

Álgebra I

Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra I

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Álgebra I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Pilar Carrasco Carrasco.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 7 de febrero de 2022.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (4 puntos).

1. (0.5 puntos) Sea X un conjunto y A , B y C subconjuntos de X . Suponiendo que $A \cap C = \emptyset$, probad que $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$.
2. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Sea R_f la relación de equivalencia en \mathbb{R} definida por la aplicación f . Describid el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene cada clase?
3. (0.5 puntos) En el anillo \mathbb{Z}_8 , sea $I = 4\mathbb{Z}_8$, el ideal principal generado por 4. Describid \mathbb{Z}_8/I listando todos sus elementos.
4. (1 punto) Sea A un dominio euclídeo con función euclídea $\phi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Demostrad que para todo $a \neq 0$, se tiene que $\phi(a) \geq \phi(1)$ y que se da la igualdad si, y sólo si $a \in U(A)$.
5. (0.5 puntos) Demostrad que $n^{13} - n$ es divisible por 2 y 5 para todo $n \in \mathbb{Z}$.
6. (0.5 puntos) Demostrad que en $\mathbb{Z}[i]$ se tiene que $\text{mcd}(n, n+i) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos).

1. (2.5 puntos) Factorizar en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios:
 - a. $48x^4 + 24x^3 - 72x + 80$
 - b. $x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$
 - c. $10x^5 + 23x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 5x - 3$
2. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio primitivo de grado $n > 0$ y tal que existe un primo $p \in \mathbb{Z}$ verificando:
 - (i) Su reducido módulo p es de la forma $R_p(f(x)) = \alpha x^n$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$ no nulo.
 - (ii) $p^2 \nmid f(p)$.

Demostrad que $f(x)$ es irreducible.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Dado el sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \text{mód } (1 + \sqrt{-2}) \\ x \equiv 2 & \text{mód } (3 + \sqrt{-2}) \\ x \equiv 4 & \text{mód } (3 + 2\sqrt{-2}) \end{cases}$$

Demostrad que tiene solución sin resolverlo. Resolverlo, dando una solución óptima y la solución general.

¿Es posible encontrar una solución a $a + b\sqrt{-2}$ tal que $30 < a < 56$?

Ejercicio 1 (4 puntos).

1. (0.5 puntos) Sea X un conjunto y A , B y C subconjuntos de X . Suponiendo que $A \cap C = \emptyset$, probad que $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$.
2. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Sea R_f la relación de equivalencia en \mathbb{R} definida por la aplicación f . Describid el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene cada clase?
3. (0.5 puntos) En el anillo \mathbb{Z}_8 , sea $I = 4\mathbb{Z}_8$, el ideal principal generado por 4. Describid \mathbb{Z}_8/I listando todos sus elementos.

$$\mathbb{Z}_8/I = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}_8\} = \{a + I \mid a \in \mathbb{Z}_8\}$$

$$[0] = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b \equiv 0 \pmod{4}\} = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b = 0 \text{ en } \mathbb{Z}_4\} = \{0, 4\}$$

$$[1] = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b \equiv 1 \pmod{4}\} = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b = 1 \text{ en } \mathbb{Z}_4\} = \{1, 5\}$$

$$[2] = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b \equiv 2 \pmod{4}\} = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b = 2 \text{ en } \mathbb{Z}_4\} = \{2, 6\}$$

$$[3] = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b \equiv 3 \pmod{4}\} = \{b \in \mathbb{Z}_8 \mid b = 3 \text{ en } \mathbb{Z}_4\} = \{3, 7\}$$

Luego:

$$\mathbb{Z}_8/I = \{0 + I, 1 + I, 2 + I, 3 + I\}$$

4. (1 punto) Sea A un dominio euclídeo con función euclídea $\phi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Demostrad que para todo $a \neq 0$, se tiene que $\phi(a) \geq \phi(1)$ y que se da la igualdad si, y sólo si $a \in U(A)$.

$$\phi(a) = \phi(a \cdot 1) \geq \phi(1) \quad \forall a \in A \setminus \{0\}$$

\Rightarrow) Supongamos que $\phi(a) = \phi(1)$:

Dividimos 1 entre a , $1 = qa + r$ con:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \vee \\ \phi(r) < \phi(a) = \phi(1) \end{cases}$$

- Supongamos que $r \neq 0$, luego $\phi(r) < \phi(1)$, pero:

$$\phi(b) \geq \phi(1) \quad \forall b \in A \setminus \{0\} \Rightarrow \phi(r) \geq \phi(1)$$

Contradicción. Luego $r = 0$.

Por tanto: $1 = qa \Rightarrow a \in U(A)$.

\Leftarrow) Supongamos que $a \in U(A) \Rightarrow \exists a^{-1} \in A \mid aa^{-1} = 1 \Rightarrow \phi(aa^{-1}) = \phi(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(1) = \phi(aa^{-1}) \geq \phi(a) \\ \phi(a) \geq \phi(1) \quad \forall a \in A \setminus \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(a) = \phi(1)$$

5. (0.5 puntos) Demostrad que $n^{13} - n$ es divisible por 2 y 5 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostremos primero que $2 \mid n^{13} - n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$:

• Supongamos que $2 \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1) = 2k(n^{12} - 1) = 2k'$$

Con $k' = k(n^{12} - 1) \Rightarrow 2 \mid n^{13} - n$.

• Supongamos que $2 \nmid n$:

Como 2 es primo, $\text{mcd}(2, n) = 1$. Por el Teorema de Fermat:

$$\begin{aligned} n^{\varphi(2)} = n^1 &\equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow n^{12} \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow n^{13} \equiv n \pmod{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n^{13} - n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 2 \mid n^{13} - n \end{aligned}$$

Veamos que $5 \mid n^{13} - n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$:

• Supongamos que $5 \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 5k$.

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1) = 5k(n^{12} - 1) = 5k'$$

Con $k' = k(n^{12} - 1) \Rightarrow 5 \mid n^{13} - n$.

• Supongamos que $5 \nmid n$:

Como 5 es primo, $\text{mcd}(5, n) = 1$. Por el Teorema de Fermat:

$$\begin{aligned} n^{\varphi(5)} = n^4 &\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n^{12} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n^{13} \equiv n \pmod{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n^{13} - n \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 5 \mid n^{13} - n \end{aligned}$$

6. (0.5 puntos) Demostrad que en $\mathbb{Z}[i]$ se tiene que $\text{mcd}(n, n+i) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Supongamos que $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{mcd}(n, n+i) \neq 1$.

Como el máximo común divisor es único salvo asociados y:

$1 \sim a$ con $a \in U(\mathbb{Z}[i])$:

$$\text{mcd}(n, n+i) = \alpha \mid \alpha \notin U(A)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \mid n \Rightarrow N(\alpha) \mid N(n) \Rightarrow N(\alpha) \mid n^2 \\ \wedge \\ \alpha \mid n+i \Rightarrow N(\alpha) \mid N(n+i) \Rightarrow N(\alpha) \mid n^2 + 1 \end{array} \right.$$

Veamos ahora el siguiente resultado:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$: $a \mid b \wedge a \mid b+1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

\Leftarrow) Supongamos que $a = \pm 1 \Rightarrow a \in U(A) \Rightarrow a \mid b \wedge a \mid b+1$

\Rightarrow) Supongamos que $a \mid b \wedge a \mid b+1$:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = ka \\ a \mid b+1 \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \mid b+1 = k'a \end{array} \right\} \Rightarrow ka + 1 = k'a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = a(k' - k) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a \in U(\mathbb{Z}) \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} N(\alpha) \mid n^2 \\ \wedge \\ N(\alpha) \mid n^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow N(\alpha) = \pm 1 \Rightarrow \alpha \in U(A)$$

Lo que es una contradicción.

Luego $\text{mcd}(n, n+i) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos).

1. (2.5 puntos) Factorizar en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios:

a. $48x^4 + 24x^3 - 72x + 80$

Sea $f = 48x^4 + 24x^3 - 72x + 80$, $f = 8g$ con $g = 6x^4 + 3x^3 - 9x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$.
 g es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ por Eisenstein para $p = 3$. Por la misma razón, también lo es en $\mathbb{Q}[x]$.

$$f = 2^3(6x^4 + 3x^3 - 9x + 10) \text{ en } \mathbb{Z}[x]$$

$$f = 8(6x^4 + 3x^3 - 9x + 10) \text{ en } \mathbb{Q}[x]$$

b. $x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

Sea $f = x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$.

