Modelos de Computación

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas **5**
1.1. Autómatas con Pila 6
1.1.1. Preguntas Tipo Test 16

1. Relaciones de Problemas

1.1. Autómatas con Pila

Ejercicio 1.1.1. Determinar una gramática que acepte el lenguaje $N(M)$ por el criterio de pila vacía, donde,

$$M = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset\}$$

y donde

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX), (q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, b, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_1, a, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

y el resto de transiciones son el conjunto vacío.

En el estado q_0, vemos que cada a o b va añadiendo una X a la pila. En el estado q_1, cuando hay X tan solo se pueden leer a's para eliminar la X de la pila, hasta llegar al símbolo inicial de la pila, que se elimina. Por tanto, el lenguaje aceptado por este autómata por el criterio de pila vacía es:

$$N(M) = \{ua^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ u \in \{a, b\}^*,\ |u| = n\}$$

La gramática que acepta este lenguaje es:

$$\begin{aligned}
&G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S) \\
&P = \{S \to aSa \mid bSa \mid aa \mid ba\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.2. Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje siguiente, indicando si los autómatas son deterministas:

$$\{a^ib^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{b^i \mid i \geqslant 0\}$$

1. Por el criterio de estados finales.

   Sea el autómata $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_0\})$. La función de transición δ la desollaremos poco a poco. En primer lugar, desde la configuración inicial, si leemos una a podríamos estar en alguno de los dos primeros casos, mientras que leyendo una b estaríamos en el tercer caso. Por tanto, las transiciones iniciales son:

   $$\begin{aligned}
   \delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, AZ_0), (q_1, XZ_0)\} \\
   \delta(q_0, b, Z_0) &= \{(q_0, BZ_0)\}
   \end{aligned}$$

   Indiquemos ahora las transiciones que se realizan en el estado q_0. Además de las iniciales, para los dos últimos casos añadimos:

   $$\begin{aligned}
   \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, A)\} \\
   \delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, B)\}
   \end{aligned}$$

Respecto al primer caso, el estado q_1 se leen a's, mientras que en el estado q_2 se leen b's. Para controlar que el número sea el mismo, añadimos un símbolo X a la pila por cada a leído y lo eliminamos por cada b leído.

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, a, X) &= \{(q_1, XX)\}\\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, b, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Además, este autómata no es determinista, puesto que:

$$|\delta(q_0, a, Z_0)| = 2 \geqslant 1$$

2. Por el criterio de pila vacía.

Razonándolo de forma directa Sea el autómata dado por

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$$

donde la función de transición δ la desollaremos poco a poco. En primer lugar, desde la configuración inicial, si leemos una a podríamos estar en alguno de los dos primeros casos, mientras que leyendo una b estaríamos en el tercer caso. Por tanto, las transiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, A), (q_1, XZ_0)\}\\
\delta(q_0, b, Z_0) &= \{(q_0, B)\}
\end{aligned}$$

Indiquemos ahora las transiciones que se realizan en el estado q_0 (además de las iniciales), por ser estos los casos más sencillos.

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, A), (q_0, \varepsilon)\}\\
\delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, B), (q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Respecto al primer caso, el estado q_1 se leen a's, mientras que en el estado q_2 se leen b's. Para controlar que el número sea el mismo, añadimos un símbolo X a la pila por cada a leído y lo eliminamos por cada b leído.

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, a, X) &= \{(q_1, XX)\}\\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, b, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Además, este autómata no es determinista, puesto que:

$$|\delta(q_0, a, Z_0)| = 2 \geqslant 1$$

Razonándolo de forma algorítmitca Lo obtendremos a partir del anterior empleando el algoritmo para pasar de un autómata con pila por el criterio de estados finales a uno por el criterio de pila vacía. Para ello, añadimos un nuevo estado q_f que será el único estado final y que se alcanzará desde q_0 cuando la pila esté vacía. Para ello, sea el autómata M^n dado por:

$$M^n = (\{q_0, q_1, q_2\} \cup \{q_0^n, q_S\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B, X\} \cup \{Z_0^n\}, \delta, q_0^n, Z_0^n, \emptyset)$$

donde la función de transición δ viene dada por las transiciones de M más las siguientes:

$$\begin{aligned} \delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) &= \{(q_0, Z_0)\} \\ \delta(q_0, \varepsilon, H) &= \{(q_S, H)\} \qquad \forall H \in \{Z_0, A, B, X, Z_0^n\} \\ \delta(q_S, \varepsilon, H) &= \{(q_S, \varepsilon)\} \qquad \forall H \in \{Z_0, A, B, X, Z_0^n\} \end{aligned}$$

Como el autómata M de criterio de estados finales no era determinista, este tampoco lo será.

Ejercicio 1.1.3. Obtener a partir de la gramática $G = (\{S, T\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, con

$$P = \{S \to abS,\ S \to cdT,\ T \to bT,\ T \to b\}$$

un autómata con pila que acepta por el criterio de estados finales el lenguaje generado por esa gramática.

El lenguaje generado es regular, con expresión regular asociada:

$$(ab)^*\ cd\ b^+$$

Por tanto, puede ser aceptado por un AFD. La extensión a APND es directa, por lo que el autómata es:

$$M = \{\{q_0, \ldots, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_4\}\}$$

donde la función de transición δ viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z_0) &= \delta(q_1, Z_0) \\ \delta(q_1, b, Z_0) &= \delta(q_0, Z_0) \\ \delta(q_0, c, Z_0) &= \delta(q_2, Z_0) \\ \delta(q_2, d, Z_0) &= \delta(q_3, Z_0) \\ \delta(q_3, b, Z_0) &= \delta(q_4, Z_0) \\ \delta(q_4, b, Z_0) &= \delta(q_4, Z_0) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.4. Demostrar que los siguientes lenguajes son libres del contexto y obtener para cada uno de ellos un autómata con pila no determinista que pueda ser usado como reconocedor:

1. $L_1 = \{a^p b^q \mid p, q \geqslant 1;\ p > q\}$.

Por Estados Finales Sea el autómata M siguiente:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

La función de transición δ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

En este caso, en la pila por cada a introducimos una X, mientras que por cada b la quitamos. Además, al menos una X se quita sin haber leído una b, por lo que al menos hay una a más que b.

Por Pila Vacía Sea el autómata M siguiente:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$$

La función de transición δ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

En este caso, tan solo sería necesario vaciar la pila en los estados finales para obtener el equivalente con el criterio de pila vacía.

2. $L_2 = \{a^p b^q \mid p, q \geqslant 1;\ p < q\}$.

Por Estados Finales Sea el autómata M siguiente:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

La función de transición δ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, Z_0) &= \{(q_2, Z_0)\} \\
\delta(q_2, b, Z_0) &= \{(q_2, Z_0)\}
\end{aligned}$$

En este caso, en la pila por cada a introducimos una X, mientras que por cada b la quitamos. Además, al menos una b se lee tras haber quitado todas las X de la pila, por lo que al menos hay una b más que a.

Por Pila Vacía En este caso, en vez de pasar a q_2, podemos vaciar la pila en q_1. Sea el autómata M siguiente:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$$

La función de transición δ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, Z_0) &= \{(q_1, Z_0), (q_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

3. $L_3 = \{a^p b^q a^r \mid p + q \geqslant r \geqslant 1\}$.

Hemos de distinguir los casos en los que q o p son 0. Sea el autómata M por el criterio de pila vacía:

$$M = (Q \cup \{q_0\}, \{a, b\}, B \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$$

donde, inicialmente, $Q = B = \emptyset$, y la función de transición δ la iremos dando en cada caso.

- Si $p = 0$, entonces $q \geqslant r \geqslant 1$. Tenemos que:
  - Añadimos $\{q_1\}$ a Q.
  - Añadimos $\{X\}$ a B.

  Además, añadimos las siguientes transiciones:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, b, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, b, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, a, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

- Si $q = 0$, entonces $L_3 = \{a^n \mid n \geqslant 2\}$, que es un lenguaje regular. Por tanto:
  - Añadimos $\{q_2\}$ a Q.

  Además, añadimos las siguientes transiciones:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_2, XZ_0)\} \\
\delta(q_2, a, X) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_2, Z_0), (q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

- Si $p, q \geqslant 1$, entonces añadimos las siguientes transiciones:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX)\}
\end{aligned}$$

  Además, hemos de usar todas las reglas que introducimos en el caso de $p = 0$ a excepción de la primera.

