

Geometría I

Examen XIV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen XIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2025

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero.

Descripción Convocatoria ordinaria.

Fecha 17 de enero de 2025.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). En el espacio \mathbb{R}^4 , con vectores (x, y, z, t) , y para todo a real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, -a, -1)\}), W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Calcula, para todo a , unas ecuaciones implícitas de U y una base de W .
- (b) Estudia si para $a = 1$ se verifica o no la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (b - c, a + d, a - d)$$

- (a) Calcula el núcleo y la imagen de f .
- (b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $f^t(\varphi)$, donde φ es la forma lineal de $(\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\varphi(x, y, z) = x + y + z$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} de dimensión finita.

- (a) Prueba que si $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- (b) Dado $v \in V \setminus \{0\}$ prueba que existe $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f$ y $\ker(f^t) = \text{an}(\{v\})$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos). Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en \mathbb{R} existe una fila que es combinación lineal del resto.
- (b) Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} de dimensión finita mayor o igual que 2 y $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Entonces existen dos bases distintas \mathcal{B} y \mathcal{B}' tales que $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$. ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de V ?
- (c) Sean V y V' espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} de dimensión finita y $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva $\Leftrightarrow f^t$ es sobreyectiva.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). En el espacio \mathbb{R}^4 , con vectores (x, y, z, t) , y para todo a real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, -a, -1)\}), W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Calcula, para todo a , unas ecuaciones implícitas de U y una base de W .

Un vector $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ está en U si y sólo si es combinación lineal de $v_1 := (0, 1, 1, 1), v_2 := (1, 0, -a, -1)$, es decir, si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Vemos que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, así que vamos orlando el menor anterior con la tercera fila y las columnas tercera y cuarta, obteniendo las dos ecuaciones implícitas de U respecto de la base usual de \mathbb{R}^4 :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ x & y & z \end{vmatrix} = -ax + y - z, \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = -x + y - t$$

Para calcular una base de W , solucionamos el sistema homogéneo dado por sus ecuaciones implícitas. La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, tomamos y, z como incógnitas principales y x, t como incógnitas secundarias (parámetros), es decir, escribimos el sistema como

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + t \\ z = -x \end{array} \right\}$$

Dando valores a los parámetros obtenemos: si $(x, t) = (1, 0)$, entonces $(y, z) = (a, -1)$; y si $(x, t) = (0, 1)$, entonces $(y, z) = (1, 0)$. Por tanto, los vectores

$$v_3 := (1, a, -1, 0), \quad v_4 := (0, 1, 0, 1)$$

forman base de W .

(b) Estudia si para $a = 1$ se verifica o no la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Para $a = 1$, los vectores que hemos calculado en el apartado anterior son

$$v_1 := (0, 1, 1, 1), \quad v_2 := (1, 0, -1, -1), \quad v_3 := (1, 1, -1, 0), \quad v_4 := (0, 1, 0, 1).$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

concluimos que v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente dependientes. Así que no pueden formar base, lo que impide que \mathbb{R}^4 sea suma directa de U y W . Como U y W tienen dimensión 2, tenemos $U \cap W \neq \{0\}$ y $U + W \neq \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b - c, a + d, a - d)$$

(a) Calcula el núcleo y la imagen de f .

Calculamos primero $\ker(f)$:

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : (b - c, a + d, a - d) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c, a = d = 0 \right\} = \mathcal{L} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right). \end{aligned}$$

Podemos calcular $\text{Im}(f)$ de dos maneras:

Fórmula de la nulidad y el rango. Como $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$, $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) = 1 \Rightarrow 4 = 1 + \dim \text{Im}(f)$, luego $\dim \text{Im}(f) = 3$ y por tanto, f es sobreyectiva. Así que la imagen de f es \mathbb{R}^3 .

Formando una base de $\text{Im}(f)$ Llamamos E_{ij} a las matrices de la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Así, $f(E_{11}) = (0, 1, 1)$, $f(E_{12}) = (1, 0, 0)$, $f(E_{21}) = (-1, 0, 0)$, $f(E_{22}) = (0, 1, -1)$, luego

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \mathcal{L}(\{f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, -1)\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, -1)\}) = \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes, porque

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $f^t(\varphi)$, donde φ es la forma lineal de $(\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\varphi(x, y, z) = x + y + z$.

