Modelos Matemáticos I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

0. Introducción

1. ¿Qué modelos vamos a estudiar?
    - ¿Cómo se "usan" los modelos?
    - ¿Modelos discretos o continuos?
2. Ejemplos de modelos que vamos a estudiar
    a) Dinámica de poblaciones:
    - Modelo de Malthus.
    - Modelo logístico.
    - Modelo de Leslie.

    b) Modelos aplicados a la economía.
    - Interés compuesto.
    - Ley de la oferta y la demanda (Modelo de la telaraña).
    - Modelo de la renta de Samelson.

    c) Modelo de Malthus (discreto y continuo). Ejemplo motivador de la asignatura.
    - ¿Es el modelo "bueno"?
    - Mejoras del modelo → Modelo logístico.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de interés compuesto. Supongamos que el capital inicial es de 1000€, y el interés anual del 3 %. ¿Cuánto dinero tenemos pasados 5 años?

$$1000 \cdot 1{,}03^5 = 1159{,}27€$$

Suponiendo que el capital inicial es c_0, el número de años viene dado por n, y el interés viene dado por I, tenemos que:

$$c_n = c_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n$$

También se puede plantear como una Ley de Recurrencia (también llamada ecuación en diferencias). Es decir:

$$c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{I}{100}\right)$$

Ejemplo. Supongamos que estamos estudiando una población de bacterias. Supongamos que la tasa de bacterias que han muerto cada vez que se ve la muestra es de $m = 75\,\%$. Además, supongamos que la tasa de nacimiento es del $f = 150\,\%$. Notando la población de las bacterias por p_n, tenemos que:

$$p_{n+1} = p_n + 1{,}5p_n - 0{,}75p_n = 1{,}75p_n$$

Esto es una ecuación en diferencias, y es un ejemplo del *Modelo de Malthus*. De forma análoga al ejemplo anterior, tenemos que:

$$p_n = 1{,}75^n \cdot p_0$$

Como $1{,}75 > 1$, tenemos que la población crece de forma ilimitada, diverge.

En estos ejemplos hemos introducido lo que era una ecuación en diferencias. Definámoslo:

Definición 0.1 (Ecuación en diferencias)**.** Una ecuación en diferencias (también llamada Ley de Recurrencia) es una relación que se establece entre los términos de una sucesión $\{x_n\}$ de forma que podemos calcular el término x_{n+1} en función de algunos de los anteriores términos mediante una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

A dicha función f se le denomina función asociada a la Ley de Recurrencia.

Notemos que, si queremos dar una sucesión que cumpla la ecuación en diferencias dada, será tan simple como dar un término $x_0 \in \mathbb{R}$ y obligar a que dicha sucesión cumpla la ecuación en diferencias.

Por tanto, resolver una ecuación en diferencias no consistirá en dar una sucesión que cumpla la relación especificada, sino dar una expresión explícita del término x_n, para cualquier sucesión que satisfaga la ecuación.

Definición 0.2 (Orden de una ecuación en diferencias)**.** Dada una ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$$

Diremos que la ecuación es de orden $k \in \mathbb{N}$.

Por tanto, una ecuación de orden 1 será del estilo:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Una ecuación de orden 2 será del estilo:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$$

Para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

0.1. Modelo de Malthus

Sea t el tiempo, y sea $P(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t. Sea f la tasa de fertilidad y m la tasa de mortalidad ($0 \leqslant m \leqslant 1$). Tras contar la población pasado un tiempo Δt, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(t+\Delta t) &= \text{La que había} + \text{Nace} - \text{Muere} = \\ &= P(t) + \Delta t \cdot f \cdot P(t) - \Delta t \cdot m \cdot P(t) = \\ &= P(t)\left(\Delta t \cdot (f-m) + 1\right) \end{aligned}$$

Modelo discreto. Denominando $p_{n+1} = P(t+\Delta t)$, $p_n = P(t)$, tenemos que:

$$p_{n+1} = p_n \cdot (\Delta t \cdot (f-m) + 1)$$

Esta es la ecuación en diferencias. Su solución es una *sucesión.*

También se puede expresar como:

$$p_n = p_0\left(1 + \Delta t(f-m)\right)^n$$

Notemos que, debido a que los parámetros se mantienen constantes, será muy común también expresar este modelo como:

$$x_{n+1} = r x_n \qquad r \in \mathbb{R}^+$$

Con $r = \Delta t \cdot (f-m) + 1$

- Si $f > m$, tenemos que la población crece.
- Si $f < m$, la base de la potencia es menor que 1 y decrece.

El modelo obliga a la población a reproducirse indefinidamente o a extinguirse, por lo que no es un buen modelo.

Si nos preguntamos por una solución constante (si nos preguntamos qué pasa si p_n es constante), tendríamos que o bien, $f = m$, o bien $p_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Modelo continuo. La tasa de crecimiento es:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} &= P'(t) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (f-m)P(t) = (f-m)P(t) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$P'(t) = (f-m)P(t)$$

Esta es la ecuación diferencial. Su solución es una *función.*

Suponiendo que $P(t)$ es siempre positiva o igual a 0[1]:

[1]No tiene sentido considerar poblaciones con un número negativo de individuos.

- Si $f > m$, el producto es positivo y la derivada también $\Rightarrow$ la función crece.
- Si $f < m$, el producto es negativo y la derivada también $\Rightarrow$ la función decrece.

De ahora en adelante, apenas consideraremos modelos continuos, y nos centraremos en modelos discretos. Los modelos continuos serán objeto de estudio en la asignatura de Modelos Matemáticos II.

0.1.1. Bondad del Modelo de Malthus

Estudiamos ahora si el Modelo de Malthus es "bueno". Algunas desventajas son:

- Las tasas de fertilidad y mortalidad constantes no son realistas (al menos para tiempos largos ni para poblaciones grandes de seres vivos).
- En el modelo discreto, como hemos visto, la población o crece ilimitadamente o se extingue. No admite comportamientos intermedios.

Una ventaja de este es lo sencillo que es de calcular en el caso discreto. En otros modelos, podemos encontrar ecuaciones en diferencias que no seamos capaces de resolver.

0.1.2. Solución del Modelo de Malthus

Veamos en qué consiste resolver una ecuación en diferencias:

Definición 0.3. Una sucesión $\{x_n\}$ es una solución de la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ si satisface la ecuación. Es decir, si cada término se obtiene del anterior haciendo su imagen por f.

La solución del Modelo de Malthus es:

$$p_n = p_0 \cdot (\Delta t \cdot (f - m) + 1)^n = r^n p_0$$

0.1.3. Vida Media

Para el Modelo de Malthus en los casos en los que la población decrece (es decir, en $r \in]0, 1[$), se define la vida media de la siguiente forma:

Definición 0.4 (Vida media en ley de desintegración)**.** El tiempo de vida media es el tiempo medio estimado que debe pasar para que una sustancia se desintegre.

La vida media se define formalmente de la siguiente forma, en el caso de que la sucesión $\sum_{n\geqslant 0} n(x_{n-1} - x_n)$ converja:

$$VM := \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n)$$

Veamos cómo calcularla de forma concreta en el caso del Modelo de Malthus:

$$x_{n+1} = rx_n \qquad 0 < r < 1$$

Demostremos que se calcula de la siguiente forma:

$$VM := \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n) = \frac{1}{1-r}$$

Demostración. Partimos de la definición de la vida media:

$$\begin{aligned}
VM &= \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n-1} - x_n) = \\
&= \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1}x_0 - r^n x_0) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1} - r^n) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(1-r) = \\
&= (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \overset{(*)}{=} \frac{1-r}{(1-r)^2} = \frac{1}{1-r}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$, hemos usado el Lema 0.1, demostrado a continuación. □

Lema 0.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Demostración. Sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = r^0 + r^1 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Derivando respeto de r, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{i-1} = 1 + 2r + \cdots + nr^{n-1} = \frac{-(n+1)r^n(1-r) + (1-r^{n+1})}{(1-r)^2}$$

Como $|r| < 1$, tomando límite con $n \to \infty$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

□

0.2. Modelo Logístico

El presente modelo mejorará el modelo de Malthus. Para concretar los fallos de este último modelo, hemos de incluir las siguientes definiciones (sea $\{p_n\}$ una sucesión de números reales que nos indica el tamaño de población en el $n-$ésimo instante):

Definición 0.5 (Tasa de crecimiento)**.** Se define la tasa de crecimiento de una población como:

$$TC := \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

Nos informa de si la población crece o decrece (mayor o menor que 1).

Definición 0.6 (Tasa neta de crecimiento)**.** Se define la tasa neta de crecimiento de una población como:

$$TNC := \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = TC - 1$$

Nos informa de cuánto crece la población.

En el caso del Modelo de Malthus notado de la forma:

$$p_{n+1} = r \cdot p_n \qquad \text{con } r = 1 + \Delta t(f - m)$$

se tendría que:

$$TC = r \qquad TCN = r - 1$$

Ejemplo. Supongamos un modelo de Malthus dado por:

$$p_{n+1} = 1{,}25p_n$$

Tenemos que:

$$TC = 1{,}25 \qquad TCN = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$$

La tasa de crecimiento neto nos dice que la población aumenta en el 25 %.

El fallo del modelo de Malthus es tener una tasa de crecimiento constante. El modelo logístico resuelve esto. Cambiamos la tasa de crecimiento por una recta de la forma:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = a - b \cdot p_n, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Esto se acerca más a un comportamiento real, ya que conforme la población aumenta, se tiene que:

- La tasa de mortalidad m tiende a crecer.
- La tasa de fertilidad f tiende a decrecer.

Y, conforme la población decrece, se tiene lo contrario, es decir:

- La tasa de mortalidad m tiende a decrecer.

- La tasa de fertilidad f tiende a crecer.

Por tanto, sabiendo la TC, el modelo logístico viene dado por:

$$p_{n+1} = p_n(a - b \cdot p_n) \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Observación. ¿Pueden a, b tomar cualquier valor no negativo garantizando que se tenga $p_n \geqslant 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, suponiendo que $p_0 \geqslant 0$?

No, veámoslo. Para que $p_n \geqslant 0$, necesitamos que:

$$a - b \cdot p_n \geqslant 0 \Longleftrightarrow a \geqslant b \cdot p_n \Longleftrightarrow p_n \leqslant \frac{a}{b} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La función asociada a la ecuación logística es la parábola:

$$f(x) = x(a - bx)$$

Y, por lo visto anteriormente, necesitamos que la función sea de la siguiente forma:

$$f : \left[0, \frac{a}{b}\right] \to \left[0, \frac{a}{b}\right]$$

Al valor $^a/_b$ se le denomina *población tope*.

Este modelo no es lineal, como bien podemos ver, ya que su función asociada es una parábola.

0.2.1. Solución del Modelo Logístico

Al contrario de lo que ocurría con Malthus, no podemos buscar una solución a este modelo de forma tan fácil. Veámoslo:

$$x_0 \Rightarrow x_1 = x_0(a - bx_0) \Rightarrow x_2 = x_1(a - bx_1) = x_0(a - bx_0)(a - bx_0(a - bx_0)) \Rightarrow x_3 = ...$$

Como vemos, no es fácil encontrar la sucesión de las soluciones. Esto es un caso concreto de un problema de valores iniciales, que trataremos en la próxima sección.

0.3. Soluciones de un modelo.

Como hemos visto, solucionar una ecuación en diferencias no tiene por qué ser fácil. Se trata de un problema de valores iniciales (PVI).

Definición 0.7 (PVI)**.** Un problema de valores iniciales es buscar las soluciones de una ley de recurrencia dado x_0 fijado.

$$x_1 = f(x_0) \quad \dots \quad x_{n+1} = f^n(x_0)$$

Por norma general, resolverlo no es fácil sin el uso de ordenadores, ya que para valores altos de n requiere gran cantidad de cómputos.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de PVI particular. Sea la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = \log(x_n)$$

En este caso, se resuelve de forma sencilla, ya que $x_1 = 0$ y ya no se puede continuar, ya que no pertenece al dominio de definición del logaritmo.

Observación. Veamos si podemos encontrar $I \subset \mathbb{R}$ tal que si tomamos $x_0 \in I$ la sucesión dada por la Ley de Recurrencia $x_{n+1} = \log(x_n)$ tenga infinitos términos.

