

# Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025



# Índice general

<b>1. Ecuaciones y sistemas</b>	<b>9</b>
1.1. Crecimiento proporcional . . . . .	10
1.2. Interpretación geométrica . . . . .	12
1.3. Funciones implícitas . . . . .	16
1.3.1. Derivación implícita . . . . .	20
1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones . . . . .	21
1.5. Problemas geométricos . . . . .	23
1.5.1. Trayectorias ortogonales . . . . .	25
1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . . .	28
1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano . . . . .	29
<b>2. Relaciones de Problemas</b>	<b>33</b>
2.1. Ecuaciones y sistemas . . . . .	33

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal <https://www.ugr.es/~rortega/>. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

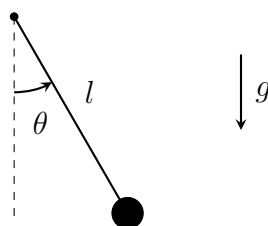
# Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área “Ecuaciones Funcionales”, pero gracias a que en física  $F = m \cdot a$ , podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

**Ejemplo.** Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos  $l$ .
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos  $g$ .
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos  $\theta$ .



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo ( $t$ ), y ver ahora la variable  $\theta$  como una variable dependiente en función de  $t$ :

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si  $\theta(t)$  es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación<sup>1</sup>:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (1)$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones  $\theta$  que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

---

<sup>1</sup>De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente ( $t$ , que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función ( $x$ , en función de  $t$ ), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La  $\Phi$  que aparece en (2) será una función:

$$\begin{aligned} \Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y) \end{aligned}$$

Donde trataremos de ver  $x$  como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de  $t$ :  $x = x(t)$ , siendo  $y$  su derivada.

**Ejemplo.** Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función  $\Phi$  en cuestión es:

$$\begin{aligned} \Phi : D = \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$



Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t & x(t) &= \cos t \\ x(t) &= 1 & x(t) &= -1 \end{aligned}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \sin(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en  $\mathbb{R}^*$  por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{aligned} f : C \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para  $x'$ :  $x'(t) = h(t)$ , a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7t \\ f(t, x) &= 7t\end{aligned}$$

con  $D = \mathbb{R}^3$  y  $C = \mathbb{R}^2$ .

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7x \\ f(t, x) &= 7x\end{aligned}$$

con  $D = \mathbb{R}^3$  y  $C = \mathbb{R}^2$ .

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \quad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

**Ejemplo.** Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \operatorname{sen} t$
- $x'(t) = \operatorname{sen} x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \operatorname{sen} t \\ f(t, x) &= \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \operatorname{sen} x \\ f(t, x) &= \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

# 1. Ecuaciones y sistemas

**Definición 1.1** (Ecuación Diferencial y solución). Una ecuación diferencial viene dada por una función

$$\begin{aligned}\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y)\end{aligned}$$

**continua** donde  $D$  es un **abierto**<sup>1</sup> **conexo**<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^3$ .

Una **solución** de dicha ecuación diferencial será una función

$$\begin{aligned}x : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t)\end{aligned}$$

con  $I \subseteq \mathbb{R}$  **intervalo**<sup>3</sup> **abierto**<sup>4</sup> tal que:

- I)  $x$  sea derivable en  $I$ <sup>5</sup>.
- II)  $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ <sup>6</sup>.
- III)  $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ .

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

y la expresión:

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}$$

Probar que dicha expresión es solución de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial viene dada por

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto y - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

- Cogiendo  $I = ]19, +\infty[$ , tenemos I).

---

<sup>1</sup>Por convenio, ya que las ecuaciones diferenciales no se comportan bien en los bordes.

<sup>2</sup>Es lógico pensarlo, ya que estamos estudiando movimientos.

<sup>3</sup>Es lógico, pues usualmente  $t$  será el tiempo.

<sup>4</sup>Pudiendo trabajar con funciones continuas en un cerrado y derivables en el abierto, evitando así por ejemplo tangentes verticales

<sup>5</sup>Necesario para poder considerar  $x'(t)$  en la propia ecuación.

<sup>6</sup>En vistas de III).

- Por ser la raíz una función continua y creciente, tenemos que  $x(I) = ]0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$ , de donde se cumple II).

■

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-38}} = \frac{1}{x(t)} \quad \forall t \in I$$

**Notación.** La notación que hemos estado utilizando para las ecuaciones diferenciales no es la que usaremos a lo largo del curso:

Lo que hasta ahora hemos notado y entendido por:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Como en el caso:

$$x'(t) = 3x(t)$$

Lo notaremos ahora por:

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, x') &= 0 \\ x' &= 3x \end{aligned}$$

Que recordamos tiene por solución:

$$x(t) = c \cdot e^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo.** Para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , resolver:

1.  $x' = \lambda x$

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

2.  $x' = \lambda t$

$$x(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

## 1.1. Crecimiento proporcional

En el capítulo anterior nos preguntábamos si todas las soluciones de la ecuación  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$  eran de la forma

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora daremos respuesta a dicha cuestión, comentando además utilidades de la misma ecuación.

**Proposición 1.1.** *Dada  $x(t)$ , solución de  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definida en un intervalo abierto  $I$ , existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que*

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad t \in I$$

Antes de dar paso a la demostración, observemos que si suponemos cierta la tesis:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \iff e^{-\lambda t}x(t) = c \implies \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)) = 0$$

*Demostración.* Definimos la función

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-\lambda t}x(t) \end{aligned}$$

que es derivable por ser producto de funciones derivables.

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)) = -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t}x'(t) \\ &= -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + \lambda e^{-\lambda t}x(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por ser  $f$  continua y definida en un intervalo, llegamos a que es constante, luego  $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = e^{-\lambda t}x(t) = c \quad \forall t \in I$ , de donde deducimos que:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

□

Nos centraremos ahora en la idea intuitiva de derivada como representación de la variación de una variable dependiente para dar lugar a los siguientes dos ejemplos que nos muestran cómo surge la ecuación diferencial  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$  de forma natural.

**Ejemplo.** Si ingresamos un capital inicial  $C(0) = 100$  en un banco que nos da el 2 % anual de interés, al cabo de un año tendremos en nuestra cuenta:

$$C(1) = C(0) + \frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{2}{100} \cdot 100 = 102$$

Sin embargo, si acudimos a otro banco que nos ofrece la misma tasa anual de interés pero que nos realiza pagos semestrales, al cabo de un año conseguiremos reunir:

$$\begin{aligned} C(1/2) &= C(0) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(0) = 100 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 100 = 101 \\ C(1) &= C(1/2) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(1/2) = 101 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 101 = 102,01 > 102 \end{aligned}$$

En general, si  $\Delta t$  es la fracción del año en la que se nos hacen los pagos ( $\Delta t = 1$  significa que es pago anual), la fórmula es:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{2}{100} \Delta t C(t)$$

de donde:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{2}{100} C(t)$$

Si ahora vamos a un banco que nos haga pagos continuos, dicha fracción de tiempo será mínima, por lo que podemos pensar que  $\Delta t \rightarrow 0$  y hacer un paso al límite (no riguroso) para obtener que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t) = \frac{2}{100} C(t)$$

De donde tenemos

$$C' = \frac{2}{100}C$$

o de forma general, si notamos por  $I \in \mathbb{R}$  a la tasa de interés:

$$C' = IC$$

Cuyas soluciones ya sabemos que se tratan de cualquier función de la familia:

$$C(t) = c \cdot e^{It} \quad c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el crecimiento del dinero en un banco que nos ofrezca un interés continuo es exponencial. En este ejemplo, vemos cómo el crecimiento del dinero en una cuenta bancaria es exponencial a la propia cantidad de dinero de la que disponemos en la misma.

**Ejemplo.** La teoría física de la radioactividad nos dice que las sustancias radioactivas van perdiendo masa a una velocidad proporcional a la masa de la propia sustancia. Es decir, si representamos la masa de una sustancia radioactiva como variable dependiente del tiempo  $m = m(t)$ :

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

Para cierto parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  relativo a la sustancia radioactiva que consideremos.

Gracias al estudio anteriormente realizado de la ecuación diferencial  $m' = -\lambda m$ , sabemos ya que soluciones de esta son cualesquiera funciones de la forma:

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

En este ejemplo, hemos vuelto a observar la interpretación de la derivada como cuantía de la variación de una determinada variable dependiente.

## 1.2. Interpretación geométrica

A continuación, trataremos de dar una interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones, basándonos en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que describe la función en dicho punto.

Como ya mencionamos anteriormente, para dar una ecuación diferencial de orden 1 en forma normal nos es suficiente con dar una función

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

continua de tal forma que la ecuación diferencial a resolver es

$$x' = f(t, x)$$

cuya solución será una función  $x = x(t)$ .

Interpretaremos la función  $f$  como un campo de direcciones, es decir, a cada punto del plano  $(t, x)$  le asignamos un número  $f(t, x)$  e interpretaremos dicho número como la pendiente de la recta que pasa por dicho punto.

A partir de dicha función podemos ir construyendo un “campo de direcciones”, una regla que a cada punto del plano le asigna una recta que pasar por dicho punto.

Recordando la ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$  que nos da la igualdad  $x'(t) = f(t, x(t))$ , en el miembro derecho de esta última tenemos la pendiente asociada a la recta del campo de direcciones del punto  $(t, x(t))$ , mientras que a la izquierda tenemos la pendiente de la recta tangente a la curva  $x = x(t)$  en el punto  $(t, x(t))$ .

De esta forma, podemos imaginarnos la ecuación diferencial como un campo de direcciones, mientras que las soluciones son curvas que “peinan” dicho campo.

A continuación, ilustraremos gráficamente varios campos de direcciones dados por ecuaciones diferenciales y soluciones a dichas ecuaciones diferenciales, mediante varios ejemplos.

**Ejemplo.** Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 0$$

Cuyas soluciones son todas las funciones constantes:

$$x(t) = c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

por lo que a cada punto  $(t, x)$  del plano le asociamos rectas de pendiente 0 que pasen por dicho punto, es decir, rectas horizontales.



Figura 1.1: Campo de direcciones para  $x' = 0$  y algunas soluciones de la misma.

**Ejemplo.** Consideremos ahora:

$$x' = 1$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$x(t) = x + c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, el campo de direcciones viene dado por

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

por lo que a cada punto  $(t, x)$  le asociamos una recta a  $45^\circ$  de inclinación.

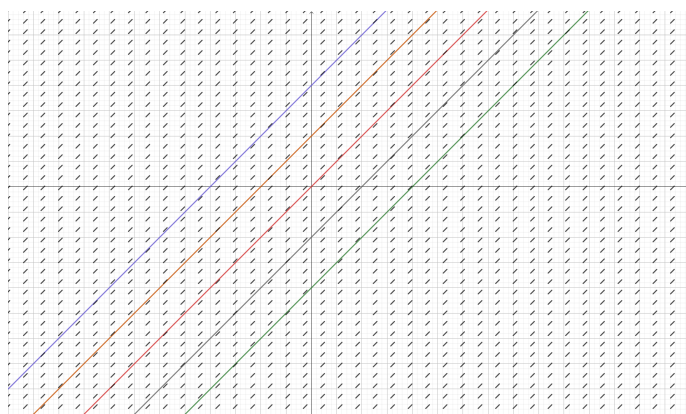


Figura 1.2: Campo de direcciones para  $x' = 1$  y algunas soluciones de la misma.

**Ejemplo.** Consideramos:

$$x' = x$$

Cuyas soluciones sabemos que son:

$$x(t) = c \cdot e^t \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Para pensar en el campo de direcciones, pensemos en ir dibujándolo por cada recta horizontal del plano:

- Para puntos  $(t, x)$  de la recta  $x = 0$ , tendremos  $f(t, x) = 0$ , luego para todos los puntos del eje de abscisas tenemos siempre rectas horizontales.
- Para los puntos de la recta  $x = 1$ , tendremos rectas a  $45^\circ$  de inclinación.
- Para  $x = -1$ , tendremos rectas a  $-45^\circ$  de inclinación.
- De igual forma, para la recta  $x = 2$ , tendremos rectas más inclinadas que la de  $45^\circ$ .
- De forma análoga, para los puntos de la recta  $x = -2$ , tendremos rectas más inclinadas que la de  $-45^\circ$ .



