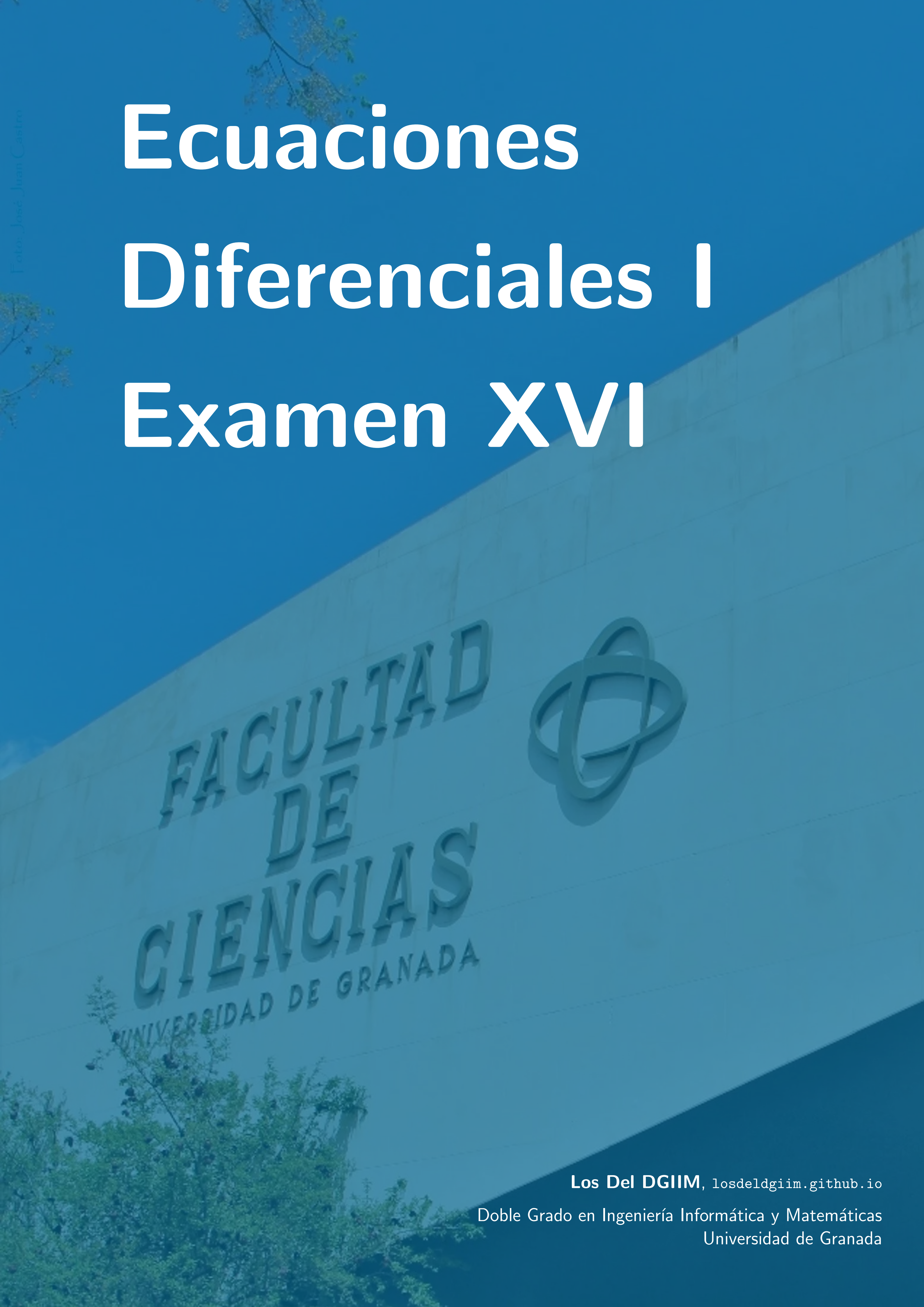

Foto: José Juan Castro

Ecuaciones Diferenciales I Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XVI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 10 de enero de 2024.

Ejercicio 1. Resuelve el problema de valores iniciales

$$x' = -\frac{x}{x+t}, \quad x(0) = -1.$$

¿Está la solución definida en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 2. Se considera la transformación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t,x) \mapsto (s,y), \quad s = -2e^x, \quad y = e^{-3t}.$$

Determina $\Omega = \varphi(\mathbb{R}^2)$ y prueba que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y Ω. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x)$$

con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. ¿Bajo qué condiciones sobre f se puede asegurar que el difeomorfismo es admisible para esta ecuación? Encuentra la ecuación transportada al dominio Ω.

Ejercicio 3. Se considera la ecuación

$$x'' + a(t)x = 0$$

donde $a : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo abierto I. Se supone que φ es una solución que cumple

$$\varphi(t) > 0 \quad \forall t \in I.$$

1. Demuestra que existe una única función $\psi : I \to \mathbb{R}$ que cumple

$$W(\varphi,\psi)(t) = 7, \quad t \in I, \quad \psi(0) = 0.$$

2. Demuestra que la pareja φ, ψ forma un sistema fundamental de la ecuación de partida.

Ejercicio 4.

1. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Calcula e^A.

2. Encuentra una matriz fundamental del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + ax_2 + bx_3, \\ x_2' = x_2 + cx_3, \\ x_3' = x_3. \end{cases}$$