

Enviado por José Juan Castro

# Análisis

# Matemático II

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024



# Índice general

<b>1. Prácticas</b>	<b>5</b>
1.1. Sucesiones de funciones . . . . .	5
1.2. Series de funciones . . . . .	16



# 1. Prácticas

## 1.1. Sucesiones de funciones

**Ejercicio 1.1.1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de la sucesión  $\{f_n\}$  en el intervalo  $[0, \rho]$  y en la semirrecta  $[\rho, +\infty[$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para  $x = 0$ , tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en 0. Para  $x \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

En resumen, tenemos que  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función  $f_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ , estudiamos su derivada:

$$f'_n(x) = \frac{\frac{n}{1+nx} \cdot (1+nx) - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2} = \frac{n - \log(1+nx) \cdot n}{(1+nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $f_n$  son:

$$f'_n(x) = 0 \iff \log(1+nx) = 1 \iff 1+nx = e \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in [0, \frac{e-1}{n}]$ , entonces  $f'_n(x) > 0$ , por lo que  $f_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in [\frac{e-1}{n}, +\infty[$ , entonces  $f'_n(x) < 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:

- Si  $n < \frac{e-1}{\rho}$   $\left(\rho < \frac{e-1}{n}\right)$ , entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$  (podría haber tomado cualquier valor  $x_n \in [0, \rho]$ , ya que no afecta al límite).
- Si  $n \geq \frac{e-1}{\rho}$   $\left(\rho \geq \frac{e-1}{n}\right)$ , entonces  $x_n = \frac{e-1}{n} \in [0, \rho]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \rho]$ . Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \rightarrow \frac{1}{e}$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

*Observación.* También sirve tomar  $x_n = \frac{1}{n}$ , y tendríamos que  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$ .

Para el caso de la semirrecta  $[\rho, +\infty[$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho > \frac{e-1}{m}$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\rho > \frac{e-1}{n}$ . Por tanto, tenemos que  $[\rho, +\infty[ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty[$ , por lo que  $f_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$ . Por tanto, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(\rho) \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{f_n(p)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

**Ejercicio 1.1.2.** Probar que la sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ , donde  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de  $x$ :

- Si  $|x| < 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$1 \leq 1 + x^{2n} \leq 1 + 1 = 2 \implies 1 \leq g_n(x) \leq \sqrt[n]{2}$$

Como  $\{\sqrt[n]{2}\} \rightarrow 1$ , por el Lema del Sándwich tenemos que  $\{g_n(x)\} \rightarrow 1$ .

- Si  $|x| = 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

Por tanto,  $\{g_n(x)\} \rightarrow 1$ .



- Si  $|x| > 1$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}} + 1$$

Como  $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n(x)\} \rightarrow x^2$ .

Por tanto, tenemos que  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \max\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Para la convergencia uniforme, en primer lugar tenemos en cuenta que:

$$\sqrt[n]{1+x^{2n}} \geq \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2, \sqrt[n]{1} = 1 \implies \sqrt[n]{1+x^{2n}} \geq \max\{1, x^2\} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, buscamos acotar  $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x)$ . Para ello, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , usaremos la función

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto t^{1/n} = \sqrt[n]{t} \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en todo su dominio, y su derivada es:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot t^{n-1/n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Por el Teorema del valor medio, tenemos que para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ , con  $t_1 < t_2$ , existe un  $c \in ]t_1, t_2[$  tal que:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(c) \cdot (t_2 - t_1)$$

Diferenciamos ahora si  $|x| \leq 1$  o  $|x| > 1$ :

- Si  $|x| \leq 1$ , aplicamos el Teorema del valor medio a la función  $\varphi_n$  en el intervalo  $[1, 1+x^{2n}]$ , obteniendo que existe un  $c \in ]1, 1+x^{2n}[$  tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(1) = \varphi'_n(c) \cdot (1+x^{2n} - 1) = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}}$$

Como  $|x| \leq 1$ , tenemos que  $|x^{2n}| \leq 1$ ; y como  $c > 1$  y  $\frac{n-1}{n} > 1$ , tenemos que  $c^{n-1/n} > 1$ , por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{x^{2n}}{n \cdot c^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \quad \forall x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}$$