En definitiva, cuanto más nos alejamos del eje de abscisas, más pendientes se ponen las rectas del campo de direcciones.

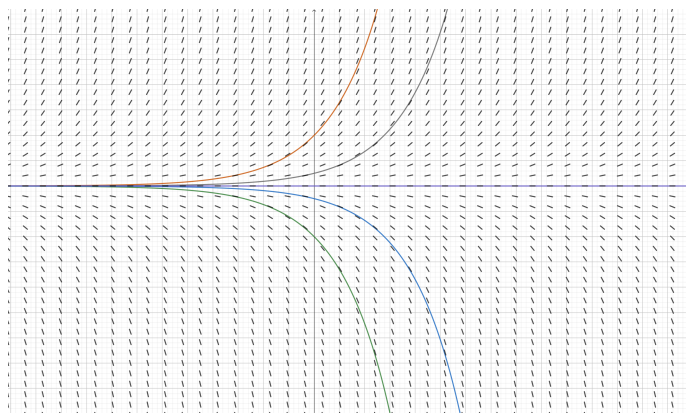


Figura 1.3: Campo de direcciones para  $x' = x$  y algunas soluciones de la misma.

**Ejemplo.** Consideramos:

$$x' = t^2 + x^2$$

Cuyas soluciones se ha demostrado<sup>7</sup> que no tienen fórmula que pueda escribirse con funciones elementales clásicas.

Pese a ello, sabemos que la función que nos da su campo de direcciones es:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto t^2 + x^2 \end{aligned}$$

Para visualizar el campo de direcciones, pensaremos en circunferencias centradas en el origen con distinto radio  $r \in \mathbb{R}_0^+$ :

- Para  $r = 0$ , tenemos la circunferencia formada por el punto  $(0, 0)$ , con  $f(0, 0) = 0$ , luego tenemos que la recta asociada a dicho punto es una recta horizontal.
- Para  $r = 1$ , tenemos que  $t^2 + x^2 = r^2 = 1$  para cada punto  $(t, x)$  de dicha circunferencia, luego tenemos una recta a  $45^\circ$  de inclinación en cada punto de dicha circunferencia.
- Para  $r = 2$ , tenemos que  $t^2 + x^2 = r^2 = 4$  para cada punto de la circunferencia, luego tendríamos una recta de mayor inclinación en dichos puntos.

Podemos ya imaginarnos cuál será el campo de direcciones, el cual podemos graficar gracias a los ordenadores:

<sup>7</sup>No se verá por exceder el conocimiento de la presente asignatura.

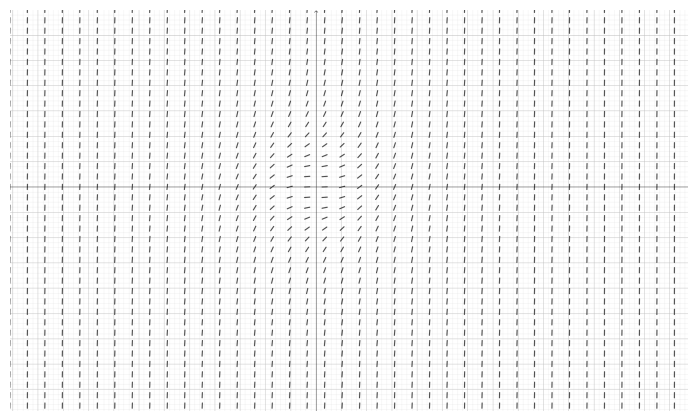


Figura 1.4: Campo de direcciones para  $x' = t^2 + x^2$ .

No conocemos soluciones para esta ecuación diferencial. Sin embargo, observando el campo de direcciones, observamos que las soluciones son funciones crecientes, con límite a  $-\infty$  por la izquierda y a  $+\infty$  por la derecha.

### 1.3. Funciones implícitas

Hasta ahora, hemos trabajado principalmente con funciones definidas en forma explícita  $x = x(t)$ . Sin embargo, en ecuaciones diferenciales es común trabajar con funciones definidas por una ecuación de la forma

$$F(t, x) = 0$$

por lo que tenemos que saber trabajar con ellas.

Cabe destacar que toda función explícita puede ponerse como implícita, pero no toda función implícita dada por una fórmula puede ponerse como función explícita. De esta forma, el estudio que realizaremos a continuación está enfocado a dichas funciones implícitas que no pueden ponerse de forma explícita.

Por lo tanto, si nos encontramos con una ecuación que nos da una función implícita de la cual podemos despejar  $x$ , podemos expresar la función de forma explícita y no será necesario aplicar lo aprendido en esta sección.

**Ejemplo.** La fórmula

$$x - t = 0$$

nos define una ecuación implícita  $x = x(t)$ , ya que dado un  $t \in \mathbb{R}$ , existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifica la fórmula. Sin embargo, dicha función  $x$  podemos expresarla de forma explícita, sacando su fórmula despejando  $x$  de la fórmula anterior:

$$x(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y podremos trabar con ella como una función explícita, algo a lo que ya estamos acostumbrados.

**Ejemplo.** Veamos que la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0 \tag{1.1}$$

nos define una función implícita  $x(t)$ , es decir, que dado un número  $t \in \mathbb{R}$ , existe un único valor  $x \in \mathbb{R}$  que verifique la fórmula (1.1).

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , hemos de probar la existencia y unicidad de  $x \in \mathbb{R}$  tal que verifique la fórmula (1.1). Cuando lo tengamos probado, notaremos  $x(t) = x$  para dicho  $t$  y tendremos probado que la fórmula (1.1) nos define una función implícita.

