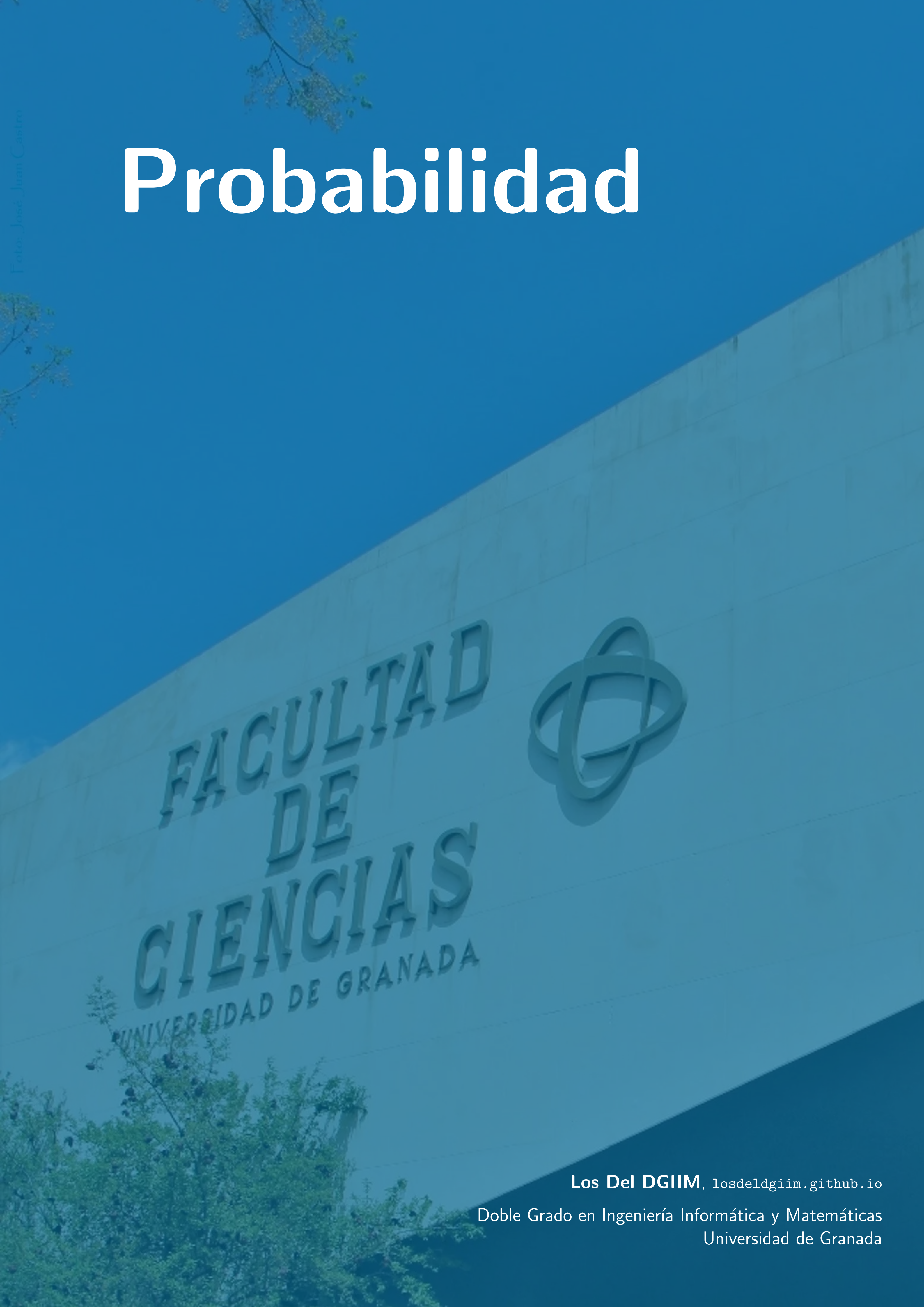


Foto: José Juan Castro

Probabilidad

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Vectores Aleatorios

Hasta ahora, hemos estudiado variable aleatoria unidimensional. En este capítulo, vamos a estudiar variables aleatorias multidimensionales, es decir, vectores aleatorios. Para ello, al igual que como hicimos con las variables aleatorias unidimensionales, hemos de definir en primer lugar la $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n. La $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, notada por $\mathcal{B}^n$, es la $\sigma-$álgebra generada por todos los intervalos de $\mathbb{R}^n$.

En particular, en Análisis Matemático II vimos que esta $\sigma-$álgebra está formada por los intervalos:

$$]-\infty, x] :=]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_n], \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Además, en los presentes apuntes, usaremos la relación parcial de orden en $\mathbb{R}^n$ siguiente.

Notación. Dado $x, y \in \mathbb{R}^n$, notaremos:

$$x \leqslant y \iff x_i \leqslant y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Esta es parcial, ya que no podemos comparar ciertos elementos, como $(1,2)$ y $(2,1)$.

Gráficamente, en el plano tenemos que $x \leqslant x'$ si y solo si x está a la izquierda y por debajo de x'.

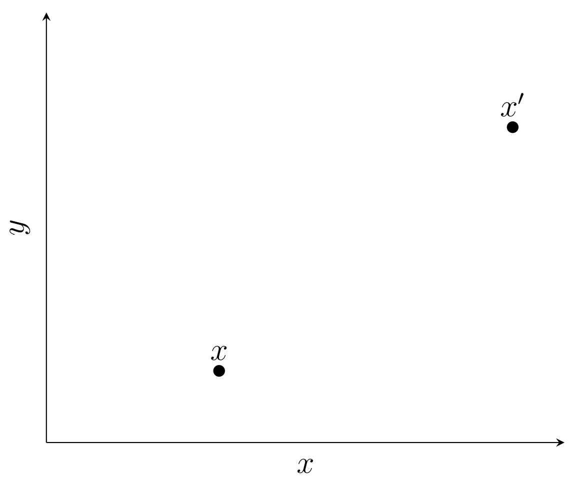


Figura 1.1: Relación de orden en $\mathbb{R}^2$, donde $x \leqslant x'$.

Veamos ahora el equivalente a variable aleatoria en el caso multidimensional.

Definición 1.2 (Vector aleatorio)**.** Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se define como una función medible:

$$X \ : \ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

tal que se cumple que:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Es decir:

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leqslant x_1, \dots, X_n(\omega) \leqslant x_n\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, considerando cada una de las componentes por separado, como cada componente de una función medible es medible, se tiene la siguiente caracterización de forma directa.

Teorema 1.1. *Sea* $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$*. Entonces:*

$$X \text{ es un vector aleatorio} \iff X_i \text{ es una variable aleatoria } \forall i = 1, \dots, n.$$

Introducimos ahora la distribución de probabilidad de un vector aleatorio, que será la función de densidad (o función masa de probabilidad) en el caso unidimensional.

Definición 1.3 (Distribución de probabilidad)**.** Sea X un vector aleatorio. La distribución de probabilidad de X es la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$\begin{array}{rccl} P_X : & \mathcal{B}^n & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}^n. \end{array}$$

Notación. Al igual que en el caso unidimensional, dado $B \in \mathcal{B}^n$, tenemos:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Por tanto, denotaremos $P_X(B)$ por $P[X \in B]$.

Proposición 1.2. *Sea X un vector aleatorio. Entonces, la distribución P_X es una medida de probabilidad sobre* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$*.*

Demostración. Veamos que se cumplen las tres propiedades de la Axiomática de Kolmogorov:

1. No negatividad: $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geqslant 0, \quad \forall B \in \mathcal{B}^n$ ya que P es una medida de probabilidad.

2. Suceso seguro: $P_X(\mathbb{R}^n) = P(X^{-1}(\mathbb{R}^n)) = P(\Omega) = 1$.

3. $\sigma-$aditividad: Sean $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}^n$ disjuntos dos a dos. Entonces, como $X^{-1}(B_1), X^{-1}(B_2), \dots$ son disjuntos dos a dos, se tiene:

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right) \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i).$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad de $\sigma-$aditividad de la medida de probabilidad P. $\square$

Así, tenemos que todo vector aleatorio X transforma el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$.

Al igual que en el caso unidimensional, definimos la función de distribución de un vector aleatorio a partir de la distribución de probabilidad.

Definición 1.4 (Función de distribución)**.** Sea X un vector aleatorio. La función de distribución de X es la función:

$$\begin{array}{rccl} F_X: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & F_X(x) = P[X \leqslant x] = P_X(]-\infty, x]) \end{array}$$

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$, entonces denotaremos:

$$F_X(x) = P[X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n].$$

Algunas de las propiedades que cumple esta son:

1. Es monótona no decreciente en cada una de sus componentes. Es decir, $\forall\ i = 1, \dots, n$ y $\forall\ x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$x_i \leqslant x_i' \Longrightarrow F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leqslant F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n).$$

2. Es continua por la derecha en cada una de sus componentes. Es decir, $\forall\ i = 1, \dots, n$ y $\forall\ x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\forall x_i \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lim_{x \to x_i^+} F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

3. $\forall i = 1, \dots, n$ y $\forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$$

4. Tenemos que:

$$\lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ i=1,\dots,n}} F_X(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

5. $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n + \varepsilon_n) - \\ & \quad - \sum_{i=1}^{n} F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \dots, x_n + \varepsilon_n) + \\ & \quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_X(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \dots \\ & \qquad\qquad \dots, x_{j-1} + \varepsilon_{j-1}, x_j, x_{j+1} + \varepsilon_{j+1}, \dots, x_n + \varepsilon_n) + \\ & \quad + \dots + (-1)^n F_X(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Estas propiedades caracterizan la función de distribución de los vectores aleatorios. Es decir, dada una función que cumple estas propiedades, es la función de distribución de un vector aleatorio.