La ecuación en diferencias siempre viene asociada a una funciónf f dada por:

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Basta que $f(I) \subseteq I$ para poder sacar una sucesión que resuelva el PVI.

Definición 0.8 (Órbita o trayectoria)**.** Se define la órbita o trayectoria de la solución que empieza en x_0 como:

$$\{x_0, f(x_0), (f \circ f)(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots\}$$

Esta es la sucesión de todos los términos de la solución de un modelo.

Definición 0.9 (Retrato de fases)**.** El retrato de fases es la representación gráfica de la órbita.

Ejemplo. Resolver el modelo de Malthus dado por:

$$x_{n+1} = 2x_n$$

Dado x_0, la solución tiene término general $x_n = 2^n x_0$.

$$\text{órbita}_{x_0} = \{x_0, 2x_0, 2^2x_0, \ldots, 2^n x_0, \ldots\}$$

Su retrato de fases sería el siguiente:

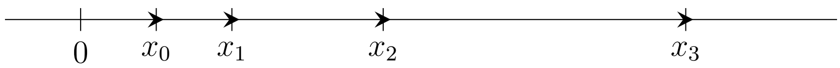


Figura 1: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = 2x_n$.

La función f asociada sería:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

La ecuación tiene sentido para cualquier dato de $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tratamos el modelo de Malthus en poblaciones (por ejemplo), no tiene sentido considerar todo $\mathbb{R}$.

Definición 0.10 (Soluciones constantes)**.** Una solución constante, también llamado punto de equilibrio, es una órbita que es una sucesión constante $x_c = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$ que cumplen la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ y que tienen todos sus términos iguales:

$$x_c = \{c, c, \ldots, c, \ldots\}$$

Es decir; se trata de encontrar $c \in I$ tal que $c = f(c)$. Determinamos entonces las soluciones constantes encontrando los puntos fijos de f.

Ejemplo. Si el modelo fuera $x_{n+1} = 0 \cdot x_n$, la órbita sería:

$$\{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

Se trata de una solución constante, con retrato de fases:

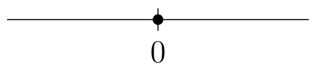


Figura 2: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = 0 \cdot x_n$.

Centrémonos ahora en hallar las soluciones constantes de los modelos vistos hasta el momento. Trabajemos con el modelo de **Malthus** dado por:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n$$

Las soluciones constantes son:

- <u>Si $r \neq 1$</u>: Entonces $x_c = 0$, $c = 0$.
- <u>Si $r = 1$</u>: $x_{x_0} = \{x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Para el modelo **logístico** dado por:

$$p_{n+1} = p_n(a - b \cdot p_n) \qquad 0 \leqslant p_0 \leqslant \frac{a}{b}$$

Las soluciones constantes son:

$$x_0 = \{0, 0, \ldots, \}$$

$$x_{\frac{a-1}{b}} = \left\{\frac{a-1}{b}, \frac{a-1}{b}, \ldots\right\}$$

Veamos cómo las hemos obtenido. La f asociada es: $f(x) = x(a - bx)$, por lo que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación $c = c(a - bc)$.

- $c = 0$
- $c = \dfrac{a-1}{b}$

Definición 0.11 (Ciclos)**.** Un n-ciclo es una solución de la ecuación que cumple que $x_n = x_0$, es decir:

$$f^n(x_0) = x_0$$

Por tanto, los puntos fijos de f^n son los $n-$ciclos. La órbita de un n-ciclo es de la forma:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

Para que los ciclos sean no triviales, sus elementos no deben ser puntos fijos de f^m, con $m < n$.

Ejemplo. Sea el modelo dado por:

$$x_{n+1} = -x_n$$

La f asociada es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = -x$. Su órbita es:

$$\text{Órbita}_{x_0} = \{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots\}$$

Se trata de un 2-ciclo. El retrato de fases sería el siguiente:

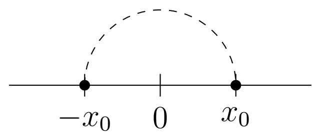
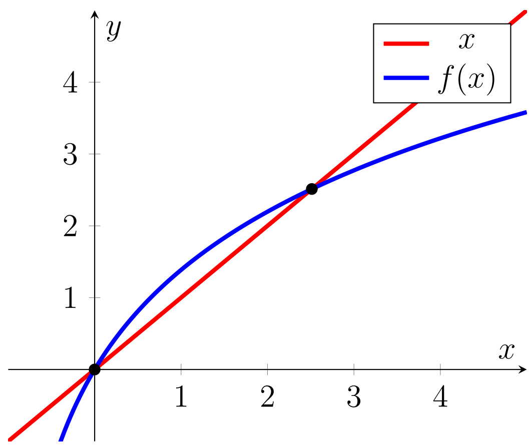


Figura 3: Retrato de fases del modelo de Malthus dado por $x_{n+1} = -x_n$.

Veamos ahora qué ocurre en el caso de que no se pueda calcular de forma explícita la solución constante del modelo.



Como bien podemos observar, las soluciones constantes serán los puntos de corte entre las gráficas $y = x$ y la función asociada al modelo f. El trabajo con gráficas será muy común en esta asignatura para entender resultados intuitivos.

1. Ecuaciones en diferencias de orden 1

En este tema, vamos a estudiar funciones de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

- Si f es una recta, $f(x) = ax + b$, la ecuación se dice que es lineal.
- Si f no es una recta, $x_{n+1} = f(x_n)$. No es una ecuación lineal. Se dice que no es lineal.

Algunos ejemplos de modelos que veremos son:

- Modelo de la oferta y demanda (o Modelo de la Telaraña).
- Modelo logístico.

1.1. Ecuación lineal de orden 1

Una ecuación lineal general de orden 1 es una ecuación con forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b_n$$

Con $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ (Aunque se podrían considerar $a, b \in \mathbb{C}$, en esta asignatura por norma general no lo consideraremos). Esta se denomina ecuación lineal completa.

A $x_{n+1} = ax_n$ se le llama la parte **homogénea** de la ecuación. Por tanto, una ecuación lineal homogénea será de la forma:

$$x_{n+1} = ax_n$$

Definición 1.1 (Ecuación autónoma)**.** Una ecuación autónoma es una ecuación donde la dependencia del tiempo está vista a lo largo de la solución. Son del tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Notemos que no todas las ecuaciones han de ser autónomas. Una ecuación no autónoma sería de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

Con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Por tanto, la ecuación lineal general de orden 1 es una ecuación no autónoma, ya que el término independiente b_n es una sucesión que depende del valor de n.

1.1.1. Ecuación lineal de orden 1 autónoma

En esta sección estudiaremos las ecuaciones lineales de orden 1 autónomas; es decir, el caso en el que $b_n = b \ \forall n \in \mathbb{N}$. Su ecuación por tanto toma la siguiente forma:

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Vamos a estudiar dos formas de resolverla.

Primera forma

Iterando y buscando una expresión general para x_n. Dado x_0, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&x_1 = ax_0 + b \\
&x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\
&x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
&\ \vdots \\
&x_n = a^nx_0 + a^{n-1}b + \ldots + b = a^nx_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k
\end{aligned}$$

donde el valor de x_n lo hemos obtenido de forma intuitiva. Demostrémoslo mediante inducción:

Demostración. Vamos a probar que la expresión general para la ecuación anterior es:

$$x_n = a^nx_0 + a^{n-1}b + \ldots + b$$

Por inducción:

- Caso base $n = 1$:

  Para $n = 1$, tenemos efectivamente $x_1 = ax_0 + b$.

- Supuesto para n, demostramos para $n + 1$:

  $$\begin{aligned}
  x_{n+1} &= ax_n + b \overset{(*)}{=} \\
  &\overset{(*)}{=} a\left(a^nx_0 + a^{n-1}b + \ldots + b\right) + b = \\
  &= a^{n+1}x_0 + a^nb + \cdots + ab + b
  \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos aplicado la hipótesis de inducción.

$\square$

Por tanto, hemos demostrado que en el PVI $x_{n+1} = ax_n + b$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
x_n &= a^nx_0 + a^{n-1}b + \ldots + b = \\
&= a^nx_0 + b(a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a + 1) = \\
&= a^nx_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k \overset{(*)}{=} a^nx_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado el resultado de dicha suma de una serie geométrica. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales (PVI) descrito es:

$$x_n = a^n x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

Segunda forma

Si $b = 0$, sabríamos resolver la ecuación, ya que sería $x_{n+1} = ax_n$ y sus soluciones sabemos que son de la forma $x_n = a^n x_0$. Por tanto, en este caso tratamos de buscar un cambio de variable para obtener una ecuación de ese tipo, que sí sabemos resolver. Buscamos un cambio de variable de la forma $y_n = x_n - k$ $(k \in \mathbb{C})$ tal que y_n sea solución de la ecuación $y_{n+1} = ay_n$. Calculemos el valor de k:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - k = ax_n + b - k \overset{(*)}{=} ay_n + ak + b - k$$

donde en $(*)$ he usado que $x_n = y_n + k$. Como buscamos que $y_{n+1} = ay_n$, el valor de k viene dado por la ecuación:

$$ak + b - k = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{b}{1-a}$$

Por tanto, consideramos el cambio $y_n = x_n - \dfrac{b}{1-a}$, y tenemos que $y_{n+1} = ay_n$. La solución a dicha ecuación es conocida:

$$y_n = y_0 \cdot a^n$$

Sabiendo esto, encontramos la solución del PVI:

$$\begin{aligned} x_n = y_n + k = y_n + \frac{b}{1-a} &= y_0 \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = \\ &= \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = \\ &= a^n x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \end{aligned}$$

Como no podía ser de otra forma, hemos llegado a la misma solución que en el caso anterior.

Observación. Notamos ahora que el k encontrado es precisamente la solución constante de la ecuación $x_{n+1} = ax_n + b$.

$$c = ac + b \Longleftrightarrow c = \frac{b}{1-a} = x_c$$

Observación. Notemos que, siguiendo ambos métodos para resolver, llegamos a un problema para $a = 1$, ya que estaríamos dividiendo entre 0. Pensamos ahora cómo solventar este problema.

En este caso, simplemente, se nos queda una ecuación del estilo:

$$x_{n+1} = x_n + b$$

Su solución podemos pensar fácilmente que es la siguiente:

$$x_n = x_0 + n \cdot b$$

Notemos que la ecuación no tiene soluciones constantes, salvo que $b = 0$.

Por tanto, a modo de resumen, las soluciones de una ecuación lineal de primer orden autónoma son:

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 1: & x_n = \left(x_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) a^n + \dfrac{b}{1-a} \\ \text{Si } a = 1: & x_n = x_0 + n \cdot b \end{cases}$$

Comportamiento de las soluciones a largo plazo

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones a largo plazo, también llamado comportamiento asintótico del modelo. Esto es cuando $n \to \infty$. Distinguimos en función del valor de a:

- $|a| \neq 1$:
  - $|a| < 1$:

    $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

  - $|a| > 1$:
    - $x_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$:

      $$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

      En este caso, como $|a| > 1$, tenemos que no converge.
    - $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$:

      $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \lim_{n\to\infty} 0 + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

- $|a| = 1$:
  - $a = 1$:
    - Si $b \neq 0$:
      Entonces, $x_n = x_0 + b \cdot n$

      $$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_0 + b \cdot n| = \infty$$

    - Si $b = 0$: Todas las soluciones son constantes.
  - $a = -1$:

    $$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^n + \frac{b}{2}$$

    - $x_0 = \dfrac{b}{2}$:
      Tenemos que $x_n = \dfrac{b}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es una solución constante.

◦ $x_0 \neq \dfrac{b}{2}$:
Distinguimos el caso de los n pares o impares:

$$x_{2n} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^{2n} + \frac{b}{2} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = x_0$$
$$x_{2n+1} = \left(x_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^{2n+1} + \frac{b}{2} = -\left(x_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = b - x_0$$

En este caso, tenemos que no converge en el infinito, y se trata de un $2-$ciclo.

- $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\},\ |a| = 1$:
  Como bien mencionamos, en esta asignatura solo consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$. Se deja al lector el ejercicio de pensar qué ocurriría en este caso.

