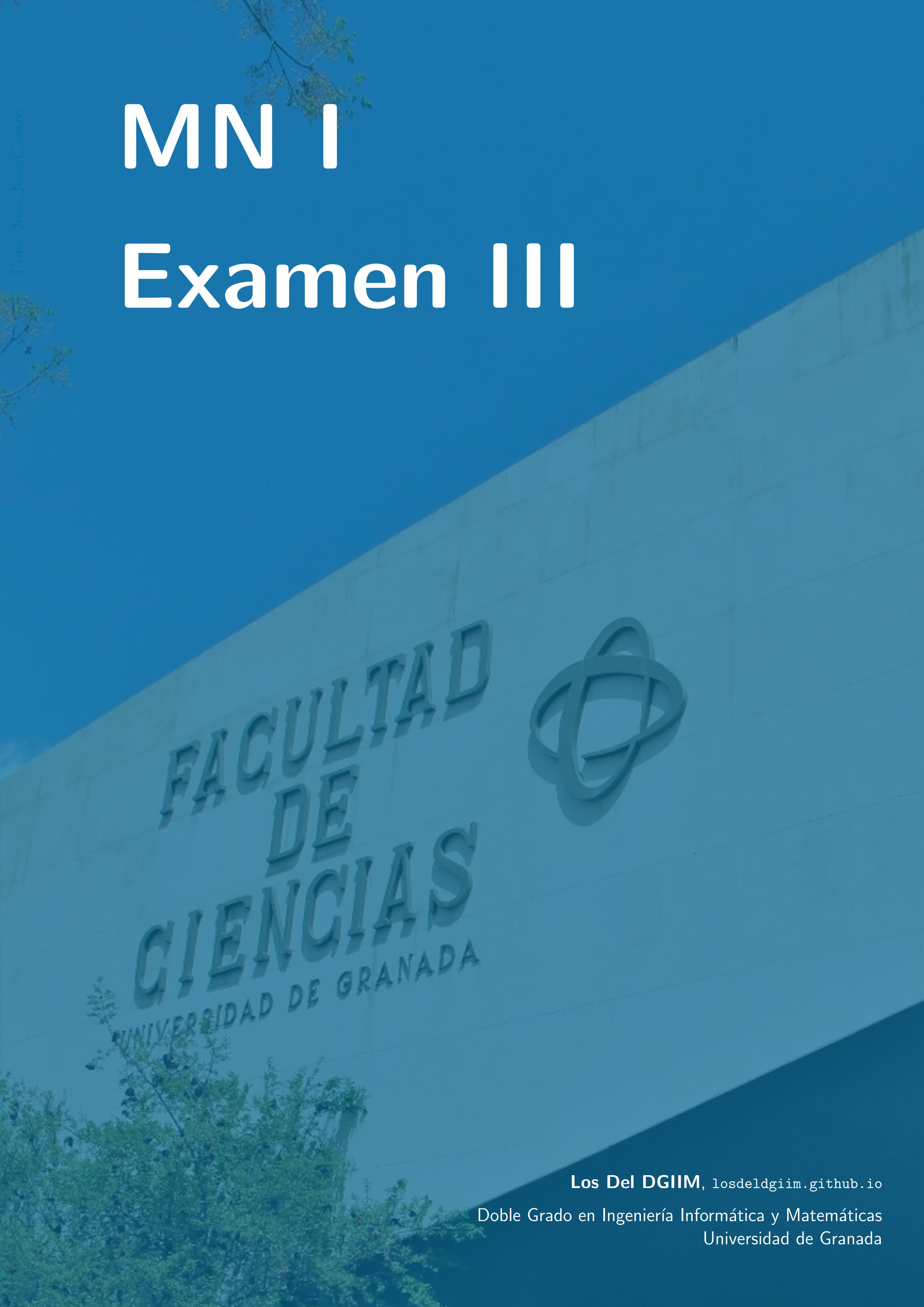
MN I
Examen III



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Teresa Encarnación Pérez Fernández.

Descripción Prueba 2. Temas 3 y 4.

Fecha 7 de junio de 2022.

