Análisis Matemático II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Ejercicios Voluntarios

Teorema 1.1 (Aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ de manera que $\{P_n\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.*

Demostración. Definimos la sucesión de polinomios de Bernstein como:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Tenemos claramente que $k, n-k \in \mathbb{N}$, por lo que $B_n(f)(x)$ es un polinomio. Veamos ahora que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. Para ello, usaremos el siguiente lema relacionado con el binomio de Newton:

Lema 1.2. *Para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$

Demostración. Demostramos cada uno de los apartados por separado:

1. Usamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \qquad p, q \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

   En concreto, para $p = x$ y $q = 1-x$, se tiene que:

$$1 = (x+(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{1.2}$$

2. Derivando la fórmula del binomio de Newton (Ecuación 1.1) respecto de p, se tiene que:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kp^{k-1}q^{n-k} \Longrightarrow p(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\cdot p^kq^{n-k} \tag{1.3}$$

Derivando ahora la Ecuación 1.3 respecto de p, se tiene que:

$$(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$$

Multiplicando todo por p y diviendo por n, se tiene que:

$$\frac{p}{n} \cdot (p+q)^{n-1} + \frac{p^2}{n}(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \cdot p^k q^{n-k} \tag{1.4}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - 2x \cdot \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot x^k (1-x)^{n-k} = \\
&\quad = x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} x^2 - 2x \cdot x(x+1-x)^{n-1} + \frac{x}{n} \cdot (x+1-x)^{n-1} + \frac{x^2}{n}(n-1)(x+1-x)^{n-2} = \\
&\quad = x^2 - 2x^2 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n}(n-1) = -x^2 + \frac{x}{n} + x^2 - \frac{x^2}{n} = \frac{x - x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se han usado las Ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.4.

□

Fijado $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, la acotación entonces la obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \cdot 1 \right| \overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \\
&\overset{\text{Ec. 1.2}}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad triangular y se quitó el valor absoluto ya que $x, 1-x > 0$. Ahora, usamos el Teorema de Heine para afirmar que, como f es continua en $[0,1]$ (cerrado y acotado), es uniformemente continua en $[0,1]$. Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad |x-y| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Fijado $\varepsilon > 0$, consideramos el δ dado por la continuidad uniforme para $\varepsilon/2$. Consideramos el siguiente conjunto:

$$F = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}$$

Veamos qué ocurre en los puntos de F y en los que no están en F:

- Si $k \in F$, entonces $|x - k/n| < \delta$, por lo que $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$.
- Si $k \notin F$, el razonamiento es algo más complejo. Por el Teorema de Weierstrass, sabemos que f es acotada en $[0,1]$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [0,1]$. Además, como $k \notin F$, se tiene que:

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \geqslant \delta^2 \Longrightarrow \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \geqslant 1$$

Uniendo ambos resultados, se tiene que:

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2M \leqslant 2M \left(\frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \right)$$

Por tanto, en función de si $k \in F$ o no, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k \in F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\
&\qquad + \sum_{k \notin F} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k \in F} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \notin F} 2M \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} \qquad \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ se usó el Lema 1.2 y en $(**)$ se usó que la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (x) = x(1-x) = x - x^2$ es una parábola con imagen $g([0,1]) = [0, 1/4]$.

Por tanto, buscamos que $\dfrac{M}{2n\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon\delta^2}{M} \iff n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

Sea $m = E\left(\dfrac{M}{\varepsilon\delta^2}\right) + 1$ el primer natural que cumple la condición. Entonces, para $n \geqslant m$, se tiene que:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [0,1]$$

queda así demostrado que $\{B_n(f)\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$. $\square$

Definición 1.1. Un monstruo de Weierstrass es una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ningún punto.

Ejercicio. Encontrar un monstruo de Weierstrass y demostrar que lo es.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos\left((n!)^2 x\right)$$

2. Prácticas

2.1. Sucesiones de funciones

Ejercicio 2.1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0, \rho]$ y en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en 0. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

En resumen, tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función f_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{1+nx} \cdot (1+nx) - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2} = \frac{n - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de f_n son:

$$f_n'(x) = 0 \iff \log(1+nx) = 1 \iff 1+nx = e \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{e-1}{n}\right]$, entonces $f_n'(x) > 0$, por lo que f_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, entonces $f_n'(x) < 0$, por lo que f_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho < \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$ (podría haber tomado cualquier valor $x_n \in [0, \rho]$, ya que no afecta al límite).
- Si $n \geqslant \dfrac{e-1}{\rho}$ $\left(\rho \geqslant \dfrac{e-1}{n}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{e-1}{n} \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \dfrac{1}{e}$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Observación. También sirve tomar $x_n = \frac{1}{n}$, y tendríamos que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$.

Para el caso de la semirrecta $[\rho, +\infty[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \frac{e-1}{m}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \frac{e-1}{n}$. Por tanto, tenemos que $[\rho, +\infty[\ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{f_n(p)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

Ejercicio 2.1.2. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, donde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de x:

- Si $|x| < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$1 \leqslant 1 + x^{2n} \leqslant 1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 \leqslant g_n(x) \leqslant \sqrt[n]{2}$$

  Como $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$, por el Lema del Sándwich tenemos que $\{g_n(x)\} \to 1$.
- Si $|x| = 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

  Por tanto, $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| > 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}$$

Como $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n(x)\} \to x^2$.

