Resúmenes Análisis Matemático I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Resúmenes Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán "JJ"
Irina Kuzyshyn

Granada, 2023-2024

Índice general

Introducción

En el presente libro se podrán encontrar resúmenes de lo básico del temario de la asignatura Análisis Matemático I, sin demostración alguna. En ningún caso con esto basta para comprender a la perfección la asignatura, simplemente es un recurso más para no olvidar lo básico.

1. Espacios euclídeos, normados y métricos

1.1. Espacio Euclídeo

Definición 1.1.
$\mathbb{R}^N \quad N \in \mathbb{N} \quad fijo \quad \Delta_N = \{k \in \mathbb{N}/k <= N\}$
$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_N)/x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\}$
$x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad \longleftrightarrow \quad X : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R} \quad con \quad x(k) = x_k \quad \forall k \in \Delta_N$

Definición 1.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- Suma: $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_N + y_N) \qquad (x + y)(k) = x(k) + y(k) \quad \forall k \in \Delta_N$
- Producto por escalares: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_N) \qquad (\lambda x)(k) = \lambda x(k)$

Así, $\mathbb{R}^N$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Definición 1.3 (Base usual)**.** $\phi = \{e_1, \ldots, e_N\}$

$$e_k(j) = \begin{cases} 1 & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases} \qquad \forall k \in \Delta_N$$

$$x = \sum_{k=1}^{N} x(k)e_k \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Definición 1.4 (Producto escalar)**.** Sean x, $y \in \mathbb{R}^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)$$

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $(\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y)$
2. $(x|y) = (y|x)$
3. $(x|x) > 0$

Un espacio pre-hilbertiano es un nespacio vectorial dotado de un producto escalar.

1.2. Espacios normados

Definición 1.5 (Norma).

$$|| \cdot || : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ||x|| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades.

1. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. $||x|| > 0; \quad ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
4. Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|(x|y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in X$
5. $|||x|| - ||y||| \leqslant ||x \pm y|| \leqslant ||x|| + ||y||$
6. $n \in \mathbb{N}, \quad x_1, \ldots, x_n \in X, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k|| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot ||x_k||$$

Un espacio normado es un espacio vectorial X dotado de una norma.

Ejemplo (Norma de la suma). $||x||_1 = \sum |x(k)|$
Ejemplo (Norma infinito). $||x||_\infty = \text{máx}\{|x(k)|/k \in \Delta_N\}$

1.3. Espacio métrico

Definición 1.6 (Distancia). $d(x, y) = ||y - x||$; $||x|| = d(0, x)$

1. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
4. $d(x, y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in E$
5. $|d(x, z) - d(z, y)| \leqslant d(x, y)$
6. $d(x_0, x_n) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k)$

Cuando tenemos definida una distancia $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, cumpliendo D1, D2 y D3, decimos que E es un espacio métrico. E no tiene que ser un espacio vectorial.

Todo espacio normado X se considera un espacio métrico con la distancia asociada a su norma:

$$d(x, y) = ||y - x||$$

Ejemplo (Distancia discreta).

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

2. Topología de un espacio métrico

2.1. Topología de un espacio métrico

Para lo que sigue sea E un espacio métrico con distancia d.

Definición 2.1. Bolas abiertas de centro x y radio r:

$$B(x,r) = \{y \in E / d(x,y) < r\} \quad x \in E, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

1. $B(x,r) \neq \emptyset$
2. $0 < s < r \Longrightarrow B(x,s) \subset B(x,r)$
3. $\forall y \in B(x,r) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$
4. Se dice $U \in E$ abierto si $\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad B(x,\varepsilon) \subset U$

Definición 2.2 (Topología)**.** En un conjunto no vacío Ω es una familia $T \subset P(\Omega)$ que verifica:

(A1) $\emptyset, \Omega \in T$

(A2) $S \subset T \Longrightarrow \cup S \in T$

(A3) $U, V \in T \Longrightarrow U \cap V \in T$

Un espacio topológico es un conjunto no vacío provisto de una topología.

Definición 2.3 (Normas equivalentes)**.** Dos distancias/normas en un mismo conjunto/espacio vectorial son equivalentes cuando generan una misma topología.