*Demostración.* Demostremos por un lado la existencia y por otro la unicidad:

**Existencia.**

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , podemos definir el polinomio

$$p_t(x) = x^7 + 3x + t^2$$

Y por ser un polinomio de grado impar, conocemos que al menos tiene una raíz  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifica la fórmula (1.1)<sup>8</sup>.

**Unicidad.**

Derivamos ahora el polinomio  $p_t$ :

$$p'_t(x) = 7x^6 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego es una función estrictamente creciente, por lo que a lo sumo tiene una raíz.

□

Acabamos de ver un ejemplo de fórmula que nos define una única función implícita  $x = x(t)$ . Nos preguntamos a continuación si cualquier fórmula nos provee de una función implícita. En caso de hacerlo, ¿obtenemos funciones derivables? Dicha pregunta nos servirá de paso para probar que la función implícita  $x = x(t)$  del ejemplo anterior es derivable.

1. Como primera observación sencilla, mostramos que hay ecuaciones que no nos definen ninguna función implícita, como:

$$x^2 + t^2 = -1$$

Esto se debe a que, dado  $t \in \mathbb{R}$ , no podemos encontrar ningún  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifique la ecuación.

2. Además, hay ecuaciones que nos dan más de una función implícita, como el clásico ejemplo de la circunferencia:

$$x^2 + t^2 = 1$$

Dicha ecuación nos fabrica dos funciones implícitas que además podemos expresar de forma explícita:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= +\sqrt{1-t^2}, & t \in [-1, 1] \\ x_2(t) &= -\sqrt{1-t^2}, & t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Es contenido de Álgebra I, pero puede deducirse ya que tiene límite a  $-\infty$  por la izquierda y a  $+\infty$  por la derecha, y aplicamos el Teorema de Bolzano.

3. Finalmente, observamos que hay funciones implícitas que no se pueden derivar. Por ejemplo, la fórmula:

$$x^3 - t^2 = 0$$

nos da una función implícita que podemos poner como explícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pero dicha función no es derivable en 0.

En resumen, dada una fórmula que nos relacione dos variables:

$$F(t, x) = 0$$

no podemos asegurar que la función implícita que nos da (en caso de hacerlo) sea derivable, puede pasar cualquier cosa: a veces no define ecuación implícita, a veces define varias, puede definirnos sólo una que no sea derivable, o que sí lo sea, ... No contamos por tanto con una teoría general de ecuaciones implícitas.

Sin embargo, contamos con un resultado bastante útil que ya conocimos en Análisis Matemático I, el Teorema de la Función Implícita<sup>9</sup>. Se trata de un teorema local que da condiciones para que exista la función implícita y sea única, dentro de un entornon suficientemente pequeño.

**Teorema 1.2** (Función Implícita). *Sea  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto y sea*

$$\begin{aligned} F : \quad G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

*una función de clase  $\mathcal{C}^1(G)$ , es decir, que existan las parciales respecto a  $t$  y respecto a  $x$  y que ambas sean continuas.*

*Sea  $(t_0, x_0) \in G$  de forma que  $F(t_0, x_0) = 0$  y se cumpla que:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$

*Entonces, existe una función*

$$\begin{aligned} x : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

*con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto de forma que  $x \in \mathcal{C}^1(I)$  y se verifica:*

1.  $t_0 \in I$ .
2.  $x(t_0) = x_0$ .
3.  $(t, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$ .
4.  $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ .

---

<sup>9</sup>Aunque en Análisis Matemático I se dio el teorema en su forma más general, en esta asignatura nos interesará el caso de  $\mathbb{R}^2$ .

Veremos ahora varios usos prácticos del teorema:

**Ejemplo.** En el caso

$$x^2 + t^2 = 1$$

Tenemos la función

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & x^2 + t^2 - 1 \end{array}$$

que es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 2x \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Buscamos ahora un punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  para aplicar el teorema:

- Ha de ser un punto de la circunferencia de radio 1, para que  $F(t_0, x_0) = 0$ .
- Además, ha de ser  $x_0 \neq 0$ , para que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = 2x_0 \neq 0$$

De esta forma, podemos elegir cualquier punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$  para aplicar el teorema. Por tanto, dado cualquier punto  $t_0 \in ]-1, 1[$ , el teorema nos dice que hay un intervalo abierto  $I$  de forma que  $t_0 \in I \subseteq ]-1, 1[$  en el que la función (ya sea la anterior  $x_1$  o  $x_2$ ) es derivable.

Es cierto que sabíamos ya de antemano la existencia de dichas funciones, pero en caso de no saberlo el Teorema nos garantiza dicha existencia. Este es el primer uso del teorema.

**Ejemplo.** En el caso del ejemplo anterior, la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0$$

ya sabemos que existe la función implícita, pero no sabemos si dicha función es derivable o no. Usaremos el Teorema de la Función Implícita para probar que la función  $x = x(t)$  que nos da la fórmula es derivable.

Sea  $G = \mathbb{R}^2$  y  $F(t, x) = x^7 + 3x + t^2$  que es una función de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 7x^6 + 3 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 7x^6 + 3 > 0$$

Por lo que podemos elegir cualquier punto en el que  $F(t, x) = 0$  para aplicar el teorema, obteniendo que la función  $x$  es derivable.

Este es el segundo uso práctico del teorema, probar de forma fácil que una función implícita que ya conocemos es derivable.

**Ejemplo.** Anteriormente, vimos que la fórmula

$$x^3 - t^2 = 0$$

que define una función implícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

no era derivable. Comprobamos qué hipótesis es la que falla del teorema: Tenemos

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x^3 - t^2 \end{aligned}$$

con parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3x^2 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

luego  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ . En el ejemplo anterior, fallaba la derivabilidad en  $t_0 = 0$ , luego comprobamos por qué la función no es derivable:

En primer lugar, para tener que  $x_0^3 - t_0^2 = 0$  con  $t_0 = 0$  ha de ser  $x_0 = 0$ . Sin embargo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$$

Luego no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita.

