Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/˜rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Sistemas Lineales

Estudiaremos sistemas lineales de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t)$$

(Donde notamos por $\mathbb{R}^{d\times d}$ a $M_{d\times d}(\mathbb{R})$) Con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ y $b : I \to \mathbb{R}^d$ funciones continuas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $d = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1d}(t)x_d + b_1(t) \\ \vdots \\ x_d' = a_{d1}(t)x_1 + \cdots + a_{dd}(t)x_d + b_d(t) \end{cases}$$

Ejemplo. Supongamos que tenemos un muelle (con cte k_1) atado a la pared con una masa m_1, conectado con otro muelle (con cte k_2) a otra masa m_2, de forma que a esta se le aplica una fuerza $F(t)$.

Este sistema es descrito mediante $x_1(t)$ y $x_2(t)$, siendo $x_i(t)$ la distancia a la posición de equilibrio de la masa m_i en el instante t.

Suponiendo que inicialmente el primer muelle está dilatado (es decir, $x_1(t_0) > 0$) y que el segundo muelle está contraido ($x_2(t_0) - x_1(t_0) < 0$), aplicando las leyes de Newton:

$$\begin{cases} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) + F(t) \end{cases}$$

La máquina descrita sigue estas ecuaciones diferenciales, que no están en esta categoría, por ser de segundo orden.

Sin embargo, un sistema lineal de cualquier orden se puede hacer siempre de primer orden. Para ello, buscamos transformar dos ecuaciones de segundo orden en 4 ecuaciones de primer orden.

El truco para cambiar orden por dimensión es llamar incógnita a las derivadas: Definimos:

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_1' \qquad y_3 = x_2 \qquad y_4 = x_2'$$

De esta forma:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \dfrac{-k_1}{m_1}y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \dfrac{-k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \dfrac{F(t)}{m_2} \end{cases}$$

Obtenemos ya un sistema de ecuaciones lineal de primer orden. Los físicos dicen que hemos pasado del espacio de las configuraciones al espacio de estados.

Tenemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de las soluciones)**.** *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

*definida en **todo** el intervalo I.*

Para su demostración, será necesario repasar varios conceptos ya vistos en otras asignaturas.

Corolario 1.1.1. *Ahora, si tenemos una ecuación lineal de orden superior:*

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Lo que hacemos es tomar como incógnitas:

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad \dots \qquad y_k = x^{(k-1)}$$

Y plantear el sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \vdots & \vdots \\ y_{k-1}' &= y_k \\ y_k' &= -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \cdots - a_{k-1}(t)y_k + b(t) \end{cases}$$

Con lo que el Teorema de existencia y unicidad del Capítulo anterior es un corolario del Teorema 1.1.

Normas matriciales

Sobre $\mathbb{R}^d$, consideramos una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Esta norma puede inducirse al espacio $\mathbb{R}^{d\times d}$, de forma que:

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| \geqslant 1\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

De forma geométrica, cada A es una transformación del espacio $\mathbb{R}^d$ en sí mismo. Lo que hacemos es tomar el punto más lejano al origen que es imagen de un vector de norma 1 en el dominio.

Notemos que podemos tomar el máximo porque la aplicación $x \mapsto \|Ax\|$ es continua y estamos tomando la imagen de un compacto por una aplicación continua.

Ejemplo. Considerando el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, si tomamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La aplicación asociada a A transforma $\mathbb{S}^1$ en una elipse de eje mayor 2 y eje menor $1/2$, con lo que:

$$\|A\| = 2$$

Las normas matriciales tienen propiedades extra, que ya fueron vistas en Métodos Numéricos I:

Proposición 1.2. *Se verifica que:*

1. $\|I\| = 1$.
2. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
3. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Integrales vectoriales

Supongamos que tenemos $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una función continua en un intervalo compacto, con lo que f tiene d coordenadas: $f = (f_1, \ldots, f_d)$, todas ellas continuas. De esta forma, definimos

$$\int_a^b f(t)\ dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\ dt \\ \int_a^b f_2(t)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix}$$

Proposición 1.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, entonces:*

$$A\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \int_a^b A(f(t))\ dt$$

Proposición 1.4. *Se verifica que:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\ dt$$

Para cualquier norma.

Demostración. Se saca mediante las sumas de Riemann, cogiendo la integral de Riemann. □