Ejercicio. Estudia el comportamiento asintótico de:

1. $x_{n+1} = 2x_n + 5$
   En este caso, las soluciones son:
   $$x_n = (x_0 + 5)\, a^n - 5$$
   Como $|a| > 1$, tenemos que no converge asintóticamente.

2. $2x_{n+1} = x_n + 6$
   Tenemos que $x_{n+1} = {}^1\!/\!{}_2 x_n + 3$. Por tanto, como $|a| < 1$, converge a $\dfrac{3}{{}^1\!/\!{}_2} = 6$.

1.1.2. Ecuación lineal de orden 1 no autónoma

$$x_{n+1} = ax_n + b_n$$

Es la ecuación lineal no autónoma, donde b_n es una sucesión. La función asociada es $f(x, n) = ax + b_n$, de forma que:

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

Vamos a estudiar las formas de resolver la ecuación.

Conociendo una solución particular

Si conocemos $\overline{x_n}$ una solución particular de la ecuación, entonces aplicamos el cambio de variable

$$y_n = x_n - \overline{x_n}$$

De esta forma, nos queda que:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \overline{x_{n+1}} = ax_n + b_n - \overline{x_{n+1}} = ax_n - a\overline{x_n} = ay_n$$

Por tanto, como dicha ecuación sí sabemos resolverla, tenemos que:

$$x_n = y_n + \overline{x_n} = y_0 a^n + \overline{x_n} = (x_0 - \overline{x_n})\, a^n - \overline{x_n}$$

Veamos ahora algunos ejemplos de resolución de ecuaciones lineales de orden 1 no autónomas:

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?

   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:

   $$c = \frac{c}{2} + n \Longrightarrow \frac{c}{2} = n \Longrightarrow c = 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Como c no puede ser igual a todos los naturales pares al mismo tiempo, tenemos que no hay soluciones constantes.

2. Determina $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha n + \beta$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

   $$\begin{aligned} \overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + n \Longrightarrow \alpha(n+1) + \beta &= \frac{\alpha n + \beta}{2} + n \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 2\alpha n + 2\alpha + 2\beta = \alpha n + \beta + 2n \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \alpha n + 2\alpha + \beta = 2n \end{aligned}$$

   Tomando $n = 1, 2$, tenemos el siguiente sistema:

   $$\left\{ \begin{array}{ll} 3\alpha + \beta & = 2 \\ 4\alpha + \beta & = 4 \end{array} \right\} \Longrightarrow -\alpha = -2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -4 \end{array} \right.$$

   Por tanto, $\overline{x_n} = 2n - 4$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.

   Tenemos que:

   $$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_n}{2} + n - [2(n+1) - 4] = \frac{x_n}{2} - n + 2 = \frac{x_n}{2} - (n-2) = \\ &= \frac{x_n}{2} - \frac{2n-4}{2} = \frac{x_n - \overline{x_n}}{2} = \frac{y_n}{2} \end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:

   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0}) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0 + 4}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.

   Tenemos que:

   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0 + 4}{2^n} + 2n - 4$$

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?

   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:

   $$c = \frac{c}{2} + 2^n \Longrightarrow \frac{c}{2} = 2^n \Longrightarrow c = 2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Como c no puede ser igual a distintos números al mismo tiempo, tenemos que la ecuación en diferencias no presenta soluciones constantes.

2. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha 2^n$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

   $$\begin{aligned}\overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + 2^n &\Longrightarrow \alpha 2^{n+1} = \alpha 2^{n-1} + 2^n \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \alpha(2^{n+1} - 2^{n-1}) = 2^n \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{2^n}{2^{n+1} - 2^{n-1}} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2 - 1/2} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   Por tanto, $\overline{x_n} = \frac{2}{3} \cdot 2^n$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.

   $$\begin{aligned}y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{2}{3}2^{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2^n - \frac{2}{3}2^{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2^n\left(1 - \frac{4}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2}x_n - \frac{2^n}{3} = \frac{1}{2}x_n - \frac{2 \cdot 2^n}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}(x_n - \overline{x_n}) = \frac{1}{2}y_n\end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:

   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0})\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0 - \frac{2}{3}}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.

   Tenemos que:

   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0 - \frac{2}{3}}{2^n} + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{2^n}\left(x_0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2^{n+1}}{3}$$

Ejercicio. Consideramos la ecuación lineal no autónoma dada por:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2^n}$$

Resuélvela siguiendo los siguientes pasos:

1. ¿Tiene soluciones constantes?
   Sea $c \in \mathbb{R}$ una solución constante, entonces verifica que:

   $$c = \frac{c}{2} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \frac{c}{2} = \frac{1}{2^n} \Longrightarrow c = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Como c no puede ser igual a distintos números al mismo tiempo, tenemos que la ecuación en diferencias no presenta soluciones constantes.

2. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $\overline{x_n} = \alpha n \cdot \frac{1}{2^n}$ sea una solución particular.

   Como es una solución particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

   $$\begin{aligned}\overline{x_{n+1}} = \frac{\overline{x_n}}{2} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \alpha(n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\alpha n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \alpha(n+1) = \alpha n + 2 \Longrightarrow \alpha = 2\end{aligned}$$

   Por tanto, $\overline{x_n} = 2n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ es una solución particular.

3. Demuestra que $y_n := x_n - \overline{x_n}$ es solución de una ecuación homogénea.

   $$\begin{aligned}y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n}\left(1-(n-1)\right) = \\ &= \frac{1}{2}x_n - \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}x_n - \frac{n}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2}(x_n - \overline{x_n}) = \frac{1}{2}y_n\end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una ecuación homogénea, y tenemos por tanto que:

   $$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = (x_0 - \overline{x_0})\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x_0}{2^n}$$

4. Encuentra todas las soluciones de la ecuación.

   Tenemos que:

   $$x_n = y_n + \overline{x_n} = \frac{x_0}{2^n} + \frac{n}{2^{n-1}}$$

1.2. Modelo de la oferta y la demanda (o Modelo de la Telaraña)

Suponemos que la oferta y la demanda son funciones que dependen del precio. Las notamos por:

- Sea $D(p)$ la demanda en función del precio p.
- Sea $O(p)$ la oferta en función del precio p.

En función del precio p, es lógico pensar que la demanda debe ser decreciente y la oferta creciente. Esto se debe a que, conforme el precio aumenta, los clientes tendrán menor interés por comprar el producto; mientras que las empresas querrán venderlo más. Para simplificar, supondremos que son rectas:

$$\begin{aligned} D(p) &= a - bp \qquad && a, b \in \mathbb{R}^+ \\ O(p) &= c + dp \qquad && d \in \mathbb{R}^+,\ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A b y a d se les llama **marginal de demanda** y **marginal de la oferta**, respectivamente. En los siguientes casos, tratamos de buscar un precio de equilibrio del mercado.

1.2.1. Sistema estático

En este caso, suponemos que $D(p) = O(p)$. Este es un caso ideal, ya que toda la demanda es cubierta por la oferta. Se busca el precio de equilibrio, que es el que permite que se dé este caso, y es el que se mantendrá constante para que la demanda se siga cubriendo.

$$D(p) = O(p) \Longleftrightarrow a - bp = c + dp \Longleftrightarrow p_{equilibrio} = \frac{a-c}{b+d}$$

Para que esto tenga sentido (obtengamos un precio de equilibrio positivo), necesitamos que $a > c$.

1.2.2. Sistema dinámico

En este caso el precio va cambiando, por lo que se considera una sucesión p_n, que representa el precio en el periodo n. Se supone que para la oferta se considera con el precio del periodo p_{n-1} y la demanda con p_n. Es decir, se intenta prever la demanda que va a haber en función de la oferta que había en el periodo anterior.

$$O(p_{n-1}) = D(p_n) \Longleftrightarrow c + dp_{n-1} = a - bp_n \Longleftrightarrow p_n = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} \cdot p_{n-1}$$

Esta es una ecuación lineal de orden 1 autónoma, por ser el término independiente una constante. La solución constante del modelo, denominada precio de equilibro y notada por p_e es $p_e = \dfrac{a-c}{b+d}$, veámoslo:

$$p_e = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_e \Longleftrightarrow bp_e = a - c - dp_e \Longleftrightarrow p_e = \frac{a-c}{b+d}$$

Por tanto, la solución de dicha ecuación es:

$$p_n = (p_0 - p_e)\left(\frac{-d}{b}\right)^n + p_e$$

Precio a largo plazo

- $0 < \dfrac{d}{b} < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \left[(p_0 - p_e)\left(\frac{-d}{b}\right)^n + p_e\right] = p_e$$

Entonces, el precio tiende al precio de equilibrio, y lo hace oscilando (ya que tenemos un negativo elevado a n, a veces se le suma un precio o se le resta, aunque finalmente tiende a 0). Esto ocurre cuando la marginal de la oferta, d es menor que la marginal de la demanda, b. Esto es, cuando la oferta crece más lenta que la demanda.

- $1 < \frac{d}{b}$:

  Entonces, la ecuación deja de tener sentido, porque toma valores negativos.

$$\lim_{n\to\infty} |p_n| = \infty$$

- $b = d$:

  Entonces, $p_n = (p_0 - p_e)(-1)^n + p_e$. Como hemos visto anteriormente, se trata de un 2−ciclo.

Veamos ahora por qué se conoce como modelo de la telaraña. Supuesto $d < b$, hemos visto que el precio converge al precio de equilibrio. Veamos gráficamente qué implica esto:

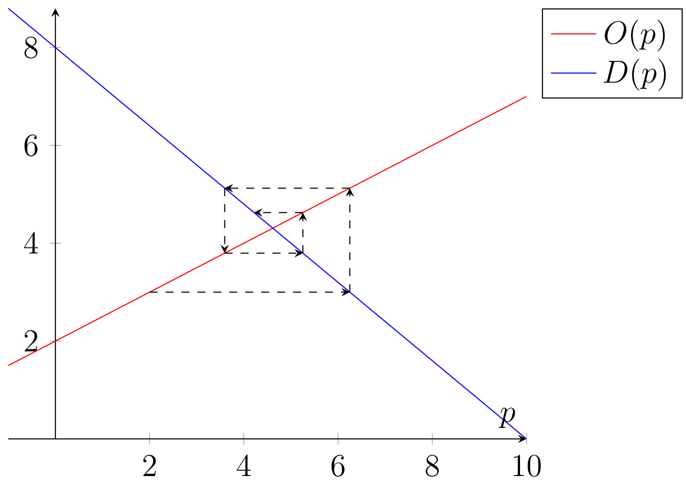


Figura 1.1: Representación del modelo de la Telaraña.

Como podemos ver, el precio va convergiendo a al precio de equilibro en forma de telaraña, de ahí el nombre.

1.3. Ecuación no lineal de orden 1

En esta sección, estudiaremos buscar soluciones para ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} f: \quad I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow I \subseteq \mathbb{R} \\ x_n &\longmapsto f(x_n) = x_{n+1} \end{aligned}$$

con I un intervalo de $\mathbb{R}$ y con f no lineal. Es decir, no es de la forma: $f(x) = ax + b$. Recordamos que en la introducción vimos un modelo en esta familia, el modelo logístico, introducido en la Sección 0.2 y desarrollado en la Sección 1.4.

$$p_{n+1} = p_n(a - bp_n)$$

En general, no podemos encontrar una solución de forma general. En estos casos, debemos ver cómo se comportan las soluciones en torno a las soluciones que conocemos de forma sencilla. Recordamos que hay dos tipos de soluciones que suelen ser más fáciles de encontrar, que son:

- Las soluciones constantes: $x_c \equiv c = \{c, c, \dots\}$ es solución si c es un punto fijo de f.
- Los ciclos: x_0 genera un $n-$ciclo si x_0 es un punto fijo de $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n}$. Luego: $x_n = f^n(x_0) = x_0$.

