

Modelos de Computación



Los Del DGIIM, losdelldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Introducción a la Computación	5
1.1.1. Cálculo de gramáticas	14

1. Relaciones de Problemas

1.1. Introducción a la Computación

Ejercicio 1.1.1. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X, Y\}$$

$$T = \{a, b\}$$

$$S = S$$

1. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow XYX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

$$Y \rightarrow bbb$$

Sea $L = \{ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

- ⊂) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ubbbv$ con $u, v \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \xRightarrow{*} w$:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX$$

Además, es fácil ver que la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$ nos permite generar cualquier palabra $u \in \{a, b\}^*$. Por tanto, tenemos que $X \xRightarrow{*} u$ y $X \xRightarrow{*} v$; teniendo así que $S \xRightarrow{*} ubbbv$.

- ⊃) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w :

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX \Longrightarrow ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto en el apartado anterior de la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

2. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow aX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

Sea $L = \{au \mid u \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

⊂) Sea $w \in L$. Entonces, $w = au$ con $u \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \xRightarrow{*} w$:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in \mathcal{L}(G)$.

⊃) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w :

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au \mid u \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

3. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XaXaX \\ X &\rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea $L = \{uavawa \mid u, v, w \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

⊂) Sea $z \in L$. Entonces, $z = uavawa$ con $u, v, w \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \xRightarrow{*} z$:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in \mathcal{L}(G)$.

⊃) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de z :

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa \mid u, v, w \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in L$.

4. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \mid XaXaX \mid \varepsilon \\ X &\rightarrow bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea el lenguaje $L = \{b^i ab^j ab^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L^* = \mathcal{L}(G)$.

⊂) Sea $z \in L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$. Sea n el menor número natural tal que $z \in L^n$. Notando por $n_a(z)$ al número de a 's en z , tenemos que $n_a(z) = 2n$. Entonces, $z \in L \cdot \dots \cdot L$ (n veces), por lo que existen $i_1, j_1, k_1, \dots, i_n, j_n, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $z = b^{i_1} ab^{j_1} ab^{k_1} \cdot \dots \cdot b^{i_n} ab^{j_n} ab^{k_n}$. Veamos que $S \xRightarrow{*} z$:

- Para conseguir el número de a 's deseado, empleamos la regla de producción $S \rightarrow SS$ y reemplazamos una de las S por $XaXaX$. Esto lo hacemos n veces.
 - Posteriormente, cada X la sustituiremos tantas veces como sea necesario por bX para conseguir el número de b 's deseado en cada posición, y finalizaremos con $X \rightarrow \varepsilon$.
- ▷) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$, y sea $n_a(z)$ el número de a 's en z . Entonces, como el número de a siempre aumenta de dos en dos, tenemos que $n_a(z) = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos la forma de z :
- Para llegar a z , hemos tenido que emplear la regla de producción $S \rightarrow SS \rightarrow SXaXaX$ n veces. Una vez llegados aquí, para eliminar la S (ya que habremos llegado a $n_a(z)$ a 's), empleamos la regla de producción $S \rightarrow \varepsilon$.
 - Posteriormente, para cada X , tan solo podemos emplear la regla de producción $X \rightarrow bX \mid \varepsilon$ para conseguir el número de b 's deseado en cada posición.

Por tanto, es directo ver que $z \in L^n \subseteq L^*$.

Ejercicio 1.1.2. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$. Determinar en cada caso el lenguaje generado por la gramática.

1. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 V &= \{S, A\} \\
 T &= \{a, b\} \\
 S &= S \\
 P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & abAS \mid a \\ abA & \rightarrow & baab \\ A & \rightarrow & b \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Sea $L = \{ua \mid u \in \{abb, baab\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

- ▷) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ua$ con $u \in \{abb, baab\}^*$. Veamos que $S \xRightarrow{*} w$. Para ello, sabemos que $u \in \{abb, baab\}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{abb, baab\}^i$. Sea n el menor número natural tal que $u \in \{abb, baab\}^n$, es decir, es una concatenación de n subcadenas, cada una de las cuales es o bien abb o bien $baab$. Veamos que S produce ambas subcadenas:

- Para producir abb , tenemos que $S \rightarrow abAS \rightarrow abbS$.
- Para producir $baab$, tenemos que $S \rightarrow abAS \rightarrow baabS$.

Como vemos, en cada caso podemos concatenar la subcadena necesaria, pero siempre nos quedará una S al final. Usamos la regla de producción $S \rightarrow a$ para eliminarla, llegando así a w , por lo que $S \xRightarrow{*} w$ y $w \in \mathcal{L}(G)$.

