

# Lógica y Métodos Discretos



*Escuela Técnica Superior de Ingenierías  
Informática y de Telecomunicación*

**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24



# Índice general

<b>1. Relaciones de Problemas</b>	<b>5</b>
1.1. Inducción . . . . .	5
1.2. Recurrencia . . . . .	19



# 1. Relaciones de Problemas

## 1.1. Inducción

**Ejercicio 1.1.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para  $n = 0$ :

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene  $P(0)$ .

- Como hipótesis de inducción supondremos que  $n \in \mathbb{N}$  y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.2.** Demuestre que para todo número natural  $n$ :

$$\left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

*Demostración.* En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■  $n = 0$ :

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■  $n = 1$ :

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■  $n > 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

**Ejercicio 1.1.3** (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural  $n$  vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado  $P(n)$  del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base  $n = 0$ :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto,  $P(0)$  es correcto.



- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left( \sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción y en  $(**)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Luego  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  se tiene, como se pedía.  $\square$

*Observación.* El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, a la hora de demostrar que un predicado vale para  $n+1$ , se usa que es cierto para todo  $n \in \{0, \dots, n\}$ .

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

**Ejercicio 1.1.4.** Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

*Demostración.* El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula)  $P(n)$  del tenor:

“ $n$  tiene un factor primo”

donde  $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$  (tenemos que  $i_0 = 2$ ).

Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n$  es un número natural superior a 1 y que  $P(k)$  vale para todo  $1 < k < n$ .

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- $n$  es primo:

En este caso,  $n$  es un factor primo de  $n$  (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso, por lo que se tiene el caso base).

- $n$  no es primo:

Si  $n$  no es primo, existen números naturales  $u$  y  $v$  tales que  $n = uv$  y  $1 < u, v$ . Claro está entonces, que  $1 < u, v < n$ . Por la hipótesis de inducción,  $P(u)$  vale, luego  $u$  tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar  $p$ . Así pues,  $p \mid u$  y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego  $P(n)$  vale.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$  vale  $P(n)$ .  $\square$

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base ( $i_0$ ) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con  $i_0 = 2$ .

**Ejercicio 1.1.5** (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea  $p$  la función dada por:

$$p(a, 0) = 0, \\ p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ ,  $p(a, b) = ab$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado  $P(n)$  del tenor:

“Para todo número natural  $m$ ,  $p(m, n) = mn$ .”

Supongamos como hipótesis de inducción que  $k$  es un número natural y que  $P(k)$  vale para todo  $0 \leq k < n$ . Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$ , (sea cual sea  $m$ ):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego  $P(0)$  vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n)$  vale:

Suponemos aquí que  $n > 0$ . Caben dos casos:

1.  $n \equiv 0 \pmod{2}$  (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n}{2} < n$ .

2.  $n \equiv 1 \pmod{2}$  (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado la hipótesis de inducción, ya que  $\frac{n-1}{2} < n$ .

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural  $n$ , vale  $P(n)$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.6.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 2 \mid (5^n + 3^{n-1}) ”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como  $2 \mid 6$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq b$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como  $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$  y, por hipótesis de inducción, se tiene que  $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$ , hemos visto que  $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.7.** Para todo número natural  $n$  no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) ”$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como  $8 \mid 8$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq b$ , se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he usado el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que  $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$  y, por hipótesis de inducción,  $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ , se tiene que  $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que  $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.8.** Demuestre que para todo número natural  $n$  no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- En el caso base,  $n = 1$ :

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como  $2 \geq \sqrt{2}$ ,  $P(1)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural no nulo y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que  $P(n+1)$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como  $0 \leq 2+3n$ ,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $P(n)$  es cierto, como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.9.** Demuestra que, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base,  $n = 3$ :

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como  $16 < 27$ ,  $P(3)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural mayor que 2 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  mayor que 2, se tiene que  $(n+1)^2 < n^3$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.10.** Demuestre que para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ n^3 < n! ”$$

- En el caso base,  $n = 6$ :

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como  $6 < 20$ ,  $P(6)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural superior a 5 y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en  $(*)$  he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en  $(**)$  he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$  superior a 5, se tiene que  $n^3 < n!$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.11.** Demuestre que, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5.