Proposición 2.1 (Inclusion entre las topologías de dos normas)**.** *Para dos normas* $||\cdot||_1||$, $||\cdot||_2$ *definidas en un mismo espacio vectorial* X*, equivalen:*
(i) $\exists \rho > 0 \,/\, ||x||_2 \leqslant \rho ||x||_1 \; \forall x \in X$
(ii) $T_2 \subset T_1$

Corolario 2.1.1 (Criterio de equivalencia entre normas)**.**

$$T_1 = T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda, \rho > 0 \quad / \quad \lambda ||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant \rho ||x||_1 \quad \forall x \in X$$

Definición 2.4 (Topología inducida)**.** Si T es la topología de un espacio métrico E y T_A la de un subconjunto $A \subset E$, entonces:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$$

En particular si $A \in T$, entonces:

$$V \in T_A \quad \Longleftrightarrow \quad V \in T$$

2.2. Primeras nociones topológicas

En todo lo que sigue E espacio métrico, d distancia y T topología.

Definición 2.5 (Interior y entornos)**.**

1. **Interior**:
$$A^o = \cup\{U \in T : U \subset A\}$$
Si $x \in A^o$ entonces decimos que x es **punto interior** de A o que A es entorno de x. Denotamos por $U(x)$ a la **familia de entornos** de x.

2. A^o es el máximo abierto de E contenido en A.

3. $x \in A^o \iff A \in U(x) \iff \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset A$

4. $A \in T \iff A = A^o \iff A \in U(x) \quad \forall x \in A$

5. $A \in U(x), \quad A \subset C \subset E \Longrightarrow C \in U(x)$

6. $\{A_i\}_{i=1\ldots n} \subset U(x) \Longrightarrow \cap_{i=1}^n A_i \in U(x)$

Definición 2.6 (Conjuntos cerrados)**.** Decimos que C es un conjunto cerrado, o simplemente **cerrado** si $E \setminus C \in T$.

$$C_T = \{E \setminus U : U \in T\}$$

1. $\emptyset, E \in C_T$

2. $D \subset C_t \implies \cap D \in C_T$

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, $\{C_i\}_{i=1\ldots n} \subset C_T \implies \cup_{i=1}^n C_i \in C_T$

Definición 2.7 (Cierre)**.**

$$\overline{A} = \cap\{C \in C_T : A \subset C\}$$

1. $\overline{A}$ es el mínimo conjunto cerrado que contiene a A.

2. $A \in C_T \iff A = \overline{A}$

3. $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^o \quad \forall A \in E$

4. $E \setminus A^o = \overline{E \setminus A} \quad \forall A \in E$

Definición 2.8 (Punto adherente a un conjunto)**.** *Sea* $\quad x \in A \Longrightarrow$

$$X \in \overline{A} \quad \iff \quad U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in U(x) \quad \iff \quad B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0$$

Definición 2.9 (Bola cerrada)**.** $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leqslant r\}$

Definición 2.10 (Esfera)**.** $S(x, r) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$

Definición 2.11 (Frontera)**.** $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^o$

1. $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$

2. $Fr(A) \in C_T$
3. $Fr(A) = Fr(E \setminus A)$
4. $\overline{A} = A \cup Fr(A)$ y $A^o = A \setminus Fr(A)$
5. $A \in T \iff A \cap Fr(A) = \emptyset$
6. $A \in C_T \iff Fr(A) \subset A$
7. $E = A^o \cup Fr(A) \cup (E \setminus A)^o$ es una partición de E, es decir:

$$A^o \cap Fr(A) = Fr(A) \cap (E \setminus A)^o = A^o \cap (E \setminus A)^o = \emptyset$$

Definición 2.12 (Puntos de acumulación)**.** Se dice de $x \in A$ si es punto adherente de $A \setminus \{x\}$

$$A' = \overline{A \setminus \{x\}} = \{x \in E : \forall U \in U(x) \quad U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \in E : B(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0\}$$

