Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. El Espacio Euclídeo. Espacios normados y métricos.

Ejercicio 1.1.1. Probar que, en cualquier espacio pre-hilbertiano X, el producto escalar se obtiene a partir de la norma mediante la llamada *identidad de polarización*:

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 - ||x-y||^2 &= (x+y|x+y) - (x-y|x-y) = \\ &= \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) + \cancel{(y|y)} - \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) - \cancel{(y|y)} = 4(x|y) \end{aligned}$$

donde he usado que $(x|y) = (y|x)$ por ser simétrica, y que $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

Ejercicio 1.1.2. Si X e Y son espacios pre-hilbertianos, es una sana costumbre denotar ambos productos escalares por $(\cdot|\cdot)$ y ambas normas asociadas por $||\cdot||$. Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal que preserva la norma, es decir,

$$\|f(x)\| = \|x\|$$

Probar que entonces f también preserva el producto escalar:

$$(f(x) \mid f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 4(x|y) \overset{(*)}{=} ||x+y||^2 - ||x-y||^2 = ||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2 = ||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2 = \\ \overset{(*)}{=} 4(f(x)|f(y)) \Longrightarrow (x|y) = (f(x)|f(y)) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado el ejercicio anterior; y he aplicado que por ser f una aplicación lineal se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Ejercicio 1.1.3. Probar que todo espacio pre-hilbertiano X de dimensión $N \in \mathbb{N}$, se identifica totalmente con el espacio euclídeo N-dimensional; es decir, existe una biyección lineal $f : X \to \mathbb{R}^N$ que preserva el producto escalar:

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

En este sentido podemos decir que el espacio euclídeo N-dimensional es el único espacio pre-hilbertiano de dimensión N.

Sea $\mathcal{B}_X$ una base ortonormal de X, y $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$.

$$\mathcal{B}_X = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}_\mathbb{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Entonces, definimos $f : X \to \mathbb{R}^N$ forma lineal de forma que los vectores de una base de aplican en los de la otra base. Es decir, $f(v_i) = e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$. Como es una forma lineal y se aplica base en otra base, tenemos que es una biyección lineal.

Sea $x, y \in X$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^n a_i v_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^n b_i v_i$. Comprobemos que preserva el producto escalar.

$$(f(x)|f(y)) = \left(f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) \middle| f\left(\sum_{i=1}^n b_i v_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i f(v_i) \middle| \sum_{i=1}^n b_i f(v_i)\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \middle| \sum_{i=1}^n b_i e_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n a_i b_i \overset{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i \middle| \sum_{i=1}^n b_i v_i\right) = (x|y)$$

donde en $(*)$ he aplicado que las bases escogidas son ortonormales, por lo que el producto escalar de dos elementos es la suma del producto de sus componentes expresadas en la correspondiente base.

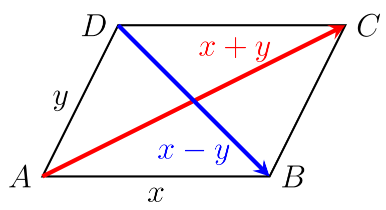
Ejercicio 1.1.4. Probar que, en todo espacio pre-hilbertiano X, se verifica la *identidad del paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Interpretar geométricamente el resultado.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) + ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y) = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Geométricamente, tenemos que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo equivale a la suma de los cuadrados de las diagonales.



Ejercicio 1.1.5. Para cualquier espacio pre-hilbertiano X, discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in X$ para verificar que $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.

La demostración de la desigualdad triangular parte de la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$||(x|y)|| \leqslant ||x||\ ||y|| \qquad \forall x, y \in X$$

Además, tenemos que la igualdad se da solo en el caso de que sean linealmente dependientes.

Demostramos ahora la desigualdad triangular a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) \overset{(1)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2|(x|y)| \overset{(2)}{\leqslant}$$
$$\overset{(2)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\ ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si se dan las igualdades en (1) y (2).

- La igualdad en (1) se da si y solo si $(x|y) \geqslant 0$.
- La igualdad en (2) se da si y solo si se da la da desigualdad en Cauchy-Schwarz; y esta se da si y solo si $\{x, y\}$ son linealmente dependientes.

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si ambos vectores son linealmente dependientes y además su producto escalar es positivo.

Ejercicio 1.1.6. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en $\mathbb{R}^N$ sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ para verificar la siguiente igualdad: $||x+y||_1 = ||x||_1 + ||y||_1$.

