Geometría I
Examen X

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Miguel Ángel De la Vega Rodríguez
Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción Convocatoria Extraordinaria[1].

Fecha 17 de febrero de 2023.

Duración 3 horas.

[1] El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Enuncia y demuestra el Teorema de Reflexividad.

Demostración. La aplicación Φ está definida consistentemente. Para demostrar que es lineal, debemos comprobar que $\Phi_{av+bw} = \Phi(av+bw)$ es igual a $a\Phi_v + b\Phi_w$ para todo $v, w \in V$, $a, b \in K$. Para ello, aplicamos ambos a una forma lineal genérica $\varphi \in V^*$:

$$\Phi_{av+bw}(\varphi) = \varphi(av+bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$$
$$(a\Phi_v + b\Phi_w)(\varphi) = a\Phi_v(\varphi) + b\Phi_w(\varphi) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$$

comprobándose que son iguales. Para demostrar la biyectividad de Φ, basta con comprobar su inyectividad (al tener V y V^{**} la misma dimensión finita), esto es, $\text{Nuc}(\Phi) = \{0\}$. Sea $v \in V$ tal que Φ_v es la forma nula del bidual. Esto quiere decir $\Phi_v(\varphi) = 0$, esto es, $\varphi(v) = 0$ para todo $\varphi \in V^*$. lo que implica que $v = 0$. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo suyo que verifica $f \circ f = -I_V$ (I_V es la aplicación identidad en V). Demuestra que f es un automorfismo y que n no puede ser impar.

- Biyectividad de f: Para ello, vamos a demostrar que $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

  Sea $v \in \text{Ker}(f)$, entonces $f(v) = 0$. Por ser f lineal $(f \circ f)(v) = 0$, Pero sabemos que $(f \circ f)(v) = -v$, luego $-v = 0 \Rightarrow v = 0$. Por tanto, f es inyectiva.

- n no puede ser impar:

  Para ello, observamos lo siguiente:

  $$\det(f \circ f) = \det(-I_V) \Rightarrow \det(f) \cdot \det(f) = (-1)^n \cdot 1 \leftrightarrow (\det(f))^2 = (-1)^n$$

  Que para n impar es imposible, por tanto, n no puede ser impar.

Ejercicio 3 (5,5 puntos)**.** Se consideran los espacios vectoriales $S_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$.

1. [**3 Puntos**] Construye una aplicación lineal $f : S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ que verifique:

   $$\ker(f) = \{A \in S_2(\mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 0\} \text{ y } \ker(f^t) = L\{\phi, \psi\} \text{ donde}$$
   $$\phi(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 - a_2, \quad \psi(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_2, \quad \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

   Determina explícitamente $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

   En primer lugar, observamos que:

   $$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right) = 0$$

   También sabemos que $\ker(f^t) = L\{\phi, \psi\} = \text{an}(\text{Im}(f))$, es decir,

   $$\text{Im}(f) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 : \begin{array}{c} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{(1,1,1)\right\}$$

De donde deducimos que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, vamos a construir una base de $\mathrm{Ker}(f)$:
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
Ahora, para construir la aplicación lineal f, basta con calcular la imagen de cada uno de los vectores de la base de $S_2(\mathbb{R})$:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^2$$

De donde se obtine:

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= 1 + x + x^2 \\ f(E_{12}) &= 0 \\ f(E_{21}) &= 0 \\ f(E_{22}) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación lineal f es:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = a(1 + x + x^2) + c(1 + x + x^2) = (a + c)(1 + x + x^2)$$

2. **[1 Punto]** *Construye, si es posible, un endomorfismo h de $S_2(\mathbb{R})$ distinto del endomorfismo nulo tal que $f \circ h$ sea la aplicación lineal nula.*

Usando el apartado anterior, sabemos que

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = (a+c)(1+x+x^2), \text{ por tanto, tomando } h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

un endomorfismo no nulo, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tendríamos que $f \circ h = 0$. Veamos que h es un endomorfismo, para ello, comprobaremos que es lineal:

- Aditividad:

$$\begin{aligned} h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) &= h\left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & c + c' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & -(a + a') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} = h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- Homogeneidad:

$$h\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & -\lambda a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \lambda h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)$$

Así, dada una matriz $A \in S_2(\mathbb{R})$, $f \circ h(A) = f(h(A)) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right) = (a-a)(1+x+x^2) = 0$.

3. **[1,5 Puntos]** *Calcula una base del espacio cociente $\mathbb{R}_2[x]/Im(f)$ y determina si este espacio es isomorfo a $S_2(\mathbb{R})/ker(f)$.*

   En primer lugar, comenzamos observando que $\dim \mathbb{R}_2[x]/\mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2$. y por los apartados anteriores, $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{1+x+x^2\}$. Ahora, ampliamos esta base a una base B' de $\mathbb{R}_2[x]$:

   $$B' = \{1+x+x^2, x, x^2\}$$

   Donde se tiene que $W = \mathcal{L}\{x, x^2\}$ es suma directa con $\mathrm{Im}(f)$, por tanto, $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Im}(f) \oplus W$. Y por esto, podemos tomar $B = \{x + \mathrm{Im}(f), x^2 + \mathrm{Im}(f)\}$ como base de $\mathbb{R}_2[x]/\mathrm{Im}(f)$. Por otro lado, $\dim S_2(\mathbb{R})/\ker(f) = \dim S_2(\mathbb{R}) - \dim \ker(f) = 3 - 2 = 1$, por tanto, no pueden ser isomorfos.