

Variable Compleja I

Examen XV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Examen XV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 22 de Junio de 2023.

Duración 3.5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). Integrando una conveniente función sobre la poligonal Γ_R dada por

$$[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$$

con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ejercicio 2 (2.5 + 1.5 puntos). Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞ . Probar que f se anula en algún punto de \mathbb{C}^* .

- Extra Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t + z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1 + t^4} dt$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
2. Probar que la serie de funciones entera $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en \mathbb{C} y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4 (2.5 puntos). Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). Integrando una conveniente función sobre la poligonal Γ_R dada por

$$[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$$

con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Veamos en primer lugar en qué puntos se anula el denominador de mi función a integrar:

$$e^z + e^{-z} = 0 \implies e^{2z} = -1 \implies 2z \in \text{Log}(-1) = i \text{Arg}(-1) = i(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \implies z \in i\pi(1/2 + \mathbb{Z}).$$

Sea por tanto $A = i\pi(1/2 + \mathbb{Z})$. Definimos la función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \end{aligned}$$

Notemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$, y que $A' = \emptyset$, por lo que podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Como \mathbb{C} es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para cualquier ciclo Σ en $\mathbb{C} \setminus A$. Para todo $R \in \mathbb{R}^+$, consideramos la poligonal siguiente:

$$\Gamma_R = [-R, R] + [R, R + \pi i] - [-R + \pi i, R + \pi i] - [-R, -R + \pi i]$$

representada en la Figura 1, donde:

$$\begin{aligned} [-R, R]: [-R, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [R, R + \pi i]: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto R + it \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-R + \pi i, R + \pi i]: [-R, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t + i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-R, -R + \pi i]: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto -R + it \end{aligned}$$

Por el Teorema de los Residuos, tenemos que:

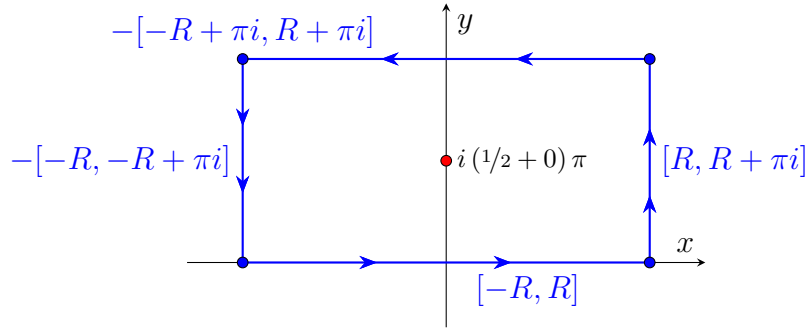
$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in A} \text{Res}(f, z_0) \text{Ind}_{\Gamma_R}(z_0).$$

Calculemos ahora los índices de los polos. Para cada $k \in \mathbb{Z}^*$, tenemos que:

$$|\text{Im}(i(1/2 + k)\pi)| = |(1/2 + k)\pi| > \pi$$

Por tanto, para todo $R \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma_R}(i(1/2 + k)\pi) &= 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^* \\ \text{Ind}_{\Gamma_R}(i(1/2)\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Figura 1: Poligonal de integración Γ_R del Ejercicio 1.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i(1/2)\pi).$$

Antes de calcular el residuo, calculemos las integrales resultantes. Tenemos que:

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} dz$$

Tomando límite con $R \rightarrow +\infty$, la parte que nos interesa es la parte real. Por tanto, vamos por buen camino. Calculamos el resto de las integrales:

$$\left| \int_{[R, R+\pi i]} f(z) dz \right| \leq \pi \cdot \sup \left\{ \left| \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \right| : z \in [R, R+\pi i] \right\}$$

donde, para todo $z \in [R, R+\pi i]^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= e^{-\operatorname{Im} z} \leq e^0 = 1 \\ |e^z + e^{-z}| &\geq ||e^z| - |e^{-z}|| = |e^{\operatorname{Re} z} - e^{-\operatorname{Re} z}| = |e^R - e^{-R}| = e^R - e^{-R}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left| \int_{[R, R+\pi i]} f(z) dz \right| \leq \pi \cdot \frac{1}{e^R - e^{-R}}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > 0$, podemos hacer $R \rightarrow +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[R, R+\pi i]} f(z) dz = 0.$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre el segmento $[-R, -R+\pi i]$:

$$\left| \int_{[-R, -R+\pi i]} f(z) dz \right| \leq \pi \cdot \sup \left\{ \left| \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \right| : z \in [-R, -R+\pi i] \right\}$$

donde, para todo $z \in [-R, -R+\pi i]^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= e^{-\operatorname{Im} z} \leq e^0 = 1 \\ |e^z + e^{-z}| &\geq ||e^z| - |e^{-z}|| = |e^{\operatorname{Re} z} - e^{-\operatorname{Re} z}| = |e^{-R} - e^R| = e^R - e^{-R}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left| \int_{[-R, -R+\pi i]} f(z) dz \right| \leq \pi \cdot \frac{1}{e^R - e^{-R}}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > 0$, podemos hacer $R \rightarrow +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, -R+\pi i]} f(z) dz = 0.$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre el segmento $[-R + \pi i, R + \pi i]$:

$$\begin{aligned} \int_{[-R+\pi i, R+\pi i]} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(t + i\pi) dt = \int_{-R}^R \frac{e^{i(t+i\pi)}}{e^{t+i\pi} + e^{-(t+i\pi)}} dt = \int_{-R}^R \frac{e^{it}e^{-\pi}}{e^te^{i\pi} + e^{-t}e^{-i\pi}} dt = \\ &= e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{-e^t - e^{-t}} dt = -e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt = -e^{-\pi} \int_{-R}^R f(t) dt. \end{aligned}$$

Por tanto, uniendo todas las integrales que hemos calculado, y tomando el límite con $R \rightarrow +\infty$, tenemos que:

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, i(1/2)\pi) = (1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$$

Ahora calculemos el residuo en el punto $i(1/2)\pi$:

$$\lim_{z \rightarrow i \cdot \frac{\pi}{2}} \left(z - i \cdot \frac{\pi}{2} \right) f(z) = \lim_{z \rightarrow i \cdot \frac{\pi}{2}} \left(z - i \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

Por el Teorema de la Regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow i \cdot \frac{\pi}{2}} \left(z - i \cdot \frac{\pi}{2} \right) f(z) = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow i \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^z - e^{-z}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{i - (-i)} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2i}$$

Por tanto, sabemos que f tiene un polo simple en $i \cdot \frac{\pi}{2}$, y que:

$$\operatorname{Res} \left(f, i \cdot \frac{\pi}{2} \right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2i}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \frac{2\pi i \operatorname{Res} \left(f, i \cdot \frac{\pi}{2} \right)}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-\pi}}.$$

Por tanto, como buscamos la parte real de la integral anterior, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-\pi}} \right) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-\pi}}$$

Ejercicio 2 (2.5 + 1.5 puntos). Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞ . Probar que f se anula en algún punto de \mathbb{C}^* .

- Extra Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Opción Complicada y sin el Extra

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty.$$

Supongamos por reducción al absurdo que f no tiene ceros. Entonces, podemos definir:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{f(z)} \end{aligned}$$

Notemos que g es holomorfa en \mathbb{C}^* . Veamos cómo definirla en el origen:

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

donde hemos usado que $f(z) \rightarrow +\infty$ cuando $z \rightarrow 0$. Por tanto, podemos definir (notemos el abuso de notación):

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \in \mathbb{C}^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y g continua en el origen, por el Teorema de Extensión de Riemann, tenemos que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos ahora que g es acotada en \mathbb{C} . Para todo $R \in \mathbb{R}^+$, como g es continua y $\overline{D}(0, R)$ es compacto, tenemos que $g(\overline{D}(0, R))$ es acotado. Además, veamos el comportamiento de g en el infinito:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

donde hemos usado que $f(z) \rightarrow +\infty$ cuando $z \rightarrow +\infty$. Por tanto, tenemos que g es acotada en \mathbb{C} . Por el Teorema de Liouville, tenemos que g es constante, pero esto es una contradicción, puesto que f no es constante. Por tanto, f tiene al menos un cero. Por tanto, $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ y $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $g(z_0) \neq 0$ tal que:

$$f(z) = (z - z_0)g(z)$$

Veamos ahora que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad). Supongamos que f tiene un número infinito de ceros (que sabemos que será numerable). Consideramos la siguiente sucesión de ceros:

$$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Z(f)$$

Como f diverge en $+\infty$, sabemos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, por lo que admite una parcial $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow z_0 \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que $z_0 = 0$. Consideramos la sucesión de imágenes de los ceros:

$$\{f(z_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}} = \{f(0)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{0\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

No obstante, esto contradice el hecho de que f diverge en el origen. Por tanto, $z_0 \neq 0$. Como hemos encontrado un punto de acumulación de $Z(f)$ en \mathbb{C}^* , tenemos que f es idénticamente nula, lo que contradice el hecho de que f diverge en el origen. Por tanto, f tiene un número finito de ceros.

Opción Directa y que, además, incluye el apartado extra

Como f diverge en el origen, sabemos que el 0 es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de f . Por tanto, $\exists \Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

donde $\Psi(0) \neq 0$. De esta forma:

$$\Psi(z) = z^k f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Puesto que conocemos el comportamiento de f en el infinito, sabemos que $\Psi(z)$ diverge en el infinito. Por tanto, como $\Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y Ψ diverge en el infinito, por el Corolario del Teorema de Caseratti, tenemos que Ψ es un polinomio. Como además f diverge en infinito, tenemos que el grado de Ψ es $m \in \mathbb{N}$, donde $m > k$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que Ψ tiene m raíces. Como sabemos que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

Sabemos que $Z(f) = Z(\Psi)$, y por tanto f tiene m ceros.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t + z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1 + t^4} dt$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
2. Probar que la serie de funciones entera $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en \mathbb{C} y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4 (2.5 puntos). Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.