En primer lugar, como la norma 1 no procede de ningún producto escalar, tenemos que no son aplicables los resultados del ejercicio anterior. Demostramos por tanto la desigualdad triangular en el caso de la norma 1:

$$||x+y||_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x_k| + |y_k| = ||x||_1 + ||y||_2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto, tenemos que se dará la igualdad triangular si y solo si se cumple que $|x_k + y_k| = |x_k| + |y_k|$, $\forall k \in \Delta_N$. Para que esto ocurra, es necesario y suficiente lo siguiente:

$$x_k, y_k \geqslant 0, \qquad \forall k \in \Delta_N$$

Ejercicio 1.1.7. Probar que, para $N > 1$, no existe un producto escalar en $\mathbb{R}^N$ cuya norma asociada sea la de la suma, y que lo mismo le ocurre a la norma del máximo. Probar también que, en el espacio vectorial $\mathcal{C}[0,1]$, las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no son las asociadas a ningún producto escalar.

Tenemos que en todo espacio pre-hilbertiano X se cumple la identidad del paralelogramo:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2, \qquad \forall x, y \in X$$

Busquemos contraejemplos que demuestren que eso no es cierto para $X = \mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la del máximo. Sean los valores siguientes:

$$x = (1, \dots, 1) \qquad x + y = (0, 2, \dots, 2)$$
$$y = (-1, 1, \dots, 1) \qquad x - y = (2, 0, \dots, 0)$$

Veamos que no se cumple la identidad del paralelogramo en $\mathbb{R}^n$ para la norma 1 y el máximo:

$$2||x||_1^2 + 2||y||_1^2 = 2n^2 + 2n^2 = 4n^2 \neq [2(n-1)]^2 + 2^2 = ||x+y||_1^2 + ||x-y||_1^2$$
$$2||x||_\infty^2 + 2||y||_\infty^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4 \neq 8 = 2^2 + 2^2 = ||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo. Por tanto, no existe un producto escalar asociado a dichas normas.

Veámoslo para el caso de $\mathcal{C}[0,1]$. Sean los valores siguientes:

$$f(x) = \cos x \geqslant 0 \in [0,1] \qquad (f+g)(x) = \cos x + \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0,1]$$
$$g(x) = \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0,1] \qquad (f-g)(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Veámoslo para el caso de la norma 1:

$$||f||_1 = \int_0^1 |\cos x| \; dx = \operatorname{sen} x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 \qquad ||g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x| \; dx = -\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1$$

$$||f+g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x + \cos x| \; dx = \operatorname{sen} x - \cos x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 - \cos 1 + 1$$

$$||f-g||_1 = \int_0^1 |\cos x - \operatorname{sen} x| \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \operatorname{sen} x \; dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^1 \operatorname{sen} x - \cos x \; dx =$$
$$= \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^1 = \sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1 + \sqrt{2}$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma 1:

$$2||f||_1^2 + 2||g||_1^2 = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 1 + 2 \cdot (1 - \cos 1)^2 \neq$$
$$\neq (1 + \operatorname{sen} 1 - \cos 1)^2 + (2\sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1)^2 = ||f+g||_1^2 + ||f-g||_1^2$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma 1 no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma. Veámoslo para la norma del máximo.

$$||f||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\cos x\} = 1 \qquad ||g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\operatorname{sen} x\} = \operatorname{sen} 1$$
$$||f+g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\cos x + \operatorname{sen} x\} = (f+g)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$||f-g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{|\cos x - \operatorname{sen} x|\} = 1$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma del máximo:

$$2||f||_\infty^2 + 2||g||_\infty^2 = 2(1 + \operatorname{sen}^2 1) \neq 3 = 2 + 1^2 = ||f+g||_\infty^2 + ||f-g||_\infty^2$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma.

Ejercicio 1.1.8. Sea X un espacio vectorial y sean $\mu, \nu : X \to \mathbb{R}$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

1. $\|x\| = \mu(x) + \nu(x)$:

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \mu(x)+\nu(x) \geqslant 0$ por ser la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \mu(\lambda x) + \nu(\lambda x) = |\lambda|\ [\mu(x) + \nu(x)] = |\lambda|\ ||x||$.
   - $||x + y|| = \mu(x + y) + \nu(x + y) \leqslant \mu(x) + \nu(x) + \mu(y) + \nu(y) = ||x|| + ||y||$.