Por tanto, tenemos que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \text{máx}\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para la convergencia uniforme, en primer lugar tenemos en cuenta que:

$$\sqrt[n]{1 + x^{2n}} \geqslant \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2,\ \sqrt[n]{1} = 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \geqslant \text{máx}\{1, x^2\} = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, buscamos acotar $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x)$. Para ello, fijado $n \in \mathbb{N}$, usaremos la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & t^{1/n} = \sqrt[n]{t} \end{array}$$

Tenemos que es derivable en todo su dominio, y su derivada es:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot t^{n-1/n}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Por el Teorema del valor medio, tenemos que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, con $t_1 < t_2$, existe un $c \in]t_1, t_2[$ tal que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(c) \cdot (t_2 - t_1)$$

Diferenciamos ahora si $|x| \leqslant 1$ o $|x| > 1$:

- Si $|x| \leqslant 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[1, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe un $c \in]1, 1 + x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(1) = \varphi_n'(c) \cdot (1 + x^{2n} - 1) = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}}$$

Como $|x| \leqslant 1$, tenemos que $|x^{2n}| \leqslant 1$; y como $c > 1$ y $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $c^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

- Si $|x| > 1$, aplicamos el Teorema del valor medio a la función φ_n en el intervalo $[x^{2n}, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe un $d \in]x^{2n}, 1 + x^{2n}[$ tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \varphi_n'(d) \cdot (1 + x^{2n} - x^{2n}) = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}}$$

Como $|x| > 1$, tenemos que $|x^{2n}| > 1$, por tanto, $d > 1$. Como también se tiene que $\frac{n-1}{n} > 1$, tenemos que $d^{n-1/n} > 1$, por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados se tiene que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1.3. Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$h_n(x,y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto, $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$, como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\max\{|x|,|y|\} < M$. De esta forma, para todo $(x,y) \in A$, tenemos que:

$$|h_n(x,y)| = \left|\frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2}\right| \leqslant \frac{M^2}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \to 0$, tenemos que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en A.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{h(x_n, y_n)\} \to \frac{1}{3} \neq 0$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.1.4. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si y solo si C está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, distinguimos en función de si C está acotado o no:

- Si C está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C$, tenemos que:
$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, como $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

- Si C no está acotado, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in C$ tal que $|x_n| > n$. Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:
$$|f_n(x_n)| = \left|\frac{x_n}{n}\right| > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, tenemos que $\{f_n(x_n)\}$ no puede converger a 0, por lo que se tiene que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en C.

Ejercicio 2.1.5. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:
$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty[$, pero no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$. Para $x > 0$, tenemos que:
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = 0$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \delta \in [0, \delta]$.
- Si $n \geqslant \dfrac{1}{\delta^2}$ $\left(\delta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \delta]$. Veamos lo siguiente:
$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1+1} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que $\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \{g_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Para el caso de la semirrecta $[\delta, +\infty[$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función g_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$g_n'(x) = \frac{4nx(1+n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{-4n^3x^5 + 4nx}{(1+n^2x^4)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de g_n son:

$$g_n'(x) = 0 \iff -4n^3x^5 + 4nx = 0 \iff 4xn(-n^2x^4+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, entonces $g_n'(x) > 0$, por lo que g_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, entonces $g_n'(x) < 0$, por lo que g_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{\sqrt{m}}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\delta > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Por tanto, tenemos que $[\delta, +\infty[\ \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, por lo que g_n es decreciente en $[\delta, +\infty[$. De esta forma, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(\delta) \qquad \forall x \in [\delta, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{g_n(\delta)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\underline{\{g_n\} \text{ converge uniformemente en } [\delta, +\infty[}$.

Ejercicio 2.1.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$h_n(x) = n \cos^n x \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un $\rho \in]0, \pi/2[$, probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, \pi/2]$, pero no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son positivos. Considerando fijo $x \in]0, \pi/2[$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos^{-n} x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} = 0$$

donde he usado que $|\cos x| < 1$ para todo $x \in]0, \pi/2[$. Por tanto, tenemos que:

$$0 \leqslant n \cos^n x \operatorname{sen} x \leqslant n \cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $]0, \pi/2[$.

Sumándole que, en $x = 0, \pi/2$ se tiene que $h_n(x) = 0$, se tiene que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $[0, \pi/2]$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in]0, \pi/2[$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $n < 1/\rho$ $(\rho < 1/n)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $n \geqslant 1/\rho$ $(\rho \geqslant 1/n)$, entonces $x_n = 1/n \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{n}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} e^0\cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite en $(*)$, hemos tomado en primer lugar el logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} -\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Por tanto, como se tiene que $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Para el caso de $[\rho, \pi/2]$, buscamos una acotación.

Opción 1: Estudiar su monotonía.

Estudiamos en primer lugar la monotonía de la función h_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $h_n \in C^\infty\left(]0, \pi/2[\right)$, estudiamos su derivada:

$$h_n'(x) = n\left(-n\cos^{n-1}x\operatorname{sen}^2 x + \cos^{n+1}x\right) = n\cos^{n-1}x\left(-n\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de h_n son:

$$h_n'(x) = 0 \iff \cos^2 x = n\operatorname{sen}^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$, entonces $h_n'(x) > 0$, por lo que h_n es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, entonces $h_n'(x) < 0$, por lo que h_n es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in]0, \pi/2[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, lo cual es posible ya que $\left\{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \to 0$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Por tanto, tenemos que $[\rho, \pi/2] \subset \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, por lo que h_n es decreciente en $[\rho, \pi/2]$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leqslant h_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, \pi/2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{h_n(\rho)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, \pi/2]$.

Opción 2: Acotación directa.

Tenemos que:

$$0 \leqslant |h_n(x)| \leqslant n\cos^n x \leqslant n\cos^n \rho$$

donde he empleado que, como el coseno en $[0, \pi/2]$ es decreciente, $\cos x \leqslant \cos\rho$ para $x > \rho$; y por ser la potencia de índice n en $\mathbb{R}_0^+$ creciente, se tiene que $\cos^n x \leqslant \cos^n \rho$.

Veamos que $\{n\cos^n\rho\} = \left\{\dfrac{n}{\frac{1}{\cos^n\rho}}\right\} \to 0$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{\cos^{n+1}\rho} - \frac{1}{\cos^n\rho}}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{1-\cos\rho}{\cos^{n+1}\rho}}\right\} = \left\{\frac{\cos^{n+1}\rho}{1-\cos\rho}\right\} \to 0$$

Aplicndo el criterio de Stolz, tenemos lo pedido.

Por tanto, tenemos que $\underline{\{h_n\} \text{ converge uniformemente a } 0 \text{ en } [\rho, \pi/2]}$.

Ejercicio 2.1.7. Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1+n|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+n|x|} = 0$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C \setminus \{0\}$, tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^2}{1+n|x|}\right| \leqslant \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, en el caso de que se tenga que $0 \in C$, se tiene que $|\varphi_n(0)| = 0 \leqslant \frac{M}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, como se tiene que $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\underline{\{\varphi_n\} \text{ converge uniformemente a } 0 \text{ en } C}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Tomamos $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ de forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

Como $\{\varphi_n(n)\} \to 1 \neq 0$, tenemos que $\underline{\{\varphi_n\} \text{ no converge uniformemente en } \mathbb{R}}$.

Ejercicio 2.1.8 (Parcial DGIIM 23-24)**.** Se considera la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$, con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}$ en los intervalos $[0, r]$, $[r, \rho]$ y $[\rho, +\infty[$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de x:

- Si $|x| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{0}+1} = 0$$

  Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función nula en $[0, 1[$.

- Si $|x| > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1$$

  Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante 1 en $]1, +\infty[$.

- Si $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

  Tenemos que φ_n converge puntualmente a la función constante $1/2$ en $\{1\}$.

Por tanto, de forma directa deducimos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $[r, \rho]$, ya que a pesar de ser continua para todo $n \in \mathbb{N}$ (es racional), su función límite no lo es, por lo que no se preserva la continuidad.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $[0, r]$. Tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant \left|\frac{r^n}{1}\right| = r^n \qquad \forall x \in [0, r],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant r < 1$, y por tanto $x^n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $\{r^n\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[0, r]$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho, +\infty[$. Tenemos que:

$$|\varphi_n(x) - 1| = \left|\frac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \left|\frac{-1}{1+x^n}\right| = \frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{\rho^n} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $x \geqslant \rho > 1$, y por tanto $x^n \geqslant \rho^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\left\{\frac{1}{\rho^n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 1 en $[\rho, +\infty[$.

Ejercicio 2.1.9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = x - x^n \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in [0,1[$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - x^n = x$$

Fijado $x = 1$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la continuidad de f en $[0,1]$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$$

Por tanto, f no es continua en 1. No obstante, f_n sí es continua en 1 para todo $n \in \mathbb{N}$ (es un polinomio). Por tanto, se tiene que $\underline{\{f_n\}\text{ no converge uniformemente en }[0,1]}$.

Ejercicio 2.1.10. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $\mathbb{R}_0^+$ y en $[0,\rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Además, tenemos que $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$. Consideramos la sucesión $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$ de forma que:

$$f_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n(n)\} \to 1/2 \neq 0$, tenemos que $\underline{\{f_n\}\text{ no converge uniformemente en }\mathbb{R}_0^+}$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[0,\rho]$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n}\right| \leqslant \frac{\rho}{n} \qquad \forall x \in [0,\rho],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $0 \leqslant x \leqslant \rho$. Entonces, como $\left\{\frac{\rho}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\underline{\{f_n\}\text{ converge uniformemente a 0 en }[0,\rho]}$.

Ejercicio 2.1.11. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[\rho, \infty[$ y en $[0, \rho]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$, consideramos la sucesión dada por:

- Si $n < 1/\rho$ $(\rho < 1/n)$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $n \geqslant 1/\rho$ $(\rho \geqslant 1/n)$, entonces $x_n = 1/n \in [0, \rho]$.

Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{R}_0^+$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \neq 0$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos por último la convergencia uniforme en $[\rho, +\infty[$. Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+n\rho} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que $x \geqslant \rho$. Entonces, como sabemos que $\left\{\frac{1}{1+n\rho}\right\} \to 0$, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, +\infty[$.

2.2. Series de funciones

Ejercicio 2.2.1. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo:

$$f_n(x) = \frac{x}{n\left(1+nx^2\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Buscaremos aplicar el Test de Weierstrass. Para ello, hemos de acotar $f_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar, estudiaremos su monotonía. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}$ con:

$$f_n'(x) = \frac{n\left(1+nx^2\right) - xn \cdot 2xn}{n^2\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{n\left(1+nx^2\right) - 2x^2n^2}{n^2\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{\left(1+nx^2\right) - 2x^2n}{n\left(1+nx^2\right)^2} = \frac{1-nx^2}{n\left(1+nx^2\right)^2}$$

Tenemos por tanto que hay dos candidatos a extremos relativos, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Estudiaremos la monotonía en cada uno de los intervalos:

- Si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$: $f_n'(x) \leqslant 0$, por lo que f_n es decreciente.
- Si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$: $f_n'(x) \geqslant 0$, por lo que f_n es creciente.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$: $f_n'(x) \leqslant 0$, por lo que f_n es decreciente.