Llamemos $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ a la base ordenada usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}^* = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22})$ a su base ordenada dual. Entonces, las coordenadas que nos piden son

$$\begin{aligned} (f^t(\varphi))_{\mathcal{B}^*} &= ([f^t(\varphi)](E_{11}), [f^t(\varphi)](E_{12}), [f^t(\varphi)](E_{21}), [f^t(\varphi)](E_{22})) \\ &= ((\varphi \circ f)(E_{11}), (\varphi \circ f)(E_{12}), (\varphi \circ f)(E_{21}), (\varphi \circ f)(E_{22})) \\ &= (\varphi(0, 1, 1), \varphi(1, 0, 0), \varphi(-1, 0, 0), \varphi(0, 1, -1)) = (2, 1, -1, 0). \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} de dimensión finita.

- (a) Prueba que si $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Veamos que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$: sea $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Como $x \in \text{Im}(f)$ existe $z \in V$ tal que $x = f(z)$. Como $x \in \ker(f)$, tenemos

$$0 = f(x) = f(f(z)) = (f \circ f)(z) = f(z) = x.$$

Por tanto, $x = 0$, y así, $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Por la fórmula de la nulidad y el rango, concluimos que $V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

- (b) Dado $v \in V \setminus \{0\}$ prueba que existe $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f$ y $\ker(f^t) = \text{an}(\{v\})$.

Sabemos que

$$\ker(f^t) = \text{an}(\{v\}) = \text{an}(\text{Im}(f)) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{an}(\text{an}(\{v\})) = \mathcal{L}(\{v\}).$$

Entonces, sea $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, tomemos x_1, \dots, x_{n-1} de un subespacio suplementario de $\mathcal{L}(\{v\})$ en V , tal que $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_{n-1}, v)$ es base ordenada de V . Sea f el único endomorfismo dado por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales a partir de

$$f(x_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1, f(v) = v.$$

Entonces

$$\text{Im}(f) = \mathcal{L}(\{f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(v)\}) = \mathcal{L}(\{0, \dots, 0, v\}) = \mathcal{L}(\{v\})$$

y por tanto $\ker(f^t) = \text{an}(\text{Im}(f)) = \text{an}(\mathcal{L}(\{v\})) = \text{an}(\{v\})$, mientras que $f \circ f = f$ ya que $f \circ f$ y f coinciden sobre los vectores de la base \mathcal{B}

Ejercicio 4. Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en \mathbb{R} existe una fila que es combinación lineal del resto.

Verdadero: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica, es decir $A^t = -A$. Tomando determinantes

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Como estamos suponiendo n impar, tenemos $\det(A) = -\det(A)$, luego $\det(A) = 0$. Esto equivale a que el rango de A por filas es menor que n , es decir, al menos una fila de A es combinación lineal del resto.

- (b) Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita mayor o igual que 2 y $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Entonces existen dos bases distintas \mathcal{B} y \mathcal{B}' tales que $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$. ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de V ?

La primera afirmación es verdadera: Como $v \neq 0$, el conjunto $\{v\}$ es linealmente independiente. Por el Teorema de Ampliación de la Base, existe una base ordenada de V del tipo $\mathcal{B} = (v, v_2, \dots, v_n)$ para vectores $v_2, \dots, v_n \in V$. Tomemos $\mathcal{B}' = (v, v_2, \dots, v_{n-1}, 2v_n)$, también base ordenada de V . Vemos entonces que $v_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0) = v_{\mathcal{B}'}$. La segunda afirmación es falsa: Consideremos las bases ordenadas $\mathcal{B} = (v, v_2, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}'' = (v_2, v, v_3, \dots, v_n)$ Entonces

$$v_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0) \neq (0, 1, 0, \dots, 0) = v_{\mathcal{B}''}.$$

Y no es cierta para cualesquiera par de bases de V .

- (c) Sean V y V' espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} de dimensión finita y $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva $\Leftrightarrow f^t$ es sobreyectiva.

La afirmación es verdadera:

\Rightarrow) f es inyectiva si y sólo si $n(f) = 0$. Por la fórmula de la nulidad y el rango aplicada a f , esto equivale a que $\dim_{\mathbb{K}} V = r(f)$. Por el Teorema del Rango, $r(f) = r(f^t)$, luego $\dim_{\mathbb{K}} V = r(f^t)$ Como $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$, lo anterior equivale a que $\dim_{\mathbb{K}} V^* = r(f^t)$, luego f^t es sobreyectiva.

\Leftarrow) $f^t : (V')^* \rightarrow V^*$ es sobreyectiva si y solo si $\text{Im}(f^t) = V^* = \text{an}(\ker(f))$ Tomando anuladores, esto equivale a que $\ker(f) = \text{an}(V^*) = \{0\}$, es decir, a que f es inyectiva.