2. $\|x\| = \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\}$

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\} \geqslant 0$ por ser $\mu(x), \nu(x) \geqslant 0$. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \text{máx}\{\mu(\lambda x), \nu(\lambda x)\} = \text{máx}\{|\lambda|\,\mu(x), |\lambda|\,\nu(x)\} = |\lambda|\ \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\}$ y, por la definición de la norma, $|\lambda|\ ||x||$.
   - Probamos la desigualdad triangular:

   $$\begin{aligned} ||x + y|| &= \text{máx}\{\mu(x + y), \nu(x + y)\} \leqslant \text{máx}\{\mu(x) + \mu(y), \nu(x) + \nu(y)\} \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\} + \text{máx}\{\mu(y), \nu(y)\} = ||x|| + ||y|| \end{aligned}$$

   donde en $(*)$ he aplicado lo siguiente:

   $$\begin{aligned} \mu(x) + \mu(y) \leqslant \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\} + \text{máx}\{\mu(y), \nu(y)\} \\ \nu(x) + \nu(y) \leqslant \text{máx}\{\mu(x), \nu(x)\} + \text{máx}\{\mu(y), \nu(y)\} \end{aligned}$$

3. $\|x\| = \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2}$

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2} \geqslant 0$ por ser raíz de la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \left[\mu(\lambda x)^2 + \nu(\lambda x)^2\right]^{1/2} = \left[\lambda^2 \left(\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right)\right]^{1/2} = |\lambda|\ ||x||$.
   - Verificamos la desigualdad triangular:

   $$\begin{aligned} ||x + y|| &= \left[\mu(x + y)^2 + \nu(x + y)^2\right]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left[(\mu(x) + \mu(y))^2 + (\nu(x) + \nu(y))^2\right]^{1/2} \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2} + \left[\mu(y)^2 + \nu(y)^2\right]^{1/2} = ||x|| + ||y|| \end{aligned}$$

Comprobemos la desigualdad de (∗):

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\mu(x)+\mu(y))^2+(\nu(x)+\nu(y))^2} \leqslant \sqrt{\mu(x)^2+\nu(x)^2}+\sqrt{\mu(y)^2+\nu(y)^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow [\mu(x)+\mu(y)]^2+[\nu(x)+\nu(y)]^2 \leqslant \mu(x)^2+\nu(x)^2+\mu(y)^2+\nu(y)^2+ \\
&\qquad + 2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2[\mu(x)\mu(y)+\nu(x)\nu(y)] \leqslant 2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2}+\cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2}+2\mu(x)\mu(y)\nu(x)\nu(y) \leqslant \cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2}+\cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2}+ \\
&\qquad + \mu(x)^2\nu(y)^2+\nu(x)^2\mu(y)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 0 \leqslant [\mu(x)\nu(y)-\nu(x)\mu(y)]^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.9. Probar que la función $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$\rho(x,y) = |y-x|^{1/2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

es una distancia en $\mathbb{R}$.

Comprobemos las tres condiciones para que sea una distancia:

1. $\rho(x,y) = |y-x|^{1/2} \geqslant 0$ trivialmente. Además, $\rho(x,y) = |y-x|^{1/2} = 0 \Longleftrightarrow y = x$.

2. $\rho(x,y) = |y-x|^{1/2} = \rho(y,x) = |x-y|^{1/2}$ ya que, en $\mathbb{R}$, se tiene que $|y-x| = |x-y|$.

3. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= |z-x|^{1/2} = |z-x+y-y|^{1/2} = \sqrt{|y-x+z-y|} \leqslant \sqrt{|y-x|+|z-y|} \overset{(*)}{\leqslant} \\
&\overset{(*)}{\leqslant} \sqrt{|y-x|}+\sqrt{|z-y|} = \rho(x,y)+\rho(y,z)
\end{aligned}$$

donde en (∗) he aplicado que, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, se tiene que:

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b} \Longleftrightarrow a+b \leqslant a+b+2\sqrt{ab} \Longleftrightarrow 0 \leqslant 2\sqrt{ab}$$

Ejercicio 1.1.10. Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : Y\to X$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$||y|| = ||f(y)||, \qquad y\in Y$$

se obtiene una norma en Y. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

Demostramos que la norma así definida efectivamente es una norma.

