

Álgebra III

Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra III

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Aurora del Río Cabeza.

Descripción Parcial II.

Fecha 21 de mayo del 2025.

Duración 2 horas.

Ejercicio 1 (5 puntos). Responda **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las siguientes cuestiones, junto con una breve justificación de la respuesta.

1. Si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos y $N \subseteq G'$ es un subgrupo normal, entonces $f^*(N) \subseteq G$ es un subgrupo normal.
2. Todo grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.
3. Si H es un subgrupo normal en un grupo G , entonces $Z(H)$ es un subgrupo normal en $Z(G)$.
4. Si todos los subgrupos de un grupo G son normales entonces G es abeliano.
5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de Q_2 sobre un conjunto de 21 elementos.
6. El grupo producto directo $S_5 \times A_5$ tiene una única serie de composición de longitud 3.
7. Si H y K son subgrupos de G , con K normal y H resoluble, entonces el cociente HK/K es resoluble.
8. Sea G un grupo tal que $|G/Z(G)| = pq$, $p < q$, primos. Entonces $q \equiv 1 \pmod{p}$.
9. El centralizador $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$ es isomorfo a D_4 .
10. Todos los p -subgrupos de Sylow de A_5 son cíclicos.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Considera el grupo $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle$:

1. Calcula el orden de ab .
2. ¿Es el subgrupo $H = \langle ab \rangle$ normal?
3. Prueba que el subgrupo $K = \langle a^4 \rangle$ es normal.
4. ¿Se puede dar un morfismo $f : G/K \rightarrow S_4$ tal que $f(aK) = (1\ 2\ 3\ 4)$ y $f(bK) = (2\ 4)$?

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

Ejercicio 1 (5 puntos). Contestamos a cada pregunta, razonando la respuesta:

1. Si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos y $N \subseteq G'$ es un subgrupo normal, entonces $f^*(N) \subseteq G$ es un subgrupo normal.

Verdadero. Si $x \in G$ y $y \in f^*(N)$, entonces $f(y) \in N$. Para ver que $f^*(N) \triangleleft G$ queremos ver que $xyx^{-1} \in f^*(N)$, es decir, que $f(xyx^{-1}) \in N$:

$$f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1} \in N$$

Que pertenece a N por ser $f(x), (f(x))^{-1} \in G'$ y $f(y) \in N$, siendo $N \triangleleft G'$. En definitiva, $xyx^{-1} \in f^*(N)$ para todo $x \in G$ y para todo $y \in f^*(N)$, por lo que $N \triangleleft G$.

2. Todo grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.

Falso. Si consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} ac : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Veamos en primer lugar que es una acción:

$$\begin{aligned} 1x &= 1x1 = x \quad \forall x \in G \\ {}^g h x &= ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = {}^g h x h^{-1} = {}^g ({}^h x) \quad \forall g, h, x \in G \end{aligned}$$

Si consideramos la representación por permutaciones:

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \text{Perm}(G) \\ g &\longmapsto \Phi_g \end{aligned}$$

donde cada $\Phi_g : G \rightarrow G$ viene dada por:

$$\Phi_g(h) = ghg^{-1} \quad \forall h \in G$$

Veamos si $\ker(\Phi) = \{1\}$, en cuyo caso será una acción fiel:

$$\begin{aligned} \ker(\Phi) &= \{g \in G \mid \Phi_g = id\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in G\} \\ &= \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\} = Z(G) \end{aligned}$$

Como hay grupos para los que $Z(G) \neq \{1\}$ (por ejemplo, cualquier grupo abeliano), en algunos casos la acción no será fiel.

3. Si H es un subgrupo normal en un grupo G , entonces $Z(H)$ es un subgrupo normal en $Z(G)$.

Falso. Veamos un ejemplo en el que ni siquiera es subgrupo:

Sea $G = D_3 = \langle r, s \mid r^3 = s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$ y $H = \langle r \rangle$, tenemos que $H \triangleleft G$ y como H es abeliano, $Z(H) = H$. Veamos ahora que $r \notin Z(G)$, ya que:

$$\begin{aligned} r(sr) &= rr^{-1}s = s \\ (sr)r &= sr^2 \end{aligned}$$

Y como $s \neq sr^2$, $r \notin Z(G)$, por lo que $Z(H) \not\subseteq Z(G)$.

4. Si todos los subgrupos de un grupo G son normales entonces G es abeliano.

Falso. Por ejemplo, todos los subgrupos de $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ son normales:

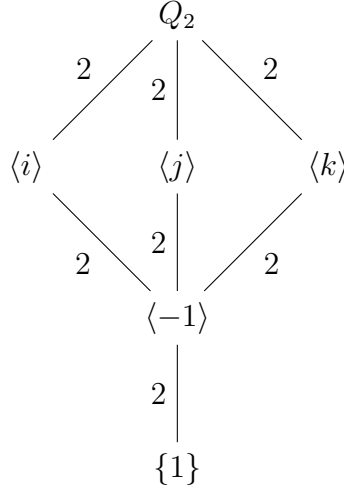


Figura 1: Diagrama de Hasse para los subgrupos del grupo de los cuaternios.

Ya que $[G : \langle i \rangle] = [G : \langle j \rangle] = [G : \langle k \rangle] = 2$, $\{1\} \triangleleft Q_2$ y $\langle -1 \rangle \triangleleft G$ porque:

$$\begin{aligned}
 i(-1)i^3 &= -i^4 = -1 \\
 i^3(-1)i &= -i^4 = -1 \\
 j(-1)j^3 &= -j^4 = -1 \\
 j^3(-1)j &= -j^4 = -1
 \end{aligned}$$

Y como $Q_2 = \langle i, j \rangle$, $\langle -1 \rangle \triangleleft Q_2$. Sin embargo, Q_2 no es abeliano, puesto que:

$$\begin{aligned}
 ij &= k \\
 ji &= -k
 \end{aligned}$$

5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de Q_2 sobre un conjunto de 21 elementos.

Falso. En el ejercicio 12 de la relación de p -grupos vimos que si G es un p -grupo que actúa sobre un conjunto finito X , entonces:

$$|X| \equiv |Fix(X)| \pmod{p}$$

Como Q_2 es un 2-grupo (por ser $|Q_2| = 8 = 2^3$), si X es un Q_2 -conjunto con $|X| = 21$, tenemos que:

$$21 = |X| \equiv |Fix(X)| \pmod{2}$$

Por lo que $|Fix(X)|$ será impar y, en particular, $Fix(X) \neq \emptyset$, por lo que cualquier acción no trivial de Q_2 sobre cualquier conjunto de 21 elementos tendrá siempre al menos un punto fijo.

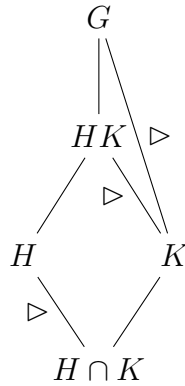
6. El grupo producto directo $S_5 \times A_5$ tiene una única serie de composición de longitud 3.

Falso. Las dos siguientes series son dos series de composición distintas de $S_5 \times A_5$ de longitud 3:

$$\begin{aligned} S_5 \times A_5 &\triangleright A_5 \times A_5 \triangleright \{1\} \times A_5 \triangleright \{1\} \\ S_5 \times A_5 &\triangleright S_5 \times \{1\} \triangleright A_5 \times \{1\} \triangleright \{1\} \end{aligned}$$

7. Si H y K son subgrupos de G , con K normal y H resoluble, entonces el cociente HK/K es resoluble.

Verdadero. Estamos en las condiciones de aplicar el Segundo Teorema de Isomorfía:



Obteniendo que $HK/K \cong H/(H \cap K)$. Como H es resoluble, también lo será cualquier cociente suyo, por lo que $H/(H \cap K)$ será resoluble, y como esta propiedad se mantiene por isomorfismos, HK/K será resoluble.

