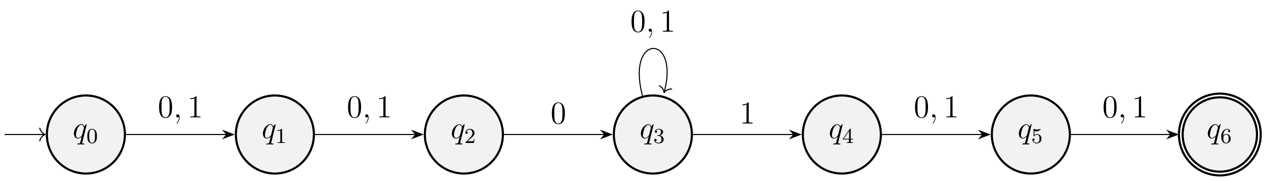


Figura 1.38: AFND que acepta la intersección de los lenguajes del ejercicio 1.1.20.

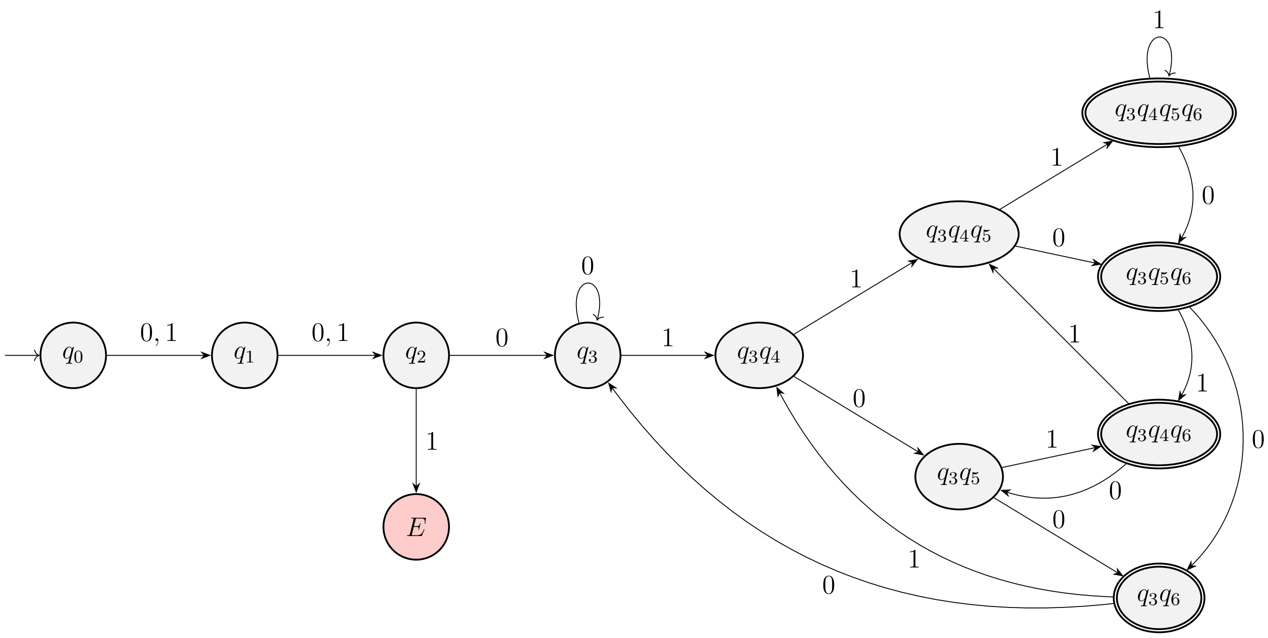


Figura 1.39: AFD que acepta la intersección de los lenguajes del ejercicio 1.1.20.

Por tanto, la expresión regular correcta sería:

$$(0+1)(0+1)\ \textcolor{red}{0}\ (0+1)^*\ \textcolor{red}{1}\ (0+1)(0+1) + (0+1)\ \textcolor{red}{10}\ (0+1) + \textcolor{red}{1}\ (0+1)\ \textcolor{red}{0}$$

No obstante, obtener el autómata finito minimal asociado a esta expresión regular sería muy complejo, por lo que no consideramos dichas palabras.

El AFND que acepta el lenguaje intersección se muestra en la Figura 1.38.

Convertimos ahora el AFND de la Figura 1.38 en un AFD, representado en la Figura 1.39.

Ejercicio 1.1.21. Construir un autómata finito minimal para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

1. Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{00, 11\}^2$.

   Han de contener una subcadena del conjunto $\{0000, 0011, 1100, 1111\}$. Para ello, construimos el autómata de la Figura 1.40.

   La minimización del autómata de la Figura 1.40 se muestra en la Tabla 1.12.

   Por tanto, tenemos que todos los estados finales eran indistinguibles. Notándolos por q_F, el autómata minimal es el de la Figura 1.41.

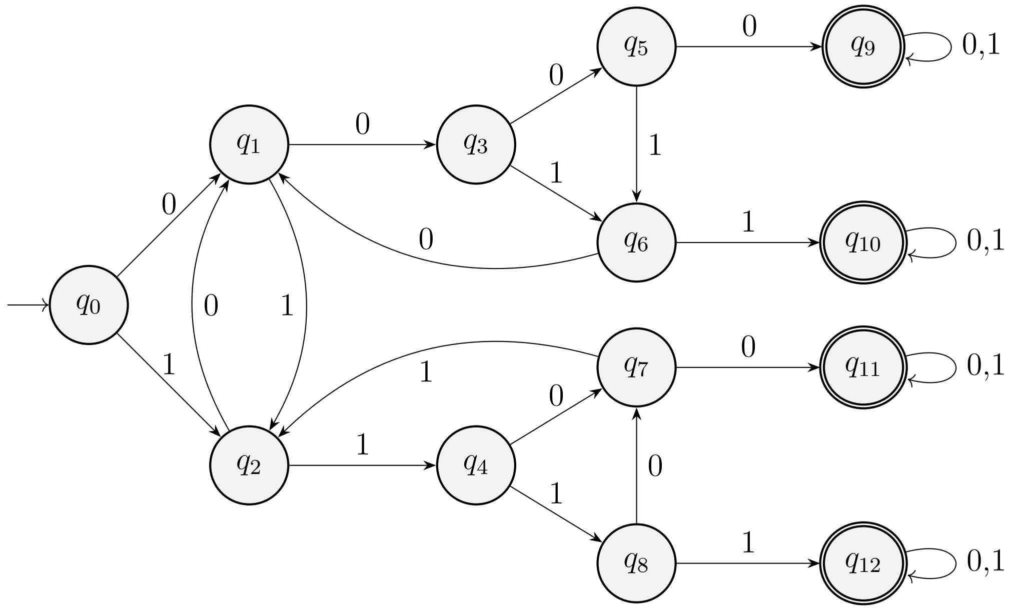


Figura 1.40: AFD que acepta el lenguaje del ejercicio 1.1.21.1.

q_1	×											
q_2	×	×										
q_3	×	×	×									
q_4	×	×	×	×								
q_5	×	×	×	×	×							
q_6	×	×	×	×	×	×						
q_7	×	×	×	×	×	×	×					
q_8	×	×	×	×	×	×	×	×				
q_9	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
q_{10}	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
q_{11}	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
q_{12}	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}

Tabla 1.12: Tabla de minimización del autómata de la Figura 1.40.