- Si  $|x| > 1$ , aplicamos el Teorema del valor medio a la función  $\varphi_n$  en el intervalo  $[x^{2n}, 1+x^{2n}]$ , obteniendo que existe un  $d \in ]x^{2n}, 1+x^{2n}[$  tal que:

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1+x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \varphi'_n(d) \cdot (1+x^{2n} - x^{2n}) = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}}$$

Como  $|x| > 1$ , tenemos que  $|x^{2n}| > 1$ , por tanto,  $d > 1$ . Como también se tiene que  $\frac{n-1}{n} > 1$ , tenemos que  $d^{n-1/n} > 1$ , por lo que:

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n \cdot d^{n-1/n}} < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados se tiene que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.1.3.** Sea  $\{h_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$h_n(x, y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{h_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ , pero no converge uniformemente en  $\mathbb{R}^2$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto,  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}^2$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$ , como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\max\{|x|, |y|\} < M$ . De esta forma, para todo  $(x, y) \in A$ , tenemos que:

$$|h_n(x, y)| = \left| \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \right| \leq \frac{M^2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $A$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}^2$ . Tomemos  $x_n = y_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^2$  de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\{h(x_n, y_n)\} \rightarrow \frac{1}{3} \neq 0$ , tenemos que  $\{h_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 1.1.4.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$  si y solo si  $C$  está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$ , distinguimos en función de si  $C$  está acotado o no:

- Si  $C$  está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| < M$  para todo  $x \in C$ . De esta forma, para todo  $x \in C$ , tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\left\{ \frac{M}{n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $C$ .

- Si  $C$  no está acotado, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $x_n \in C$  tal que  $|x_n| > n$ . Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:

$$|f_n(x_n)| = \left| \frac{x_n}{n} \right| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que  $\{f_n(x_n)\}$  no puede converger a 0, por lo que se tiene que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 1.1.5.** Sea  $\{g_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , probar que la sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $[\delta, +\infty[$ , pero no converge uniformemente en  $[0, \delta]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para  $x = 0$ , tenemos que  $g_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ . Para  $x > 0$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} = 0$$

Por tanto,  $\{g_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:

- Si  $n < \frac{1}{\delta^2}$   $\left( \delta < \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , entonces  $x_n = \delta \in [0, \delta]$ .
- Si  $n \geq \frac{1}{\delta^2}$   $\left( \delta \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , entonces  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \delta]$ . Veamos lo siguiente:

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1 + n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{g_n(x_n) - g(x_n)\} = \{g_n(x_n)\} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\{g_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \delta]$ .

Para el caso de la semirrecta  $[\delta, +\infty[$ , estudiamos en primer lugar la monotonía de la función  $g_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ , estudiamos su derivada:

$$g'_n(x) = \frac{4nx(1 + n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1 + n^2x^4)^2} = \frac{-4n^3x^5 + 4nx}{(1 + n^2x^4)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $g_n$  son:

$$g'_n(x) = 0 \iff -4n^3x^5 + 4nx = 0 \iff 4xn(-n^2x^4 + 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ , entonces  $g'_n(x) > 0$ , por lo que  $g_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$ , entonces  $g'_n(x) < 0$ , por lo que  $g_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta > \frac{1}{\sqrt{m}}$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\delta > \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Por tanto, tenemos que  $[\delta, +\infty[ \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$ , por lo que  $g_n$  es decreciente en  $[\delta, +\infty[$ . De esta forma, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(\delta) \quad \forall x \in [\delta, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{g_n(\delta)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{g_n\}$  converge uniformemente en  $[\delta, +\infty[$ .

**Ejercicio 1.1.6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $h_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como:

$$h_n(x) = n \cos^n x \sin x \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Fijado un  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , probar que la sucesión  $\{h_n\}$  converge uniformemente en  $[\rho, \pi/2]$ , pero no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son positivos. Considerando fijo  $x \in ]0, \pi/2[$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos^{-n} x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n} = 0$$

donde he usado que  $|\cos x| < 1$  para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ . Por tanto, tenemos que:

$$0 \leq n \cos^n x \sin x \leq n \cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Por el Lema del Sándwich, tenemos que  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $]0, \pi/2[$ .