Para acotar, tenemos en cuenta que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

Sabiendo eso, acotamos en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta la monotonía:

- Si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$:

$$0 \geqslant f_n(x) \geqslant f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

- Si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$:

$$-\frac{1}{2n\sqrt{n}} = f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$:

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

En cualquier caso, uniendo los tres resultados, tenemos que:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el criterio límite de comparación, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^{3/2}}$ es convergente por serlo la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$, ($3/2 > 1$). Por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. Para $\rho \in \mathbb{R},\ \rho > 1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

   Fijado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que g_n es derivable en $[\rho, +\infty[$ con:

   $$g_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^{2x}} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

   Por tanto, como la primera derivada de g_n no se anula, tenemos que es estrictamente monótona. Además, como $n \geqslant 1$, tenemos que $g_n'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [\rho, +\infty[$, por lo que g_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto,

   $$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(\rho) = \frac{1}{n^\rho} \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

   Como la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n^\rho$ es convergente ($\rho > 1$), por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

2. La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función nula en $[1, +\infty[$.

   De nuevo, usando que g_n es decreciente en $[1, +\infty[$, tenemos que:

   $$|g_n(x)| = g_n(x) \leqslant g_n(1) = \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

   Como $\{1/n\} \to 0$, tenemos que $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función nula en $[1, +\infty[$.

3. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ no converge uniformemente en $]1, +\infty[$.

   Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformemente en $]1, +\infty[$, y por el Criterio de Cauchy tenemos que esto equivale a que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ sea uniformemente de

Cauchy en $]1, +\infty[$, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} g_n(x)\right| = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \ ]1, +\infty[$$

Por tanto, tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} {}^1\!/n$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que sabemos que la serie armónica no converge. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ no converge uniformemente en $]1, +\infty[$.

Ejercicio 2.2.3. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n!}{(n+1)^n}\right\}$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!}\right\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\right\} =$$

$$= \left\{\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right\} = \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right\} \to \frac{1}{e}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{e} \Longrightarrow R = e$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-e, e[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-e, e]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = \pm e$ y la convergencia uniforme en J.

- <u>Convergencia puntual en $x = \pm e$:</u>

  Equivale a ver si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n x^n$ es convergente, con $x = \pm e$ fijo. Tenemos que:

$$\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x = x \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}$$

donde hemos usado los cálculos ya realizados. Además, sabemos que el segundo término converge a $1/e$ y es estrictamente decreciente. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n}\right| = \left|x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}\right| > \left|x \cdot \frac{1}{e}\right| = \left|\frac{x}{e}\right| = 1$$

Por tanto, tenemos que la sucesión $\{|c_nx^n|\}$ es estrictamente creciente, por lo que $\{c_nx^n\}$ no puede converger a 0. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ no converge en $x = \pm e$ por no converger a 0 su término general, luego su campo de convergencia es J.

- Convergencia uniforme en J:

  Supongamos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

  $$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} c_nx^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in J$$

  Tomando límite cuando $x \to e$, tenemos que:

  $$\lim_{x\to e} \sum_{n=p+1}^{q} c_nx^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con x tendiendo a e, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ diverge por divergir su término general. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ no converge uniformemente en J.

Ejercicio 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$ y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset \ ]-1,1[$; pero no converge uniformemente en $]-1,1[$.

En $\mathbb{R}$, los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Por tanto, se tiene que $K \subseteq [-\rho,\rho] \subsetneq \ ]-1,1[$, con $\rho \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x^n|}{|1-x^n|} \leqslant \frac{|x^n|}{1-|x^n|} = \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \qquad \forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver si la serie de término general $a_n = \dfrac{\rho^n}{1-\rho^n}$ es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general $b_n = \rho^n$, que sabemos que es convergente por ser $|\rho| = \rho < 1$.

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{1}{1-\rho^n}\right\} \to 1 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ es convergente}$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K.

Estudiamos ahora la convergencia absoluta en $]-1,1[$.

Opción 1. Forma rutinaria.

Fijando $x \in]-1,1[$, para ver si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general $a_n = |x|^n$, que sabemos que es convergente por ser $|x| < 1$.

$$\left\{\frac{|f_n(x)|}{|x|^n}\right\} = \left\{\frac{1}{1-|x|^n}\right\} \to 1 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$.

Opción 2. Usando unión de compactos.

Como converge absolutamente en cada compacto $K \subset\ ]-1,1[$, tenemos que converge absolutamente en $[-1+1/n, 1-1/n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, y por ser la convergencia absoluta una propiedad local, tenemos que converge absolutamente en la unión de todos estos conjuntos, es decir, es:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-1+1/n, 1-1/n] =]-1,1[$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$.

Tan solo falta por ver que no converge uniformemente en $]-1,1[$. Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, por el Criterio de Cauchy tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $]-1,1[$, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in\ ]-1,1[$$

Tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n} \leqslant \lim_{x\to 1} \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con x tendiendo a 1, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ no converge por no converger a 0 su término su general, veámoslo.

Sea $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ y tenemos que $\sqrt[n]{2} > 1 \Longleftrightarrow 2 > 1^n = 1$, por lo que $x_n \in \ ]0,1[$.

$$\{f_n(x_n) - 0\} = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n} \right\} = \left\{ \frac{1/2}{1 - 1/2} \right\} = \{1\} \to 1 \neq 0$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ no converge uniformemente en $]-1,1[$.

Ejercicio 2.2.5. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Supongamos en primer lugar que $\alpha > 1$. Entonces, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$$

donde he aplicado que la arctan está acotada por $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, como $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ es convergente ($\alpha > 1$), tenemos que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$ es convergente; y por el Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sin suponer ahora que $\alpha > 1$, veamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Fijado $C \subset \mathbb{R}$ acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in C$. Notemos que vamos a necesitar acotar por $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$, por lo que buscamos acotar $\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ por $\frac{M}{n}$. Para ello, veremos que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Opción 1: Usando la definición mediante integrales de la arcotangente.

En efecto, si $x \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^x 1 dt = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

donde hemos usado que $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Opción 2: Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan x - x \end{array}$$

Tenemos que es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, f es decreciente en $\mathbb{R}_0^+$, por lo que se tiene que $f(x) \leqslant f(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$. Como $f(x) = \arctan x - x \leqslant 0$, tenemos que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

En cualquier caso, hemos demostrado que $\arctan x \leqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$. Supongamos ahora que $x \in \mathbb{R}^-$. Usando que arctan es impar ($\arctan(-x) = -\arctan x$), tenemos que:

$$\arctan x = -\arctan(-x) \geqslant -(-x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

Como la función valor absoluto es creciente en $\mathbb{R}_0^+$ y decreciente en $\mathbb{R}^-$, tenemos que:

$$|\arctan x| \leqslant |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, para $x \in C$, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{M}{n} = \frac{M}{n^{\alpha+1}} \qquad \forall x \in C,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{M}{n^{\alpha+1}}$ es convergente ($\alpha+1 > 1$), por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

Ejercicio 2.2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Para probar lo pedido, en primer lugar, demostraremos que $\log x \leqslant x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Para ello, hay dos opciones:

Opción 1: Usando la definición mediante integrales del logaritmo.

En efecto, si $x \geqslant 1$, tenemos que:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x 1dt = x - 1 \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

donde hemos usado que $\frac{1}{t} \leqslant 1$ para todo $t \geqslant 1$.

Si $x \in]0, 1[$, tenemos que:

$$\log x = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt \leqslant -\int_x^1 1dt = -(1-x) = x - 1 \qquad \forall x \in]0, 1[$$

donde hemos usado que $\frac{1}{t} \geqslant 1$ para todo $t \in]0, 1[$.

Opción 2: Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log x - x + 1 \end{array}$$

Tenemos que es derivable en $\mathbb{R}^+$ con:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Por tanto, f tiene un único punto crítico en $x = 1$. Además, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por lo que f tiene un máximo en $x = 1$. Por tanto, $f(1) = 0$ y $f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $\log x - x + 1 \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

En cualquier caso, tenemos que:

$$|h_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot 1\cdot\left(1 + \frac{|x|}{n} - 1\right) = \frac{|x|}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde además hemos usado que $|\operatorname{sen}(nx)| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Fijado $C \subset \mathbb{R}$ acotado, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leqslant M$ para todo $x \in C$. Tenemos por tanto que:

$$|h_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^2} \qquad \forall x \in C,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{M}{n^2}$ es convergente, por el Test de Weierstrass, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

Ejercicio 2.2.7. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de funciones:

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$.

   Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{1}{\log(n+2)}\right\}$. Tenemos que:

   $$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{1}{\log(n+3)} \cdot \frac{\log(n+2)}{1}\right\} = \left\{\frac{\log(n+2)}{\log(n+3)}\right\} \to 1$$

   Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \Longrightarrow R = 1$$

   Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-1, 1[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = \pm 1$ y la convergencia uniforme en J.

- Convergencia puntual en $x = 1$:

  Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\log(n+2)}$. Como $\log(n+2) \leqslant n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (visto en el ejercicio anterior), tenemos que:

  $$\frac{1}{\log(n+2)} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

  Usando el contrarrecíproco del Criterio de Comparación, como la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+1}$ no converge, tenemos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\log(n+2)}$ no converge. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$ no converge en $x = 1$.

- Convergencia puntual en $x = -1$:

  Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\log(n+2)}$. Por el Criterio de Leibnitz, sabemos que la serie converge si la sucesión $\left\{\dfrac{1}{\log(n+2)}\right\}$ converge a 0 y es decreciente. Como $\{\log(n+2)\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente, tenemos que $\left\{\dfrac{1}{\log(n+2)}\right\}$ converge a 0 y es decreciente. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ converge, y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$ converge en $x = -1$.

- Convergencia uniforme en J:

  Suponemos por reducción al absurdo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

  $$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{\log(n+2)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \ J$$

  Tomando límite cuando $x \to 1$, tenemos que:

  $$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{\log(n+2)} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{x^n}{\log(n+2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\log(n+2)}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para $x = 1$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\log(n+2)}$ no converge uniformemente en J.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ (Parcial DGIIM 23-24).

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$. Tenemos que:

$$\left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right\} = \left\{\frac{n+1}{2n}\right\} \to \frac{1}{2}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \Longrightarrow R = 2$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $J =]-1, 3[$. Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en J y uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset J$. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$. Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en $x = -1$ y $x = 3$ y la convergencia uniforme en J.

- Convergencia puntual en $x = -1$:
  Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(-1)^n 2^n = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n$$

  Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n n$ no converge, por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge en $x = -1$.

- Convergencia puntual en $x = 3$:
  Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n\geqslant 1} n$$

  Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n$ no converge, por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge en $x = 3$.

- Convergencia uniforme en J:
  Suponemos por reducción al absurdo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ converge uniformemente en J. Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es uniform mente de Cauchy en J, es decir, que fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leqslant p < q$, se tiene que:

  $$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n}(x-1)^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \ J$$

Tomando límite cuando $x \to 3$, tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n} 2^n = \lim_{x\to 3} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{n}{2^n}(x-1)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n} 2^n$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para $x = 3$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ no converge uniformemente en J.

2.3. Cálculo de Integrales Simples

2.3.1. Repaso teórico

Repasamos ahora los conceptos teóricos necesarios para realizar el cálculo de integrales simples. Destacamos 4 reglas que nos ayudan a resolver el cálculo de integrales, todas ellas tendrán su versión elemental[1] y su versión general.