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 5 \mid 8^n - 3^n ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como  $5 \mid 0$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que  $5 \mid 8^n - 3^n$ , se tiene que  $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ ,  $8^n - 3^n$  es múltiplo de 5, como se pedía.  $\square$

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales. Para ello, emplearemos el mínimo común múltiplo, cuya definición vamos a recordar:

**Definición 1.1** (Mínimo común múltiplo). Sea  $A$  un Dominio de Integridad y  $a, b \in A$ . Un elemento  $m \in A$  diremos que es un **mínimo común múltiplo** (abreviado como mcm) y notado  $m = \text{mcm}(a, b)$  si verifica:

1.  $a \mid m \wedge b \mid m$ ,
2.  $\forall c \in A$  tal que  $a \mid c \wedge b \mid c \implies m \mid c$ .

**Ejercicio 1.1.12.** Demuestra que, para cualesquiera números naturales  $a$  y  $b$ , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

*Demostración.* Distinguimos casos según el valor de  $a$  y  $b$ :

- $a = 0$  o  $b = 0$ :

Tenemos que 0 es un múltiplo común de  $a$  y de  $b$ . Además, es el mínimo múltiplo común de  $a$  y  $b$ , ya que cualquier otro múltiplo común de  $a$  y de  $b$  es mayor que 0.

- $a, b > 0$ :

Sea  $M_{a,b}$  el conjunto de los múltiplos comunes de  $a$  y de  $b$ . Es claro que se tiene que  $0 \in M_{a,b}$ , ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que  $ab \in M_{a,b}$ , ya que  $ab$  es múltiplo de  $a$  y de  $b$ . Como  $a, b > 0$ , se tiene que  $ab > 0$ . Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto,  $v_{a,b}$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$ , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales,  $v_{a,b}$  tiene un mínimo, al que llamaremos  $m_{a,b}$ . Veamos que  $m_{a,b}$  es el mínimo común múltiplo de  $a$  y de  $b$ .

1. Como  $m_{a,b} \in M_{a,b}$ , se tiene que  $a|m_{a,b}$  y  $b|m_{a,b}$ .
2. Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a|m$  y  $b|m$ . Buscamos demostrar que  $m_{a,b}|m$ . Como  $m_{a,b} \neq 0$ , por el Teorema de la División de Euclides, existen únicos  $q, r \in \mathbb{N}$  tales que  $m = qm_{a,b} + r$  con  $0 \leq r < m_{a,b}$ . Por tanto,  $r = m - qm_{a,b}$ , por lo que  $r$  es un múltiplo común de  $a$  y de  $b$ ,  $r \in M_{a,b}$ . Como  $r < m_{a,b}$ , se tiene que  $r \notin v_{a,b}$ , por lo que:

$$r \in M_{a,b} \setminus v_{a,b} = M_{a,b} \setminus (M_{a,b} \setminus \{0\}) = \{0\}$$

Por tanto,  $r = 0$ , por lo que  $m = qm_{a,b}$ , es decir,  $m_{a,b}|m$ , teniendo lo buscado.

Por tanto,  $m_{a,b}$  es el mínimo común múltiplo de  $a$  y de  $b$ , como se pedía.

*Observación.* Notemos que la definición del mínimo común múltiplo no es el mínimo de los múltiplos comunes de  $a$  y de  $b$ , algo en lo que el lector podría caer fácilmente. □

**Ejercicio 1.1.13.** Estime un valor de  $n \in \mathbb{N}$  para el que

$$100^n < n!$$

**Ejercicio 1.1.14** (Ejemplo de principio del buen orden). Sea  $n$  un número natural y sea  $S$  un conjunto de números naturales menores que  $n$ . Demuestre que  $S$  es vacío o tiene máximo.