- $||y|| = ||f(y)|| \geqslant 0$ por ser $||f(y)||$ una norma vectorial. Además, se tiene que $||y|| = ||f(y)|| = 0 \Longleftrightarrow f(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.

- $||\lambda y|| = ||f(\lambda y)||$. Por ser f lineal, tenemos que $||f(\lambda y)|| = ||\lambda f(y)||$, y por ser esta una norma en X, tenemos que $||\lambda f(y)|| = |\lambda|\ ||f(y)||$. Por hipótesis, tenemos que $|\lambda|\ ||f(y)|| = |\lambda|\ ||y||$, por lo que se tiene que $||\lambda y|| = |\lambda|\ ||y||$.

- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$||x+y|| = ||f(x+y)|| \overset{(*)}{=} ||f(x)+f(y)|| \leqslant ||f(x)|| + ||f(y)|| = ||x|| + ||y||$$

  donde en $(*)$ hemos empleado que f es una aplicación lineal.

El resultado análogo para espacios métricos es:

Sean X un espacio métrico, Y un conjunto y $f : Y \to X$ una aplicación inyectiva. Probar que, definiendo

$$d(y, y') = d[f(y), f(y')], \qquad y, y' \in Y$$

se obtiene una distancia en Y. Demostrémoslo:

- $d(y, y') = d[f(y), f(y')] \geqslant 0$ por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia. Además, se tiene que $d(y, y') = d[f(y), f(y')] = 0 \iff f(y) = f(y') \iff y = y'$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.

- La simetría se obtiene trivialmente por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia en X.

- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$d(y, y') = d[f(y), f(y')] \leqslant d[f(y), f(z)] + d[f(z), f(y')] = d(y, z) + d(z, y')$$

Nótese que para los espacios métricos no se impone que Y sea un espacio vectorial ni que f sea una forma lineal inyectiva. Tan solo se imponen que X sea un conjunto e Y una aplicación inyectiva.

1.2. Topología de un espacio métrico

Ejercicio 1.2.1. Probar que, en todo espacio métrico, la distancia queda determinada cuando se conocen las bolas abiertas. En el caso particular de un espacio normado, probar que la norma queda determinada cuando se conoce la bola abierta unidad.

Sea el espacio métrico (E, d). Sean $x, y \in E$, y definimos el siguiente conjunto $A = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$. Tenemos que A no es vacío, ya que $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} B(x, \varepsilon) = E$. Por tanto, por el Teorema del Ínfimo tenemos que $\exists \inf A$. Demostramos que:

$$d(x, y) = \inf A = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$$

Para ello, vemos en primer lugar que $d(x, y)$ es un minorante de A. Demostramos por reducción al absurdo, suponiendo que $\exists \rho \in A \mid \rho < d(x, y)$. Entonces, por definición de A se tiene que $y \in B(x, \rho) \subset B(x, d(x, y))$. Por tanto, se tiene que $y \in B(x, d(x, y))$, por lo que $d(x, y) < d(x, y)$, siendo esto una contradicción.

Por tanto, $d(x, y) \leqslant \varepsilon,\ \forall \varepsilon \in A$. Veamos además que $\exists \{\varepsilon_n\} \to d(x, y)$, con $\varepsilon_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon_n := d(x, y) + \frac{1}{n}$. Comprobemos que $\varepsilon_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_n = d(x, y) + \frac{1}{n} \in A \Longleftrightarrow y \in B\left(x, d(x, y) + \frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow d(x, y) < d(x, y) + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{n}$$

Además, tenemos que es trivial que $\{\varepsilon_n\} \to d(x, y)$. Por tanto, por la caracterización del ínfimo con sucesiones, tenemos que

$$d(x, y) = \inf A = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$$

Hemos demostrado que, a partir de las bolas abiertas, podemos conocer la distancia entre dos puntos arbitrarios de E.

En el caso del espacio normado, tenemos que $\|x\| = d(x, 0) = d(0, x)$. Entonces:

$$\|x\| = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid x \in B(0, \varepsilon)\} = \inf\left\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)\right\}$$

donde la primera desigualdad se debe a lo ya demostrado, y la segunda se debe a que:

$$x \in B(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow \|x\| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| < 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)$$

Ejercicio 1.2.2. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$. Probar las siguientes afirmaciones. ¿Son ciertos los resultados análogos en un espacio métrico cualquiera?