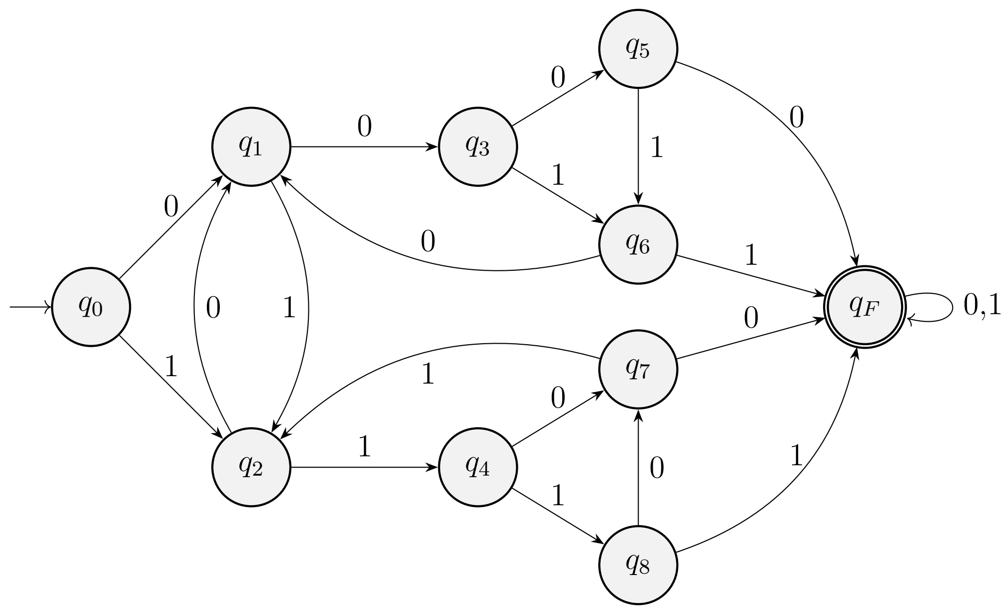


Figura 1.41: AFD minimal que acepta el lenguaje del ejercicio 1.1.21.1.

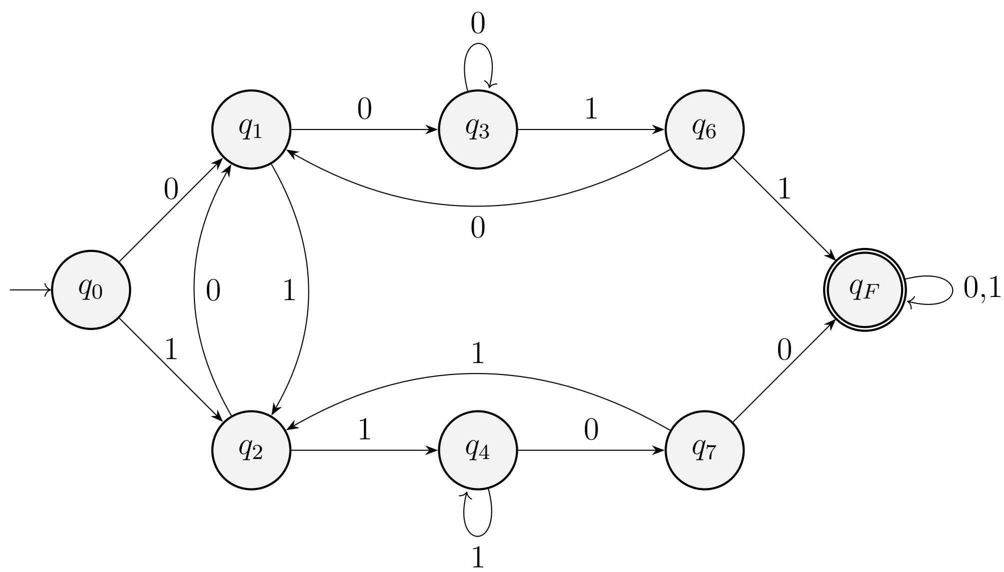


Figura 1.42: AFD minimal que acepta el lenguaje del ejercicio 1.1.21.2.

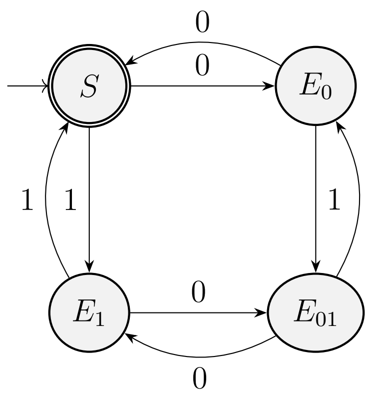


Figura 1.43: AFD minimal asociado a L_1 del Ejercicio 1.1.22.

2. Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{0011, 1100\}$.

   El AFD minimal que acepta este lenguaje es el de la Figura 1.42.

