Foto: José Juan Castro

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Índice general

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/~rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

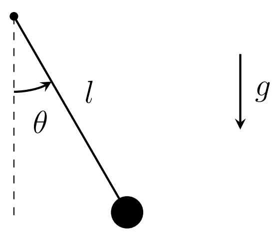
Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área "Ecuaciones Funcionales", pero gracias a que en física $F = m \cdot a$, podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

Ejemplo. Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos l.
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos g.
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos θ.



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo (t), y ver ahora la variable θ como una variable dependiente en función de t:

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si $\theta(t)$ es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación[1]:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) = 0 \tag{1}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones θ que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

[1] De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad\qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente (t, que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función (x, en función de t), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La Φ que aparece en (2) será una función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & \Phi(t, x, y) \end{array}$$

Donde trataremos de ver x como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de t: $x = x(t)$, siendo y su derivada.

Ejemplo. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función Φ en cuestión es:

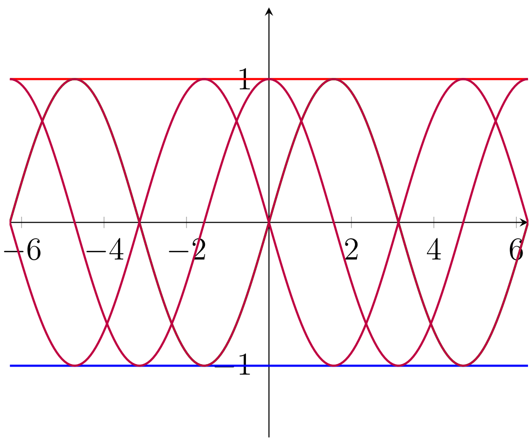
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D = \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{array}{ll} x(t) = \operatorname{sen} t & x(t) = \cos t \\ x(t) = 1 & x(t) = -1 \end{array}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \operatorname{sen}(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geqslant 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en $\mathbb{R}^*$ por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{array}{rrcl} f: & C \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para x': $x'(t) = h(t)$, a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \qquad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \operatorname{sen} t$
- $x'(t) = \operatorname{sen} x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} t$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} t$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} x$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} x$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

1. Ecuaciones y sistemas

Definición 1.1 (Ecuación Diferencial y solución)**.** Una ecuación diferencial viene dada por una función

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,y) & \longmapsto & \Phi(t,x,y) \end{array}$$

continua donde D es un **abierto**[1] **conexo**[2] de $\mathbb{R}^3$.
Una **solución** de dicha ecuación diferencial será una función

$$\begin{array}{rccl} x: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \text{x(t)} \end{array}$$

con $I \subseteq \mathbb{R}^2$ **intervalo**[3] **abierto**[4] tal que:

I) x sea derivable en I[5].

II) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$[6].

III) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

y la expresión:

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}$$

Probar que dicha expresión es solución de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial viene dada por

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,y) & \longmapsto & y - \frac{1}{x} \end{array}$$

- Cogiendo $I =]19, +\infty[$, tenemos I).

[1] Por convenio, ya que las ecuaciones diferenciales no se comportan bien en los bordes.
[2] Es lógico pensarlo, ya que estamos estudiando movimientos.
[3] Es lógico, pues usualmente t será el tiempo.
[4] Pudiendo trabajar con funciones continuas en un cerrado y derivables en el abierto, evitando así por ejemplo tangentes verticales
[5] Necesario para poder considerar $x'(t)$ en la propia ecuación.
[6] En vistas de III).

- Por ser la raíz una función continua y creciente, tenemos que $x(I) =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$, de donde se cumple II).
- $$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t - 38}} = \frac{1}{x(t)} \qquad \forall t \in I$$

Notación. La notación que hemos estado utilizando para las ecuaciones diferenciales no es la que usaremos a lo largo del curso:

Lo que hasta ahora hemos notado y entendido por:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Como en el caso:

$$x'(t) = 3x(t)$$

Lo notaremos ahora por:

$$\Phi(t, x, x') = 0$$
$$x' = 3x$$

Que recordamos tiene por solución:

$$x(t) = c \cdot e^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, resolver:

1. $x' = \lambda x$
$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$
2. $x' = \lambda t$
$$x(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

1.1. Crecimiento proporcional

En el capítulo anterior nos preguntábamos si todas las soluciones de la ecuación $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ eran de la forma

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora daremos respuesta a dicha cuestión, comentando además utilidades de la misma ecuación.

Proposición 1.1. *Dada $x(t)$, solución de $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto I, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad t \in I$$

Antes de dar paso a la demostración, observemos que si suponemos cierta la tesis:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \Longleftrightarrow e^{-\lambda t}x(t) = c \Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)) = 0$$

Demostración. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-\lambda t}x(t) \end{array}$$

que es derivable por ser producto de funciones derivables.

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)) &= -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t}x'(t) \\ &= -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + \lambda e^{-\lambda t}x(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por ser f continua y definida en un intervalo, llegamos a que es constante, luego $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = e^{-\lambda t}x(t) = c \quad \forall t \in I$, de donde deducimos que:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

□

Nos centraremos ahora en la idea intuitiva de derivada como representación de la variación de una variable dependiente para dar lugar a los siguientes dos ejemplos que nos muestran cómo surge la ecuación diferencial $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma natural.

Ejemplo. Si ingresamos un capital inicial $C(0) = 100$ en un banco que nos da el $2\,\%$ anual de interés, al cabo de un año tendremos en nuestra cuenta:

$$C(1) = C(0) + \frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{2}{100} \cdot 100 = 102$$

Sin embargo, si acudimos a otro banco que nos ofrece la misma tasa anual de interés pero que nos realiza pagos semestrales, al cabo de un año conseguiremos reunir:

$$\begin{aligned} C(1/2) &= C(0) + \frac{1}{2}\frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{1}{2}\frac{2}{100} \cdot 100 = 101 \\ C(1) &= C(1/2) + \frac{1}{2}\frac{2}{100}C(1/2) = 101 + \frac{1}{2}\frac{2}{100} \cdot 101 = 102{,}01 > 102 \end{aligned}$$

En general, si Δt es la fracción del año en la que se nos hacen los pagos ($\Delta t = 1$ significa que es pago anual), la fórmula es:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{2}{100}\Delta t C(t)$$

de donde:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{2}{100}C(t)$$

Si ahora vamos a un banco que nos haga pagos continuos, dicha fracción de tiempo será mínima, por lo que podemos pensar que $\Delta t \to 0$ y hacer un paso al límite (no riguroso) para obtener que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t) = \frac{2}{100}C(t)$$

De donde tenemos

$$C' = \frac{2}{100}C$$

o de forma general, si notamos por $I \in \mathbb{R}$ a la tasa de interés:

$$C' = IC$$

Cuyas soluciones ya sabemos que se tratan de cualquier función de la familia:

$$C(t) = c \cdot e^{It} \quad c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el crecimiento del dinero en un banco que nos ofrezca un interés continuo es exponencial. En este ejemplo, vemos cómo el crecimiento del dinero en una cuenta bancaria es exponencial a la propia cantidad de dinero de la que disponemos en la misma.

Ejemplo. La teoría física de la radioactividad nos dice que las sustancias radioactivas van perdiendo masa a una velocidad proporcional a la masa de la propia sustancia. Es decir, si representamos la masa de una sustancia radioactiva como variable dependiente del tiempo $m = m(t)$:

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

Para cierto parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ relativo a la sustancia radioaciva que consideremos.

Gracias al estudio anteriormente realizado de la ecuación diferencial $m' = -\lambda m$, sabemos ya que soluciones de esta son cualesquiera funciones de la forma:

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

En este ejemplo, hemos vuelto a observar la interpretación de la derivada como cuantía de la variación de una determinada variable dependiente.

1.2. Interpretación geométrica

A continuación, trataremos de dar una interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones, basándonos en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que describe la función en dicho punto.

Como ya mencionamos anteriormente, para dar una ecuación diferencial de orden 1 en forma normal nos es suficiente con dar una función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

continua de tal forma que la ecuación diferencial a resolver es

$$x' = f(t,x)$$

cuya solución será una función $x = x(t)$.

Interpretaremos la función f como un campo de direcciones, es decir, a cada punto del plano (t, x) le asignamos un número $f(t, x)$ e interpretaremos dicho número como la pendiente de la recta que pasa por dicho punto.

A partir de dicha función podemos ir construyendo un "campo de direcciones", una regla que a cada punto del plano le asigna una recta que pasa por dicho punto.

Recordando la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ que nos da la igualdad $x'(t) = f(t, x(t))$, en el miembro derecho de esta última tenemos la pendiente asociada a la recta del campo de direcciones del punto $(t, x(t))$, mientras que a la izquierda tenemos la pendiente de la recta tangente a la curva $x = x(t)$ en el punto $(t, x(t))$.

De esta forma, podemos imaginarnos la ecuación diferencial como un campo de direcciones, mientras que las soluciones son curvas que "peinan" dicho campo.

A continución, ilustraremos gráficamente varios campos de direcciones dados por ecuaciones diferenciales y soluciones a dichas ecuaciones diferenciales, mediante varios ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 0$$

Cuyas soluciones son todas las funciones constantes:

$$x(t) = c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

por lo que a cada punto (t, x) del plano le asociamos rectas de pendiente 0 que pasen por dicho punto, es decir, rectas horizontales.

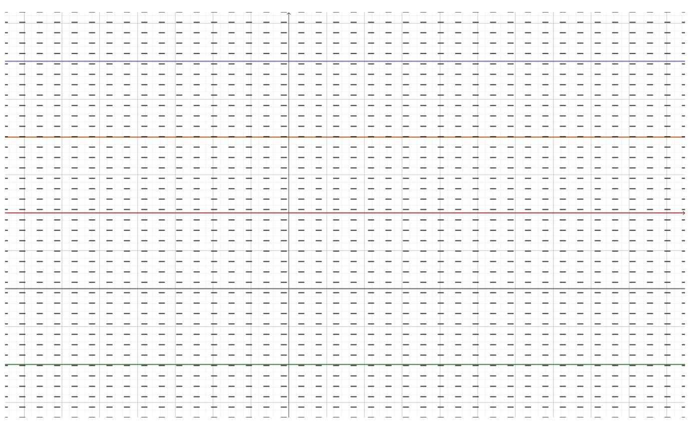


Figura 1.1: Campo de direcciones para $x' = 0$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideremos ahora:

$$x' = 1$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$x(t) = t + c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, el campo de direcciones viene dado por

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

por lo que a cada punto (t, x) le asociamos una recta a 45º de inclinación.

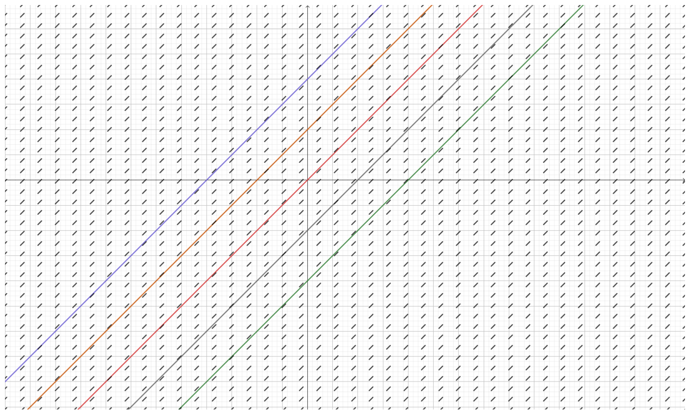


Figura 1.2: Campo de direcciones para $x' = 1$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideramos:

$$x' = x$$

Cuyas soluciones sabemos que son:

$$x(t) = c \cdot e^t \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x \end{array}$$

Para pensar en el campo de direcciones, pensemos en ir dibujándolo por cada recta horizontal del plano:

- Para puntos (t, x) de la recta $x = 0$, tendremos $f(t, x) = 0$, luego para todos los puntos del eje de abscisas tenemos siempre rectas horizontales.
- Para los puntos de la recta $x = 1$, tendremos rectas a 45º de inclinación.
- Para $x = -1$, tendremos rectas a -45º de inclinación.
- De igual forma, para la recta $x = 2$, tendremos rectas más inclinadas que la de 45º.
- De forma análoga, para los puntos de la recta $x = -2$, tendremos rectas más inclinadas que la de -45º.

En definitiva, cuanto más nos alejamos del eje de abscisas, más pendientes se ponen las rectas del campo de direcciones.

Figura 1.3: Campo de direcciones para $x' = x$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideramos:

$$x' = t^2 + x^2$$

Cuyas soluciones se ha demostrado[7] que no tienen fórmula que pueda escribirse con funciones elementales clásicas.

Pese a ello, sabemos que la función que nos da su campo de direcciones es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & t^2 + x^2 \end{array}$$

Para visualizar el campo de direcciones, pensaremos en circunferencias centradas en el origen con distinto radio $r \in \mathbb{R}_0^+$:

- Para $r = 0$, tenemos la circunferencia formada por el punto $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$, luego tenemos que la recta asociada a dicho punto es una recta horizontal.

- Para $r = 1$, tenemos que $t^2 + x^2 = r^2 = 1$ para cada punto (t,x) de dicha circunferencia, luego tenemos una recta a 45º de inclinación en cada punto de dicha circunferencia.