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que  $S$  es no vacío. Pueden darse dos casos

1.  $S = \{0\}$ ; en este caso,  $S$  tiene máximo y es 0.
2.  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$  (es decir,  $S$  tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea el conjunto de los mayorantes de  $S$ ,  $M(S)$ , dado por:

$$M(S) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \leq m \text{ para todo } x \in S\}$$

Se tiene entonces que  $n \in M(S)$ , por lo que  $M(S) \neq \emptyset$ . Por el principio del buen orden,  $M(S)$  tiene mínimo, al que llamaremos  $m_0$ . Veamos que  $m_0$  es el máximo de  $S$ . Para ello, es necesario demostrar que  $m_0 \in S$  y que  $m_0 \geq x$  para todo  $x \in S$ .

- Como  $m_0 \in M(S)$ , se tiene que  $x \leq m_0$  para todo  $x \in S$ , por lo que efectivamente  $m_0$  es un mayorante de  $S$ .
- Veamos ahora que  $m_0 \in S$ .

*Observación.* A continuación, restaremos 1 a  $m_0$ , considerando  $m_0 - 1$ . Para poder trabajar en  $\mathbb{N}$ , es necesario que  $m_0 \neq 0$ . Como  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , sea  $x_0 \in S \setminus \{0\}$ , por lo que  $x_0 \neq 0$  y  $x_0 \in \mathbb{N}$ . Como  $m_0 \in M(S)$ , se tiene que  $x_0 \leq m_0$ , por lo que  $0 < x_0 \leq m_0$ .



Supongamos que  $x < m_0$  para todo  $x \in S$ . Por tanto:

$$x \leq m_0 - 1 \text{ para todo } x \in S \implies m_0 - 1 \in M(S)$$

Además,  $m_0 - 1 < m_0$ , lo que contradice que  $m_0$  sea el mínimo de  $M(S)$ , por lo que la hipótesis era falsa y  $\exists x_0 \in S$  tal que  $x_0 \geq m_0$ . Como además  $m_0 \geq x_0$  por ser  $x_0 \in S$ , tenemos que  $m_0 = x_0$ , por lo que  $m_0 \in S$ . Por tanto, como  $m_0 \in S \cap M(S)$ , se tiene que  $m_0$  es el máximo de  $S$ .  $\square$

**Ejercicio 1.1.15.** Demuestre mediante inducción que para todo número natural  $n$  tal que  $2 \leq n$  se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Caso base:  $n = 2$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\iff 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \iff 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \iff (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\iff \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$ :

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Por tanto,  $P(2)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supongamos que  $n \in \mathbb{N}$  y que vale  $P(n)$ , es decir

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. En primer lugar, veamos que:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Supongando 1 a cada lado de la desigualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 &\implies (\sqrt{n+1})^2 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \implies \\ &\implies \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \\ &< \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado la hipótesis de inducción. Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \leq 2$ ,  $P(n)$  vale.  $\square$

**Ejercicio 1.1.16.** Demostrar **no inductivamente** que para todo número natural  $n$  se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tenemos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n k &= \left( \sum_{k=0}^n k \right) + \left( \sum_{k=0}^n (n-k) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n k + (n-k) = \sum_{k=0}^n n = n(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Ejercicio 1.1.17.** Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos solo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de superior a 13.

El razonamiento es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado  $P(n)$  del tenor:

“Es posible franquear una carta de  $n$  céntimos con sellos de 3 y 8 céntimos.”

Como hipótesis de inducción, supongamos que  $14 \leq n$  y que  $P(k)$  es cierto para todo  $14 \leq k < n$ . Distinguiamos los siguientes casos:

- Caso base:  $n = 14$ .

Tenemos que  $14 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 8$ , por lo que  $P(14)$  es cierto.

- Caso base:  $n = 15$ .

Tenemos que  $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$ , por lo que  $P(15)$  es cierto.

- Caso base:  $n = 16$ .

Tenemos que  $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$ , por lo que  $P(16)$  es cierto.