### 1.3.1. Derivación implícita

Hasta ahora, tenemos una forma de probar la existencia de funciones implícitas así como su derivabilidad, pero no sabemos cómo derivarlas, lo cual trataremos de resolver a continuación.

Usualmente, tendremos una función

$$\begin{aligned} F : \quad G \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  que verifique las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, de forma que:

$$F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I \tag{1.2}$$

para cierta función  $x = x(t)$  e  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalo abierto. Nuestro objetivo será derivar la expresión anterior.

**Proposición 1.3.** *Dadas unas funciones  $F$  como la definida anteriormente,  $x$  y  $t$  funciones reales de variable real de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  y una función como resultado de la composición de funciones:*

$$s \longmapsto (t(s), x(s)) \longmapsto F(t(s), x(s))$$

que es también una función real de variable real de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , tenemos que:

$$\frac{d}{ds}[F(t(s), x(s))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s), x(s)) \cdot t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s), x(s)) \cdot x'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Usando esta proposición sobre la fórmula (1.2), llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

Que no se encuentra en forma normal. Sin embargo, es usual haber aplicado el Teorema de la Función Implícita antes de este resultado, luego, suponiendo que estamos bajo dichas hipótesis, tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \neq 0$$

en un entorno de  $t$ , por lo que en dicho caso sí que podremos despejar la ecuación diferencial anterior, para expresarla en forma normal:

$$x'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t))}{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))}$$

## 1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones

Al igual que sucede con los polinomios y sus raíces, es mucho más simple construir una ecuación diferencial a partir de una familia de soluciones a obtener la familia de funciones que resuelve una ecuación diferencial.

En esta sección, nos centraremos en cómo construir una ecuación diferencial de primer orden a partir de una familia uniparamétrica de funciones implícitas.

Para ello, nos darán una ecuación del tipo:

$$F(t, x, c) = 0$$

siendo  $c$  el parámetro, y definiéndonos una familia de funciones implícitas, de donde obtenemos la función implícita  $x = x(t)$ , y llegamos a:

$$F(t, x(t), c) = 0$$

y lo que haremos para obtener la ecuación diferencial es derivar:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t), c) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0$$

Que no es una ecuación diferencial, sino una familia de ecuaciones diferenciales, ya que para cada  $c \in \mathbb{R}$  tenemos una ecuación diferencial distinta.

El último paso, por tanto, es tratar de expresar  $c$  en función de  $x$  y de  $t$ , para sustituirlo y obtener finalmente la ecuación diferencial:

$$\left. \begin{array}{l} F(t, x(t), c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Despejar } c} \Phi(t, x, x') = 0$$

No es necesario hacer este proceso de forma rigurosa, ya que lo único que nos pedirán es obtener una ecuación diferencial que tenga por soluciones la familia uniparamétrica de funciones dada. Por tanto, siempre y cuando consigamos este objetivo, podemos responder a la pregunta simplemente dando la ecuación diferencial y probando que, efectivamente, dicha familia es solución de la ecuación.

**Ejemplo.** Hallar la ecuación diferencial que tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x^2 + t^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

En primer lugar, ya sabemos que dicha fórmula nos da una familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c - t^2}, \quad t \in ]-c, c[$$

Tratamos ahora de hallar la ecuación diferencial que nos solicitan, que lo haremos derivando en ambos miembros de la fórmula (1.3):

$$\begin{aligned} (x(t))^2 + t^2 &= c \\ \frac{d}{dt} ((x(t))^2 + t^2) &= \frac{d}{dt}(c) \\ 2xx' + 2t &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, no ha sido necesario despejar  $c$  para sustituirlo al final del cálculo anterior, ya que directamente ha desaparecido de la ecuación diferencial. De esta forma, la ecuación diferencial buscada es:

$$2xx' + 2t = 0$$

Que podemos expresar en forma normal como:

$$x' = \frac{-t}{x}$$

*Observación.* Notemos que acabamos de aprender a resolver la ecuación diferencial

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c - t^2} \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad t \in ]-c, c[$$

Para el dominio de la función hemos elegido el intervalo abierto, ya que al ser una solución de una ecuación diferencial, tiene que estar definida en un abierto conexo, tal y como concretamos en la definición de una solución de una ecuación diferencial.

**Ejemplo.** Buscar una ecuación diferencial que tenga como soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$\frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \sin t = c \quad (1.4)$$

Tendríamos que  $F(t, x, c) = \frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \sin t - c$  y ahora derivaremos de forma implícita, pensando que la fórmula nos da una función  $x = x(t)$ :



$$\frac{dF}{dt}(t, x, c) = e^{cx}x' - 2x'x - \cos t = 0 \quad (1.5)$$

Ahora, nos disponemos a eliminar el parámetro  $c$ . Despejando en la fórmula (1.5) llegamos a que:

$$\begin{aligned} e^{cx} &= \frac{2xx' + \cos t}{x'} \\ cx &= \ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right) \\ \frac{1}{c} &= \frac{x}{\ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right)} \end{aligned}$$

Y ahora sustituyendo  $c$  y  $\frac{1}{c}$  en (1.4), tenemos que la ecuación diferencial buscada es:

$$\frac{x}{\ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right)} \frac{2xx' + \cos t}{x'} - x^2 - \sin t - \frac{1}{x} \ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right) = 0$$

## 1.5. Problemas geométricos

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales es hallar curvas exigiendo condiciones sobre sus tangentes o normales. Por ejemplo, podemos tratar de hallar la curva cuyas normales sean todas coincidentes en un mismo punto.

**Notación.** En esta sección haremos un cambio de notación, ya que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ya no serán movimientos donde tratamos de expresar la posición  $x$  de un móvil en función del tiempo  $t$ ,  $x = x(t)$ ; sino que las soluciones serán curvas geométricas, por lo que trataremos de, dada una abscisa  $x$ , hallar la coordenada en las ordenadas  $y$  que nos diga un punto de la curva,  $y = y(x)$ .

