

# Topología I

## Examen II

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

## Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** José Antonio Gálvez López.

**Descripción** Parcial del Tema 2.

**Fecha** 21 de diciembre de 2023.

**Duración** 60 minutos.

**Ejercicio 1** (5 puntos). Sean  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  una aplicación abierta. Demostrar que la aplicación  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la ecuación  $g(x) = \|f(x)\|$  no alcanza su máximo en  $X$ ; es decir, no existe  $x_0 \in X$  tal que  $\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\|$  para todo  $x \in X$ .

Como  $f$  es abierta y  $X \in \mathcal{T}$ , entonces  $f(X) \in \mathcal{T}_u$ . Por tanto, para todo  $x \in X$  existe  $r_x \in \mathbb{R}^+$  tal que  $B(f(x), r_x) \subset f(X)$ . Veamos que  $f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \in f(X)$ :

$$\left\| f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - f(x) \right\| = \left\| \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| = \frac{r_x}{2} < r_x$$

Por tanto,  $f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \in B(f(x), r_x) \subset f(X)$ . Por tanto, existe  $x' \in X$  tal que  $f(x') = f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ . Veamos que  $\|f(x')\| > \|f(x)\|$ :

$$\begin{aligned} \|f(x')\| &= \left\| f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| = \left\| \left( 1 + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{1}{\|f(x)\|} \right) \cdot f(x) \right\| = \\ &= \left( 1 + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{1}{\|f(x)\|} \right) \cdot \|f(x)\| > \|f(x)\| \end{aligned}$$

Por tanto, supongamos que existe  $x_0 \in X$  tal que  $\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\|$  para todo  $x \in X$ . Como hemos visto antes, existe  $x'_0 \in X$  tal que  $\|f(x'_0)\| > \|f(x_0)\|$ , por lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, no existe  $x_0 \in X$  tal que  $\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\|$  para todo  $x \in X$ , es decir,  $g$  no alcanza su máximo en  $X$ .

**Ejercicio 2** (5 puntos). Sobre  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  se considera la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  siguiente:

$$(x, y, z) \mathcal{R} (x', y', z') \iff \begin{cases} (x, y, z) = (x', y', z') \\ \vee \\ z = z' = 0 \end{cases}$$

Demuestra que la aplicación  $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \overline{B}[(0, 0), 1]$  dada por

$$F(x, y, z) = z(x, y)$$

induce un homeomorfismo desde  $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \mathcal{R}, \mathcal{T}_u / \mathcal{R})$  en la bola cerrada unidad  $\overline{B}[(0, 0), 1] \subset \mathbb{R}^2$  con su topología usual inducida.

En primer lugar, tenemos que  $F$  es continua, ya que  $F(x, y, z) = z(x, y) = (zx, zy)$ . Como ambas componentes son continuas,  $F$  es continua. Veamos ahora que es sobreyectiva. Sea  $(x, y) \in \overline{B}[(0, 0), 1]$ , es decir,  $x^2 + y^2 = k$ , con  $k \in [0, 1]$ . Sea  $x' = \frac{x}{\sqrt{k}}$ ,  $y' = \frac{y}{\sqrt{k}}$  y  $z' = \sqrt{k}$ . Veamos que  $(x', y', z') \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ :

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k} = \frac{x^2 + y^2}{k} = \frac{k}{k} = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq z' = \sqrt{k} \leq 1$$

Veamos que  $F(x', y', z') = (x, y)$ :

$$F(x', y', z') = z'(x', y') = \sqrt{k} \left( \frac{x}{\sqrt{k}}, \frac{y}{\sqrt{k}} \right) = (x, y)$$

Por tanto, hemos visto que  $F$  es sobreyectiva. Veamos ahora que es cerrada. Para ello, como  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  es cerrado y acotado y es subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , entonces es compacto. Por tanto,  $F$  es cerrada. Como  $F$  es continua, sobreyectiva y cerrada, entonces es una identificación. Veamos ahora que  $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$ , es decir, que  $F$  identifica los puntos de  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  que están relacionados por  $\mathcal{R}$ .

Sean  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . Veamos que:

$$(x, y, z)\mathcal{R}(x', y', z') \iff F(x, y, z) = F(x', y', z')$$

$\implies$ ) Supongamos que  $(x, y, z)\mathcal{R}(x', y', z')$ . Entonces,  $(x, y, z) = (x', y', z')$  o  $z = z' = 0$ . Si  $(x, y, z) = (x', y', z')$ , entonces  $F(x, y, z) = F(x', y', z')$ . Si  $z = z' = 0$ , entonces  $F(x, y, z) = F(x', y', z') = 0$ .

$\impliedby$ ) Supongamos que  $F(x, y, z) = F(x', y', z')$ . Entonces,  $z(x, y) = z'(x', y')$ ; es decir,  $zx = z'x'$  y  $zy = z'y'$ .

- Supongamos  $z = z' \neq 0$ . Entonces, dividiendo entre  $z$ , tenemos que  $x = x'$  y  $y = y'$ . Por tanto,  $(x, y, z) = (x', y', z')$ .
- Supongamos  $z = z' = 0$ . Entonces,  $(x, y, z)\mathcal{R}(x', y', z')$  de forma directa.
- Supongamos  $z \neq z'$ . Veamos que este caso no es posible.

Supongamos, sin pérdida de generalidad,  $z \neq 0$ . Tenemos  $x = \frac{z'x'}{z}$  y  $y = \frac{z'y'}{z}$ . Por tanto,

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{(z')^2(x')^2}{z^2} + \frac{(z')^2(y')^2}{z^2} = \frac{(z')^2}{z^2}((x')^2 + (y')^2) = \frac{(z')^2}{z^2} = 1$$

Por tanto,  $(z')^2 = z^2$ , con  $z, z' \in [0, 1]$ . Por tanto,  $z = z'$ .

Por tanto, como  $F$  es una identificación y  $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$ , entonces  $F$  induce un homeomorfismo desde  $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$  en la bola cerrada unidad  $\overline{B}[(0, 0), 1] \subset \mathbb{R}^2$  con su topología usual inducida, como queríamos demostrar.