Definición 2.13 (Puntos aislados)**.**

$$x \in \overline{A} \setminus A' \iff \exists U \in U(x)/U \cap A = \{x\} \iff \exists \varepsilon > 0/B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$$

$$\overline{A} = A' \cup A \implies A \in C_T \iff A' \subset A$$

2.3. Convergencia de sucesiones

En lo que sigue $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E y $x \in E$

$$\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies x_n \in U]$$

Proposición 2.2 (Caracterización de la convergencia usando distancias)**.**

- *En cualquier espacio métrico:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies d(x_n, x) < \varepsilon]$
- *En un espacio normado:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies ||x_n - x|| < \varepsilon]$
- *En* $\mathbb{R}$*:* $\{x_n\} \longrightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \implies |x_n - x| < \varepsilon]$
- $\{x_\} \longrightarrow x \iff \{d(x_n, x)\} \longrightarrow 0$
- $\{x_n\} \longrightarrow x,\ \{x_n\} \longrightarrow y \implies x = y$

Por tanto a ese x al que tiende la sucesión, por ser único, lo llamamos límite.

Proposición 2.3 (Convergencia de parciales)**.**

1. $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x$

2. $\{x_n\} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \{x_{k+n}\} \longrightarrow x$

3. $\{x_n\} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \{x_{2n}\} \longrightarrow x \wedge \{x_{2n+1}\} \longrightarrow x$

Proposición 2.4 (Caracterización del cierre)**.**

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \{x_n\} : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.5 (Caracterización del un conjunto cerrado)**.**

$$A \in C_T \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A \quad \exists \{x_n\} : \{x_n\} \longrightarrow x$$

Proposición 2.6 (Criterio de equivalencia de dos distancias)**.** *Equivalen:*
(1) La topología generada por d_1 está incluida en la generada por d_2
(2) Toda sucesión convergente para d_2 lo es para d_1.

Proposición 2.7 (Convergencia en $\mathbb{R}^N$)**.**

$$\{x_n\} \longrightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \longrightarrow x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$$

3. Continuidad y límite funcional

3.1. Continuidad

Definición 3.1. Se dice que una función $f : E \longrightarrow F$ es continua en un punto cuando:

$$V \in U(f(x)) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Proposición 3.1 (Caracterizacion)**.** *Para $f : E \longrightarrow F$, $x \in E$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(i) f es continua en el punto x
(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ /\ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$
(iii) Sea $x_n \subset E$, $\{x_n\} \longrightarrow x \implies \{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$

Proposición 3.2 (Caracter local)**.**

$$f : E \longrightarrow F, \quad \emptyset \neq A \subset E, \quad x \in A$$

- *f continua en $x \implies f_{|A}$ continua en x*
- *$f_{|A}$ continua en x, $A \in U(x) \implies f$ continua en x*

Definición 3.2. Se dice que f es continua en A, cuando es continua en todos los puntos de A. Si f es continua en todo E se dice simplemente que f es continua.

Proposición 3.3 (Caracterización)**.** *Para $f : E \longrightarrow F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f es continua
(ii) La preimagen de todo abierto es abierta.
(iii) La preimagen de todo cerrado es cerrada.
(iv) Para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

Proposición 3.4 (Caracter local de la continuidad global)**.**

- *$A = A^o$*
$$f \quad continua \quad en \quad A \Longleftrightarrow f_{|A} \quad continua$$
- *$E = U \cup V$ donde $U = U$, $V = V$*
$$f \quad continua \Longleftrightarrow f_{|U} \quad y \quad f_{|V} \quad continuas$$
- *f continua $\Longleftrightarrow \forall x \in E \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) : f_{|U}$ continua.*

3.2. Límite funcional

Definición 3.3. $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene **límite** en el punto α cuando $\exists L \in F$ /

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad x \in A, 0 < d(x, \delta) \implies d(f(x), L) < \varepsilon$$

Además el L es único y decimos que es el límite de f en α:

$$L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$$

Proposición 3.5 (Caracterización)**.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) $L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$
(ii) $\forall V \in \mathcal{U}(L) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) \quad / \quad f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V$
(iii) $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}, \quad \{x_n\} \longrightarrow \alpha \quad \implies \quad \{f(x_n)\} \longrightarrow L$

Proposición 3.6 (Caracter local)**.** $B = \{x \in A : 0 < d(x, \alpha) < r\}, \quad \alpha \in B' \implies$

