

Cálculo II

Examen IX

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen IX

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1 (2 puntos). Teorema de Rolle. Teorema del Valor Medio.

Teorema 0.1 (Teorema de Rolle). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces,

$$\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$$

Demostración. En el caso de que f sea constante, tenemos que $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$, por lo que se tiene el resultado.

Supongamos f no constante. Al ser continua en $[a, b]$, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que $\exists m, M \in \mathbb{R}$, con $m < M$ tal que $f([a, b]) = [m, M]$. Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$.

- $\frac{m \neq (f(a) = f(b))}{f'(c_1) = 0}$: Tenemos que $c_1 \in]a, b[$, y es un mínimo relativo, por lo que $f'(c_1) = 0$.
- $\frac{M \neq (f(a) = f(b))}{f'(c_2) = 0}$: Tenemos que $c_2 \in]a, b[$, y es un máximo relativo, por lo que $f'(c_2) = 0$.

Puesto que $m \neq M$, seguro que estamos al menos ante uno de los dos casos anteriores, por lo que $\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$. \square

Teorema 0.2 (Teorema del Valor Medio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces,

$$\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración. Sea $r(x)$ la recta que pasa por los puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$:

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Consideramos ahora la función $h(x) = f(x) - r(x)$.

$$h(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) + 0 = 0$$

$$h(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) + 0 = 0$$

Como $h(a) = h(b)$, estamos ante las condiciones de Rolle. Por tanto, $\exists c \in]a, b[$ tal que:

$$0 = h'(c) = f'(c) - r'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por tanto,

$$\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

\square

Ejercicio 2 (2 puntos). Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Toda función cóncava hacia arriba es uniformemente continua.

Esto es falso, ya que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba pero no es uniformemente continua. Por tanto, el enunciado es **falso**.

2. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que todos los puntos de A son de acumulación de A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y f' no se anula, entonces f es inyectiva.

■ **Opción 1:** Usando el Teorema de Rolle:

Sabemos que f es derivable en $A = A \cap A'$, por lo que también es continua en A .

Supongamos que $\exists x, y \in A$, con $x < y$, tal que $f(x) = f(y)$. Entonces, por el Teorema de Rolle, $\exists c \in]x, y[\mid f'(c) = 0$. No obstante, esto no es posible ya que f' no se anula, por lo que deducimos que $\nexists x, y \in A$, $x < y$, con $f(x) = f(y)$.

Por tanto, $f(x) = f(y) \iff x = y$, por lo que f es inyectiva.

Opción 2: Sin usar el Teorema de Rolle:

Como es derivable en $A = A \cap A'$, y como f' no se anula, tenemos que f es estrictamente monótona. Por tanto, dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, tenemos que $f(x) < f(y)$ o $f(x) > f(y)$. En cualquier caso, tenemos que $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Por tanto,

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

por lo que f es inyectiva.

Por tanto, tenemos que el enunciado es **cierto**.

3. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que f' tiene un único cero en x_0 y f tiene un extremo relativo en x_0 . ¿Tiene f un extremo absoluto en x_0 ?

El enunciado es **cierto**. Veámoslo.

■ Suponemos que x_0 mínimo relativo:

Es decir, $\exists r > 0 \mid]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$ y que, $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ se tiene que $f(x) \geq f(x_0)$.

Para que x_0 no sea mínimo absoluto, es necesario que $\exists x_m \in I \mid f(x_m) < f(x_0)$.

Por tanto, como la función es continua, es necesario que exista un $x'_0 \in \mathbb{R}$ entre x_m y x_0 en el que $f(x'_0) = f(x_0)$. Por Rolle, tenemos que $\exists c \neq x_0 \mid f'(c) = 0$, en contradicción con que f' solo tiene un cero.

Por tanto, tenemos que x_0 es un mínimo absoluto.

■ Suponemos que x_0 máximo relativo:

Es decir, $\exists r > 0 \mid]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$ y que, $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$.

Para que x_0 no sea máximo absoluto, es necesario que $\exists x_m \in I \mid f(x_m) > f(x_0)$.

Por tanto, como la función es continua, es necesario que exista un $x'_0 \in \mathbb{R}$ entre x_m y x_0 en el que $f(x'_0) = f(x_0)$. Por Rolle, tenemos que $\exists c \neq x_0 \mid f'(c) = 0$, en contradicción con que f' solo tiene un cero.

Por tanto, tenemos que x_0 es un máximo absoluto.

