

Variable Compleja I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Números complejos	5
1.2. Topología del plano complejo	12

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar que f es un isomorfismo, se deben probar las siguientes propiedades:

- f es inyectiva.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, $f(a + bi) = A$ y f es sobreyectiva.

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \frac{i - \sqrt{3}}{1 + i}$.

Tenemos que:

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1 + i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 1 + 3 + 3}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$2. z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}.$$

Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 + 3}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_2 &= -\frac{1}{4}, \\ \operatorname{Im} z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ |z_2| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U . Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \iff |z - a| < |1 - \bar{a}z| \iff |z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \iff \\ &\iff (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \iff z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a} < 1 - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a}z\bar{z} \iff \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\ &\iff |z|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1. \end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1 - |a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U . A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \rightarrow U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

■ Inyectividad:

Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1} &= \frac{z_2 - a}{1 - \bar{a}z_2} \implies (z_1 - a)(1 - \bar{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \bar{a}z_1) \implies \\ &\implies z_1 - a - \bar{a}z_1z_2 + |a|^2z_2 = z_2 - a - \bar{a}z_2z_1 + |a|^2z_1 \implies \\ &\implies z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \implies (1 - |a|^2)z_1 = (1 - |a|^2)z_2 \implies z_1 = z_2. \end{aligned}$$

■ Sobreyectividad:

Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

$$\begin{aligned} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = w &\implies z-a = w(1-\bar{a}z) \implies z-a = w - w\bar{a}z \implies z + w\bar{a}z = a + w \implies \\ &\implies z(1+w\bar{a}) = a+w \implies z = \frac{a+w}{1+w\bar{a}}. \end{aligned}$$

Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \frac{a+w}{1+w\bar{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

$$\begin{aligned} |z| = \left| \frac{a+w}{1+w\bar{a}} \right| &= \frac{|a+w|}{|1+w\bar{a}|} < 1 \iff |a+w| < |1+w\bar{a}| \iff |a+w|^2 < |1+w\bar{a}|^2 \iff \\ &\iff (a+w)(\bar{a}+\bar{w}) < (1+w\bar{a})(1+\bar{w}a) \iff \\ &\iff a\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{a} + w\bar{w} < 1 + w\bar{a} + \bar{w}a + a\bar{a}w\bar{w} \iff \\ &\iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\ &\iff |w|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{aligned} f^{-1} : U &\longrightarrow U \\ w &\longmapsto \frac{a+w}{1+w\bar{a}} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

\implies) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $n = 2$: Hay dos opciones:

Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\implies |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2|z_1||z_2| \implies (z_1\bar{z}_2)^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \implies \\ &\implies (z_1\bar{z}_2)^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies (z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos opciones:

Opción 1 Tenemos que:

$$z_1 \overline{z_2} = z_2 \overline{z_1} = \overline{z_1 \overline{z_2}} \implies z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora $\lambda_2 = \frac{z_2 \overline{z_2}}{z_1 \overline{z_2}} \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\lambda_2 z_1 = \frac{z_2 \overline{z_2}}{z_1 \overline{z_2}} z_1 = z_2$$

Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 \overline{z_2} &= (a + bi)(c - di) = ac + bd + (bc - ad)i, \\ z_2 \overline{z_1} &= (c + di)(a - bi) = ac + bd + (ad - bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1 \overline{z_2} = z_2 \overline{z_1} \implies bc - ad = ad - bc \implies ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de b :

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.
 - Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
 - Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = c/a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = ad/b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = d/b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.

$$\lambda_2 z_1 = \frac{d}{b}(a + bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2 z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1(1 + \lambda_2)| = |z_1||1 + \lambda_2| \\ |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda_2 z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en \mathbb{R} se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de \mathbb{C} como elementos de \mathbb{R}^2 , con el producto escalar de \mathbb{R}^2 y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en \mathbb{R}^2 , se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2 \rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, \lambda z_1 \rangle = \lambda \langle z_1, z_1 \rangle = \lambda \|z_1\|^2 > 0 \iff \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$.

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| \right) + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| + |z_{n+1}| \end{aligned}$$

Notando por $w = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho w = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$. Por tanto, se cumple para $n + 1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k z_1 \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| = \sum_{k=1}^n \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2|z - i|\}$.

Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |x + iy + i| &= 2|x + iy - i| \implies |x + (y + 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \implies \\
 &\implies \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \implies x^2 + (y + 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \implies \\
 &\implies x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \implies 3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0 \implies \\
 &\implies x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 = 0 \implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \implies \\
 &\implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}
 \end{aligned}$$

Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

$$2. B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}.$$

Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |x + iy - i| + |x + iy + i| &= 4 \implies |x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \implies \\
 &\implies \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \implies \\
 &\implies x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\
 &\implies -2y = 16 + 2y - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\
 &\implies 4 + y = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies 16 + 8y + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4 + 8y \implies \\
 &\implies 4x^2 + 3y^2 = 12 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4 - 3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\theta \in \operatorname{Arg} z$. Entonces, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \wedge \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{array} \right\} \iff \theta \in \operatorname{Arg} z$$

De esta forma, supuesto $z \notin \mathbb{R}^-$, tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot |z|}{\cos \theta \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \iff \theta \in \operatorname{Arg} z$$

donde notemos que, como $z \notin \mathbb{R}^-$, entonces $|z| \neq -\operatorname{Re} z$.

Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} f :]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \alpha - 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.8. Probar las fórmulas de De Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.
- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= \cos(n\theta) \cos \theta - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen} \theta + i (\cos(n\theta) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos \theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre θ , se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^8.$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)x}{2} \right), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \quad (1.2)$$

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \text{Arg } z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \text{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo \mathbb{C}^* por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \text{Arg } z$, se puede elegir $\theta_n \in \text{Arg } z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \rightarrow \theta$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ no es convergente y calcular su límite.