Ecuaciones Diferenciales I Examen II

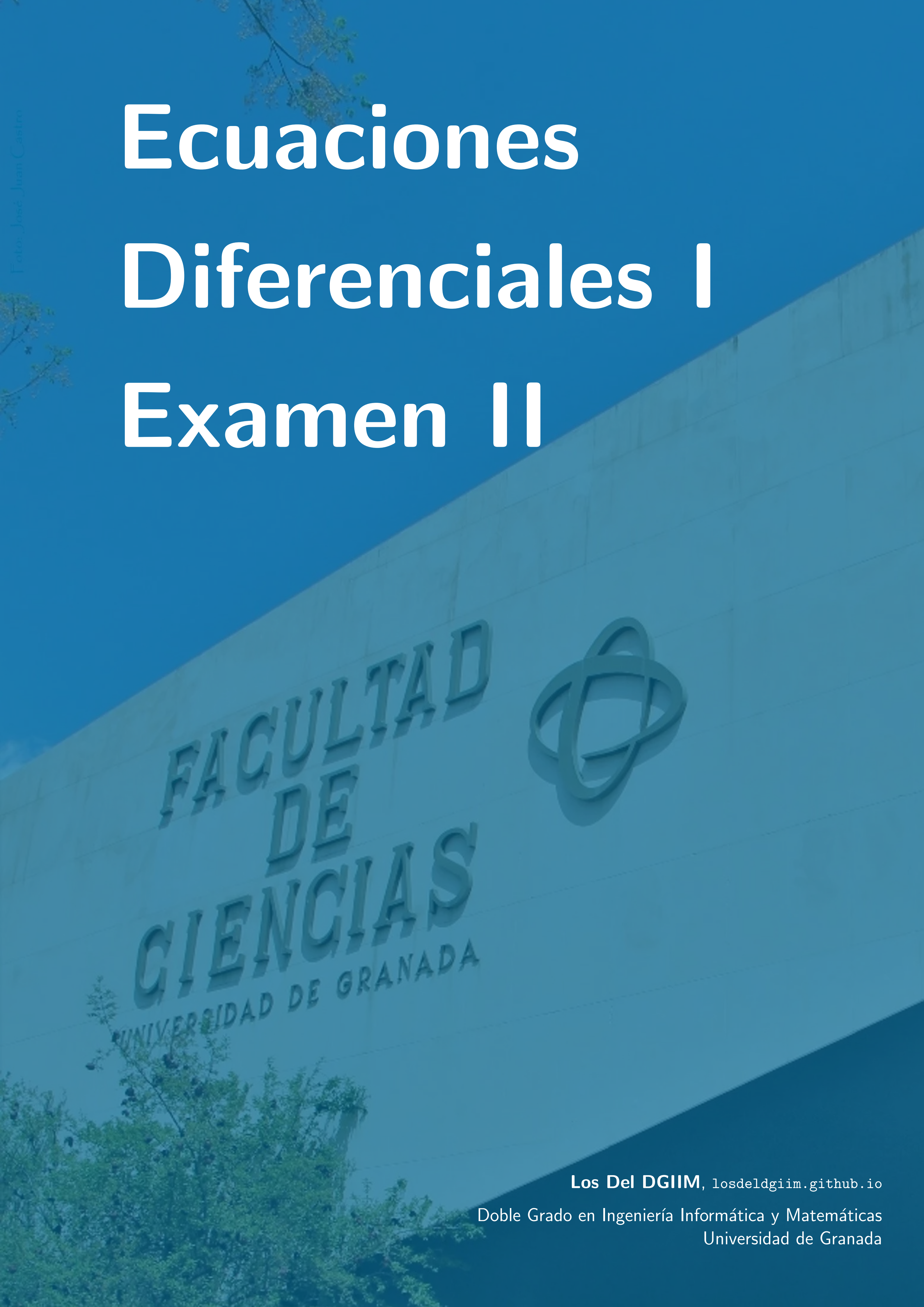

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 17 de marzo de 2016.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes funciones F y φ:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & F(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

se define la siguiente función ϕ:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x,\varphi(x)) \end{array}$$

Suponiendo que F y φ son de clase C^2, expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ.

