Álgebra II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

1. Tema 1

2. Relaciones de Ejercicios

2.1. Combinatoria y Teoría de Grafos

Ejercicio 2.1.1. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa circular. Cada persona estrecha la mano a todos los demás excepto a la persona sentada directamente enfrente de la mesa. Dibuja un grafo que modele la situación.

La situación se puede modelar con el grafo de la Figura 2.1.
Su matriz de adyacencia es:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1.2. Seis hermanos (Alonso, Bernardo, Carlos, Daniel, Enrique y Fernando) tienen que emparejarse para compartir habitación en el próximo curso escolar. Cada uno de ellos ha elaborado una lista con los nombres de aquellos con los que quiere emparejarse:

- Lista de Alonso: Daniel.
- Lista de Bernardo: Alonso, Enrique.
- Lista de Carlos: Daniel, Enrique.
- Lista de Daniel: Carlos.
- Lista de Enrique: Daniel, Bernardo, Fernando.
- Lista de Fernando: Alonso, Bernardo.

Dibuja el grafo dirigido que modela esta situación.

La situación se puede modelar con el grafo de la Figura 2.2, donde cada persona viene representada con un vértice con su inicial.

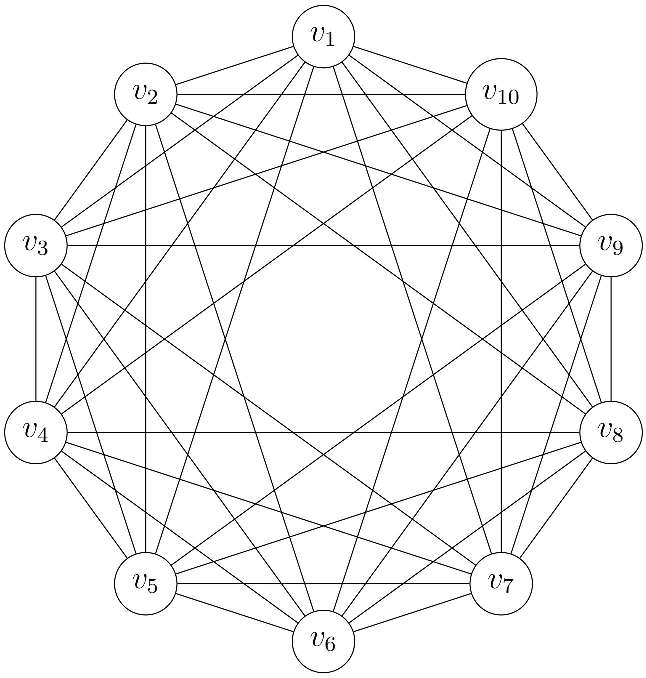


Figura 2.1: Situación del Ejercicio 2.1.1.

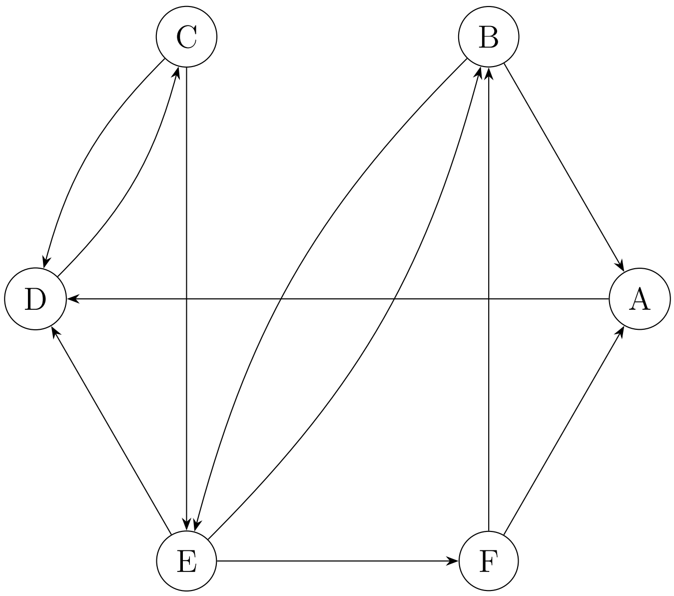
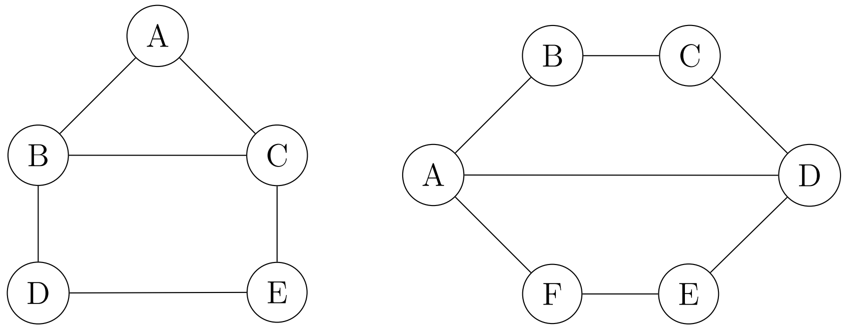


Figura 2.2: Situación del Ejercicio 2.1.2.



(a) Grafo 2.3a. (b) Grafo 2.3b.

Figura 2.3: Grafos para el ejercicio 2.1.3.

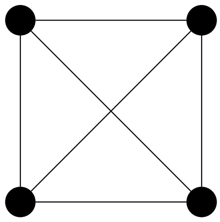


Figura 2.4: Grafo K_4.

Ejercicio 2.1.3. Expresa en forma matricial los grafos de la Figura 2.3.

La matriz de adyacencia del grafo 2.3a es:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

La matriz de adyacencia del grafo 2.3b es:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

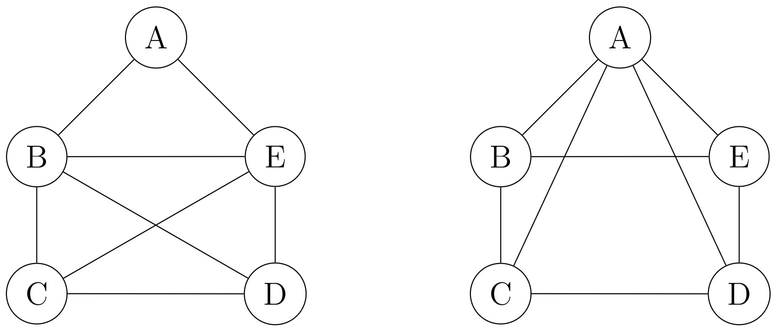
Ejercicio 2.1.4. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismo.

El grafo completo con cuatro vértices es K_4, representado en la Figura 2.4.

Ejercicio 2.1.5. ¿Son isomorfos los grafos de la Figura 2.5? ¿Y los de la Figura 2.6? ¿Y los de la Figura 2.7?

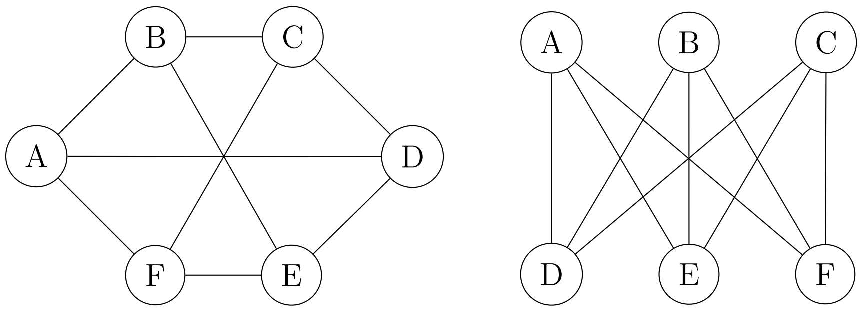
(a) Grafo 2.5a. (b) Grafo 2.5b.

Figura 2.5: Primer par de grafos para el ejercicio 2.1.5.



(a) Grafo 2.6a. (b) Grafo 2.6b.

Figura 2.6: Segundo par de grafos para el ejercicio 2.1.5.



(a) Grafo 2.7a. (b) Grafo 2.7b.

Figura 2.7: Tercer par de grafos para el ejercicio 2.1.5.

Ejercicio 2.1.6. Demostrar que, en cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par. (Así, en un grupo de personas, el número total de personas que estrechan la mano de un número impar de otras personas es siempre par).

Sea el grafo $G(V, E)$ con V el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas. Sea I el conjunto de vértices de grado impar:

$$I = \{v \in V \mid \deg(v) \text{ es impar}\}.$$

Usamos ahora el Lema de Apretón de Manos, descomponiendo V en dos conjuntos disjuntos, I y su complemento $\overline{I}$:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in I} \deg(v) + \sum_{v\notin I} \deg(v) = 2|E| \Longrightarrow \sum_{v\in I} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v\notin I} \deg(v).$$

Por tanto, como $2|E|$ es par, y la suma y resta de números pares es par, tenemos que:

$$\sum_{v\in I} \deg(v) \text{ es par}$$

Por la definición de I, sabemos que dicha sumatoria es una suma de números impares cuya suma es par. Por tanto, como la suma de dos números impares es par, y la suma de un número par y un número impar es impar, tenemos que la cantidad de elementos en I ha de ser par.

$$|I| \text{ es par}$$

Ejercicio 2.1.7. Demostrar que si cada vértice de un grafo G es de grado 2, cada componente conexa de G es un ciclo.

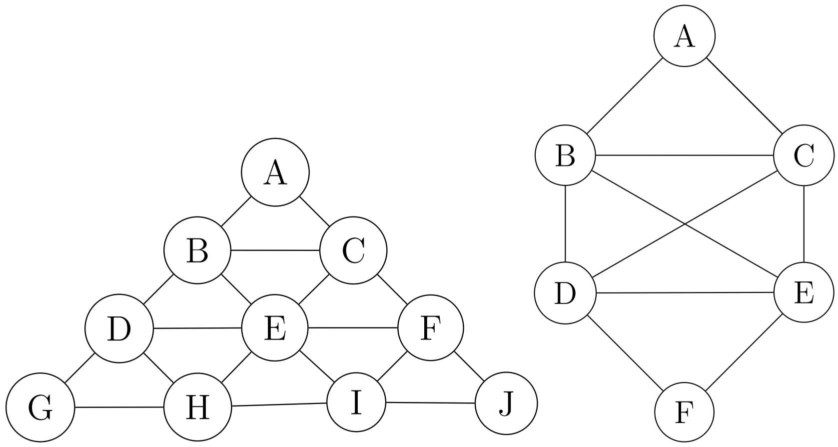
Ejercicio 2.1.8. Los siguientes hechos se conocen de las personas A, B, C, D, E, F, G:

- A habla inglés.
- B habla inglés y español.
- C habla inglés, italiano y ruso.
- D habla japonés y español.
- E habla alemán e italiano.
- F habla francés, japonés y ruso.
- G habla francés y alemán.

Demostrar que cada par de personas entre estas siete puede comunicarse (con la ayuda de intérpretes, si es necesario, tomados de los cinco restantes).

Ejercicio 2.1.9. Demuestra que en todo grafo con más de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 2.1.10. Prueba que si un grafo G contiene solo dos vértices de grado impar entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.



(a) Grafo 2.8a. (b) Grafo 2.8b.

Figura 2.8: Grafos para el ejercicio 2.1.15.

Ejercicio 2.1.11. ¿Existe algún grafo regular de grado 5 con 25 vértices?

Ejercicio 2.1.12. ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

Ejercicio 2.1.13. ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados sean 1, 2, 2, 3, 4 y 4 respectivamente?

Ejercicio 2.1.14. En cada uno de los siguientes casos, dibuja un grafo de Euler que verifique las condiciones, o prueba que tal grafo no existe:

1. Con un número par de vértices y un número par de lados.
2. Con un número par de vértices y un número impar de lados.
3. Con un número impar de vértices y un número par de lados.
4. Con un número impar de vértices y un número impar de lados.

Ejercicio 2.1.15. Encuentra un circuito de Euler para los grafos de la Figura 2.8.

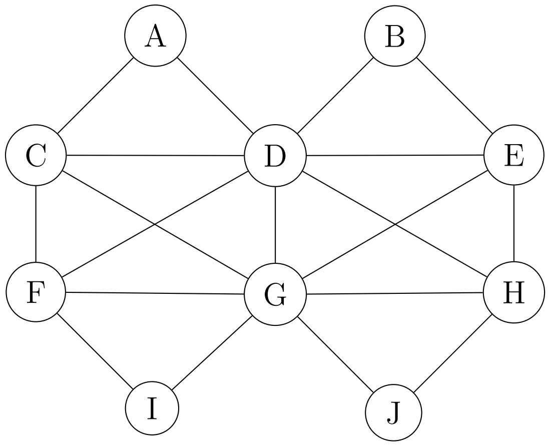
Ejercicio 2.1.16. Encuentra un camino de Euler para los grafos de la Figura 2.9.

Ejercicio 2.1.17. Encontrar un circuito de Euler en el grafo de la Figura 2.10 y un camino de Euler en el grafo de la Figura 2.11.

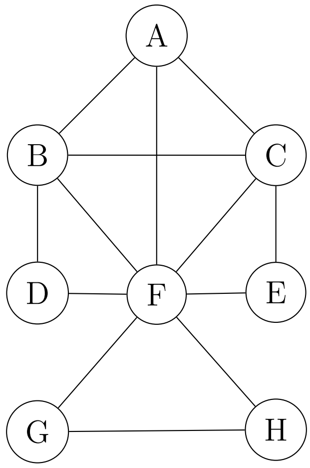
Ejercicio 2.1.18. ¿Para qué valores de n el grafo K_n es un circuito de Euler?

Ejercicio 2.1.19. Un viajante vive en la ciudad A y se supone que visita las ciudades B, C y D antes de volver a A. Encontrar la ruta más corta que consuma este viaje si las distancias entre las cuatro ciudades son, en Km:

- 120 entre A y B.
- 70 entre B y C.
- 140 entre A y C.



(a) Grafo 2.9a.



(b) Grafo 2.9b.

Figura 2.9: Grafos para el ejercicio 2.1.16.

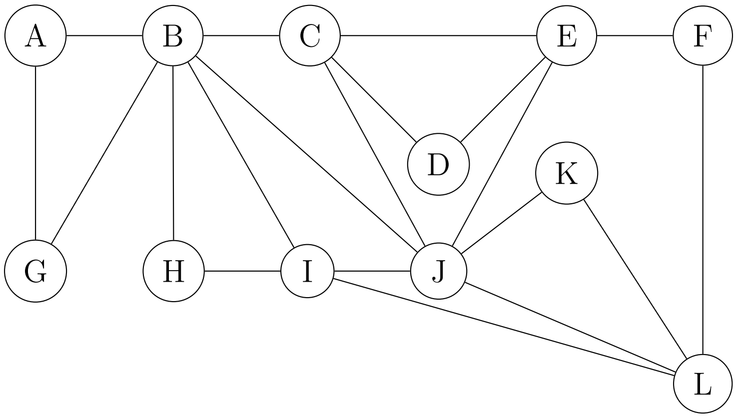


Figura 2.10: Primer grafo para el ejercicio 2.1.17.

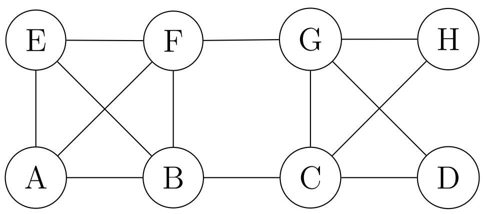


Figura 2.11: Segundo grafo para el ejercicio 2.1.17.

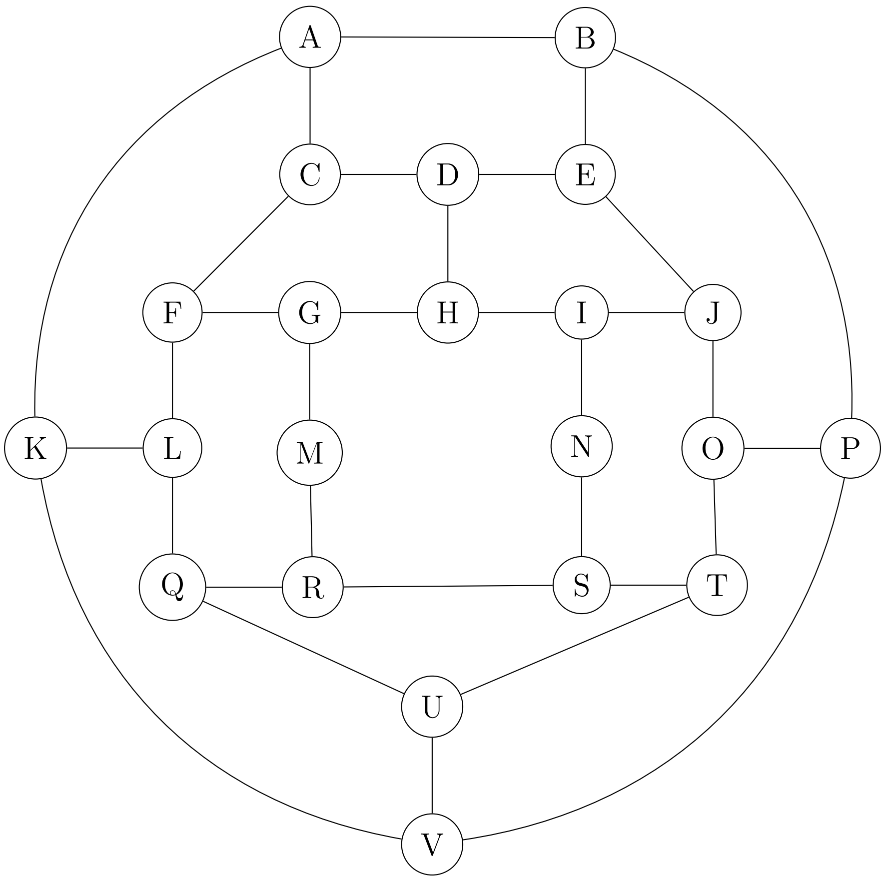


Figura 2.12: Primer grafo para el ejercicio 2.1.21.

- 180 entre A y D.
- 100 entre B y D.
- 110 entre C y D.

Ejercicio 2.1.20. El grafo línea $L(G)$ de un un grafo G se define como sigue: Los vértices de $L(G)$ son los lados de G, $V(L(G)) = E(G)$; y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y solo si los lados correspondientes en G comparten un vértice. Demostrar:

1. Si G es un grafo conexo regular de grado r, entonces $L(G)$ es un grafo de Euler.
2. Si G es un grafo de Euler entonces $L(G)$ es Hamiltoniano.

Ejercicio 2.1.21. De entre los grafos de la Figura 2.12 y la Figura 2.13, ¿cuáles contienen un circuito de Hamilton?

Ejercicio 2.1.22.

1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $4 \geqslant 4 \geqslant 4 \geqslant 3 \geqslant 3 \geqslant 3 \geqslant 2 \geqslant 1$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo que la tenga como sucesión de grados.

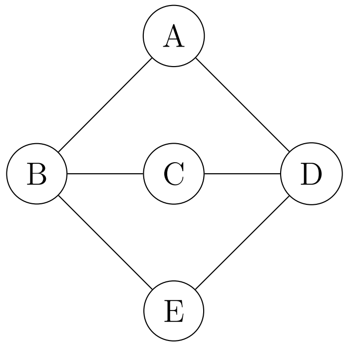


Figura 2.13: Segundo grafo para el ejercicio 2.1.21.

2. El grafo con matriz de adyacencia M dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es de Euler o en él hay un camino de Euler entre dos vértices. Razona cuál es la situación y encuentra, en su caso, el circuito o el camino de Euler que existe.

Ejercicio 2.1.23.

1. En el grafo G cuya matriz de adyacencia es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determina el número de aristas y la sucesión de grados de los vértices y, caso de que G sea de Euler, describe un circuito de Euler en él usando el algoritmo apropiado.

2. Calcula el número de vértices de un grafo plano, conexo y regular de grado 5 con 20 caras.

Ejercicio 2.1.24.

1. La siguiente matriz es la matriz de incidencia o adyacencia de un grafo. Razona qué caso es y dibuja el correspondiente grafo.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ¿Es el grafo anterior de Euler o Hamilton? Razona la respuesta y da un circuito de Euler o Hamilton en caso de que los haya.

2. Aplica el algoritmo para comprobar si la siguiente sucesión

$$6 \geqslant 4 \geqslant 4 \geqslant 3 \geqslant 3 \geqslant 3 \geqslant 3 \geqslant 3$$

   es, o no es, una sucesión gráfica y, en caso de serlo, también aplica el algoritmo para encontrar un grafo que la tenga como sucesión de grados.

Ejercicio 2.1.25. Razona cuál es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. El grafo completo K_n:
   a) Es siempre de Euler.
   b) Es siempre de Hamilton.
   c) Dependiendo de n puede ser, o no, de Hamilton o de Euler.

