Entrega Ejercicios Microcredencial

Arturo Olivares Martos

21 de marzo de 2025

Resumen

En el presente documento, resolveremos diversos ejercicios de cada uno de los temas vistos en la Microcredencial de Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos.

Índice

1. Lógica Proposicional

Ejercicio 1.2. Demuestra que las siguientes proposiciones son tautologías.

1. Ley de doble negación: $\neg\neg a \to a$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{\neg\neg a\} \models a.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\neg\neg a) = 1$. Entonces:

   $$1 = I(\neg\neg a) = 1 + I(\neg a) = 1 + 1 + I(a) = 2 + I(a) = I(a)$$

   Por tanto, $I(a) = 1$, y por lo tanto, $\{\neg\neg a\} \models a$.

2. Leyes de simplificación:

   a) $(a \wedge b) \to a$.
   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{a \wedge b\} \models a.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(a \wedge b) = 1$. Entonces:

   $$1 = I(a \wedge b) = I(a)I(b)$$

   Por ser $\mathbb{Z}_2$ un cuerpo, en particular es un DI. Si fuese $I(a) = 0$, entonces $I(a)I(b) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(a) = 1$, y por lo tanto, $\{a \wedge b\} \models a$.

   b) $a \to (a \vee b)$.
   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{a\} \models a \vee b.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(a) = 1$. Entonces:

   $$I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b) = 1 + I(b) + I(b) = 1 + 2I(b) = 1$$

   Por tanto, $\{a\} \models a \vee b$.

3. Ley de conmutatividad de la conjunción: $(a \wedge b) \to (b \wedge a)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{a \wedge b\} \models b \wedge a.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(a \wedge b) = 1$. Entonces:

   $$1 = I(a \wedge b) = I(a)I(b) \overset{(*)}{=} I(b)I(a) = I(b \wedge a)$$

   donde en $(*)$ se usa la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}_2$. Por tanto, $\{a \wedge b\} \models b \wedge a$.

4. Ley de conmutatividad de la disyunción: $(a \vee b) \to (b \vee a)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{a \vee b\} \models b \vee a.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(a \vee b) = 1$. Entonces:

   $$I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b) \overset{(*)}{=} I(b) + I(a) + I(b)I(a) = I(b \vee a)$$

   donde en $(*)$ se usa la conmutatividad de la suma y la multiplicación en $\mathbb{Z}_2$. Por tanto, $\{a \vee b\} \models b \vee a$.

5. Ley de Clavius: $(\neg a \to a) \to a$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{\neg a \to a\} \models a.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\neg a \to a) = 1$. Entonces:

   $$\begin{aligned} 1 = I(\neg a \to a) = 1 + I(\neg a) + I(\neg a)I(a) &= 1 + 1 + I(a) + (1 + I(a))I(a) = \\ &= I(a) + I(a) + I(a) = I(a) \end{aligned}$$

   Por tanto, $\{\neg a \to a\} \models a$.

6. Ley de De Morgan: $\neg(a \wedge b) \to (\neg a \vee \neg b)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{\neg(a \wedge b)\} \models \neg a \vee \neg b.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\neg(a \wedge b)) = 1$. Entonces:

   $$1 = I(\neg(a \wedge b)) = 1 + I(a \wedge b) = 1 + I(a)I(b) \Longrightarrow 0 = I(a)I(b)$$

   Por tanto:

   $$\begin{aligned} I(\neg a \vee \neg b) &= I(\neg a) + I(\neg b) + I(\neg a)I(\neg b) = 1 + I(a) + 1 + I(b) + (1 + I(a))(1 + I(b)) = \\ &= 1 + \cancel{I(a)} + 1 + \cancel{I(b)} + 1 + \cancel{I(a)} + \cancel{I(b)} + I(a)I(b) = 1 + I(a)I(b) = 1 \end{aligned}$$

   Por tanto, $\{\neg(a \wedge b)\} \models \neg a \vee \neg b$.

7. Segunda ley de De Morgan: $\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{\neg(a \vee b)\} \models \neg a \wedge \neg b.$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\neg(a \vee b)) = 1$. Entonces:

   $$1 = I(\neg(a \vee b)) = 1 + I(a \vee b) = 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b)$$

   Por tanto:

   $$I(\neg a \wedge \neg b) = I(\neg a)I(\neg b) = (1 + I(a))(1 + I(b)) = 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b) = 1$$

   Por tanto, $\{\neg(a \vee b)\} \models \neg a \wedge \neg b$.

8. Ley de inferencia alternativa: $((a \vee b) \wedge \neg a) \to b$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \vee b) \wedge \neg a\} \models b.$$

   Sea I una interpretación tal que $I((a \vee b) \wedge \neg a) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I((a \vee b) \wedge \neg a) = I(a \vee b)I(\neg a) &= (I(a) + I(b) + I(a)I(b))\,(1 + I(a)) = \\ &= \cancel{I(a)} + I(b) + I(a)I(b) \; + \; \cancel{I(a)} + \cancel{I(a)I(b)} + \cancel{I(a)I(b)} = \\ &= I(b)(1 + I(a)) \end{aligned}$$

   Si fuese $I(b) = 0$, entonces $I(b)(1 + I(a)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(b) = 1$, y por lo tanto, $\{(a \vee b) \wedge \neg a\} \models b$.

9. Segunda ley de inferencia alternativa: $((a \vee b) \wedge \neg b) \to a$.

   Se tiene de forma directa por el apartado anterior (intercambiando los papeles de a y b). La demostración es análoga empleando la conmutatividad de $\mathbb{Z}_2$.

10. Modus ponendo ponens: $((a \to b) \wedge a) \to b$.

    Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \to b) \wedge a\} \models b.$$

    Sea I una interpretación tal que $I((a \to b) \wedge a) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I((a \to b) \wedge a) = I(a \to b)I(a) &= (1 + I(a) + I(a)I(b))\,I(a) = \\ &= I(a) + I(a) + I(a)I(b) = I(a)I(b) \end{aligned}$$

    Si fuese $I(b) = 0$, entonces $I(a)I(b) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(b) = 1$, y por lo tanto, $\{(a \to b) \wedge a\} \models b$.

11. Modus tollendo tollens: $((a \to b) \wedge \neg b) \to \neg a$.

    Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \to b) \wedge \neg b\} \models \neg a.$$

    Sea I una interpretación tal que $I((a \to b) \wedge \neg b) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I((a \to b) \wedge \neg b) = I(a \to b)I(\neg b) &= (1 + I(a) + I(a)I(b))\,(1 + I(b)) = \\ &= 1 + I(a) + I(a)I(b) + I(b) + \cancel{I(a)I(b)} + \cancel{I(a)I(b)} = \\ &= 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b) = \\ &= (1 + I(b)) + I(a)(1 + I(b)) = (1 + I(a))(1 + I(b)) \end{aligned}$$

    Si fuese $1 + I(a) = 0$, entonces $(1 + I(a))(1 + I(b)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $1 + I(a) = 1 = I(\neg a)$. Por tanto, $\{(a \to b) \wedge \neg b\} \models \neg a$.

Ejercicio 1.3. Dado un conjunto de proposiciones $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $\Gamma \models \alpha \to \beta$.

Notemos que en este caso tan solo tenemos una de las implicaciones del Teorema de la Deducción. Sea I una interpretación tal que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

- Si $I(\alpha) = 1$, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $I(\beta) = 1$. Por tanto:
$$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + 1 = 1$$
- Si $I(\alpha) = 0$, entonces:
$$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 0 + 0 = 1$$

Por tanto, $\Gamma \models \alpha \to \beta$.

Ejercicio 1.4. El señor Pérez, empadronador de la isla de Tururulandia, tiene como objetivo el censar la población de dicha isla. La tarea no es fácil debido al hecho de que la población se divide en dos grupos bien distinguidos: los honrados y los embusteros. Los honrados siempre dicen la verdad, mientras que un embustero solo es capaz de producir mentiras. El gobierno de la isla encarga como trabajo al señor Pérez la ardua tarea de contar los honrados y embusteros de la isla. He aquí cuatro de los muchos problemas con los que se encontró nuestro empadronador.

1. Llama a la puerta de una casa, en la que sabía a ciencia cierta que vivía un matrimonio, y el marido abre la puerta para ver quién es. El empadronador le dice: "necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál de ustedes, si alguno lo es, es honrado y cuál un embustero?," a lo que el hombre de la casa respondió "ambos somos embusteros," cerrando la puerta de golpe. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

   Sean las siguientes proposiciones atómicas:

   - $p \equiv$ "El marido es honrado."
   - $q \equiv$ "La mujer es honrada."

   Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow \neg p \land \neg q$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (\neg p \land \neg q)) = 1$, entonces:
$$\begin{aligned} 1 = I(p \longleftrightarrow (\neg p \land \neg q)) &= 1 + I(p) + I(\neg p \land \neg q) = 1 + I(p) + I(\neg p)I(\neg q) = \\ &= 1 + I(p) + (1 + I(p))(1 + I(q)) = (1 + I(p))(I(q)) \end{aligned}$$

   Por tanto:

   - $I(p) = 0 \Longrightarrow$ El marido es un embustero.
   - $I(q) = 1 \Longrightarrow$ La mujer es honrada.

2. La segunda casa que visita también está habitada por un matrimonio. Al llamar a la puerta y formular la misma pregunta que antes, el marido responde: "Por lo menos uno de nosotros es un embustero," cerrando a continuación la puerta. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

   Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $p \equiv$ "El marido es honrado."
- $q \equiv$ "La mujer es honrada."

Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longrightarrow (\neg p \vee \neg q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I(p \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)) &= 1 + I(p) + I(\neg p \vee \neg q) = \\ &= 1 + I(p) + I(\neg p) + I(\neg q) + I(\neg p)I(\neg q) = \\ &= \cancel{1 + I(p)} + \cancel{1 + I(p)} + 1 + I(q) + (1 + I(p))(1 + I(q)) = \\ &= (1 + I(q))(1 + 1 + I(p)) = I(p)(1 + I(q)) \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(p) = 1 \Longrightarrow$ El marido es honrado.
- $I(q) = 0 \Longrightarrow$ La mujer es una embustera.

3. Visita una tercera casa, y en las mismas condiciones de antes, recibe la respuesta: "Si yo soy honrado, entonces mi mujer también lo es." ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

   Sean las siguientes proposiciones atómicas:

   - $p \equiv$ "El marido es honrado."
   - $q \equiv$ "La mujer es honrada."

   Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I(p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)) &= 1 + I(p) + I(p \longrightarrow q) = \\ &= 1 + I(p) + 1 + I(p) + I(p)I(q) = I(p)I(q) \end{aligned}$$

   Por tanto:

   - $I(p) = 1 \Longrightarrow$ El marido es honrado.
   - $I(q) = 1 \Longrightarrow$ La mujer es honrada.

4. En la última casa que visita, pues ya estaba cansado de partirse el coco, la respuesta es "Yo soy lo mismo que mi mujer." ¿Qué es el marido y qué es la mujer? Sean las siguientes proposiciones atómicas:

   - $p \equiv$ "El marido es honrado."
   - $q \equiv$ "La mujer es honrada."

   Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I(p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)) &= 1 + I(p) + I(p \longleftrightarrow q) = \\ &= 1 + I(p) + 1 + I(p) + I(q) = I(q) \end{aligned}$$

   Por tanto:

- $I(q) = 1 \Longrightarrow$ La mujer es honrada.
- Respecto al marido, no podemos determinar si es honrado o no.

5. De vuelta a su casa se encuentra con tres individuos, A, B y C, en la calle, y pensando en que quizás podía tener más suerte con ellos decide preguntarles qué son cada uno de ellos. Le pregunta al primero, A, y no entiende la respuesta, ya que en ese momento pasa una de esas motos que hacen un ruido ensordecedor y no corren nada. El segundo, B, le aclara que lo que ha dicho el primero es que es un embustero, pero el tercero, C, le advierte que no haga caso del segundo, B, ya que es un embustero. ¿Puedes deducir algo de lo ocurrido?

   Sean las siguientes proposiciones atómicas:

   - $a \equiv$ "A es honrado."
   - $b \equiv$ "B es honrado."
   - $c \equiv$ "C es honrado."
   - $p \equiv$ "A dice que es un embustero."

   Sabemos que:

   - $a \longrightarrow \neg p$ es cierto.
   - $\neg a \longrightarrow \neg p$ es cierto.
   - $b \longleftrightarrow p$ es cierto.
   - $c \longleftrightarrow \neg b$ es cierto.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned}
1 &= I(a \longrightarrow \neg p) = 1 + I(a) + I(a)I(\neg p) \\
1 &= I(\neg a \longrightarrow \neg p) = 1 + I(\neg a) + I(\neg a)I(\neg p) = \\
&= 1 + 1 + I(a) + (1 + I(a))I(\neg p) = 1 + 1 + I(a) + I(\neg p) + I(a)I(\neg p) = \\
&= 1 + I(\neg p) + 1 = I(\neg p) \Longrightarrow I(p) = 0
\end{aligned}$$

   Además, sabemos que:

$$\begin{aligned}
1 &= I(b \longleftrightarrow p) = 1 + I(b) + I(p) = 1 + I(b) \Longrightarrow I(b) = 0 \\
1 &= I(c \longleftrightarrow \neg b) = 1 + I(c) + I(\neg b) = 1 + I(c) + 1 + I(b) = I(c)
\end{aligned}$$

   Por tanto:

   - $I(b) = 0 \Longrightarrow$ B es un embustero.
   - $I(c) = 1 \Longrightarrow$ C es honrado.
   - Desconocemos el valor de $I(a)$, por lo que no podemos determinar si A es honrado o no.

Ejercicio 1.5. Probar que todo axioma del cálculo proposicional clásico es una tautología.

Sean α, β, γ fórmulas proposicionales. Entonces, probaremos que cada uno de los axiomas del cálculo proposicional clásico es una tautología.

1. $\mathcal{A}_1 = \{\alpha \to (\beta \to \alpha)\}$.

   Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

   $$\{\alpha, \beta\} \models \alpha$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$. Entonces, trivialmente $I(\alpha) = 1$. Por tanto, $\{\alpha, \beta\} \models \alpha$.

2. $\mathcal{A}_2 = \{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))\}$.

   Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

   $$\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha\} \models \gamma$$

   Sea I una interpretación tal que $I\left(\alpha \to (\beta \to \gamma)\right) = I\left(\alpha \to \beta\right) = I(\alpha) = 1$. Entonces:

   $$\begin{aligned}
   &1 = I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) \Longrightarrow I(\beta) = 1\\
   &1 = I\left(\alpha \to (\beta \to \gamma)\right) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta \to \gamma) = I(\beta \to \gamma) = 1 + I(\beta) + I(\beta)I(\gamma) = I(\gamma)
   \end{aligned}$$

   Por tanto, $\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha\} \models \gamma$.

3. $\mathcal{A}_3 = \{(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)\}$.

   Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

   $$\{\neg\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha \to \beta\} \models \alpha$$

   Sea I una interpretación tal que $I(\neg\alpha \to \neg\beta) = I(\neg\alpha \to \beta) = 1$. Entonces:

   $$\begin{aligned}
   1 &= I(\neg\alpha \to \beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta)\\
   1 &= I(\neg\alpha \to \neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)\left(1 + I(\beta)\right) =\\
   &= 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta) = 1 + I(\neg\alpha) = 1 + 1 + I(\alpha) = I(\alpha)
   \end{aligned}$$

   Por tanto, $\{\neg\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha \to \beta\} \models \alpha$.

Ejercicio 1.6 (Regla de "reductio ad absurdum" minimal o intuicionista)**.** Si se tiene $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad\qquad \Gamma \vdash \alpha \to \neg\beta$$

Por tanto:

1. ...
   $\vdots$

p. $\alpha \to \beta$

$p+1$. ...
   $\vdots$

q. $\alpha \to \neg\beta$

$q+1$. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ por la Regla de la Doble Negación.

$q+2$. $\neg\neg\alpha \to \beta$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q+1$ y p.

$q+3$. $\neg\neg\alpha \to \neg\beta$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q+1$ y q.

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ, entonces:

$$\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \beta \qquad\qquad \Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \neg\beta$$

Por tanto, aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash \beta \qquad\qquad \Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 1.7 (Leyes de Duns Scoto)**.**

1. $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

   $$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

   Tenemos que:

   1. α es una hipótesis.
   2. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$.
   3. $\neg\beta \to \alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
   4. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
   5. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \in \mathcal{A}_1$.
   6. $\neg\beta \to \neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 4 y 5.

   Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

   $$\{\alpha, \neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha \qquad\qquad \{\alpha, \neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

   Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

   $$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

2. $\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$.

   Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

   Esto ha sido demostrado en el apartado anterior.

Ejercicio 1.8 (Principio de inconsistencia)**.** Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, entonces $\Gamma \vdash \beta$.

1. $\ldots$

   $\vdots$

p. α

$p+1$. $\ldots$

   $\vdots$

q. $\neg\alpha$

$q+1$. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ por la Ley de Duns Scoto (Ejercicio 1.7).

$q+2$. $\alpha \to \beta$ por Modus Ponens aplicado a q y $q+1$.

$q+3$. β por Modus Ponens aplicado a p y $q+2$.

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ:

$$\Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 1.9 (Leyes débiles de Duns Scoto)**.**

1. $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)$.

2. $\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$.

Ambos casos se tienen de forma directa por el Ejercicio 1.7, puesto que lo tenemos demostrado para cualquier proposición β (no es necesario que sea una proposición atómica), por lo que en particular se tiene para $\neg\beta$.

Observación. Notemos que obtener las Leyes de Duns Scoto a partir de las Leyes débiles de Duns Scoto no sería directo y tendríamos que emplear la Regla de la Doble Negación.

Ejercicio 1.10 (Principio de inconsistencia débil)**.** Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, entonces $\Gamma \vdash \neg\beta$.

Al igual que ocurrió en el Ejercicio 1.9, esto se tiene de forma directa por el Ejercicio 1.8.

Ejercicio 1.11 (Ley de contraposición fuerte o "ponendo ponens")**.**

$$\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$$

Supongamos además $\neg\beta$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. $\neg\beta$ es una hipótesis.
2. $\neg\beta \to \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. α es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha \qquad \{\neg\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$$

Ejercicio 1.12 (Ley de contraposición "ponendo tollens")**.**

$$\vdash (\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \vdash \neg\beta$$

Supongamos además β como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. β es una hipótesis.
2. $\beta \to \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. α es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\beta\} \vdash \alpha \qquad \{\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 1.6), tenemos que:

$$\{\beta \to \neg\alpha, \alpha\} \vdash \neg\beta$$

Ejercicio 1.13 (Ley de contraposición "tollendo ponens")**.**

$$\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
2. $\neg\alpha \to \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $\neg\beta$ es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \to \beta, \neg\beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta \qquad \{\neg\alpha \to \beta, \neg\beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 1.14 (Ley de contraposición débil o "tollendo tollens")**.**

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Supongamos además α como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \to \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $\neg\beta$ es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \beta \qquad \{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 1.6), tenemos que:

$$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 1.15 (Regla de prueba por casos). Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \beta$.

Supongamos (para poder aplicar reducción al absurso) $\neg\beta$ como hipótesis. Entonces, se tiene que:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \beta \qquad \Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 1.6), tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \beta \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha$$

Por tanto, por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 1.16 (Ley débil de Clavius). $\vdash (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Supongamos además α como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \to \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha \to \neg\alpha\} \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{\alpha \to \neg\alpha\} \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 1.6), tenemos que:

$$\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 1.17 (Ley de Clavius). $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\alpha \to \alpha\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.

2. $\neg\alpha \to \alpha$ es una hipótesis.

3. α por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \to \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{\neg\alpha \to \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \to \alpha\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 1.18 (Regla de retorsión, regla de Clavius)**.** Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.

Tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Ejercicio 1.19 (Leyes de adjunción)**.**

1. $\vdash \alpha \to \alpha \lor \beta$.

   Semánticamente, $\alpha \lor \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$. Por tanto, equivale a demostrar:

   $$\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$$

   Esta es precisamente una Ley de Duns Scoto (Ejercicio 1.7), por lo que se tiene ya demostrada.

2. $\vdash \beta \to \alpha \lor \beta$.

   Semánticamente, $\alpha \lor \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$. Por tanto, equivale a demostrar:

   $$\vdash \beta \to (\neg\alpha \to \beta)$$

   Esta es cierta por pertenecer a $\mathcal{A}_1$.

Ejercicio 1.20 (Reglas de adjunción o de introducción de la disyunción)**.**

1. Si $\Gamma \vdash \alpha$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \lor \beta$.

   1. ...

      $\vdots$

   p. α

   $p+1$. $\alpha \to \alpha \lor \beta$ por la Ley de Adjunción (Ejercicio 1.19).

   $p+2$. $\alpha \lor \beta$ por Modus Ponens aplicado a p y $p+1$.

Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ:

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$$

2. Si $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$.

   1. ...

      $\vdots$

   p. β

   $p+1$. $\beta \to \alpha \vee \beta$ por la Ley de Adjunción (Ejercicio 1.19).

   $p+2$. $\alpha \vee \beta$ por Modus Ponens aplicado a p y $p+1$.

   Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ:

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$$

Ejercicio 1.21 (Ley conmutativa de la disyunción)**.** $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$.

Esto equivale a demostrar:

$$\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$$

Esta es una de las leyes de contraposición, demostrada en el Ejericio 1.13.

Ejercicio 1.22.

1. $\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$.

   Semánticamente, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$$

   1. $\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)$ por la Ley Débil de Duns Scoto.
   2. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)) \to (\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$ por las Leyes de Contraposición.
   3. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

2. $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$.

   Semánticamente, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$$

   1. $\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta) \in \mathcal{A}_1$.
   2. $(\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta)) \to (\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta)$ por las Leyes de Contraposición.
   3. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Ejercicio 1.23 (Reglas de simplificación o de eliminación de la conjunción)**.** Si $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$.

1. ...

   $\vdots$

p. $\alpha \land \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$.

$p+1$. $\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)$ por la Ley Débil de Duns Scoto (Ejercicio 1.9).

$p+2$. $[\neg\alpha \to (\alpha \to \neg\beta)] \to [\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha]$ por las Leyes de Contraposición.

$p+3$. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$ por Modus Ponens aplicado a $p+1$ y $p+2$.

$p+4$. α por Modus Ponens aplicado a p y $p+3$.

$p+5$. $\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta) \in \mathcal{A}_1$.

$p+6$. $[\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta)] \to [\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta]$ por las Leyes de Contraposición.

$p+7$. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$ por Modus Ponens aplicado a $p+5$ y $p+6$.

$p+8$. β por Modus Ponens aplicado a p y $p+7$.

Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ:

$$\Gamma \vdash \alpha \qquad\qquad \Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 1.24. $\vdash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma))$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \lor \beta\} \vdash \gamma$$

Debido a la equivalencia semántica de la disyunción, definiendo el conjunto Γ como $\Gamma = \{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \neg\alpha \to \beta\}$, esto es equivalente a demostrar $\Gamma \vdash \gamma$.

1. $\neg\alpha \to \beta$ es una hipótesis.
2. $\beta \to \gamma$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha \to \gamma$ por la Regla del Silogismo aplicada a 1 y 2.
4. $\alpha \to \gamma$ es una hipótesis.

Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \gamma \qquad\qquad \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$$

Aplicando la Regla de la Prueba por Casos (Ejercicio 1.15), tenemos que:

$$\Gamma \vdash \gamma$$

Ejercicio 1.25 (Otra regla de prueba por casos)**.** Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ y $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\alpha \lor \beta\} \vdash \gamma$.

Usando que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ y $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$, tenemos que:

1. $\ldots$

   $\vdots$

$p.$ $\alpha \to \gamma$

$p+1.$ $\ldots$

$\vdots$

$q.$ $\beta \to \gamma$

$q+1.$ $\neg\alpha \to \beta$ es una hipótesis.

$q+2.$ $\neg\alpha \to \gamma$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q+1$ y q.

Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \qquad \Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \gamma$$

Por la Regla de Prueba por Casos (Ejercicio 1.15), tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$$

Ejercicio 1.26 (Ley de Peirce)**.** $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(\alpha \to \beta) \to \alpha\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
2. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ por la Ley de Duns Scoto (Ejercicio 1.7).
3. $\alpha \to \beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $(\alpha \to \beta) \to \alpha$ es una hipótesis.
5. α por Modus Ponens aplicado a 3 y 4.

Por tanto, tenemos que:

$$\{(\alpha \to \beta) \to \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{(\alpha \to \beta) \to \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{(\alpha \to \beta) \to \alpha\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 1.27. $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$.

Por la equivalencia semántica de la conjunción y el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

Supongamos además $\alpha \to \neg\beta$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurso). Entonces:

1. α es una hipótesis.

2. β es una hipótesis.

3. $\alpha \to \neg\beta$ es una hipótesis.

4. $\neg\beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 3.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha \to \neg\beta\} \vdash \neg\beta \qquad\qquad \{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha \to \neg\beta\} \vdash \beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 1.6), tenemos que:

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

Ejercicio 1.28 (Regla del producto o de introducción de la conjunción)**.** Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$.

1\. $\ldots$
$\vdots$

p. α

$p+1$. $\ldots$
$\vdots$

q. β

$q+1$. $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$ por el Ejercicio 1.27.

$q+2$. $\beta \to \alpha \wedge \beta$ por Modus Ponens aplicado a p y $q+1$.

$q+3$. $\alpha \wedge \beta$ por Modus Ponens aplicado a q y $q+2$.

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ:

$$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$$

2. Lógica de Primer Orden

Ejercicio 2.1. Prueba que $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg Q(a)\} \models \neg P(a)$.

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación, verificando:

$$\begin{aligned} I^v(\forall x(P(x) \to Q(x))) = 1, \\ I^v(\neg Q(a)) = 1. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $I^v(\forall x(P(x) \to Q(x))) =\ 1$. En particular, para a tenemos:

$$1 = I^{v(x|a)}(P(x) \to Q(x)) = 1 + I^{v(x|a)}(P(x)) + I^{v(x|a)}(Q(x)) = 1 + P(a) + Q(a) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow P(a) = Q(a).$$

Por otro lado, tenemos:

$$1 = I^v(\neg Q(a)) = 1 + I^v(Q(a)) \Longrightarrow I^v(Q(a)) = 0 = Q(v(a)) = Q(a)$$

Por tanto:

$$I^v(\neg P(a)) = 1 + I^v(P(a)) = 1 + P(v(a)) = 1 + P(a) = 1 + Q(a) = 1.$$

Por tanto, $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg Q(a)\} \models \neg P(a)$.

Ejercicio 2.2. Dada $\mathcal{U}$ una $\mathcal{L}$-estructura y φ una sentencia, razona si equivalen el que φ sea satisfacible y que sea válida en $\mathcal{U}$

Observación. Usar el lema de coincidencia.

Demostraremos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que φ es satisfacible en $\mathcal{U}$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. No obstante, por tratarse de una sentencia, y usando el lema de coincidencia, tenemos que:

$$1 = I^v(\varphi) = I^w(\varphi)$$

para cualquier otra $\mathcal{L}$-interpretación (ε, w). Por tanto, φ es válida en $\mathcal{U}$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que φ es válida en $\mathcal{U}$. Entonces para cualquier $\mathcal{L}$-interpretación (ε, w), tenemos que $I^v(\varphi) = 1$. En particular existe una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. Por tanto, φ es satisfacible en $\mathcal{U}$.

Ejercicio 2.3. Usando el Ejercicio 2.2, y bajo las mismas hipótesis, prueba que o bien φ es válida o bien lo es $\neg\varphi$, pero no se pueden dar las dos posibilidades.

Sea ahora una $\mathcal{L}-$interpretación $(\mathcal{U}, v)$. Hay dos posibilidades:

- $\underline{I^v(\varphi) = 1}$. Entonces, φ es satisfacible en $\mathcal{U}$, y por el Ejercicio 2.2 φ es válida en $\mathcal{U}$. Por tanto, $\neg\varphi$ no es válida en $\mathcal{U}$.
- $\underline{I^v(\varphi) = 0}$. Entonces, $\neg\varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$, y por el Ejercicio 2.2 $\neg\varphi$ es válida en $\mathcal{U}$. Por tanto, φ no es válida en $\mathcal{U}$.

Ejercicio 2.4. Sea $\mathcal{U}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Sea $\varphi \in Form(\mathcal{L})$. Si $x_1, \dots, x_n$ son todas las variables de φ con alguna ocurrencia libre, entonces equivalen:

1. φ es válida en $\mathcal{U}$,
2. $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$,
3. $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es válida en $\mathcal{U}$.

Demostraremos distintas implicaciones:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que φ es válida en $\mathcal{U}$. Sea ahora una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) fijada. Tenemos que:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n I^v(\varphi) = 1 \iff \forall a_1, \dots, \forall a_n \in D, \qquad I^{v(x_1|a_1,\dots,x_n|a_n)}(\varphi) = 1$$

No obstante, esto se tiene que es cierto, puesto que φ es válida en $\mathcal{U}$ y $I^{v(x_1|a_1,\dots,x_n|a_n)}$ es una $\mathcal{L}$-interpretación. Por tanto, $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es una sentencia, ya que estamos cuantificando todas las variables libres de φ. Por tanto, por el Ejercicio 2.2, se tiene la implicación.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos que $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es válida en $\mathcal{U}$. Sea ahora una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) fijada. Sea ahora $a_i = v(x_i) \in D$ para $i = 1, \dots, n$. Por ser $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ válida en $\mathcal{U}$, tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1,\dots,x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Además, tenemos que:

$$v(x_i) = v(x_1 \mid a_1, \dots, x_n \mid a_n)(x_i) = a_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto, ambas asignaciones coinciden en las variables libres de φ. Por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$1 = I^{v(x_1|a_1,\dots,x_n|a_n)}(\varphi) = I^v(\varphi).$$

Por último, como esto era para cualquier $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v), se tiene que φ es válida en $\mathcal{U}$.

Ejercicio 2.5. Sea $\mathcal{U}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Sea $\varphi \in Form(\mathcal{L})$. Si $x_1, \dots, x_n$ son todas las variables de φ con alguna ocurrencia libre, entonces equivalen:

1. φ es satisfacible en $\mathcal{U}$,
2. $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$.

¿Es también cierta la equivalencia cambiando en el segundo apartado satisfacible por válida?

Demostramos las distintas implicaciones:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que φ es satisfacible en $\mathcal{U}$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. Consideramos $a_i = v(x_i) \in D$ para $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1,\ldots,x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Por tanto, $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos que $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en $\mathcal{U}$. Entonces existen $a_i \in D$ para $i = 1, \ldots, n$ y una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, v) tal que:

$$I^{v(x_1|a_1,\ldots,x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Por tanto, consideramos una $\mathcal{L}$-interpretación (ε, w) tal que $w(x_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1,\ldots,x_n|a_n)}(\varphi) = I^w(\varphi) = 1.$$

Por tanto, φ es satisfacible en $\mathcal{U}$.

Por último, si cambiamos satisfacible por válida en el segundo apartado, la equivalencia sigue siendo cierta, puesto que:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi \text{ es válida en } \mathcal{U} \Longrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi \text{ es satisfacible en } \mathcal{U}.$$

Ejercicio 2.6. Demuestra que:

1. $\models \neg\forall x\psi \leftrightarrow \exists x\neg\psi$,

   Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x\neg\psi) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\neg\psi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \qquad 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\neg\forall x\psi) &\iff 1 + I^v(\forall x\psi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) = 0 \\ &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 0. \end{aligned}$$

   Por tanto, y puesto que trabajamos en $\mathbb{Z}_2$, hemos probado que:

$$I^v(\neg\forall x\psi) = I^v(\exists x\neg\psi).$$

   Por tanto:

$$I(\neg\forall x\psi \leftrightarrow \exists x\neg\psi) = 1 + I(\neg\forall x\psi) + I(\exists x\neg\psi) = 1$$

2. $\models \neg\exists x\psi \leftrightarrow \forall x\neg\psi$,

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x\neg\psi) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\neg\psi) = 1\\
&\iff \forall a \in D, \qquad 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 1\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\neg\exists x\psi) &\iff 1 + I^v(\exists x\psi) = 1\\
&\iff I^v(\exists x\psi) = 0\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en $\mathbb{Z}_2$, hemos probado que:

$$I^v(\neg\exists x\psi) = I^v(\forall x\neg\psi).$$

Por tanto:

$$I(\neg\exists x\psi \leftrightarrow \forall x\neg\psi) = 1 + I(\neg\exists x\psi) + I(\forall x\neg\psi) = 1$$

3. $\models \exists x\psi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\psi$,

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\neg\forall x\neg\psi) &\iff 1 + I^v(\forall x\neg\psi) = 1\\
&\iff I^v(\forall x\neg\psi) = 0\\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\neg\psi) = 0\\
&\iff \exists a \in D, \qquad 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 0\\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1
\end{aligned}$$

$$1 = I^v(\exists x\psi) \iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1.$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en $\mathbb{Z}_2$, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\psi) = I^v(\neg\forall x\neg\psi).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\psi) = 1 + I(\exists x\psi) + I(\neg\forall x\neg\psi) = 1$$

4. $\models \forall x\psi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi$,

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\neg\exists x\neg\psi) &\iff 1 + I^v(\exists x\neg\psi) = 1\\
&\iff I^v(\exists x\neg\psi) = 0\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\neg\psi) = 0\\
&\iff \forall a \in D, \qquad 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 0\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1
\end{aligned}$$

$$1 = I^v(\forall x\psi) \iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1.$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en $\mathbb{Z}_2$, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi) = I^v(\neg\exists x\neg\psi).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi) = 1 + I(\forall x\psi) + I(\neg\exists x\neg\psi) = 1$$

5. $\models \forall x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)$, si x no aparece libre en φ,

   Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \wedge \varphi) = 1\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1\\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1\\
&\overset{(*)}{\iff} \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v}(\varphi) = 1\\
&\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1\\
&\iff I^v(\forall x\psi \wedge \varphi) = 1.
\end{aligned}$$

   donde $(*)$ se debe a que x no aparece libre en φ y v y $v(x \mid a)$ tan solo difieren en el valor de x. Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Por tanto:

$$I^v(\forall x\psi \wedge \varphi) = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)).$$

   Por tanto:

$$I(\forall x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \wedge \varphi) + I(\forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1$$

6. $\models \exists x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)$, si x no aparece libre en φ,

   Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\exists x(\psi \wedge \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \wedge \varphi) = 1\\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1\\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1\\
&\overset{(*)}{\iff} \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v}(\varphi) = 1\\
&\iff I^v(\exists x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1\\
&\iff I^v(\exists x\psi \wedge \varphi) = 1.
\end{aligned}$$

   donde $(*)$ se debe a que x no aparece libre en φ y v y $v(x \mid a)$ tan solo difieren en el valor de x. Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Por tanto:

$$I^v(\exists x\psi \wedge \varphi) = I^v(\exists x(\psi \wedge \varphi)).$$

   Por tanto:

$$I(\exists x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \wedge \varphi) + I(\exists x(\psi \wedge \varphi)) = 1$$

7. $\models \forall x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \vee \varphi)$, si x no aparece libre en φ,

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) = 1 \\
&\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\
&\overset{(*)}{\iff} \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + I^v(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi) I^v(\varphi) = 1 \\
1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = 1 \\
&\iff I^v(\forall x\psi) + I^v(\varphi) + I^v(\forall x\psi) I^v(\varphi) = 1
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que x no aparece libre en φ y v y $v(x \mid a)$ tan solo difieren en el valor de x. Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$.

Veamos que se da la equivalencia:

- Si $I^v(\varphi) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \\
&\iff \forall a \in D, \ 0 = 0 \\
1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\forall x\psi) + 1 + I^v(\forall x\psi) = 1 \iff 0 = 0
\end{aligned}$$

  Por tanto, en este caso se da $I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))$.

- Si $I^v(\varphi) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + 0 + 0 = 1 \\
&\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \\
&\iff I^v(\forall x\psi) + 0 + 0 = 1 \\
&\iff 1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi)
\end{aligned}$$

  En este caso, también se da $I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \vee \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \vee \varphi) + I(\forall x(\psi \vee \varphi)) = 1$$

8. $\models \exists x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi)$, si x no aparece libre en φ,

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) = 1 \\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\
&\overset{(*)}{\iff} \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + I^v(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi) I^v(\varphi) = 1 \\
1 = I^v(\exists x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\exists x\psi \vee \varphi) = 1 \\
&\iff I^v(\exists x\psi) + I^v(\varphi) + I^v(\exists x\psi) I^v(\varphi) = 1
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que x no aparece libre en φ y v y $v(x \mid a)$ tan solo difieren en el valor de x. Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Veamos que se da la equivalencia:

- Si $I^v(\varphi) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D,\ 0 = 0 \\ 1 = I^v(\exists x\psi \lor \varphi) &\iff I^v(\exists x\psi) + 1 + I^v(\exists x\psi) = 1 \iff 0 = 0 \end{aligned}$$

  Por tanto, en este caso se da $I^v(\exists x\psi \lor \varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi))$.

- Si $I^v(\varphi) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + 0 + 0 = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi) + 0 + 0 = 1 \\ &\iff 1 = I^v(\exists x\psi \lor \varphi) \end{aligned}$$

  En este caso, también se da $I^v(\exists x\psi \lor \varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi))$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\psi \lor \varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \lor \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \lor \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \lor \varphi) + I(\exists x(\psi \lor \varphi)) = 1$$

9. $\models \forall x\psi \land \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \land \varphi)$,
Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x(\psi \land \varphi)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \land \varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \forall a_1, a_2 \in D, \qquad I^{v(x|a_1)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a_2)}(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\forall x\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) I^v(\forall x\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi \land \forall x\varphi) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi \land \forall x\varphi) = I^v(\forall x(\psi \land \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \land \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \land \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \land \forall x\varphi) + I(\forall x(\psi \land \varphi)) = 1$$

10. $\models \exists x\psi \lor \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \lor \varphi)$,
Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi \lor \varphi) = 1\\
&\iff \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1\\
1 = I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) &\iff I^v(\exists x\psi) + I^v(\exists x\varphi) + I^v(\exists x\psi)I^v(\exists x\varphi) = 1
\end{aligned}$$

Veamos que se da la equivalencia:

- Si $I^v(\exists x\psi) = 1$:
  En este caso, $\exists a \in D$ tal que $I^{v(x|a)}(\psi) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) = \cancelto{1}{I^v(\exists x\psi)} + I^v(\exists x\varphi) + \cancelto{1}{I^v(\exists x\psi)} I^v(\exists x\varphi) = 1$$

$$\cancelto{1}{I^{v(x|a)}(\psi)} + I^{v(x|a)}(\varphi) + \cancelto{1}{I^{v(x|a)}(\psi)} I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \Longrightarrow 1 = I^{v(x|a)}(\psi \lor \varphi) \Longrightarrow I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)) = 1.$$

  Por tanto, en este caso se da $I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi))$.
- Si $I^v(\exists x\psi) = 0$:
  En este caso, $\nexists a \in D$ tal que $I^{v(x|a)}(\psi) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)) &\iff \exists a \in D, \qquad 0 + I^{v(x|a)}(\varphi) + 0 = 1\\
&\iff I^v(\exists x\varphi) = 1\\
1 = I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) &\iff 0 + I^v(\exists x\varphi) + 0 = 1 \iff I^v(\exists x\varphi) = 1
\end{aligned}$$

  De nuevo, se da $I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi))$.