1. $B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \Longleftrightarrow ||y - x|| < r + \rho$.

   Al ser un espacio normado, podemos considerar la distancia correspondiente a la norma: $d(x, y) = ||y - x||,\ \forall x, y \in X$. Entonces:

$\Longrightarrow$) Sea $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$. Entonces,

$$||y-x|| = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z) < r + \rho$$

$\Longleftarrow$) Suponemos $||y-x|| = d(x,y) < r+\rho$, y buscamos $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$.

Sea $\lambda := \dfrac{\rho}{r+\rho} \in \mathbb{R}^+$. Consideramos $z := \lambda x + (1-\lambda)y$. Veamos que z está en la intersección:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|z-x\| = \|(1-\lambda)(y-x)\| = |1-\lambda|\ \|y-x\| < \\ &< (1-\lambda)(r+\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{r+\rho}\right)(r+\rho) = \left(\frac{r+\rho-\rho}{r+\rho}\right)(r+\rho) = r \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z \in B(x,r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y,z) &= \|z-y\| = \|\lambda(x-y)\| = |\lambda|\ \|x-y\| < \\ &< \lambda(r+\rho) = \left(\frac{\rho}{r+\rho}\right)(r+\rho) = \rho \Longrightarrow z \in B(y,\rho) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$, por lo que la intersección no es nula.

Este resultado no es cierto para un espacio métrico cualquiera. Sea (X, d_{disc}). Entonces $B_1\left(0, \frac{3}{4}\right) = \{0\}$, $B_2\left(1, \frac{3}{4}\right) = \{1\}$. Se tiene que la intersección es nula. No obstante,

$$d(0,1) = 1 < \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

2. $B(y,\rho) \subset B(x,r) \Longleftrightarrow ||y-x|| < r-\rho$.

   TERMINAR

Ejercicio 1.2.3. Dar un ejemplo de una familia numerable de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección no sea un conjunto abierto.

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea la familia $\left\{]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que, como $\mathbb{N}$ es numerable, el conjunto también lo es. Es directo ver que su intersección es $\{x\}$, el cual no es un abierto porque $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \{x\}$.

Ejercicio 1.2.4. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico E con distancia d, se define la *distancia* de un punto $x \in E$ al conjunto A por

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

Probar que $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$.

$\subset)$ Sea $x \in \overline{A} \subset E$. Entonces, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, sea $z_n \in A$ tal que

$$0 \leqslant d(x, z_n) < \frac{1}{n}$$

Por el lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x, z_n)\} \to 0$. Además, como se tiene que $0 \leqslant d(x, a)\ \forall a \in A$, tenemos que 0 es un minorante del conjunto. Por tanto, por la caracterización del ínfimo con sucesiones[1], tenemos que

$$0 = \text{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\} = d(x, A).$$

$\supset)$ Sea $x \in E$ tal que $d(x, A) = 0 = \text{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Entonces, $\exists \{d(x, z_n)\} \to 0$, con $z_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\exists \{z_n\}$ tal que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, tomando $n \geqslant m$, entonces $d(x, z_n) < \varepsilon$.

Por tanto, $\exists \{z_n\}$ tal que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$, entonces $z_n \in B(x, \varepsilon)$, $z_n \in A$. Entonces, $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, y, consecuentemente, $x \in \overline{A}$.

Ejercicio 1.2.5. Sea X un espacio normado, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, probar que

1. $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$,

   $\subset)$ Tenemos que $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \in \mathcal{C}$. Entonces, como $\overline{B(x, r)}$ es el mínimo cerrado que contiene a $B(x, r)$, y las bolas cerradas son cerrados, tenemos que $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$.

   $\supset)$ Tenemos que $y \in \overline{B(x, r)}$ si y solo si $\exists \{y_n\} \to y$, con $d(x, y_n) < r\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in \overline{B}(x, r)$, es decir, $d(x, y) \leqslant r$. Entonces, definimos la sucesión $\{y_n\} = \{y - \frac{1}{n}(y - x)\}$. Tenemos claramente que $\{y_n\} \to y$. Veamos que $d(x, y_n) < r\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(x, y_n) = d\left(x, y - \frac{1}{n}(y - x)\right) = \left\| y - x - \frac{1}{n}(y - x) \right\| = \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) d(x, y) < d(x, y) \leqslant r$$

   Por tanto, tenemos que existe la sucesión buscada, por lo que $y \in \overline{B}(x, r)$.