- ▷) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w , para lo cual hay dos opciones:

- $S \rightarrow a$: En este caso, habremos finalizado la palabra con a , por lo que habremos añadido la subcadena a a la palabra al final.
- $S \rightarrow abAS$: En este caso, también hay dos opciones:
 - $S \rightarrow abAS \rightarrow baabS$: En este caso, habremos concatenado $baab$ con S , por lo que habremos añadido la subcadena $baab$ a la palabra.
 - $S \rightarrow abAS \rightarrow abbS$: En este caso, habremos concatenado abb con S , por lo que habremos añadido la subcadena abb a la palabra.

Por tanto, w es de la forma ua con u una concatenación de abb 's y $baab$'s, es decir, $u \in \{abb, baab\}^*$. Por tanto, $w \in L$.

2. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 V &= \{\langle \text{número} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle\} \\
 T &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 S &= \langle \text{número} \rangle \\
 P &= \left\{ \begin{array}{ll} \langle \text{número} \rangle & \rightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{número} \rangle & \rightarrow \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{dígito} \rangle & \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G)$ es el conjunto de los números naturales, permitiendo tantos ceros a la izquierda como se quiera. Es decir (usando la notación de potencia y concatenación vista para lenguajes):

$$L = \{0^i n \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Demostremoslo mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

⊂) Sea $w \in L$. Entonces, $w = 0^i n$ con $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos que $\langle \text{número} \rangle \xRightarrow{*} w$:

- En primer lugar, aplicamos $|w| - 1$ veces la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \rightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$ y la regla que lleva de $\langle \text{dígito} \rangle$ a uno de los símbolos terminales, consiguiendo así en cada etapa reemplazar la última variable presente en la cadena por un dígito.
- Finalmente, aplicamos la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \rightarrow \langle \text{dígito} \rangle$ para reemplazar la última variable por un dígito, que será el primero del número formado.

Por tanto, $\langle \text{número} \rangle \xRightarrow{*} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

⊃) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Como la única regla que aumenta la longitud es la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \rightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$, tenemos que w tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{número} \rangle &\xRightarrow{*} \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \xRightarrow{|w|-1 \text{ veces}} \\
 &\xRightarrow{*} \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \xRightarrow{|w|-1 \text{ veces}} \dots \langle \text{dígito} \rangle \xRightarrow{*} \\
 &\xRightarrow{*} \langle \text{dígito} \rangle \xRightarrow{|w| \text{ veces}} \dots \langle \text{dígito} \rangle
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata una sucesión de $|w|$ dígitos, lo que nos lleva a que $w \in L$.

3. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned} V &= \{A, S\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aS \mid aA \\ A & \rightarrow & bA \mid b \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Sea $L = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

⊂) Sea $w \in L$. Entonces, $w = a^n b^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que $S \xRightarrow{*} w$:

- En primer lugar, aplicamos $n-1$ veces la regla de producción $S \rightarrow aS$ para obtener $a^{n-1}S$,

$$S \xRightarrow{*} a^{n-1}S$$

- Para cambiar a la etapa de añadir b 's, aplicamos la regla de producción $S \rightarrow aA$, obteniendo así $a^n A$,
- Después, aplicamos $m-1$ veces la regla de producción $A \rightarrow bA$ para obtener $a^n b^{m-1} A$.
- Para finalizar, aplicamos la regla de producción $A \rightarrow b$ para obtener $a^n b^m$.

Por tanto, $S \xRightarrow{*} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

⊃) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Vemos que en la palabra siempre va a haber tan solo una variable (ya sea S o A). Se empezará con la S , y en cierto momento se cambiará a la A , sin poder entonces volver a la S .

- Cuando se está en la etapa en la que hay S , tan solo se pueden añadir a 's, o bien cambiar a la A .
- Cuando se está en la etapa en la que hay A , tan solo se pueden añadir b 's.

Por tanto, tenemos que w estará formada por una sucesión de a 's seguida de una sucesión de b 's, lo que nos lleva a que $w \in L$.

Ejercicio 1.1.3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras en las que el número de b no es tres.

Tenemos varias opciones:

- Que no tenga b 's.
- Que tenga una b .
- Que tenga dos b 's.
- Que tenga 4 o más b 's.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A, X\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A \mid AbA \mid AbAbA \mid XbXbXbXbX \\ A \rightarrow aA \mid \varepsilon \\ X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Esta gramática no obstante es de tipo 2. Busquemos otra que sea de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned} V' &= \{S, X, Y, Z, W\} \\ T' &= \{a, b\} \\ S' &= S \\ P' &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \varepsilon \mid aS \mid bX \\ X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bY \\ Y \rightarrow \varepsilon \mid aY \mid bZ \\ Z \rightarrow aZ \mid bW \\ W \rightarrow \varepsilon \mid aW \mid bW \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Esta sí es de tipo 3, y genera el lenguaje deseado.

