Cálculo I
Examen VII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 11 de febrero de 2022.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Escribe las definiciones de:

1. Conjunto mayorado
2. Sucesión convergente
3. Sucesión de Cauchy
4. Sucesión positivamente divergente

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Enuncia los teoremas:

1. Teorema del Valor Intermedio
2. Teorema (de compacidad) de Weierstrass

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Ayer, 10 de febrero, el día se inició con una temperatura en Granada exactamente igual a la de hoy, día 11: ambos días, a las 00:00h, 5 grados centígrados. Prueba que ayer existió una determinada hora antes del mediodía (a.m.), en la cual la temperatura coincidió exactamente con la temperatura de doce horas más tarde (misma hora numérica, pero p.m.).

Sea $T : [0, 24] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que relaciona cada hora con su temperatura correspondiente.

Sea $g : [0, 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = T(t) - T(t+12)$ la función que determina la diferencia de temperatura entre dos momentos del día de ayer, uno 12 horas después del otro.

Con esta notación el ejercicio se traduce en demostrar que $\exists c \in [0, 12] : T(c) = T(c + 12)$ o, equivalentemente, que $\exists c \in [0, 12] : g(t) = 0$.

Tenemos que la función T es continua y la función g también lo es (por ser diferencia de continuas). Además,

$$g(0) = T(0) - T(12)$$
$$g(12) = T(12) - T(24)$$

Como $T(24) = T(0)$ (condición dada por el enunciado), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} g(12) = T(12) - T(0) \\ g(0) = T(0) - T(12) \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) + g(12) = T(0) - T(12) + T(12) - T(0) = 0$$

Por tanto tenemos dos casos posibles:

$$(1) \qquad g(0) = g(12) = 0 \Longrightarrow \text{ Se han encontrado dos soluciones, } \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 12 \end{array} \right.$$

$$\vee$$

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} g(0) \neq 0 \\ \\ g(12) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Para que su suma sea 0, } \left\{ \begin{array}{c} g(0) > 0 \wedge g(12) < 0 \\ \vee \\ g(0) < 0 \wedge g(12) > 0 \end{array} \right\}$$

En definitiva $g(0)g(12) < 0$. Por el teorema (de los ceros) de Bolzano tenemos que $\exists c \in]0, 12[: T(c) = T(c + 12) \Longrightarrow \exists c \in]0, 12[: g(t) = 0$.

Como c_1, c_2 también son posibles soluciones (caso (1)), tenemos finalmente que $\exists c \in [0, 12] : T(c) = T(c + 12)$.

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcula su límite (si existe):

1. $\left\{\dfrac{1! + 2! + 3! + ... + n!}{n!}\right\}$.

   Defino $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\dfrac{1! + 2! + 3! + ... + n!}{n!}\right\}$, donde

$$a_n = 1! + 2! + 3! + ... + n!$$
$$b_n = n!$$

   Como $\{b_n\} \nearrow\nearrow +\infty$, puedo aplicar Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} - \cancel{n!}} = \frac{n+1}{n+1-1} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$$

   Por tanto, por el criterio de Stolz,

$$\left\{\frac{1! + 2! + 3! + ... + n!}{n!}\right\} \longrightarrow 1$$

2. $\{n(\sqrt[n]{a} - 1)\}$, $\quad (a \in \mathbb{R}^+$ fijo).

   Veamos primero $\{\sqrt[n]{a}\} = \{\sqrt[n]{a_n}\}$, con $a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N},\ a > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1 \longrightarrow 1$$

   Por el criterio del cociente para sucesiones tenemos que $\{\sqrt[n]{a}\} \longrightarrow 1$.

   Aplicamos ahora el criterio de Euler:

$$\left\{(\sqrt[n]{a})^n\right\} = \{a\} \longrightarrow a = e^L \Longrightarrow L = \ln(a)$$

   Por tanto, por Euler, $\{n(\sqrt[n]{a} - 1)\} \longrightarrow \ln(a)$

3. $\left\{\left(\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a} + \beta\sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n\right\}$, $\quad (a, b \in \mathbb{R}^+$ fijos , $\quad \alpha + \beta \neq 0)$.

Por el ejercicio anterior, tenemos que:

$$\left\{\frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right\}\longrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}=1$$

Aplico Euler

$$n\left(\frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}-1\right)=n\left(\frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)=$$

$$=\frac{n\alpha(\sqrt[n]{a}-1)+n\beta(\sqrt[n]{b}-1)}{\alpha+\beta}\longrightarrow\frac{\alpha\ln(a)+\beta\ln(b)}{\alpha+\beta}$$

Por el criterio de Euler,

$$\left\{\left(\frac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right)^n\right\}\longrightarrow e^{\left(\frac{\alpha\ln(a)+\beta\ln(b)}{\alpha+\beta}\right)}$$

Ejercicio 5 (3 puntos)**.** Estudia la convergencia de las series:

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$.

   Sea $\{b_n\}=\left\{n^{-\frac{3}{2}}\right\}=\left\{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right\}$

   Sea $\{a_n\}=\left\{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3\right\}$

$$\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{n^3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3=\left[\sqrt[6]{n^3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right]^3=$$

$$=\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\right]^3=\left[\frac{\sqrt{n}(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^3=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)}+1}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1}\right)^3\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3=L$$

   Como $L=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\in\mathbb{R}^+$, por el criterio límite de comparación,

$$\sum_{n\geqslant 1}a_n \text{ converge}\Longleftrightarrow\sum_{n\geqslant 1}b_n \text{ converge}$$

   Como $\sum\limits_{n\geqslant 1}b_n$ converge $\Longrightarrow\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ converge

2. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(3n+1)^2}$.

   Sea $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{(3n+1)^2}\right\} = \left\{\dfrac{n^2}{9n^2+6n+1}\right\} \longrightarrow \dfrac{1}{9} \neq 0$

   Como $\{a_n\} \nrightarrow 0 \Longrightarrow$ No cumple la condición necesaria de convergencia.

   Por tanto $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(3n+1)^2}$ no converge.

3. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^3}$.

   Defino $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^3}$.
   Como el coseno puede ser negativo, no es una serie de términos no negativos. Veamos si converge absolutamente.

   Estudiamos por tanto la convergencia de $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|\cos^3(n^2+7n-10)|}{n^3}$.

   Sea $\{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$.

   $$|a_n| \leqslant b_n \Longleftrightarrow \frac{|\cos^3(n^2+7n-10)|}{\cancel{n^3}} \leqslant \frac{1}{\cancel{n^3}} \Longleftrightarrow |\cos^3(n^2+7n-10)| \leqslant 1 \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow |\cos(n^2+7n-10)| \leqslant 1 \qquad \text{Cierto } \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por tanto,
   $$0 \leqslant |a_n| \leqslant b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por el criterio de comparación, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ converge

   Por tanto, $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge