# Entrega Ejercicios Microcredencial. Parte 2

Arturo Olivares Martos

29 de mayo de 2025

**Resumen**

En el presente documento, resolveremos ejercicios de la segunda parte de la Microcredencial de Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos.

**Ejercicio 1.** Demostrar que $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

Veamos en primer lugar que $d$ es una distancia.

1. No negatividad:
$$d(x,y) = \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in 2^{\mathbb{N}}$$
Además, se tiene que $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2. Simetría:
Sea $n = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq x(k)\}$, entonces:
$$d(x,y) = \frac{1}{2^{n+1}} = d(y,x)$$

3. Desigualdad triangular:
Sean los siguientes tres mínimos, que suponemos que existen (ya que si no existen, la desigualdad se verifica trivialmente):
$$\begin{aligned} n_1 &= \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} \\ n_2 &= \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq z(k)\} \\ n &= \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq z(k)\} \end{aligned}$$
Tenemos que $\text{mín}\{n_1, n_2\} \leqslant n$, puesto que para $k < \text{mín}\{n_1, n_2\}$, se verifica que $x(k) = y(k)$ y $y(k) = z(k)$, por lo que $x(k) = z(k)$. Por tanto, $n \geqslant \text{mín}\{n_1, n_2\}$. Por tanto:
$$d(x,z) = \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{\text{mín}\{n_1,n_2\}+1}} = \text{máx}\left\{\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}\right\} =$$
$$= \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\} \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

Por tanto, hemos demostrado que $d$ es una distancia, por lo que consideramos el espacio métrico $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Este será completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a una sucesión de cantor, lo que veremos a continuación.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, es decir:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geqslant N \ d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Veamos ahora cómo demostrar que esta sucesión es convergente, para lo cual hemos de construir la sucesión $x$ que sea el límite de la sucesión de Cauchy. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos $\varepsilon = \frac{1}{2^j+1}$, y por tanto, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geqslant N_j \qquad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^j + 1}$$

Por tanto, para cada $m, n \geqslant N_j$, tenemos que $x_m(j) = x_n(j)$. Definimos por tanto:

$$x(j) = x_{N_j}(j) = x_m(j) \qquad \forall m \geqslant N_j$$

Vemos que $x$ es una sucesión de Cantor, y ahora hemos de demostrar que es el límite de la sucesión de Cauchy. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k+1} < \varepsilon$, y podemos considerar $N_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geqslant N_k \ d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^k + 1}$$

Por tanto, para todo $m \geqslant N_k$, veamos que $x_m(j) = x(j)$ para todo $j \leqslant k$. Sea $j \leqslant k$, luego:

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^j + 1} \Longrightarrow N_j \leqslant N_k$$

Por tanto, para todo $m \geqslant N_k \geqslant N_j$, se tiene que $x_m(j) = x_{N_j}(j) = x(j)$. Por tanto, para todo $m \geqslant N_k$, se verifica que:

$$d(x_m, x) < \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

Por tanto, hemos demostrado que la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in 2^{\mathbb{N}}$, y por tanto, $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es completo.

**Ejercicio 2.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $A \subseteq X$, definimos la distancia entre $a$ y $X$ como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

Verificar que, dado $r > 0$, el siguiente conjunto es un abierto:

$$\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

*Demostración.* Dado $x \in X$ con $d(x, A) < r$, veamos que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$.

Sea $\varepsilon = r - d(x, A) > 0$, y sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir, $d(x, y) < \varepsilon$. Veamos que $d(y, A) < r$.

$$d(y, a) \leqslant d(y, x) + d(x, a) \forall a \in A$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} d(y, A) &= \text{ínf}\{d(y, a) \mid a \in A\} \\ &\leqslant \text{ínf}\{d(y, x) + d(x, a) \mid a \in A\} = d(y, x) + \text{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\} \\ &= d(y, x) + d(x, A) < \varepsilon + d(x, A) = r - d(x, A) + d(x, A) = r \end{aligned}$$

Por tanto, $y \in \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$, y hemos demostrado que:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

Por tanto, $\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ es un abierto. □

**Ejercicio 3.** En el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, consideramos la métrica $d$ definida como:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \qquad \forall x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

Demostrar que $d$ es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

*Demostración.* En primer lugar, hemos de ver que la distancia así definida está bien definida, es decir, que la suma converge. Aplicamos para ello el Criterio de Comparación:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Por tanto, $d$ está bien definida. Ahora, veamos que $d$ es una métrica:

- No-negatividad: Por definición de $d$, tenemos que:

  $$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \geqslant 0$$

  Además, se tiene que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

- Simetría: Por definición de $d$, tenemos que:

  $$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, x_n)}{2^n} = d(y, x)$$

- Desigualdad triangular: Tenemos que:

  $$\begin{aligned} d(x, z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, z_n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, z_n)}{2^n} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos visto que $d$ es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. □