1.3.1. Puntos de equilibrio

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{x_n} \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x} \end{array}$$

Tenemos que el sistema es siempre un $2-$ciclo, para cualquier valor de $x_0 \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{x_0} \\ x_2 &= \frac{4}{x_1} = \frac{4}{\frac{4}{x_0}} = x_0 \end{aligned}$$

Por tanto, x_n es el $2-$ciclo $\{x_0, {}^4/_{x_0}, \dots\}$. En el caso particular de que $x_0 = 2$, el $2-$ciclo es el ciclo trivial $x \equiv 2 = \{2, 2, \dots\}$; es decir, es una solución constante.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 \text{ dada} \end{cases}$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0^2 \\ x_2 &= x_1^2 = x_0^4 \\ x_3 &= x_2^2 = x_0^8 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que el término general es (hágase la inducción):

$$x_n = x_0^{(2^n)}$$

Las soluciones constantes tenemos que son:

$$x \equiv 0 \qquad x \equiv 1$$

Usando conocimientos de límites, tenemos que:

- Si $|x_0| < 1$:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{(2^n)} = 0$$
- Si $|x_0| > 1$:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{(2^n)} = \infty$$

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{x_n} \\ x_0 > 0 \end{array}\right.$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{x_0} \\ x_2 &= \sqrt{x_1} = \sqrt[4]{x_0} \\ x_3 &= \sqrt{x_2} = \sqrt[8]{x_0} \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que el término general es (hágase la inducción):

$$x_n = \sqrt[2^n]{x_0} = x_0^{\frac{1}{2^n}}$$

Las soluciones constantes tenemos que son:

$$x \equiv 0 \qquad x \equiv 1$$

Usando conocimientos de límites, para $x_0 \neq 0$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

En el caso de $x_0 = 0$, ya hemos visto anteriormente que es una solución constante.

El caso anterior se podría haber probado sin necesidad de obtener el término general, como se puede ver en el siguiente ejemplo, más bien teórico.

Ejemplo (Genérico)**.** Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_1^*, +\infty[& \longrightarrow &]x_1^*, +\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Con f continua, estrictamente creciente y con dos puntos fijos: x_1^* y x_2^*, con $x_1^* < x_2^*$. Además, sabemos que:

- Si $x \in\ ]x_1^*, x_2^*[$, se tiene que $x < f(x)$.
- Si $x \in\ ]x_2^*, +\infty[$, se tiene que $f(x) < x$.

Estudiar cómo se comporta la ecuación en diferencias cuando $n \to \infty$.

Demostración. Distinguimos en función del valor inicial x_0.

- Supongamos $x_1^* < x_0 < x_2^*$:

  Como $x_1^* < x_0 < x_2^*$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_1^* = f(x_1^*) \leqslant f(x_0) = x_1 \leqslant f(x_2^*) = x_2^*$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_1^* < x_n < x_2^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un mayorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente: $x_n < x_{n+1}$. Como $x_n \in]x_1^*, x_2^*[$, se tiene que $x_n < f(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(x) = x$, tenemos que el límite x es un punto fijo de f. Como la sucesión es creciente, tenemos que $x = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

- Supongamos $x_2^* < x_0$:

  Como $x_2^* < x_0$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_2^* = f(x_2^*) \leqslant f(x_0) = x_1$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_2^* < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un minorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente: $x_n > x_{n+1}$. Como $x_n \in\ ]x_2^*, +\infty[$, se tiene que $x_n > f(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(x) = x$, tenemos que el límite x es un punto fijo de f. Como un punto fijo suyo es x_2^* y ya es un minorante, tenemos que $x = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Por tanto, hemos demostrado que $\{x_n\} \to x_2^*$. □

Veamos ahora qué ocurre si no hay dos puntos fijos, sino que tan solo hay uno.

Ejercicio. Fijado $a \in \mathbb{R}^+$, sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \\ x_0 \geqslant -a \end{array}\right.$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-a, \infty[& \longrightarrow & [0, \infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+a} \end{array}$$

Veamos los primeros términos de la sucesión:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{x_0 + a} \\
x_2 &= \sqrt{x_1 + a} = \sqrt{\sqrt{x_0 + a} + a} \\
x_3 &= \sqrt{x_2 + a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0 + a} + a} + a}
\end{aligned}$$

Por tanto, no es fácil encontrar un término general de la sucesión. Busquemos cuántos puntos fijos tiene:

$$x = \sqrt{x+a} \Longleftrightarrow x^2 = x + a \Longleftrightarrow x^2 - x - a = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

Consideremos $x_1^* = \dfrac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$. Tenemos que:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < 0 \Longleftrightarrow 1 < \sqrt{1+4a} \Longleftrightarrow 1 < 1 + 4a \Longleftrightarrow 0 < a$$

Por tanto, tenemos que x_1^* no es una solución. Es decir, tan solo hay una solución constante, $x_2^* = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Para ver su comportamiento en el infinito, distinguimos en función del valor inicial x_0.

- Supongamos $-a \leqslant x_0 < x_2^*$:

  Como $-a \leqslant x_0 < x_2^*$ y f es creciente, tenemos que:

  $$0 = f(-a) \leqslant f(x_0) = x_1 \leqslant f(x_2^*) = x_2^*$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $0 < x_n < x_2^*$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, x_2^* es un mayorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente: $x_n < x_n < x_{n+1}$. Se tiene que:

  $$x_n < x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \Longleftrightarrow x_n^2 < x_n + a \Longleftrightarrow x_n^2 - x_n - a < 0$$

Como $a > 0$, sabemos que esto se da si $x_n < x_2^*$, que es el caso, por lo que es cierto.

Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(L) = L$, tenemos que el límite L es un punto fijo de f. Como la sucesión es creciente, tenemos que $L = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

- Supongamos $x_2^* < x_0$:

  Como $x_2^* < x_0$ y f es creciente, tenemos que:

  $$x_2^* = f(x_2^*) \leqslant f(x_0) = x_1$$

  Por inducción (hágase) se demuestra que $x_2^* < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, x_2^* es un minorante de la sucesión $\{x_n\}$.

  Veamos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente: $x_n > x_{n+1}$. Tenemos que:

  $$x_n > x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \Longleftrightarrow x_n^2 - x_n - a > 0$$

  Como en este caso $x_n \geqslant x_2^*$, es fácil ver que se tiene.

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que es convergente. Supongamos que $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

  $$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

  donde he empleado que f es continua. Por tanto, como $f(L) = L$, tenemos que el límite L es un punto fijo de f. Como un punto fijo suyo es x_2^* y ya es un minorante, tenemos que $L = x_2^*$, por lo que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Por tanto, hemos demostrado que $\{x_n\} \to x_2^*$.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = e^{-x_n} \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

Tratamos de buscar alguna solución constante. Para ello, buscamos el punto de intersección de las gráficas de las funciones $y = x$ e $y = e^{-x}$.

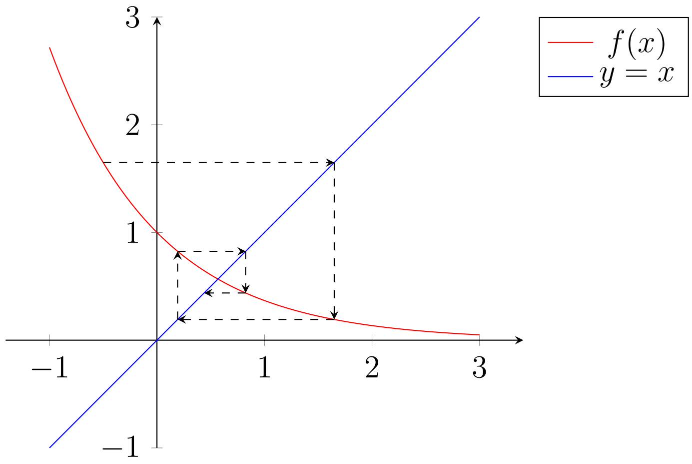


Figura 1.2: Intersección de f con $y = x$.

Como podemos ver de forma intuitiva, tenemos que convergerá al punto fijo, el cual no el posible calcular ya que la ecuación $x = e^{-x}$ es trascendente. Suponiendo que x_{n+1} fuese convergente a L, tendríamos que:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

donde he empleado que f es continua. Por tanto, L es un punto fijo, por lo que ya tendríamos el valor del límite. Es decir, en el caso de que converja sabemos el límite.

La convergencia de dicha Ley de Recurrencia no es fácil de probar, y por el momento no sabemos hacerlo de forma formal. Como no es monótona (hemos visto que oscila), no podemos aplicar que es monótona y acotada. Veamos si podemos sacar un término general:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-x_0} \\ x_2 &= e^{-x_1} = e^{(-e^{x_0})} \\ x_3 &= e^{-x_2} = e^{-(e^{(-e^{x_0})})} \end{aligned}$$

Tampoco es fácil encontrar un término general. Como hemos mencionado, de forma formal no sabemos demostrar que, efectivamente, converge.

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente decreciente y continua. Si $\{x_n\}$ es una ecuación en diferencias de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, entonces:

- $\{x_n\}$ tiende al equilibrio.
- $\{x_n\}$ es un $2-$ciclo.
- $\{x_n\}$ diverge.

En todos los casos lo hace de forma oscilatoria.

Demostración. Veamos en primer lugar que f tiene, al menos, un punto fijo. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, y consideramos $f(x_0) \neq x_0$, ya que en dicho caso estaría demostrado.

Supongamos $f(x_0) > x_0$ (el caso contrario es análogo), y consideremos $x_1 := f(x_0)$. Como f es estrictamente decreciente, tenemos que:

$$x_0 < f(x_0) = x_1 \Longrightarrow x_1 = f(x_0) > f(x_1)$$

Por tanto, se tiene $f(x_0) > x_0$, $f(x_1) < x_1$ por el Teorema de los Ceros de Bolzano aplicado a la función $g = f - Id_{\mathbb{R}}$, $\exists c \in \ ]x_0, x_1[$ tal que $f(c) = c$.

Veamos ahora la unicidad del punto fijo. Supongamos que existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$, tal que $f(c_1) = c_1$ y $f(c_2) = c_2$. Entonces, como f es estrictamente decreciente, tenemos que $f(c_1) > f(c_2)$. Por tanto:

$$c_1 = f(c_1) > f(c_2) = c_2$$

que es una contradicción ya que $c_1 < c_2$. Por tanto, f tiene un único punto fijo, $x^* \in \mathbb{R}$.

Demostramos ahora que f^{2n} es estrictamente creciente y f^{2n-1} es estrictamente decreciente para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

- Para $n = 1$:

  Tenemos que $f^{2n-1} = f$ es estrictamente decreciente, y $f^{2)} = f^{2n}$ es estrictamente creciente, ya que para $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$:

  $$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b) \Longrightarrow f^{2)}(a) < f^{2)}(b)$$

- Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

  Sea $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces, como f^{2n-1} es estrictamente decreciente, tenemos:

  $$a < b \Longrightarrow f^{2n-1}(a) > f^{2n-1}(b) \Longrightarrow f^{2n}(a) < f^{2n}(b)$$

  y por tanto concluimos que $f^{2n-1+1)} = f^{2n}$ es estrictamente creciente. De forma análoga se comprueba la otra parte.

Sabiendo eso, y sabiendo que $x_n = f^{n)}(x_0)$, veamos que oscila alrededor de x^*:

- Si $x_0 < x^*$, tenemos que $f^{2n}(x_0) < x^* < f^{2n+1}(x_0)$, y por tanto:

  $$x_{2n} < x^* < x_{2n+1}$$

- Si $x_0 > x^*$, tenemos que $f^{2n+1}(x_0) < x^* < f^{2n}(x_0)$, y por tanto:

  $$x_{2n+1} < x^* < x_{2n}$$

Por tanto, en todo caso oscila. Estudiemos ahora el comportamiento asintótico. Suponemos que $x_2 \neq x_0$, ya que en dicho caso tendríamos un $2-$ciclo (o una solución constante si $x_1 = x_2 = x_0 = x^*$). Por tanto, tenemos que:

- Si $x_0 < x_2$:

  Tenemos que $x_1 = f(x_0) > f(x_2) = x_3$ y $x_2 = f^{2)}(x_0) < f^{2)}(x_2) = x_4$. Por inducción probamos que $\{x_{2n+1}\}$ es estrictamente decreciente y $\{x_{2n}\}$ es estrictamente creciente.

- Si $x_0 > x_2$:

  Tenemos que $x_1 = f(x_0) < f(x_2) = x_3$ y $x_2 = f^{2)}(x_0) > f^{2)}(x_2) = x_4$. Por inducción probamos que $\{x_{2n+1}\}$ es estrictamente creciente y $\{x_{2n}\}$ es estrictamente decreciente.