Ejercicio 1.1.5. Considera el lenguaje siguiente:

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

1. Haciendo uso de resultados matemáticos concretos, identifica a que tipos de lenguajes NO pertenece L.

   Demostraremos que este lenguaje no es regular haciendo uso del recíproco del Lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = a^n b^n c^{2n} \in L$. Toda descomposición de z en la forma $z = uvw$ con $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$ ha de cumplir que:

   $$u = a^k,\ v = a^l,\ w = a^{n-k-l} b^n c^{2n} \qquad 0 \leqslant k + l \leqslant n,\ l \geqslant 1$$

   Para $i = 2$, tenemos que $uv^2w = a^{n+l} b^n c^{2n} \notin L$, ya que:

   $$n + l + n = 2n \Longleftrightarrow l = 0$$

   Pero sabemos que $l \geqslant 1$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, por el recíproco del Lema de Bombeo, L no es regular.

2. Encuentra, si es posible, un reconocedor para las cadenas de ese lenguaje.

   Como reconocedor, sea la gramática $G = (\{S, X\}, \{a, b, c\}, P, S)$, con:

   $$P = \begin{cases} S \to aSc \mid X \\ X \to bXc \mid bc \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.6. Considerar el lenguaje L en el alfabeto $\{0, 1\}$ de todas las palabras en las que el número de 0 es el doble que el número de 1.

1. Construir un autómata con pila que, por el criterio de estados finales, acepte el lenguaje L.

   En este caso, es más sencillo razonarlo por el criterio de la pila vacía, por lo que estableceremos simplemente que cuando la pila contenga el símbolo inicial, podamos ir a un estado final. Sea el autómata M siguiente:

   $$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, Y\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

   Veamos qué significan los estados y los elementos del alfabeto de la pila:

   - Z_0: Indica que el balance es el correcto; que el número de 0's es el doble que el de 1's.
   - X: Implica sobrante de 1's, y se compensa con un 0. Por cada 1 leído, añadimos dos XX a la pila, puesto que ha de compensarse con dos 0's. Cada 0 leído elimina un X de la pila.
   - Y: Implica sobrante de 0s, y dos Y's se compensan con un 1. Por cada 0 leído, añadimos un Y a la pila, puesto que ha de compensarse con un 1. Cuando se introduzca un 1, en el caso de que haya dos Y's cosecutivas en la pila, se eliminan sin problema. En el caso de que haya una Y pero no dos, se quita la Y y se añade un X a la pila. Esta distinción se hace mediante el estado q_1.

- q_2: Es el estado final. Cuando en la pila esté el símbolo inicial, se podrá llegar a él.

Describamos ahora formalmente la función de transición δ. Cuando hay equilibrio (estado q_0 y pila con Z_0), tenemos que:

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, XXZ_0)\}$$
$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, YZ_0)\}$$

Veamos qué ocurre cuando no estamos en equilibrio:

$$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_0, XXX)\}$$
$$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_0, 1, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_0, 0, Y) = \{(q_0, YY)\}$$

El caso a estudiar ahora es el estado q_1. Tenemos que:

$$\delta(q_1, \varepsilon, Y) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$$

Notemos que nunca se va a alcanzar el estado q_1 teniendo una X en la pila; puesto que esto implicaría que se ha colocado una Y sobre una X, algo que no es posible.

Finalmente, el estado final q_2 se alcanza cuando la pila se puede vaciar:

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

2. Construir una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el mismo lenguaje.

Ejercicio 1.1.7. Considerar el lenguaje L en el alfabeto $\{a, b\}$ de todas aquellas palabras en las que el número de símbolos a es distinto del número de símbolos b.

1. Construir un autómata con pila que acepte dicho lenguaje.
2. Construir una gramática en forma normal de Chomsky a partir de dicho autómata.

Ejercicio 1.1.8. Dado $L = \{a^i b^j c^k a^i \mid i \geqslant 1,\ j \geqslant k \geqslant 1\}$ construir un autómata con pila que acepte dicho lenguaje por el criterio de pila vacía. Transformar dicho autómata en uno que lo acepte por el criterio de estados finales.

Ejercicio 1.1.9. Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje:

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i + l = j + k\}$$

Ejercicio 1.1.10. Sea el alfabeto $A = \{0, 1\}$ y para $u \in \{0, 1\}^*$, sea $\overline{u}$ la palabra obtenida a partir de u cambiando los 0 por 1 y los 1 por 0. Considerar el lenguaje $L = \{u \in \{0, 1\}^* \mid u^{-1} = \overline{u}\}$.

