Geometría I
Examen I

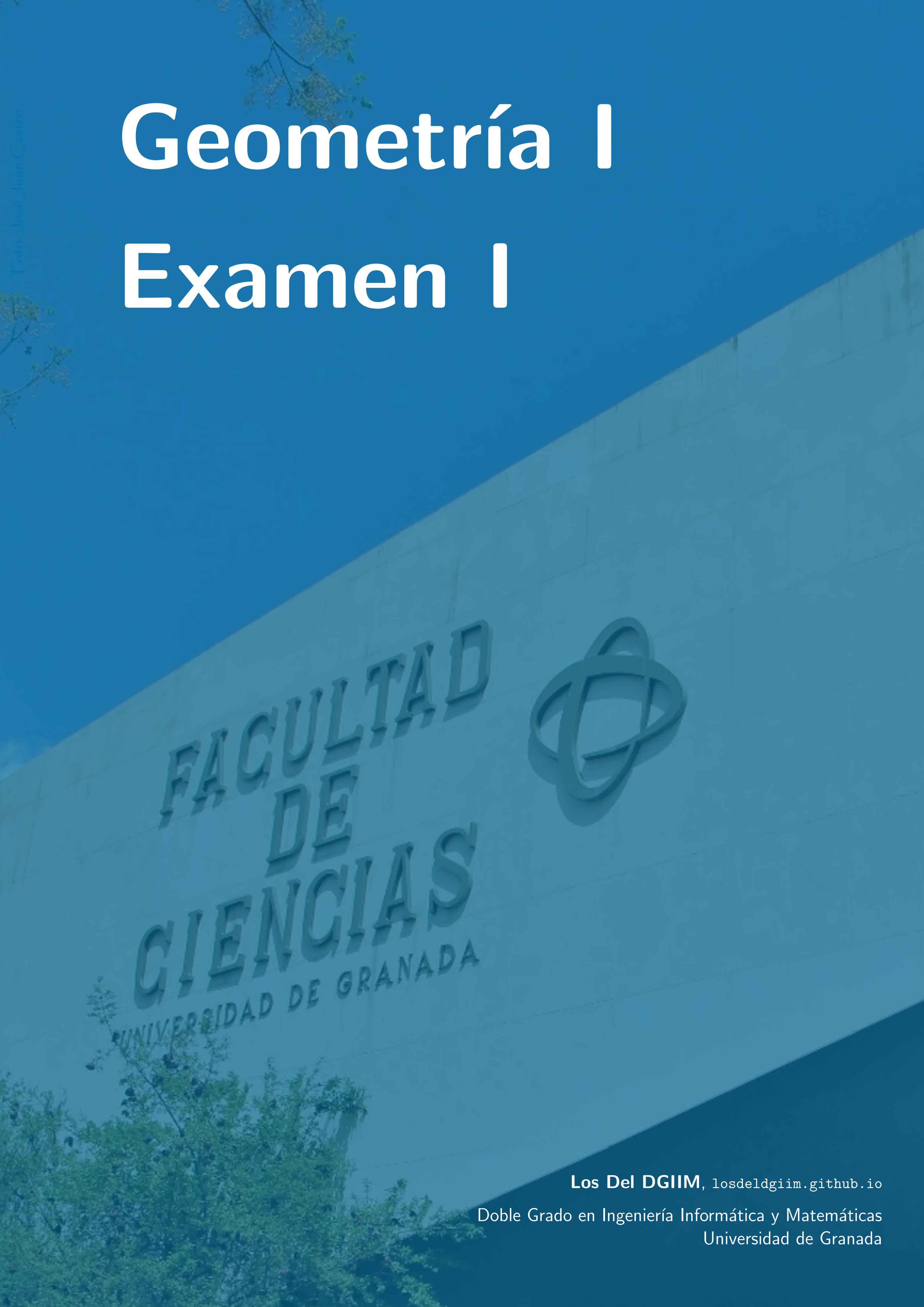

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-24

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Prácticas B.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 1ª Prueba. Temas 1 y 2.

Fecha 28 de noviembre de 2022.

