Variable Compleja Examen VII

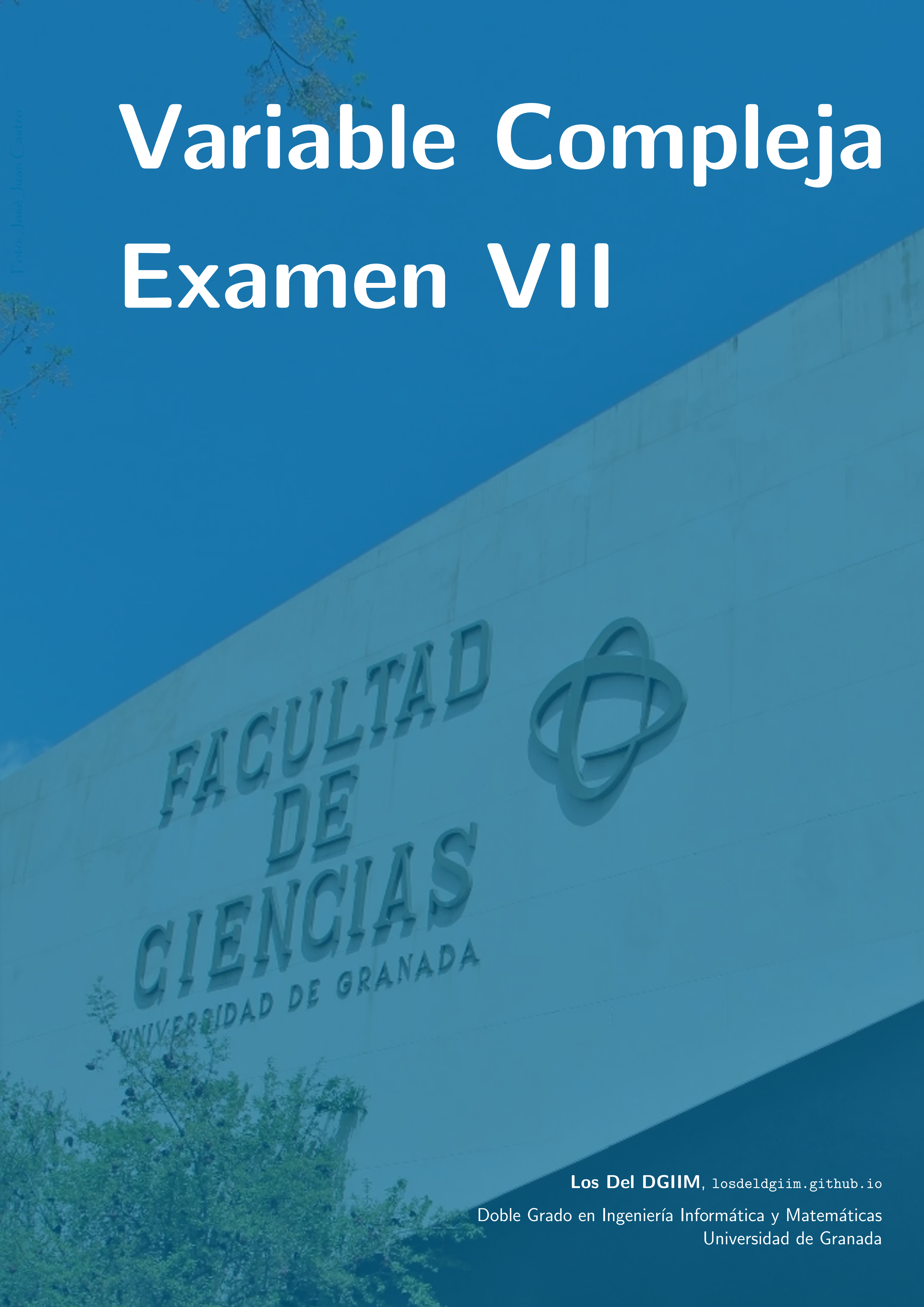

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2018-19.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 25 de Abril de 2019.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-i\}.$$

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \log(1 + z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen.

Ejercicio 3.

1. **(1.5 puntos)** Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz$.
2. **(1.5 puntos)** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.
3. **Extra (1.5 puntos)** Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1-i\}.$$

Se trata de una serie geométrica de razón $\varphi(z)$, donde:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C}\setminus\{-1-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^2 \end{array}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1-i\}$:

$$\begin{aligned} |\varphi(z)|<1 &\iff |z-1-i|^2 < |z+1+i|^2 \\ &\iff (\operatorname{Re}(z)-1)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2 < (\operatorname{Re}(z)+1)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2 \\ &\iff \operatorname{Re}^2(z) - 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) - 2\operatorname{Im}(z) + 1 < \operatorname{Re}^2(z) + 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) + 2\operatorname{Im}(z) + 1 \\ &\iff 0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Por tanto, definimos el conjunto:

$$\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0\}$$

De esta forma, la serie converge absolutamente (y puntualmente) en Ω y diverge para $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \log(1+z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen.

Sabemos que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}^-$. Sea $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$, y supongamos $1+z^2\in\mathbb{R}_0^-$.

$$1+z^2 = 1+\operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z) + 2i\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{Re}^2(z)-\operatorname{Im}^2(z) = -1 \\ 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 0 \end{array}\right.$$

- Si $\operatorname{Re}(z)=0$, entonces $\operatorname{Im}^2(z)=1 \Longrightarrow \operatorname{Im}(z)=\pm1 \Longrightarrow z=\pm i$, lo que es una contradicción.
- Si $\operatorname{Im}(z)=0$, entonces $\operatorname{Re}^2(z)=-1$, lo que es una contradicción puesto que $\operatorname{Re}(z)\in\mathbb{R}$.

Por tanto, $1+z^2\in\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}^-$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$, por lo que $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-i,i\})$. De hecho, se tiene que:

$$f'(z) = \frac{2z}{1+z^2} = 2z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} z^{2n+2} + C$$

Para determinar la constante de integración C, basta con evaluar en $z = 0$:

$$f(0) = \log(1 + 0^2) = 0 \implies C = 0$$

Por tanto, el desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{2n}$$

Ejercicio 3.

1. **(1.5 puntos)** Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\, dz$.

   Definimos la función f como:

   $$\begin{array}{rccc} f: & D(0,2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^z}{(z-3)^3} \end{array}$$

   Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

   $$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} i$$

2. **[1.5 puntos]** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

   Como son funciones enteras, para cada $z \in D(0,1)$ se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = g(z)$$

   Además, para cada $z \in \mathbb{T}$ también se tiene por hipótesis que $f(z) = g(z)$. Por tanto, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. **[1.5 puntos Extra]** Probar que, de hecho, $f = g$.

   Si consideramos las restricciones a $\Omega = \overline{D}(0,1)$, se tiene que:

   $$f_{|\Omega} = g_{|\Omega}$$

   Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

   $$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por otro lado, como f, g son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en $\mathbb{C}$. De hecho, considerando el desarrollo de taylor centrado en el origen, se tiene que:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$