Ejercicio 1 (1.5 puntos). Determine $s'(0)$ y $s'(2)$ para que la siguiente expresión defina un spline cúbico de extremo sujeto:

$$s(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 + \alpha x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^3 + \beta x^2 + 2x + \gamma, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos la derivada. Por el carácter local de la derivabilidad:

$$s'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x + \alpha, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x^2 + 2\beta x + 2, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} 12x + 4, & 0 \leq x \leq 1, \\ 6x + 2\beta, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

Para que sea un spline cúbico, hemos de tener en primer lugar que sea continua. Por tanto,

$$5 + \alpha = \lim_{x \to 1^-} s(x) = \lim_{x \to 1^+} s(x) = \beta + 3 + \gamma \Longrightarrow -\alpha + \beta + \gamma = 2$$

Además, como es de clase 1, ha de ser derivable con derivada continua. Por tanto,

$$10 + \alpha = \lim_{x \to 1^-} s'(x) = \lim_{x \to 1^+} s'(x) = 5 + 2\beta \Longrightarrow -\alpha + 2\beta = 5$$

Además, como es de clase 2, su segunda derivada ha de ser continua. Por tanto,

$$16 = \lim_{x \to 1^-} s''(x) = \lim_{x \to 1^+} s''(x) = 6 + 2\beta \Longrightarrow \beta = 5$$

Por tanto, para que sea un spline ha de ser:

$$\alpha = \beta = 5 \qquad\qquad \gamma = 2$$

Por tanto, para que sea un spline cúbico de extremo sujeto ha de ser:

$$s'(0) = 5 \qquad\qquad s'(2) = 34$$

Ejercicio 2 (1.5 puntos). Usando aritmética de tres cifras por redondeo, calcule el polinomio de interpolación para los siguientes datos: $f(0{,}8) = 0{,}224$, $f'(0{,}8) = 2{,}17$, $f(1{,}0) = 0{,}658$, $f'(1{,}0) = 2{,}04$.

x_i	0,8	1,0
f_i	0,224	0,658
f'_i	2,17	2,04

Calculo la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|lccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
 & & & & \\
0{,}8 & \mathbf{0.224} & & & \\
 & & \mathbf{2.17} & & \\
0{,}8 & 0{,}224 & & \mathbf{0} & \\
 & & 2{,}17 & & \mathbf{-3{,}25} \\
1 & 0{,}658 & & -0{,}65 & \\
 & & 2{,}04 & & \\
1 & 0{,}658 & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que el polinomio de interpolación es:

$$p_3(x) = 0{,}224 + 2{,}17(x - 0{,}8) - 3{,}25(x - 1)(x - 0{,}8)^2$$

Ejercicio 3 (1.5 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{x^4-x}{4}$ definida en el intervalo $[0, a]$, $a > 0$, determine el número mínimo de nodos equiespaciados n (abcisas) que se deben tomar en el intervalo $[0, a]$ para que el error de interpolación entre cada dos nodos consecutivos sea menor que un $\varepsilon > 0$ dado.

Tenemos que $f \in \mathbb{P}_4$, por lo que queda definido por 5 puntos. Es decir, tomando 5 puntos, el polinomio de interpolación pertenecerá a $\mathbb{P}_4$ y, de hecho, será f. Por tanto, el error de interpolación será nulo, ya que se habría interpolado el mismo polinomio.

De hecho, al tomar 5 puntos tenemos que el error de interpolación es:

$$e(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\prod_{i=0}^{4}(x - x_i) \qquad \xi \in [a, b]$$

No obstante, tenemos que $f^{(5)}(x) = 0\ \forall x$, por lo que como podemos ver, el error es nulo.

Ejercicio 4 (1.5 puntos). Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ 2 & x > c \end{cases}$$

Sabemos que la recta que mejor aproxima a $f(x)$ por mínimos cuadrados continuos en el intervalo $[0, 3]$ es $p(x) = \dfrac{8}{9}x$. Calcule c.

Al ser la aproximación por mínimos cuadrados continua en el intervalo $[0, 3]$, tomamos el producto escalar:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^3 f(x)g(x)\, dx$$

Buscamos la mejor aproximación en $\mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1, x\}$. Calculamos los productos escalares:

$$\langle 1, 1\rangle = 3 \qquad \langle 1, x\rangle = \frac{9}{2} \qquad \langle x, x\rangle = 9$$

$$\langle f, 1\rangle = \int_c^3 2\, dx = 2(3 - c) \qquad \langle f, x\rangle = \int_c^3 2x\, dx = 9 - c^2$$

Por tanto, la mejor aproximación es $p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{P}_1$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9/2 \\ 9/2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3-c) \\ 9 - c^3 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que la mejor aproximación es $p(x) = \frac{8}{9}x$, tenemos que $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{8}{9}$. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{8}{9} = 6 - 2c \Longrightarrow 4 = 6 - 2c \\[2em] 9\cdot\dfrac{8}{9} = 9 - c^3 \Longrightarrow 8 = 9 - c^3 \end{cases}$$

Por tanto, de ambas ecuaciones deducimos que $c = 1$.