Sumándole que, en  $x = 0, \pi/2$  se tiene que  $h_n(x) = 0$ , se tiene que  $\{h_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $[0, \pi/2]$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente forma:

- Si  $n < 1/\rho$  ( $\rho < 1/n$ ), entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$ .
- Si  $n \geq 1/\rho$  ( $\rho \geq 1/n$ ), entonces  $x_n = 1/n \in [0, \rho]$ .

De esta forma, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $[0, \rho]$ . Veamos lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \left( \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos^n \left( \frac{1}{n} \right) \sin \left( \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{(*)}{=} e^0 \cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite en (\*), hemos tomado en primer lugar el logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left( \frac{1}{n} \right)}{\cos \left( \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\tan \left( \frac{1}{n} \right) = 0$$

Por tanto, como se tiene que  $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\{h_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, \rho]$ .

Para el caso de  $[\rho, \pi/2]$ , busquemos una acotación.

### Opción 1: Estudiar su monotonía.

Estudiamos en primer lugar la monotonía de la función  $h_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para ello, como  $h_n \in C^\infty ]0, \pi/2[$ , estudiamos su derivada:

$$h'_n(x) = n \left( -n \cos^{n-1} x \sin^2 x + \cos^{n+1} x \right) = n \cos^{n-1} x \left( -n \sin^2 x + \cos^2 x \right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de  $h_n$  son:

$$h'_n(x) = 0 \iff \cos^2 x = n \sin^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si  $x \in \left[ 0, \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]$ , entonces  $h'_n(x) > 0$ , por lo que  $h_n$  es creciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $x \in \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \pi/2 \right]$ , entonces  $h'_n(x) < 0$ , por lo que  $h_n$  es decreciente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado  $\rho \in ]0, \pi/2[$ , tomamos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho > \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \right)$ , lo cual es posible ya que  $\left\{ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \rightarrow 0$ . De esta forma, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , tenemos también que  $\rho > \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ . Por tanto, tenemos que  $[\rho, \pi/2] \subset \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \pi/2 \right]$ , por lo que  $h_n$  es decreciente en  $[\rho, \pi/2]$ . Por tanto, para  $n \geq m$ , tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leq h_n(\rho) \quad \forall x \in [\rho, \pi/2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que  $\{h_n(\rho)\} \rightarrow 0$ , por lo que se deduce que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, \pi/2]$ .

**Opción 2:** Acotación directa.

Tenemos que:

$$0 \leq |h_n(x)| \leq n \cos^n x \leq n \cos^n \rho$$

donde he empleado que, como el coseno en  $[0, \pi/2]$  es decreciente,  $\cos x \leq \cos \rho$  para  $x > \rho$ ; y por ser la potencia de índice  $n$  en  $\mathbb{R}_0^+$  creciente, se tiene que  $\cos^n x \leq \cos^n \rho$ .

Veamos que  $\{n \cos^n \rho\} = \left\{ \frac{n}{\frac{1}{\cos^n \rho}} \right\} \rightarrow 0$ . Tenemos que:

$$\left\{ \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{\cos^{n+1} \rho} - \frac{1}{\cos^n \rho}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\frac{1 - \cos \rho}{\cos^{n+1} \rho}} \right\} = \left\{ \frac{\cos^{n+1} \rho}{1 - \cos \rho} \right\} \rightarrow 0$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos lo pedido.

Por tanto, tenemos que  $\{h_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, \pi/2]$ .

