Geometría II
Examen V

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2019-20.

Grado Matemáticas.

Descripción Parcial del Tema 2. Formas Bilineales Simétricas.

Fecha 5 de mayo de 2020.

Ejercicio 1. Consideramos sobre $\mathbb{R}^3$ la métrica g cuya forma cuadrática asociada es:

$$\omega(x,y,z) = ax^2 + 2xy + y^2 + 2yz + az^2, \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Encontrar los valores de a para los que g es definida positiva.

   Tenemos que la matriz asociada a g en la base usual es:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   Para que A sea definida positiva, es necesario que todos los menores principales sean positivos. Por tanto,

$$|a| = a \qquad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \qquad |A| = a^2 - 2a = a(a-2)$$

   Por tanto, para que g sea definida positiva es necesario que $a > 2$.

2. Para $a = 0$, obtener la base que nos da el Teorema de Sylvester.

   Sea $\mathcal{B}_S = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$ Tengo que $rg(A) = 2$, por lo que $Nul(g) = 1$. Obtengo $\bar{e_3} \in Ker(g)$.

$$\begin{aligned}
Ker(g) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(u,v) = 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

   Por tanto, $\bar{e_3} = (1, 0, -1)^t_{\mathcal{B}_u} = e_1 - e_3$.

$$g(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = 0$$

   Sea $\bar{e_1} = e_2$.

$$g(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g(e_2, e_2) = 1$$

Busco ahora $\bar{e_2} \in < \bar{e_1} >^\perp$:

$$
\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(\bar{e_1}, v) = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

Sea $\bar{e_2} = (1, -1, 0)^t$. Tenemos que:

$$g(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) - 2g(e_1, e_2) = 0 + 1 - 2 = -1$$

Por tanto, dado $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tenemos que:

$$M(g; \mathcal{B}_S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Para $a = 1$, encontrar la ecuación reducida de la cuádrica

$$ax^2 + 2xy + y^2 + 2yz + az^2 = m - 5$$

donde m es el último dígito de vuestro DNI.

Como $m - 5$ es una constante, obtengo en primer lugar la expresión reducida de ω para $a = 1$. Es decir, clasifico la matriz siguiente:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tengo que $|A| = 1 - 1 - 1 = -1$. Además, g no es definida negativa, ya que $g(e_1, e_1) = 1$. Por tanto, tenemos que:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en la Base de Sylvester, tenemos que:

$$\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2$$

Por tanto, la expresión reducida de la cuádrica dada es:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = m - 5$$

Ejercicio 2. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sean A, B dos matrices simétricas reales de orden 2 tales que A^2 y B^2 son congruentes sobre $\mathbb{R}$. Entonces, A y B son congruentes sobre los complejos.

   Veamos en primer lugar que, dado $A \in S_2(\mathbb{R})$, se cumple lo siguiente:

$$A^2 = 0 \Longrightarrow A = 0 \tag{1}$$

   Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A^2 = 0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+b) & b^2+c^2 \end{pmatrix} = 0$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 = 0 \Longrightarrow a = b = 0 \\ b^2+c^2 = 0 \Longrightarrow b = c = 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, $A = 0$.

   Veamos ahora que, dada $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$rg(A) = rg(A^2) \tag{2}$$

   Tenemos que $0 \leq rg(A) \leq 2$:

   - Supongamos que $rg(A) = 2$.
     Tenemos que $|A| \neq 0 \Longrightarrow |A^2| = |A|^2 \neq 0 \Longrightarrow rg(A^2) = 2$.
   - Supongamos que $rg(A) = 1$.
     Tenemos que $|A| = 0$ pero $A \neq 0 \Longrightarrow |A^2| = |A|^2 = 0 \Longrightarrow rg(A^2) < 2$.
     Como $A \neq 0$, por la E. 1, tenemos que $A^2 \neq 0$. Por tanto, $rg(A^2) > 0$.
     En conclusión, tenemos que $rg(A^2) = 1$.
   - Supongamos que $rg(A) = 0$.
     Entonces, $A = 0 \Longrightarrow A^2 = 0 \Longrightarrow rg(A^2) = 0$.

   Por tanto, $rg(A) = rg(A)^2$.

   Procedemos ahora a demostrar lo pedido. Como $A^2 \sim_c B^2$, se tiene que:

$$rg(A) \overset{Ec.\,2}{=} rg(A^2) \overset{A^2 \sim_c B^2}{=} rg(B^2) \overset{Ec.\,2}{=} rg(B)$$

   Por tanto, tenemos que $rg(A) = rg(B)$.

   Por el Teorema de Sylvester en el caso de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $rg(A) = rg(B) \Longrightarrow A \sim_c B$ sobre $\mathbb{C}$.

   Por tanto, es **cierto**.

2. Sea g una métrica sobre $\mathbb{R}^3$ y $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos planos vectoriales distintos. Si g es definida positiva sobre U_1 y U_2, entonces g es definida positiva en $\mathbb{R}^3$.

   Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, y sea:

$$A = M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Como $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que es una métrica.

   Sea $U_1 = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, $U_2 = \mathcal{L}(\{e_2, e_3\})$. Tenemos que g es definida positiva sobre ambos subespacios, pero

$$|A| = 8 - 10^2 < 0$$

   Por tanto, tenemos que g no puede ser definida positiva. Por tanto, es **falso**.

3. Sea (V^2, g) un plano vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base con $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1$, $g(e_1, e_2) \neq 0$ y $f : V \to V$ un endomorfismo dado por:

$$f(e_1) = e_2 \qquad f(e_2) = e_1.$$

   Entonces f es un endomorfismo autoadjunto.