Las posibles raíces de f en \mathbb{Q} son $\{\pm 1\}$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + 8 + 4 + 5 + 4 + 1 = 23 \neq 0 \\ f(-1) = 1 + 8 - 4 + 5 - 4 + 1 = 7 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ no tiene factores} \\ \text{de grado 1 ni 5} \end{array}$$

• Reducimos módulo 2:

$$R_2(f) = x^6 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)^3 \Rightarrow R_2(f) \text{ no tiene factores de grado 2 ni 4}$$

Luego f tampoco tiene factores de grado 2 ni 4.

• Reducimos módulo 3:

$$R_3(f) = x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

$$\left. \begin{array}{l} R_3(f)(0) = 1 \neq 0 \\ R_3(f)(1) = 8 \neq 0 \\ R_3(f)(2) = 115 = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R_3(f) \text{ no tiene factores} \\ \text{de grado 1 ni 5} \end{array}$$

Al dividir $R_3(f)$ entre $x^2 + 1$ obtenemos que:

$$x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^4 + x^2 + x + 1) \Rightarrow (x^2 + 1) \mid R_3(f)$$

$$R_3(f) = (x^2 + 1)g \text{ con } g = x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

Como $R_3(f)$ no tiene factores de grado 1 $\Rightarrow g$ no tiene de grado 1 ni 3.

$R_3(f)$ no tiene factores de grado 3 $\Rightarrow f$ tampoco.

Concluimos que f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$.

c. $10x^5 + 23x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 5x - 3$

Sea $f = 10x^5 + 23x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 5x - 3$. Es primitivo.

$$\text{Div}(-3) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$\text{Div}(10) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

Por lo que las posibles raíces de f en \mathbb{Q} son:

$$\left\{ \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{3}{10} \right\}$$

$$f(1) \neq 0 \quad f(-1) \neq 0 \quad f(3) \neq 0$$

$$f(-3) = 0 \Rightarrow (x + 3) \mid f$$

Al dividir f entre $(x + 3)$ obtenemos:

$$f = (x + 3)g \text{ con } g = 10x^4 - 7x^3 + x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

Con g primitivo. Las posibles raíces de g en \mathbb{Q} son:

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{10} \right\}$$

$$g(1) \neq 0 \quad g(-1) \neq 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \mid g \Rightarrow (2x - 1) \mid g$$

Al dividir g entre $(2x - 1)$ obtenemos:

$$g = (2x - 1)(5x^3 - x^2 + 1)$$

Luego:

$$f = (x + 3)(2x - 1)h \text{ con } h = 5x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

Con h primitivo.

Las posibles raíces de h en \mathbb{Q} son: $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{5} \right\}$

$$h(1) \neq 0 \quad h(-1) \neq 0 \quad h\left(\frac{1}{5}\right) \neq 0 \quad h\left(-\frac{1}{5}\right) \neq 0$$

Luego h es irreducible por el criterio de la raíz.

$$f = (x + 3)(2x - 1)(5x^3 - x^2 + 1) \text{ en } \mathbb{Z}[x]$$

$$f = \frac{5}{2}(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}\right) \text{ en } \mathbb{Q}[x]$$

2. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio primitivo de grado $n > 0$ y tal que existe un primo $p \in \mathbb{Z}$ verificando:

- (i) Su reducido módulo p es de la forma $R_p(f(x)) = \alpha x^n$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$ no nulo.
- (ii) $p^2 \nmid f(p)$.

Demosttrad que $f(x)$ es irreducible.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Dado el sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \text{mód } (1 + \sqrt{-2}) \\ x \equiv 2 & \text{mód } (3 + \sqrt{-2}) \\ x \equiv 4 & \text{mód } (3 + 2\sqrt{-2}) \end{cases}$$

Demosttrad que tiene solución sin resolverlo. Resolverlo, dando una solución óptima y la solución general.

¿Es posible encontrar una solución a $a + b\sqrt{-2}$ tal que $30 < a < 56$?