**Ejercicio 1.1.7.** Sea  $\{\varphi_n\}$  la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1 + n|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ , pero no converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + n|x|} = 0$$

Por tanto,  $\{\varphi_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}$  acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| < M$  para todo  $x \in C$ . De esta forma, para todo  $x \in C \setminus \{0\}$ , tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{x^2}{1 + n|x|} \right| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, en el caso de que se tenga que  $0 \in C$ , se tiene que  $|\varphi_n(0)| = 0 \leq \frac{M}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En cualquier caso, como se tiene que  $\left\{ \frac{M}{n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $C$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}$ . Tomamos  $x_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}$  de forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + n^2} = 1$$

Como  $\{\varphi_n(n)\} \rightarrow 1 \neq 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.1.8.** Se considera la sucesión de funciones  $\{\varphi_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados  $r, \rho \in \mathbb{R}$ , con  $0 < r < 1 < \rho$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{\varphi_n\}$  en los intervalos  $[0, r]$ ,  $[r, \rho]$  y  $[\rho, +\infty[$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de  $x$ :

- Si  $|x| < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{0} + 1} = 0$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función nula en  $[0, 1[$ .

- Si  $|x| > 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + 1} = 1$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función constante 1 en  $]1, +\infty[$ .

- Si  $x = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

Tenemos que  $\varphi_n$  converge puntualmente a la función constante  $1/2$  en  $\{1\}$ .

Por tanto, de forma directa deducimos que  $\{\varphi_n\}$  no converge uniformemente en  $[r, \rho]$ , ya que a pesar de ser continua para todo  $n \in \mathbb{N}$  (es racional), su función límite no lo es, por lo que no se preserva la continuidad.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $[0, r]$ . Tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \left| \frac{r^n}{1} \right| = r^n \quad \forall x \in [0, r], \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $0 \leq x \leq r < 1$ , y por tanto  $x^n < r^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, como  $\{r^n\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[0, r]$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[\rho, +\infty[$ . Tenemos que:

$$|\varphi_n(x) - 1| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{1+x^n} \right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{\rho^n} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $x \geq \rho > 1$ , y por tanto  $x^n \geq \rho^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, como  $\left\{ \frac{1}{\rho^n} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente a 1 en  $[\rho, +\infty[$ .

**Ejercicio 1.1.9.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = x - x^n \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in [0, 1[$ , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x - x^n = x$$

Fijado  $x = 1$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la continuidad de  $f$  en  $[0, 1]$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$$

Por tanto,  $f$  no es continua en 1. No obstante,  $f_n$  sí es continua en 1 para todo  $n \in \mathbb{N}$  (es un polinomio). Por tanto, se tiene que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 1.1.10.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado un  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{f_n\}$  en  $\mathbb{R}_0^+$  y en  $[0, \rho]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Además, tenemos que  $f_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ . Consideramos la sucesión  $x_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}_0^+$  de forma que:

$$f_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\{f_n(n)\} \rightarrow 1/2 \neq 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[0, \rho]$ . Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{x+n} \right| \leq \frac{\rho}{n} \quad \forall x \in [0, \rho], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $0 \leq x \leq \rho$ . Entonces, como  $\{\frac{\rho}{n}\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[0, \rho]$ .



**Ejercicio 1.1.11.** Se considera la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  de  $\mathbb{R}_0^+$  en  $\mathbb{R}$  definida como:

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$$

Fijado  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia uniforme de  $\{f_n\}$  en  $[\rho, \infty[$  y en  $[0, \rho]$ .

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} = 0$$

Por tanto,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Para estudiar la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ , consideramos la sucesión dada por:

- Si  $n < 1/\rho$  ( $\rho < 1/n$ ), entonces  $x_n = \rho \in [0, \rho]$ .
- Si  $n \geq 1/\rho$  ( $\rho \geq 1/n$ ), entonces  $x_n = 1/n \in [0, \rho]$ .

Por tanto, tenemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}_0^+$ . Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\text{sen}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\text{sen } 1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como se tiene que  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \rightarrow \frac{\text{sen } 1}{2} \neq 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiemos por último la convergencia uniforme en  $[\rho, +\infty[$ . Tenemos que:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + n\rho} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde he empleado que  $x \geq \rho$ . Entonces, como sabemos que  $\left\{ \frac{1}{1+n\rho} \right\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 en  $[\rho, +\infty[$ .