- Supongamos que  $n \geq 17$ , por lo que  $14 \leq n - 3 < n$ , y por la hipótesis de inducción, se tiene que  $P(n - 3)$  es cierto. Es decir, existirán  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $n - 3 = 3a + 8b$ . En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n)$  es cierto. Tenemos que:

$$n = (n - 3) + 3 = 3a + 8b + 3 = 3(a + 1) + 8b$$

Por tanto,  $P(n)$  es cierto.

Por tanto, por el segundo principio de inducción, se tiene que para todo número natural  $n$  superior a 13,  $P(n)$  es cierto, como se pedía.

**Ejercicio 1.1.18.** Demuestre que para cualquier número natural  $n$  se tiene que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$“ 2|(n + 1)(n + 2) ”$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$2|1 \cdot 2$$

Como  $2|2$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n + 1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (n + 1 + 1)(n + 1 + 2) - (n + 1)(n + 2) &= (n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2) = \\ &= (n + 2)(n + 3 - n - 1) = 2(n + 2) \end{aligned}$$

Por tanto, como  $2|(n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2)$  y, por hipótesis de inducción,  $2|(n + 1)(n + 2)$ , se tiene que  $2|(n + 1 + 1)(n + 1 + 2)$ . Por tanto,  $P(n + 1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , se tiene que  $2|(n + 1)(n + 2)$ , como se pedía.  $\square$

**Ejercicio 1.1.19.** Demuestre que para cualquier número natural  $n$  se tiene que:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

*Demostración.* La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado  $P(n)$  del tenor:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

- En el caso base,  $n = 0$ :

$$6 \mid 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Como  $6 \mid 0$ ,  $P(0)$  es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que  $n$  es un número natural y que  $P(n)$  es cierto, es decir, que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que  $P(n+1)$  es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) &= (n+1)(n+2)[n+3-n] = \\ &= 3(n+1)(n+2) \stackrel{(*)}{=} 3 \cdot 2k = 6k\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos empleado el Ejercicio 1.1.18. Por tanto, como se tiene que  $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)$  y, por hipótesis de inducción,  $6 \mid n(n+1)(n+2)$ , se tiene que  $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$ . Por tanto,  $P(n+1)$  es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural  $n$ , se tiene que  $6 \mid n(n+1)(n+2)$ , como se pedía.  $\square$

## 1.2. Recurrencia

**Ejercicio 1.2.1.** Resuelva la relación de recurrencia dada por  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Particularice el resultado suponiendo que  $n \geq 0$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ .

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz  $r = 2$  de multiplicidad  $m = 2$ . La solución general de la recurrencia por tanto es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Y ahora buscar los valores de  $c_1$  y  $c_2$  usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que  $x_0 = u_0 = 1$  y  $x_1 = u_1 = 3$ , entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\ 3 &= (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right)2^n = (2+n)2^{n-1}$$

*Observación.* Notemos que distinguimos muy bien la recurrencia en sí, notada por  $u_n$ , de la solución particular de la recurrencia, notada por  $x_n$ .

**Ejercicio 1.2.2.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0$$

El orden  $k$  de la recurrencia es 2 ( $k = 2$ ). La ecuación característica es:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Usando la notación del Teorema visto en Teoría, donde  $r_i$  son las raíces de la ecuación característica y  $m_i$  son las multiplicidades de las raíces, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & m_1 &= 1 \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & m_2 &= 1 \end{aligned}$$

En efecto, se tiene  $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$ , por lo que estamos en las condiciones del Teorema. Si  $\{x_n\}$  es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los valores de  $c_1$  y  $c_2$  se obtendrán a partir de las condiciones iniciales, que no se nos han proporcionado.

**Ejercicio 1.2.3.** Reuelva el problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema entonces  $x_0 = u_0 = 0$  y  $x_1 = u_1 = 1$ . Sabiendo esto, podemos calcular los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1 \\ 1 &= x_1 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1 \sqrt{5} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema por tanto es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Fibonacci*.