Ejercicio 1.1.22. Responda a los siguientes apartados:

1. Construye una gramática regular que genere el siguiente lenguaje:

$$L_1 = \{u \in \{0,1\}^* \mid \text{ el número de 1's y el número de 0's en } u \text{ es par } \}$$

   Este es muy similar al Ejercicio **??**. Tenemos los siguientes estados:

   - $\underline{S}$: La cadena leída es correcta, ya que el número de 0's y de 1's es par.
   - $\underline{E_0}$: Tenemos un error en 0, ya que el número de 0's es impar. El número de 1's es par.
   - $\underline{E_1}$: Tenemos un error en 1, ya que el número de 1's es impar. El número de 0's es par.
   - $\underline{E_{01}}$: Tenemos un error en 0 y en 1, ya que el número de 0's y de 1's es impar.

   La gramática obtenida es $G = (\{E_{01}, E_0, E_1, S\}, \{0,1\}, P, S)$, donde P es:

$$\begin{aligned} S &\to 0E_0 \mid 1E_1 \mid \varepsilon, \\ E_0 &\to 0S \mid 1E_{01}, \\ E_1 &\to 0E_{01} \mid 1S, \\ E_{01} &\to 0E_1 \mid 1E_0 \end{aligned}$$

   El autómata finito determinista minimal asociado a la gramática obtenida es el de la Figura 1.43.

2. Construye un autómata que reconozca el siguiente lenguaje:

$$L_2 = \{0^n 1^m \mid n \geqslant 1, m \geqslant 0, n \text{ múltiplo de } 3, m \text{ par } \}$$

   Sean los siguientes estados:

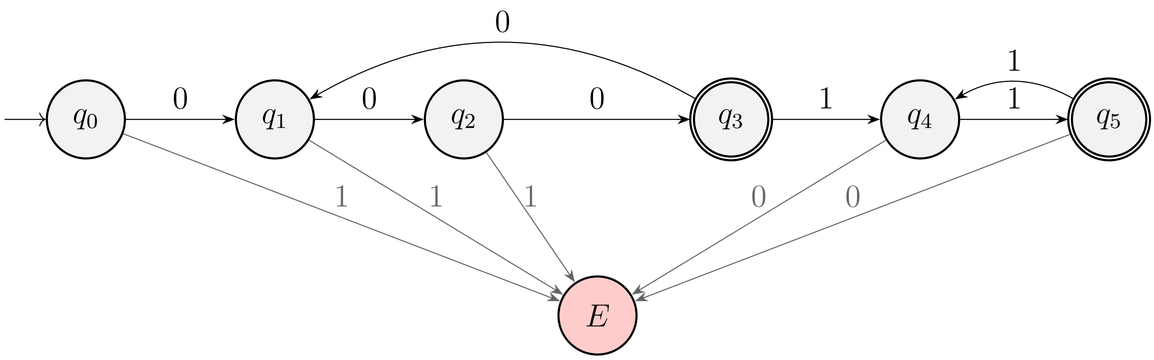


Figura 1.44: AFD minimal asociado a L_2 del Ejercicio 1.1.22.

- $\underline{q_0}$: $n, m = 0$.
- $\underline{q_1}$: $n \mod 3 = 1$, $m = 0$.
- $\underline{q_2}$: $n \mod 3 = 2$, $m = 0$.
- $\underline{q_3}$: $n \mod 3 = 0$, $n > 1$, $m = 0$.
- $\underline{q_4}$: $n \mod 3 = 0$, $m \mod 2 = 1$.
- $\underline{q_5}$: $n \mod 3 = 0$, $m \mod 2 = 0$.

El autómata finito determinista asociado a L_2 es el de la Figura 1.44.

3. Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_1 \cup L_2)$.

Ejercicio 1.1.23. Sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

1. Construye una gramática regular que genere el lenguaje L_1 de las palabras u tales que:
   - Si $|u| < 5$ entonces el número de 1's es impar.
   - Si $|u| \geqslant 5$ entonces el número de 1's es par.
   - u tiene al menos un símbolo 1.
2. Construye un autómata que reconozca el lenguaje L_2 dado por:

$$L_2 = \{0^n 1^m \mid n \geqslant 0, m \geqslant 1, m \text{ es múltiplo de } 6\}$$

   El autómata finito determinista asociado a L_2 es el de la Figura 1.45.

3. Diseña el AFD mínimo que reconozca el lenguaje $(L_1 \cup L_2)$.

Ejercicio 1.1.24. Encuentra para cada uno de los siguientes lenguajes una gramática de tipo 3 que lo genere o un autómata finito que lo reconozca:

- $L_1 = \{u \in \{0, 1\}^* \mid u$ no contiene la subcadena "0101"$\}$.
- $L_2 = \{0^i 1^j 0^k \mid i \geqslant 1, k \geqslant 0, i$ impar $, k$ múltiplo de 3 y $j \geqslant 2\}$.

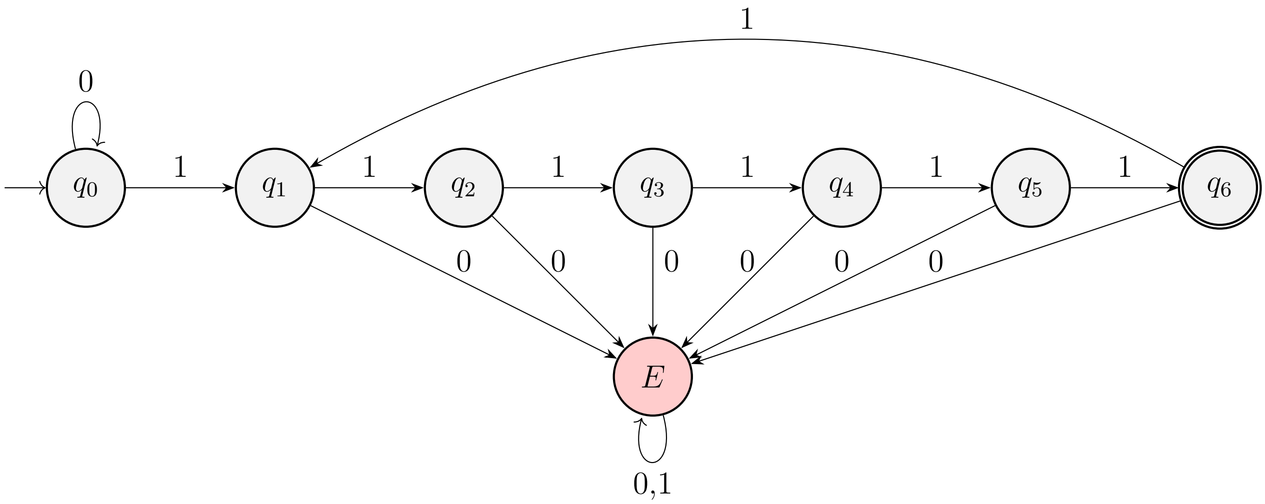


Figura 1.45: AFD minimal asociado a L_2 del Ejercicio 1.1.23.2.

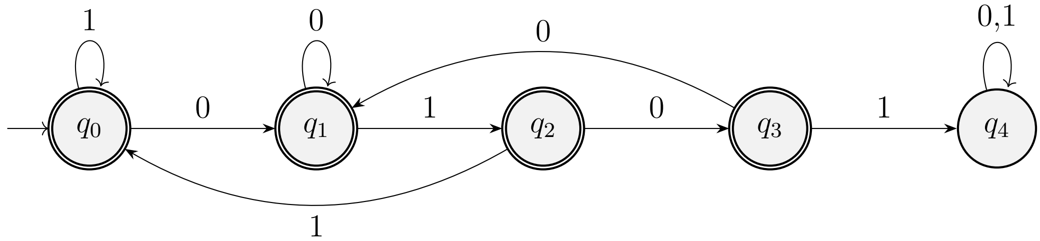


Figura 1.46: AFD minimal asociado a L_1 del Ejercicio 1.1.24.