- Para $r = 2$, tenemos que $t^2 + x^2 = r^2 = 4$ para cada punto de la circunferencia, luego tendríamos una recta de mayor inclinación en dichos puntos.

Podemos ya imaginarnos cuál será el campo de direcciones, el cual podemos graficar gracias a los ordenadores:

[7] No se verá por exceder el conocimiento de la presente asignatura.

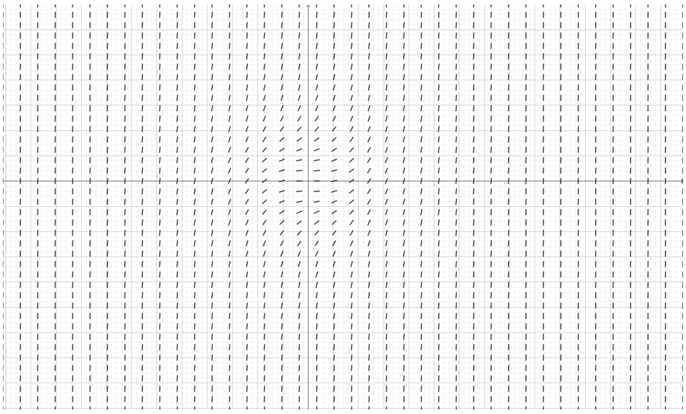


Figura 1.4: Campo de direcciones para $x' = t^2 + x^2$.

No conocemos soluciones para esta ecuación diferencial. Sin embargo, observando el campo de direcciones, observamos que las soluciones son funciones crecientes, con límite a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha.

1.3. Funciones implícitas

Hasta ahora, hemos trabajado principalmente con funciones definidas en forma explícita $x = x(t)$. Sin embargo, en ecuaciones diferenciales es común trabajar con funciones definidas por una ecuación de la forma

$$F(t, x) = 0$$

por lo que tenemos que saber trabajar con ellas.

Cabe destacar que toda función explícita puede ponerse como implícita, pero no toda función implícita dada por una fórmula puede ponerse como función explícita. De esta forma, el estudio que realizaremos a continuación está enfocado a dichas funciones implícitas que no pueden ponerse de forma explícita.

Por lo tanto, si nos encontramos con una ecuación que nos da una función implícita de la cual podemos despejar x, podemos expresar la función de forma explícita y no será necesario aplicar lo aprendido en esta sección.

Ejemplo. La fórmula

$$x - t = 0$$

nos define una ecuación implícita $x = x(t)$, ya que dado un $t \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la fórmula. Sin embargo, dicha función x podemos expresarla de forma explícita, sacando su fórmula despejando x de la fórmula anterior:

$$x(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y podremos trabajar con ella como una función explícita, algo a lo que ya estamos acostumbrados.

Ejemplo. Veamos que la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0 \tag{1.1}$$

nos define una función implícita $x(t)$, es decir, que dado un número $t \in \mathbb{R}$, existe un único valor $x \in \mathbb{R}$ que verifique la fórmula (1.1).

Dado $t \in \mathbb{R}$, hemos de probar la existencia y unicidad de $x \in \mathbb{R}$ tal que verifique la fórmula (1.1). Cuando lo tengamos probado, notaremos $x(t) = x$ para dicho t y tendremos probado que la fórmula (1.1) nos define una función implícita.

Demostración. Demostremos por un lado la existencia y por otro la unicidad:

Existencia.

Dado $t \in \mathbb{R}$, podemos definir el polinomio

$$p_t(x) = x^7 + 3x + t^2$$

Y por ser un polinomio de grado impar, conocemos que al menos tiene una raíz $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la fórmula (1.1)[8].

Unicidad.

Derivamos ahora el polinomio p_t:

$$p_t'(x) = 7x^6 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego es una función estrictamente creciente, por lo que a lo sumo tiene una raíz.

□

Acabamos de ver un ejemplo de fórmula que nos define una única función implícita $x = x(t)$. Nos preguntamos a continuación si cualquier fórmula nos provee de una función implícita. En caso de hacerlo, ¿obtenemos funciones derivables? Dicha pregunta nos servirá de paso para probar que la función implícita $x = x(t)$ del ejempmlo anterior es derivable.

1. Como primera observación sencilla, mostramos que hay ecuaciones que no nos definen ninguna función implícita, como:

   $$x^2 + t^2 = -1$$

   Esto se debe a que, dado $t \in \mathbb{R}$, no podemos encontrar ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifique la ecuación.

2. Además, hay ecuaciones que nos dan más de una función implícita, como el clásico ejemplo de la circunferencia:

   $$x^2 + t^2 = 1$$

   Dicha ecuación nos fabrica dos funciones implícitas que además podemos expresar de forma explícita:

   $$x_1(t) = +\sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$
   $$x_2(t) = -\sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$

[8] Es contenido de Álgebra I, pero puede deducirse ya que tiene límite a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha, y aplicamos el Teorema de Bolzano.

3. Finalmente, observamos que hay funciones implícitas que no se pueden derivar. Por ejemplo, la fórmula:
$$x^3 - t^2 = 0$$
nos da una función implícita que podemos poner como explícita:
$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$
Pero dicha función no es derivable en 0.

En resumen, dada una fórmula que nos relacione dos variables:
$$F(t,x) = 0$$
no podemos asegurar que la función implícita que nos da (en caso de hacerlo) sea derivable, puede pasar cualquier cosa: a veces no define ecuación implícita, a veces define varias, puede definirnos sólo una que no sea derivable, o que sí lo sea, ... No contamos por tanto con una teoría general de ecuaciones implícitas.

Sin embargo, contamos con un resultado bastante útil que ya conocimos en Análisis Matemático I, el Teorema de la Función Implícita[9]. Se trata de un teorema local que da condiciones para que exista la función implícita y sea única, dentro de un entorno suficientemente pequeño.

Teorema 1.2 (Función Implícita). *Sea $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y sea*
$$\begin{array}{rccc} F: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) \end{array}$$
una función de clase $\mathcal{C}^1(G)$, es decir, que existan las parciales respecto a t y respecto a x y que ambas sean continuas.
Sea $(t_0, x_0) \in G$ de forma que $F(t_0, x_0) = 0$ y se cumpla que:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$
Entonces, existe una función
$$\begin{array}{rccc} x: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$
con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto de forma que $x \in \mathcal{C}^1(I)$ y se verifica:

1. *$t_0 \in I$.*
2. *$x(t_0) = x_0$.*
3. *$(t, x(t)) \in G \ \forall t \in I$.*
4. *$F(t, x(t)) = 0 \ \forall t \in I$.*

[9] Aunque en Análisis Matemático I se dio el teorema en su forma más general, en esta asignatura nos interesará el caso de $\mathbb{R}^2$.

Veremos ahora varios usos prácticos del teorema:

Ejemplo. En el caso
$$x^2 + t^2 = 1$$
Tenemos la función
$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x^2+t^2-1 \end{array}$$
que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$:
$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 2x \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$
Buscamos ahora un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ para aplicar el teorema:

- Ha de ser un punto de la circunferencia de radio 1, para que $F(t_0, x_0) = 0$.
- Además, ha de ser $x_0 \neq 0$, para que:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = 2x_0 \neq 0$$

De esta forma, podemos elegir cualquier punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ para aplicar el teorema. Por tanto, dado cualquier punto $t_0 \in \,]-1,1[$, el teorema nos dice que hay un intervalo abierto I de forma que $t_0 \in I \subseteq \,]-1,1[$ en el que la función (ya sea la anterior x_1 o x_2 de la última enumeración) es derivable.

Es cierto que sabíamos ya de antemano la existencia de dichas funciones, pero en caso de no saberlo el Teorema nos garantiza dicha existencia. Este es el primer uso del teorema.

Ejemplo. En el caso del ejemplo anterior, la fórmula
$$x^7 + 3x + t^2 = 0$$
ya sabemos que existe la función implícita, pero no sabemos si dicha función es derivable o no. Usaremos el Teorema de la Función Implícita para probar que la función $x = x(t)$ que nos da la fórmula es derivable.
Sea $G = \mathbb{R}^2$ y $F(t,x) = x^7 + 3x + t^2$ que es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$:
$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 7x^6 + 3 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$
Notemos que:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 7x^6 + 3 > 0$$
Por lo que podemos elegir cualquier punto en el que $F(t,x) = 0$ para aplicar el teorema, obteniendo que la función x es derivable.

Este es el segundo uso práctico del teorema, probar de forma fácil que una función implícita que ya conocemos es derivable.

Ejemplo. Anteriormente, vimos que la fórmula

$$x^3 - t^2 = 0$$

que define una función implícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

no era derivable. Comprobamos qué hipótesis es la que falla del teorema:
Tenemos

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x^3 - t^2 \end{array}$$

con parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3x^2 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

luego $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. En el ejemplo anterior, fallaba la derivabilidad en $t_0 = 0$, luego comprobamos por qué la función no es derivable:
En primer lugar, para tener que $x_0^3 - t_0^2 = 0$ con $t_0 = 0$ ha de ser $x_0 = 0$. Sin embargo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$$

Luego no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita.

1.3.1. Derivación implícita

Hasta ahora, tenemos una forma de probar la existencia de funciones implícitas así como su derivabilidad, pero no sabemos cómo derivarlas, lo cual trataremos de resolver a continuación.

Usualmente, tendremos una función

$$\begin{array}{rccc} F: & G \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) \end{array}$$

de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que verifique las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, de forma que:

$$F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I \tag{1.2}$$

para cierta función $x = x(t)$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto. Nuestro objetivo será derivar la expresión anterior.

Proposición 1.3. *Dadas unas funciones F como la definida anteriormente, x y t funciones reales de variable real de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y una función como resultado de la composición de funciones:*

$$s \longmapsto (t(s), x(s)) \longmapsto F(t(s), x(s))$$

que es también una función real de variable real de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$\frac{d}{ds}[F(t(s), x(s))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s), x(s)) \cdot t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s), x(s)) \cdot x'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Usando esta proposición sobre la fórmula (1.2), llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{dF}{dt}(t,x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

Que no se encuentra en forma normal. Sin embargo, es usual haber aplicado el Teorema de la Función Implícita antes de este resultado, luego, suponiendo que estamos bajo dichas hipótesis, tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t)) \neq 0$$

en un entorno de t, por lo que en dicho caso sí que podremos despejar la ecuación diferencial anterior, para expresarla en forma normal:

$$x'(t) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x(t))}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x(t))}$$

1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones

Al igual que sucede con los polinomios y sus raíces, es mucho más simple construir una ecuación diferencial a partir de una familia de soluciones a obtener la familia de funciones que resuelve una ecuación diferencial.

En esta sección, nos centraremos en cómo construir una ecuación diferencial de primer orden a partir de una familia uniparamétrica de funciones implícitas.

Para ello, nos darán una ecuación del tipo:

$$F(t,x,c) = 0$$

siendo c el parámetro, y definiéndonos una familia de funciones implícitas, de donde obtenemos la función implícita $x = x(t)$, y llegamos a:

$$F(t,x(t),c) = 0$$

y lo que haremos para obtener la ecuación diferencial es derivar:

$$\frac{dF}{dt}(t,x(t),c) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t),c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t),c) \cdot x'(t) = 0$$

Que no es una ecuación diferencial, sino una familia de ecuaciones diferenciales, ya que para cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos una ecuación diferencial distinta.

El último paso, por tanto, es tratar de expresar c en función de x y de t, para sustituirlo y obtener finalmente la ecuación diferencial:

$$\left.\begin{aligned} F(t,x(t),c) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t),c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t),c) \cdot x'(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Despejar } c} \Phi(t,x,x') = 0$$

No es necesario hacer este proceso de forma rigurosa, ya que lo único que nos pedirán es obtener una ecuación difrencial que tenga por soluciones la familia uniparamétrica de funciones dada. Por tanto, siempre y cuando consigamos este objetivo, podemos responder a la pregunta simplemente dando la ecuación diferencial y probando que, efectivamente, dicha familia es solución de la ecuación.

Ejemplo. Hallar la ecuación diferencial que tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x^2 + t^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

En primer lugar, ya sabemos que dicha fórmula nos da una familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c - t^2}, \quad t \in \left]-c, c\right[$$

Tratamos ahora de hallar la ecuación diferencial que nos solicitan, que lo haremos derivando en ambos miembros de la fórmula (1.3):

$$\begin{gathered} \left(x(t)\right)^2 + t^2 = c \\ \frac{d}{dt}\left(\left(x(t)\right)^2 + t^2\right) = \frac{d}{dt}(c) \\ 2xx' + 2t = 0 \end{gathered}$$

En este caso, no ha sido necesario despejar c para sustituirlo al final del cálculo anterior, ya que directamente ha desaparecido de la ecuación diferencial. De esta forma, la ecuación diferencial buscada es:

$$2xx' + 2t = 0$$

Que podemos expresar en forma normal como:

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Observación. Notemos que acabamos de aprender a resolver la ecuación diferencial

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c - t^2} \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \left]-c, c\right[$$

Para el dominio de la función hemos elegido el intervalo abierto, ya que al ser una solución de una ecuación diferencial, tiene que estar definida en un abierto conexo, tal y como concretamos en la definición de una solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo. Buscar una ecuación diferencial que tenga como soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$\frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \operatorname{sen} t = c \tag{1.4}$$

Tendríamos que $F(t, x, c) = \frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \operatorname{sen} t - c$ y ahora derivaremos de forma implícita, pensando que la fórmula nos da una función $x = x(t)$:

$$\frac{dF}{dt}(t,x,c) = e^{cx}x' - 2x'x - \cos t = 0 \tag{1.5}$$

Ahora, nos disponemos a eliminar el parámetro c. Despejando en la fórmula (1.5) llegamos a que:

$$\begin{aligned}
e^{cx} &= \frac{2xx' + \cos t}{x'} \\
cx &= \ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right) \\
\frac{1}{c} &= \frac{x}{\ln\left(\dfrac{2xx' + \cos t}{x'}\right)}
\end{aligned}$$

Y ahora sustituyendo c y $\frac{1}{c}$ en (1.4), tenemos que la ecuación diferencial buscada es:

$$\frac{x}{\ln\left(\dfrac{2xx' + \cos t}{x'}\right)} \frac{2xx' + \cos t}{x'} - x^2 - \operatorname{sen} t - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right) = 0$$

1.5. Problemas geométricos

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales es hallar curvas exigiendo condiciones sobre sus tangentes o normales. Por ejemplo, podemos tratar de hallar la curva cuyas normales sean todas coincidentes en un mismo punto.

Notación. En esta sección haremos un cambio de notación, ya que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ya no serán movimientos donde tratamos de expresar la posición x de un móvil en función del tiempo t, $x = x(t)$; sino que las soluciones serán curvas geométricas, por lo que trataremos de, dada una abscisa x, hallar la coordenada en las ordenadas y que nos diga un punto de la curva, $y = y(x)$.

De esta forma, sustituiremos la notación que venimos usando de las ecuaciones diferenciales $F(t,x) = 0$ por la notación $F(x,y) = 0$.

Aunque toda curva en el plano puede expresarse con una ecuación implícita (esto no sucede con explícitas), supondremos siempre que las curvas las podremos poner en explícitas, con la finalidad de que nos aparezcan siempre ecuaciones de primer orden (usando ecuaciones paramétricas, por ejemplo, obtenemos sistemas de ecuaciones).

De esta forma, trabajaremos con curvas $y = y(x)$ con $x \in I$ intervalo abierto, siendo $y \in \mathcal{C}^1(I)$[10].

Rectas tangentes a una curva

Sabemos ya que, dada una curva $y = y(x)$, podemos encontrar en cada punto $(x, y(x))$ una recta tangete a dicha curva. A medida que movemos el punto por la

[10]Con vistas para derivar y aplicar el Teorema de la Función Implícita.

curva, vamos obteniendo todo el haz de rectas que son tangentes a dicha curva.

Dado un punto $(x, y(x))$ de una curva $y = y(x)$, la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto viene dada por:

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

siendo u y v las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación[11].

Dado $x \in \mathbb{R}$, el punto $(x, y(x))$ nos da una recta tangente a la curva por dicho punto. Si movemos la variable u, nos estaremos moviendo a lo largo de la recta tangete. Si ahora también movemos x, nos estaremos moviendo por todo el haz de rectas.

Rectas normales a una curva

Dada una curva $y = y(x)$, podemos encontrar también en cada punto $(x, y(x))$ una recta normal a dicha curva (esto es, que sea perpendicular a la recta tangente en dicho punto) que pase por el mismo punto.

Para hallar la ecuación de dicha recta, pensamos en que debe pasar por el punto $(x, y(x))$ y en que debe ser perpendicular a la recta tangente. De esta forma, si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangente y normal respectivamente, tenemos que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Longrightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Como la pendiente en la recta tangente es $m_1 = y'(x)$, tenemos ya la ecuación de la recta normal a una curva en el punto $(x, y(x))$, siempre y cuando $y'(x) \neq 0$:

$$v - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u - x) \tag{1.6}$$

siendo u y v las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación.

Sin embargo, podemos expresar dicha ecuación como:

$$y'(x)(v - y(x)) = x - u$$

Y ya podremos considerarla también cuando $y'(x) = 0$.

Ejemplo. Buscamos la curva para la que todas las rectas normales pasan por el origen[12].

Para ello, buscamos expresar y como función de x para obtener la curva deseada: $y = y(x)$. Cuando vamos considerando todas las rectas normales, lo que hacemos es mover la ecuación de la recta normal por los puntos $(x, y(x))$ que cumplen la curva.

[11] Notemos que no podemos usar x e y como variables por ser ya un punto que hemos fijado de la curva por el que queremos hacer pasar la recta tangente.

[12] Notemos que si tenemos otro punto, podemos trasladar todo el problema al origen, trasladando de nuevo la solución a dicho punto.

Debemos imponer que todas las rectas normales de ecuación (1.6) pasen por el origen, es decir, que la ecuación de las rectas normales se cumpla para el punto $(0,0)$ siempre. Esto sucede cuando $u = v = 0$, para cada punto $(x, y(x))$ de la curva.

Luego se cumple que:

$$y'(x)y(x) = x$$

Ecuación diferencial que no está en forma normal:

$$y'y + x = 0$$

Pasaremos a resolverla con un truco que aprenderemos en el Capítulo 3:

Para ello, buscamos expresar la ecuación diferencial como la derivada de una expresión igualdada a 0, luego esta nueva expresión será constante, y obtendremos una ecuación que nos defina una función implícita:

$$\begin{aligned}
y'(x)y(x) + x &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right) &= 0 \\
\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 &= c \quad c \in \mathbb{R}^+ \\
(y(x))^2 + x^2 &= k
\end{aligned}$$

Dicha curva es una circunferencia centrada en el origen de radio k^2. Estamos buscando la solución en explícitas, luego despejamos y obtenemos:

$$y(x) = \pm\sqrt{k - x^2} \qquad x \in \left]-\sqrt{k}, \sqrt{k}\right[$$

(Hemos puesto el intervalo abierto por ser solución de una ecuación diferencial, luego debe estar definida en un abierto).

1.5.1. Trayectorias ortogonales

Dada una familia $\mathcal{F}$ de curvas uniparamétricas en la plano mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, c) = 0 \qquad c \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

de forma que por cada punto del plano pase una curva de este tipo, buscamos otra familia $\mathcal{G}$ de curvas uniparamétricas de forma que corten ortogonalmente a las curvas de la familia $\mathcal{F}$. Llamaremos a las curvas de $\mathcal{G}$ trayectorias ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$.

El procedimiento a seguir será obtener la ecuación diferencial que nos define a la familia $\mathcal{F}$, de la cual obtendremos la ecuación diferencial que define a la familia $\mathcal{G}$, obligando a que el producto de las derivadas de las curvas sea -1. Finalmente, resolveremos esta segunda ecuación diferencial, para obtener la ecuación que nos defina la familia de curvas uniparamétricas del plano.

Por tanto, con vistas a obtener la ecuación diferencial que define a la familia $\mathcal{F}$, derivaremos la ecuación (1.7):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,c)y' = 0 \tag{1.8}$$

Ahora, juntaremos las expresiones (1.7) y (1.8) para eliminar el parámetro c, obteniendo la ecuación diferenecial de la familia $\mathcal{F}$, de la forma que aprendimos en la Sección 1.4 y la pondremos en forma normal:

$$y' = f(x,y)$$

Suponiendo que podemos dividir, la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales $\mathcal{G}$ será:

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

Ahora, bastará resolver la ecuación diferenecial obtenida para obtener una ecuación implícita que nos define la familia uniparamétrica de funciones:

$$G(x,y,k) = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Demostrar que las trayectorias ortogonales a la familia:

$$x^2 + y^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}^+$$

son las rectas que pasan por el origen.

Para ello, derivaremos dicha expresión entendiendo que y está en función de x:

$$2x + 2yy' = 0$$

Suponiendo que $y \neq 0$, llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia dada:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Suponiendo ahora que $x \neq 0$, llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{y}{x}$$

A poco que se piense[13], llegamos a que tiene por soluciones la familia

$$y(x) = k \cdot x \qquad k \in \mathbb{R}$$

Estas son las rectas que pasan por el origen.

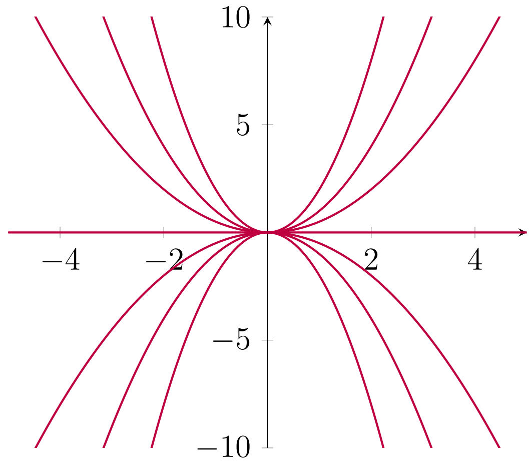
Ejemplo. Consideramos la siguiente ecuación que nos describe una familia uniparamétrica $\mathcal{F}$:

$$y = cx^2 \qquad c \in \mathbb{R}$$

Buscamos la familia de trayectorias ortogonales.

La familia $\mathcal{F}$ es la familia de parábolas con vértices en el origen:

[13] En futuros temas aprenderemos a resolver más tipos de ecuaciones diferenciales.



Con vistas a obtener la ecuación diferencial que nos describa a la familia, derivamos:

$$y = cx^2$$
$$y' = 2cx$$

Despejando, obtenemos el valor de c:

$$c = \frac{y}{x^2}$$

Ssustituimos este valor en la segunda expresión, obteniendo la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

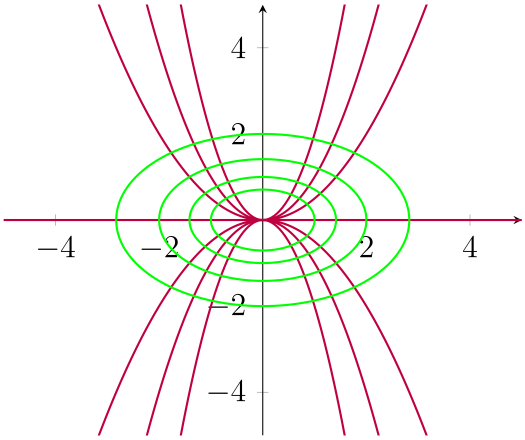
Ahora, escribimos la ecución diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial a resolver, mediante el mismo truco que antes:

$$2yy' + x = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$
$$y^2 + \frac{x^2}{2} = k \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Estas son las elipses de eje mayor $\sqrt{2}$ (en el de abscisas) y eje menor 1 (cuando $k = 1$):



1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Nos centramos ahora en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de $d \in \mathbb{N}$ ecuaciones será de la forma:

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_d) \qquad i = 1, \ldots, d$$

Y nuestras incógnitas serán:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_d = x_d(t)$$

Las familias de funciones que obtendremos ahora dependerán de d parámetros.

Ejemplo. Un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = -x_1 \end{cases}$$

Una solución que podemos ver fácil es:

$$x_1(t) = \operatorname{sen} t$$
$$x_2(t) = \cos t$$

Otra es:

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, llegamos a la familia de soluciones:

$$x_1(t) = k \operatorname{sen} t$$
$$x_2(t) = k \cos t$$
$$k \in \mathbb{R}$$

Que no son todas las soluciones, ya que sólo tenemos una familia uniparamétrica. Para hallar otro parámetro, podemos cambiar la fase de las funciones trigonométricas:

$$x_1(t) = b \operatorname{sen}(t + a)$$
$$x_2(t) = b \cos(t + a)$$
$$a, b \in \mathbb{R}$$

En el último Capítulo, aprenderemos a demostrar que esta familia nos da todas las soluciones. Dicha familia se puede escribir también como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \\ &c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio. Demostrar que ambas familias de funciones son las mismas:

$$\begin{cases} x_1(t) &= b \operatorname{sen}(t+a) \\ x_2(t) &= b \cos(t+a) \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y_1(t) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Curvas en paramétricas

Volveremos a la notación x e y para las variables, y nos centraremos en las ecuaciones paramétricas. Esto es, dar x e y en función de una variable independiente t, por lo que ahora tendremos dos funciones: Estas son:

$$\begin{array}{rccc} x, y: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t), y(t) \end{array}$$

La diferencia entre implícitas y paramétricas es que ahora pensamos en una curva como un movimiento, no como un lugar geométrico que cumple una cierta propiedad:

$$F(x, y) = 0$$

Dado un instante de tiempo t, el móvil que realiza el movimiento se encontrará en el punto $(x(t), y(t))$. Podemos encontrar muchas parametrizaciones para una misma curva (ya que puede recorrerse de distintas formas).

Ejemplo. Podemos dibujar $\frac{3}{4}$ de una circunferencia mediante la curva en paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \operatorname{sen} t \\ t \in I &= \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

Definición 1.2 (Órbita)**.** Dada una curva en paramétricas mediante dos funciones

$$\begin{array}{rccc} x, y: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t), y(t) \end{array}$$

El lugar geométrico de todos los puntos del plano por el que pasa dicho movimiento es:

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

al que llamaremos órbita.

1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano

Dado un sistema autónomo en el plano, es decir, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (para así obtener una curva plana) de forma que la variable independiente t no aparezca en las ecuaciones del sistema (aunque x e y sean dependientes de t). Dicho sistema será de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array} \right.$$

Para ciertas funciones

$$\begin{array}{rrcl} f,g: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y), g(x,y) \end{array}$$

Con D un conjunto abierto y conexo, f y g funciones continuas.

Tratamos de buscar soluciones

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Buscar las soluciones de cualquier sistema de esta forma es demasiado difícil. Nos centraremos por ahora simplemente en calcular las órbias del sistema. Esto es, sabremos calcular el lugar geométrico de los puntos del plano por el que pasan las soluciones, pero no sabremos calcular cómo son los movimientos que describen las soluciones.

De forma **NO RIGUROSA**, en física se da un sistema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{array} \right.$$

Y se saca la órbita poniendo y en función de x dividiendo:

$$\frac{\frac{dy}{\cancel{dt}}}{\frac{dx}{\cancel{dt}}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

En lo sucesivo, trataremos de dar un fundamento teórico a esta cuenta, con el fin de aprender por qué podemos realizarla y dar condiciones para cuándo poder hacerlo.

Ejemplo. Vamos a ver un ejemplo en el que la cuenta anterior funciona. Tomamos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' & = y \\ y' & = -x \end{array} \right.$$

Del que podemos coger como una solución las funciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \operatorname{sen} t \\ y(t) &= -2 \cos t \\ t &\in \left]0, \pi\right[\end{aligned}$$

Suponiendo que podemos dividir:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

En la notación usual, esta es la ecuación:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Sus soluciones veremos que son:

$$y^2 + x^2 = c$$

La ecuación en implícitas de la órbita para dicha solución concreta es:

$$y^2 + x^2 = 4$$

Por tanto, el cálculo parace que funciona.

Función inversa

Hagamos un breve repaso de lo que sabemos sobre funciones inversas.

- Podemos pensar en la noción conjuntista de función inversa: dada una función $f : I \to J$, si esta función es biyectiva, podemos encontrar una función $f^{-1} : J \to I$ tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_I \\ f \circ f^{-1} &= id_J \end{aligned}$$

- O también podemos pensar en la noción clásica de función inversa: si tenemos una variable x dependiente de t: $x = f(t)$, bajo unas ciertas condiciones podemos encontrar una función g de forma que hagamos t depender de x: $t = g(x)$.

Para este apartado, dada una función:

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, siempre que esta sea inyectiva, obtendremos una nueva función restringiendo el codominio de f a $f(I)$, una función biyectiva que sí tendrá inversa, a la que notaremos por f^{-1}.

Proposición 1.4. *Toda función continua e inyectiva es estrictamente monótona*[14].

A partir del resultado, al buscar funciones que puedan tener inversa, buscaremos funciones estrictamente monótonas.

[14]El lector debe estar familizarizado con esta Proposición y el siguiente Teorema, al ser contenido de Cálculo II.

Teorema 1.5 (Función inversa). *Sea una función*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

derivable en un intervalo abierto I con $J = f(I)$ y

$$f'(t) > 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, dicha función tiene inversa, $g : J \to I$ y además es derivable en J, con:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Ejemplo. Dada la función:

$$f : I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x \quad \forall x \in I$$

Sabemos que es una función derivable en I, con $J = f(I) =]-1, 1[$ y con $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, por lo que podemos aplicar el teorema, luego existirá una función

$$g : J \to R$$

Que será su función inversa y sabemos que dicha función es la función arcoseno, la cual es derivable (por el teorema), con:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

Tratamos ahora de simplificar dicha expresión:

Si $\theta = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $\theta \in I$ y:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

Luego:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Por ser $\theta \in I$, sabemos que $\cos\theta > 0$, por lo que nos quedamos con el signo positivo de la raíz. Finalmente, llegamos a que:

$$g'(x) = \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Notemos que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ siempre y cuando $x \in I$.

Tenemos ya todas las herramientas necesarias para formalizar el cálculo de la ecuación diferencial de la órbita de un sistema autónomo plano.

Teorema 1.6. *Dado un sistema de la forma:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Para ciertas funciones

$$\begin{array}{rccc} f, g: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y), g(x, y) \end{array}$$

Con D un conjunto abierto y conexo, f y g funciones continuas, de forma que el sistema tiene una solución:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

con I un intervalo abierto.

Si se verifica que:

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, la órbita $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$ puede escribirse como una curva en explícitas $y = y(x)$ de forma que venga dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Demostración. Por ser $f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ y ser f continua, esta será siempre positiva o siempre negativa. Supongamos que es siempre positiva, y la demostración será análoga si esta es siempre negativa.

Por tanto, tenemos que

$$x' = \varphi'(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) > 0 \quad \forall t \in I$$

Por lo que φ cumple las hipótesis del Teorema 1.5. De esta forma, sea $J = \varphi(I)$, existirá una función $T : J \longrightarrow I$ derivable en J y función inversa de φ con:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} \qquad \forall x \in J$$

Como teníamos $x = \varphi(t)$, ahora tenemos $t = T(x)$.

Definimos una función

$$\begin{array}{rccc} y: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \psi(T(x)) \end{array}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \psi'(T(x)) \cdot T'(x) \\ &= g(\varphi(T(x)), \psi(T(x))) \cdot T'(x) \\ &= g(x, y(x)) \cdot T'(x) \end{aligned}$$

Y como:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} = \frac{1}{f(\varphi(T(x)), \psi(T(x)))} = \frac{1}{f(x, y(x))}$$

Juntando estas últimas dos expresiones, llegamos a que:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

$\square$

Ejemplo. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

Con funciones

$$\begin{array}{rccc} f, g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & y, -x \end{array}$$

Con una solución $x = \varphi(t)$ y $y = \psi(t)$

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{sen} t$$
$$\psi(t) = 2 \cos t$$

Funciones definidas en un intervalo abierto I. Se pide hallar la órbita de dicha solución.
Necesitamos ver que

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

es decir:

$$2 \cos t \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Para ello, cogemos el intervalo $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, aunque se podría hacer con otros intervalos, pero complican el proceso.

Tenemos:

$$x = 2 \operatorname{sen} t \qquad J = \left]-2, 2\right[$$

y buscamos poner t en función de x:

$$t = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Tenemos la función $T : J \to I$ con $T(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Definimos ahora una función $y : J \to \mathbb{R}$ dada por:

$$y(x) = \psi(T(x)) = 2 \cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Si llamamos $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces $\theta \in I$ y sabemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

Y por el intervalo en el que estamos, el coseno es positivo, luego cogemos la raíz positiva. Finalmente, llegamos a que:

$$y(x) = 2\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \sqrt{4-x^2}$$

Ejercicio 1.6.1. Repetir el ejemplo cogiendo otro intervalo I.

2. Cambio de Variables

Dada una ecuación diferencial de primer orden en forman normal

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$$

mediante una función

$$\begin{array}{rrcl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, nuestro objetivo será, dado un cambio de variable por dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{array} \right.$$

con

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1, \varphi_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x) \end{array}$$

cambiar tanto la expresión de la ecuación diferencial como el dominio para facilitar la resolución del mismo, mediante una aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo, que nos lleve a una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

para cierta función

$$\begin{array}{rrcl} \hat{f}: & D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s, y) & \longmapsto & \hat{f}(s, y) \end{array}$$

Y será de nuestro interés buscar la expresión de dicha $\hat{f}$.

Nos preguntamos también por las condiciones que tenemos que exigirle a dicha φ para que el cambio de variable sea bueno:

1. Que φ sea biyectiva, o equivalentemente, que tenga inversa $\psi = \varphi^{-1}$, para poder deshacer el cambio de variable.

2. Que podamos hacer cálculo diferecial en ambos lados y que podamos transportarlo, es decir, que tanto φ como ψ sean de clase C^1.

3. Además, también tendremos que buscar cómo poner y en función de s, y exigir hipótesis para que podamos hacerlo.

Definición 2.1 (difeomorfismo)**.** Sea $r \in \mathbb{N}$, una aplicación $f : A \to B$ es un C^r-difeomorfismo si f es de clase $C^r(A)$, biyectiva y su inversa f^{-1} es de clase $C^r(B)$.

De esta forma, nos interesará que φ sea un C^1-difeomorfismo, para que se cumplan los dos primeros puntos de la enumeración anterior[1].

A continuación, realizaremos un razonamiento informal con la finalidad de comprobar qué pasará al realizar el cambio de variable, para luego formalizar el mismo.

Volviendo a la situación inicial, nos encontrábamos ante una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

y nos disponíamos a realizar un cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t,x) \\ y = \varphi_2(t,x) \end{array} \right.$$

De esta forma, suponiendo que $x = x(t)$ es solución de la ecuación, tenemos las variables s y y en función de t.

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = \varphi_1(t,x(t)) \\ y(t) = \varphi_2(t,x(t)) \end{array} \right.$$

Suponiendo ahora que podemos expresar y en función de s: $y = y(s)$, buscamos calcular:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}$$

Primero, calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)x'(t) \overset{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)f(t,x)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que x era solución de la ecuación diferencial. Posteriormente:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x)$$

Así, llegamos a que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)f(t,x)}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x)}$$

[1] Recordamos que una función de $\mathbb{R}^2$ sea de clase C^1 significa que podemos hacer sus derivadas parciales respecto a las dos variables y que ambas son continuas.

Pero todavía no hemos terminado, ya que ahora tenemos la ecuación diferencial en función de las variables s, y, t y x, por lo que tenemos que terminar de librarnos de las variables t y x. Para ello, usamos la función ψ, ya que:

$$\varphi(t,x) = (s,y) \Longrightarrow \psi(s,y) = (t,x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}$$

En caso de que el denominador sea distinto de 0, tendremos ya la nueva expresión de la ecuación diferencial, definiendo:

$$\hat{f}(s,y) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}$$

llegamos a que

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$$

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$$

buscamos aplicarle un cambio de variable.

La ecuación diferencial así no tiene sentido, pues nos falta darle un dominio de definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$$

Buscamos un conjunto D abierto y conexo que haga que f sea continua.

f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ salvo en los que se anula su denominador, y esto sucede en la recta

$$x - 2t + 1 = 0$$

que divide el plano en dos componentes conexas. Para el dominio de la función f, hemos de quedarnos con un semiplano. Elegimos el de la izquierda[2], por lo que nos quedamos con

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2t + 1 > 0\}$$

Vamos a aplicarle a esta ecuación diferencial un cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{lll} y & = x + t - 3 & = \varphi_2(t,x) \\ s & = x - 2t + 1 & = \varphi_1(t,x) \end{array} \right.$$

Primero, veamos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ es un difeomorfismo de todo el plano en todo el plano:

[2]Sin ningún motivo, podría hacerse con el de la derecha.

1. φ es biyectiva, ya que se puede despejar de manera única (es un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado).
2. φ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, ya que sus dos componentes son polinomios.
3. φ^{-1} es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$: ya que al despejar para hallar la expresión de φ^{-1}, sale que es un polinomio también.

Por tanto, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un C^1-difeomorfismo. Sin embargo, nos interesa verlo como un difeomorfismo de D. Buscamos su codominio D_1 para conseguirlo:

Primero, buscamos qué imagen tiene la recta $x - 2t + 1 = 0$, y es la recta $s = 0$, que nos divide del plano en dos semiplanos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Ahora, la imagen de nuestro conjunto D es el plano de la derecha, ya que tiene que cumplir que:

$$x - 2t + 1 = s > 0$$

En definitiva:

$$D_1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$$

Además, sabemos que D_1 es abierto y conexo.

Ahora, buscamos la fórmula para nuestra aplicación $\hat{f}$. Podríamos usar la fórmula pero vamos a repetir los cálculos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt}$$

Pensando que tanto y como x dependen de t:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = x' + 1 \\ \dfrac{ds}{dt} = x' - 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2}$$

Ahora, usamos que x es solución de la ecuación diferencial, luego se cumplirá que $x' = f(t, x)$:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} - 2}$$

A continuación, falta poner la ecuación en función de (s, y). Para ello, componemos con la ψ:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} - 2} = \frac{\operatorname{sen} y + s^2}{\operatorname{sen} y - 2s^2} = \hat{f}(s, y)$$

Finalmente, surge que tenemos que poner la y en función de s. La ecuación diferencial no está definida en todo el semiplano: el denominador de la expresión no puede anularse. Los puntos que cumplan:

$$\operatorname{sen} y - 2s^2 = 0$$

no pueden entrar en el dominio de la ecuación diferencial.

Lo que sucede es que los difeomorfismos transladan curvas en curvas, pero no necesariamente curvas en explícitas a curvas en explícitas, luego puede que una curva que en D se expresaba en explícitas no se pueda expresar en D_1 con ecuaciones explícitas, con lo que nos daría una singularidad (en este caso, se anularía dicho denominador). Próximamente, veremos la interpretación gráfica de que esto es lo que realmente sucede.

Ahora, precedemos a realizar una teoría formal que sustente todas las cuentas realizadas hasta el momento.

Definición 2.2 (Cambio de variable admisible)**.** Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$x' = f(t,x)$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo, un cambio de variable admisible es una transformación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

con D, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos y conexos, φ es C^1-difeomorfismo, y además cumple la condición de admisibilidad[3]:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in D \tag{2.1}$$

Observación. La condición de admisibilidad de un cambio admisible tiene un sentido geométrico, y es que estaremos interesados en dar solución a una ecuación diferencial mediante una curva en explícitas. Sin embargo, al realizar un cambio de variable con cualquier difeomorfismo nada nos garantiza que al pasar la curva en explícitas por el difeomorfismo su imagen siga siendo una curva en explícitas (lo que sí nos garatiza es que siga siendo una curva).

Veamos qué condición nos garantiza que al pasar una curva en explícitas $x = x(t)$ por un difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

sigamos teniendo una curva en explícitas $y = y(s)$.

Dada una función $x = x(t)$, la curva que esta función describe viene dada por la gráfica de dicha función (suponiendo que el dominio de x es I):

$$G = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

[3]Esta última condición nos permite que podamos llevar curvas en explícitas $x = x(t)$ que son solución de la ecuación diferencial en D a curvas en explícitas $y = y(s)$ que son solución de la ecuación diferencial en D_1.

Si ahora aplicamos el difeomorfismo a G:

$$\varphi(G) = \{(\varphi_1(t, x(t)), \varphi_2(t, x(t))) \mid t \in I\}$$

Dicha curva se podrá poner en explícitas si existe una función y tal que $y = y(s)$. Es decir, que podamos expresar la segunda coordenada en función de la primera. Para ello, necesitamos que cada primera coordenada tenga una única coordenada segunda, para poder construir una función. Esto se garantiza si la función que lleva cada t en $\varphi_1(t, x(t))$ es inyectiva. Llamaremos a dicha función g:

$$g(t) = \varphi_1(t, x(t)) \qquad t \in I$$

Si exigimos que su derivada sea distinta de cero en todos los puntos de I, entonces g será estrictamente creciente o estrictamente decreciente, garantizando su inyectividad y que podamos pasar curvas en explícitas a curvas en explícitas. Para ello:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))x'(t) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x) \neq 0 \qquad \forall t \in I
\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que estábamos trabajando con x, una función solución de nuestra ecuación diferencial en cuestión.

Por tanto, la condición de admisibilidad nos garantiza que podemos pasar curvas en explícitas en curvas en explícitas.

Proposición 2.1. *Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x)$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Dado un cambio de variable admisible mediante una transformación

$$\begin{array}{rccc}
\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D_1 \\
& (t, x) & \longmapsto & (s, y)
\end{array}$$

Entonces, $\psi = \varphi^{-1}$ es un cambio de variable admisibile para la ecuación diferencial

$$y' = \hat{f}(s, y)$$

Teorema 2.2 (Cambio de variable para ecuaciones diferenciales)**.** *Dado una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x) \tag{2.2}$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Sea $\varphi : D \to D_1$ un cambio de variable admisible.

Entonces, la ecuación 2.2 es equivalente[4] *a la ecuación*

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) \tag{2.3}$$

[4]Quiere decir, que siempre que tengamos una curva en D que sea solución de la ecuación diferencial, podamos ir a D_1 aplicando φ y tendremos una solución de la ecuación diferencial definida en D_1, así como este mismo procedimiento al revés.

donde

$$\hat{f}(s,y) = \frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))} \qquad \forall (s,y) \in D_1$$

Demostración. Supongamos que $x = x(t)$ es solución de la ecuación 2.2 definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, y queremos realizar el cambio

$$\left\{\begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{array}\right.$$

Defino

$$\begin{array}{rccc} S: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi_1(t, x(t)) \end{array}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con derivada distinta de 0:

$$S'(t) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(t,x)x'(t) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

ya que el cambio era admisible. Defino $J = S(I)$ intervalo abierto, y podemos ahora aplicar el Teorema de la función inversa sobre S, obteniendo una función

$$\begin{array}{rccc} T: & J & \longrightarrow & I \\ & t & \longmapsto & T(s) \end{array}$$

de forma que cumpla

$$\begin{aligned} T(S(t)) &= t \quad \forall t \in I \\ S(T(s)) &= s \quad s \in J \end{aligned}$$

Teníamos s en función de t y ahora hemos puesto t en función de s utilizando la primera ecuación del cambio de variable. Ahora, podemos definir (usando la segunda ecuación del cambio) la siguiente función, para expresar y en función de s, gracias a que hemos expresado t en función de s:

$$\begin{array}{rccc} y: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \varphi_2(T(s), x(T(s))) \end{array}$$

Nos falta derivar y respecto a s para comprobar que sea solución de la ecuación diferencial 2.3:

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) \cdot T'(s) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \cdot T'(s) \\ &= T'(s)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s))\right) \\ &= T'(s)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot f(T(s), x(T(s)))\right) \end{aligned}$$

Ahora, usamos que φ tiene de inversa a ψ, para así poder expresar

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

y eliminar t y x de la expresión, dejándolo todo en función de s e y:

$$y'(s) = T'(s)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y(s))) \cdot f(\psi(s, y(s)))\right)$$

Falta ver que $T'(s)$ es el denominador de la expresión 2.3. Para ello, aplicamos la regla de derivación de la función inversa:

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))f(T(s), x(T(s)))}$$

Ahora, volvemos a usar que

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

para obtener

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y(s)))f(\psi(s, y(s)))}$$

Finalmente, falta ver que si tenemos una solución en D_1, volvemos a tener una solución en D. Bastaría aplicar el mismo proceso pero al revés. Sin embargo, debemos comprobar que si φ es admisible para la ecuación 2.2, entonces ψ lo es para la ecuación 2.3.

Faltaría comprobar la expresión análoga a 2.1 para ψ, esto es:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}(s, y)\hat{f}(s, y) \neq 0 \qquad \forall (s, y) \in D_1$$

Usando que:

$$\varphi'(\psi(s, y))\psi'(s, y) = Id$$

□

Nos falta ahora aprender estrategias para buscar el cambio de variable adecuado en cada caso. Para ello, aprenderemos primero a resolver las ecuaciones diferenciales más sencillas para así cuando se nos presente una más complicada, aplicar un cambio de variable para obtener una ecuación sencilla que sí sepamos resolver.

2.1. Cálculo de primitivas

Buscamos resolver ecuaciones diferenciales sencillas. Las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos encontrarnos son el cálculo de primitivas, es decir, cuando la derivada de x sólo está en función de t.

Pensamos en la ecuación diferencial:

$$x' = p(t) \tag{2.4}$$

con $p : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, el dominio de la ecuación diferencial es $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sabemos que dicha ecuación diferencial tiene solución, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $p : I \to \mathbb{R}$ una funcion continua, fijado $t_0 \in I$, entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds$$

es una función de clase $C^1(I)$ que cumple $P'(t) = p(t)$.

Por tanto, fijado $t_0 \in I$, las soluciones de la ecuación diferencial 2.4 son de la forma:

$$x(t) = k + \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds \qquad k \in \mathbb{R}$$

Tenemos una primera clase de ecuaciones diferenciales que sabemos resolver, al menos a nivel teórico, ya que hay integrales que no pueden calcularse.

2.2. Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de variables separadas es una ecuación de la forma

$$x' = p(t)q(x)$$

con funciones

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & p(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & q(x) \end{array}$$

continuas con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos. De esta forma, estamos manejando la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

con

$$\begin{array}{rccc} f: & D = I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & p(t)q(x) \end{array}$$

Observación. Notemos que el cálculo de primitivas es caso particular de las ecuaciones de variables separadas, ya que tomando $q(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$p(t)q(x) = p(t) \qquad \forall t \in I$$

Para su resolución, comenzaremos primero con unos cálculos informales que luego formalizaremos. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Primero, buscaremos los valores $a \in J$ que hagan que $q(a) = 0$. En dicho caso, podemos definir la función

$$x(t) = a \quad t \in I$$

que es solución de la ecuación diferencial.

Una vez localizados todos los ceros de la ecuación, tendremos ya todas las soluciones constantes localizadas. Ahora, haremos separación de variable, que precisamente busca las soluciones que no son constantes. Hacemos la siguiente operación, que por ahora carece de rigor:

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t)\ dt$$

Posteriormente, tomaremos primitivas en ambos lados:

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\ dt$$

Notando por Φ a una primitiva para $\frac{1}{q}$ y por P a una primitiva de p, tendremos que:

$$\Phi(x) + c_1 = P(t) + c_2$$

Para ciertas constantes arbitrarias $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, como la diferencia de constantes sigue siendo una constante, podemos escribir simplemente:

$$\Phi(x) = P(t) + c$$

Si ahora podemos calcular una inversa de Φ (en caso de que esta sea biyectiva), podemos deducir que:

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

Ejemplo. En este ejemplo, mostraremos que el procedimiento anterior parece funcionar ante las ecuaciones diferenciales de variables separadas, pese a carecer de sentido aparente. Para ello, trataremos de resolver la ecuación

$$x' = e^{t+x}$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$, que es una ecuación en variables separadas, ya que:

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x$$

En este caso, no encontramos soluciones constantes, ya que $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Resolvámosla con la receta que acabamos de aprender:

$$\frac{dx}{dt} = e^t e^x$$

$$e^{-x}\ dx = e^t\ dt$$

$$\int e^{-x}\ dx = \int e^t\ dt$$

$$-e^{-x} = e^t + c$$

La última igualdad nos da la función x de manera implícita, buscamos ahora la forma de dar la función x de forma explícita:

$$e^{-x} = -e^t - c$$

y tomamos logaritmos, pensando en que esto nos va a determinar luego el dominio de la solución (de forma implícita, suponemos que la cantidad de la derecha es positiva).

$$\begin{aligned} -x(t) &= \ln(-e^t - c) \\ x(t) &= -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora por qué constantes c nos sirven y por el dominio de la función x:

- Cuando c tome valores positivos o 0, no va a tener sentido la expresión, por lo que exigimos $c < 0$.
- A continuación, buscamos el intervalo abierto en el que esté definida x. Nos interesa que $-e^t - c > 0$ para cierta constante negativa c, luego nos interesa que t sea chico, para que la cantidad sea positiva. Por tanto, el intervalo de definición de x será de la forma $I_c =]-\infty, a_c[$, para cierto $a_c \in \mathbb{R}$, que dependerá del valor de la constante c escogida para la solución.

Buscamos ahora dicha a_c, sea $c \in \mathbb{R}^-$:

$$-e^t - c > 0 \Longleftrightarrow -c > e^t \Longleftrightarrow \ln(-c) > \ln(e^t) = t$$

donde hemos usado que ln es una función estrictamente creciente, obteniendo que:

$$t \in I_c =]-\infty, \ln(-c)[$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación planteada al inicio son

$$\begin{array}{rccl} x: & I_c & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & -\ln\left(-e^t - c\right) \end{array}$$

Dado que hemos hecho una cuenta que a priori carece de sentido, la única forma de comprobar que lo que hemos hecho está bien es derivar x y comprobar que, efectivamente, es una solución de la ecuación diferencial.

De forma alternativa, veamos ahora que en realidad la receta que usamos tiene un fundamento teórico, que nos permite usarla bajo unas ciertas hipótesis, obteniendo siempre unos resultados fiables.

De esta forma, supongamos que $q(x) \neq 0 \ \forall x \in J$ (para los valores en los que se anule q, tenemos soluciones constantes, luego falta comprobar qué ocurre donde q no se anula). Vamos a intentar hacer un cambio de variable que transforme la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \tag{2.5}$$

en un cálculo de primitivas de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(s) \tag{2.6}$$

En vez de dar el cambio, vamos a buscarlo. Dada una función

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

Exigimos que $\varphi_1 = Id_I$ y notaremos $\phi = \varphi_2$ por comodidad, con lo que queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \phi(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

por lo que tendremos que buscar dicha función ϕ. Para que φ sea un difeomorfismo, es necesario que la función

$$\phi : J \to \mathbb{R}$$

sea de clase C^1, así como que $\phi'(x) \neq 0\ \forall x \in J$. No es necesario exigir que sea biyectiva, ya que luego tomaremos como codominio $\hat{J} = \phi(J)$, intervalo abierto. De esta forma, la ecuación diferencial tras el cambio de variable tendrá como dominio $D_1 = I \times \hat{J}$.

Ahora, buscamos que φ sea admisible, es decir, que cumpla la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D$$

Lo cual es inmediato, ya que $\varphi_1(t,x) = t$, luego:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \neq 0$$

La interpretación geométrica de que la condición de admisiblidad sea cierta siempre bajo un cambio del tipo 2.7 cuenta con una interpretación geométrica, ya que al ser $t = s$, cualquier curva que escribamos de forma explícita en D, al aplicarle el difeomorfismo podrá seguir escribiéndose de forma explícita en D_1, y viceversa.

Sea $x = x(t)$ una solución de 2.5, aplicamos ahora el cambio de variable, tal y como aprendimos al inicio de este Capítulo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} \overset{(*)}{=} \phi'(x)x' = \phi'(x)p(t)q(x)$$

donde en $(*)$ hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

y en la segunda igualdad que x es solución de 2.5.

Todavía no tenemos la ecuación cambiada, ya que seguimos teniendo los parámetros t y x. Para quitarlos, basta con usar $\psi = \phi^{-1}$, que sabemos que existe según las condiciones que hemos impuesto[5] sobre ϕ:

$$\phi(x) = y \Longrightarrow x = \psi(y) \quad \forall x \in J$$
$$\frac{dy}{ds} = p(t)\phi'(\psi(y))q(\psi(y))$$

Sin embargo, no hemos terminado, ya que queríamos buscar un cambio de variable que nos llevase a:

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Por lo que tenemos que exigir finalmente a ϕ que:

$$\phi'(x)q(x) = 1$$

Por tanto, defino

$$\begin{array}{rccc} \phi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array}$$

Para que:

$$\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \Longrightarrow \phi'(x)q(x) = 1$$

Resumiendo, dada una ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Si aplicamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array} \right.$$

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Que teóricamente sabemos resolver, ya que se trata de un cálculo de primitiva.

Ejemplo. Volvemos a la ecuación con la que empezamos el curso, con el fin de aplicarle la regla que acabamos de aprender:

$$x' = \lambda x$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$. Es de variables separadas. Las soluciones constantes de la ecuación son:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

[5]Hasta ahora, que ϕ sea de clase $C^1(J)$ y que tenga derivada no nula.

Ahora, como J debemos tomar tanto $\mathbb{R}^+$ como $\mathbb{R}^-$. En este ejemplo, tomaremos $J = \mathbb{R}^-$, y el resultado debe repetirse en $\mathbb{R}^+$ de forma análoga.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \lambda \; dt$$
$$\ln(-x) = \lambda t + c$$

y despejamos x:

$$-x(t) = e^{\lambda t + c}$$
$$x(t) = -e^{\lambda t + c} = -e^c e^{\lambda t}$$

En definitiva, las soluciones son:

$$x(t) = k \cdot e^{\lambda t} \quad k < 0$$

2.3. Ecuaciones homogéneas

Siguiendo con un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales que aprenderemos a resolver reduciéndolas a un tipo de ecuaciones diferenciales que ya sabemos resolver, ahora es el turno de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

con $h : J \to \mathbb{R}$ una funcion continua, siendo J un intervalo abierto.

Cómo identificarlas

Anteriormente estudiamos las ecuaciones de variables separadas, las cuales eran fáciles de identificar. Sin embargo, las ecuaciones homogéneas ya empiezan a ser algo más difíciles de identificar.

Mostraremos ahora varios ejemplos de ecuaciones diferenciales que son homogénas, aunque no sea fácil verlo:

1. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{x+t}{t}$$
es homogénea, para la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & u+1 \end{array}$$
Ya que
$$h\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + 1 = \frac{x}{t} + \frac{t}{t} = \frac{x+t}{t}$$

2. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2 + x^2}$$
es homogénea, ya que si dividimos el numerador y el denominador entre t^2, llegamos a que:
$$x' = \frac{\dfrac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2}}{\dfrac{t^2 + x^2}{t^2}} = \frac{1 + 2\left(\dfrac{x}{t}\right) + 3\left(\dfrac{x}{t}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}$$
Luego la función h en este caso es la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1 + 2u + 3u^2}{1 + u^2} \end{array}$$

Esta última ecuación diferencial parece haber sido identificada mediante una idea feliz (dividir todo entre t^2). Sin embargo, existe una teoría sobre funciones homogéneas, la cual pasamos a desarrollar brevemente ahora. Esta nos permitirá darnos cuenta de forma rápida de si una ecuación diferencial es o no homogénea.

Definición 2.3 (Función homogénea)**.** Dada una función $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que es homogénea de grado r si se verifica que
$$f(\lambda \cdot v) = \lambda^r f(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \forall v \in V$$

Proposición 2.4. *Dado un polinomio en n variables, este es una función homogénea de grado r si, y solo si todos sus monomios son de grado r*

A dichos polinomios, los llamamos polinomios homogéneos de grado r.

Se verifica que si tenemos una ecuación diferencial que venga dada por un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado r, entonces estamos ante una ecuación diferencial homogénea:
$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}$$
Para comprobarlo, tendríamos que dividir el numerador y denominador del cociente entre t^r, obteniendo así la función h.

Observemos que lo que sucedía en el ejemplo anterior es que teníamos un cociente de polinomios homogéneos de grado 2 (por estar formados únicamente por monomios de grado 2), por lo que dividiendo entre t^2 pudimos sacar al función h.

Ejemplo. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$
es homogénea, ya que tengo dos funciones homogéneas de grado 1 divididas. Si dividimos numerador y denominador por t, conseguimos verlo más fácil. Sin embargo, hemos de distinguir casos:

- Si $t > 0$:

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t} = \frac{\frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} + \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

- Si $t < 0$:

$$x' = \frac{\frac{t}{t} + \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{-t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 - \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

Dominio de la ecuación diferencial

Ahora, trabajamos con una ecuación que es de la forma:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo[6] de forma que

$$f(t, x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta función $h : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto y continua.

En primer lugar, observamos que f es continua, por ser composición de funciones continuas:

$$(t, x) \longmapsto \frac{x}{t} \longmapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Ahora, queremos ver cuál es dicho dominio D en el que está definida nuestra ecuación diferencial.

- Como primera observación, debemos excluir de D la recta $t = 0$, para que la definición de f tenga sentido.

- Suponiendo que[7] $J =]\alpha, \beta[$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

  Dado un punto $(t, x) \in D$ de nuestro dominio, este punto debería cumplir que $\frac{x}{t} \in J$ para que la definición de f tenga sentido. Decir que $\frac{x}{t} \in J$ es equivalente a que

  $$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

  Por lo que los puntos $(t, x) \in D$ de nuestro dominio deberían cumplir dicha condición. Notemos que $\frac{x}{t}$ es la pendiente de un punto (t, x) de $\mathbb{R}^2$, por lo que todos los puntos que cumplen la ecuación superior son los que se encuentran en un sector angular, delimitado por las rectas $x = \alpha t$ y $x = \beta t$:

[6] Por la definición de ecuación diferencial.

[7] En el caso de que sea un intervalo no acotado, se razonaría de forma similar.

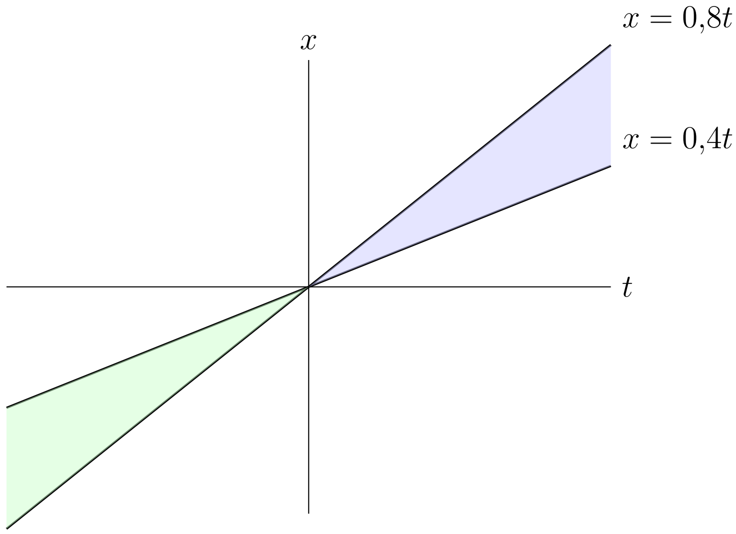


Figura 2.1: Sector angular, sin incluir el punto $(0,0)$.

Como D ha de ser conexo, hemos de quedarnos con la parte de la izquierda o con la parte de la derecha del sector angular. Algebraicamente, estos dos son los conjuntos:

$$D_+ = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$
$$D_- = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$

Observación. Notemos que en el ejemplo superior de la ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2+t^2}}{2x-t}$$

distinguíamos los casos en los que t era positivo y en los que t era negativo. Esto tiene todo el sentido, ya que en realidad no estamos trabajando con una ecuación diferencial, sino con 2, ya que no habíamos tenido en cuenta el dominio de la ecuación diferencial. Esta puede estar definida o bien en D_+ o bien en D_-, por lo que estaríamos trabajando o bien con $t > 0$ o bien con $t < 0$, respectivamente.

Posicionamiento de las ecuaciones homogéneas

Nos preguntamos ahora por las relaciones que hay entre las ecuaciones homogéneas y las ya vistas hasta el momento: cálculo de primitivas y de variables separadas. ¿Son todas las ecuaciones de variables separadas homogéneas?

Respondemos a esta y a muchas más preguntas con los siguientes ejemplos:

- El cálculo de primitivas no está incluido en las ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo la ecuación $x' = 0$.
- $x' = xt$ es de variables separadas pero no es homogénea.
- $x' = \frac{x}{t}$ es homogénea y es de variables separadas.

- $x' = \frac{x+t}{t}$ es homogénea pero no es de variables separadas.

Por tanto, vemos que hay ecuaciones homogéneas que son de cálculo de primitivas (aunque pocas), que hay algunas ecuaciones homogéneas que son a su vez de variables separadas y que hay ecuaciones homogéneas que no son de variables separadas. La situación es similar a la del diagrama 2.2.

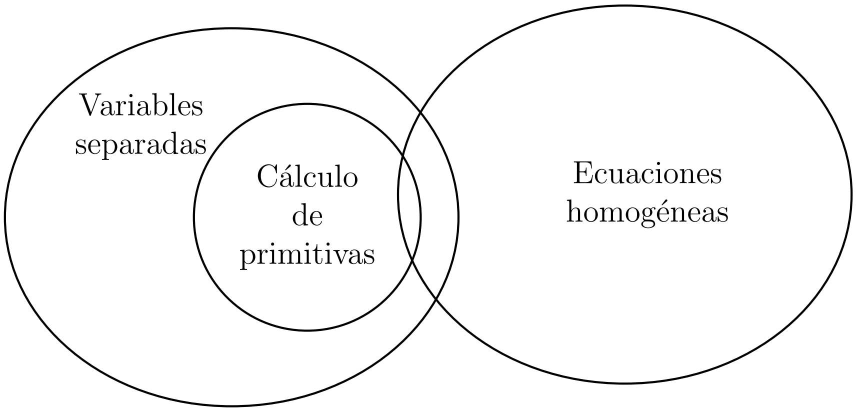


Figura 2.2: Diagrama de los tipos de ecuaciones diferenciales.

Resolución de ecuaciones homoǵeneas

Hay un cambio de variable que nos permite llevar ecuaciones diferenciales homogénes a ecuaciones diferenciales de variables separadas, que ya sabemos resolver. Por comodidad, supondremos que[8] el dominio elegido para la ecuación diferencial es D_+.

El cambio viene dado por la función

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array} \right.$$

- Podemos despejar de manera única las variables t y x, luego es biyectiva, con inversa:
$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} t & = s \\ x & = sy \end{array} \right.$$

- Las componentes φ_1 y φ_2 de φ son polinomios, luego es de clase $C^1(D_+, \mathbb{R}^2)$.

- Y además, como las componentes ψ_1 y ψ_2 de ψ también son polinomios, tenemos que ψ es de clase $C^1(\varphi(D_+), \mathbb{R}^2)$.

Por tanto, hemos comprobado que φ es un C^1-difeomorfismo, luego falta comprobar la condición de admisibilidad para comprobar que sea un cambio de variable admisible. Sin embargo, esta propiedad estará garantizada, ya que no hemos cambiado la variable t, por lo que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in D_+$$

[8] En caso contrario, es análogo.

Una vez comprobado que φ es un cambio de variable admisible, vemos cuál será el nuevo dominio de la ecuación diferencial una vez hecho el cambio de variable:

$$\varphi(D_+) = \varphi\left(\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}\right) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, y \in J\right\} =]0,+\infty[\times J$$

Por tanto, el sector angular D_+ que teníamos como dominio de la ecuación diferencial original, se aplica mediante φ en una banda horizontal, tal y como vemos en la figura 2.3.

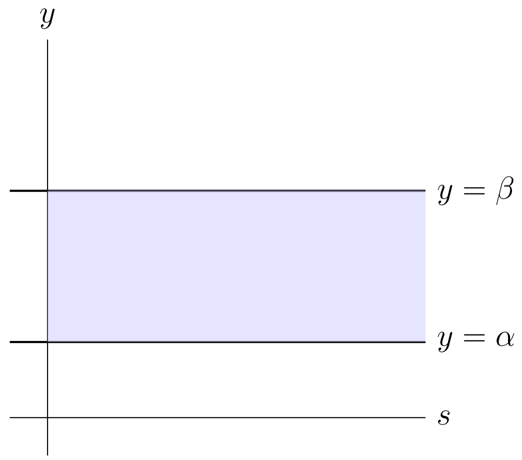


Figura 2.3: Banda horizontal, sin incluir la recta $s = 0$.