Regla de Barrow

Teorema 2.1 (Regla de Barrow versión elemental).
Si $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua y G una primitiva de f, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \qquad \forall a, b \in J$$

Teorema 2.2 (Versión general de la Regla de Barrow).
Si $f \in \mathcal{L}_1(J)$ y $G : J \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces G tiene límite, tanto en α como el β, y se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ dt = \lim_{x\to\beta} G(x) - \lim_{x\to\alpha} G(x) = [G(x)]_\alpha^\beta$$

Notemos que ninguno de los dos teoremas anteriores nos permite averiguar si f es integrable o no, ya que suponen que lo es para llegar a la tesis. A continuación, vemos un criterio que nos permite comprobar esto, como consecuencia de la versión general de la regla de Barrow.

Teorema 2.3 (Criterio de integrabilidad).
Dada una función $f : J \to \mathbb{R}_0^+$, sea G una primitiva de f. Entonces $f \in \mathcal{L}_1$ si, y sólo si, G tiene límite en α y β, en cuyo caso:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ dt = [G(x)]_\alpha^\beta$$

Notemos que sólo es válido para funciones con codominio $\mathbb{R}_0^+$. Sin embargo, si tenemos una función con imagen negativa f de forma que $-f$ (función con imagen positiva) cumpla las hipótesis del criterio, $-f$ será integrable, luego f también. De esta forma, si tenemos una función que pasa de ser positiva a negativa (o viceversa) un número finito de veces, podemos, en cada trozo donde el signo de su imagen es constante, aplicar el criterio, obteniendo que la función es integrable (en caso de que cada uno de sus "trozos" cumpla con las hipótesis del criterio).

Ejercicio. Dados $s \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, la función $x \to x^s$ es:

- $\mathcal{L}_1^{loc}$.
- integrable en $]0, c[$ si, y sólo si, $s > -1$.
- integrable en $]c, +\infty[$ si, y sólo si, $s < -1$.

[1] Las cuales ya se vieron en Cálculo II.

Criterio de comparación

Proposición 2.4 (Criterio de comparación por paso al límite).
Sea $I = [a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$ y $a < \beta \leqslant +\infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_1^{loc}(I)$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$

- *Si* $\lim_{x\to\beta} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = L \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $f \in \mathcal{L}_1(I) \Longleftrightarrow g \in \mathcal{L}_1(I)$
- *Si* $\lim_{x\to\beta} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$, *entonces* $g \in \mathcal{L}_1 I() \Longrightarrow f \in \mathcal{L}_1(I)$
- *Si* $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \to +\infty(x \to \beta)$, *entonces:* $g \notin \mathcal{L}_1(I) \Longrightarrow f \notin \mathcal{L}_1(I)$

En el caso $I =]\alpha, b]$ con $b \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leqslant \alpha < b$, se verifica el resultado análogo, con α en lugar de β.

Integración por partes

Teorema 2.5 (Fórmula de integración por partes versión elemental).
Si $F, G : J \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en J, se tiene:

$$\int_a^b F(t)G'(t)\ dt = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(t)G(t)\ dt \qquad a, b \in J$$

A continuación, destacamos el resultado general, que nombramos como “primera versión”.

Teorema 2.6 (Fórmula de integración por partes (primera versión general)).
Dadas $F, G : J \to \mathbb{R}$, supongamos que, para cada intervalo compacto $K \subset J$ las restricciones $F\big|_K$ y $G\big|_K$ son absolutamente continuas. Entonces, FG' y GF' son localmente integrables en J con:

$$\int_a^b F(t)G'(t)\ dt = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(t)G(t)\ dt \qquad a, b \in J$$

Como podemos ver, pese a ser satisfactorio teóricamente, no nos aporta utilidad práctica. Por ello, destacamos el siguiente teorema, más débil pero de gran utilidad práctica.

Teorema 2.7 (Fórmula de Integración por partes (segunda versión general)).
Sean $F, G : J \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $J =]\alpha, \beta[$, tales que $F'G$ y FG' son integrables en J. Entonces, FG tiene límite, tanto en α como en β, y se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta F(t)G'(t)\ dt = [F(x)G(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F'(t)G(t)\ dt$$

Cambio de variable

Teorema 2.8 (Cambio de variable versión elemental).
Dados dos intervalos no triviales $I, J \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to J$ una función de clase C^1 en I y $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \qquad a, b \in I$$

Teorema 2.9 (Versión general de la fórmula del cambio de variable).
Dados dos intervalos no triviales $I, J \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to J$ tal que $\varphi\big|_H$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $H \subset I$.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en J y verifica que $(f \circ \varphi)\varphi'$ es localmente integrable en I, entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \qquad \forall a, b \in I$$

Sin embargo, al igual que sucedía antes, carece de utilidad práctica. Vemos ahora otro segundo teorema que podemos usar, que además caracteriza la integabilidad de la función f con la función $(f \circ \varphi)\varphi'$. Sin embargo, es menos débil que el anterior, como antes sucedía.

Teorema 2.10 (Teorema de cambio de variable).
Dado un intervalo abierto no vacío $I \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en I, con $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y sea $J = \varphi(I)$.
Entonces, una función $f : J \to \mathbb{R}$ es integrable en J si, y sólo si, $(f \circ \varphi)\varphi'$ es integrable en I, en cuyo caso:

$$\int_J f = \int_I (f \circ \varphi)|\varphi'|$$

Este teorema suele usarse de la siguiente forma:
$I =]\alpha, \beta[$ con $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ y $J =]\gamma, \delta[$ con $-\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty$
$\{\gamma, \delta\} = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ con $\varphi(t) \to \widetilde{\alpha}$ $(t \to \alpha)$ y $\varphi(t) \to \widetilde{\beta}$ $(t \to \beta)$
Entonces:

$$\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$$

2.3.2. Ejercicios

Ejercicio 2.3.1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el intervalo J y calcular su integral:

1. $f(x) = x^2 \ln x \qquad \forall x \in J =]0,1[$.

