

Variable Compleja

Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 7 de Mayo de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω . Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\int_{C(\pi,1)} g(z) dz$:

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto ze^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos).

1. [1.5 puntos] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3} dz$$

2. [1.5 puntos] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.
3. [1.5 puntos Extra] Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (4 puntos). Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω . Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\int_{C(\pi, 1)} g(z) dz$:

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{aligned}$$

Fijado $z \in \Omega$ se tiene que $\operatorname{Re} z > 1$. En este caso:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{|e^{z \log n}|} = \frac{1}{e^{\operatorname{Re}(z \log n)}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \operatorname{Re} z}} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tratarse de una serie de Riemman con $\alpha = \operatorname{Re} z > 1$, la serie de término general $\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ es convergente, luego la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente.

Respecto a la convergencia uniforme, sea $K \subset \Omega$ compacto, luego cerrado, por lo que existe $M > 1$ tal que $\operatorname{Re} z \geq M$ para todo $z \in K$. Entonces, para todo $z \in K$ se tiene que:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $M > 1$, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^M}$ converge, y por el Test de Weierstrass, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente en K .

Probaremos ahora la continuidad de g en Ω , algo que no tenemos directo por no ser Ω compacto. Fijado $z \in \Omega$, por ser Ω abierto $\exists R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Entonces, tomando $r = R/2$ se tiene que $z \in \overline{D}(z, r) \subset \Omega$, con $K = \overline{D}(z, r)$ compacto. Como K es compacto y el término general de la serie de g está formado por funciones continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de la serie en K nos garantiza que g es continua en $z \in K$. Como z era arbitrario en Ω , se concluye que g es continua en Ω .

Por último, calcularemos dicha integral. Como $\overline{D}(\pi, 1)$ es compacto, la convergencia es uniforme. Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(\pi, 1)} g(z) dz = \int_{C(\pi, 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C(\pi, 1)} \frac{1}{n^z} dz \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

donde en $(*)$ hemos usado que el integrando es holomorfo en Ω , y como Ω es estrellado, por el Teorema Local de Cauchy, este admite primitiva en Ω . Como $C(\pi, 1)$ es un camino cerrado, dicha integral se anula.

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto ze^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Con vistas a aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, definimos las siguientes funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(f(x + iy)) = \operatorname{Re}((x + iy)e^{x-iy}) = \operatorname{Re}((x + iy)(e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y))) \\ &= e^x \operatorname{Re}(x \cos y + y \operatorname{sen} y + i(y \cos y - x \operatorname{sen} y)) = e^x(x \cos y + y \operatorname{sen} y) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(f(x + iy)) = e^x(y \cos y - x \operatorname{sen} y) \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x(x \cos y + y \operatorname{sen} y + \cos y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= e^x(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x(y \cos y - x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x(-y \operatorname{sen} y + \cos y - x \cos y) \end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ e^x(x \cos y + y \operatorname{sen} y + \cos y) &= e^x(-y \operatorname{sen} y + \cos y - x \cos y) \\ 2y \operatorname{sen} y + 2x \cos y &= 0 \\ y \operatorname{sen} y + x \cos y &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ e^x(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y) &= -e^x(y \cos y - x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y) \\ 2y \cos y - 2x \operatorname{sen} y &= 0 \\ y \cos y - x \operatorname{sen} y &= 0 \end{aligned}$$

Como vemos, la resolución de dichas ecuaciones no es trivial, por lo que optamos por otro camino.

Otra forma

Fijado $z \in \mathbb{C}$, veamos si f es derivable en z . Para ello, distinguimos en función de si $z = 0$ o no.

■ Caso $z \neq 0$:

Sea g la siguiente función:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Supuesto que f sea derivable en z entonces g sería derivable en z , puesto que:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

Veamos no obstante que g no es derivable en z . Para ello, definimos $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(g(x + iy)) = \operatorname{Re}(e^{x-iy}) = e^x \cos(-y) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(g(x + iy)) = \operatorname{Im}(e^{x-iy}) = e^x \operatorname{sen}(-y) \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos(-y) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \operatorname{sen}(-y) \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^x \cos(-y) \end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^x \cos(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\cos(-y) = \cos(y) = 0$.

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -e^x \operatorname{sen}(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y) = 0$.

Como no es posible que el seno y el coseno reales se anulen simultáneamente, se concluye que g no es derivable en z . Por tanto, f no es derivable en z .

■ Caso $z = 0$:

Lo calcularemos por la definición formal.

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{\bar{z}}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{\bar{z}} = \exp\left(\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}\right) = \exp\left(\overline{\lim_{z \rightarrow 0} z}\right) = \exp(\bar{0}) = \exp(0) = 1$$

donde hemos usado la continuidad de la exponencial y de la conjugación.

Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 1$.

Por tanto, f es derivable en 0 y no es derivable en ningún otro punto de \mathbb{C} .

Ejercicio 3 (3 puntos).

1. [1.5 puntos] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3} dz$$

Definimos la función f como:

$$\begin{aligned} f : D(0,2) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\cos(z)}{(z-3)^3} \end{aligned}$$

Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = -\frac{2\pi}{27} \cdot i$$

2. [1.5 puntos] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

Como son funciones enteras, para cada $z \in D(0,1)$ se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w-z} dw = g(z)$$

Además, para cada $z \in \mathbb{T}$ también se tiene por hipótesis que $f(z) = g(z)$. Por tanto, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. [1.5 puntos Extra] Probar que, de hecho, $f = g$.

Si consideramos las restricciones a $\Omega = \overline{D}(0,1)$, se tiene que:

$$f|_{\Omega} = g|_{\Omega}$$

Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, como f, g son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en \mathbb{C} . De hecho, considerando el desarrollo de Taylor centrado en el origen, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$