

# Lógica y Métodos Discretos



Los Del DGIIM, [losdelcgiim.github.io](https://losdelcgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

# Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24



# Índice general



# 1. Relaciones de Problemas

## 1.1. Inducción

**Ejercicio 1.1.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para  $n = 0$ :

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene  $P(0)$ .

- Como hipótesis de inducción supondremos que  $n \in \mathbb{N}$  y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.2.** Demuestre que para todo número natural  $n$ :

$$\left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

*Demostración.* En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■  $n = 0$ :

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■  $n = 1$ :

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■  $n > 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio ??.

□

**Ejercicio 1.1.3** (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural  $n$  vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base  $n = 0$ :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto,  $P(0)$  es correcto.



- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left( \sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción y en  $(**)$  he utilizado el Ejercicio ???. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto. Luego  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  se tiene, como se pedía.  $\square$

*Observación.* El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre  $n$ , se quiere usar una verdad sobre  $n-k$  con  $k > 1$ , cuando estemos demostrado que el predicado vale para  $n+1$ .

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

**Ejercicio 1.1.4.** Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

*Demostración.* El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula)  $P(n)$  del tenor:

“ $n$  tiene un factor primo”

donde  $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$  (tenemos que  $i_0 = 2$ ).

Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n$  es un número natural superior a 1 y que  $P(k)$  vale para todo  $1 < k < n$ .

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- $n$  es primo:

En este caso,  $n$  es un factor primo de  $n$  (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- $n$  no es primo: Si  $n$  no es primo, existen números naturales  $u$  y  $v$  tales que  $n = uv$  y  $1 < u, v < n$ . Claro está entonces, que  $1 < u, v < n$ . Por la hipótesis de inducción,  $P(u)$  vale, luego  $u$  tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar  $p$ . Así pues,  $p \mid u$  y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego  $P(n)$  vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$  vale  $P(n)$ .

□

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base ( $i_0$ ) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con  $i_0 = 2$ .

**Ejercicio 1.1.5** (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea  $p$  la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$

$$p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ ,  $p(a, b) = ab$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado del tenor:

“Para todo número natural  $m$ ,  $p(m, n) = mn$ .”

Supongamos como hipótesis de inducción que  $k$  es un número natural y que  $P(k)$  vale para todo  $0 \leq k < n$ . Distinguiamos los siguientes casos:

- $n = 0$ , (sea cual sea  $m$ ):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego  $P(0)$  vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n)$  vale:

- Suponemos aquí que  $n > 0$ . Caben dos casos:

1.  $n \equiv 0 \pmod{2}$  (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n}{2} < n$ .

2.  $n \equiv 1 \pmod{2}$  (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n-1}{2} < n$ .

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$ , vale  $P(n)$ . □

**Ejercicio 1.1.6.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“2 \mid (5^n + 3^{n-1})”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como  $2 \mid 6$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como  $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$  y, por hipótesis de inducción, se tiene que  $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$ , hemos visto que  $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.7.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como  $8 \mid 8$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado que el Ejercicio ???. Por tanto, como hemos visto que  $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$  y, por hipótesis de inducción,  $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ , se tiene que  $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.8.** Demuestre que para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$\text{“} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{”}$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como  $2 \geq \sqrt{2}$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que  $P(n+1)$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como  $0 \leq 2+3n$ ,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  es cierto, como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.9.** Demuestra que, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base,  $n = 3$ :

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como  $16 < 27$ ,  $P(3)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural mayor que 2 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que  $(n+1)^2 < n^3$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.10.** Demuestre que para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“n^3 < n!”$$

- En el caso base,  $n = 6$ :

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como  $6 < 20$ ,  $P(6)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural superior a 5 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio ?? y en  $(**)$  he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.11.** Demuestre que, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5.

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“5 \mid 8^n - 3^n”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como  $5 \mid 0$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que  $5 \mid 8^n - 3^n$ , se tiene que  $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5, como se pedía.  $\square$

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales.

**Ejercicio 1.1.12.** Demuestra que, para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

*Demostración.* Distinguimos casos según el valor de  $a$  y  $b$ :

- $a = 0$  o  $b = 0$ :

Tenemos que 0 es un múltiplo común de  $a$  y de  $b$ . Además, es el mínimo múltiplo común de  $a$  y  $b$ , ya que cualquier otro múltiplo común de  $a$  y de  $b$  es mayor que 0.

- $a, b > 0$ :

Sea  $M_{a,b}$  el conjunto de los múltiplos comunes de  $a$  y de  $b$ . Es claro que  $0 \in M_{a,b}$ , ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que  $ab \in M_{a,b}$ , ya que  $ab$  es múltiplo de  $a$  y de  $b$ . Como  $a, b > 0$ , se tiene que  $ab > 0$ . Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto,  $v_{a,b}$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$ , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales,  $v_{a,b}$  tiene un mínimo, al que llamaremos  $m_{a,b}$ . Así pues,  $m_{a,b}$  es el mínimo común múltiplo de  $a$  y de  $b$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.13.** Estime un valor de  $n$  para el que

$$100^n < n!$$

**Ejercicio 1.1.14** (Ejemplo de principio del buen orden). Sea  $n$  un número natural y sea  $S$  un conjunto de números naturales menores que  $n$ . Demuestre que  $S$  es vacío o tiene máximo.

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que  $S$  es no vacío. Pueden darse dos casos

1.  $S = \{0\}$ ; en este caso,  $S$  tiene máximo y es 0.
2.  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$  (o que  $S$  tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea

$$M(S) = \{m \in \omega \mid \text{para todo } x \in S, x \leq m\}$$

Se cumple lo siguiente:

- $n \in M(S)$
- $M(S) \neq \emptyset$
- Por el principio del buen orden, existe el mínimo de  $M(S)$ , denotado como  $m_0$ .
- $m_0 \neq 0$ , porque  $m_0$  es un mayorante de  $S \setminus \{0\}$  que es no vacío.
- Si para todo  $x \in S$  se cumpliera que

$$x < m_0$$

entonces, para todo  $x \in S$  se cumpliría que

$$x \leq m_0 - 1$$

y por tanto  $m_0 - 1 \in M(S)$  y además

$$0 \leq m_0 - 1 < m_0$$

de donde  $m_0$  no sería el mínimo de  $M(S)$ , en contra de lo supuesto.

- Existe  $x_0 \in S$  tal que

$$m_0 \leq x_0$$

- Como  $m_0$  es un un mayorante de  $S$  se cumplirá que

$$x_0 \leq m_0$$

- Por las dos desigualdades anteriores,  $m_0 = x_0$
- $m_0 \in S \cap M(S)$
- El mínimo de  $M(S)$  es un elemento de  $S$ , luego es el máximo de  $S$ .

□

**Ejercicio 1.1.15.** Demuestre mediante inducción que para todo número natural  $n$  tal que  $2 \leq n$  se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$



*Demostración.* A continuación, daremos las ideas de la demostración para que el lector termine el desarrollo de la misma.

El razonamiento es por el principio de inducción matemática

$$P(n) \text{ es "2} \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \text{"}$$

- Caso base:  $n = 2$

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\Rightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Luego  $P(2)$  es cierto.

- Hipótesis de inducción: supongamos que  $n \in \omega$  y que vale  $P(n)$ , es decir

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- paso de inducción:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} n + 1 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ (\sqrt{n+1})^2 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ \sqrt{n+1} &< \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &< \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Luego  $P(n+1)$  vale.

Por el principio de inducción matemática, para todo  $n \in \omega$  con  $n \leq 2$ ,  $P(n)$  vale.

□

## 1.2. Recurrencia

**Ejercicio 1.2.1.** Resuelva la relación de recurrencia dada por  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Particularice el resultado suponiendo que  $n \geq 0$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ .

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz  $r = 2$  de multiplicidad  $m = 2$ . La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n$$

Y ahora buscar los valores de  $c_1$  y  $c_2$  usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que  $x_0 = u_0 = 1$  y  $x_1 = u_1 = 3$ , entonces:

$$1 = (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1$$

$$3 = (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) 2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right) 2^n = (2+n)2^{n-1}$$

**Ejercicio 1.2.2.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0$$

El orden  $k$  de la recurrencia es 2 ( $k = 2$ ). La ecuación característica:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

En definitiva

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & m_1 &= 1 \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & m_2 &= 1 \end{aligned}$$

y se tiene:  $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$

Si  $\{x_n\}$  es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

para ciertos valores de  $c_1$  y  $c_2$ .

**Ejercicio 1.2.3.** Reuelva el problema de recurrencia

$$\begin{aligned}u_0 &= 0 \\u_1 &= 1 \\u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema entonces  $x_0 = u_0 = 0$  y  $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned}0 &= x_0 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\&= c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= x_1 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\&= c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\&= c_1 \sqrt{5} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

La solución del problema es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

**Ejercicio 1.2.4.** Calcular la solución del problema de recurrencia

$$\begin{aligned}u_0 &= 2 \\u_1 &= 1 \\u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0\end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio ??, sabemos que si:

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema entonces  $x_0 = u_0 = 2$  y  $x_1 = u_1 = 1$

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = 2 - c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\ \implies 1 &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \\ \implies 0 &= c_1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \\ \implies c_1 \sqrt{5} &= \sqrt{5} \implies c_1 = 1 \implies c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución es:

$$x_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

**Ejercicio 1.2.5.** Resuelva el siguiente problema de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 3 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \end{aligned}$$

De orden:  $k = 2$

Ecuación característica:  $x^2 - 4x + 4 = 0$

Soluciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \\ r_1 &= 2 \quad m_1 = 2 \end{aligned}$$

Solución general:

$$x_n = (c_1 + c_2)2^n$$

Pasamos ahora a buscar los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} 1 &= u_0 \\ &= x_0 \\ &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 \\ &= c_1 \cdot 1 \\ &= c_1 \implies c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= u_1 \\ &= x_1 \\ &= (1 + c_2 \cdot 1)2^1 \\ &= (1 + c_2) \cdot 2 \\ &= 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La solución

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right) 2^n = \frac{2+n}{2} 2^n = (2+n)2^{n-1}$$

**Ejercicio 1.2.6.** De el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como “Torres de Hanoi”, en función del número de discos  $n$  con los que cuente.

Para  $n \geq 0$  sea  $u_n$  el número de pasos solicitado. Si el puzzle tuviese  $n+1$  discos entonces (Intuimos que es mover  $n-1$  piezas, mover la base y mover  $n-1$  piezas):

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 1 + u_n \\ &= 2u_n + 1 \end{aligned}$$

Así pues recurrentemente:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

que resolveremos esquemáticamente:

$$k = 1.$$

Ecuación característica:  $x - 2$ .

Función de ajuste:  $f(n) = 1^n = 1$ .

Multiplicidad de 1 como solución de la ecuación característica:  $m = 0$ .

Solución particular:

$$x_n^{(p)} = n^m q(n) 1^n \quad \deg(g(n)) \leq \deg(p(n)) = 0$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_2 1^n = c_2 \\ x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 2^n + c_2 \end{aligned}$$

Calcularemos  $c_2$  sin contar con valores de la sucesión. Sabemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} \\ &= c_2 - 2c_2 \\ &= c_2(1 - 2) = -c_2 \implies c_2 = -1 \end{aligned}$$

Luego

$$x_n = c_1 2^n - 1$$

y como  $x_0 = u_0 = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 2^0 - 1 \\ &= c_1 - 1 \implies c_1 = 1 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$x_n = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned} n &= 0; & x_n &= 0 \\ n &= 1; & x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\ n &= 2; & x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ n &= 3; & x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\ n &= 4; & x_4 &= 2^4 - 1 = 15 \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.7.** Sea

$$u_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para  $u_n$ .
2. Encuentre una fórmula explícita para calcular  $u_n$ .

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= \sum_{k=0}^n k 2^k \quad n \geq 1 \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} k 2^k \right) + n 2^n \\ &= u_{n-1} + n 2^n \end{aligned}$$

O sea,  $u_n = u_{n-1} + n 2^n$

2. Resolvemos el problema

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= u_{n-1} + n 2^n \end{aligned}$$

Orden:  $k = 1$ .

Ecuación característica:  $x - 1$ .

Solución homogénea:  $x_n^{(h)} = c_1$ .

Función de ajuste:  $f(n) = p(n)s^n = n2^n$ .

$\Rightarrow p(n) = n, \deg(p(n)) = 1$ .  $S = 2$ , que no es solución de la ecuación característica, luego  $m = 0$ .

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= x^0(c_2 + c_3n)2^n \\ &= (c_2 + c_3n)2^n \end{aligned}$$

Calculemos  $x_n^{(p)}$ , o sea, los valores de  $c_2$  y  $c_3$ .

$$(n+1)2^{n+1} = x_{n+1}^{(p)} - x_n^{(p)}$$

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (c_2 + c_3n)2^n \\ x_{n+1}^{(p)} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} \\ (n+1)2^{n+1} &= (c_2 + c_3(n+1))2^{n+1} - (c_2 + c_3n)2^n \\ 2(n+1)2^n &= 2(c_2 + c_3(n+1))2^n - (c_2 + c_3n)2^n \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3(n+1) - c_2 - c_3n) \\ &= 2^n(2c_2 + 2c_3n + 2c_3 - c_2 - c_3n) \\ &= 2^n(c_2 + (2c_3 - c_3)n + 2c_3) \\ &= 2^n(c_2 + 2c_3 + c_3n) \end{aligned}$$

luego

$$2n + 2 = 2(n+1) = c_3n + c_2 + 2c_3$$

basta con que

$$\begin{aligned} 2 &= c_3 \\ 2 &= c_2 + 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto  $c_3 = 2$  y

$$\begin{aligned} 2 &= c_2 + 2 \cdot 2 \\ &= c_2 + 4 \Rightarrow c_2 = -2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= (-2 + 2n)2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$

En definitiva

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 + (n-1)2^{n+1} \end{aligned}$$



y como  $x_0 = u_0 = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + (0 - 1)2^{0+1} \\ &= c_2 - 2 \end{aligned}$$

luego  $c_1 = 2$  y por tanto:

$$x_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

Respuesta:

$$u_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

**Ejercicio 1.2.8.** Un ciudadano pide un préstamo por cantidad  $S$  de dinero a pagar en  $T$  plazos. Si  $I$  es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante  $P$  debe hacer al final de cada plazo?

$u_n$  es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del  $n$ -ésimo plazo, es decir, a continuación del  $n$ -ésimo pago. Entonces, para todo  $0 \leq n \leq T-1$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1 + I)u_n - P \end{aligned}$$

y el problema de recurrencia a resolver es:

$$\begin{aligned} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1 + I)u_n - P \quad 0 \leq n \leq T - 1 \end{aligned}$$

lo cual hacemos.

$$k = 1.$$

Ecuación característica:  $x - (1 + I) = 0 = 0$ .

Solución homogénea:  $x_n^{(h)} = c(1 + I)^n$ .

Función de ajuste:  $f(n) = -P = -P \cdot 1^n$ .

Los casos son los siguientes:

■  $I = 0$ ;

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c \\ x_n^{(p)} &= n^m \cdot A \cdot 1^n \\ &\stackrel{m=1}{=} nA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -P &= (n + 1) - nA \\ &= A(n + 1 - n) = A \end{aligned}$$

$$x_n = c - nP$$

como  $x_0 = u_0 = S$  entonces:

$$S = x_0 = C - 0 \cdot P = C$$

luego

$$x_n = S - nP$$

Como  $x_T = 0$ , entonces

$$0 = S - T \cdot P$$

luego

$$P = \frac{S}{T}$$

■  $I \neq 0$ ;

$$x_n^{(p)} = A$$

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} \\ &= A - (1+I)A \\ &= A(1 - (1+I)) = -AI \implies A = \frac{P}{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} S = x_0 &= c(1+I)^0 + \frac{P}{I} \implies c = S - \frac{P}{I} \\ x_n &= \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^n + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$0 = x_T = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{P}{I} &= \left(\frac{P}{I} - S\right)(1+I)^T \\ P &= (P - SI)(1+I)^T \\ &= P(1+I)^T - SI(1+I)^T \\ P(1 - (1+I)^T) &= -SI(1+I)^T \\ P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - 1} \\ &= SI(1 - (1+I)^{-T})^{-1} \end{aligned}$$