En cualquier caso, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \lor \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \lor \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \lor \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \lor \exists x\varphi) + I(\exists x(\psi \lor \varphi)) = 1$$

11. $\models \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)$, y variable que no aparece en $\forall x\varphi(x)$,
Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x\varphi(x)) &\iff \forall a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1\\
&\overset{(*)}{\iff} \forall a \in D, \qquad I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1\\
&\iff I^v(\forall y\varphi(y)) = 1.
\end{aligned}$$

donde vamos ahora a argumentar el paso dado en $(*)$. Los únicos valores en los que difieren $v(x \mid a)$ y $v(y \mid a)$ son en el valor de x y y. Vamos a estudiar qué ocurre:

- Como y no aparece en $\forall x\varphi(x)$, entonces $v(x \mid a)(x)$ no es relevante.

- Como, tras calcular $\varphi(y)$ se sustituyen todas las ocurrencias libres de x por y, entonces $v(y \mid a)(x)$ tampoco es relevante (las ocurrencias ligadas, por el Lema de Coincidencia, no supondrán problema).
- En el caso de que haya más variables libres en φ, estas serán distintas a y y x, por lo que, por el Lema de Coincidencia, no supondrán problema.
- Sabemos que $v(x \mid a)(x) = v(y \mid a)(y) = a$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\varphi(x)) = I^v(\forall y\varphi(y)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)) = 1 + I(\forall x\varphi(x)) + I(\forall y\varphi(y)) = 1$$

12. $\models \exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y)$, y variable que no aparece en $\forall x\varphi(x)$.

Sea (ε, v) una $\mathcal{L}$-interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x\varphi(x)) &\Longleftrightarrow \exists a \in D, \qquad I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1 \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \exists a \in D, \qquad I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1 \\ &\Longleftrightarrow I^v(\exists y\varphi(y)) = 1. \end{aligned}$$

donde, por el mismo argumento que en el caso anterior, hemos dado el paso $(*)$. Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\varphi(x)) = I^v(\exists y\varphi(y)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y)) = 1 + I(\exists x\varphi(x)) + I(\exists y\varphi(y)) = 1$$

Ejercicio 2.7. Demuestra que $\not\models \forall x(\psi \vee \varphi) \to (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)$.

Consideramos la siguiente estructura ε:

- $D = \mathbb{N}$,
- $R, S : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ tales que:

$$R(n) = n \mod 2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

$$S(n) = n \mod 2 + 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

Consideremos además que $\varphi = R(x)$ y $\psi = S(x)$. Como además no hay variables libres, no es relevante dar una asignación. Por tanto:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) = I^v(\forall x(S(x) \vee R(x))) &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ I^{v(x|n)}(S(x) \vee R(x)) = 1 \\ \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ I^{v(x|n)}(S(x)) + I^{v(x|n)}(R(x)) + I^{v(x|n)}(S(x))I^{v(x|n)}(R(x)) = 1 \\ \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ S(n) + R(n) + S(n)R(n) = 1 \\ \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 1 + R(n) + R(n) = 1 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 = I^v(\forall x\psi) = I^v(\forall x S(x)) &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ I^{v(x|n)}(S(x)) = 1 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ S(n) = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ 1 = 1. \\
1 = I^v(\forall x\varphi) = I^v(\forall x R(x)) &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ I^{v(x|n)}(R(x)) = 1 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ R(n) = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ n \mod 2 = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $I^v(\forall x\varphi) = 0$. Por tanto, con esta interpretación se tiene que:

$$\begin{aligned}
I^v\left(\forall x(\psi \vee \varphi) \to (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)\right) &= 1 + I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) + I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))I^v(\forall x\psi \vee \forall x\varphi) = \\
&= 1 + 1 + 1 \cdot (I^v(\forall x\psi) + I^v(\forall x\varphi) + I^v(\forall x\psi)I^v(\forall x\varphi)) = \\
&= 1 + 1 + 1 \cdot (1 + 0 + 1 \cdot 0) = 1 + 1 + 1 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $\not\models \forall x(\psi \vee \varphi) \to (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)$.

Ejercicio 2.8. $\vdash \forall x(\psi \to \varphi) \to (\exists x\psi \to \exists x\varphi)$.

Por su valor semántico, sabemos que esto es equivalente a demostrar:

$$\vdash \forall x(\psi \to \varphi) \to (\neg\forall x\neg\psi \to \neg\forall x\neg\varphi)$$

Con vistas a aplicar el Teorema de la deducción, intentaremos demostrar lo que sigue con cuidado:

$$\{\forall x(\psi \to \varphi), \neg\forall x\neg\psi\} \vdash \neg\forall x\neg\varphi$$

Añadiremos como hipótesis $\forall x\neg\varphi$, con vistas a emplear el Teorema de Reducción al Absurdo débil. Por tanto:

1. $\forall x\neg\varphi$ es una hipótesis.
2. $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi \in \mathcal{A}_4$.
3. $\neg\varphi$ por Modus Ponens de 1 y 2.
4. $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi) \in \mathcal{A}_4$.
5. $\forall x(\psi \to \varphi) \in \mathcal{A}_4$.
6. $\psi \to \varphi$ por Modus Ponens de 4 y 5.
7. $\neg\psi$ por las Leyes de Contraposición aplicadas a 3 y 6.
8. $\forall x\neg\psi$ por la Generalización de 7.
9. $\neg\forall x\neg\psi$ es una hipótesis.

Por tanto, por el Teorema de Reducción al Absurdo débil, hemos probado que:

$$\{\forall x(\psi \to \varphi), \neg\forall x\neg\psi\} \vdash \neg\forall x\neg\varphi$$

Como no hemos generalizado sobre variables libres (puesto que x aparece cuantificada), se tiene lo buscado.

Con vistas a aplicar el Teorema de la deducción, intentaremos demostrar lo que sigue con cuidado:

$$\{\forall x(\psi \to \varphi), \neg\forall x\neg\psi\} \vdash \neg\forall x\neg\varphi$$