
# Análisis Matemático II

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Matemático II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

# Índice general

# 1. Ejercicios Voluntarios

**Teorema 1.1** (Aproximación de Weierstrass)**.** *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces, existe una sucesión de polinomios* $\{P_n\}$ *de manera que* $\{P_n\}$ *converge uniformemente a* $f$ *en* $[0,1]$.

*Demostración.* Definimos la sucesión de polinomios de Bernstein como:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Tenemos claramente que $k, n-k \in \mathbb{N}$, por lo que $B_n(f)(x)$ es un polinomio. Fijado $x \in [0,1]$, calculemos el límite de $B_n(f)(x)$ cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

□

**Definición 1.1.** Un monstruo de Weierstrass es una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ningún punto.

**Ejercicio.** Encontrar un monstruo de Weierstrass y demostrar que lo es.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos\left((n!)^2 x\right)$$

# 2. Prácticas

## 2.1. Sucesiones de funciones

**Ejercicio 2.1.1.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0,\rho]$ y en la semirrecta $[\rho,+\infty[$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que:

$$f_n(0) = \frac{\log(1)}{1} = 0$$

Por tanto, es la sucesión constante 0, por lo que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en 0. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{1+nx}}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

En resumen, tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Para estudiar la convergencia uniforme, estudiamos la monotonía de la función $f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{1+nx}\cdot(1+nx) - \log(1+nx)\cdot n}{(1+nx)^2} = \frac{n - \log(1+nx)\cdot n}{(1+nx)^2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de $f_n$ son:

$$f_n'(x) = 0 \iff \log(1+nx) = 1 \iff 1+nx = e \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Evalucando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \frac{e-1}{n}\right]$, entonces $f_n'(x) > 0$, por lo que $f_n$ es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, entonces $f_n'(x) < 0$, por lo que $f_n$ es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $\rho < \dfrac{e-1}{n}$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$ (podría haber tomado cualquier valor $x_n \in [0, \rho]$, ya que no afecta al límite).
- Si $\rho \geqslant \dfrac{e-1}{n}$, entonces $x_n = \dfrac{e-1}{n} \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$f_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + n \cdot \frac{e-1}{n}\right)}{1 + n \cdot \frac{e-1}{n}} = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} = \{f_n(x_n)\} \to \dfrac{1}{e}$, tenemos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

*Observación.* También sirve tomar $x_n = \frac{1}{n}$, y tendríamos que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\log 2}{2}$.

Para el caso de la semirrecta $[\rho, +\infty[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \frac{e-1}{m}$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \frac{e-1}{n}$. Por tanto, tenemos que $[\rho, +\infty[ \subset \left[\frac{e-1}{n}, +\infty\right[$, por lo que $f_n$ es decreciente en $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{f_n(p)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

**Ejercicio 2.1.2.** Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, donde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Distinguimos en función del valor de $x$:

- Si $|x| < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$1 \leqslant 1 + x^{2n} \leqslant 1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 \leqslant g_n(x) \leqslant \sqrt[n]{2}$$

  Como $\{\sqrt[n]{2}\} \to 1$, por el Lema del Sándwich tenemos que $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| = 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

  $$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \sqrt[n]{1 + 1} = \sqrt[n]{2}$$

  Por tanto, $\{g_n(x)\} \to 1$.

- Si $|x| > 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}$$

Como $\left\{\frac{1}{x^{2n}}\right\} \to 0$, tenemos que $\{g_n(x)\} \to x^2$.

Por tanto, tenemos que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \text{máx}\{1, x^2\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.1.3.** Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$h_n(x, y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos de forma directa que:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} = 0$$

Por tanto, $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}^2$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$, como este está acotado, está acotado para la norma del máximo. Por tanto, existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\text{máx}\{|x|, |y|\} < M$. De esta forma, para todo $(x, y) \in A$, tenemos que:

$$|h_n(x, y)| = \left|\frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2}\right| \leqslant \frac{M^2}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M^2}{n^2}\right\} \to 0$, tenemos que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $A$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$h_n(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{h(x_n, y_n)\} \to \frac{1}{3} \neq 0$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

**Ejercicio 2.1.4.** Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si y solo si $C$ está acotado.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

Por tanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, distinguimos en función de si $C$ está acotado o no:

- Si $C$ está acotado (usamos norma del máximo), entonces existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C$, tenemos que:
$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, como $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\underline{\{f_n\} \text{ converge uniformemente a } 0 \text{ en } C}$.

- Si $C$ no está acotado, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in C$ tal que $|x_n| > n$. Eligiendo esta sucesión de puntos, tenemos que:
$$|f_n(x_n)| = \left|\frac{x_n}{n}\right| > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, tenemos que $\{f_n(x_n)\}$ no puede converger a 0, por lo que se tiene que $\underline{\{f_n\} \text{ no converge uniformemente en } C}$.

**Ejercicio 2.1.5.** Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$g_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\delta, +\infty[$, pero no converge uniformemente en $[0, \delta]$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Para $x = 0$, tenemos que $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$. Para $x > 0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1+n^2x^4} = 0$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}_0^+$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces $x_n = \delta \in [0, \delta]$.
- Si $\delta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \delta]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0,\delta]$. Veamos lo siguiente:

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1+n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}=\frac{2}{1+1}=1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por tanto, como $\{x_n\}\to 0$ y $\{g_n(x_n)-g(x_n)\}=\{g_n(x_n)\}\to 1$, tenemos que $\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0,\delta]$.

Para el caso de la semirrecta $[\delta,+\infty[$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función $g_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Para ello, como $g_n\in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, estudiamos su derivada:

$$g_n'(x)=\frac{4nx(1+n^2x^4)-8n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2}=\frac{-4n^3x^5+4nx}{(1+n^2x^4)^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de $g_n$ son:

$$g_n'(x)=0 \iff -4n^3x^5+4nx=0 \iff 4xn(-n^2x^4+1)=0 \iff x=0 \text{ ó } x=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, entonces $g_n'(x)>0$, por lo que $g_n$ es creciente para todo $n\in\mathbb{N}$.
- Si $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty\right[$, entonces $g_n'(x)<0$, por lo que $g_n$ es decreciente para todo $n\in\mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\delta\in\mathbb{R}^+$, tomamos $m\in\mathbb{N}$ tal que $\delta>\frac{1}{\sqrt{m}}$. De esta forma, para $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant m$, tenemos también que $\delta>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Por tanto, tenemos que $[\delta,+\infty[\,\subset\left[\frac{1}{\sqrt{n}},+\infty\right[$, por lo que $g_n$ es decreciente en $[\delta,+\infty[$. Por tanto, para $n\geqslant m$, tenemos que:

$$|g_n(x)|=g_n(x)\leqslant g_n(\delta) \qquad \forall x\in[\delta,+\infty[$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{g_n(\delta)\}\to 0$, por lo que se deduce que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\delta,+\infty[$.

**Ejercicio 2.1.6.** Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $h_n:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$h_n(x)=n\cos^n x\operatorname{sen}x \qquad \forall x\in[0,\pi/2]$$

Fijado un $\rho\in\,]0,\pi/2[$, probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en $[\rho,\pi/2]$, pero no converge uniformemente en $[0,\rho]$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia puntual. Cabe destacar que, debido al dominio de la función, tanto el seno como el coseno son estrictamente positivos. Fijado $x\in\,]0,\pi/2[$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}n\cos^n x\operatorname{sen}x=0$$

donde he usado que $|\cos x| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, también hemos hecho uso del lema del Sándwich, ya que:

$$0 \leqslant n \cos^n x \operatorname{sen} x \leqslant n \cos^n x = \frac{n}{\cos^{-n} x}$$

Sumándole que, en $x = 0, \pi/2$ se tiene que $h_n(x) = 0$, se tiene que $\{h_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $[0, \pi/2]$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in ]0, \pi/2[$, definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente forma:

- Si $\rho < 1/2$, entonces $x_n = \rho \in [0, \rho]$.
- Si $\rho \geqslant 1/2$, entonces $x_n = 1/n \in [0, \rho]$.

De esta forma, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[0, \rho]$. Veamos lo siguiente:

$$h_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cos^n\left(\frac{1}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} e^0 \cdot 1 = 1$$

Pasar estudiar el primer límite $(*)$, hemos tomado en primer logaritmo neperiano, por lo que luego hemos de usar la exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} -\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Por tanto, como $\{x_n\} \to 0$ y $\{h_n(x_n) - h(x_n)\} = \{h_n(x_n)\} \to 1$, tenemos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$.

Para el caso de $[\rho, \pi/2]$, estudiamos en primer lugar la monotonía de la función $h_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, como $h_n \in C^\infty(]0, \pi/2[)$, estudiamos su derivada:

$$h_n'(x) = n\left(-n \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^2 x + \cos^{n+1} x\right) = n \cos^{n-1} x \left(-n \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos relativos de $h_n$ son:

$$h_n'(x) = 0 \iff \cos^2 x = n \operatorname{sen}^2 x \iff \tan^2 x = \frac{1}{n} \iff x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Evaluando la primera derivada en cada intervalo, tenemos que:

- Si $x \in \left[0, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$, entonces $h_n'(x) > 0$, por lo que $h_n$ es creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, entonces $h_n'(x) < 0$, por lo que $h_n$ es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme. Fijado $\rho \in ]0, \pi/2[$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, lo cual es posible ya que $\left\{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \to 0$. De esta forma, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, tenemos también que $\rho > \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Por tanto, tenemos que $[\rho, \pi/2] \subset \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \pi/2\right]$, por lo que $h_n$ es decreciente en $[\rho, \pi/2]$. Por tanto, para $n \geqslant m$, tenemos que:

$$|h_n(x)| = h_n(x) \leqslant h_n(\rho) \qquad \forall x \in [\rho, \pi/2]$$

Además, por la convergencia puntual, tenemos que $\{h_n(\rho)\} \to 0$, por lo que se deduce que $\{h_n\}$ converge uniformemente a 0 en $[\rho, \pi/2]$.

**Ejercicio 2.1.7.** Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1+n|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+n|x|} = 0$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme. Fijado un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ acotado (en particular, acotado para la norma del máximo), existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in C$. De esta forma, para todo $x \in C$, tenemos que:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{x^2}{1+n|x|}\right| \leqslant \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como $\left\{\frac{M}{n}\right\} \to 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a 0 en $C$.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Tomamos $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, obtenemos una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ de forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

Como $\{\varphi_n(n)\} \to 1 \neq 0$, tenemos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.1.8.** Se considera la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$, con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\varphi_n\}$ en los intervalos $[0, r]$, $[r, \rho]$ y $[\rho, +\infty[$.