LMD

Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

LMD
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Antonio Romero Martín
Carolina González Ríos
Daniel Gómez García
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Lógica y Métodos Discretos.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingienería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Francisco Miguel García Olmedo.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2. Inducción y Recurrencia.

Fecha 26 de abril de 2024.

Ejercicio 1 (Inducción)**.** Demuestre por inducción que para todo número natural $n \in \omega$ existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

Notación. De aquí en adelante, para cualquier número natural $n \in \omega$, $f_n(x, y)$ denotará un polinomio.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

  Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(k)$ es cierto para $k \in \omega,\ 0 \leqslant k \leqslant n$, es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n + 1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - y^{n+1} + x^n y - x^n y + x y^n - x y^n \\ &= (x + y)(x^n - y^n) - xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\ &\overset{(*)}{=} (x + y)(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy(x - y) \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \\ &= (x - y) \left[(x + y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \right] \\ &= (x - y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^{k+1} \right] \\ &= (x - y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^0 y^n \right] \\ &= (x - y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción, puesto que $n, n - 1 \leqslant n$. Por tanto, $P(n + 1)$ es cierto.

Así pues, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x, y)$ dado por:

$$f_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

tal que cumple:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

$\square$

Veamos ahora para cada valor de $n \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ el valor de $f_n(x, y)$:

- Para $n = 0$:

$$f_0(x, y) = \sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$$

  Efectivamente, se tiene que:

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = (x - y) \cdot 0$$

- Para $n = 1$:

$$f_1(x, y) = \sum_{k=0}^{0} x^{0-k} y^k = 1$$

  Efectivamente, se tiene que:

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \cdot 1$$

- Para $n = 2$:

$$f_2(x, y) = \sum_{k=0}^{1} x^{1-k} y^k = x + y$$

  Efectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

- Para $n = 3$:

$$f_3(x, y) = \sum_{k=0}^{2} x^{2-k} y^k = x^2 + xy + y^2$$

  Efectivamente, se tiene que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Observación. Proponemos ahora una demostración alternativa para la existencia de $f_n(x,y)$.

Demostración. La demostración es mediante el segundo principio de inducción matemática según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{“ } x^n - y^n = (x-y)\cdot f_n(x,y) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x-y)\cdot 0 \end{aligned}$$

  Como $0 = 0\cdot(x-y)$, $Q(0)$ es cierto.

- Supongamos como hipótesis de inducción que n es un número natural y que $Q(k)$ es cierto para todo $k \in \omega,\ 0 \leqslant k < n$. Es decir, que:

$$x^k - y^k = (x-y)\cdot f_k(x,y)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $Q(n)$ es cierto. Distinguimos dos casos:

  - Para n par:
    Tenemos que $n = 2m$ para algún $m \in \omega$, $m < n$. Por tanto:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m} - y^{2m} \\ &= (x^m)^2 - (y^m)^2 \\ &= (x^m - y^m)(x^m + y^m) \\ &\overset{(*)}{=} (x-y)f_m(x,y)(x^m + y^m) \\ &= (x-y)f_n(x,y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

  - Para n impar:
    Tenemos que $n = 2m+1$ para algún $m \in \omega$, $2m < n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m+1} - y^{2m+1} = x\cdot x^{2m} - y\cdot y^{2m} \\ &= x\cdot x^{2m} - x\cdot y^{2m} + x\cdot y^{2m} - y\cdot y^{2m} \\ &= x(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x-y) \\ &\overset{(*)}{=} x(x-y)f_m(x,y) + y^{2m}(x-y) \\ &= x(x-y)f_m(x,y) + y^{2m}(x-y) \\ &= (x-y)(x\cdot f_m(x,y) + y^{2m}) \\ &= (x-y)f_n(x,y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $2m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

Así pues, por el segundo principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x, y)$ tal que $x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$. $\square$

Ejercicio 2 (Recurrencia)**.** Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \qquad n \geqslant 0$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple con las condiciones iniciales $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

La única raíz de la ecuación característica es $x = 3$ con multiplicidad doble. Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

La función de ajuste es $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Calculamos primero $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+2} + c_4(n+2)^2 \cdot 3^{n+2} = 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n \\
x_{n+1}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+1} + c_4(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} = 2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n
\end{aligned}$$

Usando que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= x_{n+2}^{(p)} - 6x_{n+1}^{(p)} + 9x_n^{(p)} \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\
&\quad\; - 6(2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n) + \\
&\quad\; + 9(c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n) \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\
&\quad\; - 12c_3 \cdot 2^n - 18c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n + \\
&\quad\; + 9c_3 \cdot 2^n + 9c_4 n^2 \cdot 3^n \\
&= 2^n(4c_3 - 12c_3 + 9c_3) + 3^n(9c_4(n^2 + 4n + 4) - 18c_4(n^2 + 2n + 1) + 9c_4 n^2) \\
&= c_3 2^n + c_4 3^n(\cancel{9n^2} + \cancel{36n} + 36 - \cancel{18n^2} - \cancel{36n} - 18 + \cancel{9n^2}) \\
&= c_3 2^n + 18 \cdot c_4 3^n
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} c_3 = 3 \\ 18c_4 = 7 \Longrightarrow c_4 = {}^7\!/_{18} \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n = \\ &= 3^n \left(c_1 + c_2 n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales, sabiendo que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 4$:

$$x_0 = 1 \Longrightarrow 1 = 3^0 \left(c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot 0^2 \right) + 3 \cdot 2^0 = c_1 + 3 \Longrightarrow c_1 = -2$$
$$x_1 = 4 \Longrightarrow 4 = 3^1 \left(-2 + c_2 \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot 1^2 \right) + 3 \cdot 2^1 = \cancel{-6} + 3c_2 + \frac{7}{6} + \cancel{6} \Longrightarrow c_2 = \frac{4 - 7/6}{3} = \frac{17}{18}$$

Por tanto, para el caso particular dado tenemos que la solución de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= 3^n \left(-2 + \frac{17}{18} n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \\ &= 3^n \left(-2 + \frac{17n + 7n^2}{18} \right) + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$