2. He encontrado un grafo plano y conexo con 200 vértices y:
   a) Un número par de caras y un número impar de lados.
   b) Un número par de lados y un número impar de caras.
   c) Un número par de lados y caras.

3. Tengo un grafo con un solo vértice de grado impar v:
   a) Puedo encontrar un camino que empiece en ese vértice v, recorra todos los lados del grafo solo una vez y vuelva a él.
   b) Si añado un lado que conecte ese vértice con otro cualquiera del grafo, pongamos w, puedo encontrar un camino que empiece en v, recorra todos los lados del grafo (incluido el que he añadido) solo una vez y termine en w.
   c) Es imposible tener un grafo como ese.

4. En un grafo plano con cinco componentes conexas y 24 lados:
   a) El número de vértices y el número de caras son opuestos módulo 30.

b) El número de vértices y el número de caras son congruentes módulo 30.

c) Ninguna de las anteriores es cierta.

5. Dado un grafo regular de grado 1, entonces:

   a) El grafo no puede ser conexo.

   b) El grafo tiene tantas componentes conexas como vértices.

   c) El grafo tiene tantas componentes conexas como lados.

6. Un grafo regular conexo de grado 11 con veinte vértices:

   a) Es siempre de Euler.

   b) Es siempre de Hamilton.

   c) Ninguna de las dos respuestas anteriores es cierta.

7. Elija la respuesta correcta:

   a) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

   b) Todos los grafos con cuatro vértices y cuatro lados son isomorfos.

   c) Sólo hay tres grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

8. Un grafo cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Es de Euler.

   b) No es de Euler pero hay un camino de Euler entre dos vértices.

   c) No es de Euler pero sus componentes conexas sí lo son.

9. Un grafo cuya matriz de incidencia es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Es de Hamilton.

   b) No es de Hamilton pero sus componente conexas sí lo son.

   c) No es de Hamilton y tampoco lo son sus componentes conexas.

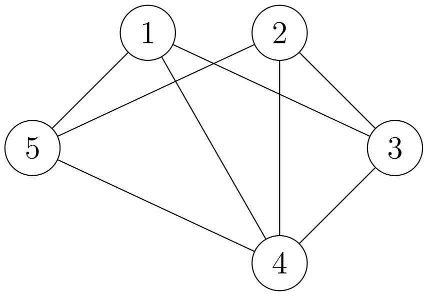


Figura 2.14: Grafo para el ejercicio 2.1.26.

10. La siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Puede ser la matriz de adyacencia de un grafo pero no la de incidencia.

    b) Puede ser la matriz de incidencia de un grafo pero no la de adyacencia.

    c) No puede ser la matriz de adyacencia ni la de incidencia de un grafo.

Ejercicio 2.1.26.

1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión dada por $3 \geqslant 3 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 2$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

2. Considera los grafos G_1 dado por el diagrama de la Figura 2.14 y G_2 con matriz de incidencia
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Estudia si son o no isomorfos, si son o no planos, si son o no de Euler o si hay un camino de Euler (en caso afirmativo aplica el algoritmo para calcular un circuito o un camino de Euler) y si son o no de Hamilton (encontrando el camino en caso afirmativo).

Ejercicio 2.1.27.

1. Si G es un grafo completo con 6 vértices entonces:

    a) G es regular de grado 5.

    b) G tiene 20 aristas.

    c) G es de Euler y de Hamilton.

2. Sea G' un subgrafo completo (pleno) de un grafo G. Entonces:
   a) Si G es de Euler también G' es de Euler.
   b) Si G es de Hamilton también G' es de Hamilton.
   c) Ninguna de las anteriores.
3. Seleccione la respuesta correcta:
   a) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y 5 lados no isomorfos.
   b) Todos los grafos con cuatro vértices y 5 lados son isomorfos.
   c) Todos los grafos con cuatro vértices y cinco lados son de Euler.
4. Sea G un grafo plano conexo regular de grado 6 con 15 caras. Entonces:
   a) G tiene 13 vértices.
   b) El número de vértices es el triple del de aristas.
   c) No existe un tal grafo.
5. Salvo isomorfismos, grafos con 50 vértices y 1225 aristas:
   a) Sólo hay 1.
   b) Hay 2.
   c) No existen grafos en esas condiciones.

Ejercicio 2.1.28.

