Métodos Numéricos II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Métodos Numéricos II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Resolución numérica de ecuaciones y sistemas

1.1.1. Relación 1

Ejercicio 1.1.1.1. Se considera el problema de encontrar las soluciones reales de la ecuación $x + 1/2 - 2\operatorname{sen}(\pi x) = 0$ en el intervalo $[1/2, 3/2]$.

1. ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $[1/2, 3/2]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} f: & [1/2, 3/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + 1/2 - 2\operatorname{sen}(\pi x) \end{array}$$

   Sabemos que $f \in C^\infty\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$, y además:

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$
   $$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 > 0$$

   Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1/2, 3/2]$. Por tanto, podemos aplicar el método de bisección. Calculamos las tres primeras iteraciones:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0,5	1,5	1	1,5
1	0,5	1	0,75	−0,1642
2	0,75	1	0,875	0,6096
3	0,75	0,875	0,8125	

2. Halle una cota del error que se comete si consideramos la última de las iteraciones del apartado anterior como el valor de la solución del problema dado.

   Tenemos que:
   $$|e_3| \leqslant \frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

3. ¿Cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para garantizar un error menor que 10^{-5}?

   Para garantizar un error menor que 10^{-5} necesitamos que:

$$|e_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5} \iff 10^5 \leqslant 2^{n+1} \iff n \geqslant \log_2(10^5) - 1 \approx 15{,}6096$$

   Como n debe ser entero, necesitamos al menos 16 iteraciones.

Ejercicio 1.1.1.2. Se quiere calcular el inverso de un número real $c > 0$ sin efectuar divisiones. Para ello, se elige un valor $x_0 > 0$ y se considera el método iterativo dado por $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, $n \geqslant 0$.

1. Demuestre que la sucesión generada por dicho método converge a $1/c$ si y sólo si $0 < x_0 < 2/c$.

   Observación. Comience demostrando por inducción que $r_n = r_0^{2^n}$ $\forall n \geqslant 0$ siendo $r_n = 1 - cx_n$.

   Demostramos por inducción dicha observación:

   - Caso base: $n = 0$.
$$r_0^{2^0} = r_0^1 = r_0$$
   - Paso inductivo: Supongamos que $r_n = r_0^{2^n}$.
$$\begin{aligned} r_0^{2^{n+1}} &= \left(r_0^{2^n}\right)^2 = r_n^2 = (1 - cx_n)^2 = 1 - 2cx_n + c^2x_n^2 = 1 - cx_n\,(2 - cx_n) = \\ &= 1 - cx_{n+1} = r_{n+1} \end{aligned}$$

     Por lo tanto, $r_n = r_0^{2^n}$ para todo $n \geqslant 0$. Por la suma geométrica, tenemos que:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \text{ es convergente } &\iff \{r_n\} \text{ es convergente } \iff \\ &\iff |r_0| < 1 \iff |1 - cx_0| < 1 \iff 0 < cx_0 < 2 \iff \\ &\iff 0 < x_0 < \frac{2}{c} \end{aligned}$$

     En el caso de que sea convergente, por la unicidad del límite, se tiene que:

$$1 - c\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1 - cx_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{c}$$

2. Demuestre que la convergencia referida en el apartado anterior es al menos cuadrática. ¿Cuál es la constante asintótica del error?

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[0, \frac{2}{c}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(2 - cx) \end{array}$$

   Tenemos que:
$$g\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(2 - \frac{c}{c}\right) = \frac{1}{c}$$

Calculamos las dos primeras derivadas de g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - cx - cx = 2(1 - cx) \\ g''(x) &= -2c \end{aligned}$$

Evaluando en el punto fijo de g:

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{c}\right) &= 2(1 - c \cdot \frac{1}{c}) = 2(1-1) = 0 \\ g''\left(\frac{1}{c}\right) &= -2c \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ tiene orden de convergencia cuadrático, con constante asintótica del error:

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2c = c$$

3. Compruebe que el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a una cierta ecuación $f(x) = 0$ cuya única raíz es $^1/_c$.

   Sea f la función que buscamos. Entonces:

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x) = x(2 - cx) \Longrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = x - 2x + cx^2 = cx^2 - x$$

   Podríamos intentar resolver dicha ecuación diferencial en variables separadas, pero directamente probaremos con varias funciones que tienen a $^1/_c$ como raíz, y veamos con cuál se da lo anterior.

   - $f(x) = x - {}^1/_c$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ \frac{f(x)}{f'(x)} &= f(x) = x - {}^1/_c \end{aligned}$$

     Por tanto, vemos que esta no es la función que buscamos.

   - $f(x) = c - {}^1/_x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= {}^1/_{x^2} \\ \frac{f(x)}{f'(x)} &= cx^2 - x \end{aligned}$$

     Por tanto, esta es la función que buscamos.

   Por tanto, el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x) = c - {}^1/_x$, cuya única raíz es $^1/_c$.

Ejercicio 1.1.1.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 - 2x^2 - 5 \end{array}$$

Sabemos que $f \in C^\infty([1, 4])$, y además:

$$f(1) = 1 - 2 - 5 = -6 < 0$$
$$f(4) = 64 - 32 - 5 = 27 > 0$$

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1, 4]$. Veamos ahora que esta es única:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$$

- Si $x \in [1, 4/3]$, entonces $f'(x) \leqslant 0$.

  Como $f(1) < 0$ y f es continua, entonces f no tiene raíces reales en $[1, \frac{4}{3}]$.

- Si $x \in [4/3, 4]$, entonces $f'(x) \geqslant 0$.

  Como $f(4/3) < 0$ y f en este intervalo es inyectiva, entonces, de tener una raíz, sería única.

Por tanto, la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[4/3, 4]$. Buscamos ahora demostrar la convergencia de Newton-Raphson:

1. $f(4/3)f(4) < 0$.

2. $f'(x)$ no se anula en $]4/3, 4]$.

3. $f''(x) = 6x - 4$ no se anula en $]4/3, 4]$.

4. Comprobemos que tomar $x_0 = 4$ sirve para garantizar la convergencia.

$$f(4)f''(4) = 27 \cdot 20 = 540 > 0$$

Por tanto, podemos aplicar el método de Newton-Raphson empleando como semilla $x_0 = 4$. Calculamos las dos primeras iteraciones:

n	x_n
0	4
1	3,15625
2	2,77860

Ejercicio 1.1.1.4. Deduzca la fórmula para el cálculo de las iteraciones del método de la secante a partir de su interpretación gráfica.

Dados dos puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, la recta secante que pasa por ellos es:

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

El punto de corte de la recta secante con el eje x es:

$$\begin{aligned}\frac{0 - f(x_n)}{x - x_n} &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\\ x - x_n &= -f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\\ x &= x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\end{aligned}$$

Por tanto, denotamos por x_{n+1} a dicho punto de corte, y obtenemos la fórmula del método de la secante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ejercicio 1.1.1.5. Dada la ecuación $x - 1/2\cos(x) = 0$, se pide:

1. Demuestre que tiene una única solución real en el intervalo $[0, \pi/2]$.

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} f: & [0, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - 1/2\cos(x) \end{array}$$

   Sabemos que $f \in C^\infty([0, \pi/2])$. Estudiemos su monotonía:

   $$f'(x) = 1 + 1/2\operatorname{sen}(x) > 0 \ \forall x \in [0, \pi/2]$$

   Por tanto, f es inyectiva. Veamos ahora que tiene una única raíz:

   $$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 1/2\cos(0) = -1/2 < 0 \\ f(\pi/2) &= \pi/2 > 0 \end{aligned}$$

   Por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[0, \pi/2]$. Por la inyectividad de f, esta raíz es única.

2. Describa un método de iteración funcional, distinto del método de Newton-Raphson, que permita aproximar dicha solución, razonando la respuesta.

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} g: & [0, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1/2\cos(x) \end{array}$$

Veamos que las raíces de f son los puntos fijos de g:

$$f(x) = 0 \iff x = {}^1\!/\!{}_2 \cos(x) \iff x = g(x)$$

Comprobamos que la función será contractiva en un entorno del punto fijo s:

$$|g'(x)| = {}^1\!/\!{}_2 |\operatorname{sen}(x)| \leqslant {}^1\!/\!{}_2 < 1$$

Por tanto, podemos aplicar el método de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ para aproximar la solución de la ecuación $x - {}^1\!/\!{}_2 \cos(x) = 0$ partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a la solución. Para especificar cuánto es "suficientemente próxima", veamos que $g\left([0, {}^\pi\!/\!{}_2]\right) \subset [0, {}^\pi\!/\!{}_2]$. Sea $x \in [0, {}^\pi\!/\!{}_2]$, y entonces:

$$0 \leqslant g(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, g es una contracción en $[0, {}^\pi\!/\!{}_2]$, y por tanto, podemos aplicar el método de iteración funcional para aproximar la solución de la ecuación $x - {}^1\!/\!{}_2 \cos(x) = 0$.

3. Realice las dos primeras iteraciones del método descrito en el apartado anterior.

n	x_n
0	${}^\pi\!/\!{}_4 \approx 0{,}785398$
1	0,3535533
2	0,4690742
3	0,4459936

4. ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-2} en el método dado en el apartado 2?

Para garantizar un error menor que 10^{-2} necesitamos que:

$$|e_n| \leqslant \frac{L^n}{1-L}\cdot |x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{2^n(1-{}^1\!/\!{}_2)}\cdot |x_1 - x_0| = \frac{0{,}43199}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-2} \iff$$
$$\iff 2^{n-1} \geqslant \frac{0{,}43199}{10^{-2}} = 43{,}199 \iff n \geqslant \log_2(43{,}199) + 1 \approx 6{,}4329$$

Como n debe ser entero, necesitamos al menos 7 iteraciones.

Ejercicio 1.1.1.6. Usando algún resultado sobre convergencia para los métodos de iteración funcional, demuestre el teorema de convergencia local para ceros simples del método de Newton-Raphson.

Sea f una función de clase C^2 en un entorno de la raíz s de la ecuación $f(x) = 0$, y sea $f'(s) \neq 0$. Consideramos la función siguiente, definida en un entorno de s:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Sabemos que $g(s) = s$. Calculemos su derivada:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 0 < 1$$

Por tanto, por el Teorema de Convergencia Local de los métodos de iteración funcional, existe un intervalo que contiene a la raíz de forma que el método de Newton-Raphson converge a la raíz de forma cuadrática para cualquier semilla en dicho intervalo.

Ejercicio 1.1.1.7. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se considera el siguiente método, donde $m \neq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$$

1. Interprete gráficamente el cálculo de las iteraciones según dicho método.

   Tenemos que:

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m} \Longrightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{m} \Longrightarrow m = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

   Por tanto, pensando en la ecuación punto-pendiente de la recta, vemos que x_{n+1} se calcula como el punto de corte de la recta que pasa por el punto $(x_n, f(x_n))$ y tiene pendiente m con el eje x.

2. ¿Qué condiciones para la función f, para la constante m y para el valor inicial x_0 asegurarían unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado?

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccc} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{m} \end{array}$$

   Debido a que no conocemos mucho sobre f, no podremos llegar a grandes resultados. Tan solo podremos garantizar resultados locales, por lo que usaremos el Teorema de la Convergencia Local. Consideramos $s \in I$ raíz de f, es decir, $f(s) = 0$. Entonces, $g(s) = s$. Calculamos la derivada de g:

   $$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$$

   Imponemos ahora $|g'(s)| < 1$ para garantizar la convergencia local:

   $$|g'(s)| = \left|1 - \frac{f'(s)}{m}\right| < 1 \iff 0 < \frac{f'(s)}{m} < 2$$

   Por tanto, garantizando $0 < {}^{f'(s)}/_{m} < 2$ se tiene que el método converge a la raíz s de forma local; es decir, para semillas suficientemente cercanas a s.

Ejercicio 1.1.1.8. Localice un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, y sepárelas. Tomando $x_0 = -2$ como semilla, calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson usando el algoritmo de Horner.

En primer lugar, calculamos:

$$\alpha = \text{máx}\left\{\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right\} = 2$$

Por tanto, tenemos que todas las raíces de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ están en el intervalo $[-3, 3]$. Para separarlas, construimos la sucesión de Sturm correspondiente. Definimos:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \\
f_1(x) &= f_0'(x) = 8x^3 - 6x + 3
\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 & 8x^3 - 6x + 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x & \frac{1}{4}x \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 4 &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= -4 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\
&= -4 \cdot \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 4\right) \\
&= 6x^2 - 9x + 16
\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
8x^3 \qquad\quad - 6x \;\; + 3 & 6x^2 - 9x + 16 \\ \cline{2-2}
-8x^3 + 12x^2 - \frac{64}{3}x \qquad\; & \frac{4}{3}x + 2 \\ \cline{1-1}
12x^2 - \frac{82}{3}x \;\; + 3 & \\
-12x^2 + 18x - 32 & \\ \cline{1-1}
-\frac{28}{3}x - 29 &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= -3 \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\
&= -3 \cdot \left(-\frac{28}{3}x - 29\right) \\
&= 28x + 87
\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_4(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
6x^2 \quad - 9x \quad + 16 & 28x + 87 \\ \cline{2-2}
-6x^2 - \frac{261}{14}x \qquad\quad & \frac{3}{14}x - \frac{387}{392} \\ \cline{1-1}
-\frac{387}{14}x \quad + 16 & \\
\frac{387}{14}x + \frac{33669}{392} & \\ \cline{1-1}
\frac{39941}{392} &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= -\frac{392}{39941} \cdot R(f_2(x), f_3(x)) \\ &= -\frac{392}{39941} \cdot \left(\frac{39941}{392}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \\ f_1(x) &= 8x^3 - 6x + 3 \\ f_2(x) &= 6x^2 - 9x + 16 \\ f_3(x) &= 28x + 87 \\ f_4(x) &= -1 \end{aligned}$$

Separamos ahora las raíces:

x	$\operatorname{sgn}(f_0(x))$	$\operatorname{sgn}(f_1(x))$	$\operatorname{sgn}(f_2(x))$	$\operatorname{sgn}(f_3(x))$	$\operatorname{sgn}(f_4(x))$	Nº Cambios Signo
-3	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
-2	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
-1	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
1	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1

Por tanto, tenemos que hay una raíz en $[-2, -1]$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Calculamos ahora las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson con semilla $x_0 = -2$ (aunque no hallamos demostrado la convergencia):

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-2	10	-49
1	$-1{,}795918$	$1{,}741690$	$-32{,}563821$
2	$-1{,}742433$	$0{,}099956$	$-28{,}866623$
3	$-1{,}738970$		

donde tan solo se muestran las evaluaciones con Horner para x_0:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ -2 & & -4 & 8 & -10 & 14 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -7 & \boxed{10} \\ -2 & & -4 & 16 & -42 & \\ \hline & 2 & -8 & 21 & \boxed{-49} & \end{array}$$

Ejercicio 1.1.1.9. Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}.$$

Halle los valores de a y b para que, partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a s, se asegure la convergencia al menos cuadrática. Para tales valores, calcule x_3 para $x_0 = 1$.

En primer lugar, es necesario probar que $g(s) = s$ para que s sea un punto fijo de g:

$$s = g(s) = \frac{as + s^3}{3 + bs^2} = \frac{as + 3s}{3 + 3b} \Longrightarrow as + 3s = 3s + 3bs \Longrightarrow a = 3b$$

Por otro lado, para asegurar la convergencia local al menos cuadrática, es necesario que $g'(s) = 0$:

$$g'(s) = \frac{(a + 3s^2)(3 + bs^2) - (as + s^3)2bs}{(3 + bs^2)^2} = \frac{(a + 9)(3 + 3b) - (as + 3s)2bs}{(3 + 3b)^2} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3 + 3b \neq 0 \\ (a + 9)(3 + 3b) - (as + 3s)2bs = 0 \end{cases}$$

Empleando que $a = 3b$, obtenemos:

$$(3b+9)(3+3b)-(3b+3)2bs^2 = 0 \Longrightarrow (3+3b)(3b+9-6b) = 0 \Longrightarrow -3b+9 = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Por tanto, $a = 9$, $b = 3$. Calculamos ahora las tres primeras iteraciones con $x_0 = 1$ (aunque no hayamos demostrado la convergencia):

n	x_n
0	1
1	1,666667
2	1,732026
3	1,732051

Ejercicio 1.1.1.10. Se desea aplicar un método iterativo del siguiente tipo para obtener $\sqrt[3]{7}$.