8. Sea G un grupo tal que $|G/Z(G)| = pq$, $p < q$, primos. Entonces $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Verdadero. Por el Primer Teorema de Sylow, sabemos de la existencia de, al menos, un p -subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$ de orden p y de un q -subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$ de orden q . Por el Segundo Teorema de Sylow, si denotamos por n_t al número de t -subgrupos de Sylow de $G/Z(G)$:

$$\left. \begin{aligned} n_q &\mid p \implies n_p \leq p < q \\ n_q &\equiv 1 \pmod{q} \end{aligned} \right\} \implies n_q = 1$$

Solo hay un único q -subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$: P_q , que será normal en $G/Z(G)$. Si calculamos el número de p -subgrupos de Sylow:

$$\left. \begin{aligned} n_p &\mid q \\ n_p &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned} \right\} \implies n_p \in \{1, q\}$$

Si suponemos que $n_p = 1$, entonces también habrá un único p -subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$: P_p , que también será normal en $G/Z(G)$. Bajo estas condiciones, un resultado visto en teoría nos dice que $G/Z(G)$ es producto directo interno de sus únicos subgrupos de Sylow:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q$$

Sin embargo, como $|P_p| = p$, será $P_p \cong \mathbb{Z}_p$ y análogamente obtenemos que $P_q \cong \mathbb{Z}_q$, de donde:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

Que será un grupo cíclico, por ser \mathbb{Z}_p y \mathbb{Z}_q cíclicos con $\text{mcd}(p, q) = 1$, por lo que (por el ejercicio 4 de la relación de grupos directos) G será abeliano, de donde $Z(G) = G$ y $p = q = 1$, contradicción, ya que p y q eran primos con $p < q$. La contradicción viene de suponer que $n_p = 1$, por lo que será $n_p = q$ y recordamos que:

$$q = n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

9. El centralizador $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$ es isomorfo a D_4 .

Verdadero. Si escribimos la definición del centralizador:

$$C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \{\sigma \in S_4 \mid (\sigma(1)\ \sigma(3))(\sigma(2)\ \sigma(4)) = \sigma(1\ 3)(2\ 4)\sigma^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)\}$$

Las únicas posibilidades para σ son:

$$C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \{1, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

Y sabemos que no hay más (porque $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$, tenemos ya 8 y si añadimos un elemento más ya tenemos que ir a $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = S_4$, que sabemos que es falso). Si pensamos en:

$$D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, rs = sr^3 \rangle$$

Podemos pensar en los elementos $(1\ 2\ 3\ 4)$ (como r) y en $(1\ 3)$ (como s), que cumplen todas las relaciones de los generadores de D_4 :

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3\ 4)^4 &= 1 \\ (1\ 3)^2 &= 1 \\ (1\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3) &= (3\ 2\ 1\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)^3 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo $f : D_4 \rightarrow C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$. Además, f será un isomorfismo por ser $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$ y $|D_4| = |C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))| = 8$.

10. Todos los p -subgrupos de Sylow de A_5 son cíclicos.

Falso. Como $|A_5| = 5!/2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, cualquier subgrupo de orden 4 de A_5 será un 2-subgrupo de Sylow suyo. En particular, lo será:

$$V = \{1, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

Y V no es cíclico, ya que todos sus elementos (salvo el 1) tienen orden 2.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Considera el grupo $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle$. Podemos verlo también como:

$$G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ba = a^3b \rangle = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ab = ba^3 \rangle$$

1. Calcula el orden de ab .

Como $ab \neq 1$, buscamos el menor natural $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de forma que $(ab)^n = 1$:

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= abab = aa^3bb = a^4 \neq 1 \\ (ab)^3 &= (ab)^2ab = a^4ab = a^5b \neq 1 \\ (ab)^4 &= (ab)^2(ab)^2 = a^4a^4 = a^8 = 1\end{aligned}$$

Por lo que será $O(ab) = 4$.

2. ¿Es el subgrupo $H = \langle ab \rangle$ normal?

Como $O(ab) = 4$ y usando el apartado anterior, $H = \langle ab \rangle = \{1, ab, a^4, a^5b\}$. Sin embargo, como:

$$babb = ba = a^3b \notin H$$

H no podrá ser normal en G .

3. Prueba que el subgrupo $K = \langle a^4 \rangle$ es normal.

Como $a^8 = 1$, tenemos que $K = \langle a^4 \rangle = \{1, a^4\}$. Basta probar que $xnx^{-1} \in K$ para todo $n \in K$ (para $n = 1$ es trivial) y $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, ya que $G = \langle a, b \rangle$:

$$\begin{aligned}aa^4a^{-1} &= aa^4a^7 = a^{12} = a^4 \in K \\ a^{-1}a^4a &= a^7a^4a = a^{12} = a^4 \in K \\ ba^4b &= ba^3ab = abab = a^4 \in K\end{aligned}$$

Por lo que $H \triangleleft G$.

4. ¿Se puede dar un morfismo $f : G/K \rightarrow S_4$ tal que $f(aK) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ y $f(bK) = (2 \ 4)$?

Sí, como $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$ y $(2 \ 4)$ cumplen las relaciones que aparecen en la presentación de G (pensando en $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$ como a y en $(2 \ 4)$ como b):

$$\begin{aligned}(1 \ 2 \ 3 \ 4)^8 &= ((1 \ 2 \ 3 \ 4)^4)^2 = 1^2 = 1 \\ (2 \ 4)^2 &= 1 \\ (2 \ 4)(1 \ 2 \ 3 \ 4)(2 \ 4)^{-1} &= (1 \ 4 \ 3 \ 2) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^3\end{aligned}$$

Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo $g : G \rightarrow S_4$ de forma que:

$$\begin{aligned}g(a) &= (1 \ 2 \ 3 \ 4) \\ g(b) &= (2 \ 4)\end{aligned}$$

En vistas de aplicar la Propiedad Universal del grupo cociente, necesitamos que $K \triangleleft G$ y que $K = \{1, a^4\} \subset \ker(g)$. Comprobemos esto segundo:

$$g(1) = 1 \quad g(a^4) = g(a)^4 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^4 = 1$$

Por lo que $K \subset \ker(g)$. Por tanto, por la Propiedad Universal del grupo cociente:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & G/K \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & S_4 \end{array}$$

tenemos que existe un homomorfismo $f : G/K \rightarrow S_4$ que viene dado por:

$$f(xK) = g(x) \quad \forall xK \in G/K$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} f(aK) &= g(a) = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \\ f(bK) &= g(b) = (2 \ 4) \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

Sea G un grupo con $|G| = 5175 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23$, por el Primer Teorema de Sylow sabemos de la existencia de 3-subgrupos de Sylow, 5-subgrupos de Sylow y 23-subgrupos de Sylow de G . Si denotamos por n_t a la cantidad de t -subgrupos de Sylow de G , aplicando el Segundo Teorema de Sylow, obtenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} n_{23} \mid 3^2 \cdot 5^2 = 225 \\ n_{23} \equiv 1 \pmod{23} \end{array} \right\} \implies n_{23} = 1$$

Por lo que solo habrá un único 23-subgrupo de Sylow de G , P_{23} , que será normal en G por ser el único 23-subgrupo de Sylow. Además:

$$\left. \begin{array}{l} n_5 \mid 3^2 \cdot 23 = 207 \\ n_5 \equiv 1 \pmod{5} \end{array} \right\} \implies n_5 = 1$$

Por lo que también habrá un único 5-subgrupo de Sylow de G , P_5 , que también será normal en G .

Como $|P_5| = 5^2 = 25$, P_5 será resoluble. Además, como:

$$|G/P_5| = |G|/|P_5| = 3^2 \cdot 23$$

Tendremos que G/P_5 también será resoluble, de donde G será resoluble.

Finalmente, todos los grupos de este orden tendrán la misma longitud, ya que por ser G resoluble, sus factores de composición serán grupos cíclicos de orden primo, y las únicas posibilidades a considerar como factores son cada uno de los grupos cíclicos de orden primo asociados a la descomposición de 5175 en primos, es decir:

$$\mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_{23}$$

Por lo que la longitud de una serie de composición de G será siempre 5.