De esta forma, sustituiremos la notación que venimos usando de las ecuaciones diferenciales  $F(t, x) = 0$  por la notación  $F(x, y) = 0$ .

Aunque toda curva en el plano puede expresarse con una ecuación implícita (esto no sucede con explícitas), supondremos siempre que las curvas las podremos poner en explícitas, con la finalidad de que nos aparezcan siempre ecuaciones de primer orden (usando ecuaciones paramétricas, por ejemplo, obtenemos sistemas de ecuaciones).

De esta forma, trabajaremos con curvas  $y = y(x)$  con  $x \in I$  intervalo abierto, siendo  $y \in \mathcal{C}^1(I)$ <sup>10</sup>.

### Rectas tangentes a una curva

Sabemos ya que, dada una curva  $y = y(x)$ , podemos encontrar en cada punto  $(x, y(x))$  una recta tangente a dicha curva. A medida que movemos el punto por la

<sup>10</sup>Con vistas para derivar y aplicar el Teorema de la Función Implícita.

curva, vamos obteniendo todo el haz de rectas que son tangentes a dicha curva.

Dado un punto  $(x, y(x))$  de una curva  $y = y(x)$ , la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto viene dada por:

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

siendo  $u$  y  $v$  las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación<sup>11</sup>.

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , el punto  $(x, y(x))$  nos da una recta tangente a la curva por dicho punto. Si movemos la variable  $u$ , nos estaremos moviendo a lo largo de la recta tangente. Si ahora también movemos  $x$ , nos estaremos moviendo por todo el haz de rectas.

### Rectas normales a una curva

Dada una curva  $y = y(x)$ , podemos encontrar también en cada punto  $(x, y(x))$  una recta normal a dicha curva (esto es, que sea perpendicular a la recta tangente en dicho punto) que pase por el mismo punto.

Para hallar la ecuación de dicha recta, pensamos en que debe pasar por el punto  $(x, y(x))$  y en que debe ser perpendicular a la recta tangente. De esta forma, si  $m_1$  y  $m_2$  son las pendientes de las rectas tangente y normal respectivamente, tenemos que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \implies m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Como la pendiente en la recta tangente es  $m_1 = y'(x)$ , tenemos ya la ecuación de la recta normal a una curva en el punto  $(x, y(x))$ , siempre y cuando  $y'(x) \neq 0$ :

$$v - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u - x) \quad (1.6)$$

siendo  $u$  y  $v$  las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación.

Sin embargo, podemos expresar dicha ecuación como:

$$y'(x)(v - y(x)) = x - u$$

Y ya podremos considerarla también cuando  $y'(x) = 0$ .

**Ejemplo.** Buscamos la curva para la que todas las rectas normales pasan por el origen<sup>12</sup>.

Para ello, buscamos expresar  $y$  como función de  $x$  para obtener la curva deseada:  $y = y(x)$ . Cuando vamos considerando todas las rectas normales, lo que hacemos es mover la ecuación de la recta normal por los puntos  $(x, y(x))$  que cumplen la curva.

<sup>11</sup>Notemos que no podemos usar  $x$  e  $y$  como variables por ser ya un punto que hemos fijado de la curva por el que queremos hacer pasar la recta tangente.

<sup>12</sup>Notemos que si tenemos otro punto, podemos trasladar todo el problema al origen, trasladando de nuevo la solución a dicho punto.

Debemos imponer que todas las rectas normales de ecuación (1.6) pasen por el origen, es decir, que la ecuación de las rectas normales se cumpla para el punto  $(0, 0)$  siempre. Esto sucede cuando  $u = v = 0$ , para cada punto  $(x, y(x))$  de la curva.

Luego se cumple que:

$$y'(x)y(x) = x$$

Ecuación diferencial que no está en forma normal:

$$y'y + x = 0$$

Pasaremos a resolverla con un truco que aprenderemos en el Capítulo 3:

Para ello, buscamos expresar la ecuación diferencial como la derivada de una expresión igualada a 0, luego esta nueva expresión será constante, y obtendremos una ecuación que nos defina una función implícita:

$$\begin{aligned} y'(x)y(x) + x &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) &= 0 \\ \frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 &= c \quad c \in \mathbb{R}^+ \\ (y(x))^2 + x^2 &= k \end{aligned}$$

Dicha curva es una circunferencia centrada en el origen de radio  $k^2$ . Estamos buscando la solución en explícitas, luego despejamos y obtenemos:

$$y(x) = \pm \sqrt{k - x^2} \quad x \in ]-\sqrt{k}, \sqrt{k}[$$

(Hemos puesto el intervalo abierto por ser solución de una ecuación diferencial, luego debe estar definida en un abierto).

### 1.5.1. Trayectorias ortogonales

Dada una familia  $\mathcal{F}$  de curvas uniparamétricas en la plano mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, c) = 0 \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

de forma que por cada punto del plano pase una curva de este tipo, buscamos otra familia  $\mathcal{G}$  de curvas uniparamétricas de forma que corten ortogonalmente a las curvas de la familia  $\mathcal{F}$ . Llamaremos a las curvas de  $\mathcal{G}$  trayectorias ortogonales a las curvas de  $\mathcal{F}$ .

El procedimiento a seguir será obtener la ecuación diferencial que nos define a la familia  $\mathcal{F}$ , de la cual obtendremos la ecuación diferencial que define a la familia  $\mathcal{G}$ , obligando a que el producto de las derivadas de las curvas sea  $-1$ . Finalmente, resolveremos esta segunda ecuación diferencial, para obtener la ecuación que nos defina la familia de curvas uniparamétricas del plano.

Por tanto, con vistas a obtener la ecuación diferencial que define a la familia  $\mathcal{F}$ , derivaremos la ecuación (1.7):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' = 0 \quad (1.8)$$

Ahora, juntaremos las expresiones (1.7) y (1.8) para eliminar el parámetro  $c$ , obteniendo la ecuación diferencial de la familia  $\mathcal{F}$ , de la forma que aprendimos en la Sección 1.4 y la pondremos en forma normal:

$$y' = f(x, y)$$

Suponiendo que podemos dividir, la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales  $\mathcal{G}$  será:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Ahora, bastará resolver la ecuación diferencial obtenida para obtener una ecuación implícita que nos define la familia uniparamétrica de funciones:

$$G(x, y, k) = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo.** Demostrar que las trayectorias ortogonales a la familia:

$$x^2 + y^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+$$

son las rectas que pasan por el origen.

Para ello, derivaremos dicha expresión entendiendo que  $y$  está en función de  $x$ :

$$2x + 2yy' = 0$$

Suponiendo que  $y \neq 0$ , llegamos a la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Suponiendo ahora que  $x \neq 0$ , llegamos a la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{y}{x}$$

A poco que se piense, llegamos a que tiene por soluciones la familia

$$y(x) = k \cdot x \quad k \in \mathbb{R}$$

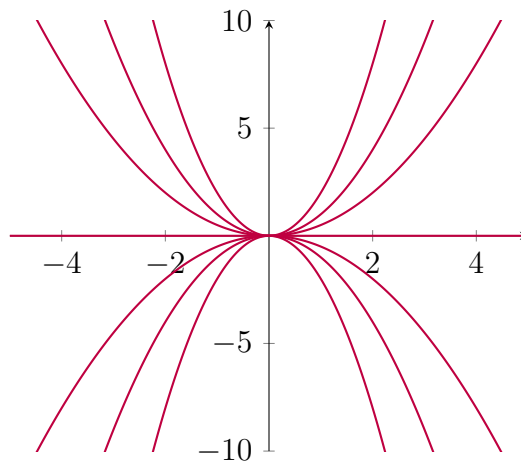
Que son las rectas que pasan por el origen.

**Ejemplo.** Dada siguiente ecuación que nos describe una familia uniparamétrica  $\mathcal{F}$ :

$$y = cx^2 \quad c \in \mathbb{R}$$

Buscamos la familia de trayectorias ortogonales.

La familia  $\mathcal{F}$  es la familia de parábolas con vértices en el origen:



Con vistas a obtener la ecuación diferencial que nos describa a la familia, derivamos:

$$\begin{aligned}y &= cx^2 \\y' &= 2cx\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos el valor de  $c$ :

$$c = \frac{y}{x^2}$$

Que sustituimos en la segunda expresión, obteniendo la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

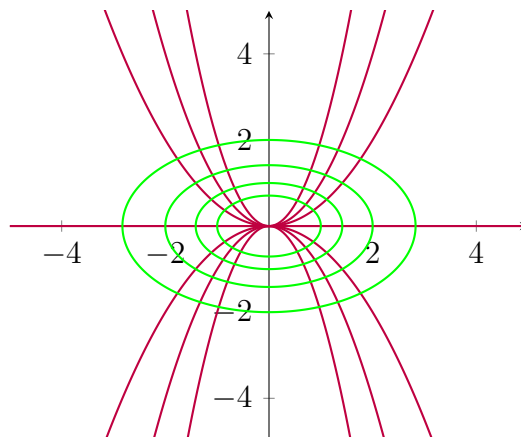
Ahora, escribimos la ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

Ecuación diferencial a resolver, mediante el mismo truco que antes:

$$\begin{aligned}2yy' + x &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( y^2 + \frac{x^2}{2} \right) &= 0 \\ y^2 + \frac{x^2}{2} &= k \quad k \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Que son las elipses de eje mayor  $\sqrt{2}$  (en el de abscisas) y eje menor 1 (cuando  $k = 1$ ):



## 1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Nos centramos ahora en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de  $d \in \mathbb{N}$  ecuaciones será de la forma:

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_d) \quad i = 1, \dots, d$$

Y nuestras incógnitas serán:

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_d = x_d(t)$$

Las familias de funciones que obtendremos ahora dependerán de  $d$  parámetros.

**Ejemplo.** Un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1 \end{cases}$$

Una solución que podemos ver fácil es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sin t \\ x_2(t) &= \cos t \end{aligned}$$

Otra es:

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, llegamos a la familia de soluciones:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k \sin t \\ x_2(t) &= k \cos t \\ k &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Que no son todas las soluciones, ya que sólo tenemos una familia uniparamétrica. Para hallar otro parámetro, podemos cambiar la fase de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b \sin(t + a) \\ x_2(t) &= b \cos(t + a) \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En el último Capítulo, aprenderemos a demostrar que esta familia nos da todas las soluciones. Dicha familia se puede escribir también como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \sin t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.6.1.** Demostrar que ambas familias de funciones son las mismas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b \sin(t + a) \\ x_2(t) &= b \cos(t + a) \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \sin t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## Curvas en paramétricas

Volveremos a la notación  $x$  e  $y$  para las variables, y nos centraremos en las ecuaciones paramétricas. Esto es, dar  $x$  e  $y$  en función de una variable independiente  $t$ , por lo que ahora tendremos dos funciones: Ahora, tendremos dos funciones

$$\begin{aligned} x, y : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t), y(t) \end{aligned}$$

La diferencia entre implícitas y paramétricas es que ahora pensamos en una curva como un movimiento, no como un lugar geométrico que cumple una cierta propiedad:

$$F(x, y) = 0$$

Dado un instante de tiempo  $t$ , el móvil que realiza el movimiento se encontrará en el punto  $(x(t), y(t))$ .

Podemos encontrar muchas parametrizaciones para una misma curva (ya que puede recorrerse de distintas formas).

**Ejemplo.** Podemos dibujar  $\frac{3}{4}$  de una circunferencia mediante la curva en paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ t \in I &= \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

**Definición 1.2** (Órbita). Dada una curva en paramétricas mediante dos funciones

$$\begin{aligned} x, y : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t), y(t) \end{aligned}$$

El lugar geométrico de todos los puntos del plano por el que pasa dicho movimiento es:

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

al que llamaremos órbita.