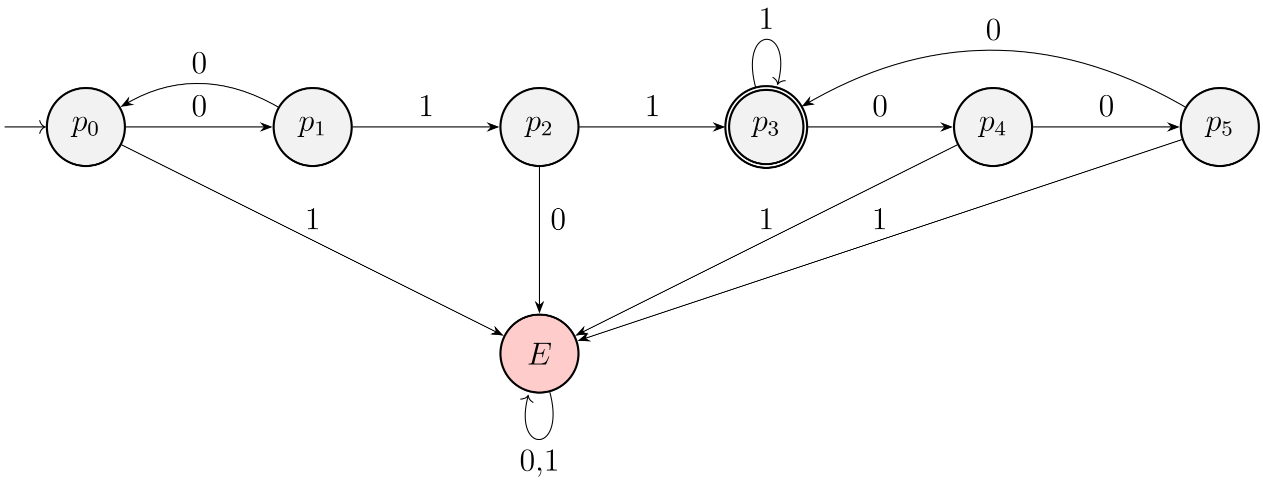


Figura 1.47: AFD minimal asociado a L_2 del Ejercicio 1.1.24.

Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_1 \cap L_2)$.

El AFD minimal asociado a L_1 es el de la Figura 1.46.
El AFD minimal asociado a L_2 es el de la Figura 1.47.

Ejercicio 1.1.25. Dado el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, encuentra:

1. Un AFD que reconozca las palabras en las que cada "c" va precedida de una "a" o una "b".

2. Una expresión regular que represente el lenguaje compuesto por las palabras de longitud impar en las que el símbolo central es una "c".

3. Una gramática regular que genere las palabras de longitud impar.

Ejercicio 1.1.26. Construir autómatas finitos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$:

1. L_1: palabras del lenguaje $(a + b)^*(b + c)^*$.

2. L_2: palabras en las que nunca hay una 'a' posterior a una 'c'.

3. $(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$

¿Qué podemos concluir sobre L_1 y L_2?

Ejercicio 1.1.27. Si $f : \{0, 1\}^* \to \{a, b, c\}^*$ es un homomorfismo dado por

$$f(0) = aab \qquad f(1) = bbc$$

dar autómatas finitos deterministas minimales para los lenguajes L y $f^{-1}(L)$ donde $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ es el lenguaje en el que el número de símbolos a no es múltiplo de 4.

El autómata finito minimal asociado a L es el de la Figura 1.48, donde q_i representa el estado en el que $n_a \mod 4 = i$. Empleando un distino número de cadenas de a's, vemos que los estados son distinguibles, por lo que es minimal.

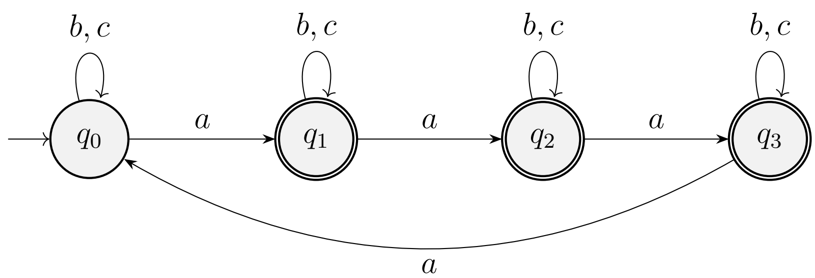


Figura 1.48: AFD minimal asociado a L del Ejercicio 1.1.27.

Empleando el algoritmo, el AFD asociado a $f^{-1}(L)$ es el de la Figura 1.49. No obstante, y debido a que hay estados inaccesibles, este no es minimal. El AFD minimal asociado a $f^{-1}(L)$ es el de la Figura 1.50.