Duración 60 minutos.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subconjuntos vectoriales:

$$U_1 = \mathcal{L}(\{(1,-1,-1,1)\})$$
$$U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$$

Ejercicio 1. [3 puntos] Comprueba que $U_1 \subset U_2$ y calcula dos planos (subespacios de dimensión 2) de $\mathbb{R}^4$ cuya intersección sea U_1 y su suma sea U_2.

Para ver que $U_1 \subset U_2$ bastará con ver que el vector que genera U_1 está contenido en U_2, es decir, que el vector $(1,-1,-1,1)$ verifica la ecuación $x+y+z+t=0$,

$$1-1-1+1=0 \Rightarrow U_1 \subset U_2$$

Veamos la segunda parte del ejercicio. Para ello, busquemos los vectores que generan U_2. Dado que U_2 tiene una única ecuación implícita y está en $\mathbb{R}^4$, estará generado por 3 vectores linealmente independientes. Sabemos además que el vector $(1,-1,-1,1)$ es una solución. Busquemos 2 más linealmente independientes:

$$\text{Para } x=-1,\ y=0,\ z=1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (-1,0,1,0) \in U_2$$
$$\text{Para } x=-1,\ y=1,\ z=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (-1,1,0,0) \in U_2$$

Veamos que los 3 vectores buscados son linealmente independientes:

$$\textit{Rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \text{ya que} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, tenemos que $U_2 = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0),(-1,1,0,0),(1,-1,-1,1)\}$.

Busquemos ahora dos planos W_1 y W_2 tal que $W_1 \cap W_2 = U_1$ y $W_1 + W_2 = U_2$. De la primera condición sabemos que $U_1 \subset W_1$ y $U_1 \subset W_2$. Por tanto, tenemos que

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1), v_1\}$$
$$W_2 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1), v_2\}$$

Con v_1 y v_2 linealmente independientes (ya que sino tendríamos $W_1 = W_2$ y $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_1 = W_1$, de dimensión 2, por lo que $W_1 \cap W_2 \neq U_1$, que sería una contradicción).

Además, como $W_1 + W_2 = U_2$ tenemos que $\mathcal{L}\{(1,-1,-1,1), v_1, v_2\} = U_2$. Con lo calculado anteriormente es facil ver que $v_1 = (-1,0,1,0)$ y $v_2 = (-1,1,0,0)$ verifican todo lo pedido, ya que hemos visto que son linealmente independientes y además $U_2 = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0),(-1,1,0,0),(1,-1,-1,1)\}$. Por tanto los espacios buscados son:

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(-1,0,1,0)\}$$
$$W_2 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(-1,1,0,0)\}$$

Ejercicio 2. [**3 puntos**] ¿Son únicos dichos planos, o existen otros dos con la misma intersección y la misma suma?

Por la forma en la que lo hemos calculado, cualquiera 2 vectores de U_2 linealmente independientes entre sí y a $(1,-1,-1,1)$ podrían dar una solución. Busquemos entonces otros vectores que generen U_2:

$$\text{Para } x=0,\ y=1,\ z=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow (0,1,0,1)\in U_2$$
$$\text{Para } x=1,\ y=0,\ z=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow (1,0,0,-1)\in U_2$$

Veamos que son linealmente independientes:

$$\mathit{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = 3, \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} \neq 0$$

Con el razonamiento anterior tenemos que

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(0,1,0,1)\}$$
$$W_2 = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(1,0,0,-1)\}$$

Verifican también las condiciones buscadas. Por tanto la solución anterior no es única.

Ejercicio 3. [**4 puntos**] Calcula un complementario de U_1 y otro de U_2.

Comencemos buscando el complementario de U_1. Para ello buscamos 3 vectores linealmente independientes, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3\}\oplus U_1 = \mathbb{R}^4$, es decir linealmente independientes a $(1,-1,-1,1)$. Veamos que el espacio dado por el conjunto $C_1 = \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ lo verifica, ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, $C_1 = \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es un complementario de U_1.

Hagamos lo mismo para U_2. En este caso buscamos un único vector linealmente independiente a $(-1,0,1,0),(-1,1,0,0),(1,-1,-1,1)$. Veamos que el vector $(1,0,0,0)$ verifica lo que buscamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

Y tenemos que $C_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0,0)\}$ es un complementario de U_2.