En cualquier caso, ambas sucesiones son monótonas. Distinguimos ahora en función de si $\{x_{2n}\}$ está acotada o no:

- Si $\{x_{2n}\}$ está acotada, por ser monótona tenemos que es convergente. Notemos su límite por $x_{par} = \lim\{x_{2n}\}$. Además, por ser estrictamente monótona tenemos que x_{2n} está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser la sucesión de los impares también monótona, tenemos que estará mayorada y minorada (dependiendo del caso) por $f(x_{par})$; es decir, estará acotada también, por lo que converge. Notémoslo por $x_{impar} = \lim\{x_{2n+1}\}$.

  Como f es continua, tenemos que:

  $$x_{impar} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_{2n}\right) = f(x_{par})$$

  donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Tenemos entonces dos posibilidades:

  1. $x_{impar} = x_{par}$. En este caso, tenemos que $f(x_{par}) = x_{par}$, por lo que se trata de un punto fijo. La solución tiende al equilibrio, x^*.
  2. $x_{impar} \neq x_{par}$. La solución tiende a un $2-$ciclo. Como hemos visto, el equilibrio queda entre los dos valores del $2-$ciclo.

- Si $\{x_{2n}\}$ no está acotada, entonces $\lim |x_{2n}| = \infty$, y por ende también se tiene que $\lim |x_{2n+1}| = \infty$, es decir, tampoco está acotada. Por tanto, la solución diverge oscilando.

□

Hasta el momento, todas las recurrencias que hemos planteado tenían un punto fijo, una solución constante. Veamos que esto no tiene por qué ser así.

Ejemplo. Sea la ecuación dada por el PVI:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 1 + e^{x_n} \\ x_0 \text{ dado} \end{array}\right.$$

Nos preguntamos si tiene equilibrio (es decir, puntos fijos). Tenemos que no es lineal, ya que su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + e^x \end{array}$$

Para ello, buscamos el punto de corte de la función f con $y = x$:

$$x = 1 + e^x$$

Esta es una ecuación trascendental, que no podemos resolver. Para estudiar la existencia de soluciones, buscamos aplicar el Teorema de Bolzano. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1+e^x-x \end{array}$$

Y tratamos de buscar un $x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0$. Se tiene que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que estudiamos la monotonía derivando.

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Luego la función g tiene un candidato a extremo relativo en $x = 0$. Como $g''(x) = e^x > 0$, tenemos que tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

$$g(0) = 1 \Longrightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la función f no tiene puntos fijos, por lo que nuestra recurrencia no tiene soluciones constantes.

El siguiente teorema nos hablará sobre la existencia o no de los puntos de equilibrio.

Teorema 1.1. *Sea $f : [a,b] \to f([a,b])$ y continua, tal que $[a,b] \subseteq f([a,b])$ y:*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces tiene al menos un equilibrio (una solución constante).

Demostración. Sea la función definida por:

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-x \end{array}$$

Como g es diferencia de funciones continuas, es continua; por lo que la imagen de un compacto y conexo es un compacto conexo. En particular, la imagen de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado; es decir, se tiene que $f([a,b]) = [c,d]$, con $c,d \in \mathbb{R},\ c < d$. Entonces, se deduce que:

$$c \leqslant f(x) \leqslant d \quad \forall x \in [a,b]$$

Consideramos ahora $t,s \in [a,b]$ tal que $f(t) = c,\ f(s) = d$. Como $[a,b] \subset f([a,b])$, se deduce que $c \leqslant a \leqslant t,s \leqslant b \leqslant d$. Por tanto:

$$g(t) = f(t) - t = c - t \leqslant 0$$
$$g(s) = f(s) - s = d - s \geqslant 0$$

Luego, por el Teorema de Bolzano, $\exists x \in [t,s]$ tal que $g(x) = 0$, y por tanto se deduce que $f(x) = x$, quedando así demostrada la existencia. □

1.3.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Notación. En lo que sigue, consideramos una función f dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Sea además una Ley de Recurrencia dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Por último, sea $x_c = \{c, c, \dots\}$ una solución constante, también llamada punto de equilibrio.

La siguiente definición trata sobre la estabilidad de un modelo, concepto de gran utilidad para saber qué ocurre "cerca" de las soluciones constantes.

Definición 1.2 (Solución estable)**.** Decimos que x_c es estable si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Visualmente, esto implica que si se toma x_0 cercano a una solución estable, se mantendrá cercana a c para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que una recurrencia es estable si todos sus puntos de equilibrio lo son.

Definición 1.3 (Solución inestable)**.** Decimos que x_c es inestable si no es estable, esto es:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists\ x_{0\delta} \in I,\ n_\delta \in \mathbb{N} \text{ con } \left\{ \begin{array}{c} |x_{0\delta} - c| < \delta \\ \wedge \\ |x_{n_\delta} = f^{n_\delta}(x_{0\delta}) - c| \geqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de sistemas estables:

1. $x_{n+1} = -x_n$.

   La solución de este modelo sabemos que es $x_n = (-1)^n x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, el punto de equilibrio es $x_c = 0$. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, consideramos $\delta = \varepsilon$, de forma que tenemos que:

   $$|x_0 - 0| = |x_0| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = |(-1)^n x_0| = |x_0| < \varepsilon$$

   Por tanto, tenemos que el sistema es estable. En concreto, vemos que se trata de un $2-$ciclo: $\{x_n\} = \{x_0, -x_0, x_0, \dots\}$.

2. $y_{n+1} = \dfrac{1}{y_n}$.

   Tenemos que los puntos de equilibrio son $c_1 = 1,\ c_2 = -1$. La solución de este sistema sabemos que es un $2-$ciclo, con:

   $$\{y_n\} = \left\{ y_0, \frac{1}{y_0}, y_0, \frac{1}{y_0}, \dots \right\}$$

Intuitivamente, vemos claramente que si y_0 está cerca de ± 1, entonces $\frac{1}{y_0}$ estará cerca de $\frac{1}{\pm 1} = \pm 1$, por lo que intuitivamente se ve de forma directa que el modelo es estable. La demostración rigurosa es un poco más compleja.

Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta_1 = \varepsilon$ se tiene claramente que:

$$|y_0 - c| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |y_{2n} - c| = |y_0 - c| < \varepsilon$$

Veamos ahora qué ocurre con los términos impares, sabiendo que $y_{2n+1} = {}^1\!/_{y_0}$. Consideramos $\delta = {}^\varepsilon\!/_2$, y sea $|y_0 - c| < \delta$, donde $c = \pm 1$. Tenemos que:

$$\left|\frac{1}{y_0} - c\right| = \left|\frac{1 - y_0 c}{y_0}\right| \overset{(*)}{=} \left|\frac{c - y_0}{y_0}\right| < \frac{\delta}{|y_0|} < \frac{\delta}{\delta + |c|} < \frac{\delta}{\delta + 1} = \frac{{}^\varepsilon\!/_2}{{}^\varepsilon\!/_2 + 1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2} < \varepsilon$$

donde es directo comprobar que, para $c = \pm 1$, se tiene que $|1 - y_0 c| = |c - y_0|$, y se ha empleado en $(*)$. Por tanto, tomando $\delta = {}^\varepsilon\!/_2$, se tiene que el modelo es estable.

A continuación, introducimos el concepto de atractor, el cual sirve para estudiar el comportamiento del modelo a largo plazo.

Definición 1.4 (Atractor local). Decimos que $x_c \equiv c$ es localmente atractiva o que c es un punto atractor local si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{\begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Es decir, la sucesión solución tenderá a c si valor $x_0 \in I$ escogido está cerca de c.

Definición 1.5 (Atractor global). Dada una solución constante $x_c \equiv c$, decimos que c es un punto atractor global o atractiva globalmente si:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \qquad \forall x_0 \in I$$

Es decir, la sucesión solución tenderá a c independientemente del valor $x_0 \in I$ escogido.

Como es directo deducir, todo atractor global es a su vez un atractor local. No obstante, que un punto de equilibrio sea estable no implica que sea un atractor, como es el caso de los ejemplos de la página 34. Asimismo, un atractor no tiene por qué ser estable, ya que puede darse el caso de que en las primeras iteraciones no cumpla que $|x_n - c| < \varepsilon$ (los límites tan solo trabajan con colas de la sucesión).

Ejemplo. Veamos un ejemplo de atractor.

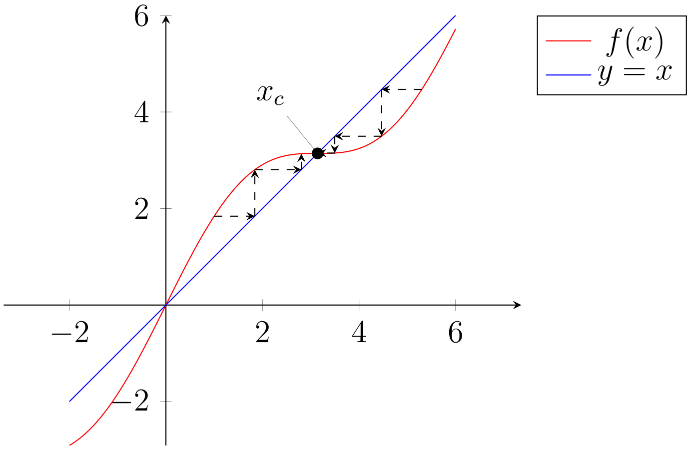


Figura 1.3: Ejemplo de atractor local pero no global.

Sea la solución constante x_c de la figura. Tenemos que es un atractor local, ya que gráficamente se ve que si $x_0 \in]0, 6[$, entonces $\{x_n\} \to x_c$. No obstante, no es global, ya que si $x_0 < 0$ a priori no se da.

Definición 1.6 (Estabilidad asintótica)**.** Decimos que $x_c \equiv c$ es globalmente (localmente) asintóticamente estable si es estable y es un atractor global (local).

En el caso de que no se indique si es global o localmente asintóticamente estable, se entenderá que es localmente.

Veamos ahora un importante teorema para saber si una solución constante es atractiva.

Teorema 1.2. *Sea I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, y consideramos una función f dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos que f es una función contractiva (lipschitziana con constante de Lipschitz menor que 1), es decir:

$$\exists M \in \mathbb{R}_0^+, M < 1 \mid |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Sea la Ley de Recurrencia dada por f, es decir, $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces:

1. *La ecuación tiene una única solución constante, $x_c \equiv c$.*
2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión solución, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

Demostración. Se trata de una versión más débil del Teorema del Punto Fijo de Banach[1], por lo que no se incluye la demostración. Si desea demostrarlo, le recomendamos seguir los siguientes pasos:

1. Si hay un punto fijo (supuesta la existencia), demostrar que es único.
2. Demostrar que $\{x_n\}$ tiene límite L.

[1]Visto en Análisis Matemático I.

3. Demostrar que L es el punto fijo.

$\square$

Proposición 1.3. *Si la función es contractiva y estamos en $\mathbb{R}$, la solución constante que encontremos (por ser contractiva), es asintóticamente estable globalmente.*

Proposición 1.4 (Criterio de la primera derivada)**.** *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^1(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio.

- *Si $|f'(c)| < 1$, entonces x_c es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $|f'(c)| > 1$, entonces x_c es inestable.*
- *Si $|f'(c)| = 1$, no podemos afirmar nada.*

Demostración. Distinguimos en función de los valores de $|f'(c)|$:

- Si $|f'(c)| < 1$:

  Por ser f' continua, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, $r \in [0, 1[$ tal que, si $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f'(x)| \leqslant r < 1$. Tomando $t, s \in]c - \delta, c + \delta[$, por el Teorema del Valor Medio, $\exists x^* \in \ ]c - \delta, c + \delta[$ tal que:

  $$|f(t) - f(s)| = |f'(x^*)||t - s| \leqslant r|t - s| \qquad \forall t, s \in]c - \delta, c + \delta[$$

  Veamos ahora que, si $|x_0 - c| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) = x_n - c| < r^n\delta$. Demostramos por inducción sobre n:

  - Para $n = 1$:

    $$|f(x_0) - c| = |f(x_0) - f(c)| \leqslant r|x_0 - c| < r\delta$$

  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$|f^{n+1}(x_0) - c| = |f(f^n(x_0)) - f(c)| \leqslant r|f^n(x_0) - c| < r \cdot r^n\delta = r^{n+1}\delta$$

  Para ver la estabilidad de c, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomamos $\widetilde{\delta} = \text{mín}\{\delta, \varepsilon\}$. Tenemos entonces que, tomando $|x_0 - c| < \widetilde{\delta} \leqslant \delta$, entonces:

  $$|f^n(x_0) = x_n - c| < r^n\widetilde{\delta} < \widetilde{\delta} \leqslant \varepsilon$$

  Por tanto, c es estable. Además, como $r < 1$, tomando límite tenemos que:

  $$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n - c| \leqslant \lim_{n\to\infty} r^n\delta = 0$$

  de lo que se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, deduciendo entonces que es un atractor local. Por tanto, hemos concluido que c es asintóticamente estable localmente.