- Dar una gramática en forma normal de Chomsky que acepte L.
- Dar un autómata con pila que acepte L por el criterio de estados finales.

Ejercicio 1.1.11. Construir un autómata con pila que acepte el siguiente lenguaje:

$$L = \{0^r 1^s \mid r \leqslant s \leqslant 2r\}$$

- Construir, a partir de dicho autómata, una gramática libre de contexto que acepte el mismo lenguaje.
- Eliminar símbolos y producciones inútiles de la gramática.

Ejercicio 1.1.12. Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes:

1. El conjunto de todas las palabras u con el mismo número de síbolos a y b, y tal que en todo prefijo el número de símbolos a es menor o igual que el número de símbolos b.
2. $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \ \vee \ j = k\}$.

Los autómatas deberán de ser determinísticos en caso de que sea posible.

Ejercicio 1.1.13. Dado el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{gathered}
\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, AAZ_0)\}\delta(q_0, 0, A) = \{(q_0, AAA)\} \\
\delta(q_0, 0, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}\delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, A)\}\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, BZ_0)\} \\
\delta(q_0, 1, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}\delta(q_0, 1, B) = \{(q_0, BB)\}
\end{gathered}$$

Encontrar una gramática libre de contexto que genere el mismo lenguaje que este autómata acepta por el criterio de pila vacía. Se valorará que se haga por el procedimiento explicado en clase.

Ejercicio 1.1.14. Encontrar un autómata con pila que acepte el siguiente lenguaje

$$L_1 = \{uvv^{-1}u^{-1} \mid u, v \in \{0, 1\}^*\}$$

Ejercicio 1.1.15. Construir un autómata con pila determinístico que reconozca el lenguaje $L = L_1 \cap L_2$ sobre el alfabeto $A = \{0, 1, 2\}$, donde

- L_1 es el conjunto de todas las palabras $u \in A^*$ tales que en todo prefijo u' de u, la cantidad de símbolos 0 es mayor que la cantidad de 1.
- L_2 es el lenguaje de todas las palabras sobre A que contienen la subcadena 0102.

Ejercicio 1.1.16. Encontrar autómatas con pila para los siguientes lenguajes:

- $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j, \ i, j, k \geqslant 0\}$.

- $L = \{0^n 1^m 2^p 0^q 1^n \mid q = p + m,\ m \geqslant 1,\ p \geqslant 0\}$.

Ejercicio 1.1.17. Dado el alfabeto $A = \{0, 1\}$,

1. Construir un autómata con pila que acepte por el criterio de estados finales el conjunto de palabras con el triple de ceros que de unos.

2. Construir una gramática independiente del contexto asociada al autómata.

Ejercicio 1.1.18. Construir autómatas con pila (si es posible, deterministas) que acepten por el criterio de pila vacía los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

- $L = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 1\} \cup \{0^n 1^{2n} \mid n \geqslant 1\}$.

- $L = \{0^n 1^m 0^m 1^n \mid n, m \geqslant 1\}$.

Ejercicio 1.1.19. Dado el autómata con pila dado por las transiciones (R es el símbolo inicial):

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_1,0,R)=\{(q_1,BR)\} & \delta(q_1,1,R)=\{(q_1,GR)\} & \delta(q_1,0,B)=\{(q_1,BB)\} \\
\delta(q_1,1,B)=\{(q_1,GB)\} & \delta(q_1,0,G)=\{(q_1,BG)\} & \delta(q_1,1,G)=\{(q_1,GG)\} \\
\delta(q_1,1,G)=\{(q_2,G)\} & \delta(q_2,0,B)=\{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_2,2,G)=\{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_2,\varepsilon,R)=\{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_1,\varepsilon,R)=\{(q_2,R)\} & \delta(q_1,\varepsilon,B)=\{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,G)=\{(q_2,G)\} & \delta(q_1,0,R)=\{(q_2,R)\} & \delta(q_1,0,B)=\{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,0,G)=\{(q_2,G)\} & \delta(q_1,1,R)=\{(q_2,R)\} & \delta(q_1,1,B)=\{(q_2,B)\}
\end{array}$$

Construir una gramática independiente del contexto (siguiendo el procedimiento explicado en clase) que acepte el mismo lenguaje. Eliminar símbolos y producciones inútiles.

Ejercicio 1.1.20. Construir autómatas con pila (si es posible, deterministas) que acepten por el criterio de estados finales los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

- $L = \{0^i 1^j \mid j \geqslant i \geqslant 1\}$.