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha} f_{|B}(x) = L$$

Proposición 3.7 (Relación con la continuidad)**.**

- *Si* $a \in A \setminus A' \quad \implies f$ *continua en* a
- *Si* $a \in A \cap A' \quad \implies f$ *continua en* $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- *Si* $\alpha \in A' \setminus A \implies f$ *continua* $\iff \exists g : A \cup \{\alpha\} \longrightarrow F$, *continua en* α *con* $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A \quad \implies g$ *es única y* $g(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} f(x)$

3.3. Composición de funciones

Proposición 3.8 (Continuidad de la composición)**.** *Sean* G, E, F *espacios métricos.* $\varphi : G \longrightarrow E$, $f : E \longrightarrow F$, $f \circ \varphi : G \longrightarrow F$

$$\varphi \quad \textit{continua} \quad z \in G \quad \wedge \quad f \quad \textit{continua} \quad x = \varphi(z) \quad \implies \quad f \circ \varphi \quad \textit{continua} \quad z$$

$$\varphi, f \quad \textit{continuas} \implies f \circ \varphi \quad \textit{continua}$$

Proposición 3.9 (Cambio de variable para calcular un límite)**.** $f : A \longrightarrow F$, $A \subset E$, $\varphi : T \longrightarrow E$, $T \subset G \quad z \in T', \alpha \in E$. *Si se verifica:*

$$\lim_{t \to z} \varphi(t) = \alpha \quad \wedge \quad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall t \in T \setminus \{z\} \implies$$

$$\alpha \in A' \quad \wedge \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = L \quad \implies \quad \lim_{t \to z} f(\varphi(t)) = L$$

3.4. Ejemplos de funciones continuas

- f constante $\implies$ f continua
- $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$, $F = \emptyset$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$ continua $\implies$ f constante
- La función inclusión es continua
- La función identidad es continua
- La función distancia es continua
- La norma, la suma y el producto por escalares en un espacio normado son funciones continuas.

Definición 3.4 (Proyecciones y componentes)**.** Sea $F = F_1 \times ... \times F_M \neq \emptyset$

- Proyecciones coordenadas: $\pi_k : F \longrightarrow F_k, \quad \pi_k(y) = y(k) \quad \forall y \in F, \quad k \in \Delta_M$
- Componentes de f: $f : E \longrightarrow F, \quad f_k = \pi_k \circ f : E \longrightarrow F_k \quad \forall k \in \Delta_M$

Proposición 3.10 (Caracterización de la continuidad y límite funcional)**.**

- *Si* $F = F_1 \times ... \times F_M$ *es un producto de espacios métricos* $\implies$ π_k *es continua* $\forall k \in \Delta_M$
- $f : E \longrightarrow F \implies f$ *continua en* $x \in E \iff f_k$ *continua en* x $\forall k \in \Delta_M$
- $f : A \longrightarrow F$, $\alpha \in A'$, $y \in F$ $\implies$

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \quad \iff \quad \lim_{x \to \alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

Definición 3.5. $\mathcal{F}(E, Y)$ conjunto de todas las funciones de E en Y, $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, Y espacio vectorial, $f, g \in \mathcal{F}(E, Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$

- Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto: $(\Lambda g)(x) = \Lambda(x) g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto por escalares: $(\lambda g)(x) = \lambda g(x) \quad \forall x \in E$

  Si $f, g \in \mathcal{F}(E), g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$
- Cociente: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in E$

Así. $\mathcal{F}(E, Y)$ es un **espacio vectorial** y $\mathcal{F}(E)$ es un **anillo conmutativo** con unidad.

Proposición 3.11 (Preservación de la continuidad)**.** *En las condiciones de la definición anterior:*

(i) f, g, Λ *continuas* $x \implies f + g, \Lambda g$ *continuas* x

(ii) f, g *continuas* x, $g(E) \subset \mathbb{R}^*$ $\implies \frac{f}{g}$ *continua en* x

Definición 3.6 (Espacio de funciones continuas). $\mathcal{C}(E, Y)$ conjunto de todas las funciones continuas de E en Y.

$$\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$$

$\mathcal{C}(E, Y)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E, Y)$, $\mathcal{C}(E)$ subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E)$

Proposición 3.12 (Calculo de limites).