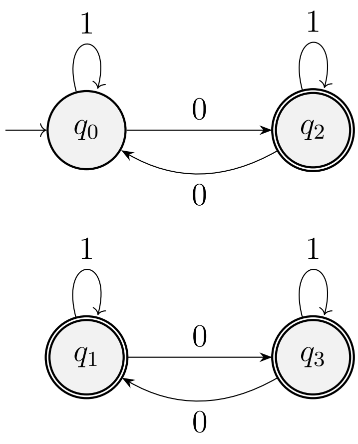


Figura 1.49: AFD asociado a $f^{-1}(L)$ del Ejercicio 1.1.27.

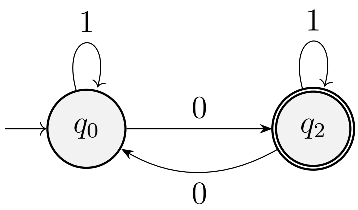


Figura 1.50: AFD minimal asociado a $f^{-1}(L)$ del Ejercicio 1.1.27.

Ejercicio 1.1.28. Si L_1 es el lenguaje asociadoa a la expresión regular $01(01+1)^*$ y L_2 el lenguaje asociado a la expresión $(1+10)^*01$, encontrar un autómata minimal que acepte el lenguaje $L_1 \setminus L_2$.

Ejercicio 1.1.29. Sean los alfabetos $A_1 = \{a, b, c, d\}$ y $A_2 = \{0, 1\}$ y el lenguaje $L \subseteq A_2^*$ dado por la expresión regular $(0+1)^*0(0+1)$, calcular una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$ donde f es el homomorfismos entre A_1^* y A_2^* dado por

$$f(a) = 01 \qquad f(b) = 1 \qquad f(c) = 0 \qquad f(d) = 00$$

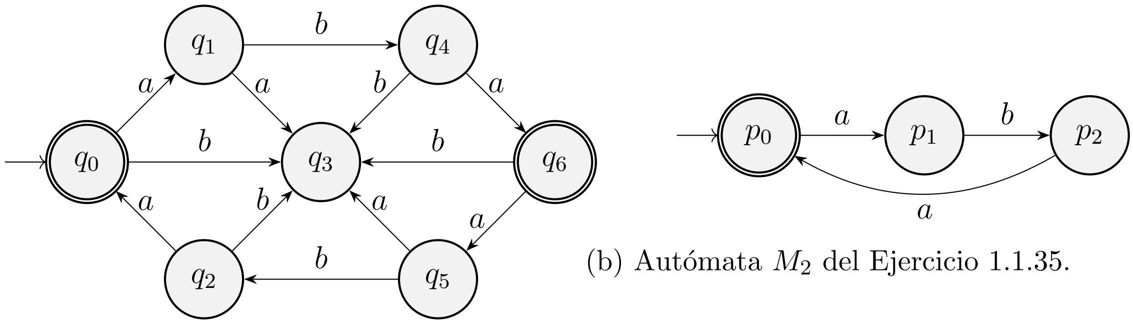
Ejercicio 1.1.30. Obtener un autómata finito determinista para el lenguaje asociado a la expresión regular: $(01)^+ + (010)^*$. Minimizarlo.

Ejercicio 1.1.31. Dado el lenguaje L asociado a la expresión regular $(01+011)^*$ y el homomorfismo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ dado por $f(0) = 01$, $f(1) = 1$, construir una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 1.1.32. Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A_1 = \{0, 1, 2\}$:

1. L dado por el conjunto de palabras en las que cada 0 que no sea el último de la palabra va seguido por un 1 y cada 1 que no sea el último símbolo de la palabra va seguido por un 0.

2. Considera el homomorfismo de A_1 en $A_2 = \{0, 1\}$ dado por $f(0) = 001$, $f(1) = 100$, $f(2) = 0011$. Dar una expresión regular para $f(L)$.



(a) Autómata M_1 del Ejercicio 1.1.35.

(b) Autómata M_2 del Ejercicio 1.1.35.

Figura 1.51: Autómatas del Ejercicio 1.1.35.