## 1.2. Series de funciones

**Ejercicio 1.2.1.** Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ , siendo:

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Buscaremos aplicar el Test de Weierstrass. Para ello, hemos de acotar  $f_n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar, estudiaremos su monotonía. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f_n$  es derivable en  $\mathbb{R}$  con:

$$f'_n(x) = \frac{n(1+nx^2) - xn \cdot 2xn}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{n(1+nx^2) - 2x^2n^2}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{(1+nx^2) - 2x^2n}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

Tenemos por tanto que hay dos candidatos a extremos relativos,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Estudiaremos la monotonía en cada uno de los intervalos:

- Si  $x \in \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  $f'_n(x) \leq 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente.
- Si  $x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :  $f'_n(x) \geq 0$ , por lo que  $f_n$  es creciente.
- Si  $x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$ :  $f'_n(x) \leq 0$ , por lo que  $f_n$  es decreciente.

Para acotar, tenemos en cuenta que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \quad y \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

Sabiendo eso, acotamos en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta la monotonía:

- Si  $x \in \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :
 
$$0 \geq f_n(x) \geq f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si  $x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ :
 
$$-\frac{1}{2n\sqrt{n}} = f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$
- Si  $x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$ :
 
$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

En cualquier caso, uniendo los tres resultados, tenemos que:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el criterio límite de comparación, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}}$  es convergente por serlo la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ , ( $3/2 > 1$ ). Por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.2.2.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. Para  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\rho > 1$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

Fijado  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $g_n$  es derivable en  $[\rho, +\infty[$  con:

$$g'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^{2x}} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Por tanto, como la primera derivada de  $g_n$  no se anula, tenemos que es estrictamente monótona. Además, como  $n \geq 1$ , tenemos que  $g'_n(x) \leq 0$  para todo  $x \in [\rho, +\infty[$ , por lo que  $g_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$ . Por tanto,

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(\rho) = \frac{1}{n^\rho} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Como la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\rho}$  es convergente ( $\rho > 1$ ), por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

2. La sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente a la función nula en  $[1, +\infty[$ .

De nuevo, usando que  $g_n$  es decreciente en  $[1, +\infty[$ , tenemos que:

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(1) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Como  $\{1/n\} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\{g_n\}$  converge uniformemente a la función nula en  $[1, +\infty[$ .

3. La serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  no converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ , y por el Criterio de Cauchy tenemos que esto equivale a que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  sea uniformemente de

Cauchy en  $]1, +\infty[$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q g_n(x) \right| = \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in ]1, +\infty[$$

Por tanto, tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que sabemos que la serie armónica no converge. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  no converge uniformemente en  $]1, +\infty[$ .

**Ejercicio 1.2.3.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{ \frac{n!}{(n+1)^n} \right\}$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\} &= \left\{ \frac{c_{n+1}}{c_n} \right\} = \left\{ \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} \right\} = \left\{ \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \right\} = \\ &= \left\{ \left[ \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right\} = \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right\} \rightarrow \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{e} \implies R = e$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-e, e[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-e, e]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = \pm e$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = \pm e$ :

Equivale a ver si la serie  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$  es convergente, con  $x = \pm e$  fijo. Tenemos que:

$$\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x = x \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1}$$

donde hemos usado los cálculos ya realizados. Además, sabemos que el segundo término converge a  $1/e$  y es estrictamente decreciente. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n} \right| = \left| x \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \right| > \left| x \cdot \frac{1}{e} \right| = \left| \frac{x}{e} \right| = 1$$

Por tanto, tenemos que la sucesión  $\{|c_nx^n|\}$  es estrictamente creciente, por lo que no converge a 0. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  no converge en  $x = \pm e$ , luego su campo de convergencia es  $J$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Supongamos que la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q c_nx^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow e$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow e} \sum_{n=p+1}^q c_nx^n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con  $x$  tendiendo a  $e$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  diverge por divergir su término general. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 0} c_nx^n$  no converge uniformemente en  $J$ .

