# Ecuaciones Diferenciales I
# Examen III

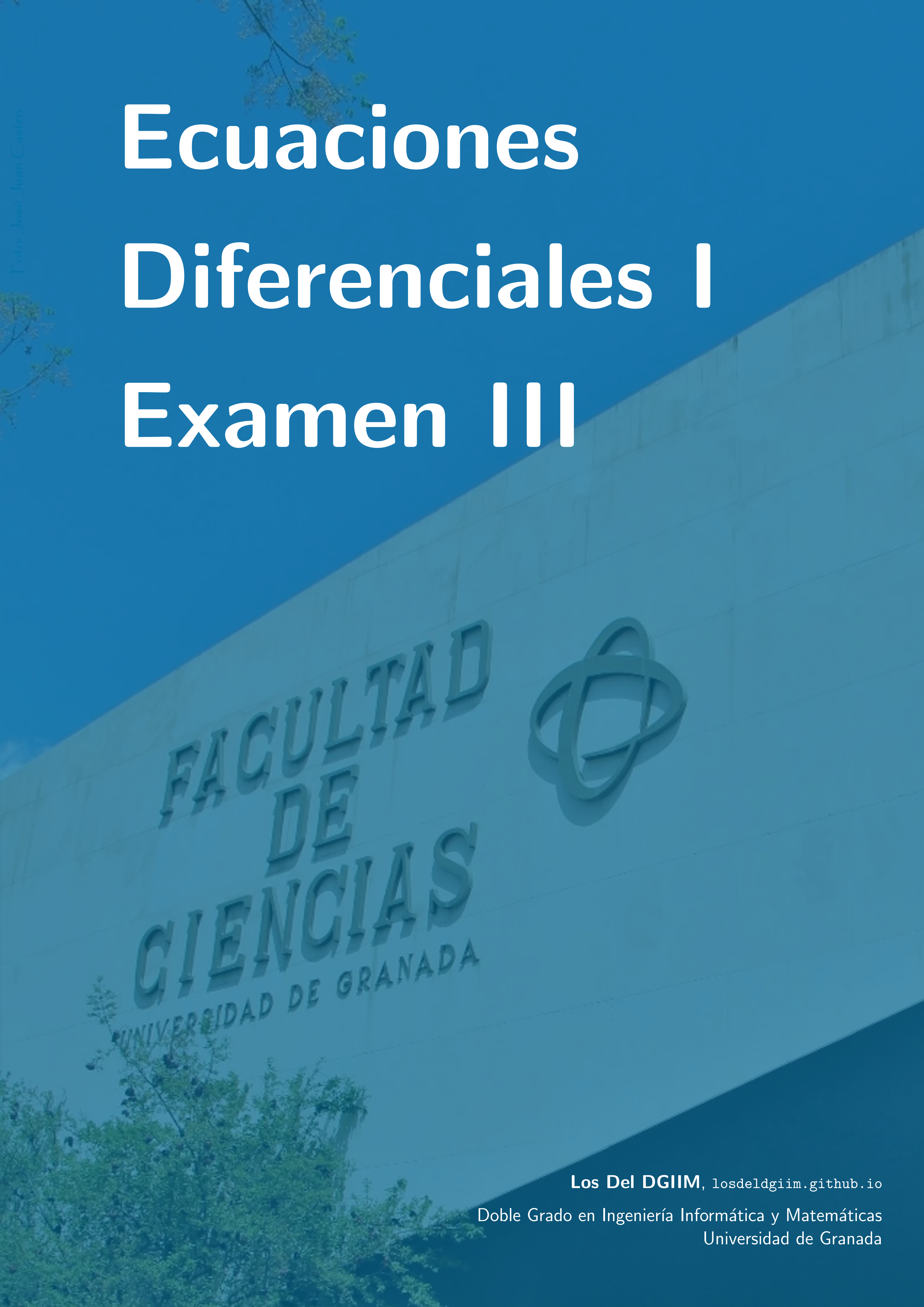


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Ecuaciones Diferenciales I Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Primer parcial.

**Fecha** 31 de octubre de 2023.

**Ejercicio 1.** Pruebe que la siguiente ecuación define una única función implícita $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$:

$$e^x + x^3 + t = 0$$

Pruebe además que la función $x(t)$ es decreciente.

Para que la ecuación anterior defina una única función implícita, hay dos opciones:

**Opción 1** Ver que, para cada $t \in \mathbb{R}$, la ecuación $e^x + x^3 + t = 0$ tiene una única solución.

En primer lugar, demostramos la existencia de una solución. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} f_t : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x + x^3 + t \end{array}$$

Tenemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_t(x) = +\infty$$

Como $f_t$ es continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que existe $x_t \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(x_t) = 0$. Por tanto, la ecuación $e^x + x^3 + t = 0$ tiene solución para cada $t \in \mathbb{R}$. Para estudiar ahora la unicidad, como $f_t$ es derivable, tenemos que:

$$f_t'(x) = e^x + 3x^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $f_t$ es estrictamente creciente, por lo que es inyectiva. Por tanto, la ecuación $e^x + x^3 + t = 0$ tiene una única solución $x_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Sea entonces la función implícita la siguiente:

$$\begin{array}{rccc} x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x_t \end{array}$$

**Opción 2** Aplicar el Teorema de la Función Implícita. Para ello, definimos:

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & e^x + x^3 + t \end{array}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^x + 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 1, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Tenemos en primer que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Buscamos ahora un punto $(t_0, x_0)$ en el cual aplicar el Teorema de la Función Implícita. Como $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) > 0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ (en particular, no se anula), tan solo hemos de imponer que $F(t_0, x_0) = 0$.

**Ejercicio 2.** Se considera la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} F : & ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2}\, ds \end{array}$$

¿Es $F$ de clase $C^1$? En caso afirmativo, calcula la derivada.

**Ejercicio 3.** Encuentra la solución del problema de valores iniciales siguiente:

$$\dot{x} = \left(\frac{x}{t}\right)^3 + \frac{x}{t} - 1, \quad x(1) = 1$$

¿En qué intervalo está definida?

**Ejercicio 4.** Demuestra que las fórmulas

$$s = -e^t, \quad y = (t^2 + 1)x$$

definen un difeomorfismo que va de $D = \mathbb{R}^2$ a un dominio $\hat{D}$ que se especificará. Prueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = x + t$ y encuentra la ecuación transformada.

**Ejercicio 5.** Se considera la transformación en el plano

$$\psi(\theta, r) = (t, x), \quad t = r\cos\theta, \quad x = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad (\theta, r) \in \Omega = ]{-\pi/2}, \pi/2[ \times ]0, +\infty[$$

Determina $\Omega = \psi(\Omega)$ y prueba que $\psi$ es un difeomorfismo de $\Omega$ a $\Omega$. Dada una ecuación $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que el difeomorfismo $\varphi = \psi^{-1}$ es admisible?