   Veamos varias formas de demostrar que $f \in \mathcal{L}_1(J)$.

   Opción 1. Extendiendo la función a $\overline{J}$.

   Veamos el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} = 0$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$$

   Por tanto, tenemos que f tiene límite en 0 y 1, por lo que extendemos f a $\overline{J}$ de forma continua. Sea $\overline{f} : \overline{J} \to \mathbb{R}$ su extensión continua. Tenemos que $\overline{f}$ es continua en un compacto, luego $\overline{f} \in \mathcal{L}_1\left(\overline{J}\right)$. Por tanto, restringuiendo a J, tenemos que $f \in \mathcal{L}_1(J)$.

   Opción 2. Criterio de comparación.

   Sea $\widetilde{f}, g :]0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in J$, $\widetilde{f}(1) = 0$ y $g(x) = x$ para todo $x \in \ ]0,1]$. Tenemos que $\widetilde{f}, g$ son continuas en $]0,1]$, por lo que $\widetilde{f}, g \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(]0,1])$. Además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \ ]0,1]$. Estamos entonces en las hipótesis del Criterio de Comparación:

$$\lim_{x\to 1} \frac{|\widetilde{f}|}{g} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2 \ln x}{x} = \lim_{x\to 1} -x \ln x = 0$$

   Como $g \in \mathcal{L}_1(]0,1])$, tenemos que $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_1(]0,1])$, y por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(J)$.

   Para calcular la integral buscada, empleamos la integración por partes. Sean $F, G : J \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$F(x) = \ln x \qquad G(x) = \frac{x^3}{3}$$

   Tenemos que F, G son derivables en J, con:

$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad G'(x) = x^2$$

   Como hemos demostrado, $FG' = f \in \mathcal{L}_1(J)$. Además, $F'G = \frac{x^2}{3} \in \mathcal{L}_1(J)$ por ser una función continua en $\overline{J}$. Por tanto, por el Teorema de Integración por Partes, tenemos que:

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\left[x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{9}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la versión elemental de la Regla de Barrow. Además, en la última igualdad, hemos usado que:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-3}} \overset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{3} = 0$$

Veamos ahora otra forma de demostrar que $f \in \mathcal{L}_1(J)$.

Opción 3. Uso del Criterio de Integrabilidad.

Probaremos ahora que $f \in \mathcal{L}_1(J)$. Probemos que G es una primitiva de f, donde:

$$\begin{aligned} G: \quad J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{3}\left[x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}\right] \end{aligned}$$

Tenemos que G es derivable en J, con:

$$G'(x) = \frac{1}{3}\left[3x^2 \ln x + x^2 - x^2\right] = x^2 \ln x = f(x) \qquad \forall x \in J$$

Por tanto, tenemos que G es una primitiva de f, y hemos visto que G tiene límite en 0 y 1. Empleando el Criterio de Integrabilidad de la Regla de Barrow para $-f$, tenemos que $f \in \mathcal{L}_1(J)$, como queríamos demostrar.

Observación. Notemos que G la hemos deducido a partir del método de integración por partes, para lo cual hemos usado que f era integrable. Notemos que el proceso sería aun así correcto, puesto que en esta segunda opción demostramos que, efectivamente, G es una primitiva de f. Se podría haber escrito esta segunda opción al principio, y entonces G podríamos decir que habría sido una intuición o, usando la expresión empleada en clase, una primitiva que “nos ha caído de la chimenea”.

2. $f(x) = e^{-x}\cos(2x) \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}^+$.

Sabiendo que la función $x \mapsto e^{-x}$ es integrable en $\mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f| \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} < +\infty$$

Por tanto, tenemos que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$. Para calcular su integral, usamos la fórmula de integración por partes. Sean $F, G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$F(x) = \cos(2x) \qquad G(x) = -e^{-x}$$

Tenemos que F, G son derivables en $\mathbb{R}^+$, con:

$$F'(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x) \qquad G'(x) = e^{-x}$$

Tenemos que $FG' = f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$ como hemos visto antes, y $F'G = 2e^{-x}\,\mathrm{sen}(2x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$ por el mismo razonamiento que f. Por tanto, por la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\,dx &= \left[-e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)\,dx = \\ &= \left[-e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)\,dx \end{aligned}$$

Usamos ahora la fórmula de integración por partes para la integral que nos queda. Sean $G_1 = G$ y $F_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $F_1(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Tenemos que F_1, G_1 son derivables en $\mathbb{R}^+$, con:

$$F_1'(x) = 2\cos(2x) \qquad G_1'(x) = -e^{-x}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\ dx &= \left[-e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\ dx = \\
&= \left[-e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{+\infty} - 2\left[-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\ dx = \\
&= \left[-e^{-x}(\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x))\right]_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\ dx
\end{aligned}$$

Despejando el valor de la integral buscada, obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\ dx = \frac{1}{5}\left[-e^{-x}(\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x))\right]_0^{+\infty} \overset{(*)}{=} \frac{1}{5}\cdot(0+1) = \frac{1}{5}$$

donde en $(*)$ hemos usado los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} -e^{-x}(\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} -e^{-x}(\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)) = -e^0 = 1$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1} \qquad \forall x \in J =]2, +\infty[$.