Por tanto, en ambos casos tenemos que x_0 es un extremo relativo.

4. La función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 + t^2 + 1} dt \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

tiene límite en $+\infty$.

Consideramos $f_I(t) = \sqrt{t^5 + t^2 + 1}$, por lo que $f(x) = \int_0^x f_I(t) dt$.

Sea ahora $g_I(t) = \sqrt{t}$, y definamos $g(x) = \int_0^x g_I(t) dt$.

$$g(x) = \int_0^x g_I(t) dt = \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_0^x = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} x \sqrt{x} = +\infty$$

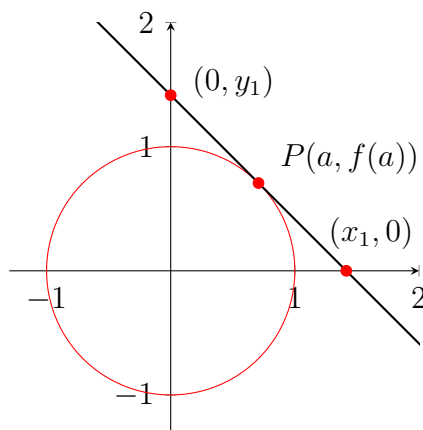
Por tanto, tenemos que $g(x)$ diverge positivamente.

Como tenemos que $0 \leq g_I(x) \leq f_I(x)$ y todas ellas son continuas por lo que localmente integrables en \mathbb{R}^+ , tenemos que:

$$f(x) = \int_0^\infty f_I(t) dt \text{ convergente} \implies g(x) = \int_0^\infty g_I(t) dt \text{ convergente}$$

Como $g(x)$ no es convergente, tenemos que $f(x)$ tampoco. Por tanto, es **falso**.

Ejercicio 3 (2 puntos). Cada tangente a la circunferencia unidad en un punto cualquiera del primer cuadrante corta a los dos ejes en dos puntos de la forma $(x_1, 0)$ y $(0, y_1)$. Halla la ecuación de la recta tangente para que la suma $x_1 + y_1$ sea mínima.



Trabajamos en primer lugar con la ecuación de la circunferencia. La ecuación de la circunferencia unidad es:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Como estamos trabajando en el primer cuadrante, con valores de $y \geq 0$, tenemos que:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Como el punto P pertenece a la circunferencia, tenemos que:

$$f(a) = \sqrt{1 - a^2}$$

Trabajamos ahora con la recta. Por la interpretación geométrica, tenemos que:

$$m_t = f'(a) = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Tenemos que la recta que pasa por los dos puntos de corte es:

$$r(x) = y_1 + m_t x = y_1 - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot x$$

Como el punto P pertenece a la recta, tenemos que:

$$r(a) = y_1 - \frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Usando que el punto P pertenece tanto a la circunferencia como a la recta,

$$\begin{aligned} f(a) = r(a) &\implies \sqrt{1 - a^2} = y_1 - \frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2}} \implies 1 - a^2 = y_1 \cdot \sqrt{1 - a^2} - a^2 \implies \\ &\implies y_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

Por tanto, la recta queda:

$$r(x) = y_1 - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot x = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot x = \frac{1 - ax}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Para $x = x_1$, tenemos que $r(x_1) = 0$:

$$r(x_1) = 0 \iff 1 = ax_1 \iff x_1 = \frac{1}{a}$$

Por tanto, la función a minimizar es:

$$\begin{aligned} S :]0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow S(a) = x_1 + y_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{1 - a^2} \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{1 - a^2}} = -\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(1 - a^2)\sqrt{1 - a^2}} = 0 \iff \\ &\iff a^3 = (1 - a^2)\sqrt{1 - a^2} \iff a^6 = (1 - a^2)^3 \iff a^2 = 1 - a^2 \iff \\ &\iff a^2 = \frac{1}{2} \iff a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Comprobemos que el punto crítico es un mínimo relativo.

- Para $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$: $S'(a) < 0 \implies S(a)$ estrictamente decreciente.
- Para $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$: $S'(a) > 0 \implies S(a)$ estrictamente creciente.

Por tanto, tenemos que $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo relativo. Como A es derivable y es definida en un intervalo, como es un mínimo relativo también es un mínimo absoluto.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el punto $(a, f(a))$ que minimiza esa suma es:

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Además, tenemos que:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{2}$$

Ejercicio 4 (2 puntos). Calcula los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsen(t) \arctan(t) dt}{(\ln(1+x))^3}$$

Como tenemos que el integrando es una función continua y acotada, tenemos que es Riemman Integrable. Por tanto, se puede emplear el TFC para calcular la derivada del numerador. Se empleará en la resolución del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsen(t) \arctan(t) dt}{(\ln(1+x))^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x) \arctan(x)}{3 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \arcsen(x) \arctan(x)}{3 \ln^2(1+x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x \arctan x + \frac{(1+x) \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(1+x) \arcsen x}{1+x^2}}{6 \frac{\ln(1+x)}{1+x}} \end{aligned}$$

Aplicando que el límite de la suma es la suma de los límites, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsen(t) \arctan(t) dt}{(\ln(1+x))^3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \arcsen x \arctan x}{6 \ln(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 \arctan x}{6 \sqrt{1-x^2} \ln(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 \arcsen x}{6(1+x^2) \ln(1+x)} \end{aligned}$$

Aplicando que el límite del producto es el producto de los límites, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsen(t) \arctan(t) dt}{(\ln(1+x))^3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \arcsen x}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2}{6\sqrt{1-x^2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} + \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2}{6(1+x^2)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{\ln(1+x)} \end{aligned}$$

Calculo los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln 1+x} &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{\ln 1+x} &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, usando los límites calculados, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsen(t) \arctan(t) dt}{(\ln(1+x))^3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \arcsen x}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2}{6\sqrt{1-x^2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} + \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2}{6(1+x^2)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{\ln(1+x)} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \sen x}{2 - \sen x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \sen x}{2 - \sen x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{2+\sen x}{2-\sen x}\right)}{x}} \stackrel{Ec. 1}{=} e^1 = e$$

donde previamente he resuelto esta indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2+\sen x}{2-\sen x}\right)}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x(2-\sen x) + \cos x(2+\sen x)}{(2-\sen x)^2}}{\frac{2+\sen x}{2-\sen x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(2-\sen x) + \cos x(2+\sen x)}{2-\sen x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(2-\sen x) + \cos x(2+\sen x)}{(2+\sen x)(2-\sen x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(2-\sen x + 2+\sen x)}{4-\sen^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x}{4-\sen^2(x)} = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{n+1}(I)$, $n \in \mathbb{N}$ y $P_{n,a}^f(x)$ su polinomio de Taylor de grado n centrado en el punto $a \in I$. Probar que $\forall x \in I$, $x \neq a$ se cumple:

$$f(x) - P_{n,a}^f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

(Indicación: Inducción e integración por partes)

Por el TFC, como f es de clase $n+2$, $f^{(n+2)}(x)$ es continua y por tanto Riemman Integrable en I , y por el TFC tenemos que:

$$\int f^{(p+1)}(x) dx = f^{(p)}(x) \quad \forall p \leq n+1$$

Demostramos ahora la igualdad por inducción sobre n :

■ Para $n = 0$:

Resolvemos la integral del término de la derecha.

$$\int_a^x f'(t) dt = [f(t)]_a^x$$

Por tanto, la igualdad a demostrar es:

$$f(x) - P_{0,a}^f(x) = \frac{1}{0!} [f(t)]_a^x \iff f(x) - \frac{f(a)}{0!} x^0 = f(x) - f(a)$$

Por tanto, tenemos que es cierto para $n = 0$.

■ Supuesto cierto para $n - 1$, demostramos para n :

Resolvemos la integral del término de la derecha.

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= \left[\begin{array}{ll} u(t) = (x-t)^n & u'(t) = -n(x-t)^{n-1} \\ v'(t) = f^{(n+1)}(t) & v(t) = f^{(n)}(t) \end{array} \right] = \\ &= [f^{(n)}(t)(x-t)^n]_a^x + n \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción, resolvemos la integral restante:

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= [f^{(n)}(t)(x-t)^n]_a^x + n(n-1)! [f(x) - P_{n-1,a}^f(x)] = \\ &= -f^{(n)}(a)(x-a)^n + n! [f(x) - P_{n-1,a}^f(x)] \end{aligned}$$

Pasando el factorial dividiendo, tenemos que:

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + [f(x) - P_{n-1,a}^f(x)]$$

No obstante, tenemos que el término n -ésimo del polinomio de Taylor en cuestión, por lo que tenemos:

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = f(x) - P_{n,a}^f(x)$$

Por tanto, lo tenemos demostrado para n .