1. Considera la sucesión $4, 4, 4, 4, 4$.
   a) Utiliza el algoritmo dado en clase para probar que la sucesión es una sucesión gráfica y para dibujar un grafo G que la tenga como sucesión gráfica.
   b) Calcula las matrices incidencia y adyacencia del grafo G obtenido en el apartado anterior.
   c) ¿Es G de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo, utiliza el algoritmo dado en clase para calcular el circuito o el camino de Euler.
   d) ¿Es G de Hamilton? En caso afirmativo calcula el circuito de Hamilton.
   e) ¿Es G plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de la característica de Euler.
2. Demuestra que si G es un grafo de Euler con n vértices que solo tiene 2 vértices de grado 2 entonces el número de aristas es $\geqslant 2n - 2$.

Ejercicio 2.1.29.

1. Considera el subconjunto $X = \{(12), (13), (23)\} \subset S_3$ y el siguiente grafo G: Los vértices de G son los elementos de S_3 y hay un lado entre dos vértices x e y si $xy^{-1} \in X$.

a) Dibuja el grafo.

b) Calcula sus matrices de incidencia y adyacencia.

c) ¿Es de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un ciclo o un camino de Euler.

d) ¿Es de Hamilton? En caso afirmativo calcula el ciclo de Hamilton.

e) ¿Es plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de Euler.

2. Si G es un grafo con n vértices y m lados. Prueba que $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ y que se da la igualdad si y solo si $G = K_n$ es el grafo completo.

Ejercicio 2.1.30. Demuestra, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión de grados de los vértices de un octaedro (poliedro regular con 6 vértices, 8 caras y 12 aristas) es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo G en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Encuentra las matrices de adyacencia e incidencia de G.

Comprueba que el grafo G es plano y estudia si es de Euler y, en caso afirmativo, determina por algún algoritmo explicado en clase un circuito de Euler para G. ¿Es G un grafo de Hamilton? Razona la respuesta.

Ejercicio 2.1.31. Razona cuál es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. La sucesión $70, 69, 68, \ldots, 3, 2, 1$.

   a) Es una sucesión gráfica y su grafo asociado es el completo K_{70}.

   b) Es una sucesión gráfica pero su grafo asociado no es K_{70}.

   c) No es una sucesión gráfica.

2. Tengo un grafo conexo con 6 vértices y 9 lados:

   a) Puedo asegurar que es plano.

   b) Puedo asegurar que no es plano.

   c) Puede ser plano o no serlo.

3. La sucesión $4, 4, 4, 4$:

   a) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 2 si lo es.

   b) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 3 si lo es.

   c) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 4 si lo es.

4. Puedo encontrar un grafo plano conexo con:

   a) Un número impar de vértices, un número impar de lados y un número impar de caras.

   b) Un número par de vértices, un número par de lados y un número impar de caras.

c) Un número impar de vértices, un número par de lados y un número impar de caras.

5. La sucesión $4, 2, 2, 2, 2$:

   a) Es la sucesión de grados de un grafo de Euler y de Hamilton.

   b) Es la sucesión de grados de un grafo de Hamilton y no de Euler.

   c) Es la sucesión de grados de un grafo de Euler y no de Hamilton.

6. Un grafo regular de grado 7:

   a) Tiene que tener al menos 8 vértices y un número impar de lados.

   b) Tiene que tener al menos 8 vértices pero puede tener un número impar o par de lados.

   c) Lo único que puedo afirmar sobre él es que tiene un número par de vértices.

Ejercicio 2.1.32. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H = \langle(123)\rangle$.

1. Construye el conjunto cociente S_4/H de clases laterales por la izquierda xH.

2. Para cada clase xH denotamos $m(xH)$ al máximo común divisor de los órdenes de los elementos en xH. Considera el grafo G con vértices las clases xH y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera el subgrafo G' obtenido a partir de G eliminando la clase $1H$, ¿es G' de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 2.1.33. Se considera el grupo $Q_2 = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, yx = x^{-1}y\rangle$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de Q_2 y en el que, para cualquier $a \in Q_2$, hay un lado entre a y ax y también un lado entre a y ay.