Procederemos ahora a realizar el cambio de variable, para ver qué forma adopta la ecuación. Teníamos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

a la que le aplicamos el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \dfrac{x}{t} \end{cases}$$

Pensando que x está en función de t y que y está en función de s:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cancelto{1}{\frac{dt}{ds}} \overset{(*)}{=} \frac{t \cdot \dfrac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t}\cdot\frac{x}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right)$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que $y = \frac{x}{t}$, junto con la regla de derivación de un cociente. Tenemos ya la ecuación diferencial, pero sigue estando en función de las variables x y t. Falta aplicar que $y = \frac{x}{t}$ otra vez, que $s = t$ y que x era solución de la ecuación diferencial, por lo que se verifica:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Aplicando esto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

Que es una ecuación de variables separadas, para las funciones[9] $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $q : J \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$p(s) = \frac{1}{s}$$
$$q(y) = h(y) - y$$

Luego acabamos de ver que toda ecuación homogénea puede llevarse a una ecuación de variables separadas.

Recordamos que en variables separadas podíamos encontrarnos dos tipos de soluciones, constantes y no constantes. Observemos que cuando $q(b) = h(b) - b = 0$ para cierto b, encontramos soluciones constantes de la ecuación diferencial de variables separadas, que serán las funciones:

$$z(s) = b \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

Que al deshacer el cambio de variable, nos darán una semirrecta en el dominio original:

$$x(t) = b \cdot t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Resumiendo, dada una ecuación diferencial en un dominio D_+ por:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta $h : J \to \mathbb{R}$ continua, podemos aplicar el cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array} \right.$$

para llegar a la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

que ya sabemos resolver.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial (en la que usamos la notación geométrica en lugar de la física):

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Se pide hallar su dominio de definición, así como encontrar una solución de dicha ecuación, cogiendo como condición de dicha solución que ha de cumplir:

$$y(-1) = -1$$

[9]El dominio de la primera es $\mathbb{R}^+$ porque es el mismo dominio en el que se mueve t y el de la segunda es el dominio en el que se mueve $\frac{x}{t}$.

Se trata de una ecuación diferencial homogénea, ya que se trata de un cociente de dos polinomios homogéneos de grado 1. Podemos comprobarlo dividiendo numerador y denominador entre x:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y+x}{x}} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

Por lo que la función h a escoger sería:

$$h(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

Y debemos elegir bien el dominio de definición de dicha función. Podría ser o bien $J_- =]-\infty, -1[$ o bien $J_+ =]-1, +\infty[$.
Como queremos que $y(-1) = -1$, buscamos tener $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, luego tomaremos $J = J_+$, ya que contiene el 1.

Una vez conocido el dominio de h, podemos ya escoger el dominio de definición de la ecuación diferencial. Este será D_+ o D_-. Como ha de cumplir que $(-1,-1) \in D$ siendo D el dominio de la ecuación diferencial, nos quedaremos con $D = D_-$, ya que es la opción que nos contiene las abscisas negativas. De esta forma:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \frac{y}{x} > -1\right\}$$

Gráficamente, el dominio de definición D es el sector angular de la figura 2.4.

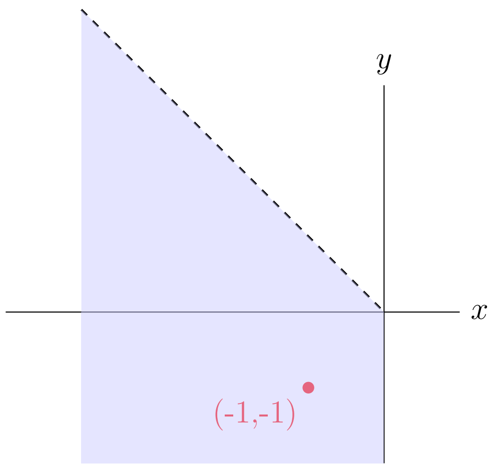


Figura 2.4: El sector angular D.

Ahora, haremos el cambio de variable, usando como nuevas variables u y v:

$$\varphi : \begin{cases} u &= x \\ v &= \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto D pasa a:

$$\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, v > -1\} =]-\infty, 0[\times]-1, +\infty[$$

Y el punto $(-1,-1)$ pasa a:

$$\varphi(-1,-1) = \left(-1, \frac{-1}{-1}\right) = (-1,1)$$

Gráficamente, vemos $\varphi(D)$ en la figura **??**.

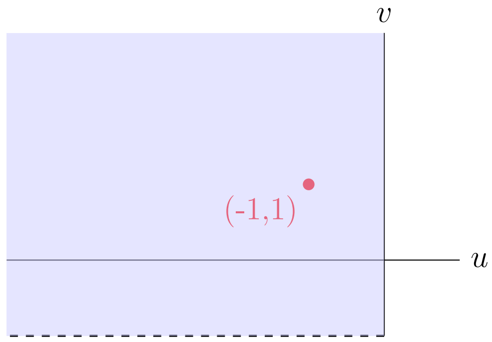


Figura 2.5: Dominio tras hacer el cambio de variable

Buscamos ahora la ecuación diferencial tras el cambio de variable, la cual resulta en:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx}\cancelto{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{u}(h(v)-v) = \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1}-v\right) \\ &= \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1}-\frac{v^2+v}{v+1}\right) = \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v}\end{aligned}$$

Y tenemos nuestra ecuación de variables separadas, que pasamos a resolver. Lo primero a observar es que nos interesa la solución concreta v tal que $v(-1)=1$.

Observamos que la ecuación anterior no tienen soluciones constantes, por ser:

$$\frac{1+v^2}{1+v} > 0$$

Luego resolvemos por variables separadas:

$$\begin{gathered}\frac{dv}{du} = \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v} \\ \int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = -\int \frac{du}{u}\end{gathered}$$

Como estamos trabajando con $u<0$:

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln(-u)+k$$

Y la primera integral la partimos en dos para resolverla, llegando a que:

$$\int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{1}{1+v^2}\,dv + \int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2)$$

Por tanto:
$$\operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = -\ln(-u) + k$$
Y por el desarrollo teórico visto en la sección de ecuaciones de variables separables, sabemos que dicha expresión define de forma implícita una función v en función de u, para cierto $k \in \mathbb{R}$.
Ahora, volveremos al dominio original, deshaciendo el cambio de variable:
$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = -\ln(-x) + k$$
Que define y como función de x de forma implícita. Usando que $(x<0)$:
$$\ln(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right)$$
Podemos darle otra forma a la expresión, para verla de forma más clara:
$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = k$$
Es la familia de soluciones que nos resuelven la ecuación diferencial. Buscamos k para $y(-1) = -1$, sustituyendo y y x por -1:
$$k = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sqrt{2}\right)$$
Para ver que esto define una ecuación implícita, deberíamos aplicar el Teorema, pero gracias a la teoría que venimos desarrollando hasta ahora, lo tenemos visto. Tenemos visto que dicha fórmula dos define una ecuación implícita en un entorno del punto $(-1,-1)$.

Sin embargo, estamos ante un problema específico en el que podemos llegar a ver algo más. Se trata de una curva que en cartesianas tiene una expresión compleja, pero en coordenadas polares puede intuirse la gráfica de la función de forma más fácil, por lo que cambiamos a coordenadas polares:
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos\theta \\ y & = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$
Y como:
$$\frac{y}{x} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$
Buscamos θ de forma que $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Como estamos trabajando con la solución que pasa por el $(-1,-1)$, estamos trabajando en el tercer cuadrante, por lo que tendremos $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Como la función arctan es la inversa de tan sólo en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, desplazamos θ, usando que la tangente es π-periódica:
$$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Longrightarrow \theta - \pi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\arctan(\tan\theta) = \arctan(\tan(\theta-\pi)) = \theta - \pi$$

Luego:

$$\arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta - \pi$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Y también:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, llegamos a que la expresión en polares es:

$$\theta + \ln r = k + \pi$$

Se trata de la espiral logarítmica o de Arquímedes, que se entiende mejor tomando exponenciales:

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$

Fijado un r, conforme movemos θ, se va formando una especie de circunferencia pero con r disminuyendo, luego se forma una espiral.

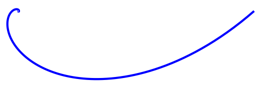


Figura 2.6: Espiral logarítmica.

Observación. Notemos que las espirales son curvas de la forma

$$r = f(\theta)$$

con f creciente o decreciente, escritas en coordenadas polares.

2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

A continuación, estudiaremos otro tipo de ecuaciones diferenciales, las reducibles a homogéneas. Estas son similares a las homogéneas, pero en vez de ser una función en función de $\frac{x}{t}$, es una función en función de un cociente de polinomios en dos variables, ambos de grado 1, luego son de la forma:

$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \qquad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$$

con $h : I \to \mathbb{R}$ una función continua con I un intervalo abierto.

Ejercicio. Dar un dominio de definición para una ecuación reducible a homogénea.

Estaremos trabajando por tanto con una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(t, x)$$

con

$$f(t, x) = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \qquad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad \forall (t, x) \in D$$

Y buscamos el dominio D en el que la función f está definida. Este tiene que ser un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, nos interesa:

- Primero, que el cociente anterior tenga sentido, es decir, que $At+Bx+C \neq 0$. Por tanto, esta recta estará excluida de D.
- Que podamos aplicar h al cociente anterior, es decir, que
$$\frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I$$

El conjunto más grande en el que podemos definir f será un conjunto de la forma:

$$D = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid At + Bx + C \neq 0, \frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I\right\}$$

Finalmente, falta comprobar que el conjunto sea abierto y conexo. Como el conjunto excluye a una recta del plano, sabemos por tanto que este contendrá como mínimo dos componentes conexas[10].

Resolución de ecuaciones reducibles a homogéneas

El truco que funciona casi siempre es realizar una traslación. Fijado $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, defino

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ll} s & = t - t_* \\ y & = x - x_* \end{array}\right. \qquad (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$$

que es fácil ver que es un cambio de variable admisible.
El cambio de variable es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Y hay que quitar las variables t y x:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C}\right)$$

Si conseguimos hacer:

$$\left\{\begin{array}{ll} at_* + bx_* + c & = 0 \\ At_* + Bx_* + C & = 0 \end{array}\right.$$

Nos quedaría que:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C}\right) = h\left(\frac{as + by}{As + By}\right)$$

Que se trata de una ecuación homogénea, por ser un cociente de polinomios homogéneos de grado 1.

[10]Si algún lector termina el ejercicio, solicitamos que se nos envíe para completar los aputnes.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$
Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo que existe una solución del sistema. Para realizar el cambio de variable, tomamos (t_*, x_*) de forma que sea solución del sistema, y al realizar el cambio de variable, podremos seguir el razonamiento superior, llegando a una ecuación homogénea.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$
Entonces, se trata de un sistema incompatibles, por lo que no podremos realizar el razonamiento anterior.

  Sin embargo, lo que sucederá en dicho caso es que los vectores (a, b) y (A, B) serán linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$, luego podemos hacer:
$$(A, B) = \lambda(a, b) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
De esta forma, podemos escribir:
$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) = h\left(\frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + c}\right)$$
Que no es una ecuación homogénea, pero nos permite hacer el cambio de variable (suponiendo que $b \neq 0$):
$$y = at + bx$$

2.5. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma
$$x' = a(t)x + b(t)$$
para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ continuas definidas en un intervalo abierto J.

Por tanto, la ecuación diferencial vendrá dada por una función $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que
$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t) \qquad (t, x) \in J \times \mathbb{R}$$
Observemos que el dominio de f se trata de una banda vertical.

Las ecuaciones lineales pueden clasificarse en dos tipos:

- Si $b(t) = 0\ \forall t \in J$, entonces estamos ante una ecuación lineal homogénea[11].
- Si b no es la función constantemente igual a cero, decimos que es una ecuación lineal completa.

Observación. Observemos que $x' = \frac{x}{t}$ es de variables separadas, homogénea, reducible a homogenea y lineal homogénea.

[11]no tiene nada que ver con las ecuaciones homogéneas

2.5.1. Ecuaciones lineales homogeneas

Como hemos comentado antes, se tratan de ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x$$

para $a : J \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo abierto J. Este tipo de ecuaciones sabemos ya resolverlas, pues son ecuaciones de variables separadas:

$$x' = p(t)q(x)$$

Para las funciones $p : J \to \mathbb{R}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) \qquad t \in J \\ q(x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, tenemos que sólo hay una solución constante:

$$x(t) = 0 \qquad t \in J$$

Para sacar el resto, hacemos separación de variables:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x$$
$$\int \frac{dx}{x}\ dx = \int a(t)\ dt$$

Y dependerá de que x sea positivo o negativo para calcular la primera integral:

$$\int \frac{dx}{x}\ dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y notando por:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\ ds$$

para cierto $t_0 \in I$, tenemos que:

- Suponiendo que $x > 0$:

$$\ln x = A(t) + c$$
$$x(t) = e^c e^{A(t)} \qquad t \in J$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^+, \quad t \in J$$

- Suponiendo que $x < 0$:

$$\ln(-x) = A(t) + c$$
$$x(t) = -e^c e^{A(t)} \qquad t \in J$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^-, \quad t \in J$$

En definitiva, dada una ecuacion de la forma

$$x' = a(t)x \qquad t \in J$$

Entonces, sus soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \qquad t \in J$$

para cierto $t_0 \in J$.

Ejemplo. Resolvamos

$$x' = \frac{x}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

Trabajaremos por tanto en el semiplano en el que $t < 0$.

En este caso, tenemos $a(t) = \frac{1}{t}$, por lo que:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\, ds = \ln(-t)$$

para cierto $t_0 \in \mathbb{R}^-$. Las soluciones de dicha ecuación serán:

$$x(t) = k \cdot e^{\ln(-t)} = -k \cdot t \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

2.5.2. Ecuaciones lineales completas

Son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{2.8}$$

para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto de forma que la función b no es constantemente igual a 0. Notaremos a su dominio $D = J \times \mathbb{R}$.

Resolveremos este tipo de ecuaciones mediante un cambio de variable, el cual pasamos a buscar. Dada una función $l : J \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0\ \forall t \in J$ y $l \in C^1(J)$, definimos el cambio de variable:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = l(t)x \end{array} \right.$$

Que tenemos que ver que es admisible:

- φ es de clase $C^1(D)$, ya que sus componentes φ_1 y φ_2 son de clase $C^1(D)$ (φ_2 es productor de funciones de clase $C^1(D)$).
- Despejando las variables t y x (gracias a que $l(t) \neq 0\ \forall t \in J$), podemos dar una inversa ψ de φ, por lo que es biyectiva:

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} t & = s \\ x & = \dfrac{y}{l(s)} \end{array} \right.$$

Es fácil ver que ψ es inversa de φ.

- Observando las componentes ψ_1 y ψ_2, vemos que estas son de clase C^1, luego ψ es de clase C^1. Tenemos ya probado que φ es un difeomorfismo.
- Por ser $s = t$, tenemos garantizada la condición de admisibilidad, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall t \in J$$

- Finalmente, observemos que si $(t, x) \in D$, entonces $\varphi(t, x) \in D$, por lo que $\varphi(D) = D$:

$$\varphi(t, x) = (t, l(t)x) \in J \times \mathbb{R} = D$$

A continuación, aplicaremos dicha familia de cambios de variable (ya que por cada función l tenemos un cambio de variable distinto) a la ecuación 2.8:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = lx \end{array} \right.$$

entendiendo que todo son funciones dependientes de t:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l(ax + b)$$

sustituimos x por $\frac{y}{l}$:

$$y' = \frac{l'}{l}y + l\left(a\frac{y}{l} + b\right)$$

Y obtenemos otra ecuación diferencial lineal:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + a\right)y + bl$$

Sin embargo, podemos convertirlo en un cálculo de primitivas, buscando que:

$$\frac{l'}{l} + a = 0$$

Que podemos pensarlo como una ecuación diferencial para l:

$$l' = -a(t)l$$

Que es una ecuación lineal homogénea, cuyas soluciones sabemos ya que son de la forma:

$$l(t) = k \cdot e^{-A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

Escogemos la solución $l(t) = e^{-A(t)}$.

Por tanto, el resultado tras aplicar el cambio de variable con la función l ahora conocida resulta en la ecuación diferencial

$$y' = b(t)l(t)$$

que la resolvemos mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)l(s)\ ds + k$$

con nuestra función l:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\ ds + k$$

Una vez obtenida y, sacamos las soluciones de las ecuaciones lineales completas, deshaciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{l}$:

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\ ds$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x}{t} + 1$$

con $t < 0$.

Hacemos el cambio $y = l(t)x$, luego:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \frac{l'}{l}y + l\left(\frac{y/l}{t} + 1\right)$$

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + l$$

Buscamos una solución que cumpla:

$$\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$$

Es decir:

$$l' = -\frac{l}{t}$$

No nos hacen falta todas las soluciones, simplemente una. Cogemos:

$$l(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

tenemos que $l(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}^-$.

Por tanto, tenemos:

$$y' = l(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y(t) = k - \ln(-t) \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Luego:

$$x(t) = -t \cdot (k - \ln(-t)) \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

2.5.3. Ecuación de Riccati

Podemos entender la ecuación lineal como una ecuación diferencial que simula ser un polinomio de primer grado. Riccati intentó solucionar aquella ecuación diferenial que simula ser un polinomio de segundo grado:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

para ciertas $a, b, c : J \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto J.

3. Relaciones de Problemas

3.1. Ecuaciones y sistemas

Ejercicio 3.1.1. En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = c(M - A),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos.

Ejercicio 3.1.2. Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. La pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m_t = y'(x_0)$. Por otro lado, la distancia del punto al origen, notada por $d(P, O)$ es $d(P, O) = \sqrt{x_0^2 + y(x_0)^2}$. Como la condición impuesta en el enunciado es $m_t = (d(P, O))^2$, tenemos que:

   $$y' = x^2 + y^2$$

2. El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

   La representación gráfica de la situación se encuentra en la Figura 3.1.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. Para ambas rectas, usaremos la ecuación punto-pendiente. Para la recta tangente, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{r} m_t = y'(x_0) \\ P_t = (0, y_t) \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(x_0) = \frac{y(x_0) - y_t}{x_0 - 0} \Longrightarrow y_t = y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)$$

   Notemos además que, en el caso de $x_0 = 0$, también podemos ver que se cumple que $y_t = y(x_0) - 0 \cdot y'(x_0) = y(x_0)$. Respecto a la recta normal, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{r} m_n = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \\ P_n = (x_n, 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow -\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y(x_0)}{x_n - x_0} \Longrightarrow x_n = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0$$

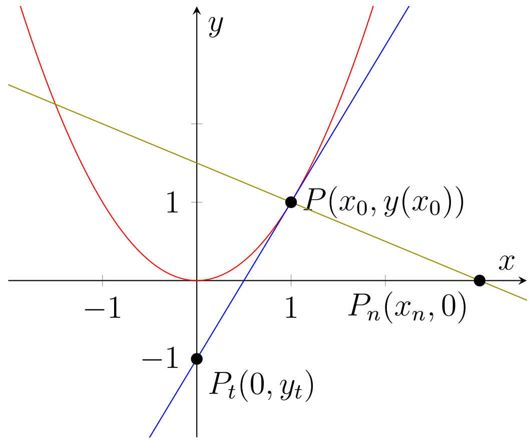


Figura 3.1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 3.1.2.2.

Notemos que, si $y'(x_0) = 0$, se cumple también que $x_n = 0 \cdot y(x_0) + x_0 = x_0$. Además, si $x_n = x_0$, entonces se tiene que $y'(x_0) = 0$, por lo que también se cumple.

La ecuación diferencial que especifica el enunciado es $|y_t| = |x_n|$. Por tanto, tenemos que:

$$|y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)| = |y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0|$$

Quitando los valores absolutos, llegamos a que:

$$y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0 \Longrightarrow y(x_0) - x_0 = y'(x_0)\,(y(x_0) + x_0)$$
$$y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = -y(x_0) \cdot y'(x_0) - x_0 \Longrightarrow y(x_0) + x_0 = y'(x_0)\,(x_0 - y(x_0))$$

Por tanto, describe dos ecuaciones diferenciales distintas:

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \qquad \text{y} \qquad y' = \frac{y + x}{x - y}$$

Ejercicio 3.1.3. En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

Del contexto, deducimos que $x \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$. Además, tenemos que su primera derivada solo se anula en $x = \alpha$ y $x = \beta$. Consideramos por tanto los siguientes casos:

- Si $x \in]0, \alpha[$: En este caso, $x < \alpha < \beta$, luego $x - \alpha < 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.
- Si $x \in]\alpha, \beta[$: En este caso, $\alpha < x < \beta$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' > 0$, luego es creciente.

- Si $x \in]\beta, +\infty[$: En este caso, $x > \beta > \alpha$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x < 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.

Por tanto, para el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$, tenemos que:

- Si $x(0) \in]0, \alpha[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to 0$.
- Si $x(0) \in]\alpha, \beta[$, entonces x' es creciente, luego $x(t) \to \beta$.
- Si $x(0) \in]\beta, +\infty[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to \beta$.

Ejercicio 3.1.4. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1. $xy = k$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:
   $$0 = y + xy' \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x}$$
   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:
   $$y' = \frac{x}{y}$$

2. $y = kx^4$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:
   $$0 = 4kx^3 - y' \Longrightarrow y' = 4kx^3 = 4 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{y}{x}$$
   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:
   $$y' = -\frac{x}{4y}$$

3. $y = e^{kx}$.

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:
   $$0 = ke^{kx} - y' \Longrightarrow y' = ke^{kx}$$
   Para despejar la k, tenemos que $k = \dfrac{\ln y}{x}$. Por tanto, tenemos que:
   $$y' = \frac{\ln y}{x} \cdot e^{\frac{\ln y}{x} \cdot x} = \frac{\ln y}{x} \cdot y$$

Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{y \ln y}$$

Ejercicio 3.1.5. Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Las soluciones alcanzan un punto crítico donde $x'(t) = 0$, es decir, $t + x^3 = 0$. Por tanto, las soluciones alcanzan un punto crítico en la curva $x(t) = \sqrt[3]{-t}$. El dibujo, tanto del campo de direcciones como de la curva, se encuentra en la Figura 3.2.

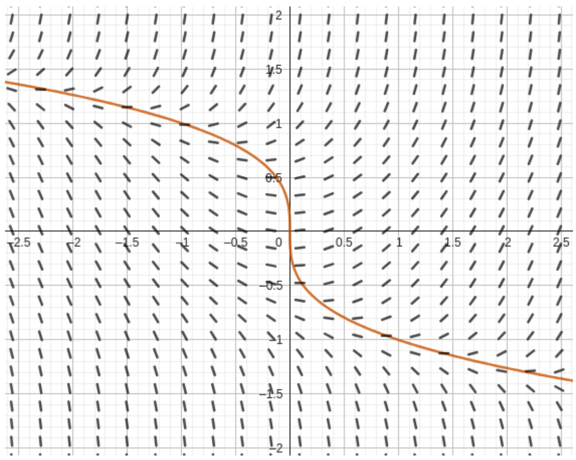


Figura 3.2: Campo de direcciones y curva del Ejercicio 3.1.5.

Supongamos ahora una solución tal que $x(0) = 0$. Como x es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, tenemos que $x \in C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, x es derivable en 0. Calculamos la derivada de x en 0:

$$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$$

Por tanto, tenemos que es un punto crítico. Comprobemos que es un mínimo local estricto. Para ello, calculamos la segunda derivada de x en 0:

$$x''(0) = 1 + 3x(0)^2 \cdot x'(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 \cdot 0 = 1 > 0$$

Por tanto, es un mínimo local estricto. Además, como es el único punto crítico de una función derivable y continua, tenemos que es el mínimo global.

Ejercicio 3.1.6. Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva
$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$
dando su intervalo maximal de definición.
2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.
3. La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

Ejercicio 3.1.7. Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0, s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

Observación. Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

Ejercicio 3.1.8. Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial
$$x'' + x = 0, \tag{3.1}$$
entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,
$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{3.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (3.1).

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (3.1). Definimos la función auxiliar
$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (x'(t))^2 + x^2(t). \end{array}$$

Por ser x una solición de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x,\ x' \in C^1(I)$ y, por tanto f es derivable. Calculamos su derivada:
$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\ \ [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que f es constante en I. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:
$$(x'(t))^2 + x^2(t) = 0^2 + 1^2 = 1,$$
$$x''(t) + x(t) = 0 + 1 = 1$$

Ejercicio 3.1.9. Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},$$
$$\frac{dy}{dt} = v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.

   Representemos la situación en la Figura 3.3.

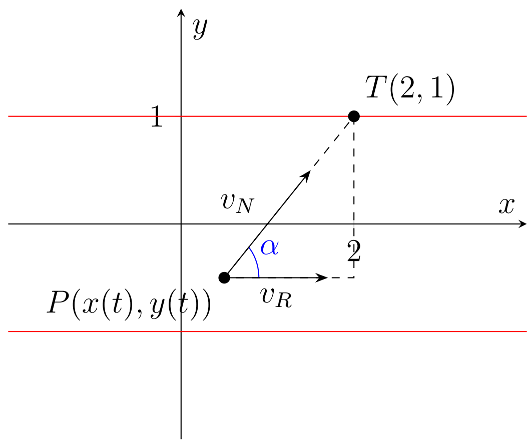


Figura 3.3: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 3.1.9.

   Tenemos que $x(t)$ es la componente horizontal de la posición de la nadadora, por lo que $x'(t)$ es la velocidad horizontal de la nadadora:

$$x'(t) = v_R + v_N \cdot \cos(\alpha) \overset{(*)}{=} v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

   donde en $(*)$ hemos empleado la definición de coseno como cateto contiguo sobre hipotenusa. Por otro lado, $y(t)$ es la componente vertical de la posición de la nadadora, por lo que $y'(t)$ es la velocidad vertical de la nadadora:

$$y'(t) = v_N \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \overset{(*)}{=} v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

   donde en $(*)$ hemos empleado la definición de seno como cateto opuesto sobre hipotenusa.

2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

   Tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}}{v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}}$$

Ejercicio 3.1.10. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$,

2. $x = c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t$.

Ejercicio 3.1.11. Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx_0 + \varphi(x_0)$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

2. Suponiendo que $\varphi(x) = x^2$, demuestre que $x(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ también es solución.

3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

Ejercicio 3.1.12. Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.