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + q \cdot \frac{7}{x_n^2} + r \cdot \frac{7^2}{x_n^5}$$

Halle los valores de p, q, r para que la convergencia local del método sea al menos cúbica. Realice dos iteraciones partiendo de $x_0 = 2$.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & p \cdot x + q \cdot \dfrac{7}{x^2} + r \cdot \dfrac{49}{x^5} \end{array}$$

Sea ahora $s = \sqrt[3]{7}$, de la cual tan solo conocemos que $s^3 = 7$. En primer lugar, es necesario probar que s es un punto fijo de g:

$$s = g(s) = p \cdot s + q \cdot \frac{7}{s^2} + r \cdot \frac{49}{s^5}$$

Dividiendo entre s (que sabemos que es distinto de 0), obtenemos:

$$1 = p + q \cdot \frac{7}{s^3} + r \cdot \frac{49}{s^6} \Longrightarrow 1 = p + q \cdot \frac{7}{7} + r \cdot \frac{49}{49} \Longrightarrow 1 = p + q + r$$

Por otro lado, para asegurar la convergencia local al menos cúbica, es necesario que $g'(s) = g''(s) = 0$:

$$\begin{aligned} g'(s) &= p - \frac{7 \cdot 2q}{s^3} - \frac{49 \cdot 5r}{s^6} = 0 \Longrightarrow p - 2q - 5r = 0 \\ g''(s) &= \frac{7 \cdot 2 \cdot 3q}{s^4} + \frac{49 \cdot 5 \cdot 6r}{s^7} = 0 \Longrightarrow \frac{6q}{s} + \frac{30r}{s} = 0 \Longrightarrow q + 5r = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} p + q + r = 1 \\ p - 2q - 5r = 0 \\ q + 5r = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, obtenemos $q = -5r$, y sustituyendo en la segunda obtenemos $p = q$. sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$-5r - 5r + r = 1 \Longrightarrow -9r = 1 \Longrightarrow r = -\frac{1}{9} \Longrightarrow \begin{cases} p = 5/9 \\ q = 5/9 \\ r = -1/9 \end{cases}$$

Realizamos ahora las dos primeras iteraciones con $x_0 = 2$ (aunque no hayamos demostrado la convergencia):

n	x_n
0	2
1	1,9131944
2	1,9129312

Ejercicio 1.1.1.11. Sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$.

1. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$?

   Podríamos demostrarlo estudiando la monotonía y haciendo uso del Teorema de Bolzano, pero de cara al último apartado lo haremos calculando la sucesión de Sturm. Definimos:

   $$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = x^5 + x^2 - 1 \\ f_1(x) &= f_0'(x) = 5x^4 + 2x \end{aligned}$$

   Calculamos ahora $f_2(x)$.

   $$\begin{array}{rl|l} x^5 & + x^2 - 1 & 5x^4 + 2x \\ \cline{3-3} - x^5 - \frac{2}{5}x^2 & & \frac{1}{5}x \\ \hline & \frac{3}{5}x^2 - 1 & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -5 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -5 \cdot \left(\frac{3}{5}x^2 - 1 \right) \\ &= -3x^2 + 5 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^4 & & +2x & -3x^2+5 \\ \cline{4-4} -5x^4 & +\frac{25}{3}x^2 & & -\frac{5}{3}x^2 - \frac{25}{9} \\ \cline{1-2} & \frac{25}{3}x^2 & +2x & \\ & -\frac{25}{3}x^2 & +\frac{125}{9} & \\ \cline{2-3} & & 2x+\frac{125}{9} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -9 \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -9 \cdot \left(2x + \frac{125}{9} \right) \\ &= -18x - 125 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_4(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} -3x^2 & & +5 & -18x-125 \\ \cline{4-4} 3x^2 & +\frac{125}{6}x & & \frac{1}{6}x - \frac{125}{108} \\ \cline{1-2} & \frac{125}{6}x & +5 & \\ & -\frac{125}{6}x & -\frac{15625}{108} & \\ \cline{2-3} & & -\frac{15085}{108} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= -\frac{108}{15085} \cdot R(f_2(x), f_3(x)) \\ &= -\frac{108}{15085} \cdot \left(-\frac{15085}{108} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^5 + x^2 - 1 \\ f_1(x) &= 5x^4 + 2x \\ f_2(x) &= -3x^2 + 5 \\ f_3(x) &= -18x - 125 \\ f_4(x) &= 1 \end{aligned}$$

Antes de separar las raíces, calculamos un intervalo en el cual estén todas las raíces. Para ello, calculamos:

$$\alpha = \text{máx}\,\{1, 1, 1\} = 1$$

Por tanto, tenemos que todas las raíces de la ecuación $x^5 + x^2 - 1 = 0$ están en el intervalo $[-2, 2]$. Separamos ahora las raíces:

x	$\text{sgn}(f_0(x))$	$\text{sgn}(f_1(x))$	$\text{sgn}(f_2(x))$	$\text{sgn}(f_3(x))$	$\text{sgn}(f_4(x))$	Nº Cambios Signo
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
-1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	0	$+$	$-$	$+$	3
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	2
2	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2

Por tanto, tan solo tiene una raíz real, y está en el intervalo $[0, 1]$.

2. Pruebe que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3 + 1}}$$

converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raíz de $f(x) = 0$.

Comprobemos en primer lugar que tiene puntos fijos. Tenemos que:

$$g(x) = x \iff x = \sqrt{\frac{1}{x^3 + 1}} \iff x^2 = \frac{1}{x^3 + 1} \iff x^5 + x^2 - 1 = 0 \iff f(x) = 0$$

Por tanto, g tiene como único punto fijo la raíz de f en $[0, 1]$.

Comprobemos ahora que su primera derivada está acotada por uno. Calculémosla:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\sqrt{x^3+1}}{2} \cdot \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^3+1)^{3/2}} \\
g''(x) &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x(x^3+1)^{3/2} - x^2 \cdot 3/2 \cdot (x^3+1)^{1/2} \cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \\
&= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x(x^3+1) - x^2 \cdot 3/2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^{5/2}} = \\
&= -\frac{12x(x^3+1) - x^2 \cdot 9 \cdot 3x^2}{4(x^3+1)^{5/2}} = -\frac{-15x^4 + 12x}{4(x^3+1)^{5/2}} = \frac{3x(5x^3-4)}{4(x^3+1)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Por tanto, los candidatos a extremos relativos de g' son el 0 y $\sqrt[3]{4/5}$. Estudiamos la monotonía en $[0, 1]$:

- Si $x \in [0, \sqrt[3]{4/5}[$, entonces $g''(x) < 0$.
- Si $x \in]\sqrt[3]{4/5}, 1]$, entonces $g''(x) > 0$.

Evaluamos en el mínimo local y en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned}
g'(0) &= 0 \\
g'\left(\sqrt[3]{4/5}\right) &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{16/25}}{(9/5)^{3/2}} = -\frac{\sqrt[6]{12500}}{9} \approx -0{,}53 \\
g'(1) &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx -0{,}53
\end{aligned}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados, para cada $x \in [0,1]$ se tiene que:

$$-0{,}53 \leqslant g'(x) \leqslant 0 \Longrightarrow |g'(x)| < 1$$

Por tanto, g es contráctil. Notemos que no es necesario demostrar que $g([0,1]) \subseteq [0,1]$ ya que ya hemos demostrado la existencia y unicidad del punto fijo. Por tanto, por el Teorema de Convergencia de los Métodos de Iteración Funcional, el método de iteración funcional converge al punto fijo de g en $[0,1]$, que es la raíz de f en $[0,1]$.

3. Localice todas las raíces reales de $f(x)$.

   Ya se ha realizado en el primer apartado.

Ejercicio 1.1.1.12. A partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra, determine gráficamente las dos aproximaciones siguientes que generan los métodos de Newton-Raphson y de la secante partiendo de las semillas que aparecen en cada caso. Deduzca si hay convergencia y hacia qué solución de $f(x) = 0$.

1. Método de Newton-Raphson: El enunciado se muestra en la Figura 1.1, y la solución en la Figura 1.3.

   Podemos intuir que el método de Newton-Raphson convergerá a la segunda raíz de f comenzando por la izquierda.

2. Método de la secante: El enunciado se muestra en la Figura 1.2, y la solución en la Figura 1.4.

   Podemos intuir de nuevo que el método de la secante convergerá a la segunda raíz de f comenzando por la izquierda.

Ejercicio 1.1.1.13. Se considera la ecuación $xe^{-x/3} + 1 = 0$ y los métodos de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ dados por las funciones

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= -e^{x/3}, & g_2(x) &= e^{x/3}, \\
g_3(x) &= 3\ln(-x), & g_4(x) &= \frac{x - e^{x/3}}{2}.
\end{aligned}$$

1. Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación.

   Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & xe^{-x/3} + 1
\end{array}$$

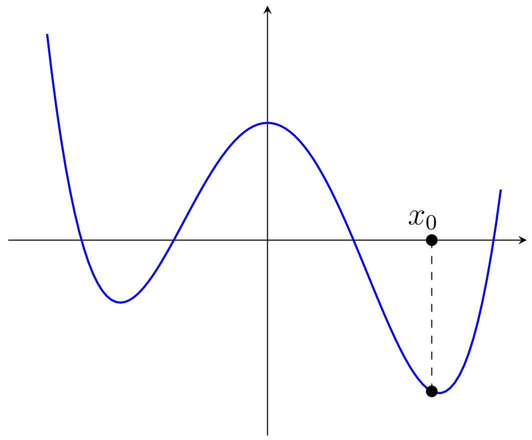

Figura 1.1: Semilla para el método de Newton-Raphson en el Ejercicio 1.1.1.12.

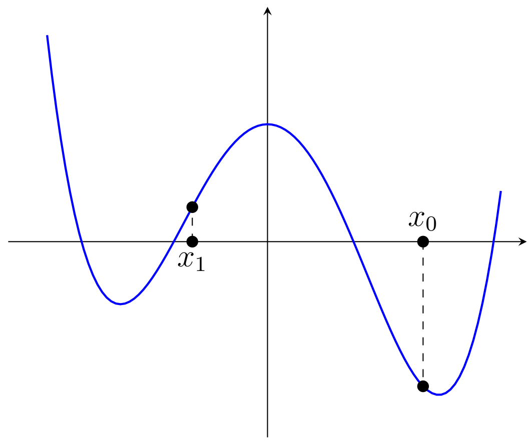

Figura 1.2: Semilla para el método de la Secante en el Ejercicio 1.1.1.12.

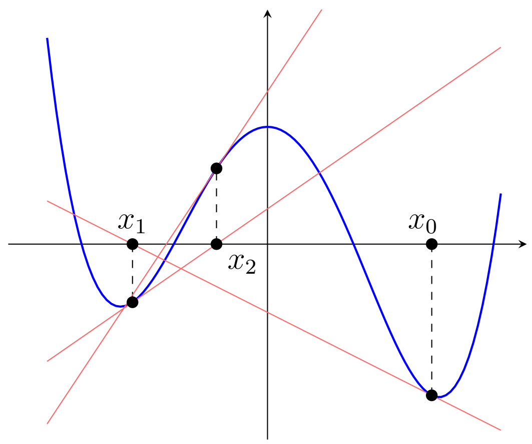

Figura 1.3: Solución para el método de Newton-Raphson en el Ejercicio 1.1.1.12.

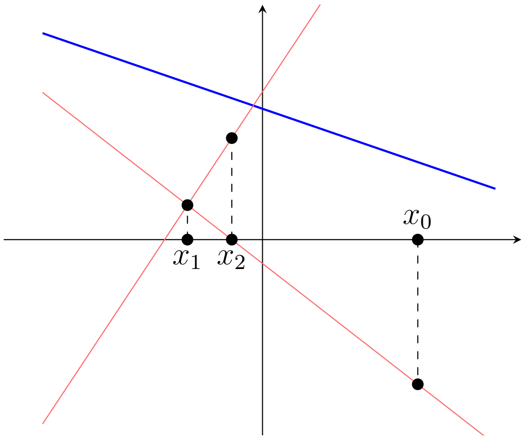

Figura 1.4: Solución para el método de la Secante en el Ejercicio 1.1.1.12.

Tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R})$, y además:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(-1) &= -e^{1/3} + 1 < 0 \iff e^{1/3} > 1 \iff e > 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación $xe^{-x/3} + 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[-1, 0]$. Veamos ahora si es la única en dicho intervalo.

$$f'(x) = e^{-x/3} - \frac{x}{3}e^{-x/3} = e^{-x/3}\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 0 \iff x = 3$$

Por tanto, como f' no se anula en $[-1, 0]$, entonces f es inyectiva en $[-1, 0]$, y por tanto la raíz en $[-1, 0]$ es única.

2. Averigüe cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada; es decir, para cuáles de ellos la solución es punto fijo.

$$\begin{aligned}
&g_1(x) = x \iff -e^{x/3} = x \iff -e^{x/3 - x/3} = xe^{-x/3} \iff -e^0 = xe^{-x/3} \iff \\
&\qquad \iff xe^{-x/3} + 1 = 0 \iff f(x) = 0 \\
&g_2(x) = x \iff e^{x/3} = x \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow x \notin [-1, 0] \Longrightarrow g_2 \text{ no es compatible} \\
&g_3(x) = x \iff 3\ln(-x) = x \iff \ln(-x) = x/3 \iff \ln(1) - \ln(-x) = -x/3 \iff \\
&\qquad \iff \ln\left(1/-x\right) = -x/3 \iff 1/-x = e^{-x/3} \iff xe^{-x/3} + 1 = 0 \iff f(x) = 0 \\
&g_4(x) = x \iff \frac{x - e^{x/3}}{2} = x \iff x - e^{x/3} = 2x \iff -e^{x/3} = x \iff \\
&\qquad \iff -1 = xe^{-x/3} \iff f(x) = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que g_1, g_3 y g_4 son compatibles con la ecuación dada, mientras que g_2 no lo es.

3. De entre los métodos compatibles con la ecuación ¿cuáles son convergentes localmente? Justifique la respuesta.

Sea s una raíz de f. Ya hemos visto que s será un punto de fijo de g_i para $i \in \{1, 3, 4\}$. Para estudiar la convergencia local, necesitamos acotar la primera derivada en un entorno de s, y como desconocemos el valor de s, hemos de acotarla en todo el intervalo $[-1, 0]$.

- Para g_1:

$$|g_1'(x)| = \frac{1}{3}e^{x/3} \leqslant \frac{1}{3}e^{0/3} = \frac{1}{3} < 1 \qquad \forall x \in [-1, 0]$$

Por tanto, g_1 es convergente localmente.

- Para g_3:

$$|g_3'(x)| = \frac{3}{|x|} \geqslant 3 > 1 \qquad \forall x \in [-1, 0]$$

Por tanto, g_3 no es convergente para ningún $x \in [-1, 0]$.

- Para g_4:

$$|g_4'(x)| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{3}e^{x/3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}e^{x/3}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1 \qquad \forall x \in [-1, 0]$$

Por tanto, g_4 es convergente localmente.