### 1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano

Dado un sistema autónomo en el plano, es decir, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (para así obtener una curva plana) de forma que la variable independiente  $t$  no aparezca en las ecuaciones del sistema (aunque  $x$  e  $y$  sean dependientes de  $t$ ). Dicho sistema será de la forma:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Para ciertas funciones

$$\begin{aligned} f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), g(x, y) \end{aligned}$$

Con  $D$  un conjunto abierto y conexo,  $f$  y  $g$  funciones continuas.

Tratamos de buscar soluciones

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Buscar las soluciones de cualquier sistema de esta forma es demasiado difícil. Nos centraremos por ahora simplemente en calcular las órbitas del sistema. Esto es, sabremos calcular el lugar geométrico de los puntos del plano por el que pasan las soluciones, pero no sabremos calcular cómo son los movimientos que describen las soluciones.

De forma **NO RIGUROSA**, en física se da un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Y se saca la órbita poniendo  $y$  en función de  $x$  dividiendo:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

En lo sucesivo, trataremos de dar un fundamento teórico a esta cuenta, con el fin de aprender por qué podemos realizarla y dar condiciones para cuándo poder hacerlo.

**Ejemplo.** Vamos a ver un ejemplo en el que la cuenta anterior funciona. Tomamos el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Del que podemos coger como una solución las funciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sin t \\ y(t) &= -2 \cos t \\ t &\in ]0, \pi[ \end{aligned}$$

Suponiendo que podemos dividir:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Que es la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y}$$

cuyas soluciones son

$$y^2 + x^2 = c$$

La ecuación en implícitas de la órbita para dicha solución concreta es:

$$y^2 + x^2 = 4$$

Luego el cálculo parece que funciona



## Función inversa

Hagamos un breve repaso de lo que sabemos sobre funciones inversas.

- Podemos pensar en la noción conjuntista de función inversa: dada una función  $f : I \rightarrow J$ , si esta función es biyectiva, podemos encontrar una función  $f^{-1} : J \rightarrow I$  tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_I \\ f \circ f^{-1} &= id_J \end{aligned}$$

- O también podemos pensar en la noción clásica de función inversa: si tenemos una variable  $x$  dependiente de  $t$ :  $x = f(t)$ , bajo unas ciertas condiciones podemos encontrar una función  $g$  de forma que hagamos  $t$  depender de  $x$ :  $t = g(x)$ .

Para este apartado, dada una función:

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto, siempre que esta sea inyectiva, obtendremos una nueva función restringiendo el codominio de  $f$  a  $f(I)$ , una función biyectiva que sí tendrá inversa, a la que notaremos por  $f^{-1}$ .

**Proposición 1.4.** *Toda función continua e inyectiva es estrictamente monótona*<sup>13</sup>.

A partir del resultado, al buscar funciones que puedan tener inversa, buscaremos funciones estrictamente monótonas.

**Proposición 1.5.** *Sea una función*

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

*derivable en  $I$  con  $J = f(I)$  y*

$$f'(t) > 0 \quad \forall t \in I$$

*Entonces, dicha función tiene inversa y además es derivable en  $J$ , con:*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

---

<sup>13</sup>El lector debe estar familiarizado con esta Proposición y la siguiente, al ser contenido de Cálculo II.



## 2. Relaciones de Problemas

### 2.1. Ecuaciones y sistemas

**Ejercicio 2.1.1.** En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que  $M$  es la cantidad total de materia a memorizar y  $A(t)$  es la cantidad de materia memorizada a tiempo  $t$ . Determine una ecuación diferencial para  $A(t)$ . Encuentre soluciones de la forma  $A(t) = a + be^{\lambda t}$ .

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde  $c \in \mathbb{R}$  es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos.

**Ejercicio 2.1.2.** Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de  $y(x)$  verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.
2. El grafo de  $y(x)$  verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

**Ejercicio 2.1.3.** En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde  $x(t)$  es la cantidad de compuesto a tiempo  $t$ ,  $k > 0$  es una constante de proporcionalidad y  $\beta > \alpha > 0$ . Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Ejercicio 2.1.4.** Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1.  $xy = k$ ,
2.  $y = kx^4$ ,
3.  $y = e^{kx}$ .

**Ejercicio 2.1.5.** Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que  $x(0) = 0$ , demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

**Ejercicio 2.1.6.** Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables  $y(x)$  se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma  $y' = f(x, y)$  que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.
3. La misma cuestión para una ecuación del tipo  $g(y, y') = 0$ .

**Ejercicio 2.1.7.** Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje  $x$  positivo tirando de una cuerda de longitud  $s$  atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida  $(0, s)$ . La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

*Observación.* Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

**Ejercicio 2.1.8.** Demuestre que si  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{2.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{2.2}$$

Encuentre una solución de  $(x')^2 + x^2 = 1$  que no sea solución de (2.1).

*Demostración.* Sea  $I \subset \mathbb{R}$  el intervalo de definición de  $x(t)$  solución de (2.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (x'(t))^2 + x^2(t). \end{aligned}$$

Por ser  $x$  una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que  $x \in C^2(I)$ . Por tanto,  $x, x' \in C^1(I)$  y, por tanto  $f$  es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t) [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto,  $f'(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , lo que implica que  $f$  es constante en  $I$ . Es decir, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución  $x(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}(x'(t))^2 + x^2(t) &= 0^2 + 1^2 = 1, \\ x''(t) + x(t) &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.9.** Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla  $y = -1$  a la orilla opuesta  $y = 1$ . La corriente es uniforme, con velocidad  $v_R > 0$  y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante  $v_N > 0$  y apunta siempre hacia una torre situada en el punto  $T = (2, 1)$ . Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\end{aligned}$$

describen la posición  $(x, y)$  de la nadadora en el instante  $t$ ; es decir  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.
2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita  $y = y(x)$ .

**Ejercicio 2.1.10.** Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

1.  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ,
2.  $x = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$ .

**Ejercicio 2.1.11.** Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx_0 + \varphi(x_0)$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.
2. Suponiendo que  $\varphi(x) = x^2$ , demuestre que  $x(t) = -\frac{t^2}{4}$  también es solución.
3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

**Ejercicio 2.1.12.** Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.