   $\supset)$ Hemos de demostrar que $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$. Tenemos que

$$\overline{B}(x, r) = B(x, r) \amalg^{2} S(x, r)$$

   En el caso de $y \in B(x, r)$, tenemos claramente que $B(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$.
   En el caso de $y \in S(x, r)$, tenemos que comprobar que $B(y, \varepsilon) \cap B(x, r) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por el apartado 2 del ejercicio 1.2.2, tenemos que esto se da si y solo si $\|x - y\| < r + \varepsilon$, lo cual es cierto ya que $\|x - y\| = r$, por lo que $S(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$.

   Por tanto, como ambos conjuntos son subconjuntos de $\overline{B(x, r)}$, se tiene de forma directa.

[1] El ínfimo de un conjunto es el único minorante que es límite de una sucesión de elementos del conjunto.

[2] Símbolo de unión de disjunta.

2. $B(x,r) = [\overline{B}(x,r)]^\circ$

   $\subset$) Como las bolas abiertas son abiertos métricos, tenemos la siguiente igualdad: $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ$. Además, tenemos que:

   $$[B(x,r)]^\circ = \bigcup\{U \in \mathcal{T} \mid U \subset B(x,r)\} \qquad \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \bigcup\{V \in \mathcal{T} \mid V \subset \overline{B}(x,r)\}$$

   Como $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$, tenemos que $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ \subset \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$, teniendo por tanto esta inclusión.

   $\supset$) Sea $y \in \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$. Entonces, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(y,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,r)$. Entonces, por el ejercicio 1.2.2, apartado 2, tenemos que $\|x-y\| \leqslant r-\varepsilon < r$. Por tanto, $d(x,y) < r$, por lo que $y \in B(x,r)$.

Deducir que $\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = S(x,r)$.

$$\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \overline{B(x,r)} \setminus [B(x,r)]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$
$$\mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = \overline{\overline{B}(x,r)} \setminus \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$

donde he empleado que $U \in \mathcal{T} \iff A = A^\circ$ y $C \in C_{\mathcal{T}} \iff C = \overline{C}$; junto que las bolas abiertas son abiertos métricos, y las bolas cerradas son cerrados métricos.

¿Son ciertos estos resultados en un espacio métrico cualquiera?
TERMINAR

Ejercicio 1.2.6. Para un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, calcular los conjuntos J°, $\overline{J}$, J' y $\mathrm{Fr}\,J$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculamos en primer lugar el interior para los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
]a,b[&= [a,b]^\circ = [a,b[^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[^\circ \\
]-\infty,b[&=]-\infty,b]^\circ =]-\infty,b[^\circ \\
]a,+\infty[&= [a,+\infty[^\circ =]a,+\infty[^\circ \\
\mathbb{R} &= [\mathbb{R}]^\circ
\end{aligned}$$

Calculamos ahora el cierre de los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} \\
]-\infty,b] &= \overline{]-\infty,b]} = \overline{]-\infty,b[} \\
[a,+\infty[&= \overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} \\
\mathbb{R} &= \overline{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

En este caso, al tratarse de intervalos tenemos que $J' = J^\circ$ para todo intervalo J. Veamos el valor de la frontera:

$$\begin{aligned}
\{a,b\} &= \mathrm{Fr}\,[a,b] = \mathrm{Fr}\,[a,b[= \mathrm{Fr}\,]a,b] = \mathrm{Fr}\,]a,b[\\
\{b\} &= \mathrm{Fr}\,]-\infty,b] = \mathrm{Fr}\,]-\infty,b[\\
\{a\} &= \mathrm{Fr}\,[a,+\infty[= \mathrm{Fr}\,]a,+\infty[\\
\emptyset &= \mathrm{Fr}\,\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. En el espacio métrico $\mathbb{R}$ y para cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, calcular su interior y su cierre, sus puntos de acumulación, sus puntos aislados y su frontera.

Números naturales $\mathbb{N}$:

1. $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset \mathbb{N}$.
2. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \mathbb{N}$
3. $\mathbb{N}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{N} \setminus \{x\} = \emptyset$.
4. $\overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}' = \mathbb{N}$.
5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}^\circ = \mathbb{N}$.