4. De entre los métodos convergentes localmente ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

En primer lugar, estudiamos si la primera derivada se anula o no. Sabemos que:

$$g_1'(x) = -\frac{1}{3}e^{x/3} \neq 0 \qquad \forall x \in [-1, 0]$$
$$g_4'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{x/3}\right) = 0 \iff e^{x/3} = 3 \iff x = 3\ln(3) \notin [-1, 0]$$

Por tanto, vemos que ambos tienen orden de convergencia lineal. Por tanto, para comparar cuál de ellos es más rápido, hemos de estudiar el valor de la constante asintótica del error. Notemos por C_1 y C_4 las constantes asintóticas de g_1 y g_4 respectivamente, y sea s la raíz de f en $[-1, 0]$. Entonces, sabemos que:

$$C_1 = |g_1'(s)| = \frac{1}{3}e^{s/3} \qquad C_4 = g_4'(s) = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right)$$

Comparémoslas:

$$C_1 \leqslant C_4 \iff \frac{1}{3}e^{s/3} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right) \iff \frac{1}{2}e^{s/3} \leqslant \frac{1}{2} \iff e^{s/3} \leqslant 1 \iff s \leqslant 0$$

Como $s \in [-1, 0]$, entonces $C_1 \leqslant C_4$. Por tanto, como a menor constante asintótica, mayor velocidad de convergencia, entonces g_1 es más rápido que g_4.

5. Para el método con mayor velocidad, aplique Steffensen con semilla $x_0 = -0{,}5$ hasta que dos iteraciones consecutivas disten menos de 10^{-3}.

Desarrollamos en primer lugar la aceleración de Aitken. Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &= x_{n+1} - x_n \\
\Delta^2 x_n &= \Delta\Delta x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n
\end{aligned}$$

Por tanto, la aceleración de Aitken es:

$$x_n^* = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Por tanto, aplicamos Steffensen a g_1 con semilla $x_0 = -0{,}5$:

g_1	Δx_n	$\Delta^2 x_n$	Steffensen
$-0{,}5$			
$-0{,}846482$			
$-0{,}754152$	$-0{,}346482$	$0{,}438811$	$-0{,}773579$
$-0{,}773579$			
$-0{,}772703$			
$-0{,}772929$	$0{,}000876$	$-0{,}001101$	$-0{,}772883$
$-0{,}772883$			
$-0{,}772883$			
$-0{,}772883$	≈ 0	≈ 0	$-0{,}772883$

Ejercicio 1.1.1.14. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto de división del intervalo por el valor $a + \frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente dicho método? ¿Cuál es la cota del error absoluto después de n iteraciones?

Sea a_n la sucesión de extremos izquierdos de los intervalos en la n-ésima iteración, y sea b_n la sucesión de extremos derechos de los intervalos en la n-ésima iteración. Entonces, por el Teorema de Bolzano aplicado a cada intervalo, tenemos que:

$$\exists s \in [a,b] \text{ tal que } s \in [a_n, b_n],\ f(s) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos ahora la sucesión de longitudes de los intervalos $l_n = b_n - a_n$. Calculamos ahora la longitud de los intervalos en la $n+1$-ésima iteración. Fijado el punto de disión $m_n = a_n + \dfrac{b_n - a_n}{3}$, caben dos posibilidades, quedarnos con el intervalo $[a_n, m_n]$ o con el intervalo $[m_n, b_n]$.

- Si optamos por el intervalo $[a_n, m_n]$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \\
b_{n+1} &= m_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{3} l_{n+1} \qquad = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{l_n}{3}
\end{aligned}$$

- Si optamos por el intervalo $[m_n, b_n]$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= m_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{3} \\
b_{n+1} &= b_n \\
l_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3b_n - 3a_n - b_n + a_n}{3} = \frac{2b_n - 2a_n}{3} = \frac{2l_n}{3}
\end{aligned}$$

En cualquier caso, tenemos que:

$$0 \leqslant l_{n+1} \leqslant \text{máx}\left\{\frac{l_n}{3}, \frac{2l_n}{3}\right\} = \frac{2}{3}l_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 l_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} l_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b-a)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, por el Lema del Sandwich, tenemos que:

$$\{a_n - b_n\} = \{l_n\} \to 0$$

La sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por b, y la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por a. Por tanto, ambas sucesiones son convergentes, digamos que $a_n \to a^*$ y $b_n \to b^*$. Por tanto, por la unicidad del límite, tenemos que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} (l_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b^* - a^* \Longrightarrow a^* = b^*$$

Por tanto, ambas sucesiones convergen al mismo límite, llamémosle L. Además, previamente hemos visto que $\exists s \in [a, b]$, con $f(s) = 0$, tal que:

$$a_n \leqslant s \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, por el Teorema del Sandwich, tenemos que $L = s$. Por tanto, veamos que la sucesión formada por este método converge a s:

$$\{m_n\} = \left\{a_n + \frac{b_n - a_n}{3}\right\} \to s + \frac{s-s}{3} = s$$

Por tanto, el método es convergente. Por otro lado, la cota del error absoluto después de n iteraciones es:

$$|e_n| = |s - m_n| \leqslant l_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b-a)$$

En conclusión, el método es convergente, y la cota del error absoluto después de n iteraciones es mayor que la del método de bisección original, por lo que no hay garantías algunas de que sea preferible este método al original.

Ejercicio 1.1.1.15. Demuestre el teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional para sistemas.

Observación. Generalice al caso k-dimensional la demostración del teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional unidimensional.

1. El primer paso se tiene de forma directa por el Teorema del Punto Fijo de Banach, que ya se demostró en Análisis Matemático II para $\mathbb{R}^n$.

2. Sea S el punto fijo de G. Tenemos que:

   $$\|X_n - S\| = \|G(X_{n-1}) - G(S)\| \leqslant L\|X_{n-1} - S\| \leqslant \ldots \leqslant L^n\|X_0 - S\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que:

   $$\lim_{n\to\infty} \|X_n - S\| = 0 \Longrightarrow \{X_n\} \to S$$

   Por tanto, el método es convergente.

3. Busquemos ahora una cota del error. Necesitamos para ello eliminar la dependencia de S de la cota anterior. Tenemos que:

   $$\|X_0 - S\| = \|X_0 - X_1 + X_1 - S\| \leqslant \|X_0 - X_1\| + \|X_1 - S\| \leqslant \|X_0 - X_1\| + L\|X_0 - S\|$$

   Despejando $\|X_0 - S\|$:

   $$\begin{aligned} \|X_0 - S\| &\leqslant \|X_0 - X_1\| + L\|X_0 - S\| \\ (1-L)\|X_0 - S\| &\leqslant \|X_0 - X_1\| \\ \|X_0 - S\| &\leqslant \frac{1}{1-L}\|X_0 - X_1\| \end{aligned}$$

   Por tanto, la cota del error es:

   $$\|E_n\| = \|X_n - S\| \leqslant \frac{L^n}{1-L}\|X_0 - X_1\|$$

Ejercicio 1.1.1.16. Sea $D = \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ y sea $G : D \to \mathbb{R}^k$ con $G = (g_1, \dots, g_k)$ tal que $G \in C^1(D)$. Demuestre que si existe $L \in]0,1[$ tal que $\forall i, j = 1, \dots, k$ se verifique

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{L}{k} \quad \forall x \in D,$$

entonces G es contráctil.

Observación. Considere la norma $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$.

Para cada $x \in G$, consideramos $JG(x)$, que es la matriz jacobiana de G en x. Calculamos su norma 1, que es el máximo de las sumas de los valores absolutos de las columnas de $JG(x)$:

$$\|JG(x)\|_1 = \max_{j=1,\dots,k}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right|\right\} \leqslant \max_{j=1,\dots,k}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{L}{k}\right\} = \max_{j=1,\dots,k}\{L\} = L$$

Por tanto, por el Teorema del Valor Medio en $\mathbb{R}^k$, tenemos que:

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L < 1$.

Ejercicio 1.1.1.17. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2} - x + \frac{7}{24} &= 0, \\ xy - y + \frac{1}{9} &= 0. \end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0{,}4] \times [0, 0{,}4]$.

   Definimos las siguientes funciones:

   $$\begin{array}{rccc} g_1 : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2 - y^2}{2} + \dfrac{7}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy + \dfrac{1}{9} \end{array}$$

Veamos en primer lugar que $g_1(D) \subset [0, 0{,}4]$. Sean $x, y \in [0, 0{,}4]$. Entonces:

$$0{,}21 \approx -\frac{0{,}4^2}{2} + \frac{7}{24} \leqslant g_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{7}{24} \leqslant \frac{0{,}4^2}{2} + \frac{7}{24} \approx 0{,}37$$

Por tanto, $g_1(D) \subset [0, 0{,}4]$. Veamos ahora que $g_2(D) \subset [0, 0{,}4]$. Sean de nuevo $x, y \in [0, 0{,}4]$. Entonces:

$$\frac{1}{9} \leqslant g_2(x,y) = xy + \frac{1}{9} \leqslant 0{,}4 \cdot 0{,}4 + \frac{1}{9} \approx 0{,}271$$

Por tanto, $g_2(D) \subset [0, 0{,}4]$. Definimos ahora $G = (g_1, g_2)$. Tenemos por tanto que $G : D \to D$. Veamos ahora que G es contráctil. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$JG(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la norma de esta matriz:

$$\|JG(x,y)\|_1 = \text{máx}\,\{|x| + |-y|, |y| + |x|\} = \text{máx}\{x+y, y+x\} = x + y \leqslant 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L = 0{,}8 < 1$. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, G tiene un único punto fijo en D. Además, sabemos que $X \in D$ es un punto fijo de G si y solo si X es solución del sistema de ecuaciones. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene una única solución en D.

2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

   Por el Teorema de Convergencia Global de los Métodos de Iteración Funcional para Sistemas, sabemos que el siguiente método es convergente al punto fijo de G para cualquier semilla $X_0 \in D$:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   En forma matricial, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n^2 - y_n^2}{2} + \dfrac{7}{24} \\ x_n y_n + {}^1\!/_9 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Aunque no lo piden, calculamos las dos primeras iteraciones del método iterativo para la semilla $X_0 = (0{,}1, 0{,}2)$:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,276667	0,131111
2	0,321344	0,147385
3	0,332436	0,158472

3. Calcule, tomando $x_0 = (0{,}1, 0{,}2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2-y^2}{2} - x + \dfrac{7}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy - y + \dfrac{1}{9} \end{array}$$

Calculamos ahora la matriz jacobiana de $F = (f_1, f_2)$:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora el jacobiano de f en punto arbitrario $(x,y) \in D$:

$$|JF(x,y)| = (x-1)^2 + y^2 > 0 \qquad \forall (x,y) \in D$$

Por tanto, $\exists JF(x,y)^{-1}$, y por tanto, el método de Newton-Raphson es aplicable. Este es:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n)$$

Para resolverlo, tenemos dos opciones:

Opción 1 Calcular la inversa de $JF(x,y)$.

Tenemos que:

$$JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\begin{pmatrix} x-1 & y \\ -y & x-1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en forma matricial, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{(x_n-1)^2+y_n^2}\begin{pmatrix} x_n-1 & y_n \\ -y_n & x_n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{x_n^2-y_n^2}{2} - x_n + \dfrac{7}{24} \\ x_ny_n - y_n + \dfrac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Como vemos, los cálculos no son directos, puesto que hay que realizar diversas multiplicaciones de matrices a la hora de evaluar. No obstante, son cálculos sencillos. El resultado es:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,30327	0,16863
2	0,3327	0,1666
3	0,33333	0,166667

Opción 2 Sin necesidad de calcular la inversa de $JF(x, y)$.

En este caso, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n)\\ \Delta X_n &= -JF(X_n)^{-1}F(X_n)\\ JF(X_n)\Delta X_n &= -F(X_n)\end{aligned}$$

En cada paso, calcularemos ΔX_n resolviendo dicho sistema de ecuaciones, y así podremos obtener posteriormente X_{n+1}. Los cálculos son igualmente tediosos, pero siguen sin ser tediosos. De esta forma, sí es cierto que nos ahorramos el cálculo de la inversa de $JF(x, y)$, pero a cambio, hemos de resolver un sistema de ecuaciones en cada paso. El resultado es el mismo que en la Opción 1.

Ejercicio 1.1.1.18. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - xy &= 1/16,\\ x^2 - y &= -1/8.\end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 1/8] \times [0, 1/4]$.

   Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} g_1 : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy + 1/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_2 : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + 1/8 \end{array}$$

   Veamos en primer lugar que $g_1(D) \subset [0, 1/8]$. Sean $x \in [0, 1/8]$ e $y \in [0, 1/4]$. Entonces:

$$0 \leqslant g_1(x,y) = xy + \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{3}{32} < \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

   Por tanto, $g_1(D) \subset [0, 1/8]$. Veamos ahora que $g_2(D) \subset [0, 1/4]$. Sean de nuevo $x \in [0, 1/8]$ e $y \in [0, 1/4]$. Entonces:

$$0 \leqslant g_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{8}^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{9}{64} < \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

   Por tanto, $g_2(D) \subset [0, 1/4]$. Definimos ahora $G = (g_1, g_2)$. Tenemos por tanto que $G : D \to D$. Veamos ahora que G es contráctil. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$JG(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la norma de esta matriz:

$$\|JG(x,y)\|_1 = \text{máx}\left\{|y|+|x|,|2x|\right\} = \text{máx}\{x+y,2x\} \leqslant \text{máx}\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{8} < 1$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L = 3/8 < 1$. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, G tiene un único punto fijo en D. Además, sabemos que $X \in D$ es un punto fijo de G si y solo si X es solución del sistema de ecuaciones. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene una única solución en D.

2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

Por el Teorema de Convergencia Global de los Métodos de Iteración Funcional para Sistemas, sabemos que el siguiente método es convergente al punto fijo de G para cualquier semilla $X_0 \in D$:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Calcule, tomando $x_0 = (0{,}1, 0{,}2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x - xy - 1/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 - y + 1/8 \end{array}$$

Calculamos ahora la matriz jacobiana de $F = (f_1, f_2)$:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora el jacobiano de f en punto arbitrario $(x,y) \in D$:

$$|JF(x,y)| = (y-1)+2x^2 \leqslant \left(\frac{1}{4}-1\right)+2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{3}{4}+\frac{1}{32} = -\frac{24}{32}+\frac{1}{32} = -\frac{23}{32} < 0$$

Por tanto, $\exists JF(x,y)^{-1}$, y por tanto, el método de Newton-Raphson es aplicable. Este es:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n)$$

Para resolverlo, optamos por la primera opción, calculando la inversa de $JF(x,y)$:

$$JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{(y-1)+2x^2}\begin{pmatrix} -1 & x \\ -2x & 1-y \end{pmatrix}$$

Por tanto, en forma matricial, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{(y_n - 1) + 2x_n^2} \begin{pmatrix} 1 - y_n & -x_n \\ 2x_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - xy_n - 1/16 \\ x_n^2 - y_n + 1/8 \end{pmatrix}$$

Como vemos, los cálculos no son directos, puesto que hay que realizar diversas multiplicaciones de matrices a la hora de evaluar. No obstante, son cálculos sencillos. El resultado es:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,06923076923077	0,12884615384615
2	0,07184796591410	0,13015528048751
3	0,07185252471221	0,13016278528674

1.1.2. Relación 2

Ejercicio 1.1.2.1. Sea la función $f(x) = e^x - ax^2$ con $a \in [3, 4]$.

1. Demuestra que tiene una raíz negativa, otra raíz en $[0, 1]$ y otra mayor que 1.

   Evaluamos f en los extremos del intervalo $[0, 1]$:

$$f(0) = e^0 - a \cdot 0^2 = 1$$
$$f(1) = e^1 - a \cdot 1^2 = e - a < 0 \Longleftrightarrow e < a$$

   Calculamos además los límites de f en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - ax^2 = \lim_{x\to-\infty} -ax^2 = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x - ax^2 = \infty$$

   Para demostrar lo pedido, y debido a que f es continua, emplearemos el Teorema de Bolzano.

   - Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $f(0) = 1 > 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $\mathbb{R}^-$.
   - Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = e - a < 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[0, 1]$.
   - Como $f(1) = e - a < 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[1, \infty[$.

2. Demuestra que $x = g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{a}}$ y $x = g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{a}}$ son ecuaciones equivalentes a la de partida.

   Partiendo de las ecuaciones dadas, elevamos al cuadrado ambos lados, llegando en ambos casos a:

$$x^2 = \frac{e^x}{a} \Longleftrightarrow a \cdot x^2 = e^x \Longleftrightarrow e^x - ax^2 = 0$$

   Por tanto, efectivamente son equivalentes. La ecuación $x = g_1(x)$ tiene sentido para $x \geqslant 0$ y la ecuación $x = g_2(x)$ para $x \leqslant 0$.

3. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a $-0{,}5$ partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_2(x)$ y realiza dos iteraciones.

   Trabajaremos en el intervalo $[-1, 0]$. Veamos que $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$. Para ello, como $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{a}}} \cdot \frac{e^x}{a} = -\frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_2 es continua y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$. Además, evaluamos g_2 en los extremos del intervalo:

$$g_2(-1) = -\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3e}} \approx -0{,}35$$
$$g_2(0) = -\sqrt{\frac{e^{0}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}58$$

Por tanto, $g_2\left([-1,0]\right) = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3e}}\right] \subset [-1,0]$. Por tanto, podemos considerar $g_2 : [-1,0] \to [-1,0]$. Veamos ahora que g_2 es una contracción en $[-1,0]$:

$$|g_2'(x)| = \left|\frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}}\right| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} \leqslant \frac{e^0}{6\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}}} \approx 0{,}47 < 1 \qquad \forall x \in [-1,0]$$

Por tanto, g_2 es una contracción en $[-1,0]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_2 tiene un único punto fijo en $[-1,0]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_2(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [-1,0]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_2(x_n)$
0	0	$-0{,}57735$
1	$-0{,}57735$	$-0{,}4325829$
2	$-0{,}4325829$	$-0{,}4650559$

4. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a 1 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_1(x)$ y realiza dos iteraciones.

Trabajaremos en el intervalo $[0,2]$. Veamos que $g_1\left([0,2]\right) \subset [0,2]$. Para ello, como $g_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

$$g_1'(x) = -g_2'(x) = \frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_1 es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Además, evaluamos g_1 en los extremos del intervalo:

$$g_1(0) = -g_2(0) = \sqrt{\frac{e^0}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$$
$$g_1(2) = \sqrt{\frac{e^2}{3}} = \frac{e}{\sqrt{3}} \approx 1{,}5694$$

Por tanto, $g_1\left([0,2]\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{e}{\sqrt{3}}\right] \subset [0,2]$. Por tanto, podemos considerar $g_1 : [0,2] \to [0,2]$. Veamos ahora que g_1 es una contracción en $[0,2]$:

$$|g_1'(x)| = |g_2'(x)| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} < 1 \iff e^{2x} < 36 \cdot \frac{e^x}{3} \iff e^x < 12 \iff x < \ln 12 \approx 2{,}48$$

Por tanto, g_1 es una contracción en $[0,2]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_1 tiene un único punto fijo en $[0,2]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_1(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [0,2]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_1(x_n)$
0	0	0,57735
1	0,57735	0,770565
2	0,770565	0,848722

5. Toma $a = 3$. Comprueba que la raíz mayor que 1 está en $[3,4]$. Demuestra la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella (pero diferente de ella) usando $g_1(x)$ y encuentra una función para la iteración funcional, alternativa a las anteriores que converja a la raíz cercana a 4. Partiendo de $x_0 = 3{,}98$ obtén x_1 y x_2 con el método propuesto.

Evaluamos f en los extremos del intervalo $[3,4]$:

$$f(3) = e^3 - 3 \cdot 3^2 = e^3 - 3^3 < 0$$
$$f(4) = e^4 - 3 \cdot 4^2 = e^4 - 3 \cdot 4^2 > 0$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[3,4]$.

Para estudiar la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella, anteriormente vimos que:

$$|g'(x)| < 1 \iff x < \ln 12 \approx 2{,}48$$

Por tanto, como el punto fijo s está en $[3,4]$, tenemos que $g'(s) > 1$. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ no converge a s si x_0 es muy próximo a s.

Para encontrar una función que converja a la raíz próxima a 4, tenemos que:

$$f(x) = 0 \iff e^x = ax^2 \iff x = \ln(ax^2)$$

Por tanto, consideramos la función $h(x) = \ln(3x^2)$. Veamos que $h([3,5]) \subset [3,5]$. Para ello, calculamos la derivada de h:

$$h'(x) = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, h es continua y estrictamente creciente en $[3,5]$. Además, evaluamos h en los extremos del intervalo:

$$h(3) = \ln(3 \cdot 3^2) = \ln 27 \approx 3{,}3$$
$$h(5) = \ln(3 \cdot 5^2) = \ln 75 \approx 4{,}32$$

Por tanto, $h([3,5]) = [\ln 27, \ln 75] \subset [3,5]$. Por tanto, podemos considerar $h : [3,5] \to [3,5]$.
Veamos ahora que h es una contracción en $[3,5]$:

$$|h'(x)| = \left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{x} < \frac{2}{3} < 1 \qquad \forall x \in [3,5]$$

Por tanto, h es una contracción en $[3,5]$. Por el Teorema del Punto Fijo, h tiene un único punto fijo en $[3,5]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = h(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [3,5]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 3{,}98$:

n	x_n	$h(x_n)$
0	3,98	3,861176
1	3,861176	3,800556
2	3,800556	3,7689

Ejercicio 1.1.2.2. Sea la ecuación $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 15{,}2 = 0$.

1. Prueba que no tiene ninguna raíz menor que 1.

   Como $p \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de p y estudiar su signo:

$$\begin{aligned} &p'(x) = 3x^2 - 16x + 20 = 0 \iff \\ &\iff x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20}}{2 \cdot 3} \iff x = \frac{16 \pm 4}{6} \iff x \in \{2, {}^{10}/_{3}\} \end{aligned}$$

   Por tanto, p es estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - 8 + 20 - 15{,}2 = -2{,}2 < 0 \\ \lim_{x \to -\infty} p(x) &= -\infty \end{aligned}$$

   Por tanto, deducimos que p no tiene raíces menores que 1.

2. Prueba que Newton-Raphson converge partiendo de $x_0 = 0$ hacia la raíz más pequeña y realiza dos iteraciones.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= -2{,}2 < 0 \\ p(2) &= 8 - 32 + 40 - 15{,}2 = 0{,}8 > 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, p tiene una raíz en $[1,2]$, y sabemos que es única por ser p estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Por último, es la raíz más pequeña por no tener ninguna raíz menor que 1. Comprobemos ahora que cumple las condiciones del Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson en $[1,2]$:

   a) $p(1)p(2) < 0$.

b) $p'(x) \neq 0$ en $]1, 2[$.

c) $p''(x) = 6x - 16$ no cambia de signo en $]1, 2[$, ya que:

$$p''(x) = 6x - 16 = 0 \iff x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67 \notin]1, 2[$$

d) $p(x_0)p''(x_0) = (-15{,}2) \cdot (-16) > 0$.

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge en $[1, 2]$ a la raíz más pequeña partiendo desde $x_0 = 0$. Este método genera la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 8x_n^2 + 20x_n - 15{,}2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} = \\ = \frac{2x_n^3 - 8x_n^2 + 15{,}2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	0,76
2	1,196844

3. Calcula la sucesión de Sturm y decide si existen raíces múltiples.

Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - \frac{76}{5} \\ f_1(x) &= f_0'(x) = 3x^2 - 16x + 20 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -8x^2 & +20x & -\frac{76}{5} & 3x^2 - 16x + 20 \\ \cline{5-5} -x^3 & +\frac{16}{3}x^2 & -\frac{20}{3}x & & \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ \hline & -\frac{8}{3}x^2 & +\frac{40}{3}x & -\frac{76}{5} & \\ & \frac{8}{3}x^2 & -\frac{128}{9}x & +\frac{160}{9} & \\ \cline{2-4} & & -\frac{8}{9}x & +\frac{116}{45} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -45 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -45 \cdot \left(-\frac{8}{9}x + \frac{116}{45} \right) \\ &= 40x - 116 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & -16x & +20 & 40x - 116 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +\frac{87}{10}x & & \frac{3}{40}x - \frac{73}{400} \\ \cline{1-2} & -\frac{73}{10}x & +20 & \\ & \frac{73}{10}x & -\frac{2117}{100} & \\ \cline{2-3} & & -\frac{117}{100} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{100}{117} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{100}{117} \cdot \left(-\frac{117}{100} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - 8x^2 + 20x - 15{,}2 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 16x + 20 \\ f_2(x) &= 40x - 116 \\ f_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la existencia de raíces múltiples. Por el algoritmo extendido de euclídes, sabemos que:

$$\operatorname{mcd}(f_0, f_1) = \operatorname{mcd}(p, p') = 1$$

Supongamos ahora que existe una raíz múltiple de multiplicidad $m > 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_0)^m \cdot q(x) \\ p'(x) &= (x - x_0)^{m-1} \left[m \cdot q(x) + (x - x_0) q'(x) \right] \end{aligned}$$

Entonces, $(x - x_0)^{m-1}$ divide a p, p', lo que contradice que $\operatorname{mcd}(p, p') = 1$. Por tanto, no existen raíces múltiples. De forma general, como el último resto no nulo es contante, entonces no existen raíces múltiples.

4. Separa las raíces reales de dicha ecuación.

   En primer lugar, buscamos acotar las raíces reales. Tenemos:

   $$\alpha = 20 \Longrightarrow |s| \leqslant 21$$

   Por tanto, sabemos que todas las raíces reales están en $[-21, 21]$. Por el primer apartado, sabemos que están en $[1, 21]$. Separamos ahora las raíces:

x	$\operatorname{sgn}(f_0(x))$	$\operatorname{sgn}(f_1(x))$	$\operatorname{sgn}(f_2(x))$	$\operatorname{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
1	$-$	$+$	$-$	$+$	3
2	$+$	0	$-$	$+$	2
3	$-$	$-$	$+$	$+$	1
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0
21	$+$	$+$	$+$	$+$	0

   Por tanto, tenemos una raíz en $[1, 2]$, otra en $[2, 3]$ y otra en $[3, 4]$.

Ejercicio 1.1.2.3. Sea la ecuación $f(x) = e^{x-1} - ax^3 = 0$ siendo $a > 1$.

1. Demuestra que tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

   Como f es continua, podemos aplicar el Teorema de Bolzano. Evaluamos f en los extremos del intervalo:

$$f(0) = e^{-1} > 0$$
$$f(1) = e^{0} - a = 1 - a < 0$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

2. A partir de ahora considera $a = 2$. Calcula las dos primeras aproximaciones x_1 y x_2 obtenidas con bisección (siendo $x_0 = 0{,}5$). Indica el error máximo que se comete con x_2.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	0,5	0,3565
1	0,5	1	0,75	−0,0649
2	0,5	0,75	0,625	0,1990

   El error máximo que se comete con x_2 es:

$$|e_2| < \frac{1-0}{2^{2+1}} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

3. Realiza dos iteraciones con el método de la secante tomando como valores iniciales (o semillas) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Debes calcular x_2 y x_3.

   El método de la secante se define como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \\ &= x_n - \frac{(e^{x_n-1} - 2x_n^3)(x_n - x_{n-1})}{e^{x_n-1} - 2x_n^3 - e^{x_{n-1}-1} + 2x_{n-1}^3} \end{aligned}$$

   Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	1
2	0,2689
3	0,4932

4. Evalúa la función en la segunda aproximación x_2 obtenida con bisección e indica, razonadamente con los resultados que se te han pedido, si se puede asegurar, o no, que la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

   Evaluamos f en x_2 obtenido con el método de bisección:

$$f(x_2) = f(0{,}625) = 0{,}199 > 0$$

Además, sabemos que $f(0{,}75) < 0$. Por tanto, si la raíz es s:

$$x_2 = 0{,}625 < s < 0{,}75$$

Como la segunda iteración del método de secante es $x_3 = 0{,}4932$, tenemos que:

$$x_3 = 0{,}4932 < x_2 = 0{,}625 < s < 0{,}75$$

Por tanto, la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

Ejercicio 1.1.2.4. Considera la ecuación $x^2 = a$ siendo $a > 0$.

1. Se pretende usar el método de Newton-Raphson en la ecuación anterior para hallar la raíz cuadrada de a. Deduce que el método se puede expresar, en este caso, de la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Sea la función $f(x) = x^2 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

2. Demuestra que el método es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}\{1, a\}$.

Si $a = 1$, entonces $f(x_0) = f(1) = 0$. Por tanto, x_0 es raíz de f y hemos terminado. Suponemos por tanto en adelante que $a \neq 1$.

Emplearemos el intervalo $[\text{mín}\{1, a\}, \text{máx}\{1, a\}]$. Calculamos la derivada de f:

$$f'(x) = 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostramos ahora los 4 puntos necesarios para el Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson:

a) $f(a)f(1) < 0$:

$$f(a) = a^2 - a = a(a-1)f(1) = 1 - a$$

Por tanto:

$$f(a)f(1) = a(a-1)(1-a) = -a(a-1)^2 < 0$$

b) $f'(x) \neq 0$ en $[\text{mín}\{1, a\}, \text{máx}\{1, a\}]$, pues el 0 no pertenece a dicho intervalo.

c) $f''(x) = 2 > 0$ no cambia de signo en $\mathbb{R}$.

d) $f(x_0)f''(x_0)$

$$f(x_0)f''(x_0) = 2f(x_0) > 0 \iff x_0^2 > a \iff (\text{máx}\{1, a\})^2 > a$$

que sabemos que es cierto.

Por tanto, sabemos que el método de Newton-Raphson es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}\{1, a\}$.

3. Apoyándote en la expresión anterior obtén la segunda aproximación x_2 de la raíz cuadrada positiva de 13, partiendo de $x_0 = 13$.

   Tomando $a = 13$, la segunda aproximación de la raíz cuadrada positiva de 13 es:

n	x_n
0	13
1	7
2	4,428571

4. Determina la expresión del método de Newton-Raphson para la raíz cúbica de un número diferente de cero y aplícalo dos veces para aproximar la raíz cúbica de 13 partiendo de $x_0 = 13$.

   Sea la función $g(x) = x^3 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

   Por tanto, tomando $a = 13$, las dos primeras iteraciones para aproximar la raíz cúbica de 13 son:

n	x_n
0	13
1	8,692308
2	5,852224

   Notemos que la convergencia a la raíz cúbica de 13 no la tenemos asegurada, sería necesario estudiarlo en este caso (similar al segundo apartado).

Ejercicio 1.1.2.5. Sea S la única solución en el dominio cuadrado $D = [0, 1] \times [0, 1]$ del sistema no lineal

$$\begin{cases} xy^2 + 4x - 1 = 0 \\ 4yx^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

¿Es convergente a S la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional definido por

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4 + y_n^2} \\[2ex] y_{n+1} = \dfrac{1}{6 + 4x_n^2} \end{cases}$$

cualquiera que sea la aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$?