**Ejercicio 1.2.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n} \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1[$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset ] - 1, 1[$ ; pero no converge uniformemente en  $] - 1, 1[$ .

En  $\mathbb{R}$ , los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Por tanto, se tiene que  $K = [a, b] \subseteq [-\rho, \rho] \subsetneq ] - 1, 1[$ , con  $a, b, \rho \in \mathbb{R}$ . Tenemos que:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1 - x^n} \right| = \frac{|x^n|}{|1 - x^n|} \leq \frac{|x^n|}{1 - |x^n|} = \frac{|x|^n}{1 - |x|^n} \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho^n} \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver si la serie de término general  $a_n = \frac{\rho^n}{1 - \rho^n}$  es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general  $b_n = \rho^n$ , que sabemos que es convergente por ser  $|\rho| = \rho < 1$ .

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - \rho^n} \right\} \rightarrow 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ es convergente}$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ .

Estudiamos ahora la convergencia absoluta en  $] - 1, 1[$ . Fijando  $x \in ] - 1, 1[$ , para ver si la serie  $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$  es convergente, usamos el criterio límite de comparación con la serie de término general  $a_n = |x|^n$ , que sabemos que es convergente por ser  $|x| < 1$ .

$$\left\{ \frac{|f_n(x)|}{|x|^n} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - |x|^n} \right\} \rightarrow 1 \implies \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolutamente en  $] - 1, 1[$ .

Tan solo falta por ver que no converge uniformemente en  $] - 1, 1[$ . Por reducción al absurdo, supongamos que sí. Entonces, por el Criterio de Cauchy tenemos que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $] - 1, 1[$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{1 - x^n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in ] - 1, 1[$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{1 - x^n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

No obstante, esto es un absurdo, ya que al tomar límite con  $x$  tendiendo a 1, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n}$  diverge por divergir su término general. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  no converge uniformemente en  $] - 1, 1[$ .

**Ejercicio 1.2.5.** Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \arctg \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y que, si  $\alpha > 1$ , dicha serie converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Supongamos en primer lugar que  $\alpha > 1$ . Entonces, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \arctg \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$$

donde he aplicado que la arctan está acotada por  $\frac{\pi}{2}$ . Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  es convergente ( $\alpha > 1$ ), tenemos que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{2}$  es convergente; y por el Test de Weierstrass,

la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Sin suponer ahora que  $\alpha > 1$ , veamos que la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ . Fijado  $C \subset \mathbb{R}$  acotado, existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| \leq M$  para todo  $x \in C$ . Notemos que vamos a necesitar acotar por  $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ , por lo que busquemos acotar  $\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$  por  $\frac{M}{n}$ . Para ello, veremos que  $\arctan x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

**Opción 1:** Usando la definición mediante integrales de la arcotangente.

En efecto, si  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , tenemos que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

**Opción 2:** Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arctan x - x \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en  $\mathbb{R}_0^+$  con:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto,  $f$  es decreciente en  $\mathbb{R}_0^+$ , por lo que se tiene que  $f(x) \leq f(0) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Como  $f(x) = \arctan x - x \leq 0$ , tenemos que  $\arctan x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

En cualquier caso, tenemos que:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \arctan \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{M}{n} = \frac{M}{n^{\alpha+1}} \quad \forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^{\alpha+1}}$  es convergente ( $\alpha+1 > 1$ ), por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge absoluta y uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 1.2.6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \log \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ .

Para probar lo pedido, en primer lugar, demostraremos que  $\log x \leq x - 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ . Para ello, hay dos opciones:

**Opción 1:** Usando la definición mediante integrales del logaritmo.

En efecto, si  $x \geq 1$ , tenemos que:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x 1 dt = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{t} \leq 1$  para todo  $t \geq 1$ .

Si  $x \in ]0, 1[$ , tenemos que:

$$\log x = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt \leq - \int_x^1 1 dt = -(1 - x) = x - 1 \quad \forall x \in ]0, 1[$$

donde hemos usado que  $\frac{1}{t} \geq 1$  para todo  $t \in ]0, 1[$ .