Al igual que ocurría con variables aleatorias unidimensionales, puesto que P_X es una medida de probabilidad, podemos calcular de forma sencilla la probabilidad de intervalos bidimensionales.

- $P[a < X_1 \leqslant b, X_2 \in I] = P[X_1 \leqslant b, X_2 \in I] - P[X_1 \leqslant a, X_2 \in I]$.
- $P[a < X_1 < b, X_2 \in I] = P[X_1 < b, X_2 \in I] - P[X_1 \leqslant a, X_2 \in I]$.
- $P[X_1 \leqslant b, c < X_2 \leqslant d] = P[X_1 \leqslant b, X_2 \leqslant d] - P[X_1 \leqslant b, X_2 \leqslant c]$.
- $P[X_1 \leqslant b, c \leqslant X_2 < d] = P[X_1 \leqslant b, X_2 < d] - P[X_1 \leqslant b, X_2 < c]$.

1.1. Clasificación de vectores aleatorios

Al igual que en el caso unidimensional, podemos clasificar los vectores aleatorios en discretos y continuos. Esto se hace en función de la naturaleza de los valores que toma el vector aleatorio.

Definición 1.5 (Recorrido de un vector aleatorio)**.** Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio. El recorrido de X es el conjunto de valores que toma el vector aleatorio:

$$E_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \omega \in \Omega \text{ tal que } X(\omega) = x\} = Img(X).$$

Usando el recorrido de una variable aleatoria unidimensional, tenemos que:

$$E_X = \prod_{i=1}^{n} E_{X_i}.$$

Veamos ahora que el recorrido de un vector aleatorio es el único conjunto cuya probabilidad es 1. Es decir:

Proposición 1.3. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio, y sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$P[X \in A] = 1 \iff A = E_X.$$

Demostración. Demostramos mediante doble implicación.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $A = E_X$. Veamos ahora que $P[X \in E_X] = 1$. Tenemos que:

$$P[X \in E_X] = P[X^{-1}(E_X)] = P[\Omega] = 1.$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $P[X \in A] = 1$. Demostramos que $A = E_X$ por doble inclusión.

$\subset$) Tenemos que:

$$P[X \in A] = P[X^{-1}(A)] = 1 \Longrightarrow X^{-1}(A) = \Omega$$

Tomando la imagen de X, tenemos que $A = X(\Omega) = E_X$.

$\supset$) Como $P[X \in E_X] \leqslant 1$ por definición y, al ser una probabilidad, es una función creciente, tenemos que $E_X \subset A$.

□

1.1.1. Vectores aleatorios discretos

Definición 1.6. Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ es discreto si su recorrido es finito o numerable.

Veamos ahora la siguiente caracterización de vectores aleatorios discretos.

Teorema 1.4. *Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ es discreto si y solo si cada una de sus componentes X_i es discreta.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X es discreto. Entonces, su recorrido es finito o numerable. Por tanto, el recorrido de cada una de sus componentes también es finito o numerable.

$\Longleftarrow$) Supongamos que cada una de las componentes de X es discreta. Entonces, el recorrido de X es el producto cartesiano de los recorridos de sus componentes, que es finito o numerable.

□

Como en el caso de variables unidimensionales, los vectores de tipo discreto se manejan a partir de su función masa de probabilidad, y el tratamiento de este tipo de vectores es totalmente análogo al de las variables discretas.

Definición 1.7. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto. La función masa de probabilidad de X es la función:

$$\begin{array}{rccl} p_X: & E_X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & p_X(x) = P[X = x] \end{array}$$

Esta satisface:

1. $p_X(x) \geqslant 0$.
2. $\sum\limits_{x \in E_X} p_X(x) = 1$.

La función de distribución de un vector aleatorio discreto se define por tanto como:

$$F_X(x) = P[X \leqslant x] = \sum_{\substack{t \in E_X \\ t \leqslant x}} P[X = t]$$

Ejemplo. Sea el experimento aleatorio de lanzar un dado, y sean las siguientes variables aleatorias:

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{si sale impar} \\ 1 & \text{si sale par} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} -2 & \text{si sale 1, 2, 3} \\ 0 & \text{si sale 4} \\ 3 & \text{si sale 5, 6} \end{cases}$$

Considerado el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$, se pide:

1. Calcular la función masa de probabilidad de X.

   Tenemos que:

$$E_{X_1} = \{-1, 1\},$$
$$E_{X_2} = \{-2, 0, 3\},$$

   Por tanto,

$$E_X = E_{X_1} \times E_{X_2} = \{(-1,-2), (-1,0), (-1,3), (1,-2), (1,0), (1,3)\}.$$

   Tenemos por tanto que:

   - $P[X = (-1,-2)] = P[\text{sale impar y } 1,\ 2,\ 3] = 2/6$.
   - $P[X = (-1,0)] = P[\text{sale impar y } 4] = 0/6 = 0$.
   - $P[X = (-1,3)] = P[\text{sale impar y } 5,\ 6] = 1/6$.
   - $P[X = (1,-2)] = P[\text{sale par y } 1,\ 2,\ 3] = 1/6$.
   - $P[X = (1,0)] = P[\text{sale par y } 4] = \frac{1}{6}$.
   - $P[X = (1,3)] = P[\text{sale par y } 5,\ 6] = 1/6$.

   Podemos resumir esta información como

$X_1 \backslash X_2$	-2	0	3	
-1	$2/6$	0	$1/6$	
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	

2. Calcular la función de distribución de X.

   Tenemos que:

$$F_X(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 < -1 \text{ o } x_2 < -2 \\ 2/6 & x_1 \in [-1, 1[\,, x_2 \in [-2, 3[\\ 3/6 & x_1 \in [-1, 1]\,, x_2 \geqslant 3 \\ 3/6 & x_1 \geqslant 1, x_2 \in [-2, 0[\\ 4/6 & x_1 \geqslant 1, x_2 \in [0, 3[\\ 1 & x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 3 \end{cases}$$

3. Calcular $P[X_1 + X_2 \leqslant 1]$.

   En este caso, los valores de $X_1 + X_2$ que cumplen que $X_1 + X_2 \leqslant 1$ son:

$$B = \{(-1,-2), (1,-2), (1,0)\}.$$

   Por tanto,

$$P[X_1 + X_2 \leqslant 1] = P[X \in B] = P[X = (-1,-2)] + P[X = (1,-2)] + P[X = (1,0)] = \\ = 2/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6.$$

1.1.2. Vectores aleatorios continuos

Definición 1.8. Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ es continuo si existe una función integrable no negativa $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que su función de distribución es:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_1, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

A la función f_X se le llama función de densidad de probabilidad de X.

Además, si f_X es continua en un punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces la función de distribución F_X es derivable en ese punto y se tiene que:

$$\frac{\partial^n F_X}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x) = f_X(x).$$

Esta función f_X, por definición, cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geqslant 0$.
2. Es integrable en $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\ dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) \overset{(*)}{=} 1.$$

donde en $(*)$ hemos usado una de las propiedades de la función de distribución.

La función de densidad determina la función de distribución de un vector aleatorio continuo, y por tanto su distribución de probabilidad.

$$P_X(B) = P[X \in B] = \int_B f_X(x)\ dx, \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Debido a lo estudiado en Análisis Matemático II, sabemos que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto numerable, entonces $P[X \in E] = 0$.

Al igual que en el caso de vectores discretos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Sea vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ continuo. Entonces, cada una de sus componentes X_i es continua.*

Demostración. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$, y sea F_{X_i} la función de distribución de X_i. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) &= P[X_i \leqslant x_i] = P[X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}]. = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x_i} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_i dt_{i-1} \cdots dt_1. = \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_{i-1} \cdots dt_1 \cdot dt_i \end{aligned}$$

Definimos por tanto:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_{i-1} \cdots dt_1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\ dt_i.$$

Como f_i es integrable y no negativa, tenemos que es la función de densidad de probabilidad de X_i. Por tanto, X_i es una variable aleatoria continua. □

1.2. Distribuciones marginales

Dado un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$, podemos estudiar las distribuciones de sus componentes por separado. Estas se conocen como distribuciones marginales.

Definición 1.9. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio. La distribución marginal de X_i es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X_i. A la distribución de probabilidad de X se le llama distribución conjunta de X.

Veamos cómo obtener la función de distribución de una variable aleatoria a partir de la función de distribución de un vector aleatorio.

Proposición 1.6. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con función de distribución F_X. Entonces, la función de distribución de X_i es:*

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} F_X(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Demostración. Esta propiedad se deduce de la continuidad de las funciones de probabilidad (Axiomática de Kolmogorov) y del hecho de que:

$$\mathbb{R} = \lim_{t \to \infty}]-\infty, t].$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= P[X_i \leqslant x_i] = P[X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}] \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} P_X\left( ]-\infty, t_1] \times \ldots \times]-\infty, t_{i-1}] \times]-\infty, x_i] \times]-\infty, t_{i+1}] \times \ldots \times]-\infty, t_n] \right) = \\
&= \lim_{\substack{t_j \to +\infty, \\ j \neq i}} F_X(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n).
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad de continuidad de la función de probabilidad. □

Caso discreto

En el caso de vectores aleatorios discretos, la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria se obtiene a partir de la función de masa de probabilidad del vector aleatorio.

Proposición 1.7. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto con función de masa de probabilidad p_X. Entonces, la función de masa de probabilidad de X_i es:*

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{\substack{t = (t_1, \dots, t_n) \in E_X \\ t_i = x_i}} p_X(t).$$

Caso continuo

En el caso de vectores aleatorios continuos, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria se obtiene a partir de la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio.

Proposición 1.8. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad de probabilidad f_X. Entonces, la función de densidad de probabilidad de X_i es:*

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\ dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

Notemos que esta demostración se ha hecho en el Teorema 1.5.