Podemos reescribir el sistema dado como sigue:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4+y^2} \\ \\ y = \dfrac{1}{6+4x^2} \end{cases}$$

Definimos ahora la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} G = (G_1, G_2): & D & \longrightarrow & D \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4+y^2}, \dfrac{1}{6+4x^2}\right) \end{array}$$

Por tanto, la solución del sistema dado es el punto fijo de G. Veamos ahora si el método de iteración funcional converge a dicho punto fijo. En primer lugar, veamos que $G(D) \subset D$:

$$\begin{aligned} G_1(x,y) &= \frac{1}{4+y^2} \in [0,1] \\ G_2(x,y) &= \frac{1}{6+4x^2} \in [0,1] \end{aligned}$$

Por tanto, $G(D) \subset D$. Veamos ahora que G es una contracción en D. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2y}{(4+y^2)^2} \\ -\dfrac{8x}{(6+4x^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y) \in D$$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{2y}{(4+y^2)^2} &\leqslant \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8} \qquad \forall y \in [0,1] \\ \frac{8x}{(6+4x^2)^2} &\leqslant \frac{8}{6^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \qquad \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

Por tanto, $\|J_G(x,y)\|_\infty \leqslant 2/9 < 1$. Como además sus derivadas parciales son continuas, G es una contracción en D. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo, G tiene un único punto fijo $S \in D$, y la sucesión:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a dicho punto fijo para cualquier $X_0 \in D$. Por tanto, la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional converge a S para cualquier aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 1.1.2.6. Se sabe que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y posee un único cero en dicho intervalo. ¿Se puede aproximar siempre dicho cero mediante el método de bisección?

No, no siempre se puede aproximar el cero de una función mediante el método de bisección. Por ejemplo, sea la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

En este caso, sabemos que hay una única raíz en $[-1, 1]$, que es $x = 0$. Sin embargo, el método de bisección no converge a dicha raíz, puesto que no hay un cambio de signo en dicho intervalo, por lo que no podemos construir la sucesión x_n que converge a la raíz. De hecho:

$$f(-1) = f(1) = 1 > 0$$

Por tanto, la condición que falla es que no hay cambio de signo en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que no se puede aplicar el método de bisección en este caso.

Ejercicio 1.1.2.7. Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Se pide:

1. Demuestra que la ecuación anterior tiene una única solución real s.

   Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de f y estudiar su signo:

   $$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Estudiamos la monotonía de f, estudiando a su vez si hay raíces en dicho intervalo (por el Teorema de Bolzano):

   - <u>En $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$</u>: f es estrictamente creciente. Además:

     $$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

     Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

   - <u>En $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$</u>: f es estrictamente decreciente. Además:

     $$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

     Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

- $\underline{\text{En } \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[}$: f es estrictamente creciente. Además:

  $$f(1) = -1 < 0 \qquad\qquad f(2) = 5 > 0$$

  Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$.

Por tanto, f tiene una única raíz real s, y sabemos que:

$$s \in\ ]1, 2[$$

2. Encuentra un intervalo $[a, b]$ en el que al tomar cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ como aproximación inicial del método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$ se asegure que la sucesión de iteraciones de dicho método converja a s con convergencia al menos cuadrática y demuestra que eso es así.

   Tomamos el intervalo $[1, 2]$. Estudiamos la función f en dicho intervalo:

   a) $f(1)f(2) < 0$.
   b) $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.

   $$\frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \iff 1 < \sqrt{3} \iff 1 < 3$$

   Por tanto, $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.
   c) $f''(x) = 6x$ no cambia de signo en $[1, 2]$.
   d) Comprobemos la última condición:

   $$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| < 1 \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{5}{11} < 1$$

   Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática partiendo de cualquier punto $x_0 \in [1, 2]$.

   Para demostrar que efectivamente la convergencia es al menos cuadrática, consideramos la función g siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} g: & [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   Dada la raíz s de f, entonces:

   $$g(s) = s - \frac{f(s)}{f'(s)} = s - \frac{0}{f'(s)} = s$$

   Calculamos ahora la derivada de g:

   $$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)f'(s) - f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 1 - \frac{f'(s)^2}{f'(s)^2} = 1 - 1 = 0$$

   Por tanto, el método iterativo de Newton-Raphson aplicado a f, que coincide con el método iterativo de punto fijo aplicado a g, converge a s con convergencia al menos cuadrática.

3. Calcula las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación dada tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$.

   El método de Newton-Raphson se define como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

   Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	1
1	1,5
2	1,347826

Ejercicio 1.1.2.8. Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

1. Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?

   Sea la función f siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^7 - 2 \end{array}$$

   Estudiamos la función f en el intervalo $[1, 2]$:

$$f(1) = -1 < 0 \qquad f(2) = 2^7 - 2 > 0$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$; y podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo. Calculamos el número de iteraciones necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}:

$$e_n < \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-4} \iff 2^{n+1} > 10^4 \iff$$
$$\iff n + 1 > \log_2(10^4) = 13{,}2877 \iff n > 12{,}2877$$

   Por tanto, necesitamos al menos 13 iteraciones para conseguir un error inferior a 10^{-4}.

2. Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

   Consideramos el intervalo $[1, 2]$. Veamos que podemos aplicar el método de Newton-Raphson en dicho intervalo:

a) $f(1)f(2) < 0$.

b) $f'(x) = 7x^6$ no se anula en $[1, 2]$.

c) $f''(x) = 42x^5$ no cambia de signo en $[1, 2]$.

d) Comprobamos la última condición:

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\frac{-1}{7}\right| < 1 \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{2^7-2}{7\cdot 2^6} = \frac{2^6-1}{7\cdot 2^5} = \frac{63}{7\cdot 32} < 1$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ para cualquier semilla $x_0 \in [1, 2]$. Realizamos 3 iteraciones del método tomando $x_0 = 1$:

n	x_n
0	1
1	1,142857
2	1,107819
3	1,104127

3. Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7}$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

Realizamos 3 iteraciones del método propuesto:

n	x_n
0	1
1	1,1
2	1,1040893
3	1,1040895

4. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

En primer lugar, hemos de demostrar que si $s \in \mathbb{R}$ es una raíz de f, $f(s) = 0$, entonces s es un punto fijo de la función g definida como:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{8x + 3x^8}{6 + 4x^7} \end{array}$$

Tenemos que:

$$g(s) = \frac{8s + 3s^8}{6 + 4s^7} = \frac{8s + 3\cdot 2s}{6 + 4\cdot 2} = \frac{14s}{14} = s$$

De forma análoga, definimos la función h empleada en Newton-Raphson:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

Tenemos que $h(s) = g(s) = s$. Estudiamos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned}
g'(s) &= \frac{(8+8\cdot 3s^7)(6+4s^7)-(8s+3s^8)(28s^6)}{(6+4s^7)^2} = \\
&= \frac{8(1+3s^7)}{6+4s^7} - \frac{28\,(8s^7+3s^{14})}{(6+4s^7)^2} = \\
&= \frac{8(1+3\cdot 2)}{6+4\cdot 2} - \frac{28\,(8\cdot 2+3\cdot 2^2)}{(6+4\cdot 2)^2} = 0 \\
h'(s) &= 1 - \frac{f'(s)f'(s)-f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 0
\end{aligned}$$

Como $g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ y s es un punto fijo de ambas funciones, entonces sabemos que ambos métodos convergen a la raíz s con convergencia al menos cuadrática. Estudiamos si convergerán con orden cúbico:

$$\begin{aligned}
g''(s) &= 8\cdot\frac{3\cdot 7s^6(6+4s^7)-(1+3s^7)(4\cdot 7s^6)}{(6+4s^7)^2} - \\
&\quad - 28\cdot\frac{[8\cdot 7s^6+3\cdot 14s^{13}](6+4s^7)-[8s^7+3s^{14}]\cdot 2\cdot 4\cdot 7s^6}{(6+4s^7)^3} = \\
&= 8\cdot\frac{3\cdot 7s^6\cdot 14-7(4\cdot 7s^6)}{14^2} - 28\cdot\frac{[8\cdot 7s^6+3\cdot 28s^6]14-28\cdot 2\cdot 4\cdot 7s^6}{14^3} = \\
&= 4s^6-4s^6 = 0 \\
h''(s) &= \frac{[f'(s)f''(s)+f(s)f'''(s)]f'(s)^2-2f(s)f''(s)f'(s)f''(s)}{f'(s)^4} = \\
&= \frac{[f'(s)f''(s)+\cancelto{0}{f(s)}f'''(s)]f'(s)-2\cancelto{0}{f(s)}f''(s)^2}{f'(s)^3} = \\
&= \frac{[f'(s)f''(s)]f'(s)}{f'(s)^3} = \frac{f''(s)}{f'(s)} = \frac{7\cdot 6\cdot s^5}{7\cdot s^6} = \frac{6}{s} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática, mientras que el método propuesto converge a s con convergencia al menos cúbica. Por tanto, el método propuesto converge más rápidamente a la solución.

Ejercicio 1.1.2.9. Relacionado con la Sucesión de Sturm:

1. Sea $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a, b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \dots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\left\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x)\right\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

   En primer lugar, como el producto de funciones continuas por una constante es una función continua, $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}[a, b]$. Hemos de comprobar ahora las 4 propiedades de la sucesión de Sturm:

   a) Como $f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$, entonces $\tilde{f}_0 = k_0 f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$.

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(x) = k_0 f_0(x) = 0 \iff f_0(x) = 0 \Longrightarrow f_0'(x)f_1(x) \neq 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \tilde{f}_0'(x)\tilde{f}_1(x) = k_0k_1f_0'(x)f_1(x) \neq 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_0, k_1 > 0$.

c) Fijado $j = 1, \ldots, m-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(x) = k_j f_j(x) = 0 \iff f_j(x) = 0 \Longrightarrow f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) \neq 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \tilde{f}_{j-1}(x)\tilde{f}_{j+1}(x) = k_{j-1}k_{j+1}f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) \neq 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_{j-1}, k_{j+1} > 0$.

d) $\tilde{f}_m(x) = k_m f_m(x) \neq 0$ en $[a, b]$.

Por tanto, $\left\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_m(x)\right\}$ es una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

2. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el máximo de los valores absolutos de los coeficientes de p; es decir, $\alpha = \text{máx}\{1, 1, 1\} = 1$. Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1-\alpha, 1+\alpha] = [-2, 2]$.

3. Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en los que se encuentran.

   Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

   Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -x+1 & 3x^2-1 \\ \cline{3-3} -x^3 + \frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x \\ \cline{1-1} & -\frac{2}{3}x + 1 & \end{array}$$

   Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -3 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 1\right) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & & -1 & 2x-3 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +\frac{9}{2}x & & \frac{3}{2}x+\frac{9}{4} \\ \cline{1-2} & \frac{9}{2}x & -1 & \\ & -\frac{9}{2}x & +\frac{27}{4} & \\ \cline{2-3} & & \frac{23}{4} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{4}{23}\cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{4}{23}\cdot\left(\frac{23}{4}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 1 \\ f_2(x) &= 2x - 3 \\ f_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

Separamos ahora las raíces:

x	$\mathrm{sgn}(f_0(x))$	$\mathrm{sgn}(f_1(x))$	$\mathrm{sgn}(f_2(x))$	$\mathrm{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	2
-1	$+$	$+$	$-$	$-$	1
0	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$+$	$+$	$-$	$-$	1
2	$+$	$+$	$+$	$-$	1

Por tanto, p tiene una única raíz real, y está contenida en el intervalo $[-2,-1]$.

4. Realiza dos iteraciones del método de la secante para calcular de forma aproximada el valor de la raíz más pequeña justificando la convergencia.

Tomemos como semillas los extremos del intervalo, $x_0 = -2$ y $x_1 = -1$. El método de la secante se define, para $n \geqslant 1$, como:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Realizamos dos iteraciones del método de la secante:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-2	-5
1	-1	1
2	$-7/6$	0,578704
3	3,101627	

Observación. Con los conocimientos vistos, no podemos asegurar la convergencia del método de la secante.

Ejercicio 1.1.2.10. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

1. Se pretende resolver la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson sabiendo que es convergente localmente ¿Qué debe cumplir (condición suficiente, no necesaria) la función f para que dicho método tenga convergencia local al menos cúbica?

   Sea I el intervalo de convergencia en el que además se encuentra la raíz s de f. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^4(I)$ (algo que no es muy restrictivo por las funciones que se suelen estudiar en cálculo numérico).

   Definimos la función g auxiliar siguiente:

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   Vemos que el método de Newton-Raphson para f consiste en el método iterativo para g. Por tanto, estudiaremos el orden de convergencia para g. Como $f \in \mathcal{C}^4(I)$, entonces, $g \in \mathcal{C}^3(I)$. Calculamos las derivadas de g:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$
$$g''(x) = \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)f'(x)f''(x)}{f'(x)^4}$$

   Supongamos ahora que $f'(s) = 0$, es decir, que no se trata de una raíz simple. Distinguimos casos, donde m es la multiplicidad de la raíz s:

   - $\underline{m = 2}$: $f(x) = (x - s)^2 q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$f'(x) = 2(x-s)q(x) + (x-s)^2 q'(x) = (x-s)[2q(x) + (x-s)q'(x)]$$
$$f''(x) = 2q(x) + 2(x-s)q'(x) + (x-s)\left[2q'(x) + q'(x) + (x-s)q''(x)\right]$$

     Por tanto:

$$g'(x) = \frac{\cancel{(x-s)^2} q(x)\left[2q(x) + 2(x-s)q'(x) + (x-s)\left[2q'(x) + q'(x) + (x-s)q''(x)\right]\right]}{\cancel{(x-s)^2}[2q(x) + (x-s)q'(x)]^2}$$
$$g'(s) = \frac{2q^2(s)}{4q^2(s)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

     Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

   - $\underline{m \geqslant 3}$: $f(x) = (x-s)^m q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$f'(x) = (x-s)^{m-1} r(x) \qquad r(s) \neq 0$$
$$f''(x) = (x-s)^{m-2} t(x) \qquad t(s) \neq 0$$

Por tanto:

$$g'(x) = \frac{(x-s)^m q(x)\ (x-s)^{m-2} t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{(x-s)^{2m-2} q(x)t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{q(x)t(x)}{r(x)^2}$$
$$g'(s) = \frac{q(s)t(s)}{r(s)^2} \neq 0$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

Por tanto, hemos de suponer $m = 1$, es decir, $f'(s) \neq 0$. En ese caso, los denominadores no se anulan, y tenemos que:

$$g'(s) = \frac{0}{f'(s)^2} = 0$$
$$g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)} = 0 \iff f''(s) = 0$$

Por tanto, si $f \in \mathcal{C}^4(I)$, $f'(s) \neq 0$ y $f''(s) = 0$, entonces el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia al menos cúbica.

2. Si sabemos que f tiene una única raíz real en el intervalo $[-1, 1]$, ¿Cuántas iteraciones del método de bisección hay que realizar para conseguir un error menor que 10^{-7}?

   Supongamos que podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo; es decir, que $f(-1)f(1) < 0$. Entonces:

   $$|e_n| < \frac{1+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-7} \iff 2^n \geqslant 10^7 \iff n \geqslant 23{,}52$$

   Por tanto, serán necesarias, como máximo (ya que en iteraciones anteriores podría haber un error menor) 24 iteraciones, y a partir de entonces el error siempre será menor que 10^{-7}.

3. ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$ invariante frente a transformaciones lineales de F?

   Observación. Que sea invariante frente a transformaciones lineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0.

   Consideramos el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$:

   $$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Dada ahora $A \in GL_k(\mathbb{R})$, consideramos ahora el método aplicado a $AF(X) = 0$:

   $$X'_{n+1} = X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1}(AF)(X'_n)$$

Por conocimientos de Análisis Matemático I, por ser F diferenciale, entonces AF es diferenciable con:

$$J(AF)(X) = A \cdot JF(X) \qquad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Además, como A es regular, si $JF(X)$ es regular, entonces $J(AF)(X)$ también lo es, cumpliendo:

$$(J(AF)(X))^{-1} = (A \cdot JF(X))^{-1} = JF(X)^{-1} \cdot A^{-1} \qquad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1}(AF)(X'_n) = X'_n - JF(X'_n)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot F(X'_n) \\ &= X'_n - JF(X'_n)^{-1}F(X'_n) \end{aligned}$$

Por tanto, y partiendo de la misma semilla $X_0 = X'_0$, el método de Newton-Raphson aplicado a $F(X) = 0$ es invariante frente a transformaciones lineales de F; es decir,

$$X_n = X'_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.1.2.11. El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $\alpha/3$, conociendo las de $\alpha \in]0, \pi/2[$.

1. Llamando $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ y $a = \operatorname{sen}\alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)\right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[3 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) \end{aligned}$$

   Por tanto, $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

2. Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada al polinomio dado por $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.

   Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = -4x^3 + 3x - a \\ f_1(x) &= p'(x) = -12x^2 + 3 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -4x^3 + 3x - a & -12x^2 + 3 \\ \cline{2-2} 4x^3 \quad - x & \frac{1}{3}x \\ \cline{1-1} 2x - a & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -1 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -1 \cdot \big(2x - a\big) \\ &= -2x + a \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rr|l} -12x^2 & +3 & -2x + a \\ \cline{3-3} 12x^2 - 6ax & & 6x + 3a \\ \cline{1-1} -6ax & +3 & \\ 6ax & -3a^2 & \\ \cline{1-2} & (3 + -3a^2) & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{1}{3} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \big(3 + -3a^2\big) \\ &= -1 + a^2 \end{aligned}$$

Además, como $\alpha \in \,]0, \pi/2[$, entonces $a \in \,]0, 1[$, por lo que $-1 + a^2 < 0$. Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -4x^3 + 3x - a \\ f_1(x) &= -12x^2 + 3 \\ f_2(x) &= -2x + a \\ f_3(x) &= -1 + a^2 \end{aligned}$$

Para ver cuántas raíces reales tiene, en primer lugar hemos de acotarlas. Definimos:

$$\alpha = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{a}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1 - \alpha, 1 + \alpha] = \left[-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right]$.

Para deducir cuántas raíces reales tiene, hemos de estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm en los extremos del intervalo:

x	$\operatorname{sgn}(f_0(x))$	$\operatorname{sgn}(f_1(x))$	$\operatorname{sgn}(f_2(x))$	$\operatorname{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	3
0	$-$	$+$	$+$	$-$	2
$a/2$	$+$	$+$	0	$-$	1
1	$-$	$-$	$-$	$-$	0
2	$-$	$-$	$-$	$-$	0

donde las evaluaciones más problemáticas han sido:

$$\begin{aligned}
f_0\left(a/2\right) &= -4\left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{2}\right) - a = -\frac{a^3}{2} + \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}(1-a^2) > 0\\
f_1\left(a/2\right) &= -12\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3 = -3a^2 + 3 = 3(1-a^2) > 0\\
f_2\left(a/2\right) &= -2\cdot\frac{a}{2} + a = -a + a = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, p tiene exactamente 3 raíces reales.

3. Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\alpha/3\right)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $]0, a/2[$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.

   Sabemos que $\operatorname{sen}\left(\alpha/3\right)$ es solución de la ecuación $p(x) = 0$, y además sabemos que la solución del intervalo $]0, a/2[$ es única. Por tanto, tan solo nos queda demostrar que $\operatorname{sen}\left(\alpha/3\right) \in\,]0, a/2[$.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} > \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) &\iff \operatorname{sen}\alpha = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \iff\\
&\iff 3 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2 \iff \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{4} \iff\\
&\iff \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{2} \iff \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} \iff \alpha < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   Por tanto, $\operatorname{sen}\left(\alpha/3\right) \in\,]0, a/2[$, y te tiene demostrado que es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en dicho intervalo.

   Comprobamos ahora que el método de Newton-Raphson converge para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$. Para ello, calculamos $p'(x)$:

$$p'(x) = -12x^2 + 3 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

   Comprobamos las 4 condiciones de convergencia para aplicar el método de Newton-Raphson en el intervalo $[0, a/2]$:

   a) $p(0)p(a/2) < 0$ se tiene, como hemos comprobado al estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm.

   b) $p'(x) \neq 0$ para $x \in [0, a/2]$ por ser $a < 1$.

   c) $p''(x)$ no cambia de signo en $[0, a/2]$.

d) Comprobemos la última condición:

$$p(0) = -a$$
$$p'(0) = 3$$
$$p\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}(1-a^2)$$
$$p'\left(\frac{a}{2}\right) = 3(1-a^2)$$

Por tanto:

$$\left|\frac{p(0)}{p'(0)}\right| = \frac{a}{3} < \frac{a}{2}$$
$$\left|\frac{p\left(a/2\right)}{p'\left(a/2\right)}\right| = \frac{a/2(1-a^2)}{3(1-a^2)} = \frac{a}{6} < \frac{a}{2}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge para todo $x_0 \in [0, a/2]$, y en particular para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$.

4. Para resolver la ecuación anterior, se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{a}{3-4x_n^2}$$

Estudia bajo qué condiciones el método converge localmente a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

Vemos en primer lugar losiguiente:

$$\frac{a}{2} < \frac{3}{4} \iff a < \frac{3}{2}$$

que se tiene de forma directa. Por tanto, podemos definir la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & [0, a/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{a}{3-4x^2} \end{array}$$

Tenemos que $g \in \mathcal{C}^1\left([0, a/2]\right)$, y que:

$$|g'(x)| = \left|\frac{-8ax}{(3-4x^2)^2}\right| = \frac{8a|x|}{(3-4x^2)^2} \leqslant \frac{8a\cdot a/2}{(3-4\cdot(a/2)^2)^2} = \frac{4a^2}{(3-a^2)^2} < \frac{4}{(3-1)^2} = 1 \qquad \forall x \in [0, a/2]$$

Por tanto, el método propuesto converge localmente a la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en el intervalo $[0, a/2]$.

Respecto al orden de convergencia, como p tiene tres raíces reales sabemos que la multiplicidad de cada una de ellas es simple, por lo que el orden de convergencia es cuadrático. Por otro lado, para que este método tenga convergencia cuadrática es necesario que $g'(s) = 0$, siendo s la solución de la ecuación $p(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \iff x = 0$$
$$g(0) = 0 \iff a = \operatorname{sen}\alpha = 0$$

No obstante, esto no es posible, ya que $\alpha \in]0, \pi/2[$. Por tanto, $g'(s) \neq 0$, y el método de Newton-Raphson converge más rápidamente que el método propuesto.

5. Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de sen $(\pi/18)$.

   Tomamos $a = 1/2$, $x_0 = 1/6$ y aplicamos una iteración del método de Newton-Raphson:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = \frac{1}{6} - \frac{-4\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}}{-12\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3} =$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{-1/54 + 1/2 - 1/2}{-1/3 + 3} = \frac{1}{6} + \frac{3}{54 \cdot 8} = \frac{25}{144} \approx 0{,}173611$$

n	x_n
0	$1/6$
1	0,173611

1.2. Derivación e integración numérica

1.2.1. Relación 1. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.1.1.

1. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia progresiva en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a, x_1 = a+h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

   $$\begin{aligned}
   \ell_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-(a+h)}{a-(a+h)} = \frac{x-a-h}{-h} = \frac{a+h-x}{h} \\
   \ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-a}{a+h-a} = \frac{x-a}{h} \\
   \ell_0'(x) &= {}^{-1}\!/_h \\
   \ell_1'(x) &= {}^{1}\!/_h
   \end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que:

   $$\begin{aligned}
   f(x) &= f(a)\ell_0(x) + f(a+h)\ell_1(x) + E(x) \\
   f'(x) &= f(a)\ell_0'(x) + f(a+h)\ell_1'(x) + E'(x)
   \end{aligned}$$

   Además, el error cometido al interpolar f en $a, a+h$ mediante dos nodos es:

   $$\begin{aligned}
   E(x) &= f[a, a+h, x]\Pi(x) \\
   E'(x) &= f[a, a+h, x, x]\Pi(x) + f[a, a+h, x]\Pi'(x)
   \end{aligned}$$

   Por tanto:

   $$\begin{aligned}
   f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + R(f) \\
   R(f) &= E'(a) = f[a, a+h, a]\Pi'(a) = -h \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \qquad \xi \in \,]a, a+h[
   \end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_1$, pueso que en estos casos se anulará la segunda derivada. No es exacta en $\mathbb{P}_2$ porque el error no se anula.

2. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f \in C^2[a, a+h]$.

   Desaroollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

   $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a, a+h[$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a, a+h[$$

3. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia centrada en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a - h, x_1 = a + h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-(a+h)}{a-h-(a+h)} = \frac{x-a-h}{-2h} \\
\ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-(a-h)}{a+h-(a-h)} = \frac{x-a+h}{2h} \\
\ell_0'(x) &= {}^{-1}\!/_{2h} \\
\ell_1'(x) &= {}^{1}\!/_{2h}
\end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a-h)\ell_0(x) + f(a+h)\ell_1(x) + E(x) \\
f'(x) &= f(a-h)\ell_0'(x) + f(a+h)\ell_1'(x) + E'(x)
\end{aligned}$$

   Además, el error cometido al interpolar f en $a-h, a+h$ mediante dos nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a-h, a+h, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[a-h, a+h, x, x]\Pi(x) + f[a-h, a+h, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

   Por tanto:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + R(f) \\
R(f) &= E'(a) = f[a-h, a+h, a, a]\Pi(a) = -h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}
\end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$, pueso que en estos casos se anulará la tercera derivada. Por tanto, el grado de exactitud de esta fórmula es 2.

4. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f'' \in C^3[a-h, a+h]$.

   Desaroollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a, a+h[\\
f(a-h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in \,]a-h, a[
\end{aligned}$$

Realizamos una combinación lineal de ambas expresiones, forzando a que el coeficiente de $f'(a)$ sea 1 y el coeficiente de $f(a)$ sea 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1/2h \\ \alpha_1 = -1/2h \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + R(f) \\ R(f) &= -\frac{h^2}{12} \left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) \qquad \xi_1, \xi_2 \in \left]a-h, a+h\right[\\ &\overset{(*)}{=} -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \qquad \xi \in \left]a-h, a+h\right[\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado el Teorema del Valor Medio.

Ejercicio 1.2.1.2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia centrada en tres nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a-h, x_1 = a, x_2 = a+h$. Como lo realizamos mediante el método de los coeficientes indeterminados, debemos imponer exactitud en $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= (a-h)\alpha_0 + a\alpha_1 + (a+h)\alpha_2 \\ 2a &= (a-h)^2\alpha_0 + a^2\alpha_1 + (a+h)^2\alpha_2 \end{aligned}$$

Resolvemos ahora dicho sistema para hallar los coeficientes. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) - h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) + h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) - 2ah\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= -h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) - 2ah\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= -h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) + 2a \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= -h\,(\alpha_0 - \alpha_2) \\ 0 &= h^2\,(\alpha_0 + \alpha_2) \end{aligned}$$

De la última ecuación, tenemos que $\alpha_0 = -\alpha_2$, y sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Por tanto, vemos que el peso del nodo central es 0, lo que nos lleva a la fórmula de diferencia centrada en dos nodos. No obstante, comprobémoslo. De la segunda ecuación, tenemos que:

$$1 = -2h\alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2h}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ es:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Ejercicio 1.2.1.3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in C^4[a, a+2h]$.

Queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia progresiva en tres nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x-(a+h)}{a-(a+h)} \cdot \frac{x-(a+2h)}{a-(a+2h)} = \frac{x-a-h}{-h} \cdot \frac{x-a-2h}{-2h} \\ \ell_1(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x-a}{a+h-a} \cdot \frac{x-(a+2h)}{(a+h)-(a+2h)} = \frac{x-a}{h} \cdot \frac{x-a-2h}{-h} \\ \ell_2(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x-a}{a+2h-a} \cdot \frac{x-(a+h)}{(a+2h)-(a+h)} = \frac{x-a}{2h} \cdot \frac{x-a-h}{h} \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas de los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned} \ell_0'(x) &= \frac{x-a-2h+x-a-h}{2h^2} = \frac{2x-2a-3h}{2h^2} \\ \ell_1'(x) &= \frac{x-a-2h+x-a}{-h^2} = \frac{2x-2a-2h}{-h^2} \\ \ell_2'(x) &= \frac{x-a-h+x-a}{2h^2} = \frac{2x-2a-h}{2h^2} \end{aligned}$$

Como buscamos aproximar $f'(a)$, evaluamos cada una de las derivadas de los polinomios básicos de Lagrange en a:

$$\begin{aligned}
\ell_0'(a) &= \frac{-3h}{2h^2} = -\frac{3}{2h} \\
\ell_1'(a) &= \frac{-2h}{-h^2} = \frac{2}{h} \\
\ell_2'(a) &= \frac{-h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}
\end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ es la siguiente:

$$f'(a) \approx -\frac{3}{2h}f(a) + \frac{2}{h}f(a+h) - \frac{1}{2h}f(a+2h)$$

Para el error, definimos:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= \prod_{i=0}^{2}(x-x_i) = (x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \\
\Pi'(x) &= (x-a-h)(x-a-2h) + (x-a)(x-a-2h) + (x-a)(x-a-h)
\end{aligned}$$

Por tanto, el error cometido al interpolar f en $a, a+h, a+2h$ mediante tres nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a, a+h, a+2h, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[a, a+h, a+2h, x, x]\Pi(x) + f[a, a+h, a+2h, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(f) = E'(a) &= f[a, a+h, a+2h, a, a]\Pi(a) + f[a, a+h, a+2h, a]\Pi'(a) = \\
&= 2h^2 f[a, a+h, a+2h, a] = 2h^2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = h^2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} \qquad \xi \in \,]a, a+2h[
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in C^{n+3}[a,b]$ con $[a,b]$ tal que $x_0, x_1, \ldots, x_n, c \in [a,b]$, entonces

$$R(f) = 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)$$

siendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \,]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

Sabemos que el error cometido con la interpolación de f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mediante $p \in \mathbb{P}_n$ es:

$$E(x) = f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi(x)$$

Calculemos cada una de las derivadas de $E(x)$:

$$E'(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]\Pi(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\Pi'(x)$$
$$E''(x) = 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x, x]\Pi(x) + 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]\Pi'(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\Pi''(x)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= L(f-p) = L(E) = E''(c) = \\
&= 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, c, c, c]\Pi(c) + 2f[x_0, x_1, \dots, x_n, c, c]\Pi'(c) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, c]\Pi''(c) = \\
&= 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)
\end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \left]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}\right[$, donde hemos empleado que los nodos están ordenados; es decir, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Ejercicio 1.2.1.5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in C^5[a-2h, a]$.

Sabemos que la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es de la forma:

$$f''(a) \approx \alpha_0 f(a-2h) + \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ son los coeficientes que debemos determinar. Para ello, imponemos exactitud en $\mathbb{P}_2$:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= (a-2h)\alpha_0 + (a-h)\alpha_1 + a\alpha_2 \\
2 &= (a-2h)^2\alpha_0 + (a-h)^2\alpha_1 + a^2\alpha_2
\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= a\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) - 2h\alpha_0 - h\alpha_1 \\
2 &= a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) + 4h^2\alpha_0 + h^2\alpha_1 - 4ah\alpha_0 - 2ah\alpha_1
\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= h(2\alpha_0 + \alpha_1) \\
2 &= 2h^2\alpha_0 + h^2(2\alpha_0 + \alpha_1) - 2ah(2\alpha_0 + \alpha_1)
\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & = 2\alpha_0 + \alpha_1 \\ 1 & = h^2\alpha_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha_0 & = {}^1/_{h^2} \\ \alpha_1 & = -2\alpha_0 = {}^{-2}/_{h^2} \\ \alpha_2 & = -\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_0 = {}^1/_{h^2} \end{array}\right\}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es:

$$f''(a) \approx \frac{1}{h^2}f(a-2h) - \frac{2}{h^2}f(a-h) + \frac{1}{h^2}f(a)$$

Para el error, definimos:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= \prod_{i=0}^{2}(x-(a-ih)) = (x-a+2h)(x-a+h)(x-a)\\
\Pi'(x) &= (x-a+h)(x-a) + (x-a+2h)(x-a) + (x-a+2h)(x-a+h)\\
\Pi''(x) &= 2(x-a) + 2(x-a+h) + 2(x-a+2h)
\end{aligned}$$

Por el Ejercicio 1.2.1.4, puesto que $f \in C^5[a-2h, a]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= 2\cdot\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}\cancelto{0}{\Pi(a)} + 2\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\Pi'(a) + \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!}\Pi''(a) =\\
&= 2\cdot 2h^2\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} + 6h\cdot\frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!} =\\
&= h^2\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{6} + h\cdot f^{(3)}(\xi_0)
\end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \,]a-2h, a[$.