Respuesta

$$P = SI(1 - (1+I)^{-T})^{-1}$$

**Ejercicio 1.2.9.** Orden:  $k = 2$  porque

$$u_n = 0 \cdot u_{n-1} + u_{n-2} + 2^n + (-1)^n$$

Ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 &&= (x+1)(x-1) \\ r_1 &= -1m_1 &&= 1 \\ r_2 &= 1m_2 &&= 1 \end{aligned}$$

Solución homogénea

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

Solución particular

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n^0 c_3 2^n + n^1 c_4 (-1)^n \\ &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

Para el cálculo de  $c_3$  y  $c_4$

$$u_{n+2} = u_n + 2^{n+2} + (-1)^n$$

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3 2^{n+2} + (n+2)c_4 (-1)^n \\ x_n^{(p)} &= c_3 2^n + n c_4 (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + (-1)^n &= x_{n+2} - x_n^{(p)} \\ &= c_3 2^{n+2} + (n+2)c_4 (-1)^n \\ &\quad - c_3 2^n - n c_4 (-1)^n \\ &= 2^n (2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n ((n+2)c_4 - n c_4) \\ &= 2^n \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

y en definitiva tenemos:

$$4 \cdot 2^n + (-1)^n = (3c_3)2^n + (-1)^n 2c_4$$

basta con que

$$\begin{aligned} 3c_3 &= 4 \implies c_3 = \frac{4}{3} \\ 2c_4 &= 1 \implies c_4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \frac{4}{3} 2^n + n \frac{1}{2} (-1)^n \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \end{aligned}$$

Calculamos  $x_n$

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2}$$

y como  $x_0 = u_0 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \\ \implies c_1 + c_2 &= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y como  $x_1 = u_1 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= x_1 \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{16-3}{6} \\ &= -c_1 + c_2 + \frac{13}{6} \\ c_1 - c_2 &= \frac{13}{6} - 2 = \frac{1}{6} \\ \begin{cases} c_1 - c_2 &= \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 &= \frac{2}{3} \end{cases} \\ 2c_1 &= \frac{5}{6} \implies c_1 = \frac{5}{12} \\ c_2 &= \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{(-1)^n n}{2} \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left( \frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}2^{n+2} + \left( \frac{5+6n}{12} \right) (-1)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Respuesta

$$x_n = \frac{1}{3}2^{n+2} + \left( \frac{5+6n}{12} \right) (-1)^n + \frac{1}{4}$$

**Ejercicio 1.2.10.** Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

■ Orden:  $k = 2$ .

- Ecuación característica:  $x^2 + 4x + 16 = 0$  que tiene como raíces

$$r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

forma polar:

$$|r_1| = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1 + \operatorname{Re}(z)/|z|} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - 1/2} = \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi/3}{2} \right)$$

y así

$$2 \operatorname{arc tg} \left( \frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1 + \operatorname{Re}(z)/|z|} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

Solución homogénea:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left( c_1 \cos \left( \frac{2\pi n}{3} \right) + c_2 \sin \left( \frac{2\pi n}{3} \right) \right)$$

Solución particular:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left( c_3 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + c_4 \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left( c_3 \cos \left( \frac{(n+2)\pi}{2} \right) + c_4 \sin \left( \frac{(n+2)\pi}{2} \right) \right) \\ &= 4^n \left( -16c_3 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 16c_4 \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$x_{n+1}^{(p)} = 4^n \left( 4c_4 \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 4c_3 \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right)$$