Algoritmo de Davis-Putnam

Arturo Olivares Martos

14 de marzo de 2025

Resumen

En el presente documento, resolveremos los ejercicios propuestos relativos al Algoritmo de Davis-Putnam.

Ejercicio 1. Dado el conjunto de proposiciones $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, son equivalentes:

1. $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.
2. $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente.

Demostración. Demostraremos el resultado mediante una doble implicación.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

puesto que uno de los factores ($I(\psi_i)$) es 0. Por tanto, $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, tenemos que:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

Por tanto, por ser $\mathbb{Z}_2$ un cuerpo (y en particular un dominio de integridad), tenemos que $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.

□

Ejercicio 2. Comprobar que, al aplicar cada una de las reglas del Algoritmo de Davis-Putnam, el conjunto resultante es inconsistente si y sólo si el de partida lo es (salvo en el caso de la quinta regla, en el que se desdobla el conjunto).

Demostración. Demostraremos cada una de las reglas por separado.

Regla 1. Sea α una tautología y Δ un conjunto de cláusulas. Veamos que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si Δ lo es. Por el Ejercicio 1, sabemos que:

$$\Delta \cup \{\alpha\} \text{ es inconsistente } \iff \left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \wedge \alpha \text{ es inconsistente}$$

Sea ahora I una interpretación arbitaria. Tenemos que $\Delta\cup\{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si:

$$0 = I\left(\left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \wedge \alpha\right) = I\left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \cdot I(\alpha)$$

Por ser α una tautología, $I(\alpha) = 1$. Por tanto, por ser $\mathbb{Z}_2$ un DI, tenemos que:

$$0 = I\left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right)$$

Por tanto, hemos probado que:

$$\left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \wedge \alpha \text{ es inconsistente } \iff \left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \text{ es inconsistente}$$

Por último, usando de nuevo el Ejercicio 1, tenemos que:

$$\Delta \text{ es inconsistente } \iff \left(\bigvee_{\delta\in\Delta} \delta\right) \text{ es inconsistente}$$

Por tanto, hemos probado que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si Δ lo es.

Mediante una sencilla e inmediata inducción sobre el número de tautologías en Δ, se prueba que un conjunto de cláusulas Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es, donde:

$$\Delta' = \Delta \setminus \{\delta \in \Delta \mid \delta \text{ es una tautología}\}$$

Regla 2. Sea L un literal, y sea Δ un conjunto de cláusulas tal que $L \in \Delta$. Definimos:

$$\begin{aligned}\Delta' &= \Delta \setminus \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \vee L = \alpha\}\\ &= \Delta \setminus \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \text{ contiene a } L\}\end{aligned}$$

Si $\Delta' = \emptyset$, consideramos una interpretación I tal que $I(L) = 1$. De esta forma, tenemos que para cada $\alpha \in \Delta$:

$$\alpha = \alpha \vee L \Longrightarrow I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Supongamos ahora que $\Delta' \neq \emptyset$. Consideramos el conjunto:

$$\Delta'' = \{\alpha \in \Delta' \mid \alpha \vee L^c \neq \alpha\} \cup \{\alpha \mid (\alpha \vee L^c \neq \alpha) \;\wedge\; (\exists \alpha' \in \Delta' \text{ con } \alpha' = \alpha \vee L^c)\}$$

Notemos que este conjunto resulta de, partiendo de Δ', añadimos las cláusulas que no contienen a L^c y, de las que lo tienen, eliminamos L^c.

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ'' lo es.

$\Longrightarrow$) Demostraremos el recíproco. Supongamos que Δ'' no es inconsistente, por lo que existe una interpretación $\widetilde{I}$ tal que $\widetilde{I}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta''$.

Recordemos que, para definir una interpretación, basta con asignarle imágenes a las proposiciones atómicas. Equivalentemente, podemos definir una interpretación asignando valores a los literales, aunque hemos de asegurarnos de que $I(\lambda) = 1 + I(\lambda^c)$ para todo literal λ. Consideramos por tanto la interpretación I tal que:

$$I(L) = 1$$

$$I(\lambda) = \widetilde{I}(\lambda) \text{ para todo literal } \lambda \text{ tal que } \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta''} \alpha\right) = \lambda \vee \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta''} \alpha\right)$$

Notemos que simplemente hemos definido I en L y en los literales que aparecen en Δ''. El valor que tomen el resto de literales no nos será de relevacia. Notemos además que está bien definida, puesto que L no aparece en Δ' y por tanto tampoco en Δ''.

Por tanto, para cada $\alpha \in \Delta$:

- Si $\alpha = \alpha \vee L$ (L aparece en α), entonces:

$$I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

- Si $\alpha \neq \alpha \vee L$ (L no aparece en α), entonces $\alpha \in \Delta'$.
  - Si $\alpha = \alpha \vee L^c$ (L^c aparece en α):
    Entonces consideramos $\alpha' \in \Delta''$ resultante de eliminar L^c de α; es decir, $\alpha = \alpha' \vee L^c$. Como $\alpha' \in \Delta''$, tenemos que $I(\alpha') = 1$. Por tanto:

$$I(\alpha) = I(\alpha' \vee L^c) = I(\alpha') + I(L^c) + I(\alpha') \cdot I(L^c) = I(\alpha') = 1$$

  - Si $\alpha \neq \alpha \vee L^c$ (L^c no aparece en α):
    Entonces, $\alpha \in \Delta''$ y por tanto $I(\alpha) = 1$.

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Por el recíproco, tenemos que si Δ es inconsistente, entonces Δ'' también lo es.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que Δ'' es inconsistente, y consideramos una interpretación I arbitraria. Veamos que existe $\gamma \in \Delta$ tal que $I(\gamma) = 0$.

- Si $I(L) = 0$, como $L \in \Delta$ basta con considerar $\gamma = L$.
- Si $I(L) = 1$, entonces $I(L^c) = 0$.
  Por ser Δ'' inconsistente, tenemos que $\exists \alpha \in \Delta''$ tal que $I(\alpha) = 0$.
  - Si $\alpha \in \Delta' \subset \Delta$, entonces basta con considerar $\gamma = \alpha$.
  - Si $\alpha \notin \Delta'$, entonces $\exists \alpha' \in \Delta' \subset \Delta$ tal que $\alpha' = \alpha \vee L^c$. Entonces:

    $$I(\alpha') = I(\alpha \vee L^c) = I(\alpha) + I(L^c) + I(\alpha) \cdot I(L^c) = 0$$

    Por tanto, basta con considerar $\gamma = \alpha'$.

Por tanto, hemos probado que $\exists \gamma \in \Delta$ tal que $I(\gamma) = 0$. Por tanto, Δ es inconsistente.

Regla 3. Sea L un literal, y sea Δ un conjunto de cláusulas verificando:

- $\exists \alpha \in \Delta$ tal que $\alpha = \alpha \vee L$.
- $\nexists \alpha \in \Delta$ tal que $\alpha = \alpha \vee L^c$.

Consideramos el conjunto:

$$\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \neq \alpha \vee L\}$$

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es.

$\Longrightarrow$) Demostraremos el recíproco. Supongamos que Δ' no es inconsistente, por lo que existe una interpretación $\widetilde{I}$ tal que $\widetilde{I}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta'$.

Al igual que hicimos en la Regla 2, consideramos la interpretación I tal que:

$$I(L) = 1$$
$$I(\lambda) = \widetilde{I}(\lambda) \text{ para todo literal } \lambda \text{ tal que } \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta'} \alpha\right) = \lambda \vee \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta'} \alpha\right)$$

Por tanto, para cada $\alpha \in \Delta$:

- Si $\alpha = \alpha \vee L$ (L aparece en α), entonces:

  $$I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

- Si $\alpha \neq \alpha \vee L$ (L no aparece en α), entonces $\alpha \in \Delta'$. Por tanto, $I(\alpha) = 1$.