- Si $|f'(c)| > 1$:

  Por ser f' continua, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, $r > 1$, tal que, si $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f'(x)| \geqslant r > 1$. Tomando $t, s \in]c - \delta, c + \delta[$, por el Teorema del Valor Medio, $\exists x^* \in\ ]c - \delta, c + \delta[$ tal que:
  $$|f(t) - f(s)| = |f'(x^*)||t - s| \geqslant r|t - s| \qquad \forall t, s \in]c - \delta, c + \delta[$$
  Veamos ahora que, si $|x_0 - c| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) = x_n - c| > r^n|x_0 - c|$. Demostramos por inducción sobre n:

  - Para $n = 1$:
  $$|f(x_0) - c| = |f(x_0) - f(c)| \geqslant r|x_0 - c|$$
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:
  $$|f^{n+1}(x_0) - c| = |f^n(f(x_0)) - c| > r^n|f(x_0) - c| > r^{n+1}|x_0 - c|$$

  Por tanto, tenemos que:
  $$|f^n(x_0) = x_n - c| > r^n|x_0 - c| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
  Tomando límite con $n \to \infty$, tenemos que:
  $$\lim_{n\to\infty} |x_n - c| \geqslant \lim_{n\to\infty} r^n|x_0 - c| = \infty$$
  Por tanto, no solo la solución no se mantiene cerca del punto fijo, sino que se va alejando de él. Tenemos por tanto que es inestable.

$\square$

Notemos que el criterio anterior nos da información local, no global.

Ejemplo. Sea la Ley de Recurrencia dada por:
$$x_{n+1} = x_n^3 + \frac{3}{4}x_n$$
Estudiar la estabilidad de sus soluciones constantes.

Sea la función asociada:
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 + \frac{3}{4}x \end{array}$$
Buscamos las soluciones constantes, aquellas que cumplen que $f(x) = x$:
$$x = x^3 + \frac{3}{4}x \Longleftrightarrow x^3 - \frac{1}{4}x = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad \vee \\ x^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow x = \quad \pm\frac{1}{2} \end{array} \right.$$
Las soluciones constantes son: $\{0, 1/2, -1/2\}$. Estudiamos ahora la estabilidad de estas soluciones, mediante el criterio de la primera derivada. Para ello, primero calculamos $f'(x)$, al ser f derivable:
$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{4}$$
Evaluamos en cada punto fijo, y usaremos el criterio de la primera derivada:

- $\underline{x = 0}$:
$$|f'(0)| = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$$
Luego x_0 es asintóticamente estable localmente.

- $\underline{x = 1/2}$:
$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}\right| > 1$$
Luego $x_{1/2}$ es inestable.

- $\underline{x = -1/2}$:
$$\left|f'\left(\frac{-1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}\right| > 1$$
Luego $x_{-1/2}$ es inestable.

Ejercicio. Sea la Ley de Recurrencia dada por:
$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$
Estudiar la estabilidad de sus soluciones constantes.

Sea la función asociada:
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

Veamos que tiene un punto fijo. Tenemos que $f(0) = 1$, $f(1) = 1/e$. Definiendo $g = f - Id$, tenemos que:
$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0 \\ g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \Longleftrightarrow 1 < e \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x^* \in\ ]0,1[\ \mid g(x^*) = 0$$

Por tanto, hemos visto que $\exists x^* \in\ ]0,1[$ tal que $f(x^*) = x^*$. Para aplicar el criterio de la primera derivada, calculamos esta en primer lugar.
$$f'(x) = -e^{-x} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que $f'(x^*) > -1$:
$$f'(x^*) > -1 \Longleftrightarrow -e^{-x^*} > -1 \Longleftrightarrow e^{-x^*} < 1 \Longleftarrow -x^* < 0 \Longleftrightarrow x^* > 0$$

Como $x^* \in\ ]0,1[$, tenemos que es cierto, por lo que se tiene que la derivada está entre -1 y 0; es decir, $f'(x^*) \in\ ]-1,0[$. En cualquier caso, $|f'(x^*)| < 1$, por lo que es asintóticamente localmente estable.

Ahora, nos preguntamos qué ocurre si $|f'(c)| = 1$ (ya que el criterio no aporta información en este caso). Comenzamos introduciendo más conceptos para poder estudiar este caso.

Definición 1.7. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es estable por arriba (o semiestable por arriba) si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \text{si } c \leqslant x_0 < c + \delta \Longrightarrow |f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Decimos que es estable por abajo (o semiestable por abajo) si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \text{si } c - \delta < x_0 \leqslant c \Longrightarrow |f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición 1.8. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es inestable desde arriba si no es estable desde arriba.
- Decimos que es inestable desde abajo si no es estable desde abajo.

Definición 1.9. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es atractiva desde arriba (o que el punto fijo es atractor por arriba) si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid c \leqslant x_0 < c + \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

- Decimos que es atractiva desde abajo (o que el punto fijo es atractor por abajo) si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid c - \delta < x_0 \leqslant c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Definición 1.10. Sea x_c un equilibrio de determinada ecuación en diferencias. Entonces:

- Decimos que es asintóticamente estable desde arriba si es estable por arriba y atractiva por arriba.
- Decimos que es asintóticamente estable desde abajo si es estable por abajo y atractiva por abajo.

Proposición 1.5 (Criterio de la Segunda Derivada)**.** *Sea la función dada por:*

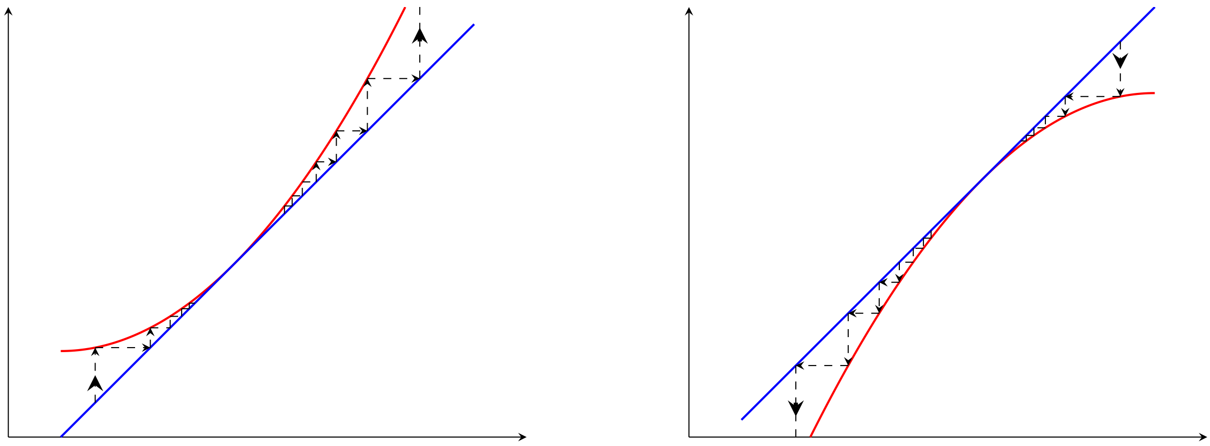
$$\begin{aligned} f: \ I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow I \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Supongamos $f \in C^2(I)$ *y sea* $x_c \equiv c$ *un equilibrio con* $f'(c) = 1$.

- *Si* $f''(c) > 0$, *entonces* $x_c \equiv c$ *es asintóticamente estable por abajo e inestable por arriba.*
- *Si* $f''(c) < 0$, *entonces* $x_c \equiv c$ *es asintóticamente estable por arriba e inestable por abajo.*

- *Si* $f''(c) = 0$*, entonces no podemos asegurar nada.*

Demostración. Veamos el razonamiento intuitivo con las siguientes gráficas:



(a) Caso de f convexa, $f''(c) > 0$. (b) Caso de f cóncava, $f''(c) < 0$.

Figura 1.4: Idea intuitiva de la demostración.

□

Volvemos a tener en esta ocasión un caso en el que no tenemos nada que asegurar. Tratamos a su vez de estudiar este caso, con la siguiente proposición:

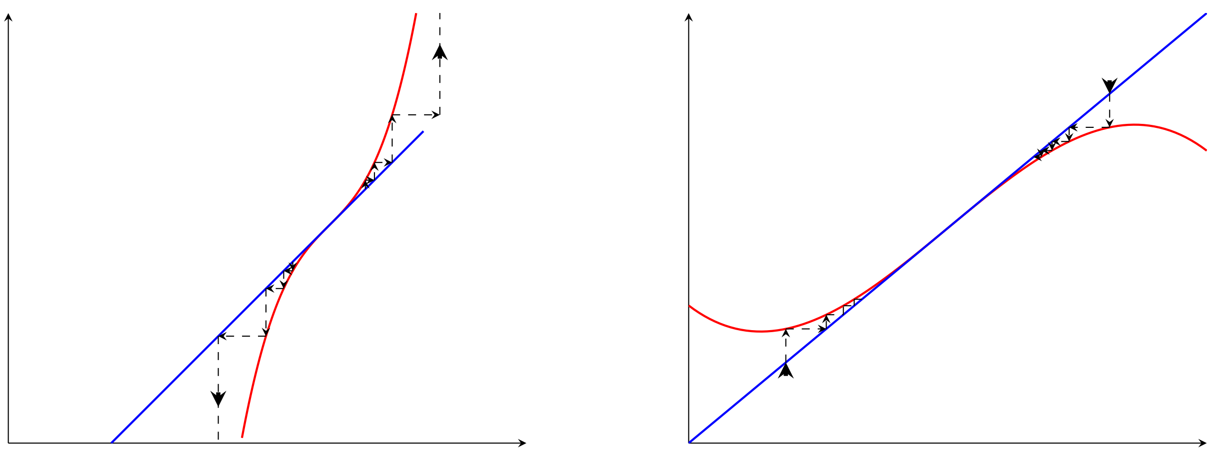
Proposición 1.6 (Criterio de la Tercera Derivada)**.** *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^3(I)$ *y sea* $x_c \equiv c$ *un equilibrio con* $f'(c) = 1$ *y* $f''(c) = 0$.

- *Si* $f'''(c) > 0$*, entonces* $x_c \equiv c$ *es inestable.*
- *Si* $f'''(c) < 0$*, entonces* $x_c \equiv c$ *es asintóticamente estable localmente.*

Demostración. Veamos el razonamiento intuitivo con las siguientes gráficas:



(a) Caso de $f'''(c) > 0$.
Paso de cóncava a convexa.

(b) Caso de $f'''(c) < 0$.
Paso de convexa a cóncava.

Figura 1.5: Idea intuitiva de la demostración.

En el caso de que $f'''(c) > 0$, tenemos que se trata de un punto inflexión que pasa de cóncava a convexa. Por tanto, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $|x - c| < \delta$, $x < c$, entonces $f(x)$ es cóncava. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es inestable por abajo.
- $|x - c| < \delta$, $x > c$, entonces $f(x)$ es convexa. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es inestable por arriba.

Por tanto, concluimos que x_c es inestable.

En el caso de que $f'''(c) < 0$, tenemos que se trata de un punto inflexión que pasa de convexa a cóncava. Por tanto, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $|x - c| < \delta$, $x < c$, entonces $f(x)$ es convexa. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es asintóticamente estable por debajo.
- $|x - c| < \delta$, $x > c$, entonces $f(x)$ es cóncava. Debido al criterio de la Segunda Derivada, x_c es asintóticamente estable por encima.