Ejercicio 1.2.1.6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando se tenga que $f \in C^4[a-h, a+h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Consideramos tres nodos, $x_0 = a-h, x_1 = a, x_2 = a+h$. Desarrollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a. Podríamos desarrollar hasta el tercer término, pero vemos que al sumar el término de tercer orden se anulará. Por tanto, desarrollamos hasta el cuarto término:

$$\begin{aligned}
f(a-h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a-h, a[\\
f(a) &= f(a)\\
f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2) \qquad \xi_2 \in \,]a, a+h[
\end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación $i-$ésima por el coeficiente α_i y sumamos:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) &= (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) f(a) - h(\alpha_0-\alpha_2) f'(a) +\\
&+ \frac{h^2}{2}(\alpha_0+\alpha_2) f''(a) - \frac{h^3}{6}(\alpha_0-\alpha_2) f'''(a) + \frac{h^4}{24}\left(\alpha_0 f^{(4)}(\xi_1) + \alpha_2 f^{(4)}(\xi_2)\right)
\end{aligned}$$

Usando el Teorema del Valor Medio, $\exists \xi \in \,]a-h, a+h[$ tal que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) &= (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2) f(a) - h(\alpha_0-\alpha_2) f'(a) +\\
&+ \frac{h^2}{2}(\alpha_0+\alpha_2) f''(a) - \frac{h^3}{6}(\alpha_0-\alpha_2) f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{1}{\alpha_0+\alpha_2}
\end{aligned}$$

Imponemos ahora las siguientes igualdades, donde vemos por qué hemos tenido que desarrollar hasta el cuarto término:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, tenemos que $\alpha_0 = \alpha_2$, y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos que $\alpha_0 = \alpha_2 = 1/2$. Por tanto, $\alpha_1 = -1$, y la ecuación anterior queda:

$$\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) = \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi)$$

Por tanto, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es:

$$f''(a) \approx \frac{2\alpha_0}{h^2} f(a-h) + \frac{2\alpha_1}{h^2} f(a) + \frac{2\alpha_2}{h^2} f(a+h) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

Respecto al error, tenemos que:

$$R(f) = -\frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi) \left(\frac{2}{h^2}\right) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

Por tanto, vemos que el orden de precisión de esta fórmula es 3, pues el error se anula en $\mathbb{P}_3$ pero no en $\mathbb{P}_4$.

Ejercicio 1.2.1.7.

1. Halle la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in C^4[a-h_1, a+h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= (a-h_1)\alpha_0 + a\alpha_1 + (a+h_2)\alpha_2 \\ 2a &= (a-h_1)^2\alpha_0 + a^2\alpha_1 + (a+h_2)^2\alpha_2 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - h_1\alpha_0 + h_2\alpha_2 \\ 2a &= a^2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + \alpha_2 h_2 (h_2 + 2a) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
1 &= -h_1\alpha_0 + h_2\alpha_2 \\
2a &= \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + \alpha_2 h_2 (h_2 + 2a)
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación, obtenemos $h_2\alpha_2 = 1 + h_1\alpha_0$, y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos:

$$2a = \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + (1 + h_1\alpha_0)(h_2 + 2a) = \alpha_0 h_1^2 - \cancel{2a\alpha_0 h_1} + h_2 + 2a + h_1 h_2 \alpha_0 + \cancel{2a\alpha_0 h_1}$$

Por tanto:

$$0 = \alpha_0 h_1 (h_1 + h_2) + h_2 \Longrightarrow \alpha_0 = -\frac{h_2}{h_1 (h_1 + h_2)} \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2 (h_1 + h_2)}$$

De la primera ecuación, obtenemos:

$$\alpha_1 = -\alpha_0 - \alpha_2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}$$

Por tanto, la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ para aproximar $f'(a)$ es:

$$f'(a) \approx -\frac{h_2}{h_1 (h_1 + h_2)} f(a - h_1) + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} f(a) + \frac{h_1}{h_2 (h_1 + h_2)} f(a + h_2)$$

Para el error, definimos:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= \prod_{i=0}^{2} (x - (a + (i-1)h_i)) = (x - a - h_1)(x - a)(x - a + h_2) \\
\Pi'(x) &= (x - a)(x - a + h_2) + (x - a - h_1)(x - a + h_2) + (x - a - h_1)(x - a)
\end{aligned}$$

El error cometido al interpolar f en $a - h_1, a, a + h_2$ mediante tres nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a - h_1, a, a + h_2, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[a - h_1, a, a + h_2, x, x]\Pi(x) + f[a - h_1, a, a + h_2, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = E'(a) = f[a - h_1, a, a + h_2, a]\Pi'(a) = -h_1 h_2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \qquad \xi \in \,]a - h_1, a + h_2[$$

Por tanto, el grado de exactitud de esta fórmula es 2, pues el error se anula en $\mathbb{P}_2$ pero no en $\mathbb{P}_3$.

2. Use la tabla de valores

x	$f(x)$
0,7	−0,1
1,25	0,2
1,5	0,3
1,75	0,25

para dar valores aproximados de $f'(0{,}7)$, $f'(1{,}25)$, $f'(1{,}5)$ y $f'(1{,}75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

- Para $f'(0{,}7)$:
  En este caso, hemos de usar una fórmula progresiva. Empleamos la fórmula progresiva con dos nodos, usando $a = 0{,}7$, $h = 1{,}25 - 0{,}7 = 0{,}55$. Tenemos que:

$$f'(0{,}7) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1{,}25) - f(0{,}7)}{0{,}55} = \frac{0{,}2 + 0{,}1}{0{,}55} = \frac{0{,}3}{0{,}55} \approx 0{,}545455$$

- Para $f'(1{,}25)$:
  Empleamos la fórmula del apartado anterior, con $a = 1{,}25$, $h_1 = 1{,}25 - 0{,}7 = 0{,}55$, $h_2 = 1{,}5 - 1{,}25 = 0{,}25$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(1{,}25) &\approx -\frac{0{,}25}{0{,}55 \cdot 0{,}8} f(0{,}7) + \frac{0{,}25 - 0{,}55}{0{,}55 \cdot 0{,}25} f(1{,}25) + \frac{0{,}55}{0{,}25 \cdot 0{,}8} f(1{,}5) \\ &\approx -\frac{0{,}25}{0{,}44}(-0{,}1) + \frac{-0{,}3}{0{,}1375}(0{,}2) + \frac{0{,}55}{0{,}2}(0{,}3) \approx 0{,}445455 \end{aligned}$$

- Para $f'(1{,}5)$:
  Empleamos la fórmula centrada con 2 nodos (o 3 nodos, puesto que hemos visto que es la misma) con $a = 1{,}5$, $h = 0{,}25$. Tenemos que:

$$f'(1{,}5) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{f(1{,}75) - f(1{,}25)}{0{,}5} = \frac{0{,}25 - 0{,}2}{0{,}5} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$$

- Para $f'(1{,}75)$:
  Empleamos la fórmula regresiva con dos nodos, usando $a = 1{,}75$, $h = 0{,}25$. Tenemos que:

$$f'(1{,}75) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \frac{f(1{,}75) - f(1{,}5)}{0{,}25} = \frac{0{,}25 - 0{,}3}{0{,}25} = \frac{-0{,}05}{0{,}25} = -0{,}2$$

Ejercicio 1.2.1.8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0{,}8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0,6, 0,8 y 1.

Podríamos ver que se trata de una fórmula centrada en tres nodos, pero vamos a calcular directamente el error. Definimos:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= (x - 0{,}6)(x - 0{,}8)(x - 1) \\ \Pi'(x) &= (x - 0{,}8)(x - 1) + (x - 0{,}6)(x - 1) + (x - 0{,}6)(x - 0{,}8) \end{aligned}$$

El error cometido al interpolar f en $0{,}6, 0{,}8, 1$ mediante tres nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[0{,}6, 0{,}8, 1, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[0{,}6, 0{,}8, 1, x, x]\Pi(x) + f[0{,}6, 0{,}8, 1, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = E'(0{,}8) = f[0{,}6, 0{,}8, 1, 0{,}8]\Pi'(0{,}8) = -0{,}04 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \qquad \xi \in \left]0{,}6, 1\right[$$

Para acotarlo, calculamos $f^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2 x \\
f'(x) &= -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x \\
f''(x) &= -2\cos 2x \\
f^{(3)}(x) &= 4\operatorname{sen} 2x
\end{aligned}$$

Por tanto, una cota del error es:

$$|R(f)| = \left|-\frac{0{,}04}{6} \cdot 4\operatorname{sen}(2\xi)\right| \leqslant \frac{0{,}04}{6} \cdot 4 = \frac{2}{75} \approx 0{,}0266667$$

1.2.2. Relación 2. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.2.1.

1. Obtén la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$, mediante desarrollo de Taylor de $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término.

   Buscamos obtener $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f'(a) = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) + R(f)$$

   Desarrollando en serie de Taylor $f(a)$ y $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término, tenemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

   donde $\xi \in \,]a, a+h[$. Multiplicando por α_0 y α_1 respectivamente y sumando, obtenemos:

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) = (\alpha_0+\alpha_1)f(a) + \alpha_1 hf'(a) + \frac{\alpha_1 h^2}{2}f''(a) + \frac{\alpha_1 h^3}{6}f'''(a) + \frac{\alpha_1 h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 \cdot h &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{1}{h} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{h} \end{aligned}\right\}$$

   Por lo tanto, la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$ es:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + R(f)$$

   Respecto al error, tenemos que:

$$R(f) = -\frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

2. Si notamos por $F(a,h)$ la aproximación de $f'(a)$ obtenida anteriormente, expresa el valor exacto de $f'(a)$ en función de $F(a,h)$ y los restantes términos en el desarrollo de Taylor.

$$f'(a) = F(a,h) - \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

3. A partir de una combinación de los valores $F(a,h)$ y $F(a,{}^h\!/_2)$ obtén una fórmula con mayor orden de precisión que $F(a,h)$.

   Sabemos que:

$$\begin{aligned}
F(a,h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
F(a,{}^h\!/_2) &= \frac{f(a+{}^h\!/_2)-f(a)}{{}^h\!/_2} = \frac{2\left(f(a+{}^h\!/_2)-f(a)\right)}{h}
\end{aligned}$$

   Empleando lo obtenido para el error, pero usando ahora ${}^h\!/_2$, tenemos que:

$$f'(a) = F(a,{}^h\!/_2) - \frac{h}{4}f''(a) - \frac{h^2}{4!}f'''(a) - \frac{h^3}{8\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)$$

   Multiplicamos por 2 esta nueva expresión, y le restamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 2f'(a) - f'(a) = \\
&= 2\left(F(a,{}^h\!/_2) - \frac{h}{4}f''(a) - \frac{h^2}{4!}f'''(a) - \frac{h^3}{8\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)\right) - \\
&\qquad - \left(F(a,h) - \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)\right) = \\
&= \left(2F(a,{}^h\!/_2) - \cancel{\frac{h}{2}f''(a)} - \frac{h^2}{12}f'''(a) - \frac{h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)\right) - \\
&\qquad - \left(F(a,h) - \cancel{\frac{h}{2}f''(a)} - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)\right) = \\
&= 2F(a,{}^h\!/_2) - F(a,h) + \frac{h^2}{12}f'''(a) - \frac{h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi) + \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi) = \\
&= 2F(a,{}^h\!/_2) - F(a,h) + \frac{h^2}{12}f'''(a) + \frac{3h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

   Como vemos, hemos conseguido una fórmula que, en vez de ser exacta en $\mathbb{P}_1$, es exacta en $\mathbb{P}_2$.

4. Aplica las dos fórmulas obtenidas para aproximar $f'(2)$ con $h=0{,}1$ para la función $f(x)=\ln(x)$, $x\in[1,3]$.

Ejercicio 1.2.2.2. Para evaluar el funcional $L(f)=2f'(a)-f''(a)$ se propone una fórmula del tipo

$$2f'(a)-f''(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h):$$

1. Imponiendo exactitud en el espacio correspondiente halla la fórmula anterior para que sea de tipo interpolatorio clásico.

   En este caso, como hay 3 nodos, es necesario imponer exactitud en $\mathbb{P}_2$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1,x,x^2\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
2\cdot 0 - 0 &= \alpha_0\cdot 1 + \alpha_1\cdot 1 + \alpha_2\cdot 1 \\
2\cdot 1 - 0 &= \alpha_0\cdot(a-h) + \alpha_1\cdot a + \alpha_2\cdot(a+h) \\
2\cdot 2a - 2 &= \alpha_0\cdot(a-h)^2 + \alpha_1\cdot a^2 + \alpha_2\cdot(a+h)^2
\end{aligned}$$

Por tanto, se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h & a & a+h \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4a-2 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz ampliada, y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a-h & a & a+h & 2 \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 & 4a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - (a-h)F_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a-h & a & a+h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a+h) & 2(a+h-1) \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 - (a-h)F_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a+h) & 2(a+h-1) \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - aF_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 2(h-1) \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{h-1}{h^2} \\ \alpha_1 = \dfrac{2 - 2\cdot\frac{h-1}{h}}{h} = \dfrac{2}{h^2} \\ \alpha_0 = -\dfrac{2+h-1}{h^2} = -\dfrac{1+h}{h^2} \end{cases}$$

Por tanto, al ser exacta en $\mathbb{P}_2$, la siguiente fórmula es de tipo interpolatorio clásico:

$$2f'(a) - f''(a) \approx -\frac{1+h}{h^2}f(a-h) + \frac{2}{h^2}f(a) + \frac{h-1}{h^2}f(a+h)$$

2. Obtén una expresión del error de la fórmula en función de unas o varias derivadas de la función de órdenes superiores a dos.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= (x-a+h)(x-a)(x-a-h) \\ \Pi'(x) &= (x-a)(x-a-h) + (x-a+h)(x-a-h) + (x-a+h)(x-a) \\ \Pi''(x) &= 2(x-a+h) + 2(x-a) + 2(x-a-h) \end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$E(x) = f[a-h, a, a+h, x]\Pi(x)$$

Calculemos su derivada primera y segunda:

$$\begin{aligned} E'(x) &= f[a-h,a,a+h,x,x]\Pi(x) + f[a-h,a,a+h,x]\Pi'(x) \\ E''(x) &= 2f[a-h,a,a+h,x,x,x]\Pi(x) + 2f[a-h,a,a+h,x,x]\Pi'(x) + f[a-h,a,a+h,x]\Pi''(x) \end{aligned}$$

Evaluamos cada una de las derivadas en a:

$$E'(a) = -f[a-h, a, a+h, a]h^2$$
$$E''(a) = -2f[a-h, a, a+h, a, a]h^2$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f) &= L(E) = 2E'(a) - E''(a)\\
&= -2f[a-h, a, a+h, a]h^2 + 2f[a-h, a, a+h, a, a]h^2 =\\
&= 2h^2\left(f[a-h, a, a+h, a, a] - f[a-h, a, a+h, a]\right) =\\
&= 2h^2\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) \qquad \text{para algún } \xi_1, \xi_2 \in\ ]a-h, a+h[
\end{aligned}$$

3. Aplica la fórmula obtenida para aproximar $2f'(2) - f''(2)$ con $h = 0{,}1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 3]$.

$$\begin{aligned}
2f'(2) - f''(2) &\approx -\frac{1+0{,}1}{0{,}1^2}f(1{,}9) + \frac{2}{0{,}1^2}f(2) + \frac{0{,}1-1}{0{,}1^2}f(2{,}1)\\
&= -\frac{1{,}1}{0{,}01}\ln(1{,}9) + \frac{2}{0{,}01}\ln(2) + \frac{-0{,}9}{0{,}01}\ln(2{,}1) \approx 1{,}2511476
\end{aligned}$$

4. Compara el error real obtenido en en el apartado anterior con respecto a una cota deducida de 2).

El valor real es:

$$2f'(2) - f''(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Por tanto, el error real obtenido es:

$$\text{Error real} \approx 1{,}25 - 1{,}2511476 \approx -0{,}147607 \cdot 10^{-3}$$

El error obtenido en 2) es:

$$2 \cdot 0{,}1^2\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) = 0{,}02\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) \qquad \xi_1, \xi_2 \in\ ]1{,}9, 2{,}1[$$

Para poder acotarlo, necesitamos acotar las derivadas cuarta y tercera de f. Como $f(x) = \ln(x)$, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Observación. Notemos que este ejercicio carece de sentido práctico, puesto que si podemos calcular las funciones derivadas podemos calcular el funcional pedido. No obstante, en la práctica se supone que no podremos calcular estas derivadas, pero sí las tendremos acotadas de alguna forma (por ejemplo, piénsese en las funciones trigonométricas).

