Foto: José Juan Castro

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M \\ & z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{array}$$

Para probar que f es un isomorfismo, se deben probar las siguientes propiedades:

- f es inyectiva.

  Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

  Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, $f(a + bi) = A$ y f es sobreyectiva.

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{1 + i}$.

   Tenemos que:

   $$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1+i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1-i}{1+1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$
   $$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$
   $$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 1 + 3 + 3}{4}} = \sqrt{2}.$$

2. $z_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{3}-1}$.

   Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3}-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1+3}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z_2 &= -\frac{1}{4},\\
\operatorname{Im} z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4},\\
|z_2| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \qquad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U. Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < 1 &\Longleftrightarrow |z-a| < |1-\overline{a}z| \Longleftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \Longleftrightarrow z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < 1 - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a}z\overline{z} \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Longleftrightarrow |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow |z|^2 < 1.
\end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1-|a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U. A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \to U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad:

  Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1} = \frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2} &\Longrightarrow (z_1-a)(1-\overline{a}z_2) = (z_2-a)(1-\overline{a}z_1) \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow z_1 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_1z_2} + |a|^2z_2 = z_2 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_2z_1} + |a|^2z_1 \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \Longrightarrow (1-|a|^2)z_1 = (1-|a|^2)z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.
\end{aligned}$$

- Sobreyectividad:

Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

$$\frac{z-a}{1-\overline{a}z} = w \Longrightarrow z - a = w(1-\overline{a}z) \Longrightarrow z - a = w - w\overline{a}z \Longrightarrow z + w\overline{a}z = a + w \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z(1+w\overline{a}) = a + w \Longrightarrow z = \frac{a+w}{1+w\overline{a}}.$$

Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

$$|z| = \left|\frac{a+w}{1+w\overline{a}}\right| = \frac{|a+w|}{|1+w\overline{a}|} < 1 \Longleftrightarrow |a+w| < |1+w\overline{a}| \Longleftrightarrow |a+w|^2 < |1+w\overline{a}|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (a+w)(\overline{a}+\overline{w}) < (1+w\overline{a})(1+\overline{w}a) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a\overline{a} + a\overline{w} + w\overline{a} + w\overline{w} < 1 + w\overline{a} + \overline{w}a + a\overline{a}w\overline{w} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \Longleftrightarrow |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |w|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow |w|^2 < 1.$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & w & \longmapsto & \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}} \end{array}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

$\Longrightarrow$) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n.

- $\underline{n=1}$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $\underline{n=2}$: Hay dos opciones:

  Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Longrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2|z_1||z_2| \Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow (z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1}$$

  Tenemos ahora dos opciones:

Opción 1 Tenemos que:

$$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} \Longrightarrow z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora $\lambda_2 = \dfrac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\lambda_2\ z_1 = \frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}}\ z_1 = z_2$$

Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} &= (a+bi)(c-di) = ac+bd+(bc-ad)i, \\ z_2\overline{z_1} &= (c+di)(a-bi) = ac+bd+(ad-bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \Longrightarrow bc-ad = ad-bc \Longrightarrow ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de b:

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.
  - Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
  - Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^c/_a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = {}^{ad}/_b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^d/_b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.

$$\lambda_2\ z_1 = \frac{d}{b}(a+bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2\ z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2| &= |z_1(1+\lambda_2)| = |z_1||1+\lambda_2| \\ |z_1|+|z_2| &= |z_1| + |\lambda_2\ z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1+|\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1+\lambda_2| = 1+|\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de $\mathbb{C}$ como elementos de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en $\mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda\ z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2\rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2\rangle = \langle z_1, \lambda\ z_1\rangle = \lambda\langle z_1, z_1\rangle = \lambda\|z_1\|^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n, demostrémolo para $n+1$.
  Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:
  $$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$
  Por tanto:
  $$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) + |z_{n+1}|$$
  Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:
  $$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1|\right) + |z_{n+1}| \Longrightarrow&\\ \Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| + |z_{n+1}| \Longrightarrow\\ \Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| + |z_{n+1}|\end{aligned}$$
  Notando por $w = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho\ w$. Por tanto:
  $$z_{n+1} = \rho\ w = \rho \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$$
  Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1}\ z_1$. Por tanto, se cumple para $n+1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Entonces, tenemos que:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ z_1\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 2|z-i|\}$.

Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|x + iy + i| = 2|x + iy - i| &\Longrightarrow |x + (y + 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Longrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \Longrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$.

Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|x + iy - i| + |x + iy + i| = 4 &\Longrightarrow |x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -2y = 16 + 2y - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 4 + y = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Longrightarrow 16 + 8y + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4 + 8y \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 4x^2 + 3y^2 = 12 \Longrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4 - 3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$
\arg z = \begin{cases}
\arctan\left(\nicefrac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\
\arctan\left(\nicefrac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\
\arctan\left(\nicefrac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\
\nicefrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0, \\
-\nicefrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0.
\end{cases}
$$

Ejercicio 1.1.8. Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^8 .$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \tag{1.2}$$

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ no es convergente y calcular su límite.