1.3. Distribuciones condicionadas

Dado un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$, podemos estudiar la distribución de una de sus componentes condicionada a que otra de sus componentes tome un valor concreto.

Caso discreto

Definición 1.10. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto, X_i una de sus componentes y $x_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $P[X_i = x_i^*] > 0$. La distribución condicionada de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ a $X_i = x_i^*$ es la distribución con función de masa de probabilidad:

$$\begin{gathered} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n \mid X_i = x_i^*] = \\ = \frac{P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i^*, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n]}{P[X_i = x_i^*]}, \\ \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_X. \end{gathered}$$

Comprobemos que esta definición efectivamente es una función masa de probabilidad.

Demostración.

1. En primer lugar, toma valores no negativos, puesto que es el cociente de dos valores no negativos.

2. Veamos ahora que suma 1. Para ello, por la Proposición 1.7, tenemos que la siguiente sumatoria es la distribución marginal de X_i:

$$\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_X}} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i^*, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n] = P[X_i = x_i^*].$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_X}} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n \mid X_i = x_i^*] = 1$$

□

Caso continuo

Definición 1.11. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio continuo, X_i una de sus componentes y $x_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $f_{X_i}(x_i^*) > 0$. La distribución condicionada de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ a $X_i = x_i^*$ es la distribución con función de densidad de probabilidad:

$$f_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n|X_i=x_i^*}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)}.$$

Comprobemos que efectivamente dicha función se trata de una función de densidad.

Demostración.

1. $f_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n|X_i=x_i^*}$ es no negativa, por ser cociente de funciones de densidad.

2. Es integrable (se deja como ejercicio al lector).

3. Veamos que integra 1:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f_{X_i}(x_i^*)} \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{f_{X_i}(x_i^*)}{f_{X_i}(x_i^*)} = 1$$

donde en $(*)$ hemos usado la Proposición 1.8, ya que es la función de densidad de la marginal de X_i.

□

1.4. Cambio de Variable

Dado un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$, podemos estudiar la distribución de otro vector aleatorio $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ que depende de X mediante una transformación.

Proposición 1.9. *Sea X un vector aleatorio $n-$dimensional, y $g : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una función medible. Entonces, $Y = g(X)$ es un vector aleatorio $m-$dimensional.*

Demostración. Como la composición de funciones medibles es medible, tenemos que $Y = g(X)$ es medible por serlo X y g. Por tanto, Y es un vector aleatorio. □

Veamos ahora cómo se transforma la distribución de probabilidad de un vector aleatorio al aplicarle una transformación.

Proposición 1.10. *Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función medible. Entonces, la distribución de probabilidad de $Y = g(X)$ es:*

$$P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}^m.$$

Demostración. Como $Y = g \circ X$, tenemos que $Y^{-1} = X^{-1} \circ g^{-1}$. Por tanto, tenemos que:

$$P_Y(B) = P[Y^{-1}(B)] = P[X^{-1}(g^{-1}(B))] = P_X(g^{-1}(B)).$$

$\square$

Como resultado inmediato, tenemos que la función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = P_Y(]-\infty, y]) = P_X(g^{-1}(]-\infty, y])) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Veamos ahora algunos casos particulares de transformaciones de vectores aleatorios.

1.4.1. Discreto a Discreto

Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio discreto con valores en E_X, y sea $g : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una función medible. Entonces, $Y = g(X)$ es un vector aleatorio discreto con valores en $E_Y = g(E_X)$, y su función masa de probabilidad es:

$$P[Y = y] = \sum_{x \in E_X \cap g^{-1}(y)} P[X = x], \qquad \forall y \in E_Y.$$

Ejemplo. Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función de masa de probabilidad:

$X_2 \backslash X_1$	1	0	-1
-2	$1/6$	$1/12$	$1/6$
1	$1/6$	$1/12$	$1/6$
2	$1/12$	0	$1/12$

Calcular la función de masa de probabilidad de $Y = (|X_1|, X_2^2)$.

Tenemos que $E_Y = g(E_X)$, que es:

$$E_Y = \{(0,1), (0,4), (1,1), (1,4)\}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[Y = (0,1)] &= P[X_1 = 0, X_2 = 1] = 1/12,\\
P[Y = (0,4)] &= P[X_1 = 0, X_2 = 2] + P[X_1 = 0, X_2 = -2] = 0 + 1/12 = 1/12,\\
P[Y = (1,1)] &= P[X_1 = 1, X_2 = 1] + P[X_1 = -1, X_2 = 1] = 1/6 + 1/6 = 1/3,\\
P[Y = (1,4)] &= P[X_1 = 1, X_2 = 2] + P[X_1 = 1, X_2 = -2] + P[X_1 = -1, X_2 = 2] +\\
&\quad + P[X_1 = -1, X_2 = -2] = 1/12 + 1/6 + 1/12 + 1/6 = 1/2.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función de masa de probabilidad de Y es:

$Y_2 \backslash Y_1$	0	1
1	$1/12$	$1/3$
4	$1/12$	$1/2$

1.4.2. Continuo a Discreto

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f_X, y sea $g : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ una función medible tal que $Y = g(X)$ es un vector aleatorio discreto con valores en $E_Y \subset \mathbb{R}^m$. Su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X como:

$$P[Y = y] = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)\ dx, \qquad \forall y \in E_Y.$$

Ejemplo. Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función de densidad, para $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x_1 - \mu x_2} & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la función de masa de probabilidad de:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 > X_2 \\ 0 & \text{si } X_1 \leqslant X_2 \end{cases}$$

Tenemos que $E_Y = \{0, 1\}$, y calculamos cada una de las probabilidades:

$$P[Y = 1] = P[X_1 > X_2] = \int_0^\infty \int_{x_2}^\infty \lambda\mu e^{-\lambda x_1 - \mu x_2}\ dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \mu e^{-\mu x_2} \int_{x_2}^\infty \lambda e^{-\lambda x_1}\ dx_1 dx_2 =$$
$$= \int_0^\infty \mu e^{-\mu x_2} \left[-e^{-\lambda x_1}\right]_{x_2}^\infty dx_2 = \int_0^\infty \mu e^{-\mu x_2} e^{-\lambda x_2} dx_2 = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\lambda) x_2} dx_2 =$$
$$= \left[-\frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)x_2}\right]_0^\infty = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

$$P[Y = 0] = 1 - P[Y = 1] = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

Por tanto, la función de masa de probabilidad de Y es:

$$P[Y = 0] = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \quad P[Y = 1] = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

1.4.3. Continuo a Continuo

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f_X y con valores en $E_X \subset \mathbb{R}^n$. Sea $g = (g_1, \ldots, g_n) : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ una función medible tal que:

- $\exists g^{-1} = (g_1^*, \ldots, g_n^*)$.
- La inversa es derivable en todas sus componentes:

$$\exists \frac{\partial g_i^*}{\partial y_j}(y_1, \ldots, y_n), \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in g(E_X).$$

- El jacobiano de la inversa no es nulo:

$$|Jg^{-1}(y)| \neq 0 \quad \forall y \in g(E_X).$$

En estas condiciones, la transformación $Y = g(X)$ es un vector aleatorio de tipo continuo, y su función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|Jg^{-1}(y)\right|, \quad \forall y \in g(E_X).$$

Distribución del Máximo y del Mínimo

Tenemos que dos cambios de variable frecuentes son los dados por las funciones máximo y mínimo, que sabemos que son medibles. Sea por tanto $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con función de distribución F_X, y buscamos hallar la función de distribución de $Z = \min X$ y $W = \max X$. Dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

- $\underline{Z = \min = \min X}$: $Z = \min X = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

  Dado $\omega \in \Omega$, tenemos que:

  $$Z(\omega) > x \Longleftrightarrow \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} > x \Longleftrightarrow X_1(\omega) > x, \dots, X_n(\omega) > x.$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$P[\min \leqslant x] = 1 - P[\min > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots, X_n > x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $\underline{W = \max = \max X}$: $W = \max X = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

  Dado $\omega \in \Omega$, tenemos que:

  $$W(\omega) < x \Longleftrightarrow \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} < x \Longleftrightarrow X_1(\omega) < x, \dots, X_n(\omega) < x.$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$P[\max \leqslant x] = P[X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x] = P[X \leqslant (x, \dots, x)] \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado ahora $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio, consideramos ahora la distribución:

$$(\max X, \min X)$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$P[(\max X, \min X) \leqslant (x, y)] = P[\max X \leqslant x, \min X \leqslant y]$$

- Si $x \leqslant y$, entonces $\min X \leqslant \max X \leqslant x \leqslant y$, luego:

  $$P[(\max X, \min X) \leqslant (x, y)] = P[\max X \leqslant x, \min X \leqslant y] = P[\max X \leqslant x] = F_X(x, \dots, x)$$

- Si $x > y$, entonces:

  $$\begin{aligned} P[(\max X, \min X) \leqslant (x, y)] &= P[\max X \leqslant x, \min X \leqslant y] = \\ &= P[\max X \leqslant x] - P[\max X \leqslant x, \min X > y] = \\ &= F_X(x, \dots, x) - P[y < X_1 \leqslant x, \dots, y < X_n \leqslant x] \end{aligned}$$

Por tanto, la función de distribución de $(\max X, \min X)$ es:

$$F_{(\max X, \min X)}(x, y) = \begin{cases} F_X(x, \dots, x) & \text{si } x \leqslant y, \\ F_X(x, \dots, x) - P[y < X_1 \leqslant x, \dots, y < X_n \leqslant x] & \text{si } x > y. \end{cases}$$

1.5. Esperanza

Definición 1.12 (Esperanza)**.** Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio. Entonces:

- $\exists E[X] \iff \exists E[X_i] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- En tal caso, la esperanza de X es:

$$E[X] := (E[X_1], \dots, E[X_n]).$$

Usando el Teorema de Cambio de Variable en cada uno de los casos, deducimos de forma directa el siguiente teorema:

Teorema 1.11. *Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variable aleatoria y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces, suponiendo que dichas esperanzas existen:*

- *Si X es de tipo discreto con valores en E_X:*

$$E[g(X)] = \sum_{x \in E_X} g(x)P[X = x]$$

- *Si X es de tipo continuo con función de densidad f_X:*

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f_X(x)dx$$

2. Relaciones de problemas

2.1. Vectores Aleatorios

Ejercicio 2.1.1. Asociadas al experimento aleatorio de lanzar un dado y una moneda no cargados, se define la variable X como el valor del dado y la variable Y, que toma el valor 0 si sale cara en la moneda, y 1 si sale cruz. Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución del vector aleatorio (X, Y).