- $L = \{0^i 1^j 0^i \mid i, j \geqslant 1\} \cup \{1^i 0^j 1^i \mid i, j \geqslant 1\}$

Ejercicio 1.1.21. Construye un autómata con pila determinista por el criterio de estados finales que reconozca el lenguaje:

$L = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^+$ y nº de subcadenas 'ab' en u es igual al nº subcadenas 'ba' en $v\}$

¿Es posible encontrarlo por el criterio de pila vacía?

Ejercicio 1.1.22. Sea el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a, b, c, d\}$, dado por las siguientes reglas:

1. a y b son palabras del lenguaje.

2. Cualquier sucesión no vacía de palabras del lenguaje es una palabra del lenguaje.

3. Si u es una palabra del lenguaje, entonces $cudd$ es una palabra del lenguaje.

Decid de qué tipo es el lenguaje generado. Según sea el tipo del lenguaje, crear un autómata finito minimal o un autómata con pila que lo acepten.

Ejercicio 1.1.23. Describir autómatas con pila para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$ (si es posible hacerlos determistas e indicar si se ha conseguido):

1. Palabras de longitud impar con una b en el centro.
2. $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m \ \vee \ n \leqslant 3\}$.

Ejercicio 1.1.24. Supongamos un operador $\otimes$ que puede aparecer en el código de un lenguaje de programación con la siguiente estructura:

$$\otimes(u, v);$$

donde

- $u \in \{0, 1\}^*$ es una cadena de símbolos binarios que determina:
  1. La operación que se ejecutará. Si el número de 0's en la cadena u es igual al números de 1's se realiza una suma, en caso contrario se hace un producto.
  2. El número de operandos de $\otimes$ (número de ocurrencias de la subcadena '10' en u).
- $v \in \{a, b, c\}^*$ es una cadena donde cada símbolo representa un operando de $\otimes$.

Construir, si es posible:

1. Un autómata finito determinista que reciba como entrada la cadena u y le indique al ordenador si realiza una suma (estado final) o si realiza un producto (estado no final).
2. Construir un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía definido sobre el alfabeto de entrada

   $$A = \{'\otimes', '(', ')', ',', ';', '0', '1', 'a'\}$$

   que reciba como entrada una expresión del conjunto

   $$\{\otimes(u, v); \mid u \in \{0, 1\}^*, \ v \in \{a, b, c\}^*\}$$

   y nos informe si está bien construida sintácticamente (de acuerdo con lo especificado anteriormente) y si el número de operandos es correcto.

Ejercicio 1.1.25. Construir un autómata con pila (si es posible, determinista) que reconozca el siguiente lenguaje:

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i = 2j \ \vee \ j = 2k\}$$

Ejercicio 1.1.26.

1. Construye una gramática libre de contexto que genere el siguiente lenguaje en el alfabeto $\{a, b, c, d\}$:

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m + n \geqslant p + q\}$$

2. Construye un autómata con pila determinista que reconozca las cadenas del anterior lenguaje L por el criterio de estados finales.

Ejercicio 1.1.27. Construye un autómata con pila que acepte el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a, b\}$ de todas aquellas palabras en las que el número de símbolos a es distinto al número de símbolos b.

Ejercicio 1.1.28. Dado el siguiente lenguaje libre de contexto: $L = \{(01)^i(10)^j \mid j \geqslant i \geqslant 1\}$

(a) Encuentra una gramática libre de contexto que lo genere.

(b) Transforma la gramática anterior a un autómata con pila que acepte las cadenas del lenguaje L por el criterio de pila vacía.

(c) Transforma el autómata con pila anterior para que acepte las cadenas por el criterio de estados finales.

(d) Encuentra un autómata con pila determinista que acepte las cadenas del lenguaje L por el criterio de estados finales.

1.1.1. Preguntas Tipo Test

Se pide discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. La clase de los lenguajes aceptados por los autómatas con pila deterministas es igual a la clase de los lenguajes generados por las gramáticas de tipo 2.

2. Una palabra es aceptada por un autómata con pila por el criterio de pila vacía si en algún momento, cuando leemos esta palabra, la pila se queda sin ningún símbolo, con independencia de la cantidad de símbolos que hayamos leído de la palabra de entrada.

