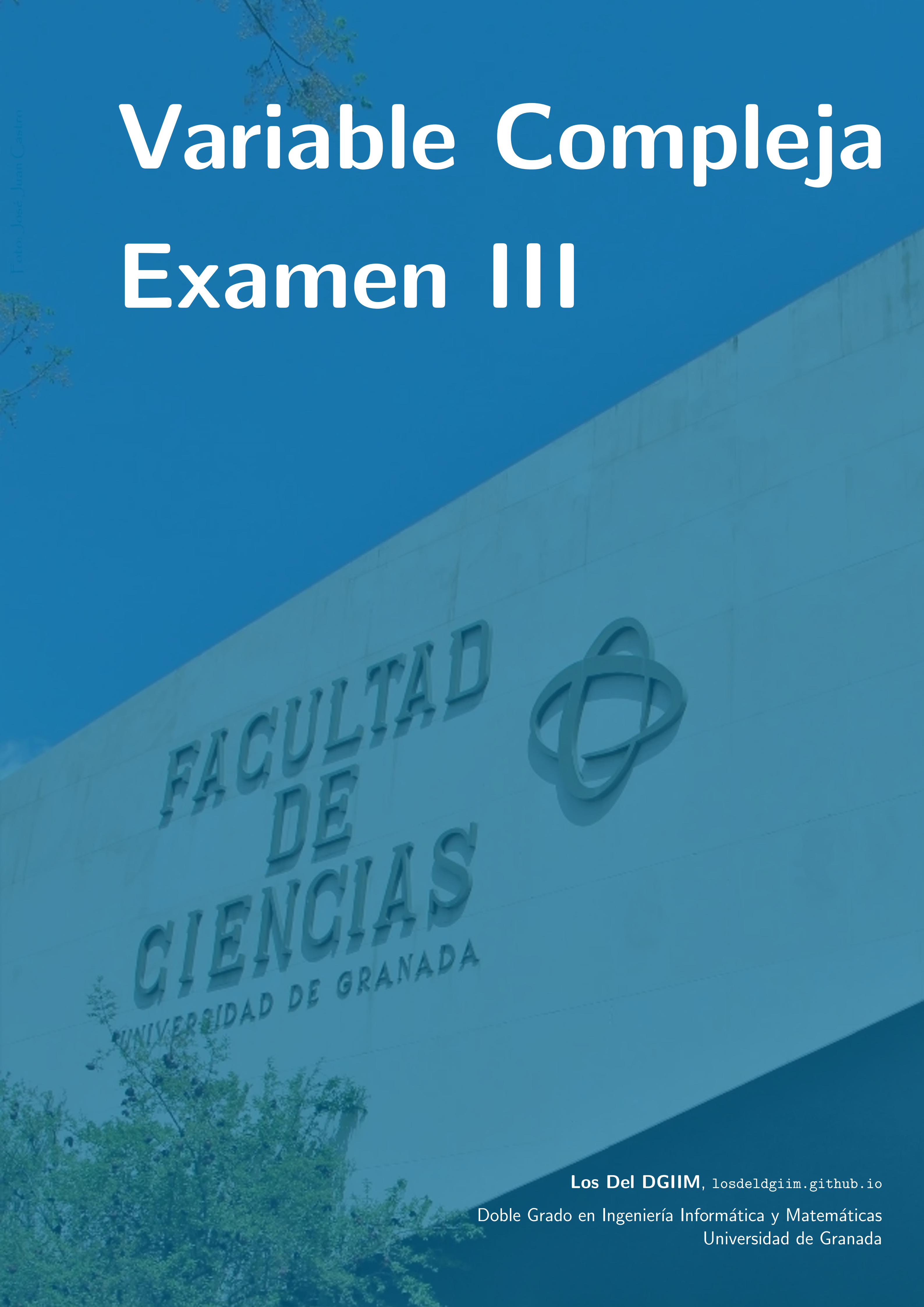
Variable Compleja

Examen III



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 9 de Mayo de 2023.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im} z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función g siguiente es continua, y calcular la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\, dz$:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \end{array}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función f siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

1. **[1.5 puntos]** Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función g siguiente es holomorfa en Ω:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x+iy & \longmapsto & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

2. **[1.5 puntos]** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \varphi$ y que f es única salvo una constante.

3. **[1 punto]** Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im} z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función g siguiente es continua, y calcular la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\,dz$:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \end{array}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función f siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$u(x,y) = \operatorname{Re}(g(x+iy)) = \operatorname{Re}(e^{x-iy}) = e^x \cos(-y)$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im}(g(x+iy)) = \operatorname{Im}(e^{x-iy}) = e^x \operatorname{sen}(-y)$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(-y) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^x \operatorname{sen}(-y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \operatorname{sen}(-y) \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -e^x \cos(-y)$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -e^x \cos(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\cos(-y) = cos(y) = 0$.

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^x \operatorname{sen}(-y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y) = 0$.

Como no es posible que el seno y el coseno reales se anulen simultáneamente, se concluye que g no es derivable en z (puesto que no se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

1. **[1.5 puntos]** Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función g siguiente es holomorfa en Ω:

$$\begin{array}{rccl} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x+iy & \longmapsto & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

Definimos las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, con vistas a aplicar las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} g(x+iy) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$$

Calculamos cada una de las derivadas parciales de u y v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Comprobemos que se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Notemos que la primera ecuación se cumple por hipótesis, y la segunda se cumple por el Teorema de Clairaut. Por tanto, se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por tanto g es holomorfa en Ω.

2. **[1.5 puntos]** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \varphi$ y que f es única salvo una constante.

Como Ω es un dominio estrellado y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, por el Teorema Local de Cauchy, $\exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una primitiva de g en Ω. Por tanto, tenemos que:

$$f'(x+iy) = g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Definimos ahora de nuevo $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ como:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Para calcular $u = \operatorname{Re} f$, integramos la primera ecuación respecto de x:

$$u(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \varphi(x,y) + h(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

donde h es una función de y que no depende de x y representa la constante de integración. Derivando respecto de y, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, h es constante, por lo que $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + C \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Como $u = \operatorname{Re} f$, y por hipótesis buscamos que $\operatorname{Re} f = \varphi$, tenemos que $C = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} f(x,y) = \varphi(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, la existencia está probada. Supongamos ahora que existe otra función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} g = \varphi$. Definimos $h = f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, tenemos que:

$$\operatorname{Re} h = \operatorname{Re} f - \operatorname{Re} g = \varphi - \varphi = 0$$

Como h es holomorfa, está definida en un dominio, y su parte real es nula, entonces h es constante, luego $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = g(z) + \lambda \qquad \forall z \in \Omega$$

Por tanto, f es única salvo una constante.

3. **[1 punto]** Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞.