Variable Compleja I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Para comprobar ahora que M es isomorfo a $\mathbb{C}$, se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M \\ & z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{array}$$

Para probar que f es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3. $f(1) = 1$.

   Tenemos que $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1$.

Por tanto, f es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- f es inyectiva.

  Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, igualando componente a componente, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

  Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, y tenemos que $f(z) = A$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto, M es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{1+i}$.

   Tenemos que:

   $$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1+i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1-i}{1+1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i}{2}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_1 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{Im} z_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ |z_1| &= \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+1+3+3}{4}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. $z_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1}$.

   Tenemos que:

   $$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3}-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1+3}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_2 &= -\frac{1}{4}, \\ \operatorname{Im} z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ |z_2| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \qquad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U. Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < 1 &\iff |z-a| < |1-\overline{a}z| \iff |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \iff \\
&\iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \iff z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < 1 - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a}z\overline{z} \iff \\
&\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\
&\iff |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1.
\end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1-|a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U. A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \to U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad:

  Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1} = \frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2} &\Longrightarrow (z_1-a)(1-\overline{a}z_2) = (z_2-a)(1-\overline{a}z_1) \Longrightarrow \\
  &\Longrightarrow z_1 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_1z_2} + |a|^2 z_2 = z_2 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_2z_1} + |a|^2 z_1 \Longrightarrow \\
  &\Longrightarrow z_1 - |a|^2 z_1 = z_2 - |a|^2 z_2 \Longrightarrow (1-|a|^2)z_1 = (1-|a|^2)z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.
  \end{aligned}$$

- Sobreyectividad:

  Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

  $$\begin{aligned}
  \frac{z-a}{1-\overline{a}z} = w &\Longrightarrow z - a = w(1-\overline{a}z) \Longrightarrow z - a = w - w\overline{a}z \Longrightarrow z + w\overline{a}z = a + w \Longrightarrow \\
  &\Longrightarrow z(1+w\overline{a}) = a + w \Longrightarrow z = \frac{a+w}{1+w\overline{a}}.
  \end{aligned}$$

  Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

  $$\begin{aligned}
  |z| = \left|\frac{a+w}{1+w\overline{a}}\right| = \frac{|a+w|}{|1+w\overline{a}|} < 1 &\iff |a+w| < |1+w\overline{a}| \iff |a+w|^2 < |1+w\overline{a}|^2 \iff \\
  &\iff (a+w)(\overline{a}+\overline{w}) < (1+w\overline{a})(1+\overline{w}a) \iff \\
  &\iff a\overline{a} + a\overline{w} + w\overline{a} + w\overline{w} < 1 + w\overline{a} + \overline{w}a + a\overline{a}w\overline{w} \iff \\
  &\iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\
  &\iff |w|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1.
  \end{aligned}$$

  Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & w & \longmapsto & \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}} \end{array}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

$\Longrightarrow$) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n.

- $\underline{n=1}$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $\underline{n=2}$: Hay dos opciones:

  Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned} |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| &\Longrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2|z_1||z_2| \Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow (z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \end{aligned}$$

  Tenemos ahora dos opciones:

  Opción 1 Tenemos que:

  $$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} \Longrightarrow z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^*$$

  Tomamos ahora $\lambda_2 = \dfrac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} \in \mathbb{R}$, por lo que:

  $$\lambda_2\ z_1 = \frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}}\ z_1 = z_2$$

  Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} &= (a+bi)(c-di) = ac+bd+(bc-ad)i, \\ z_2\overline{z_1} &= (c+di)(a-bi) = ac+bd+(ad-bc)i. \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \Longrightarrow bc-ad = ad-bc \Longrightarrow ad = bc.$$

  Distinguimos en función del valor de b:

  - Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.

- Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
- Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^c\!/_a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.

- Si $b \neq 0$, entonces $c = {}^{ad}\!/_b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^d\!/_b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.

$$\lambda_2\ z_1 = \frac{d}{b}(a+bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2\ z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$|z_1 + z_2| = |z_1(1+\lambda_2)| = |z_1||1+\lambda_2|$$
$$|z_1| + |z_2| = |z_1| + |\lambda_2\ z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1+|\lambda_2|).$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1+\lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de $\mathbb{C}$ como elementos de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en $\mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda\ z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2\rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2\rangle = \langle z_1, \lambda\ z_1\rangle = \lambda\langle z_1, z_1\rangle = \lambda\|z_1\|^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n, demostrémolo para $n+1$.

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1|\right) + |z_{n+1}| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| + |z_{n+1}| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| + |z_{n+1}|$$

Notando por $w = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho\ w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho\ w = \rho \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1}\ z_1$. Por tanto, se cumple para $n+1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ z_1\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 2|z-i|\}$.

   Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy+i| = 2|x+iy-i| \Longrightarrow |x+(y+1)i| = 2|x+(y-1)i| \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x^2+(y+1)^2 = 4(x^2+(y-1)^2) \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2+2y+1 = 4x^2+4y^2-8y+4 \Longrightarrow 3x^2+3y^2-10y+3 = 0 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}y+1 = 0 \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1 = 0 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

   Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ y radio $\dfrac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 4\}$.

   Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy-i| + |x+iy+i| = 4 \Longrightarrow |x+(y-1)i| + |x+(y+1)i| = 4 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+(y-1)^2 = 16+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow -2y = 16+2y-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow 4+y = 2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow 16+8y+y^2 = 4x^2+4y^2+4+8y \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow 4x^2+3y^2 = 12 \Longrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4-3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, consideramos $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$. Entonces, como en particular se tiene $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como $z \notin \mathbb{R}^-$ (y por tanto $|z| \neq -\operatorname{Re} z$), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z) \cdot |z|}{\cos(\arg z) \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}\right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen $\arg z$. Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{array}{rccl} f: & \left]-\pi, \pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha - 2 \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1}\right) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que $f(0) = 0 - 2\arctan(0) = 0$. Por otro lado, como $f \in C^1\left(\left]-\pi, \pi\right[, \mathbb{R}\right)$, consideramos la derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1}\right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha(\cos \alpha + 1) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1 + 2\cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 + 2\cos \alpha} = 1 - \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 0 \qquad \forall \alpha \in \left]-\pi, \pi\right[. \end{aligned}$$

Por tanto, f es constante, por lo que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right[$. Tomando como ángulo $\alpha = \arg z$, que por la elección hecha sabemos que $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$, tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}\right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(y/x\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(y/x\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan\left(y/x\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que $x = \operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)$ e $y = \operatorname{Im} z = |z| \operatorname{sen}(\arg z)$. Por tanto, distinguimos en función de los valores de x e y, usando además que $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$:

- <u>Si $x > 0$</u>:

  En este caso, $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arg z$$

  donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

- <u>Si $x < 0, y > 0$</u>:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]0, \pi\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]\pi/2, \pi\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z - \pi \in \left]-\pi/2, 0\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z - \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

- <u>Si $x < 0, y < 0$</u>:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi, 0\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]-\pi, -\pi/2\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z + \pi \in \left]0, \pi/2\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z + \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$$

- Si $x = 0, y > 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]0, \pi\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = \pi/2$.

- Si $x = 0, y < 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi, 0\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = -\pi/2$.

Ejercicio 1.1.8. Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre n.

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.
- Supongamos que se cumple para n, demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \\
&= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \\
&= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta + i(\cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta) = \\
&= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta).
\end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre θ, se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8.$$

Sea $z' = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\
\arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que $\operatorname{Re} z' > 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
z &= (z')^8 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^8 \overset{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\\
\operatorname{Im} z &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \tag{1.2}$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por i y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx)+i\operatorname{sen}(kx)\right) \overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(x)+i\operatorname{sen}(x)\right)^k$$

donde en $(*)$ hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo $z = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$, definimos $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, por lo que $u^2 = z$. Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k\overline{u}^k - u^{2k} = u^k(\overline{u}^k - u^k) = -2i\operatorname{sen}\left(k\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de z, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx)+i\operatorname{sen}(kx)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx)+i\operatorname{sen}(kx)\right) &\overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-z^{n+1}}{1-z} =\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{-2i\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^{n+1}}{-2i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot u} =\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot u^n =\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que $z \neq 1$; es decir, que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ no es convergente y calcular su límite.