Variable Compleja I

Examen IX

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2016-17.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 27 de Abril de 2017.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = z^2 + z\overline{z} \qquad g(z) = (z-1)f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3 (3.5 puntos)**.** Dada $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, probar que existe una única función entera f verificando

$$f(z) + zf'(z) = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Como la parte real de z es continua, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \text{mín}\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$$

Entonces, para todo $z \in K$ se tiene que:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leqslant \frac{1}{n^M} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $M > 1$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^M}$ converge, y por el Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^z}$ converge uniformemente en K.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = z^2 + z\overline{z} \qquad g(z) = (z-1)f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Estudiamos la función f. En vistas de aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = 2xy \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 4x \qquad &\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y \qquad &\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x \end{aligned}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 4x = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 0 = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que f tan solo es derivable en el origen, mientras que no es derivable en $\mathbb{C}^*$.

Ahora, estudiamos la función g. Fijado $z \in \mathbb{C}$, tenemos que:

- Si $z = 0$:

  Como f es derivable en 0, tenemos que g también lo es.

- Si $z = 1$:

$$g'(1) = \lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)f(z)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = 2$$

- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

  Entonces, tenemos que:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - 1}$$

  Si g fuese derivable en z, entonces f también lo sería. No obstante, como f no es derivable en z, tampoco lo es g.

Por tanto, g es derivable en 0 y 1, pero no en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3 (3.5 puntos)**.** Dada $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, probar que existe una única función entera f verificando

$$f(z) + zf'(z) = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos ahora la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Entonces, existe una sucesión $\{\beta_n\}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de serie de potencias, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Podemos por tanto escribir la ecuación dada como:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + z\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\beta_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (1+n) z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Por el Principio de Identidad, se tiene que:

$$\alpha_n = \beta_n(1+n) \Longrightarrow \beta_n = \frac{\alpha_n}{1+n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+n} z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Comprobemos que dicha función es entera. Como g es entera, entonces su radio de convergencia es $R_g = \infty$, por lo que $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \to 0$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_n}{1+n}\right|} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n}} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, f es entera, demostrando así la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Además, esta es única por el Principio de Identidad.