Por tanto, la cota del error es:

$$\begin{aligned}
|\text{Error Predicho}| &\leqslant 0{,}02\left(\frac{|f^{(4)}(\xi_1)|}{4!}+\frac{|f^{(3)}(\xi_2)|}{3!}\right)\leqslant 0{,}02\left(\frac{6}{1{,}9^4\cdot 4!}+\frac{2}{1{,}9^3\cdot 3!}\right)\\
&\leqslant 0{,}02\left(\frac{1}{1{,}9^4\cdot 4}+\frac{1}{1{,}9^3\cdot 3}\right)\approx 1{,}355627\cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

5. Aplica la fórmula para obtener $2f'(0)-f''(0)$ suponiendo que tienes la siguiente tabla de valores de f:

x_i	$f(x_i)$
$-0{,}2$	9
0	10
0,2	9
0,4	12

Tomando $h=0{,}2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2f'(0)-f''(0) &\approx -\frac{1+0{,}2}{0{,}2^2}f(-0{,}2)+\frac{2}{0{,}2^2}f(0)+\frac{0{,}2-1}{0{,}2^2}f(0{,}2)\\
&= -\frac{1{,}2}{0{,}04}\cdot 9+\frac{2}{0{,}04}\cdot 10+\frac{-0{,}8}{0{,}04}\cdot 9 = 50
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.3. Considera la fórmula de tipo interpolatorio clásico siguiente

$$f'(a)\approx \alpha_0 f(a-h)+\alpha_1 f(a+3h)$$

1. Da una expresión del error de dicha fórmula.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= (x-a+h)(x-a-3h)\\
\Pi'(x) &= (x-a-3h)+(x-a+h)
\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 2 nodos dados es:

$$E(x)=f[a-h,a+3h,x]\Pi(x)$$

Calculemos su derivada primera:

$$E'(x)=f[a-h,a+3h,x,x]\Pi(x)+f[a-h,a+3h,x]\Pi'(x)$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f)=L(E)=E'(a) &= f[a-h,a+3h,a,a]\Pi(a)+f[a-h,a+3h,a]\Pi'(a)\\
&= -3h^2f[a-h,a+3h,a,a]-2hf[a-h,a+3h,a]=\\
&= -3h^2\left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}\right)-2h\left(\frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2!}\right)=\\
&= -h^2\left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2}\right)-h\left(f^{(2)}(\xi_2)\right) \qquad \text{para algún } \xi_1,\xi_2\in\,]a-h,a+3h[
\end{aligned}$$

2. Úsala para aproximar la derivada $f'(3)$ siendo $f(x) = x^3$ con $h = 0{,}1$.

   Calculamos los polinomios fundamentales de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{x-(a+2h)}{a-h-(a+3h)} = \frac{x-a-2h}{-4h} \Longrightarrow \ell_0'(x) = -\frac{1}{4h}$$
$$\ell_1(x) = \frac{x-(a-h)}{a+3h-(a-h)} = \frac{x-a+h}{4h} \Longrightarrow \ell_1'(x) = \frac{1}{4h}$$

   Por tanto, la fórmula de derivación numérica es:

$$f'(3) \approx -\frac{1}{0{,}4}f(3-0{,}1) + \frac{1}{0{,}4}f(3+0{,}3) = 28{,}87$$

Ejercicio 1.2.2.4. Determina razonadamente si es posible diseñar una fórmula numérica de tipo interpolatorio en el espacio generado por $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^4\}$ para aproximar

$$\int_{-2}^{2} f(x)\ dx + \int_{-2}^{2} |x|f(x)\ dx$$

usando para ello los datos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx, \quad \int_{-1}^{1} |x|f(x)\ dx, \quad f(0) \quad \text{y} \quad f'(0).$$

En particular determina el peso de $f'(0)$.

Ejercicio 1.2.2.5. Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

   Como tiene 3 nodos y se trata de la segunda derivada, sabemos que no puede ser exacta en $\mathbb{P}_5$, por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de α_0, α_1, α_2, x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

   Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_4$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ 2 &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \\ 0 &= \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 \\ 0 &= \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4 \end{aligned}$$

Veamos qué es necesario para que el sistema sea compatible:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & 2 \\ x_1^3 & x_2^3 & 0 \end{vmatrix} = -2\left(x_1x_2^3 - x_1^3x_2\right) = -2x_1x_2(x_2^2 - x_1^2) = -2x_1x_2(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

Por tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenius, si $x_2 \neq -x_1$, el sistema es incompatible y no tiene solución. Por tanto, imponemos $x_2 = -x_1$ y el sistema queda:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= x_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 2 &= x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 &= x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 0 &= x_1^4(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

Como $x_1 \neq 0$, obtenemos que este sistema es incompatible. Por tanto, no es posible imponer exactitud en $\mathbb{P}_4$. Veamos si es posible imponer exactitud en $\mathbb{P}_3$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \\ 2 &= \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 \\ 0 &= \alpha_1x_1^3 + \alpha_2x_2^3 \end{aligned}$$

Anteriormente vimos que es necesario imponer $x_2 = -x_1$. Por tanto, el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & = x_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 2 & = x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 & = x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha_0 & = -\dfrac{2}{x_1^2} \\ \alpha_1 & = \dfrac{1}{x_1^2} \\ \alpha_2 & = \dfrac{1}{x_1^2} \end{array}\right\}$$

Por tanto, el grado máximo de exactitud es 3 y la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio es:

$$f''(0) = -\frac{2}{x_1^2}f(0) + \frac{1}{x_1^2}f(x_1) + \frac{1}{x_1^2}f(-x_1) + R(f)$$

donde notemos que hemos impuesto que los nodos sean simétricos respecto al origen.

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f. ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= x(x-x_1)(x-x_2)\\
\Pi'(x) &= (x-x_1)(x-x_2)+x(x-x_2)+x(x-x_1)\\
\Pi''(x) &= 2(x-x_1)+2(x-x_2)+2x
\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[0,x_1,x_2,x]\Pi(x)\\
E'(x) &= f[0,x_1,x_2,x,x]\Pi(x)+f[0,x_1,x_2,x]\Pi'(x)\\
E''(x) &= 2f[0,x_1,x_2,x,x,x]\Pi(x)+2f[0,x_1,x_2,x,x]\Pi'(x)+f[0,x_1,x_2,x]\Pi''(x)
\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f) = L(E) = E''(0) &= -2x_1^2 f[0,x_1,x_2,0,0]+2f[0,x_1,x_2,0]\left(-x_1+x_1\right)\\
&= -2x_1^2 f[0,x_1,x_2,0,0] =\\
&= -2x_1^2\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\right) \qquad \text{para algún } \xi_1\in\,]\text{mín}\{-x_1,x_1\},\text{máx}\{-x_1,x_1\}[
\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que el error es proporcional a x_1^2. Por tanto, si x_1 es pequeño, el error será pequeño. Por tanto, es conveniente que x_1 sea pequeño.

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1}.

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & x & \longmapsto & xe^{x^2+1}
\end{array}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$f''(0)\approx -\frac{2}{x_1^2}f(0)+\frac{1}{x_1^2}f(x_1)+\frac{1}{x_1^2}f(-x_1)=\frac{x_1e^{x_1^2+1}-x_1e^{x_1^2+1}}{x_1^2}=0$$

Ejercicio 1.2.2.6. Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0)=\alpha_0 f(-1)+\alpha_1 f(1)+\alpha_2 f(2)+\alpha_3 f(a)+R(f),\quad a\neq -1,1,2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

   Como tiene 4 nodos y se trata de la primera derivada, sabemos que no puede ser exacta en $\mathbb{P}_5$, por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de α_0, α_1, α_2, α_3 y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_4$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
1 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + a\alpha_3 \\
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 4\alpha_2 + a^2\alpha_3 \\
0 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 8\alpha_2 + a^3\alpha_3 \\
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 16\alpha_2 + a^4\alpha_3
\end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & a & 1 \\
1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\
-1 & 1 & 8 & a^3 & 0 \\
1 & 1 & 16 & a^4 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[F_4'=F_4+F_1]{F_2'=F_2+F_1}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\
1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\
0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\
1 & 1 & 16 & a^4 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[F_5'=F_5-F_1]{F_3'=F_3-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\
0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\
0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\
0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow{F_4'=F_4-F_2}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\
0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\
0 & 0 & 6 & a(a^2-1) & -1 \\
0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[F_5'=F_5-5F_3]{F_4'=F_4-2F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\
0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (a^2-1)(a-2) & -1 \\
0 & 0 & 0 & a^4-5a^2+4 & 0
\end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que:

$$a^4 - 5a^2 + 4 = 0 \iff a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \iff a^2 = 4 \lor a^2 = 1 \iff$$
$$\iff a \in \{-2, 2, -1, 1\}$$

Distinguimos valores:

- Si $a \notin \{1, -1, 2, -2\}$, por la última ecuación $\alpha_3 = 0$, pero entonces la penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a \in \{1, -1, 2\}$, la última penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a = -2$, el sistema queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -12 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\Longrightarrow
\begin{cases}
\alpha_0 = {}^{-2}/_3 \\
\alpha_1 = {}^{2}/_3 \\
\alpha_2 = {}^{-1}/_{12} \\
\alpha_3 = {}^{1}/_{12}
\end{cases}$$

Por tanto, para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible, $a = -2$ y el grado máximo de exactitud es 4. La fórmula es:

$$f'(0) = -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2) + R(f)$$

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f.

   Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)\\ \Pi'(x) &= (x-1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-1)(x+2)+\\ &\quad + (x+1)(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

   Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 4 nodos dados es:

$$\begin{aligned}E(x) &= f[-1,1,2,-2,x]\Pi(x)\\ E'(x) &= f[-1,1,2,-2,x,x]\Pi(x) + f[-1,1,2,-2,x]\Pi'(x)\end{aligned}$$

   Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}R(f) = L(E) = E'(0) &= f[-1,1,2,-2,0,0]\Pi(0) + f[-1,1,2,-2,0]\Pi'(0)\\ &= 4f[-1,1,2,-2,0,0] + f[-1,1,2,-2,0]\cdot(4-4-2+2) =\\ &= 4f[-1,1,2,-2,0,0] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{30} \qquad \text{para algún } \xi \in\,]-2,2[\end{aligned}$$

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1}.

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & xe^{x^2+1}\end{array}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$f'(0) \approx -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2)$$

   Tenemos que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\begin{aligned}f'(0) &\approx \frac{2}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) - \frac{1}{12}f(-2) =\\ &= \frac{4}{3}f(1) - \frac{1}{6}f(2) = \frac{4}{3}e^2 - \frac{1}{6}\cdot\left(2e^5\right) = \frac{4}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^5 = \frac{e^2(4-e^3)}{3} \approx -39{,}619\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.7. Razonar por qué es posible calcular los coeficientes de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ mediante el procedimiento de ajuste de polinomios de Taylor, y que siga siendo válida la fórmula obtenida para calcular $R(f)$.

Observación. Este ejercicio fue propuesto por la profesora en clase para obtener 0,5 puntos adicionales. El desarrollo hecho por mí fue exhaustivo, y es adecuada su lectura para comprender este métdo para la obtención de los coeficientes α_i.

Fijado $a \in \mathbb{R}$, consideramos el siguiente funcional lineal objetivo:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f'(a) \end{array}$$

Además, fijados $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, consideramos el siguiente funcional lineal para cada $i = 0, \ldots, n$:

$$\begin{array}{rccc} F_i: & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(x_i) \end{array}$$

Consideramos la siguiente fórmula numérica para aproximar $f'(a)$:

$$\begin{aligned} L(f) = f'(a) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i F_i(f) + R(f) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \end{aligned}$$

Veamos una forma posible de calcular los coeficientes α_i. Consideramos el desarrollo de Taylor de f en torno a cada uno de los nodos alrededor de a, donde definimos $h_i = x_i - a$ para cada $i = 0, \ldots, n$:

$$f(x_i) = f(a) + f'(a)h_i + \frac{f''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \cdots + f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!}$$

Multiplicamos por α_i en cada término de la ecuación anterior y sumamos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f'(a)h_i + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{f''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \\ + \cdots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!} \\ = f(a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i + f'(a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i + \frac{f''(a)}{2}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^n + \\ + \cdots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!} \end{aligned}$$

Por tanto, para poder llegar a la expresión buscada para $L(f)$, necesitamos que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^n = 0$$

Es decir, necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_0^2 & h_1^2 & h_2^2 & \ldots & h_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0^n & h_1^n & h_2^n & \ldots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Una vez obtenidos los coeficientes α_i, tenemos que:

$$L(f) = f'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$$

Llegados a este punto, buscamos obtener el valor de $R(f)$. Para ello, veamos que la fórmula en cuestión es de tipo interpolatorio; es decir, considerado el polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ único interpolante de f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$, veamos que:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i)$$

Para ello, buscamos obtener $p'(a)$ de una forma similar al desarrollo llevado a cabo hasta ahora. Consideramos el desarrollo de Taylor de p en cada nodo alrededor de a, haciendo además uso de que, como $p \in \mathbb{P}_n$, se tiene que $p^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x_i) = p(a) + p'(a)h_i + \frac{p''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \cancelto{0}{p^{(n+1)}(\xi_i)} \frac{h_i^{n+1}}{(n+1)!}$$

Repitiendo la idea anterior, multiplicamos por β_i en cada término de la ecuación anterior y sumamos:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i p(a) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i p'(a)h_i + \sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{p''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{p^{(n)}(a)}{n!}h_i^n$$

Imponemos que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i^n = 0$$

Es decir, obtenemos cada valor de β_i resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_0^2 & h_1^2 & h_2^2 & \ldots & h_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0^n & h_1^n & h_2^n & \ldots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Una vez obtenidos los coeficientes β_i, tenemos que:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i p(x_i)$$

No obstante, tenemos que los sistemas de las Ecuaciones (1.1) y (1.2) son iguales, y la matriz de coeficientes es la matriz de Vandermonde de los nodos $h_0, \ldots, h_n$, todos ellos distintos. Por tanto, el sistema es compatible y determinado, por lo que hay una única solución. Así, $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 0, \dots, n$. Por tanto:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Por tanto, y usando la linealidad de L, tenemos que:

$$L(f) = L(p) + R(f) \Longrightarrow L(f - p) = R(f) \Longrightarrow R(f) = L(E) = E'(a)$$

donde E es el error de interpolación de f en los nodos $x_0, \dots, x_n$, que sabemos que viene dado por:

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

para algún $\xi \in [\text{mín}\{x_0, \dots, x_n\}, \text{máx}\{x_0, \dots, x_n\}]$.