Sea $\widetilde{f} : \overline{J} \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in J$ y $\widetilde{f}(2) = 1/15$. Sea $g : \overline{J} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^{-4}$ para todo $x \in \overline{J}$. Tenemos que $\widetilde{f}, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}\left(\overline{J}\right)$ por ser continuas. Además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{J}$. Estamos entonces en las hipótesis del Criterio de Comparación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\widetilde{f}|}{|g|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^4-1}{1/x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = 1$$

Como $g \in \mathcal{L}_1\left(\overline{J}\right)$, tenemos que $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_1\left(\overline{J}\right)$, y por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(J)$.

Aplicamos ahora la descomposisión en fracciones simples de f para calcular su integral. Tenemos que $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, por lo que, siendo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4-1} &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Igualando el denominador, tenemos:

- $\underline{x=1}$: Tenemos $1 = 4A$, por lo que $A = 1/4$.
- $\underline{x=-1}$: Tenemos $1 = -4B$, por lo que $B = -1/4$.
- $\underline{x=0}$: Tenemos $1 = A - B - D$, por lo que $D = A - B - 1 = -1/2$.
- $\underline{x=-2}$: Tenemos $1 = -5A - 15B + 3(-2C + D)$, por lo que:
$$C = -\frac{1}{6}(1 + 5A + 15B - 3D) = -\frac{1}{6}\left(1 + 5\cdot\frac{1}{4} - 15\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$$

Por tanto, y usando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx &= \int_2^{+\infty}\frac{A}{x-1}\,dx + \int_2^{+\infty}\frac{B}{x+1}\,dx + \int_2^{+\infty}\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left[\ln(x-1)\right]_2^{+\infty} - \frac{1}{4}\left[\ln(x+1)\right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_2^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln(x-1) - \ln(x+1)\right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_2^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_2^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{4}\left[0 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan 2\right] = \\
&= \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan 2
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ empleamos la versión general de la Regla de Barrow. Además, también se usa que:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$$

donde ahora hemos empleado que la función logaritmo es continua.

4. $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}.$

Sea el cambio de variable $x = \varphi(t)$ dado por $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \ln t$. Tenemos que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, φ es biyectiva y $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Además, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = -\infty \qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$$

Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ si, y sólo si, $(f\circ\varphi)\varphi'$ es integrable en $\mathbb{R}^+$. Tenemos que:

$$(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t) = \frac{1}{e^{\ln t} + e^{-\ln t}}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t + 1/t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t^2+1}$$

Por tanto, tenemos que $(f\circ\varphi)\varphi'$ es integrable en $\mathbb{R}^+$, por lo que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Además, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \qquad \forall x \in J =]0,1[$.

   Sea el cambio de variable $x = \varphi(t)$ dado por $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = t^2$ para todo $t \in]0,1[$. Tenemos que $\varphi \in C^1(]0,1[)$, φ es biyectiva y $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in]0,1[$. Además, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0 \qquad \lim_{t\to 1} \varphi(t) = 1$$

   Por tanto, estamos en las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo que $f \in \mathcal{L}_1(]0,1[)$ si, y sólo si, $(f \circ \varphi)\varphi'$ es integrable en $]0,1[$. Tenemos que:

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{1}{t^4 + \sqrt{t^2}} \cdot 2t = \frac{2t}{t^4 + t} = \frac{2}{t^3 + 1}$$

   Tenemos que la extensión continua de f a $\overline{J}$ es integrable por ser continua en un compacto, por lo que $f \in \mathcal{L}_1(J)$. Además, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{t^3 + 1}\, dt = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$$

   Para calcular la integral, descomponemos en fracciones simples. Para ello, en primer lugar hallamos las raíces del denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

   Por tanto, $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$. Además, no tiene más raíces reales, puesto que el discriminante del segundo factor es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Entonces, queda:

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1} = \frac{A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

   Igualando el numerador, tenemos:

   - $\underline{t = -1}$: Tenemos $1 = 3A$, por lo que $A = 1/3$.
   - $\underline{t = 0}$: Tenemos $1 = A + C$, por lo que $C = 1 - A = 2/3$.
   - $\underline{t = 1}$: Tenemos $1 = A + 2(B + C) = A + 2B + 2C$, por lo que:

$$B = \frac{1 - A - 2C}{2} = \frac{1 - 1/3 - 2 \cdot 2/3}{2} = -\frac{1}{3}$$

   Por tanto, y usando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}\, dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^3 + 1}\, dt = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t + 1}\, dx + \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \frac{-t + 2}{t^2 - t + 1}\, dx$$

Resolvemos ahora la nueva integral que tenemos, cuyo denominador tiene raíces complejas.

$$\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt = -2\int_0^1 \frac{2t-4}{t^2-t+1}\,dt = -2\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt - 2\int_0^1 \frac{-3}{t^2-t+1}\,dt =$$
$$= -2\left[\ln|t^2-t+1|\right]_0^1 + 6\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

Buscamos ahora encontrar un binomio al cuadrado en el denominador. Para ello, completamos cuadrados:

$$t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2\right]$$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in J =]1, +\infty[.$

7. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x} \qquad \forall x \in J = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[.$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x \in J =]1, +\infty[.$

Ejercicio 2.3.2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el intervalo J:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1} \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}^+. \qquad (a \in \mathbb{R})$

2. $f(x) = x^n e^{-x^2}\cos x \qquad \forall x \in J = \mathbb{R}. \qquad (n \in \mathbb{N})$

3. $f(x) = \dfrac{x^\rho}{1-\cos x} \qquad \forall x \in J =]0, \pi[\,. \qquad (\rho \in \mathbb{R})$

4. $f(x) = \dfrac{x^a(1-x)^b\,\ln(1+x^2)}{(\ln x)^2} \qquad \forall x \in J =]0, 1[\,. \qquad (a, b \in \mathbb{R})$