Calculemos los recorreidos de X e Y:

$$\begin{aligned} E_X &= \{1,2,3,4,5,6\}, \\ E_Y &= \{0,1\}. \end{aligned}$$

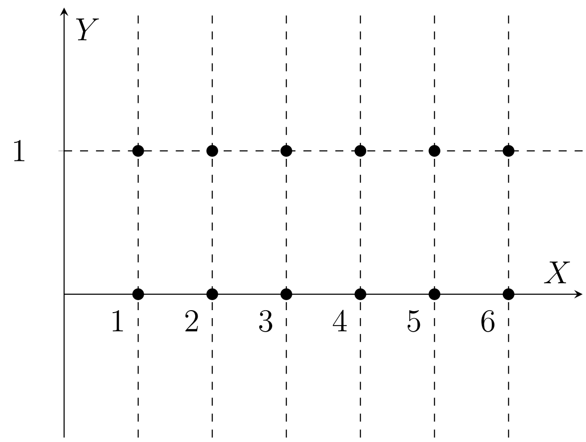
Por tanto, tenemos que:

$$E_{(X,Y)} = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0),(4,1),(5,0),(5,1),(6,0),(6,1)\}.$$

La función masa de probabilidad es:

$$\begin{array}{rccc} P_{(X,Y)}: & E_{(X,Y)} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x,y) & \longmapsto & 1/12 \end{array}$$

Para poder calcular la función de distribución, primero representamos los puntos del espacio muestral en el plano cartesiano:



La función de distribución es:

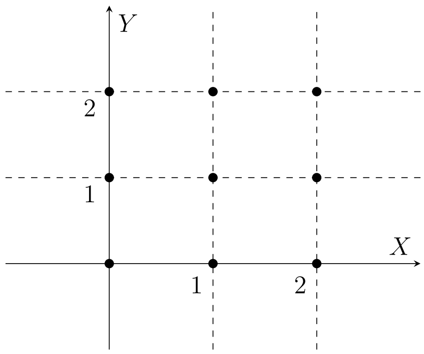
$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ o } y < 0, \\ 1/12, & x \in [1,2[\text{ y } y \in [0,1[\,, \\ 2/12, & x \in [2,3[\text{ y } y \in [0,1[\quad \text{o} \quad x \in [1,2[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 3/12, & x \in [3,4[\text{ y } y \in [0,1[\,, \\ 4/12, & x \in [4,5[\text{ y } y \in [0,1[\quad \text{o} \quad x \in [2,3[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 5/12, & x \in [5,6[\text{ y } y \in [0,1[\quad \text{o} \quad x \in [3,4[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 6/12, & x \geqslant 6 \text{ y } y \in [0,1[\quad \text{o} \quad x \in [3,4[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 8/12, & x \in [4,5[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 10/12, & x \in [5,6[\text{ y } y \geqslant 1, \\ 1, & x \geqslant 6 \text{ y } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Ejercicio 2.1.2. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$1/3$	$1/12$	$1/24$
1	$1/6$	$1/24$	$1/48$
2	$5/22$	$5/88$	$5/176$

Calcular la función de distribución del vector (X,Y) en los puntos $(0,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$ y $(2,1)$, y la probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles.

Para calcular la función de distribución en los puntos $(0,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$ y $(2,1)$, representamos antes los elementos de $E_{(X,Y)}$ en el plano cartesiano:



La función de distribución en los puntos $(0,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$ y $(2,1)$ es:

$$F_{(X,Y)}(0,0) = P_{(X,Y)}(0,0) = 1/3,$$
$$F_{(X,Y)}(0,2) = P_{(X,Y)}(0,0) + P_{(X,Y)}(0,1) + P_{(X,Y)}(0,2) = 1/3 + 1/12 + 1/24 = 11/24,$$
$$F_{(X,Y)}(1,1) = P_{(X,Y)}(0,0) + P_{(X,Y)}(0,1) + P_{(X,Y)}(1,0) + P_{(X,Y)}(1,1) = 1/3 + 1/12 + 1/6 + 1/24 = 5/8,$$
$$F_{(X,Y)}(2,1) = F_{(X,Y)}(1,1) + P_{(X,Y)}(2,0) + P_{(X,Y)}(2,1) = 5/8 + 5/22 + 5/88 = 10/11.$$

La probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles es:

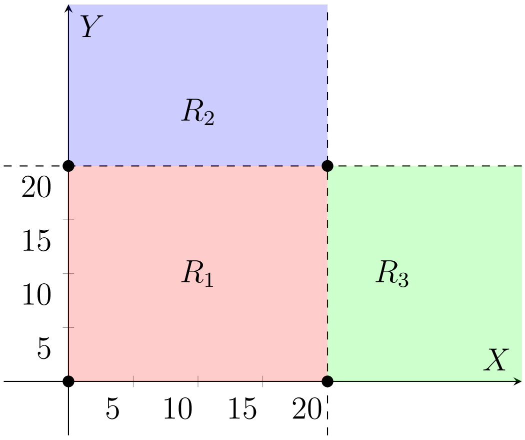
$$P[X+Y \geqslant 3] = P_{(X,Y)}(1,2) + P_{(X,Y)}(2,1) + P_{(X,Y)}(2,2) = 1/48 + 5/88 + 5/176 = 7/66.$$

Ejercicio 2.1.3. La función de densidad del vector aleatorio (X,Y), donde X denota los Kg. de naranjas, e Y los Kg. de manzanas vendidos al día en una frutería está dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{400}; \quad 0 < x < 20; \quad 0 < y < 20.$$

siendo esta nula en caso contrario. Determinar la función de distribución de (X,Y) y la probabilidad de que en un día se vendan entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos.

Representamos los puntos de discontinuidad de la función de densidad en el plano cartesiano:



La función de distribución es:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Estudiemos cada región por separado:

- Para $x \leqslant 0$ o $y \leqslant 0$:

  Tenemos que $f(u,v) = 0$ para $u \leqslant x$ o $v \leqslant y$, por lo que:

  $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\,du\,dv = 0.$$

- Para $0 < x < 20$ y $0 < y < 20$ (región R_1):

  Tenemos que:

  $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} \frac{1}{400}\,du\,dv = \frac{xy}{400}.$$

- Para $0 < x < 20$ y $y \geqslant 20$ (región R_2):

  Tenemos que:

  $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{x}\int_{0}^{20} \frac{1}{400}\,du\,dv = \frac{20x}{400} = \frac{x}{20}.$$

- Para $x \geqslant 20$ y $0 < y < 20$ (región R_3):

  Tenemos que:

  $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{20}\int_{0}^{y} \frac{1}{400}\,du\,dv = \frac{20y}{400} = \frac{y}{20}.$$

- Para $x \geqslant 20$ y $y \geqslant 20$:

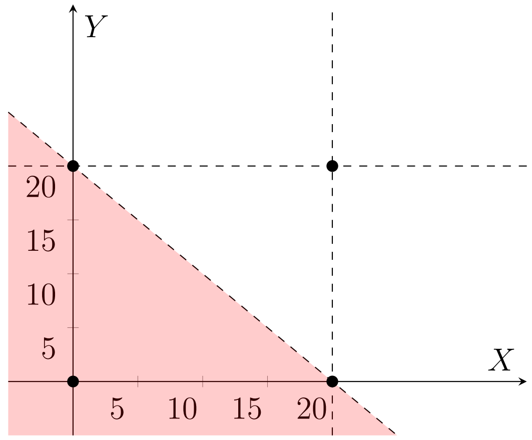
  Tenemos que:

  $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{20}\int_{0}^{20} \frac{1}{400}\,du\,dv = \frac{400}{400} = 1.$$

Por tanto, la función de distribución es:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ o } y \leqslant 0, \\ \frac{xy}{400}, & 0 < x < 20 \text{ y } 0 < y < 20, \\ \frac{x}{20}, & 0 < x < 20 \text{ y } y \geqslant 20, \\ \frac{y}{20}, & x \geqslant 20 \text{ y } 0 < y < 20, \\ 1, & x \geqslant 20 \text{ y } y \geqslant 20. \end{cases}$$

Buscamos ahora la probabilidad de que en un día se vendan entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos. Para ello, buscamos la región del plano que cumple con la condición $X + Y < 20$. Tras representar la recta $y = 20 - x$, nos quedaremos con la región que queda por debajo de esta recta:



Por tanto, tenemos que $P[X+Y<20]$ es la integral de la función de densidad en la región coloreada, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y<20\}$:

$$P[X+Y<20] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{20-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{400}\,dy\,dx =$$
$$= \int_0^{20} \frac{20-x}{400}\,dx = \frac{1}{400}\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{20} = \frac{1}{400}\left[400-200\right] = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2.1.4. La renta, X, y el consumo, Y, de los habitantes de una población, tienen por funciones de densidad

$$f_X(x) = 2-2x; \quad 0<x<1; \quad f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x}; \quad 0<y<x.$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y) y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