**Opción 2:** Calcular la imagen de una función auxiliar.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log x - x + 1 \end{aligned}$$

Tenemos que es derivable en  $\mathbb{R}^+$  con:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \iff x = 1$$

Por tanto,  $f$  tiene un único punto crítico en  $x = 1$ . Además,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , por lo que  $f$  tiene un máximo en  $x = 1$ . Por tanto,  $f(1) = 0$  y  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , por lo que  $\log x - x + 1 \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .

En cualquier caso, tenemos que:

$$|h_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \log \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \left( 1 + \frac{|x|}{n} - 1 \right) = \frac{|x|}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde además hemos usado que  $|\sin(nx)| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Fijado  $C \subset \mathbb{R}$  acotado, existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|x| \leq M$  para todo  $x \in C$ . Tenemos por tanto que:

$$|h_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} \quad \forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como  $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$  es convergente, por el Test de Weierstrass, la serie  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en  $C$ .

**Ejercicio 1.2.7.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de funciones:



$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}.$$

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$ . Tenemos que:

$$\left\{ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\log(n+3)} \cdot \frac{\log(n+2)}{1} \right\} = \left\{ \frac{\log(n+2)}{\log(n+3)} \right\} \rightarrow 1$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \implies R = 1$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-1, 1[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = \pm 1$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = 1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$ . Como  $\log(n+2) \leq n+1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (visto en el ejercicio anterior), tenemos que:

$$\frac{1}{\log(n+2)} \geq \frac{1}{n+1}$$

Usando el contrarrecíproco del Criterio de Comparación, como la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$  no converge, tenemos que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$  no converge.

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  no converge en  $x = 1$ .

■ Convergencia puntual en  $x = -1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ . Por el Criterio de Leibnitz, sabemos que la serie converge si la sucesión  $\left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$  converge a 0 y es decreciente. Como  $\{\log(n+2)\}$  es estrictamente creciente y diverge positivamente, tenemos que  $\left\{ \frac{1}{\log(n+2)} \right\}$  converge a 0 y es decreciente. Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$  converge, y por tanto

la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  converge en  $x = -1$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Suponemos por reducción al absurdo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que

la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{\log(n+2)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{\log(n+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{x^n}{\log(n+2)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para  $x = 1$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\log(n+2)}$  no converge uniformemente en  $J$ .

2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$ .

Estudiamos en primer lugar su campo de convergencia. La sucesión de coeficientes es  $\{c_n\} = \left\{ \frac{n}{2^n} \right\}$ . Tenemos que:

$$\left\{ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\} = \left\{ \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \right\} = \left\{ \frac{n+1}{2n} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, tenemos que el radio de convergencia de la serie es:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \implies R = 2$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es  $J = ]-1, 3[$ . Por tanto, tenemos que la serie converge absolutamente en  $J$  y uniformemente en cada conjunto compacto  $K \subset J$ . También sabemos que la serie no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus \bar{J} = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$ . Falta ahora por estudiar la convergencia puntual en  $x = -1$  y  $x = 3$  y la convergencia uniforme en  $J$ .

■ Convergencia puntual en  $x = -1$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (-1)^n 2^n = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n$$

Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n$  no converge, por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge en  $x = -1$ .

■ Convergencia puntual en  $x = 3$ :

Se trata de estudiar la convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n \geq 1} n$$

Por el criterio básico de convergencia, como el término general no converge a 0, la serie  $\sum_{n \geq 1} n$  no converge, por lo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge en  $x = 3$ .

■ Convergencia uniforme en  $J$ :

Suponemos por reducción al absurdo que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  converge uniformemente en  $J$ . Entonces, por el Criterio de Cauchy, tenemos que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $J$ , es decir, que fijado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m \leq p < q$ , se tiene que:

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} (x-1)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in J$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 3$ , tenemos que:

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} 2^n = \lim_{x \rightarrow 3} \sum_{n=p+1}^q \frac{n}{2^n} (x-1)^n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} 2^n$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual es absurdo, ya que se ha visto que no converge para  $x = 3$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$  no converge uniformemente en  $J$ .