Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- <u>Para $n = 0$</u>:

  $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

  Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ ees cierto, es decir, que:

  $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

  $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) &\overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. □

Ejercicio 1.1.2. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

- <u>$n = 0$:</u>

$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

- <u>$n = 1$:</u>

$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

- <u>$n > 1$:</u>

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) n \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

- <u>En el caso base $n = 0$</u>:

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n, $P(n)$ se tiene, como se pedía. □

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n, usar una verdad como $n-k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n+1$.

Ejemplo (Segundo principio de inducción)**.** Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

"n tiene un factor primo"

donde $n \in \omega \setminus \{0,1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- <u>n es primo:</u>

  En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- <u>n no es primo:</u> Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$.
  Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p. Así pues, $p \mid u$ y por tanto:
$$p \mid n$$
  Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$.

□

Notemos que Siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Observación. No conviene usar en el metalenguaje símbolos del lenguaje.

Ejemplo (Principio de Buena Ordenación. Multiplicación por el Método del Campesino Ruso)**.** Sea p la función dada por:

$$p(a,0) = 0,$$
$$p(a,b) = \begin{cases} p\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ \\ p\left(2a, \dfrac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a,b) = ab$.

Observación. Notemos que esta función pasa a binario b y almacena en a tantos "2" como el popcount de b.

Demostración. □