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Por el recíproco, tenemos que si Δ es inconsistente, entonces Δ' también lo es.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que Δ' es inconsistente. Como $\Delta' \subset \Delta$, tenemos que Δ también lo es.

Regla 4. Sea Δ un conjunto de cláusulas, y sean $C, C' \in \Delta$ dos cláusulas tales que $C' = C' \vee C$; es decir, todos los literales de C están en C'. Consideramos el conjunto:

$$\Delta' = \Delta \setminus \{C'\}$$

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es.

$\Longrightarrow$) Supongamos que Δ es inconsistente. Entonces, para cada interpretación I existe $\alpha \in \Delta$ tal que $I(\alpha) = 0$.

Veamos que $\exists \gamma \in \Delta'$ tal que $I(\gamma) = 0$.

- Si $\alpha \neq C'$, entonces $\alpha \in \Delta'$ y basta con considerar $\gamma = \alpha$.
- Si $\alpha = C'$, entonces:

  $$0 = I(C') = I(C' \vee C) = I(C) + I(C') + I(C) \cdot I(C') = I(C) + 0 + 0 = I(C)$$

  Por tanto, basta con considerar $\gamma = C$.

Por tanto, hemos probado que $\exists \gamma \in \Delta'$ tal que $I(\gamma) = 0$. Por tanto, Δ' es inconsistente.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que Δ' es inconsistente. Como $\Delta' \subset \Delta$, tenemos que Δ también lo es.

$\square$

Ejercicio 3. Demostrar que:

$$\models (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$$

Demostración. Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, eso equivale a demostrar que:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \vee \beta\} \models \gamma$$

Además, sabemos que demostrar esa consecuencia lógica equivale a probar que el siguiente conjunto es inconsistente:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

Para poder aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam, necesitamos transformar las fórmulas en cláusulas. De esta forma:

$$\alpha \to \gamma \equiv \neg\alpha \vee \gamma$$
$$\beta \to \gamma \equiv \neg\beta \vee \gamma$$

Por tanto, el conjunto de cláusulas sobre el cual aplicaremos el Algoritmo de Davis-Putnam (y el cual será inconsistente si y solo si la consecuencia lógica de partida es cierta) es:

$$\Delta = \{\neg\alpha \vee \gamma, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

$$\Delta = \{\neg\alpha \vee \gamma; \neg\beta \vee \gamma; \alpha \vee \beta; \neg\gamma\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\gamma\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta' = \{\neg\alpha \vee \gamma; \neg\beta \vee \gamma; \alpha \vee \beta\} \neq \emptyset$$

$$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \gamma\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta_1 = \{\neg\alpha; \neg\beta; \alpha \vee \beta\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\alpha\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta_1' = \{\neg\beta; \alpha \vee \beta\} \neq \emptyset$$

$$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \alpha\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta_2 = \{\neg\beta; \beta\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\beta\text{. Eliminamos las cláusulas que contienen a } \lambda}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta_2' = \{\beta\} \neq \emptyset$$

$$\boxed{\text{Cont R2. } \lambda^c = \beta\text{. Eliminamos las ocurrencias de } \lambda^c \text{ (no las cláusulas)}}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta_3 = \{\square\}$$

Figura 1: Algoritmo de Davis y Putnam del Ejercicio 3.

Por el Ejercicio 2, sabemos que Δ es inconsistente si y solo si lo es el conjunto obtenido tras aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam. En la Figura 1 se tiene que dicho conjunto es $\Delta_3 = \{\square\}$. Por tanto:

$$\Delta \text{ es inconsistente} \iff \Delta_3 = \{\square\} \text{ es inconsistente}$$

Por tanto, como Δ_3 es inconsistente, tenemos que Δ también lo es. Por tanto, tenemos probado que:

$$\vDash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$$

$\square$