Algoritmo de Davis-Putnam

Arturo Olivares Martos

13 de marzo de 2025

Resumen

En el presente documento, resolveremos los ejercicios propuestos relativos al Algoritmo de Davis-Putnam.

Ejercicio 1. Dado el conjunto de proposiciones $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, son equivalentes:

1. $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.
2. $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente.

Demostración. Demostraremos el resultado mediante una doble implicación.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

puesto que uno de los factores ($I(\psi_i)$) es 0. Por tanto, $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, tenemos que:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

Por tanto, por ser $\mathbb{Z}_2$ un cuerpo (y en particular un dominio de integridad), tenemos que $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.

$\square$

Ejercicio 2. Comprobar que, al aplicar cada una de las reglas del Algoritmo de Davis-Putnam, el conjunto resultante es inconsistente si y sólo si el de partida lo es (salvo en el caso de la quinta regla, en el que se desdobla el conjunto).

Demostración. Demostraremos cada una de las reglas por separado.

Regla 1. Sea α una tautología y Δ un conjunto de cláusulas. Veamos que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si Δ lo es.

$\square$

Ejercicio 3. Demostrar que:

$$\models (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma)$$

Demostración. Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, eso equivale a demostrar que:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \lor \beta\} \models \gamma$$

Además, sabemos que demostrar esa consecuencia lógica equivale a probar que el siguiente conjunto es inconsistente:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \lor \beta, \neg\gamma\}$$

Para poder aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam, necesitamos transformar las fórmulas en cláusulas. De esta forma:

$$\begin{aligned} \alpha \to \gamma &\equiv \neg\alpha \lor \gamma \\ \beta \to \gamma &\equiv \neg\beta \lor \gamma \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto de cláusulas sobre el cual aplicaremos el Algoritmo de Davis-Putnam (y el cual será inconsistente si y solo si la consecuencia lógica de partida es cierta) es:

$$\Delta = \{\neg\alpha \lor \gamma, \neg\beta \lor \gamma, \alpha \lor \beta, \neg\gamma\}$$

Por el Ejercicio 2, sabemos que Δ es inconsistente si y solo si lo es el conjunto obtenido tras aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam. En la Figura 1 se tiene que dicho conjunto es $\Delta_3 = \{\square\}$. Por tanto:

$$\Delta \text{ es inconsistente} \iff \Delta_3 = \{\square\} \text{ es inconsistente}$$

Por tanto, como Δ_3 es inconsistente, tenemos que Δ también lo es. Por tanto, tenemos probado que:

$$\models (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma)$$

$\square$

Δ=$\{\neg\alpha \vee \gamma; \neg\beta \vee \gamma; \alpha \vee \beta; \neg\gamma\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\gamma\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$

$\downarrow$

Δ'=$\{\neg\alpha \vee \gamma; \neg\beta \vee \gamma; \alpha \vee \beta\}$ $\neq \emptyset$

$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \gamma\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$

$\downarrow$

Δ_1=$\{\neg\alpha; \neg\beta; \alpha \vee \beta\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\alpha\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$

$\downarrow$

Δ_1'=$\{\neg\beta; \alpha \vee \beta\}$ $\neq \emptyset$

$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \alpha\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$

$\downarrow$

Δ_2=$\{\neg\beta; \beta\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\beta\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$

$\downarrow$

Δ_2'=$\{\beta\}$ $\neq \emptyset$

$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \beta\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$

$\downarrow$

Δ_3=$\{\square\}$

Figura 1: Algoritmo de Davis y Putnam del Ejercicio 3.