Números enteros $\mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset \mathbb{Z}$.
2. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} \setminus \{x\} = \emptyset$.
4. $\overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$.
5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^\circ = \mathbb{Z}$.

Números racionales $\mathbb{Q}$:

1. $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset \mathbb{Q}$.
2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ya que $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de racionales.
3. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, ya que $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.
4. $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}' = \emptyset$.
5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}$.

Números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

1. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$.
2. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} = \mathbb{R}$, ya que $B(x, \varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de irracionales.
3. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \mathbb{R}$, ya que $B(x, \varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.
4. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \emptyset$.
5. $\mathrm{Fr}([\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]) = \overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.8. Si un subconjunto A de un espacio métrico E verifica que $A' = \emptyset$, probar que la topología inducida por E en A es la discreta. ¿Es cierto el recíproco?

Recordamos que $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$. Además, tenemos que el conjunto de puntos aislados de un espacio métrico es $\overline{A} \setminus A'$. Como $A' = \emptyset$, tenemos que el conjunto de puntos aislados es $\overline{A} \supset A$, por lo que todo punto de A es aislado.

Por tanto, $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \cap B(x, \varepsilon) = \{x\}$. Entonces, tenemos que $A \cap B_A(x, \varepsilon) = \{x\}$. Tenemos que $A \in \mathcal{T}_A$ y $B_A(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_A$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{T}_A$ por ser la intersección de dos abiertos. Además, como la unión arbitraria de abiertos es abierta, tenemos que, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$.

Además, trivialmente se tiene que $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{P}(A) = \mathcal{T}_{disc}$. Por doble inclusión, se tiene que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc}$.

El recíproco indica que, dado $A \subset E$, con $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc} \Longrightarrow A' = \emptyset$. Veamos que no es cierto. Sea $E = \mathbb{R}$ espacio métrico, y consideremos $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

Para ver que $\mathcal{T}_{disc} \subset \mathcal{T}_A$, veamos que $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{T}_A\ \forall \frac{1}{n} \in A$, es decir, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, tenemos que:

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \geqslant \varepsilon$$
$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \geqslant \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ se da. Por tanto, $\{x\} \in \mathcal{T}_A\ \forall x \in A$. Como las uniones arbitrarias de abiertos es abierto, tenemos que $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$. La otra inclusión es trivial, por lo que tenemos que ambas topologías son iguales.

Veamos ahora que $A' \neq \emptyset$, ya que $0 \in A'$. Como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, por definición de convergencia en $\mathbb{R}$ tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$, entonces $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon$. Entonces, tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$B(0, \varepsilon) \cap (A \setminus \{0\}) = B(0, \varepsilon) \cap A = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant n_0\right\} \neq \emptyset \Longrightarrow 0 \in A'.$$

Ejercicio 1.2.9. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes en un espacio métrico E con distancia d. Probar que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente y calcular su límite.

Por ser ambas sucesiones convergentes, tenemos que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$$
$$\{y_n\} \to y \Longrightarrow d(y_n, y) \to 0$$

Además, aplicando las propiedades de la distancia, tenemos que:

$$0 \leqslant |d(x_n, x) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites y por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$.

Vemos ahora lo siguiente:

$$0 \leqslant |d(x_n, y) - d(y_n, y)| \leqslant d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, y) + d(y, y_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites, por el Lema del Sándwich y sabiendo que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$, tenemos que

$$\{d(x_n, y_n)\} \to d(x, y).$$

Ejercicio 1.2.10. Sea $E = \prod\limits_{k=1}^{N} E_k$ un producto de espacios métricos y $A = \prod\limits_{k=1}^{N} A_k \subset E$, donde $A_k \subset E_k$ para todo $k \in \Delta_N$. Probar que $A^\circ = \prod\limits_{k=1}^{N} A_k^\circ$ y $\overline{A} = \prod\limits_{k=1}^{N} \overline{A_k}$. Deducir que A es un abierto de E si, y sólo si, A_k es un abierto de E_k para todo $k \in \Delta_N$, mientras que A es un cerrado de E si, y sólo si, A_k es un cerrado de E_k para todo $k \in \Delta_N$.

TERMINAR

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \to x, \text{ con } x_n \in A = \prod_{k=1}^{N} A_k \iff \\
\iff \exists \{x_n(k)\} \to x(k), \text{ con } x_n(k) \in A_k \iff \\
\iff x(k) \in \overline{A_k}
\end{aligned}$$