**Ejercicio 1.2.4.** Calcular la solución del problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si  $\{x_n\}$  es solución del problema, entonces  $x_0 = u_0 = 2$  y  $x_1 = u_1 = 1$ . Sabiendo esto, podemos calcular los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = 2 - c_1 \\ \\ 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 1 = c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 0 = c_1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \\ &\implies c_1 \sqrt{5} = \sqrt{5} \implies c_1 = 1 \implies c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución por tanto es:

$$x_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Lucas*.

**Ejercicio 1.2.5.** Solucionar la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \quad n \geq 0$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 3^n = c_0 + c_1 3^n$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$3 \cdot 3^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_3 = 3 \\ m_3 = 1 \\ q_3(n) = 3 \\ \deg(q_3(n)) = 0 \end{array} \right\} \quad 3 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 1 \\ q_1(n) = 3 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n \cdot 1^n = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de  $c_2$  y  $c_3$ . Para ello, como sabemos que  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$3^{n+1} + 3 = x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)}$$

Calculemos dichos valores:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= c_2 n \cdot 3^n + c_3 n = n(c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_2(n+1) \cdot 3^{n+1} + c_3(n+1) = (n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= c_2(n+2) \cdot 3^{n+2} + c_3(n+2) = (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = \\ &= (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) - 4(n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) + 3n(c_2 \cdot 3^n + c_3) = \\ &= c_2 3^n [3^2(n+2) - 4 \cdot 3(n+1) + 3n] + c_3 [(n+2) - 4(n+1) + 3n] = \\ &= c_2 3^n [9n + 18 - 12n - 12 + 3n] + c_3 [n + 2 - 4n - 4 + 3n] = \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 = 6c_2 3^n - 2c_3$$

Igualando los coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6c_2 &= 3 \Rightarrow c_2 = 1/2 \\ -2c_3 &= 3 \Rightarrow c_3 = -3/2 \end{aligned}$$



Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n \cdot 3^n - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}(3^n - 3)$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{x_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$x_n = c_0 + c_1 3^n + \frac{n}{2}(3^n - 3) = \left(\frac{n}{2} + c_1\right) 3^n + c_0 - \frac{3n}{2}$$

**Ejercicio 1.2.6.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0 \quad n \geq 0$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la ecuación característica son:

$$z_1 = 2i \quad z_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot (2i)^n + c_2 \cdot (-2i)^n$$

Buscamos ahora expresar la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos. Para ello, tenemos que:

$$|z_1| = |z_2| = 2 \quad \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \quad \theta_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión de  $z_1$  y  $z_2$  en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  y  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Elevando a  $n$ , por el Teorema de Moivre, tenemos que:

$$\begin{aligned} (z_1)^n &= 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ (z_2)^n &= 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \cdot 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] + c_2 \cdot 2^n \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[ (c_1 + c_2) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[ d_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.7.** Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad n \geq 0$$

**Ejercicio 1.2.8.** Calcular el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como “Torres de Hanoi”, en función del número de discos  $n$  con los que cuente.

Para  $n \geq 0$  sea  $u_n$  el número de movimientos necesarios para pasar los  $n$  discos del poste  $A$  al poste  $C$ . Si el puzzle tuviese  $n+1$  discos entonces hacemos lo siguiente:

- Pasamos los  $n$  discos superiores del poste  $A$  al poste  $B$ . Esto nos cuesta  $u_n$  movimientos.
- Pasamos el disco base del poste  $A$  al poste  $C$ . Esto nos cuesta 1 movimiento.
- Pasamos los  $n$  discos superiores del poste  $B$  al poste  $C$ . Esto nos cuesta  $u_n$  movimientos.

Por tanto, lo dicho sugiere la siguiente recurrencia:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es  $k = 1$ . La ecuación característica es:

$$x - 2 = 0$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n \quad c_1 \in \mathbb{C}$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 1 = 1 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$1 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ q_1(n) = 1 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2 \quad c_2 \in \mathbb{C}$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener el valor de  $c_2$ . Para ello, como sabemos que  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$1 = x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} = c_2 - 2c_2 = -c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = -1$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{x_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Como sabemos que  $x_0 = u_0 = 0$  ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_1 \cdot 2^0 - 1 = c_1 - 1 \implies c_1 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = 2^n - 1$$