Tenemos que, para $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0<x<1, 0<y<x\}$, la función de densidad conjunta es:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \Longrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y \mid x) = (2-2x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2-2x}{x}.$$

Tenemos ahora que:

$$P[Y < X/2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x/2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{2-2x}{x}\, dy\, dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{2-2x}{x} \cdot \frac{x}{2}\, dx = \int_0^1 1 - x\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2.1.5. Una gasolinera tiene Y miles de litros en su depósito de gasóleo al comienzo de cada semana. A lo largo de una semana se venden X miles de litros del citado combustible, siendo la función de densidad conjunta de (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{1}{8}; \quad 0 < x < y < 4.$$

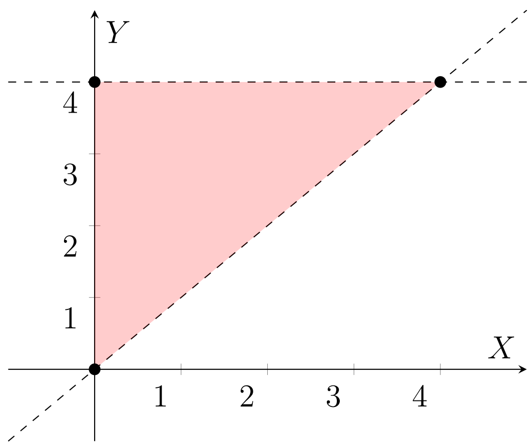
Se pide:

1. Probar que $f(x, y)$ es función de densidad y obtener la función de distribución.

   En primer lugar, vemos que es no negativa. Veamos si es integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^4 \int_x^4 \frac{1}{8}\, dy\, dx = \frac{1}{8} \int_0^4 4 - x\, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{8}[16 - 8] = 1.$$

   Tenemos por tanto que sí se trata de una función de densidad. Para obtener la función de distribución, representemos el conjunto en el que la función de densidad es no nula:



   Para obtener la función de distribución, distinguimos casos:

   - <u>Para $x < 0$ o $y < 0$:</u>

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv = 0.$$

- Para $0 < x < y < 4$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{0}^{x} \int_{u}^{y} \frac{1}{8}\,dv\,du = \frac{1}{8}\int_{0}^{x} y - u\,du =$$
$$= \frac{1}{8}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{8}\left[xy - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{2xy - x^2}{16}.$$

- Para $0 < x < 4$ y $y \geqslant 4$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{0}^{x} \int_{u}^{4} \frac{1}{8}\,dv\,du = \frac{1}{8}\int_{0}^{x} 4 - u\,du =$$
$$= \frac{1}{8}\left[4u - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{8}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{8x - x^2}{16}.$$

- Para $x \geqslant y$ y $0 \leqslant y < 4$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{0}^{y} \int_{0}^{v} \frac{1}{8}\,du\,dv = \frac{1}{8}\int_{0}^{y} v\,dv =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^y = \frac{1}{8}\cdot\frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{16}.$$

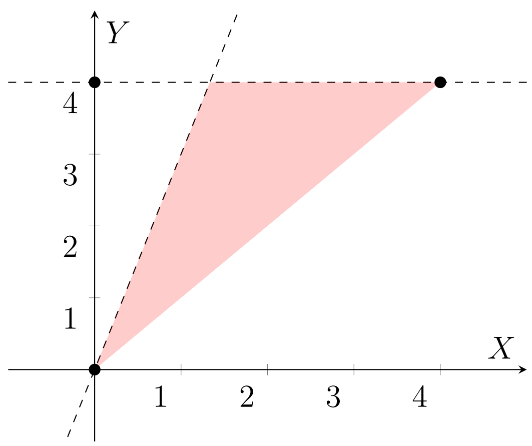
- Para $x \geqslant 4$ y $y \geqslant 4$:
Hemos visto anteriormente que $F_{(X,Y)}(x,y) = 1$.

Por tanto,

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0, \\ \dfrac{2xy - x^2}{16}, & 0 < x < y < 4, \\ \dfrac{8x - x^2}{16}, & 0 < x < 4 \text{ y } y \geqslant 4, \\ \dfrac{y^2}{16}, & x \geqslant y \text{ y } 0 \leqslant y < 4, \\ 1, & x \geqslant 4 \text{ y } y \geqslant 4. \end{cases}$$

2. Probabilidad de que en una semana se venda más de la tercera parte de los litros de que se dispone al comienzo de la misma.

   En este caso, nos piden calcular $P[X > Y/3]$. Para ello, representamos la recta $y = 3x$ y nos quedamos con la región que queda por encima de esta recta:



Tenemos que integrar $f(x,y)$ en la región coloreada:

$$\begin{aligned}
P[X > {}^{Y}/_{3}] &= \int_0^{4/3}\int_x^{3x} \frac{1}{8}\,dy\,dx + \int_{4/3}^{4}\int_x^{4} \frac{1}{8}\,dy\,dx = \\
&= \int_0^{4/3} \frac{3x-x}{8}\,dx + \int_{4/3}^{4} \frac{4-x}{8}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{4/3} 2x\,dx + \frac{1}{8}\int_{4/3}^{4} 4-x\,dx = \\
&= \frac{1}{8}\left[x^2\right]_0^{4/3} + \frac{1}{8}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{4/3}^{4} = \frac{1}{8}\left[\frac{16}{9}\right] + \frac{1}{8}\left[16 - \frac{16}{2} - \frac{16}{3} + \frac{16}{18}\right] = \\
&= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

3. Si en una semana se han vendido 3,000 litros de gasóleo, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana hubiese entre 3,500 y 3,750 litros de combustible?

En este caso, nos piden:

$$P[3{,}5 < Y < 3{,}75 \mid X = 3] = \int_{3{,}5}^{3{,}75} f_{Y|X=3}(y)\,dy.$$

Veamos el valor de $f_{Y|X=3}(y)$:

$$f_{Y|X=3}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(3,y)}{f_X(3)}$$

Calculemos por tanto la marginal de X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_x^4 \frac{1}{8}\,dy = \frac{1}{8}\left[y\right]_x^4 = \frac{4-x}{8}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f_{Y|X=3}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(3,y)}{f_X(3)} = \frac{1/8}{1/8} = 1.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

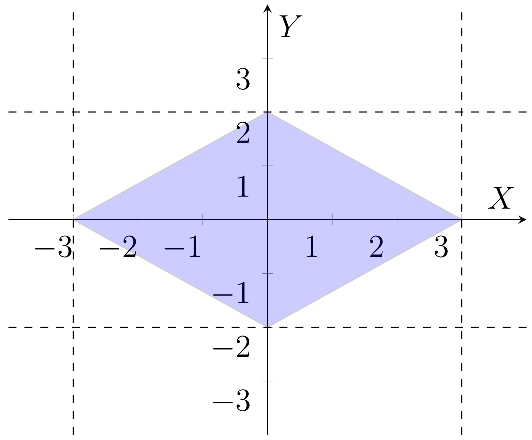
$$P[3{,}5 < Y < 3{,}75 \mid X = 3] = \int_{3{,}5}^{3{,}75} 1\,dy = \left[y\right]_{3{,}5}^{3{,}75} = 3{,}75 - 3{,}5 = 0{,}25.$$

Ejercicio 2.1.6. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x,y) = k, \quad (x,y) \in R,$$

siendo R el rombo de vértices $(3,0)$; $(0,2)$; $(-3,0)$; $(0,-2)$. Calcular k para que f sea una función de densidad. Hallar las distribuciones marginales y condicionadas.

Representamos en el plano cartesiano el rombo R:



Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Calculamos solo la integral en el primer cuadrante, ya que la función es simétrica. Para ello, calculamos la integral en el triángulo de vértices $(0,0)$; $(3,0)$; $(0,2)$. La recta que une los puntos $(3,0)$ y $(0,2)$ es $y = {}^{-2}/_{3}x + 2$. Por tanto, tenemos:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(x,y)\,dx\,dy = 4\cdot\int_0^3\int_0^{-2/3\cdot x+2} k\,dy\,dx =$$
$$= 4k\cdot\int_0^3\left[-\frac{2}{3}\cdot x+2\right]dx = 4k\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot x^2+2x\right]_0^3 = 4k\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 9+6\right] = 4k\cdot[-3+6] = 12k.$$

Por tanto, tenemos que $k = {}^{1}/_{12}$. En este caso, vemos que además $f_{(X,Y)}$ es no negativa e integrable.

Calculemos ahora la distribución marginal de X. Distinguimos:

- Si $x < -3$ o $x \geqslant 3$:
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 0.$$
- Si $-3 \leqslant x < 0$:
En este caso, tenemos que:
$$-\frac{2}{3}\cdot x - 2 \leqslant y \leqslant \frac{2}{3}\cdot x + 2.$$
Por tanto, tenemos:
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-2/3\cdot x-2}^{2/3\cdot x+2}\frac{1}{12}\,dy = \frac{1}{12}\cdot\left[{}^{2}/_{3}\cdot x+2-\left({}^{-2}/_{3}\cdot x-2\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{4}{3}\cdot x+4\right] = \frac{x}{9}+\frac{1}{3}.$$

- Si $0 \leqslant x < 3$:

  En este caso, tenemos que:
  $$\frac{2}{3} \cdot x - 2 \leqslant y \leqslant -\frac{2}{3} \cdot x + 2.$$
  Por tanto, tenemos:
  $$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{2/3\cdot x-2}^{-2/3\cdot x+2} \frac{1}{12}\,dy = \frac{1}{12}\cdot\left[-2/3\cdot x + 2 - (2/3\cdot x - 2)\right] = \\ &= \frac{1}{12}\cdot\left[-\frac{4}{3}\cdot x + 4\right] = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:
$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \text{ o } x \geqslant 3, \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{3}, & -3 \leqslant x < 0, \\ -\dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$$
Calculemos ahora la distribución marginal de Y. Distinguimos:

- Si $y < -2$ o $y \geqslant 2$:
  $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 0.$$

- Si $-2 \leqslant y < 0$:

  En este caso, tenemos que:
  $$-\frac{3}{2} \cdot y - 3 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \cdot y + 3$$
  Por tanto, tenemos:
  $$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-3/2\cdot y-3}^{3/2\cdot y+3} \frac{1}{12}\,dx = \frac{1}{12}\cdot\left[3/2\cdot y + 3 - (-3/2\cdot y - 3)\right] = \\ &= \frac{y/2 + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Si $0 \leqslant y < 2$:

  En este caso, tenemos que:
  $$\frac{3}{2} \cdot y - 3 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2} \cdot y + 3$$
  Por tanto, tenemos:
  $$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{3/2\cdot y-3}^{-3/2\cdot y+3} \frac{1}{12}\,dx = \frac{1}{12}\cdot\left[-3/2\cdot y + 3 - (3/2\cdot y - 3)\right] = \\ &= \frac{-y/2 + 1}{2} = -\frac{y}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2 \text{ o } y \geqslant 2, \\ \dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 \leqslant y < 0, \\ -\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant y < 2. \end{cases}$$

Calculemos ahora las distribuciones condicionadas. Dado $x^* \in]-3, 3[$, tenemos:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*, y)}{f_X(x^*)} = \begin{cases} \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{x/9 + 1/3}, & -3 < x^* < 0, \\ \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{-x/9 + 1/3}, & 0 \leqslant x^* < 3. \end{cases}$$

Por otro lado, dado $y^* \in]-2, 2[$, tenemos que:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y^*)}{f_Y(y^*)} = \begin{cases} \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{y/4 + 1/2}, & -2 < y^* < 0, \\ \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{-y/4 + 1/2}, & 0 \leqslant y^* < 2. \end{cases}$$

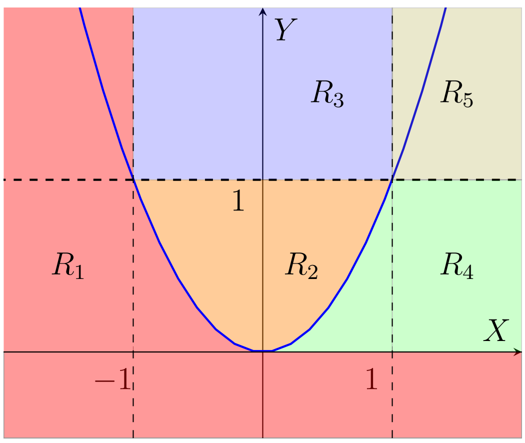
Ejercicio 2.1.7. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x, y) = k, \quad x^2 \leqslant y \leqslant 1,$$

anulándose fuera del recinto indicado.

1. Hallar la constante k para que f sea una función de densidad.

   Representamos en el plano cartesiano el recinto en el que la función de densidad es no nula:

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1.$$

Tenemos por tanto que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} k\,dy\,dx = k \cdot \int_{-1}^{1} [y]_{x^2}^{1}\,dx = k \cdot \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx =$$
$$= k \cdot \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = k \cdot \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = k \cdot \left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}k$$

Por tanto, tenemos que $k = 3/4$. En este caso, vemos que además $f_{(X,Y)}$ es no negativa e integrable.

2. Calcular la función de distribución de probabilidad.

   Distinguimos casos:

   - <u>Si $x \leqslant -1$ o $y \leqslant 0$ o $x \in]-1,0[$ y $y \leqslant x^2$</u> (zona R_1):
   $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$
   - <u>Si $x^2 \leqslant y \leqslant 1$</u> (zona R_2):
   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{-\sqrt{y}}^{x} \int_{u^2}^{y} \frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4} \int_{-\sqrt{y}}^{x} \left[y - u^2\right]\,du = \\ &= \frac{3}{4}\left[yu - \frac{u^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{x} = \frac{3}{4}\left[xy - \frac{x^3}{3} + y\sqrt{y} - \frac{y^{3/2}}{3}\right] = \\ &= \frac{3}{4}\left[xy - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot y\sqrt{y}\right]. \end{aligned}$$
   - <u>Si $y \geqslant 1$ y $x \in]-1,1[$</u> (zona R_3):
   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{-1}^{x} \int_{u^2}^{1} \frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4} \int_{-1}^{x} \left[1 - u^2\right]\,du = \\ &= \frac{3}{4}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$
   - <u>Si $x \in]0,1[$ y $0 \leqslant y \leqslant x^2$ o $x \in]1,+\infty[$ y $y \in]0,1[$</u> (zona R_4):
   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{u^2}^{y} \frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left[y - u^2\right]\,du = \\ &= \frac{3}{4}\left[yu - \frac{u^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{3}{4}\left[y\sqrt{y} - \frac{y^{3/2}}{3} + y\sqrt{y} - \frac{y^{3/2}}{3}\right] = y\sqrt{y} \end{aligned}$$
   - <u>Si $x \geqslant 1$ y $y \geqslant 1$</u> (zona R_5):
   $$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \text{ o } y \leqslant 0 \text{ o } x \in \left]-1,0\right[\text{ y } y \leqslant x^2, \\ \dfrac{3}{4}\left[xy - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\cdot y\sqrt{y}\right], & x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ \dfrac{3}{4}\left[x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\right], & y \geqslant 1 \text{ y } x \in \left]-1,1\right[, \\ y\sqrt{y}, & x \in \left]0,1\right[\text{ y } 0 \leqslant y \leqslant x^2 \text{ o } x > 1 \text{ y } y \in]0,1[, \\ 1, & x \geqslant 1 \text{ y } y \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Calcular $P(X \geqslant Y)$.

   Para calcular $P(X \geqslant Y)$, representamos la recta $y = x$ y nos quedamos con la región que queda por debajo de esta recta. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant Y) &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{3}{4}\,dy\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 \left[x - x^2\right]\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{3-2}{6}\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Calcular las distribuciones marginales.

   Para $x \in \left]-1,1\right[$, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}\,[y]_{x^2}^{1} = \frac{3}{4}\left[1 - x^2\right].$$

   Para $y \in \left]0,1\right[$, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\,[x]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{3}{4}\left[\sqrt{y} + \sqrt{y}\right] = \frac{3}{2}\sqrt{y}.$$

5. Calcular las distribuciones condicionadas.

   Dado $x^* \in \left]-1,1\right[$, tenemos que:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{3/4}{3/4\left[1-(x^*)^2\right]} = \frac{1}{1-(x^*)^2}.$$

   Dado $y^* \in \left]0,1\right[$, tenemos que:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{3/4}{3/2\sqrt{y^*}} = \frac{1}{2\sqrt{y^*}}.$$

Ejercicio 2.1.8. Sea $k \in \mathbb{R}$. Consideramos la función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left[\frac{xy}{2} + 1\right], & 0 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular:

1. La constante k para que f sea una función de densidad.

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

   Tenemos por tanto que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} k\left[\frac{xy}{2}+1\right]\,dx\,dy = k\int_{-1}^{1}\left[\frac{yx^2}{4}+x\right]_0^1 =$$
$$= k\int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{4}+1\right]\,dy = k\left[\frac{y^2}{8}+y\right]_{-1}^{1} = k\left[\frac{1}{8}+1-\left(\frac{1}{8}-1\right)\right] = 2k \Longrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

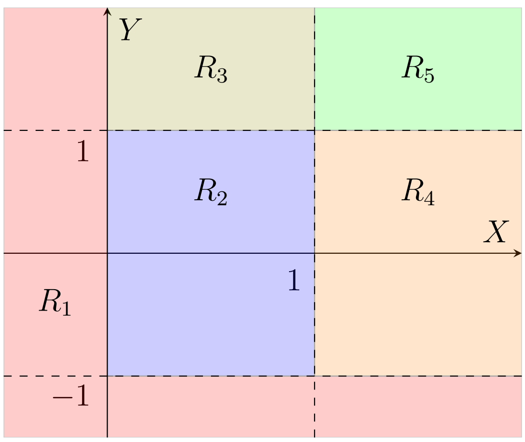
   Veamos ahora que, para dicho valor de k, f es no negativa. Para ello, tenemos que:

$$f(x,y) \geqslant 0 \Longleftrightarrow xy > -2 \Longleftrightarrow y > \frac{-2}{x}$$

   Esto último es cierto, ya que $x \in]0,1[$ e $y \in]-1,1[$. Por tanto, f es no negativa. Además, es integrable, por lo que f es una función de densidad.

2. La función de distribución de probabilidad.

   Representamos en el plano cartesiano la región en la que la función de densidad es no nula:



   Distinguimos casos:

   - Si $x \leqslant 0$ o $y \leqslant -1$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

- Si $x \in \left]0,1\right[$ y $y \in \left]-1,1\right[$ (zona R_2):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^x\int_{-1}^{y}\frac{1}{2}\left[\frac{uv}{2}+1\right]\,dv\,du = \\
&= \int_0^x \left[\frac{uv^2}{8}+\frac{v}{2}\right]_{-1}^{y}\,du = \int_0^x \frac{uy^2}{8}+\frac{y}{2}-\frac{u}{8}+\frac{1}{2}\,du = \\
&= \left[\frac{u^2y^2}{16}+\frac{y}{2}u-\frac{u^2}{16}+\frac{u}{2}\right]_0^x = \frac{x^2y^2}{16}+\frac{xy}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $x \in \left]0,1\right[$ y $y \geqslant 1$ (zona R_3):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^x\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[\frac{uv}{2}+1\right]\,dv\,du = \\
&= \int_0^x \left[\frac{uv^2}{8}+\frac{v}{2}\right]_{-1}^{1}\,du = \int_0^x \frac{u}{8}+\frac{1}{2}-\left(\frac{u}{8}-\frac{1}{2}\right)\,du = \int_0^x 1\,du = x.
\end{aligned}$$

- Si $y \in \left]-1,1\right[$ y $x \geqslant 1$ (zona R_4):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^1\int_{-1}^{y}\frac{1}{2}\left[\frac{uv}{2}+1\right]\,dv\,du = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{uv^2}{8}+\frac{v}{2}\right]_{-1}^{y}\,du = \int_0^1 \frac{uy^2}{8}+\frac{y}{2}-\frac{u}{8}+\frac{1}{2}\,du = \\
&= \left[\frac{u^2y^2}{16}+\frac{y}{2}u-\frac{u^2}{16}+\frac{u}{2}\right]_0^1 = \frac{y^2}{16}+\frac{y}{2}+\frac{7}{16}
\end{aligned}$$

- Si $y \geqslant 1$ y $x \geqslant 1$ (zona R_5):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ o } y \leqslant -1, \\ \dfrac{x^2y^2}{16}+\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}, & x \in \left]0,1\right[\text{ y } y \in \left]-1,1\right[, \\ x, & x \in \left]0,1\right[\text{ y } y \geqslant 1, \\ \dfrac{y^2}{16}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{7}{16}, & y \in \left]-1,1\right[\text{ y } x \geqslant 1, \\ 1, & y \geqslant 1 \text{ y } x \geqslant 1. \end{cases}$$

3. Las distribuciones marginales.

Para $x \in \left]0,1\right[$, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[\frac{xy}{2}+1\right]\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{xy^2}{4}+y\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{4}+1-\frac{x}{4}+1\right] = 1$$

Para $y \in \left]-1,1\right[$, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{xy}{2}+1\right]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2y}{4}+x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{4}+1\right]$$

Ejercicio 2.1.9. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & 0 < x+y < 1, |y| < 1, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Responder a los siguientes apartados:

1. Hallar la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad.

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

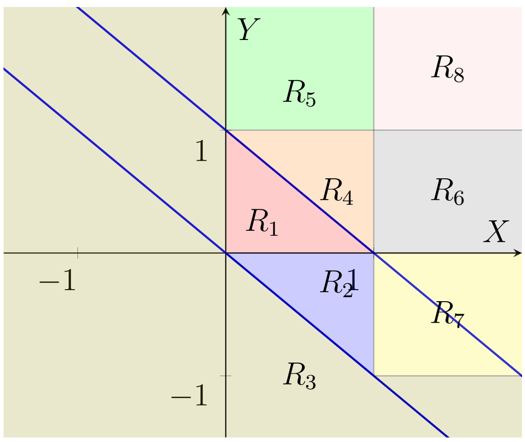
   Tenemos por tanto que:

   $$1 = \int_0^1\int_{-x}^{1-x} k\,dx\,dy = k\int_0^1 [y]_{-x}^{1-x}\,dx = k\int_0^1 1-x+x\,dx = k\int_0^1 1\,dx = k$$

   Por tanto, tenemos que $k = 1$. En este caso, vemos que además $f_{(X,Y)}$ es no negativa e integrable.

2. Calcular la función de distribución de probabilidad.

   Dividimos el plano cartesiano en las distintas regiones:



   Distinguimos casos:

   - Si $x \leqslant 0$ o $x + y \leqslant 0$ (zona R_3):

   $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

   - Si $x \in]0,1[$ y $y \in]0,1[$ y $x + y \leqslant 1$ (zona R_1):

   $$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_{-u}^{y} 1\,dv\,du = \int_0^x [v]_{-u}^{y}\,du =$$
   $$= \int_0^x y+u\,du = \left[yu + \frac{u^2}{2}\right]_0^x = xy + \frac{x^2}{2}.$$

- Si $x \in]0,1[$ y $y \in]-1,0[$ y $x+y \geqslant 0$ (zona R_2):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-y}^{x}\int_{-u}^{y} 1\,dv\,du = \int_{-y}^{x} [v]_{-u}^{y}\,du =$$
$$= \int_{-y}^{x} y+u\,du = \left[yu + \frac{u^2}{2}\right]_{-y}^{x} = xy + \frac{x^2}{2} - y(-y) - \frac{y^2}{2} =$$
$$= yx + \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}.$$

- Si $x \in]0,1[$ y $y \in]0,1[$ y $x+y \geqslant 1$ (zona R_4):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv =$$
$$= \int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y} 1\,dv\,du + \int_{1-y}^{x}\int_{0}^{1-u} 1\,dv\,du + \int_{0}^{x}\int_{-u}^{0} 1\,dv\,du =$$
$$= \int_{0}^{1-y} y\,du + \int_{1-y}^{x} 1-u\,du + \int_{0}^{x} u\,du =$$
$$= [yu]_0^{1-y} + \left[u - \frac{u^2}{2}\right]_{1-y}^{x} + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x =$$
$$= y(1-y) + \left(x - \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) - \left(1 - y - \frac{(1-y)^2}{2}\right) + \cancel{\frac{x^2}{2}} =$$
$$= y - y^2 + x - 1 + y + \frac{(1-y)^2}{2} = -(1-y)^2 + x + \frac{(1-y)^2}{2} =$$
$$= x - \frac{(1-y)^2}{2}$$

- Si $x \in]0,1[$ y $y \in]1,\infty[$ (zona R_5):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{x}\int_{-u}^{1-u} 1\,dv\,du =$$
$$= \int_{0}^{x} [v]_{-u}^{1-u}\,du = \int_{0}^{x} 1-u+u\,du = \int_{0}^{x} 1\,du = x.$$

- Si $x \in]1,\infty[$ y $y \in]0,1[$ (zona R_6):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv =$$
$$= \int_{0}^{1}\int_{-u}^{0} 1\,dv\,du + \int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y} 1\,dv\,du + \int_{1-y}^{1}\int_{0}^{1-u} 1\,dv\,du =$$
$$= \int_{0}^{1} u\,du + \int_{0}^{1-y} y\,du + \int_{1-y}^{1} 1-u\,du =$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + [yu]_0^{1-y} + \left[u - \frac{u^2}{2}\right]_{1-y}^{1} =$$
$$= \cancel{\frac{1}{2}} + y(1-y) + 1 - \cancel{\frac{1}{2}} - \left[1 - y - \frac{(1-y)^2}{2}\right] =$$
$$= y - y^2 + y + \frac{(1-y)^2}{2} = 1 - \frac{(1-y)^2}{2}$$

- Si $x \in]1, \infty[$ y $y \in]-1, 0[$ (zona R_7):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \\
&= \int_{-y}^{1}\int_{-u}^{y} 1\,dv\,du = \int_{-y}^{1} [v]_{-u}^{y}\,du = \int_{-y}^{1} y+u\,du = \\
&= \left[yu + \frac{u^2}{2}\right]_{-y}^{1} = y + \frac{1}{2} + y^2 - \frac{y^2}{2} = y + \frac{y^2+1}{2}
\end{aligned}$$

- Si $x \in]1, \infty[$ y $y \in]1, \infty[$ (zona R_8):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases}
0, & x \leqslant 0 \text{ o } x+y \leqslant 0, \ (R_3), \\
xy + \dfrac{x^2}{2}, & x \in]0,1[\text{ y } y \in]0,1[\text{ y } x+y \leqslant 1, \ (R_1), \\
\dfrac{(x+y)^2}{2}, & x \in]0,1[\text{ y } y \in]-1,0[\text{ y } x+y \geqslant 0, \ (R_2), \\
x - \dfrac{(1-y)^2}{2}, & x \in]0,1[\text{ y } y \in]0,1[\text{ y } x+y \geqslant 1, \ (R_4), \\
x, & x \in]0,1[\text{ y } y \geqslant 1, \ (R_5), \\
1 - \dfrac{(1-y)^2}{2}, & x \in]1,\infty[\text{ y } y \in]0,1[, \ (R_6), \\
y + \dfrac{y^2+1}{2}, & x \in]1,\infty[\text{ y } y \in]-1,0[, \ (R_7), \\
1, & x \in]1,\infty[\text{ y } y \geqslant 1, \ (R_8).
\end{cases}$$

3. Calcular las distribuciones marginales.

Para $x \in]0, 1[$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-x}^{1-x} 1\,dy = [y]_{-x}^{1-x} = 1 - x + x = 1.$$

Para $y \in]0, 1[$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{1-y} 1\,dx = [x]_0^{1-y} = 1 - y.$$

Para $y \in]-1, 0[$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-y}^{1} 1\,dx = [x]_{-y}^{1} = 1 + y.$$

Por tanto, tenemos que, para $y \in]-1, 1[$:

$$f_Y(y) = 1 - |y|.$$

4. Calcular las distribuciones condicionadas.

   Dado $x^* \in]-1,1[$, tenemos para $y \in]0,1[$, $0 < x^* + y < 1$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*, y)}{f_X(x^*)} = \frac{1}{1} = 1.$$