1. *El límite de la suma es la suma de los límites.*
2. *El límite del producto es el producto de los límites.*
3. *El límite del cociente es el cociente de los límites.*

Definición 3.7 (Campo escalar). $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Definición 3.8 (Campo vectorial). $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

Merece la pena también destacar las funciones polinómicas y las racionales (cociente de polinomios donde el denominador no se anula) como funciones continuas. A continuación podemos ver las relaciones que tienen los distintos espacios:

$$\mathcal{P}(E, Y) \subset \mathcal{R}(E, Y) \subset \mathcal{C}(E, Y) \subset \mathcal{F}(E, Y)$$

4. Compacidad y conexión

4.1. Acotación

Definición 4.1 (Conjunto acotado)**.** E espacio métrico. $A \subset E$. A está acotado cuando está incluido en una bola.

$$A \quad acotado \implies \forall x \in E \quad \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$$

Ejemplo. Todo subconjunto de E está acotado.

Ejemplo. Toda sucesión convergente está acotada.

La acotación no es una propiedad topológica.

$$\rho = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

La distancia d y la ρ son equivalentes, por lo que dan la misma topología; pero dan conjuntos acotados distintos.

Proposición 4.1. *X espacio normado, $A \subset X$:*

$$A \quad acotado \iff \exists M > 0 : ||x|| \leqslant M \quad \forall x \in A$$

Dos normas equivalentes dan lugar a la misma topología.

Proposición 4.2. $X = X_1 \times ... \times X_N$*,* $A \subset X$

$$A \quad acotado \quad \iff \quad \{x(k) : x \in A\} \quad acotado \quad \forall k \in \Delta_N$$

Teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente.*

4.2. Compacidad

Definición 4.2 (Espacio métrico compacto)**.** E es compacto cuando toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente.

Proposición 4.4. *E espacio métrico, $A \subset E$*

$$A \quad compacto \implies A \quad acotado \quad y \quad \overline{A} = A$$

Proposición 4.5.

$$A \subset \mathbb{R}^N \quad compacto \Longleftrightarrow A \quad acotado \quad y \quad \overline{A} = A$$

Teorema 4.6 (Weierstrass)**.** *E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ continua.*

$$E \quad compacto \implies f(E) \quad compacto$$

Proposición 4.7. *E espacio métrico compacto, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

$$\exists u, v \in E : f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in E$$

Teorema 4.8 (Hausdorff)**.**

(i) Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

(ii) Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.

4.3. Conexión

Definición 4.3 (Espacio métrico conexo)**.** E es conexo cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos no vacios disjuntos.

$$E = U \cup V \quad U = U^o \quad V = V^o \quad U \cap V = \emptyset \quad \implies \quad U = \emptyset \quad \vee \quad V = \emptyset$$

Proposición 4.9 (Caracterización)**.** *Sea E espacio métrico. Equivalen:*

(i) E es conexo.

(ii) $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies$ $f(E)$ intervalo

(iii) $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ continua $\implies$ f constante

Proposición 4.10.

$$A \subset \mathbb{R} \quad conexo \quad \Longleftrightarrow \quad A \quad intervalo$$

Teorema 4.11 (del valor intermedio)**.** *E, F espacios métricos, $f : E \longrightarrow F$ continua.*

$$E \quad conexo \implies f(E) \quad conexo$$

Corolario 4.11.1. *E espacio métrico compacto y conexo, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\implies$ $f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado.*

Proposición 4.12. *E es conexo $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E \quad \exists C \subset E$ conexo : $x, y \in C$*

Definición 4.4 (Conjuntos convexos)**.** Sea $E \subset X$, X espacio vectorial. E es convexo cuando:

$$x, y \in E \implies (1 - t)x + ty \in E \quad \forall t \in [0, 1]$$

Ejemplo. Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.

Ejemplo. Las bolas de un espacio normado son convexas, luego conexas.

Ejemplo. $C, D \subset E$ conexos, $C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D$ conexo

5. Práctica 1. Continuidad

5.1. Teoremas relacionados

Teorema 5.1 (Carácter local de la continuidad). *Sean E, F espacios topológicos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $x \in A$.*

Si $f_{\big|A}$ es continua en x con $A \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow f$ es continua en x.

