

Variable Compleja

Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 10 de Mayo de 2021.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w \in \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \frac{1}{z - a_n}$. Dado el conjunto compacto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, probar que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω .

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \sin(\bar{z}) \quad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0, 1) \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

1. [1.5 puntos] Justificar que para cada $z_0 \in D(0, 1)$ se tiene

$$|f(z_0)| \leq \max\{|f(z)| : z \in C(0, 1)^*\}.$$

2. [1.5 puntos] Demostrar que

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \max\{|f(z)| : z \in C(0, 1)^*\}.$$

3. [1.5 puntos] Supongamos que existe $z_0 \in D(0, 1)$ tal que $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, 1)\}$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0, r) \subset D(0, 1)$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $f|_{\overline{D}(z_0, r)} \equiv \lambda$.
4. [1 punto extra] Probar que, de hecho, $f|_{D(0, 1)} \equiv \lambda$.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w \in \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \frac{1}{z - a_n}$. Dado el conjunto compacto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, probar que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω .

Sea $T \subset \Omega$ compacto. Para cada $z \in T$ por ser K compacto y la distancia una función continua, tenemos que se alcanza el siguiente mínimo:

$$d(z, K) = \min\{d(z, u) \mid u \in K\}$$

Por ser dicha distancia continua y T compacto, existe $R \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$R = \min\{d(z, K) \mid z \in T\}$$

Además, como $T \subset \mathbb{C} \setminus K$, se tiene que $R \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, se tiene que:

$$R \leq |z - a_n| \quad \forall z \in T, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\left| \frac{f_n(z)}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2 \cdot |z - a_n|} \leq \frac{1}{n^2 \cdot R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall z \in T, n \in \mathbb{N}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, al multiplicarla por la constante $1/R$, también converge. Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie del enunciado converge absoluta y uniformemente en T .

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω .

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \sin(\bar{z}) \quad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Estudiamos en primer lugar la función f . Para ello, con vistas a aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(f(x + iy)) = \operatorname{Re}(\sin(x - iy)) = \sin(x) \cosh(-y) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(f(x + iy)) = \operatorname{Im}(\sin(x - iy)) = \cos(x) \sinh(-y). \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \cos(x) \cosh(-y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\sin(x) \sinh(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\sin(x) \sinh(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= -\cos(x) \cosh(-y) \end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \cos(x) \cosh(-y) &= -\cos(x) \cosh(-y) \\ \cos(x) &= 0 \\ x &\in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ -\sin(x) \sinh(-y) &= \sin(x) \sinh(-y) \\ x &\in \pi\mathbb{Z} \vee y = 0\end{aligned}$$

Definimos por tanto el conjunto en el que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann como:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$$

Tenemos por tanto que $f \in \mathcal{H}(U)$, y no es derivable en ningún otro punto de \mathbb{C} .

Estudiamos ahora la función g . Fijado $z \in \mathbb{C}$, veamos si es derivable en z .

- Si $z \in U$, entonces g es derivable en z por serlo f y $z(z-1)$, que son funciones holomorfas en \mathbb{C} .
- Si $z \notin U$, distinguimos de nuevo:
 - Si $z \neq 0, 1$, tenemos que:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z(z-1)} \quad \forall z \notin U$$

Si g fuese derivable en z , entonces f también lo sería, pero sabemos que no lo es puesto que $z \notin U$. Por tanto, g no es derivable en z .

- Si $z = 0$, entonces:

$$g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} (z-1)f(z) = -f(0) = -\sin(0) = 0$$

- Si $z = 1$, entonces:

$$g'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g(z)}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} z f(z) = f(1) = \sin(1)$$

Por tanto, g es derivable en $U \cup \{0, 1\}$, mientras que no es derivable en ningún otro punto de \mathbb{C} .

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0, 1) \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

1. **[1.5 puntos]** Justificar que para cada $z_0 \in D(0, 1)$ se tiene

$$|f(z_0)| \leq \max\{|f(z)| : z \in C(0, 1)^*\}.$$

2. **[1.5 puntos]** Demostrar que

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \max\{|f(z)| : z \in C(0, 1)^*\}.$$

3. **[1.5 puntos]** Supongamos que existe $z_0 \in D(0, 1)$ tal que $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, 1)\}$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0, r) \subset D(0, 1)$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $f|_{\overline{D}(z_0, r)} \equiv \lambda$.

4. **[1 punto extra]** Probar que, de hecho, $f|_{D(0, 1)} \equiv \lambda$.