Notemos que esta es la solución al problema de las Torres de Hanoi. Veamos como ilustración los primeros valores de la sucesión:

$$x_0 = 2^0 - 1 = 0$$

$$x_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$x_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$x_3 = 2^3 - 1 = 7$$

$$x_4 = 2^4 - 1 = 15$$

**Ejercicio 1.2.9.** Sea la sucesión  $\{u_n\}$  definida por:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para  $u_n$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  se tiene:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n = u_{n-1} + n2^n$$

Además, para  $n = 0$  se tiene que:

$$u_0 = \sum_{k=0}^0 k2^k = 0 \cdot 2^0 = 0$$

Por tanto, la expresión recurrente para  $u_n$  es:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n2^n \end{cases} \quad n \geq 1$$

2. Encuentre una fórmula explícita para calcular  $u_n$ .

Encontrar una fórmula explícita para  $u_n$  es equivalente a resolver la recurrencia. Para ello, su polinomio característico es:

$$x - 1 = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$u_n^{(h)} = c_0 \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es:

$$f(n) = n2^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$n2^n \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ m = 0 \\ q(n) = n \\ \deg(q(n)) = 1 \end{cases}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (c_1 + c_2n)2^n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de  $c_1$  y  $c_2$ . Para ello, como sabemos que  $u_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} n2^n &= u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = (c_1 + c_2n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2(c_1 + c_2n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2^{n-1}[2c_1 + 2c_2n - c_1 - c_2(n-1)] = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2n] \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$n2^n = 2^{n-1} \cdot 2n = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2n] \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n = (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia  $\{u_n\}$  es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces  $\{u_n\} = \{u_n^{(h)} + u_n^{(p)}\}$  y entonces:

$$u_n = c_0 + (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que  $u_0 = 0$  ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_0 + (0 - 1)2^{0+1} = c_0 - 2 \implies c_0 = 2$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$u_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

**Ejercicio 1.2.10.** Un ciudadano pide un préstamo por cantidad  $S$  de dinero a pagar en  $T$  plazos. Si  $I$  es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante  $P$  debe hacer al final de cada plazo?

Sea  $u_n$  es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del  $n$ -ésimo plazo, es decir, a continuación del  $n$ -ésimo pago. Entonces, para todo  $0 \leq n \leq T - 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1 + I)u_n - P \end{aligned}$$

El problema entonces se reduce a resolver la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1 + I)u_n - P \quad 0 \leq n \leq T - 1 \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es  $k = 1$ . La ecuación característica es:

$$x - (1 + I) = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es  $f(n) = -P = -Pn^0 \cdot 1^n$ . Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$-P \implies \begin{cases} s = -P \\ q(n) = 1 \\ \deg(q(n)) = 0 \end{cases}$$

Para obtener la multiplicidad del 1 como raíz del polinomio característico, depende del valor de  $I$ . Como la única raíz del polinomio característico es  $1 + I$ , realizamos la siguiente distinción de casos:

- $I = 0$ : En este caso, la raíz del polinomio característico es 1 y por tanto,  $m = 1$ . Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n = c_0(1)^n = c_0x_n^{(p)} = c_1n \cdot 1^n = c_1n$$

Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1(n+1) - (1+I)c_1n = \\ &= c_1[n+1 - n(1+I)] = c_1(1-I) = c_1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0 - Pn$$

Para hallar  $c_0$  y  $P$ , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0 - P \cdot 0 = c_0 \implies c_0 = S \\ 0 &= x_T = c_0 - P \cdot T = S - PT \implies P = \frac{S}{T} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = S - \frac{S}{T}n = S \left(1 - \frac{n}{T}\right)$$

La cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo es:

$$P = \frac{S}{T}$$

- $\frac{I}{m} \neq 0$ : En este caso, la raíz del polinomio característico es  $1+I$  y por tanto,  $m=0$ . Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n x_n^{(p)} = c_1 n^0 \cdot 1^n = c_1$$

Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1 - (1+I)c_1 = -Ic_1 \implies c_1 = \frac{P}{I}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Para hallar  $c_0$  y  $P$ , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0(1+I)^0 + \frac{P}{I} = c_0 + \frac{P}{I} \implies c_0 = S - \frac{P}{I} \\ 0 &= x_T = c_0(1+I)^T + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Por tanto, para hallar la cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo, necesitamos despejar  $P$  de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I} \implies \\ \implies P &= (P - SI)(1+I)^T = P(1+I)^T - SI(1+I)^T \implies \\ \implies P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - I} \end{aligned}$$

La solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1 + I)^n + \frac{P}{I}$$

**Ejercicio 1.2.11.** Encuentre la solución la solución general para la siguiente recurrencia:

$$u_n = u_{n-2} + 2^n + (-1)^n \quad n \geq 2$$

y luego soluciona el problema que surge de ella junto a los valores iniciales:

$$u_0 = u_1 = 2.$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 - 1 = 0 \implies (x + 1)(x - 1) = 0$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

La función de ajuste es  $f(n) = 2^n + (-1)^n$ . Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n$$

Para el cálculo de  $c_3$  y  $c_4$  no intervienen los valores iniciales. Como  $x_n^{(p)}$  es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} 2^n + (-1)^n &= x_n^{(p)} - x_{n-2}^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n - c_3 2^{n-2} - c_4 (n-2)(-1)^{n-2} = \\ &= 2^{n-2}(2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n(c_4 n - c_4(n-2)) = \\ &= 2^{n-2} \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$\begin{cases} 3c_3 = 4 \implies c_3 = 4/3 \\ 2c_4 = 1 \implies c_4 = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

Usando los valores iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \implies c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\ 2 &= x_1 = -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \implies -c_1 + c_2 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2/3 \\ c_1 - c_2 = 1/6 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 5/12 \\ c_2 = 1/4 \end{cases}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia para los valores iniciales dados es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n = \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left( \frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.12.** Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

El orden de la recurrencia es  $k = 2$ . La ecuación característica es:

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3 \cdot 2^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i \implies \begin{cases} r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \\ r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-2 + 2\sqrt{3}i)^n + c_2(-2 - 2\sqrt{3}i)^n$$

Para expresar la solución en términos de senos y cosenos, calculamos el módulo y el argumento de las raíces. El módulo de las raíces es:

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^4} = 4$$

Respecto al argumento de las raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1) &= \frac{\Im(r_1)}{\Re(r_1)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \implies \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{tg}(\theta_2) &= \frac{\Im(r_2)}{\Re(r_2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \implies \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Moivre, es:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left( c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left( c_3 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + c_4 \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \right)$$

- Orden:  $k = 2$ .
- Ecuación característica:  $x^2 + 4x + 16 = 0$  que tiene como raíces

$$r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$



forma polar:

$$\begin{aligned} |r_1| &= 4 \\ \frac{Im(z)/|z|}{1+Re(z)/|z|} &= \frac{\sqrt{3}/2}{1-1/2} \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi/3}{2}\right) \end{aligned}$$

y así

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{Im(z)/|z|}{1+Re(z)/|z|}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Solución homogénea:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left( c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)$$

Solución particular:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= 4^n \left( c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\ x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left( c_3 \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) \right) \\ &= 4^n \left( -16c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\ x_{n+1}^{(p)} &= 4^n \left( 4c_4 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.13** (Función Gamma). Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

**Ejercicio 1.2.14.** Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3^n - 2^n \quad n \geq 1 \\ u_0 &= 2 \end{aligned}$$

y redúzcalo a un problema de recurrencia homogénea.

**Ejercicio 1.2.15.** Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} & n \geq 2 \\ t_n = s_{n-1} + t_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

Solucione y resuelva la primera recurrencia.

**Ejercicio 1.2.16.** Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

**Ejercicio 1.2.17.** Demuestre mediante la teoría de recurrencias que  $0.\bar{9} = 1$ .

*Observación.* Observe que, sin mucho rigor, se podría tener lo siguiente:

$$0.\bar{9} = 3 \cdot 0.\bar{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 +$$