Ejercicio 5 (**4 puntos**)**.** Se considera el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-2}^{-1} f(x)g(x)\ dx + f(0)g(0) + \int_{1}^{2} f(x)g(x)\ dx.$$

1. (**1.25 puntos**) Calcule los tres primeros polinomios ortogonales.

   Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{P}_n = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ y buscamos una base ortogonal $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$. Partimos de $e_1 = 1$, y usando el algoritmo de Gram-Schmidt, tenemos que:

   $$e_2 = x - \frac{\langle x, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1$$

   $$\langle x, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} x\ dx + 0 + \int_{1}^{2} x\ dx = 0$$

   Por tanto, definimos $e_2 = x$. Calculamos ahora e_3

   $$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 - \frac{\langle x^2, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} \cdot e_2$$

   $$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} x^2\ dx + 0 + \int_{1}^{2} x^2\ dx = \frac{14}{3} \qquad \langle x^2, x\rangle = \int_{-2}^{-1} x^3\ dx + 0 + \int_{1}^{2} x^3\ dx = 0$$

   $$\langle 1, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} 1\ dx + 1 + \int_{1}^{2} 1\ dx = 3$$

   Por tanto, $e_3 = x^2 - \frac{14}{9}$. Es decir, los tres primeros polinomios ortogonales son:

   $$\left\{1, x, x^2 - \frac{14}{9}\right\}$$

2. (**1.25 punto**) Utilizando el apartado anterior, proporcione la parábola $u(x)$ mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = x^3$.

   Sea $\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\left\{1, x, x^2 - \frac{14}{9}\right\}$, y consideramos $u(x) = a_1 + a_2 x + a_3\left(x^2 - \frac{14}{9}\right)$.

   Calculamos productos escalares necesarios, sabiendo que se trata de una base ortogonal:

   $$\langle 1, 1\rangle = 3 \qquad \langle x, x\rangle = \frac{14}{3}$$

   $$\langle f, 1\rangle = 0 \qquad \langle f, x\rangle = \frac{62}{5} \qquad \left\langle f, x^2 - \frac{14}{9}\right\rangle = 0$$

   Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

   $$a_i = \frac{\langle e_i, f\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

   Por tanto, $a_1 = a_3 = 0$. Además,

   $$a_2 = \frac{\langle x, f\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\frac{62}{5}}{\frac{14}{3}} = \frac{93}{35}$$

Es decir, la mejor aproximación en $\mathbb{P}_2$ es

$$u(x) = \frac{93}{35}x$$

3. (**1 punto**) Compruebe que $f(x) - u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

   Por ser u la mejor aproximación de f, tenemos que:

$$||f-u|| \leq ||f-p_2|| \Longrightarrow ||f-u||^2 \leq ||f-p_2||^2 \qquad \forall p_2 \in \mathbb{P}_2$$

   Tomamos $g \in \mathbb{P}_2$, y sea $p_2 = u + \lambda g \in \mathbb{P}_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, como $p_2 \in \mathbb{P}_2$, tenemos que:

$$||f-u||^2 \leq ||f-u-\lambda g||^2 = \langle f-u-\lambda g, f-u-\lambda g\rangle = ||f-u||^2 - 2\lambda\langle f-u, g\rangle + \lambda^2||g||^2$$

   Por tanto,

$$0 \leq -2\lambda\langle f-u, g\rangle + \lambda^2||g||^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in \mathbb{P}_2.$$

   Considerando la expresión anterior como una parábola en la incógnita λ, tenemos:

$$\Delta = 4(\langle f-u, g\rangle)^2 \geq 0$$

   Por tanto, para que la parábola siempre sea positiva, no puede tener dos raíces. Por tanto, $\Delta = 0$, lo que implica que:

$$\langle f-u, g\rangle = 0 \qquad \forall g \in \mathbb{P}_2$$

   Por tanto, hemos demostrado que $f(x) - u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

4. (**0.5 puntos**) Interprete geométricamente la distancia que induce este producto escalar.

   Tenemos que:

$$d(u, v) := ||u-v|| = \sqrt{\int_{-2}^{-1} (u-v)^2(x)\,dx + (u-v)^2(0) + \int_{1}^{2} (u-v)^2(x)\,dx}$$

   Por tanto, la distancia es la raíz del área encerrada por ambas funciones entre $[-2, -1]$ y $[1, 2]$ y el cuadrado de las imágenes de las dos funciones en $x = 0$.

   Por tanto, al minimizar mediante mínimos cuadrados, lo que buscamos es minimizar el área entre dichas funciones en los intervalos mencionados y minimizar la distancia en el punto $x = 0$.