Por tanto, concluimos que x_c es asintóticamente estable localmente. □

Nuevamente surge la pregunta de qué hacer cuando $f'''(c) = 0$. Para no alargar más el asunto, pararemos aquí, informando de que en este caso se debería actuar de forma similar, suponiendo que $f \in C^4(I)$ y aplicando criterios de concavidad y convexidad en c para f. También hemos de tener en cuenta que, antes de recurrir al estudio analítico de puntos fijos, es aconsejable (y muy habitual) dibujar la gráfica de la función y observar el comportamiento de las órbitas de puntos cercanos al punto fijo.

Recordamos que el Criterio de la Primera Derivada no aportaba información si $|f'(c)| = 1$. Ya hemos estudiado con criterios de derivadas de orden mayor si $f'(c) = 1$. Estudiaremos ahora el caso de $f'(c) = 1$, y para ello emplearemos el siguiente lema.

Lema 1.7. *Sea una función $f : I \to I$ continua, con $I \subset \mathbb{R}$, y sea su ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$. Un equilibrio $x_c \equiv c$ de la ecuación en diferencias es asintóticamente estable localmente si, y sólo si $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente para la ecuación en diferencias $x_{n+1} = (f \circ f)(x_n)$.*

Demostración. Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que x_c es asintóticamente localmente estable para f. Entonces, por ser estable para f, tenemos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular ocurre para los múltiplos de 2, por lo que es estable para f^2. Además, por ser un atractor local para f, tenemos que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = c$$

De igual forma, si esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular ocurre para los múltiplos de 2, por lo que es un atractor local para f^2. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente para f^2.

$\Longleftarrow$) Supongamos que x_c es asintóticamente estable localmente para f^2. Entonces, por ser estable para f^2, tenemos que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - c| < \delta \Longrightarrow |x_n = f^{2n}(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, ya está resuelto para las iteradas pares. Para las iteradas impares, buscamos aplicarle la estabilidad a $f(x_0)$, y para ello necesitamos que se tenga que $|f(x_0) - c| < \delta$. Usando la continuidad de f en c, fijado $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \delta/2\}$ podemos encontrar $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$|x_0 - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x_0) - f(c)| = |f(x_0) - c| < \varepsilon_1 < \delta$$

Por tanto, tenemos que:

$$|f^{2n+1}(x_0) - c| = |f^{2n}(f(x_0)) - c| < \varepsilon$$

Por tanto, como ocurre tanto para las iteradas pares como para las impares, es estable para f. Además, por ser un atractor local para f^2, tenemos que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} x_0 \in I \\ \wedge \\ |x_0 - c| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{2n}(x_0) = c$$

Análogamente al caso anterior, llegamos sin problema a que:

$$\lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{2n}(f(x_0)) = c$$

Por tanto, vemos que x_c es asintóticamente estable para f.

$\square$

Observación. Nótese que, mediante una sencilla inducción en las hipótesis de la proposición anterior, puede probarse que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_c \equiv c$ es un equilibrio de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ es asintóticamente estable localmente si, y sólo si $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente para la ecuación en diferencias dada por $x_{n+1} = f^{(2^n)}(x_n)$.

Demostración. Notemos que el caso $n = 0$ es obvio. Procedemos mediante inducción:

- Caso $n = 1$: Por la proposición anterior, tenemos que es cierto:

$$x_{n+1} = f^{(2^1)}(x_n) = (f \circ f)(x_n)$$

- Supuesto que se cumple para $n - 1$, probémoslo para n: Sabemos por hipótesis de inducción que $x_c \equiv c$ es un equilibrio asintóticamente estable localmente de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ si, y sólo si lo es para la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f^{(2^{n-1})}(x_n) = \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}}(x_n)$$

Sea $g = f^{(2^{n-1})}$ y aplicando el caso $n = 1$, tenemos que dicho equilibrio es asintóticamente estable localmente para la ecuación anterior si, y sólo si lo es para:

$$x_{n+1} = (g \circ g)(x_n) = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}} \circ \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}})(x_n)$$

La composición de f se realiza $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ veces, luego se tiene que:

$$x_{n+1} = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}} \circ \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n-1}})(x_n) = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{2^{n}})(x_n) = f^{(2^n)}(x_n)$$

Tal y como queríamos probar.

□

Observación. Notemos además que, si x_c es un equilibrio para f, implica que lo es para f^2. No obstante, el recíproco no tiene por qué ser cierto, como el caso de que f tenga un $2-$ciclo.

Llegado este momento, estudiamos entonces el caso de $f'(c) = -1$.

Proposición 1.8. *Sea la función dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & I \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Supongamos $f \in C^3(I)$ y sea $x_c \equiv c$ un equilibrio con $f'(c) = -1$.

- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 > 0$, entonces $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 < 0$, entonces $x_c \equiv c$ es inestable.*
- *Si $2f'''(c) + 3(f''(c))^2 = 0$, entonces no podemos asegurar nada.*

Demostración. Consideramos $g = f^2$, y sabemos que $f \in C^3(I)$. Aplicando la regla de la cadena tenemos que, para todo $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(f(x))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) \\ g''(x) &= f''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) \\ g'''(x) &= f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 2f'(x)f''(x) \cdot f''(f(x)) + f''(f(x)))f'(x) \cdot f''(x) + f'''(x) \cdot f'(f(x)) = \\ &= f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 3f'(x)f''(x) \cdot f''(f(x)) + f'''(x) \cdot f'(f(x)) \end{aligned}$$

Por tanto, evaluando en c, tenemos que:

$$\begin{aligned} g'(c) &= f'(c) \cdot f'(c) = 1 \\ g''(c) &= f''(c) - f''(c) = 0 \\ g'''(c) &= -f'''(c) - (3f''(c))^2 - f'''(c) = -\left(2f'''(c) + 3(f''(c))^2\right) \end{aligned}$$

Como $g(c) = f^2(c) = f(c) = c$, $g'(c) = 1$, $g''(c) = 0$, estamos en condiciones de aplicar el Criterio de la Tercera Derivada para g. De esta forma:

- Si $g'''(c) > 0$, entonces x_c es inestable para g.
- Si $g'''(c) < 0$, entonces x_c es asintóticamente estable para g. Por el Lema anterior (Lema 1.7), tenemos que x_c es asintóticamente estable para f.

Debido al valor de $g'''(c)$, se deduce directamente lo buscado. □

Observación. Sea f un polinomio de grado 2 la función asociada a una ecuación en diferencias, que es claro que $f \in C^3(I)$. Supongamos que $x_c \equiv c$ es un equilibrio con $f'(c) = -1$. Tenemos que:

$$2f'''(c) + 3(f''(c))^2 = 3(f''(c))^2 > 0$$

Entonces, $x_c \equiv c$ es asintóticamente estable localmente.

1.3.3. Estabilidad de soluciones periódicas. Ciclos

Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia. Recordamos que un $n-$ciclo se determina encontrando los puntos fijos de f^n. Además, que no existe ningún $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que dicho $n-$ciclo genere un $k-$ciclo. A lo largo de esta sección, debido al trabajo intensivo que realizaremos con ciclos, notaremos un $m-$ciclo como $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$

Definición 1.11 (Iterada $k-$ésima)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia con f su función asociada, definimos la iterada $k-$ésima de f como la función f^k, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notemos que, si $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ es un $m-$ciclo de la ley de recurrencia dada por $x_{n+1} = f(x_n)$ entonces, $x_c = \overline{x_k}$ es un punto fijo de la iterada $(m \cdot n)-$ésima de f, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir:

$$\overline{x_k} = f^{n\cdot m}(\overline{x_k}) = f^{n\cdot m+k}(\overline{x_0}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Definición 1.12 (Estabilidad de un $m-$ciclo)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es estable si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_k - \overline{x_k}| < \delta \Longrightarrow |f^{m\cdot n+k}(x_0) - \overline{x_k}| < \varepsilon$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$$

Es decir, es necesario que todos los puntos fijos de la iterada $m-$ésima (los elementos del $m-$ciclo) sean estables para f^m, cada uno con su δ_k asociado. Bastará tomar $\delta = \min\limits_k \delta_k$ para obtener lo escrito en la definición anterior.

Definición 1.13 ($m-$ciclo localmente atractor)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es localmente atractor si:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_k - \overline{x_k}| < \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^{m\cdot n+k}(x_0) = \overline{x_k} \qquad \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$$

Es decir, es necesario que todos los puntos fijos de la iterada $m-$ésima (los elementos del $m-$ciclo) sean atractores locales para f^m, cada uno con su δ_k asociado. Bastará tomar $\delta = \min\limits_k \delta_k$ para obtener lo escrito en la definición anterior.

Definición 1.14 ($m-$ciclo asintóticamente localmente estable)**.** Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ una ley de recurrencia y sea $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo. Diremos que es asintóticamente localmente estable si es estable y además es atractor local.

No obstante, al igual que en el caso de los puntos de equilibrio, tenemos un importante criterio para analizar la estabilidad asintótica sin necesidad de emplear la definición formal.

Teorema 1.9. *Sea $f : I \to I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$ y $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_{m-1}}\}$ un $m-$ciclo para $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces:*

- *Si $|f'(\overline{x_0}) \cdot f'(\overline{x_1}) \cdot \ldots \cdot f'(\overline{x_{m-1}})| < 1$ entonces, el $m-$ciclo es asintóticamente estable localmente.*
- *Si $|f'(\overline{x_0}) \cdot f'(\overline{x_1}) \cdot \ldots \cdot f'(\overline{x_{m-1}})| > 1$ entonces, el $m-$ciclo es inestable.*

Demostración. Veamos que $\overline{x_k}$ es asintóticamente localmente estable para f^m. Para calcular $(f^m)'$, demostramos por inducción que, para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$(f^m(x))' = \prod_{k=0}^{m-1} f'(f^k(x)) \qquad \forall x \in I$$

donde $f^0(x) = x$.

- Para $m = 2$:
$$(f^2(x))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = \prod_{k=0}^{1} f'(f^k(x))$$
- Supuesto cierto para m, demostramos para $m + 1$:
$$(f^{m+1}(x))' = (f(f^m(x))' = f'(f^m(x)) \cdot (f^m(x))' =$$
$$= f'(f^m(x)) \prod_{k=0}^{m-1} f'(f^k(x)) = \prod_{k=0}^{m} f'(f^k(x))$$

Por tanto, como en ese producto se recorrerá el ciclo completo, tenemos que:

$$(f^m(\overline{x_k}))' = \prod_{j=0}^{m} f'(\overline{x_j})$$

Aplicando por tanto el Criterio de la Primera Derivada para f^m, se tiene de forma directa. □

1.4. Modelo logístico

Recordamos que este modelo se presentó en la sección 0.2, motivado por evitar el crecimiento ilimitado o la extinción del modelo de Malthus. Para evitar la tasa de crecimiento constante, se definía esta como una recta, de la forma:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = a - bp_n \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

De esta forma, se tiene que $p_{n+1} = p_n(a - bp_n)$. Además, vimos que para este modelo tenga sentido y no haya poblaciones negativas, es necesario que se tenga que $0 \leqslant p_0 \leqslant a/b$, llamada esta última *población tope*. Veamos que haciendo un cierto cambio de variable, este modelo también lo podemos escribir como:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Demostración. Proponemos realizar el cambio de variable:

$$x_n = \frac{p_n}{a/b} = b \cdot \frac{p_n}{a}$$

De esta forma, tenemos que:

$$x_{n+1} = b \cdot \frac{p_{n+1}}{a} = \frac{b}{a} \cdot p_n(a - bp_n) = \frac{b}{a} \cdot p_n a \left(1 - \frac{b}{a} \cdot p_n\right) = ax_n(1 - x_n)$$

□

Como ventaja de esta forma de escribirlo, tenemos que es adimensional; ya que x_n es una cantidad sin unidades al serlo a y bp_n. Representa por tanto porcentajes de la población, ya que buscamos que $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si $x_n = 0$, implica que no hay individuos en la población.
- Si $x_n = 1$, implica que la población toma el valor número de individuos, que se ha visto que es la *población tope*, a/b.