Veamos en primer lugar que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend left, "F\circ H=\phi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x,\varphi(x)) \longmapsto F(x,\varphi(x))$$

En primer lugar, $H=(Id,\varphi)$, donde Id es la función identidad. Por tanto, se tiene que $H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser ambas componentes $C^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ por hipótesis. Por tanto, $\phi = F\circ H \in C^2(\mathbb{R})$ por ser composición de funciones de clase $C^2(\mathbb{R})$. Tenemos por tanto que:

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

Derivando de nuevo, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi''(x) = {} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi''(x) + \\ & + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Encuentra la solución de la siguiente ecuación diferencial, precisando el intervalo I donde está definida:

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0)=0$$

El dominio de la ecuación diferencial es $D=\mathbb{R}^2$. Se trata de una ecuación de variables separadas, donde no hay soluciones constantes ya que:

$$e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

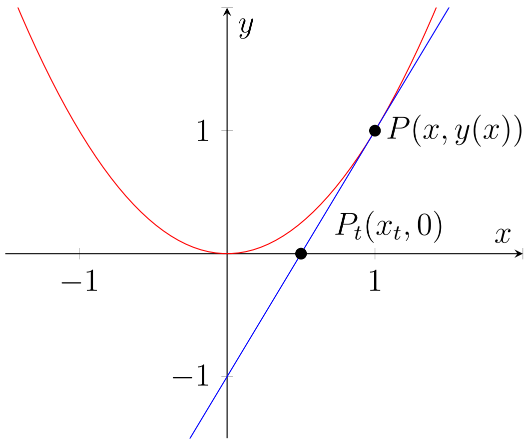

Figura 1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 3.

Resolvemos la ecuación usando el método demostrado en teoría:

$$\int e^{-x}dx = \int e^t dt \Longrightarrow -e^{-x} = e^t + C \Longrightarrow x = -\ln(-e^t - C)$$

Veamos ahora el intervalo de definición $I \subset \mathbb{R}$. Para que la solución esté bien definida, necesitamos que el argumento del logaritmo sea positivo. Por tanto, necesitamos que:

$$-e^t - C > 0 \Longrightarrow e^t < -C \Longrightarrow t < \ln(-C)$$

Por tanto, la solución está definida en el intervalo $I =]-\infty, \ln(-C)[$.

$$x(t) = -\ln(-e^t - C), \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R}^-$$

Imponiendo la condición inicial, tenemos que:

$$x(0) = -\ln(-e^0 - C) = 0 \Longrightarrow -\ln(-1 - C) = 0 \Longrightarrow -1 - C = 1 \Longrightarrow C = -2$$

Por tanto, la solución es:

$$x(t) = -\ln(-e^t + 2), \quad t \in]-\infty, \ln(2)[$$

Ejercicio 3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

La representación gráfica de la situación descrita se encuentra en la Figura 1.

La distancia al origen desde un punto $P = (x, y(x))$, notada por $d(P, O)$, viene dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + (y(x))^2}$$

La recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto $(x, y(x))$ tiene pendiente $y'(x)$ y pasa por el punto $(x, y(x))$. Siendo $(x_t, 0)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas, como ambos puntos pertenecen a la misma recta, empleando la fórmula de la pendiente de una recta, tenemos que:

$$y'(x) = \frac{y(x) - 0}{x - x_t} = \frac{y(x)}{x - x_t} \Longrightarrow x_t = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que el caso $x = x_t$ implicaría que la recta tangente es vertical, por lo que no podríamos considerar $y'(x)$ al no ser y derivable en ese punto, por lo que no sería una solución posible. Respecto al caso $y'(x) = 0$, tendríamos que la recta tangente es horizontal, por lo que no cortaría al eje de abscisas (o sería coincidente con él). En cualquier caso, tampoco se contempla, puesto que x_t no estaría definido o no sería único.

Imponiendo la condición del enunciado de que $d(P, O) = x_t$, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + (y(x))^2} = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

La ecuación diferencial, en forma no normal, sería:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{y}{y'} + x \qquad \text{con dominio } D = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Si necesitamos expresar la ecuación diferencial en forma normal, despejando y' tenemos:

$$y' = -\frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{con dominio } D = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

donde hemos aplicado que el denominador solo se anula para $y = 0$. Despejar y' de la ecuación diferencial para dejarla en forma normal no es recomendable por perder las soluciones en las que $y = 0$.

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables $\varphi : s = e^t, y = e^{-t}x$. Demuestra que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio Ω del plano. Determina Ω. Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = tx^2$ y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

En primer lugar, definimos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \Omega \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (e^t, e^{-t}x) \end{array}$$

Busquemos en primer lugar su inversa, para lo cual buscamos despejar de forma única t y x en función de s y y:

$$s = e^t \Longrightarrow t = \ln s$$
$$y = e^{-t}x \Longrightarrow x = e^t y = e^{\ln s} y = sy$$

Por tanto, tenemos que φ es biyectiva, y su inversa es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (\ln s, sy) \end{array}$$

Calculemos ahora Ω. En primer lugar, para que φ^{-1} esté bien definida, necesitamos $s > 0$. Por tanto, $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$\Omega = \varphi(\mathbb{R}^2) = \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\ln s, sy) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y sus componentes son productos de funciones elementales de clase 1, por lo que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$. Por tanto, φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y Ω.

Para comprobar que el cambio de variable es admisible para la ecuación $x' = tx^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} x' = e^t + 0 \cdot x' = e^t > 0 \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

La ecuación en las nuevas variables (s, y) es:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = -xe^{-t} + e^{-t}x' = e^{-t}(tx^2 - x) = e^{-\ln s}(\ln(s)(sy)^2 - sy) = \\ &= \frac{1}{s} \cdot sy(sy\ln(s) - 1) = y(sy\ln(s) - 1) \qquad \text{con dominio } \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Se considera la función seno hiperbólico $f = \operatorname{senh}$ definida como:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) = \operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{array}$$

Demuestra que f tiene una inversa[1] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

Para demostrar esto, tenemos dos opciones.

Opción Teórica En primer lugar hemos de demostrar que f es biyectiva. Para ello, hemos de demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva.

Inyectividad Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, f es estrictamente creciente, lo que implica que es inyectiva.

Sobreyectividad Para demostrar que f es sobreyectiva, basta con demostrar que su imagen es todo $\mathbb{R}$. Para ello, como es continua por ser suma de continuas, basta con estudiar sus límites en los extremos:

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \frac{0 - \lim\limits_{t \to \infty} e^t}{2} = -\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{\lim\limits_{t \to \infty} e^t - 0}{2} = +\infty$$

Por tanto, tenemos que f es sobreyectiva.

Entonces, f tiene inversa, notada por g, tal que $g = f^{-1}$. Además, como f' no se anula en ningún punto, tenemos que:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{2}{e^{g(x)} + e^{-g(x)}}$$

[1]Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{argsh} x$, argumento del seno hiperbólico

Opción Directa En primer lugar, despejamos t en función de $f(t) = x$:

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Longrightarrow 2x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Como $e^t > 0$, necesitamos quedarnos con la solución positiva. Tenemos que:

$$x < \sqrt{x^2+1} \Longleftrightarrow x^2 < x^2 + 1 \Longleftrightarrow 0 < 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$e^t = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Como hemos podido despejar de forma única t en función de x, tenemos que f tiene inversa, notada por $g = f^{-1}$, dada por:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & t = g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}$$

Tenemos que $g \in C^1(\mathbb{R})$, con derivada:

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$