2. Palabras que tienen 2 ó 3 b .

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A, B\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AbAbABA \\ A \rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B \rightarrow b \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Esta gramática no obstante es de tipo 2. Busquemos otra que sea de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned} V' &= \{S, X, Y, Z, W, V, T\} \\ T' &= \{a, b\} \\ S' &= S \\ P' &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid X \\ X \rightarrow bY \\ Y \rightarrow aY \mid Z \\ Z \rightarrow bW \\ W \rightarrow aW \mid \varepsilon \mid V \\ V \rightarrow bT \\ T \rightarrow aT \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Esta gramática ya es de tipo 3, pero contiene un número elevado de variables. Veamos si podemos reducirlo: Sea la gramática $G'' = (V'', T'', P'', S'')$ dada por:

$$\begin{aligned} V'' &= \{S, X, Y, Z\} \\ T'' &= \{a, b\} \\ S'' &= S \\ P'' &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aS \mid bX \\ X & \rightarrow & aX \mid bY \\ Y & \rightarrow & aY \mid \varepsilon \mid bZ \\ Z & \rightarrow & aZ \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Notemos que, en esta gramática de tipo 3, ya hemos conseguido el menor número de variables posibles, que representan las 4 etapas. Como la última es opcional, está la regla $Y \rightarrow \varepsilon$, para así no agregar la tercera b .

Ejercicio 1.1.4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras que no contienen la subcadena ab .

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \mid bS \mid \varepsilon \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Notemos además que esta gramática es de tipo 3, y se tiene que:

$$\mathcal{L}(G) = \{b^i a^j \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

2. Palabras que no contienen la subcadena baa .

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, B\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aS \mid bB \mid \varepsilon \\ B & \rightarrow & bB \mid abB \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Notemos además que esta gramática es de tipo 3.

Ejercicio 1.1.5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

Ejercicio 1.1.6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \{ S \rightarrow aS \mid baS \mid \varepsilon \} \end{aligned}$$

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid bB \\ B \rightarrow bF \mid aS \\ F \rightarrow aF \mid bF \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Notemos que, en este caso, tenemos tres estados:

- S : No hemos encontrado dos b 's consecutivas.
- B : Hemos encontrado una b , y puede ser que nos encontremos la segunda b .
- F : Hemos encontrado dos b 's consecutivas; ya hay libertad.

Ejercicio 1.1.7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a .
2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b .

Ejercicio 1.1.8. Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que:

1. Genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.
2. Genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

Ejercicio 1.1.9. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow SS \\ S \rightarrow XXX \\ X \rightarrow aX \mid Xa \mid b \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Determinar si el lenguaje generado por la gramática es regular. Justificar la respuesta.

Sea la siguiente gramática regular $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned} V' &= \{S, X\} \\ T' &= \{a, b\} \\ S' &= S \\ P' &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid bX \\ X \rightarrow aX \mid bY \\ Y \rightarrow aY \mid bZ \\ Z \rightarrow aZ \mid bW \mid \varepsilon \\ W \rightarrow aW \mid bU \\ U \rightarrow aU \mid bV \\ V \rightarrow aV \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y como G' es una gramática regular, tenemos que $\mathcal{L}(G)$ es regular.

Ejercicio 1.1.10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A , ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

Ejercicio 1.1.11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A , caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

Ejercicio 1.1.12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \rightarrow B^*$, $g : A^* \rightarrow B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Ejercicio 1.1.13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i , para todo $i \geq 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

1. ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2 ? Justifica la respuesta.
2. Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L .

Observación. Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que, para todo alfabeto A , el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

1.1.1. Cálculo de gramáticas

Ejercicio 1.1.15 (Complejidad: Sencilla). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{u \in \{0, 1\}^* \mid |u| \leq 4\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X\} \\ T &= \{0, 1\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow XXXX \\ X \rightarrow 0 \mid 1 \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

No obstante, esta gramática es de tipo 2. Busquemos una de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned} V' &= \{S, X, Y, Z\} \\ T' &= \{0, 1\} \\ S' &= S \\ P' &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0X \mid 1X \mid \varepsilon \\ X \rightarrow 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow 0Z \mid 1Z \mid \varepsilon \\ Z \rightarrow 0 \mid 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y es igual al lenguaje deseado. Tenemos por tanto que es un lenguaje regular.

2. Palabras con 0's y 1's que no contengan dos 1's consecutivos y que empiecen por un 1 y que terminen por dos 0's.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y\} \\ T &= \{0, 1\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1X00 \\ X \rightarrow 0Y \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow 0Y \mid 1X \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Notemos que esta gramática es de tipo 2 debido a la primera regla de producción. Busquemos una de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada

por:

$$\begin{aligned} V' &= \{S, X, Y\} \\ T' &= \{0, 1\} \\ S' &= S \\ P' &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 1X \\ X & \rightarrow & 0Y \mid F \\ Y & \rightarrow & 0Y \mid 1X \mid F \\ F & \rightarrow & 00 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y es igual al lenguaje deseado. Tenemos por tanto que es un lenguaje regular. En esta última gramática, tenemos los siguientes estados:

- S : Es el estado inicial, empezamos con un 1.
- X : Acabamos de escribir un 1, por lo que ahora tan solo podemos escribir 0's.
- Y : Acabamos de escribir un 0, por lo que ahora podemos escribir tanto 0's como 1's.
- F : Ya hemos terminado, y escribimos los dos 0's finales por la restricción impuesta.

3. El conjunto vacío.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ T &= \emptyset \\ S &= S \\ P &= \{ S \rightarrow \varepsilon \} \end{aligned}$$

4. El lenguaje formado por los números naturales.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{\langle \text{número no iniciado} \rangle, \langle \text{dígito no cero} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle, \langle \text{número iniciado} \rangle\}$$

$$T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$S = \langle \text{número no iniciado} \rangle$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} \langle \text{número no iniciado} \rangle & \rightarrow & \langle \text{dígito no cero} \rangle \mid \langle \text{dígito no cero} \rangle \langle \text{número iniciado} \rangle \\ \langle \text{número iniciado} \rangle & \rightarrow & \langle \text{dígito} \rangle \mid \langle \text{dígito} \rangle \langle \text{número iniciado} \rangle \\ \langle \text{dígito no cero} \rangle & \rightarrow & 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\ \langle \text{dígito} \rangle & \rightarrow & 0 \mid \langle \text{dígito no cero} \rangle \end{array} \right\}$$

Notemos que esta gramática es similar a la descrita en el Ejercicio 1.1.2.2, pero adaptada para que los números naturales no puedan empezar por 0.

5. $\{a^n \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^n \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & X \mid Y \mid \varepsilon \\ X & \rightarrow & aX \mid \varepsilon \\ Y & \rightarrow & aYb \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

6. $\{a^n b^{2n} c^m \in \{a, b, c\}^* \mid n, m > 0\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y, Z\} \\ T &= \{a, b, c\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aXbbcY \\ X & \rightarrow & aXbb \mid \varepsilon \\ Y & \rightarrow & cY \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

7. $\{a^n b^m a^n \in \{a, b\}^* \mid m, n \geq 0\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSa \mid bX \mid \varepsilon \\ X & \rightarrow & bX \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

8. Palabras con 0's y 1's que contengan la subcadena 00 y 11.

9. Palíndromos formados con las letras a y b .

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \{ S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon \} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.16 (Complejidad: Media). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{uv \in \{0, 1\}^* \mid u^{-1} \text{ es un prefijo de } v\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X, Y\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XY \\ X & \rightarrow & 0X0 \mid 1X1 \mid \varepsilon \\ Y & \rightarrow & 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

Notemos que X deriva en el palíndromo, uu^{-1} , y Y en el resto de la palabra de v .

2. $\{ucv \in \{a, b, c\}^* \mid |u| = |v|\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$

$$T = \{a, b, c\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XSX \mid c \\ X & \rightarrow & a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

3. $\{u1^n \in \{0, 1\}^* \mid |u| = n\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XS1 \mid \varepsilon \\ X & \rightarrow & 0 \mid 1 \end{array} \right\}$$

4. $\{a^n b^{n+1} \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\}$ (observar transparencias de teoría)

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S\}$$

$$T = \{a, b\}$$

$$S = S$$

$$P = \{ S \rightarrow aSb \mid b \}$$

Ejercicio 1.1.17 (Complejidad: Difícil). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m c^k \in \{a, b, c\}^* \mid k = m + n\}$

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$

$$T = \{a, b, c\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSc \mid X \\ X & \rightarrow & bXc \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

2. Palabras que son múltiplos de 7 en binario.

Ejercicio 1.1.18 (Complejidad: Extrema (no son libres de contexto)). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
2. $\{a^{n^2} \in \{a\}^* \mid n \geq 0\}$
3. $\{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es primo}\}$
4. $\{a^n b^m \in \{a,b\}^* \mid n \leq m^2\}$