


# Ecuaciones Diferenciales I
# Examen IV

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2016-17.

**Grupo** B.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Primer parcial.

**Fecha** 16 de marzo de 2017.

**Ejercicio 1.** Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano $(x, y)$.

En primer lugar, necesitamos encontrar la ecuación diferencial que define a las curvas dadas. Derivando implícitamente, obtenemos:

$$y + x \cdot y' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \vee \\ D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Como sabemos que el producto de pendientes de rectas tangentes es $-1$, y sabiendo la interpretación geométrica de la derivada, podemos afirmar que las trayectorias ortogonales a las curvas dadas son las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_{11} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ D_{12} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ D_{21} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ D_{22} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

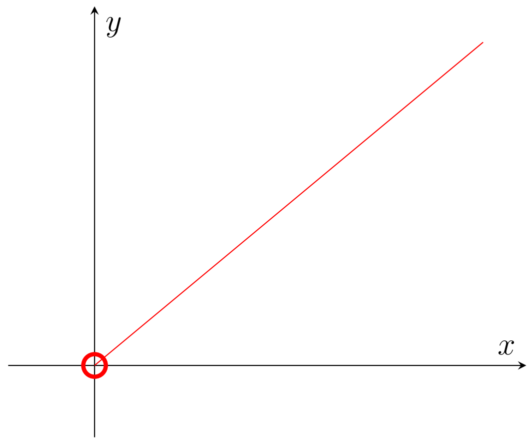
define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

**Ejercicio 3.** Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases}$$

Este admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano $(x, y)$. Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

En primer lugar, hemos de representar la órbita pedida. Como $x(t) = y(t)$, tenemos que la órbita está contenida en la recta $y = x$. No obstante, como tenemos que $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$, la órbita es la parte de la recta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, sin incluir el origen. Esta es:




Para encontrar la ecuación diferencial de las órbitas, hemos de considerar la derivada de la función $y = y(x)$ que define la órbita. Así, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

**Ejercicio 4.** Se considera el cambio de variables

$$\varphi : s = x, y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua? Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$. ¿Qué relación hay entre $f$ y $\hat{f}$?

Para que el cambio de variables sea admisible, hemos de asegurar en primer lugar que es un difeomorfismo de clase $C^1$. Sea el cambio de variable $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (x, t) \end{array}$$

Vemos que $\varphi$ se trata de la simetría axial respecto de la recta $y = x$. Comprobemos entonces que $\varphi$ es un difeomorfismo, para lo cual calculamos su inversa:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (y, s) \end{array}$$

Comprobemos que son inversas:

$$\begin{array}{ll} \varphi^{-1}(\varphi(t, x)) = \varphi^{-1}(x, t) = (t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ \varphi(\varphi^{-1}(s, y)) = \varphi(y, s) = (s, y) & \forall (s, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por tanto, $\varphi^{-1}$ es la inversa de $\varphi$, por lo que $\varphi$ es biyectiva. Además, como sus componentes son proyecciones, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que $\varphi$ es un difeomorfismo.

Calculemos ahora la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) f(t, x) = 0 + 1 \cdot f(t, x) = f(t, x) \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, el cambio de variables es admisible si $f(t, x) \neq 0$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

**Ejercicio 5.** Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ de clase $C^1$ y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función $F$ y un punto $(x_0, y_0)$ en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

*Observación.* Se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de $x_0$.