3. Dar una expresión regular para LL^{-1}.

Ejercicio 1.1.33. Dados los lenguajes

$$L_1 = \{0^i 1^j \mid i \geqslant 1, j \text{ es par y } j \geqslant 2\}$$
$$L_2 = \{1^j 0^k \mid k \geqslant 1, j \text{ es impar y } j \geqslant 1\}$$

Encuentre:

1. Una gramática regular que genere el lenguaje L_1.

2. Una expresión regular que represente al lenguaje L_2.

3. Un automata finito determinista que acepte las cadenas de la concatenación de los lenguajes L_1L_2. Aplica el algoritmos para minimizar este autómata.

Ejercicio 1.1.34. Considerar los AFD $M_1 = (\{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{0, 1\}, \delta_1, A, \{C\})$ y $M_2 = (\{A', B', C', D', G'\}, \{0, 1\}, \delta_2, A', \{D'\})$ donde δ_1 y δ_2 están definidas por las Tablas 1.13 y 1.14 respectivamente. Determinar si ambos autómatas finitos generan

δ_1	A	B	C	D	E	F	G	H
0	B	G	A	C	H	C	G	G
1	F	C	C	G	F	G	E	C

Tabla 1.13: Transiciones del autómata M_1 del Ejercicio 1.1.34.

δ_2	A'	B'	C'	D'	G'
0	G'	B'	D'	A'	B'
1	C'	A'	B'	D'	D'

Tabla 1.14: Transiciones del autómata M_2 del Ejercicio 1.1.34.

el mismo lenguaje.

Ejercicio 1.1.35. Comprobar si los autómatas de las Figuras 1.51a y 1.51b generan el mismo lenguaje.

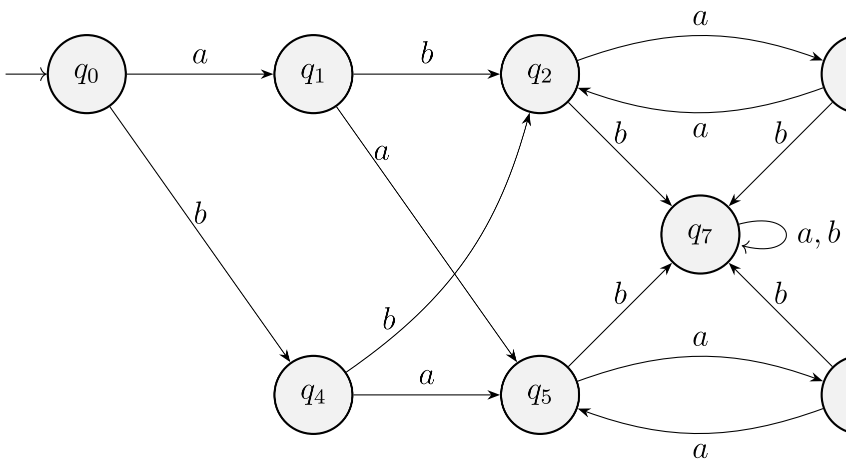


Figura 1.52: Autómata a minimizar del Ejercicio 1.1.36.

Ejercicio 1.1.36. Minimizar el autómata de la Figura 1.52.

Ejercicio 1.1.37. Si L_1 y L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces *la mezcla perfecta* de estos lenguajes se define como el lenguaje:

$$\{w \mid w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k \mid a_1 \dots a_k \in L_1, b_1 \dots b_k \in L_2, a_i, b_i \in A\}$$

Demostrar que si L_1 y L_2 son regulares, entonces la mezcla perfecta de L_1 y L_2 es regular.

Ejercicio 1.1.38. Si L es un lenguaje, sea $L_{1/2}$ el conjunto de palabras que son las mitades de palabras de L y $L_{-1/3}$ el conjunto de palabras que son las dos terceras partes de palabras de L. Es decir:

$$L_{1/2} = \{x \mid \exists y \in A^*, |x| = |y|, xy \in L\}$$
$$L_{-1/3} = \{xz \mid \exists y \in A^*, |x| = |y| = |z|, xyz \in L\}$$

Demostrar que si L es regular, entonces $L_{1/2}$ también lo es, pero que $L_{-1/3}$ no es necesariamente regular.