Teorema 5.2 (Cambio de variable). *Sean E, F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in E$:*

Si G es un espacio métrico con $T \subseteq G$ y $\varphi : T \to E$, $z \in T'$ que cumple:

$$\lim_{t \to z} \varphi(t) = \alpha \in E \qquad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall t \in T \setminus \{z\}$$

Entonces, $\alpha \in A'$ y se verifica que:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \to z} f(\varphi(t)) = L$$

Procedemos por tanto a estudiar el siguiente problema:
Sea $A \subset E^m$ espacio métrico producto. Dada $f : A \to F^n$, buscamos saber si f es continua. Notemos que podemos expresar $f = (f_1, \dots, f_n)$, con $f_k = \pi_k \circ f$. Sabemos que f es continua si y solo si f_k es continua $\forall k \in \Delta_n$.

Por tanto, el problema se reduce a estudiar la continuidad de $f_k : E^m \to F$, y por norma general trabajaremos con $F = \mathbb{R}$.

5.2. Parte rutinaria del problema

- Definimos U y comprobamos que U sea abierto.
- Comprobamos que $f_{\big|U}$ sea continua.
- Aplicamos el carácter local de la continuidad y tenemos que f es continua en U.

A continuación se nos presentan distintos puntos problemáticos en los que querremos estudiar el límite. Nos fereriremos a un punto de estos como α. Calculamos:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x)$$

Normalmente, se presentará una indeterminación. A continuación, la intuición nos dirá si debemos intentar probar que el límite no existe o intentar probar la existencia del límite.

Un camino algo más mecánico es comprobar, en este orden, los límites parciales, límites direccionales, intentar probar la existencia de límite y, por último, intentar probar que el límite no existe con un cambio de variable.

5.3. El límite no existe

Si creemos que el límite en α no existe, el procedimiento a seguir es el siguiente:

5.3.1. Límites parciales

Si e_k es el k-ésimo vector de la base usual. Sea $t \in \mathbb{R} \mid x \to \alpha$ si $t \to 0$ con $x \neq \alpha$ si $t \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\alpha + te_k) = L$$

En el caso $n = 2$, si $\alpha = (a, b)$. Entonces:

$$\lim_{x\to(a,b)} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x, b) = \lim_{x\to b} f(a, x) = L$$

- Si uno de los límites parciales no existe, podemos afirmar $(*)$.
- Si existen los dos límites parciales y no son iguales, podemos afirmar $(*)$.
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L, por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L, podemos afirmar $(*)$.

$$(*) \qquad \nexists \lim_{x\to\alpha} f(x)$$

5.3.2. Límites direccionales

$$S = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$$

Sea $u \in S$. Entonces, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) = L \qquad \forall u \in S$$

El cálculo lo haremos con un u genérico que cumpla estas premisas, de forma que:

- Si uno de los límites direccionales no existe, podemos afirmar $(*)$.
- Si el límte direccional depende de u, podemos afirmar $(*)$ al saber que si cambiamos u obtenemos distintos valores del límite.
- En caso de que existan y sean iguales, el único candidato a límite será L, por lo que si por otro método nos sale que el límite no es L, podemos afirmar $(*)$.

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites direccionales.

Límites radiales

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(\alpha + tu) = L \qquad \forall u \in S$$

Hay que tener en cuenta que según el E a veces no podemos estudiar ciertos límites radiales.

Caso $n = 2$:

Coordenadas polares

Sea $u = (u_1, u_2) \in S$. Entonces, tenemos que $\exists_1 \theta \in]-\pi, \pi]$ tal que $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si $\alpha = (a, b)$, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha + tu) = \lim_{\rho\to 0^+} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) = L \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Coordenadas cartesianas

Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En vez de normalizar con $\|u\| = 1$, tomamos:

$$u_1 = 1 \text{ y } u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) = \lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) \overset{t=x-a}{=} \lim_{x\to a}(x, b + \lambda(x - a))$$

Esta última equivalencia es útil para $a = b = 0$.