3. Un autómata con pila siempre acepta el mismo lenguaje por los criterios de pila vacía y de estados finales.

4. Todo lenguaje aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de estados finales es también aceptado por una autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

5. Para que un autómata con pila sea determinista es suficiente que desde cada configuración se pueda obtener, a lo más, otra configuración en un paso de cálculo.

6. Si un lenguaje de tipo 2 verifica la propiedad prefijo y es aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de estados finales, entonces también es aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

7. Para todo autómata con pila existe otro autómata con pila que acepta el mismo lenguaje y tiene un solo estado.

8. Si un lenguaje es aceptado por una autómata con pila determinista por el criterio de estados finales, entonces también es aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

9. En un autómata con pila determinista no puede haber transiciones nulas.

10. Si L es independiente del contexto determinista y $\$ \notin L$ entonces $L.\{\$\}$ es aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

11. El conjunto de las palabras $\{u0011u^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*\}$ es libre del contexto determinista.

12. En la construcción de una gramática independiente del contexto a partir de un autómata con pila, la variable $[p, X, q]$ genera todas las palabras que llevan al autómata desde el estado p al estado q sustituyendo X por el símbolo inicial de la pila.

13. En un autómata con pila determinista no puede haber transiciones nulas.

14. Todo autómata con pila determinista que acepta un lenguaje por pila vacía se puede transformar en otro autómata determinista que acepte el mismo lenguaje por el criterio de estados finales.

15. Para que un lenguaje independiente del contexto sea determinista ha de verificar la propiedad prefijo.

16. El lenguaje compuesto por las instrucciones completas del lenguaje SQL cumplen la propiedad prefijo.

17. En el algoritmo para pasar un autómata con pila a gramática que hemos visto, si el autómata tiene 3 estados, entonces la transición $(p, XYZU) \in \delta(q, \varepsilon, H)$ da lugar a 4^3 producciones.

18. El lenguaje $\{0^i 1^k 2^i \mid i, j \geqslant 0\}$ es independiente del contexto determinista.

19. Si tenemos un lenguaje L aceptado por un Autómata con Pila por el criterio de estados finales, podemos encontrar otro AP que reconozca L por el criterio de pila vacía.

20. La propiedad prefijo no tiene ninguna relación con el hecho de que un lenguaje sea aceptado por un autómata con pila determinista por estados finales.

21. Para toda gramática libre de contexto G siempre se puede encontrar un autómata con pila que acepte el lenguaje generado por G.

22. Si un lenguaje independiente del contexto cumple la propiedad prefijo, entonces puede ser aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

23. La descripción instantánea de un autómata con pila nos permite saber el estado activo, lo que queda por leer de la cadena de entrada, lo que se ha consumido de la cadena de entrada y lo que nos queda en la pila.

24. Un autómata finito determinista se puede convertir en un autómata con pila que acepta el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía.

25. El conjunto de cadenas generado por una gramática libre de contexto en forma normal de Greibach puede ser reconocido por un autómata finito no determinista con transiciones nulas.

26. Los lenguajes independientes del contexto con la propiedad prefijo son siempre reconocidos por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

27. Puede existir un lenguaje con pila determinista que no sea aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de estados finales.

28. Existe un algoritmo para transformar una gramática regular G en un autómata con pila que acepte las cadenas del lenguaje generado por G por el criterio de pila vacía.

29. Un autómata con pila determinista no puede tener transiciones nulas.

30. El conjunto de cadenas generadas por una gramática independiente del contexto en forma normal de Chomsky puede ser reconocido por un autómata finito no determinista con transiciones nulas.

31. Para que un lenguaje sea aceptado por una autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía tiene que verificar la propiedad prefijo.

32. Un autómata finito determinista se puede convertir en un autómata con pila que acepta el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía.

33. Un autómata con pila determinista no puede tener transiciones nulas.

34. Todo lenguaje aceptado por un automata con pila determinista por el criterio de estados finales es tambien aceptado por un automata con pila determinista por el criterio de pila vacía.

35. Si tenemos un autómata con pila en el que $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, C)$, entonces para construir una gramática independiente del contexto que genere el mismo lenguaje que acepta el autómata, debemos de añadir la producción $[p, C, q] \to a$ (según el procedimiento visto en clase).

36. Para que un autómata con pila sea determinista es necesario que no tenga transiciones nulas.

37. El lenguaje $L = \{u \in \{0,1\}^* \mid u = u^{-1}\}$ es independiente del contexto, pero no determinista.