1. Comprueba que G es un grafo regular dando la sucesión de grados de sus vértices y calcula su matriz de adyacencia.

2. Razona si G es un grafo de Hamilton o plano.

3. Razona si G es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 2.1.34. Se considera el grupo $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s\rangle$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de D_4 y en el que, para cualquier $a \in D_4$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Comprueba que G es un grafo regular dando la sucesión de grados de sus vértices y calcula su matriz de adyacencia.

2. Razona si G es un grafo de Hamilton o plano.

3. Razona si G es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 2.1.35. Se considera el grupo diédrico $D_5 = \langle r, s \mid r^5 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s\rangle$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de D_5 y en el que, para cualquier $a \in D_5$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Calcula la sucesión de grados de G y razona si G es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.

2. Considera un nuevo grafo G' obtenido añadiendo a G un nuevo vértice adyacente a todos los de G. Razona si G' es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 2.1.36. Razona cuál es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. La matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
es la de adyacencia de un grafo que:

   a) Es de Euler.

   b) No es de Hamilton.

   c) Es plano.

2. Un grafo plano conexo regular de grado 8 con 23 caras:

   a) No existe.

   b) Tiene 12 aristas.

   c) Tiene 9 vértices.

3. Se tiene que:

   a) Un grafo que es de Euler y de Hamilton siempre es plano.

   b) Un grafo que es plano y de Euler siempre es de Hamilton.

   c) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

4. Se tiene que:

   a) La sucesión $5, 5, 4, 2, 2, 2$ es la sucesión gráfica de un grafo plano.

   b) La sucesión $5, 5, 4, 4, 4, 4$ es la sucesión gráfica de un grafo de Hamilton.

   c) La sucesión $5, 4, 4, 3, 3, 3$ es la sucesión gráfica de un grafo de Euler.

Ejercicio 2.1.37. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H = \langle(123)\rangle$.

1. Construye el conjunto cociente ${}^{S_4}/_{\sim_H}$ de clases laterales por la derecha Hx, $x \in S_4$.

2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos en Hx. Considera el grafo G con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx e Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera, si es posible, un subgrafo G' de G obtenido al suprimir una arista entre dos vértices de G de grado impar. ¿Es G' de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de G'? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en G'.

Ejercicio 2.1.38. Se considera el grupo A_4 y su subgrupo $H = \langle(12)(34)\rangle$. Se considera el grafo G con vértices las clases laterales por la izquierda de H en A_4, xH, y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$, donde $m(Hx)$ denota el máximo común divisor de los órdenes de los elementos en xH. Razone cuál de las siguientes es la respuesta correcta:

1. G es plano pero no es de Hamilton.

2. G no es plano y tiene dos vértices conectados por un camino de Euler.

3. G es de Hamilton pero no es de Euler.

Ejercicio 2.1.39. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H = \langle(1234)\rangle$.

1. Construye el conjunto cociente S_4/H de clases laterales por la izquierda xH. ¿Es $H \lhd S_4$?

2. Para cada clase xH denotamos $m(xH)$ al máximo común divisor de los órdenes de los elementos en xH. Considera el grafo G con vértices las clases xH y en el que hay un lado entre dos clases xH e yH si $m(xH) = m(yH)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera el subgrafo G' obtenido a partir de G eliminando la clase $(13)H$. ¿Es G' de Euler? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en G'.

Ejercicio 2.1.40. Razona cuál es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. Se tiene que:

   a) Hay un grafo conexo regular de grado 6 con 22 caras y 24 aristas.

   b) La sucesión $4, 4, 4, 3, 3$ es la sucesión gráfica de un grafo plano que tiene un camino de Euler entre dos vértices.

   c) Un grafo conexo y plano es de Euler si y solo si es de Hamilton.

2. La matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la de adyacencia de un grafo:

   a) Con 11 aristas y que es de Euler y de Hamilton.

   b) Que es conexo y plano pero no de Hamilton.

   c) Que no es de Hamilton ni plano ni de Euler.

Ejercicio 2.1.41. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H = \langle(134)\rangle$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/\sim_H$ de clases laterales por la derecha Hx, $x \in S_4$.

2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos en Hx. Considera el grafo G con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx y Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia.

3. ¿Hay alguna condición suficiente que asegure que G es de Hamilton? ¿Y necesaria para ser plano? ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

4. Considera el subgrafo G' de G obtenido al suprimir la arista entre las clases $H(23)$ y $H(24)$. ¿Es G' de Hamilton, plano o de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de G'? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en G'.