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) = L \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

5.4. Existencia del límite

La <u>única</u> forma de probar que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}$ es acotando f:

Necesitamos hallar $r \in \mathbb{R}^+$ y $g : B(\alpha, r) \to \mathbb{R}^+$ tal que:

$$0 \leqslant |f(x) - L| \leqslant g(x) \quad \forall x \in B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$$

De tal forma que

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$$

Entonces, por el lema del Sándwich, tenemos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

El estudio fracasado de los límites direccionales puede ayudarnos a la hora de determinar de forma más fácil una acotación:

5.4.1. Acotación por límites direccionales

Si el estudio de los límites direccionales fracasó fue porque:

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) - L = 0 \qquad \forall u \in S$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(\alpha + tu) - L| \leqslant h(t) \qquad \forall u \in S \;\; \forall t \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

En el caso $n = 2$:

5.4.2. Acotación por uso de coordenadas polares

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas polares fracasó fue porque:

$$\lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) - L = 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) - L| \leqslant h(\rho) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \;\; \forall \rho \in]0, r[$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

5.4.3. Acotación por uso de coordenadas cartesianas

Si el estudio de los límites direccionales usando coordenadas cartesianas fracasó fue porque:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t) - L = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0, r[\to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, de forma que:

$$0 \leqslant |f(a + t, b + \lambda t) - L| \leqslant h(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \;\; \forall t \in]-r, r[\setminus\{0\}$$

Tendremos que:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$$

5.5. Último recurso

Si no pudimos encontrar ninguna acotación de f, deberemos intuir que el límite no existe. Para probar esto, tenemos que idear un cambio de variable nuevo:

Si $L \in \mathbb{R}$ es el único posible límite de f en α, podemos probar con un cambio de variable $x = \varphi(t)$ con $0 < t < r$ tal que:

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) \neq \alpha \;\; \forall t \in]0, r[$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = L$$

Luego buscamos φ de forma que $f \circ \varphi$ no tenga límite en 0.

Por ejemplo, en el caso $n = 2$ con $\alpha = (a, b)$, podemos hacer el cambio de variable:

$$\varphi_p(t) = (a + t, b + t^p) \qquad p \in \mathbb{R}^+$$

De forma que calculamos el límite con un $p \in \mathbb{R}^+$ cualquiera y luego fijamos un valor de p para el cual el límite no exista.

Otro recurso que podemos usar es que si $n = 2$ y nuestra función f es un cociente entre dos términos que contienen x e y de forma que el exponente de y es siempre el doble de x, podemos usar el cambio de variable:

$$\varphi_2(t) = (a + t, b + t^2)$$

5.6. Límites famosos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

5.6.1. Cambiar forma de la función

Dada una función a la que le queremos calcular un límite, es recurrente que nos sepamos a qué tiende parte del límite ya que nos es conocido y querramos descomponer la función en dos partes, una de la que conocemos su límite y otra que será más sencillo de calcular. La pregunta es cómo podemos hacer esto formalmente y sin fallos. Para ello, pondremos el ejemplo de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

De tal forma que queremos calcular el límite en el punto $(0, 0)$. Para ello, uno podría pensar que podemos hacer:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Pero debemos tener cuidado, ya que nuestro dominio es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y al cambiar la expresión de f estamos dividiendo por cero al considerar cualquier punto del estilo $(a, 0)$ con $a \neq 0$ en nuestro dominio. Para solucionar este problema, resolveremos el ejercicio de la siguiente forma:

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$\varphi(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \quad \forall y \neq 0 \qquad \varphi(0) = 1$$

Notemos que φ es continua en todo $\mathbb{R}$, al ser $\lim\limits_{y\to 0} \varphi(y) = 1 = \varphi(0)$.

De esta forma, hemos conseguido una función que nos permite hacer lo siguiente:

$$\operatorname{sen} y = y\varphi(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \varphi(y)\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

De esta forma, podemos estudiar f en dos partes:

Por una lado, sabemos que:

$$\lim_{y\to 0} \varphi(y) = \varphi(0) = 1$$

Y por otro, tenemos que podemos acotar fácilmente la función, haciendo que el otro trozo converja a cero:

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant |y|$$

Con $\lim\limits_{y\to 0} y = 0$. Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

Por lo que, finalmente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(y)\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$