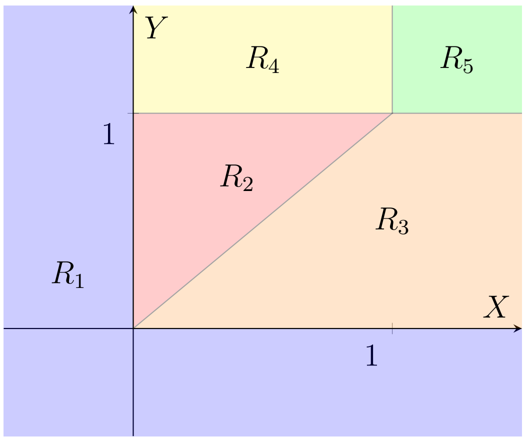
   Dado $y^* \in]-1,1[$, tenemos para $x \in]0,1[$, $0 < x + y^* < 1$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{1}{1-|y^*|}.$$

Ejercicio 2.1.10. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional continuo, con distribución de probabilidad uniforme sobre el triángulo de vértices $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$. Determinar:

1. La función de densidad de probabilidad.

   Veamos en primer lugar el triángulo en cuestión:



   La función de densidad de probabilidad es constante, por lo que:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & x \in [0,1], x \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^1 k\, dy\, dx = k \int_0^1 [y]_x^1\, dx =$$
$$= k \int_0^1 1 - x\, dx = k \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = k\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2} \Longrightarrow k = 2.$$

2. La función de distribución de probabilidad.

   Distinguimos casos:

- Si $x \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \leqslant 0$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

- Si $x \in]0,1[\quad \text{y} \quad x < y < 1$ (zona R_2):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{x}\int_{u}^{y} 2\,dv\,du = \int_{0}^{x} 2(y-u)\,du = \\ &= 2\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = 2\left(xy - \frac{x^2}{2}\right) = 2xy - x^2. \end{aligned}$$

- Si $y \in]0,1,\infty[\quad \text{y} \quad x > y$ (zona R_3):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{y}\int_{u}^{y} 2\,dv\,du = \int_{0}^{y} 2(y-u)\,du = \\ &= 2\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_0^y = 2\left(y^2 - \frac{y^2}{2}\right) = 2\cdot\frac{y^2}{2} = y^2. \end{aligned}$$

- Si $x \in]0,1[\quad \text{y} \quad y \geqslant 1$ (zona R_4):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{0}^{x}\int_{u}^{1} 2\,dv\,du = \int_{0}^{x} 2(1-u)\,du = \\ &= 2\left[u - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 2x - x^2. \end{aligned}$$

- Si $x, y \geqslant 1$ (zona R_5):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ o } y \leqslant 0, (R_1), \\ 2xy - x^2, & x \in]0,1[\text{ y } x < y < 1, (R_2), \\ y^2, & y \in]0,1[\text{ y } x > y, (R_3), \\ 2x - x^2, & x \in]0,1[\text{ y } y \geqslant 1, (R_4), \\ 1, & x, y \geqslant 1, (R_5). \end{cases}$$

3. Las distribuciones marginales.

   Para $x \in]0,1[$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{1} 2\,dy = 2\,[y]_x^1 = 2(1-x).$$

   Para $y \in]0,1[$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{y} 2\,dx = 2\,[x]_0^y = 2y.$$

4. Las distribuciones condicionadas.

   Dado $x^* \in]0,1[$, tenemos para $y \in]0,1[$, $x^* < y < 1$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{2}{2(1-x^*)} = \frac{1}{1-x^*}.$$

   Dado $y^* \in]0,1[$, tenemos para $x \in]0,1[$, $x < y^* < 1$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{2}{2y^*} = \frac{1}{y^*}.$$

Ejercicio 2.1.11. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1; x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

Calcular:

1. La función de densidad conjunta.

   La función de densidad conjunta es constante, por lo que:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & x^2+y^2<1, x,y \geqslant 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

   Hay dos opciones:

   Integrando de la forma usual: Es necesario que:

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} k\,dy\,dx = k\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

   Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, tenemos que:

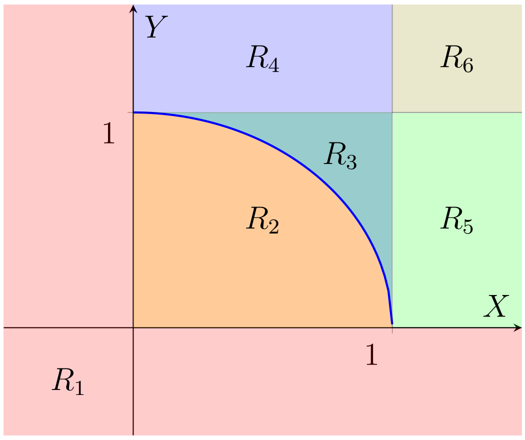
$$1 = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\,dt = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$
$$= k\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k\left[\frac{\pi}{4}\right] \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

   Razonando la forma de C: Sabemos que C es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x,y) = k\int_C 1 = k\cdot\lambda(C) = k\cdot\frac{\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

2. La función de distribución conjunta.

   Dividimos el plano cartesiano en las distintas regiones:



   Distinguimos casos:

   - Si $x \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \leqslant 0$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

   - Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]0,\sqrt{1-x^2}\right[$ (zona R_2):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \int_0^x \frac{4}{\pi}y\,du = \\ &= \frac{4}{\pi}\left[yu\right]_0^x = \frac{4}{\pi}\cdot xy\end{aligned}$$

   - Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]\sqrt{1-x^2},1\right[$ (zona R_3):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du\end{aligned}$$

   Para resolver la segunda integral, hacemos el cambio de variable dado por $u = \text{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right]_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{\text{sen}(2\,\text{arc sen}(x))}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{\text{sen}(2\,\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right]
\end{aligned}$$

Veamos cuánto vale anteriormente $\text{sen}(2\,\text{arc sen}(x))$ para cierto $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(2\,\text{arc sen}(x)) = 2\,\text{sen}(\text{arc sen}(x))\cos(\text{arc sen}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{2\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2}}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi}\,\text{arc sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \\
&\qquad - \frac{2}{\pi}\,\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}.
\end{aligned}$$

- Si $x \in \,]0,1[$ y $y \geqslant 1$ (zona R_4):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{0}^{x}\int_{0}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\
&= \int_{0}^{x} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

Para resolver la integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4}\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

- Si $y \in]0,1[$ y $x \geqslant 1$ (zona R_5):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \\
&= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{y} \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\
&= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\,[u]_0^{\sqrt{1-y^2}} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi/2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{4} - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2} = \\
&= \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})
\end{aligned}$$

- Si $x, y \geqslant 1$ (zona R_6):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

3. Las funciones de densidad marginales.

   Para $x \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}\,dy = \frac{4}{\pi}\,[y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

   Para $y \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\,[x]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}.$$

4. Las funciones de densidad condicionadas.

   Dado $x^* \in [0,1]$, tenemos para $y \in [0, \sqrt{1-(x^*)^2}]$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(x^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^*)^2}}.$$

   Dado $y^* \in [0,1]$, tenemos para $x \in [0, \sqrt{1-(y^*)^2}]$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(y^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^*)^2}}.$$

Ejercicio 2.1.12. Sea la función de densidad del vector (X,Y) dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left[\dfrac{xy}{2}+1\right] & 0<x<1,\ -1<y<1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se considera la transformación $Z = X - Y$, $T = X + 2Y$. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable transformada (Z,T).

Ejercicio 2.1.13. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-x-y) & x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X+2Y$, a partir del cálculo de la densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional transformada (Z,T), siendo $Z = X + 2Y$, y $T = Y$.

Ejercicio 2.1.14. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X, Y).
2. Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Z, T) = (X + Y, X - Y)$.
3. Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z, T).
4. Determinar la función de distribución de probabilidad de ${}^{X}\!/{}_{Y}$, XY, $\max(X, Y)$, y $\min(X, Y)$.
5. Determinar la función de distribución de probabilidad conjunta del $\max(X, Y)$, y del $\min(X, Y)$.

Ejercicio 2.1.15. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional discreto, cuya función masa de probabilidad conjunta se calcula como el producto de las funciones masa de probabilidad marginales de X e Y. Las variables aleatorias X e Y se distribuyen según una Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcular la función de distribución de probabilidad marginal del máximo y del mínimo, así como la distribución conjunta del máximo y del mínimo.

Ejercicio 2.1.16. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1,\ 0 < y < x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la densidad de probabilidad de las variables $Z = aX + bY$, $T = {}^{X}\!/{}_{Y}$, a partir de la densidad de probabilidad conjunta de $(Z, T) = (aX + bY, {}^{X}\!/{}_{Y})$, $a, b > 0$.

Ejercicio 2.1.17. Sea (X, Y) un vector aleatorio, cuya función de densidad de probabilidad conjunta se calcula como producto de las funciones de densidad de probabilidad marginales de X e Y, siendo $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta del vector aleatorio

$$(Z, T) = (\min(X, Y), T), \qquad T = \begin{cases} 0 & Y < X \\ 1 & X < Y \end{cases}$$

.

Ejercicio 2.1.18. Sea (X, Y) un vector aleatorio, cuya función de densidad de probabilidad conjunta se calcula como en el problema anterior, considerando $\lambda = \mu$. Calcular la distribución de probabilidad de $|X - Y|$, $\max(X, Y^3)$, y $\min(X^5, Y)$.

Ejercicio 2.1.19. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función masa de probabilidad

$$P(X = x, Y = y) = k \cdot 2^{x+y}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$

1. Calcular el valor de k para que la ecuación anterior defina la función masa de probabilidad de un variable aleatoria bidimensional discreta.
2. Calcular las funciones masa de probabilidad marginales y condicionadas.

3. Calcular la función masa de probabilidad de $X+Y$ y $X-Y$.

Ejercicio 2.1.20. El vector aleatorio (X,Y) se distribuye según una uniforme sobre el recinto

$$R_1 = \{(x,y); 0 < x < y < 1\}.$$

Calcular:

1. Su función generatriz de momentos conjunta.

2. Las distribuciones generatrices de momentos marginales.

3. La covarianza de X e Y.