Nos preguntamos ahora qué es necesario para que el modelo esté bien planteado, es decir, que $x_n \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.10. *Sea un modelo logístico de la forma:*

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}^+.$$

Para que $x_n \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *necesitamos que* $a \in]0, 4]$

Demostración. Sea la función asociada al modelo logístico,

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax(1-x) \end{array}$$

Tenemos que es derivable, y su único punto crítico es el valor que anula su primera derivada:

$$f'(x) = a(1 - x) - ax = 0 \Longleftrightarrow 1 - x = x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Además, tenemos que $f''(x) = -2a < 0$, por lo que la función alcanza su máximo absoluto en $x = \frac{1}{2}$, con valor $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$. Para conseguir que $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$, exigimos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leqslant 1 \Longleftrightarrow a \leqslant 4$$

Por tanto, tenemos que $0 < a \leqslant 4$, por lo que $a \in]0, 4]$ y se tiene lo pedido. □

La anterior proposición se ve claramente en la siguiente Figura, ya que para valores mayores que 4 se tiene que $f(x) \not\subset [0,1]$.

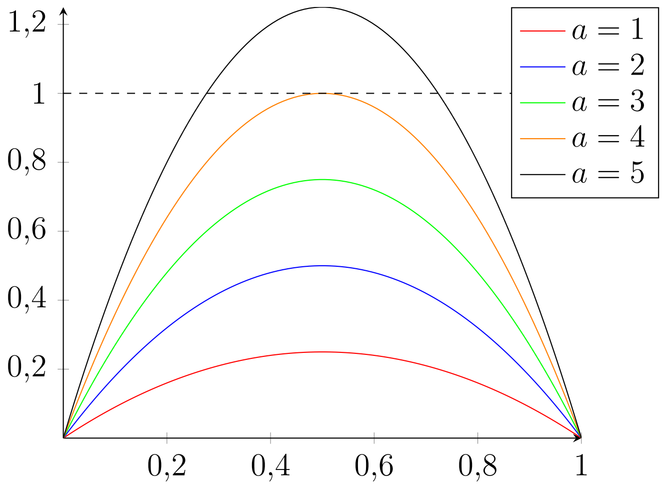


Figura 1.6: Modelo logístico, $f(x) = ax(1-x)$ para distintos valores de a.

Ahora, trataremos de buscar soluciones del modelo logístico. Comenzamos por lo que nos es más natural, estudiar primero los puntos fijos del modelo.

1.4.1. Puntos fijos

Estudiando los puntos fijos de la función $f(x) = ax(1-x)$, tenemos que:

$$c = ac(1-c) \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ \vee \\ 1 = a - ac_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{a-1}{a} \end{cases}$$

Notemos que la segunda solución constante no tiene sentido biológico (poblacional) si $a \in [0,1]$.

Estudiemos ahora la estabilidad de dichas soluciones constantes. Tenemos que la función asociada al modelo logístico es $f(x) = ax(1-x)$, derivable con:

$$f'(x) = a - 2ax$$

Sustituyendo en las soluciones constantes, y aplicando el Criterio de la Primera Derivada, obtenemos que:

$$f'(0) = a \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } a < 1 & \text{entonces, es asintóticamente estable localmente} \\ \text{Si } a > 1 & \text{entonces, es inestable} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2-a \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } 1 < a < 3 & \text{entonces, es asintóticamente estable localmente} \\ \text{Si } a > 3 & \text{entonces, es inestable} \end{cases}$$

Nos queda por tanto estudiar los casos $a = 1$ para x_0 y $a = 3$ para $x_{\frac{a-1}{a}}$:

- $\underline{a = 1}$: En este caso solo hay una solución constante, $x_c = 0$. Tenemos que:

$$f'(0) = 1 \qquad f''(x) = -2a < 0$$

  Aplicando el Criterio de la Segunda Derivada, obtenemos que $x_c \equiv 0$ es asintóticamente estable localmente por arriba e inestable por abajo. Como el modelo está definido en $[0, 1]$, tan solo nos interesa lo que ocurre por encima del 0, por lo que lo consideramos asintóticamente localmente estable.

- $\underline{a = 3}$:

$$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = -1$$

  Por la observación de la página 45, tenemos que es asintóticamente estable localmente.

En resumen, tenemos el siguiente resultado, donde *a.e.l.* representa *asintóticamente estable localmente*.

$0 < a \leqslant 1$	0 es a.e.l.
$1 < a \leqslant 3$	0 es inestable y $\frac{a-1}{a}$ es a.e.l.
$3 < a \leqslant 4$	0 y $\frac{a-1}{a}$ son inestables.

2. Relaciones de Problemas

2.1. Ecuaciones Lineales

Ejercicio 2.1.1 (Depósito de capital)**.** Un banco ofrece un interés compuesto del 7 % anual para depósitos de capital a medio plazo.

1. Si disponemos de un capital inicial de 10000 euros, ¿de qué capital dispondremos al cabo de 4 años?

   En este caso, si C_n denota el capital en el $n-$ésimo año, y el interés es e $I = 0{,}07$, tenemos que:
   $$C_n = (1+I)^n C_0$$

   Por tanto, tenemos $C_4 = 1{,}07^4 \cdot 10^4 = 13107{,}96$ euros.

2. Si se pretende disponer de 25000 euros dentro de 4 años, ¿cuál debe ser el capital inicial?

   En este caso, la incógnita es C_0. Tenemos:
   $$25 \cdot 10^3 = 1{,}07^4 \cdot C_0 \Longrightarrow C_0 = 19072{,}38 \text{ euros.}$$

3. Supongamos ahora que no conocemos el interés que proporciona el banco. Si inicialmente disponemos de 10000 euros y pasados 5 años tenemos 12000, ¿cuál es el interés anual aplicado?

   En este caso, tenemos que la incógnita es I. Tenemos:
   $$12 \cdot 10^3 = (1+I)^5 \cdot 10 \cdot 10^3 \Longrightarrow I = \sqrt[5]{\frac{12}{10}} - 1 \approx 0{,}0371$$

   Por tanto, tenemos que $I \approx 3{,}71\,\%$.

Ejercicio 2.1.2 (Explosión demográfica)**.** Una población sigue un modelo de crecimiento malthusiano con tasa de crecimiento neta $\alpha = 0{,}16$, es decir: si x_n es el número de individuos en el periodo n, entonces
$$x_{n+1} = 1{,}16 x_n.$$

1. Calcula el número de periodos necesarios para que la población se duplique y cuadruplique.

   Tenemos que:
   $$x_n = 1{,}16^n x_0$$

Calculemos el menor $n \in \mathbb{N}$ de forma que $1{,}16^n \geqslant 2$, que nos indicará el número de periodos necesarios para que la población se duplique. Aplicando el logaritmo en base 1,16, tenemos que:

$$n \geqslant \log_{1{,}16} 2 \approx 4{,}67$$

Por tanto, tenemos que el número de periodos necesarios para que la población se duplique es $n = 5$ periodos.

Para el caso de que la población se cuadruplique, necesitamos que $1{,}16^n \geqslant 4$. Por tanto,

$$n \geqslant \log_{1{,}16} 4 \approx 9{,}34$$

El número de periodos necesarios para que la población se cuadruplique es $n = 10$ periodos.

2. Calcula el tiempo promedio de duplicación.

   En este caso, no se pide un número de periodos, sino el tiempo promedio. En este caso, tenemos que el tiempo medio de duplicación es:

$$\log_{1{,}16} 2 \approx 4{,}67$$

3. Calcula el tiempo promedio de quintuplicación.

   De forma análoga, tenemos que el tiempo medio de quintuplicación es:

$$\log_{1{,}16} 5 \approx 10{,}84$$

Ejercicio 2.1.3 (Eliminación de un fármaco en sangre)**.** Un fármaco se elimina en sangre siguiendo un modelo malthusiano. Según dicho modelo, su vida media es de 2 semanas.

1. Calcula la concentración inicial de fármaco si a los 5 días encontramos una concentración en sangre de 3 ${}^{mg}/_{cm^3}$.

   Como la vida media es de 2 semanas, tenemos que:

$$VM = 14 \text{ días} = \frac{1}{1-r} \Longrightarrow r = -\left(\frac{1}{14} - 1\right) = \frac{13}{14} \approx 0{,}9286$$

   Sabiendo que $x_5 = 3$, tenemos que:

$$x_5 = 3 = r^5 x_0 \Longrightarrow x_0 = \frac{3}{r^5} \approx 4{,}2455 \ {}^{mg}/_{cm^3}$$

   Por tanto, la concentración inicial es de $4{,}2455 \ {}^{mg}/_{cm^3}$.

2. ¿Cada cuánto tiempo se diezma en promedio la concentración de fármaco?

   En este caso, se pide el tiempo promedio para que la concentración sea la décima parte. Tenemos que:

$$x_n = \cancel{x_0} \cdot r^n \geqslant \frac{\cancel{x_0}}{10}$$

   Por tanto, de promedio han de pasar $\log_r \frac{1}{10} \approx 31{,}07$ días para que la concentración se diezme.

3. Calcula el tiempo necesario para que la concentración de fármaco sea menor que 0,1 $^{mg}/_{cm^3}$.

   Tenemos que:
   $$x_n = x_0 \cdot r^n < 0{,}1 \Longrightarrow r^n < \frac{0{,}1}{x_0}$$
   Por tanto, se pide el primer $n \in \mathbb{N}$ tal que se cumple eso. Como se tiene que $\log_r \frac{0{,}1}{x_0} \approx 50{,}89$, han de pasar 51 días.

Ejercicio 2.1.4 (Desintegración del carbono−14)**.** Para la datación de los restos arqueológicos se utiliza el isótopo carbono−14, porque está presente en los organismos vivos y va desapareciendo de ellos cuando mueren. Esta desintegración se modela mediante la ley malthusiana:

$$x_{n+1} = rx_n \qquad 0 < r < 1$$

donde cada periodo representa un milenio, x_n es el número de átomos de carbono−14 en el periodo n y r es la constante de desintegración radiactiva. Sabemos que la vida media del carbono−14 se estima en 5730 años.

1. En un monte se han encontrado restos arqueológicos de una determinada especie. Sabiendo que la cantidad de carbono−14 de los restos, en el momento del hallazgo, corresponde al 15,27 % de la cantidad que tiene un cuerpo vivo, determina la antigüedad de los restos hallados.

   Como la vida media del carbono−14 se estima en 5730 años (5,73 milenos), tenemos que:
   $$VM = 5{,}73 \text{ milenios } = \frac{1}{1-r} \Longrightarrow r = -\left(\frac{1}{5{,}73} - 1\right) \approx 0{,}825$$
   donde hemos usado milenios ya que es la unidad del periodo.

   Sabemos que $x_n = r^n x_0$, y se pide el valor de n tal que $x_n = 0{,}1527x_0$. Por tanto,
   $$0{,}1527\cancel{x_0} = r^n \cancel{x_0}$$
   Como $\log_r 0{,}1527 \approx 9{,}7986$ milenios, tenemos que la antigüedad es de 9798 años.

2. ¿Qué tanto por ciento de la cantidad de carbono−14 que tiene un cuerpo vivo debe tener un resto arqueológico de aproximadamente 1000 años de antigüedad?

   Como 1000 años equivale a un milenio, nos piden calcular $\frac{x_1}{x_0}$. Tenemos que:
   $$x_1 = rx_0 \Longrightarrow \frac{x_1}{x_0} = r \approx 0{,}825 \approx 82{,}5\,\%$$

Ejercicio 2.1.5. En un hospital está llevándose a cabo un estudio sobre una enfermedad rara. Para ello se supone que la enfermedad desaparece siguiendo un modelo malthusiano al aplicarle un determinado fármaco. Los datos de que se disponen son los siguientes:

- Fueron puestos en observación 20 pacientes afectados por dicha enfermedad.
- Transcurridos 7 días, la mitad de personas ingresadas con motivo de la enfermedad fueron dadas de alta.

¿Qué puede decirse del modelo propuesto si tras 25 días (desde que se inició la observación de las 20 personas) hay 3 personas que aún no han superado la enfermedad?

Sea x_n la variable que representa el número de pacientes que no han superado la enfermedad en el día n. Tenemos que:

$$x_0 = 20 \qquad x_7 = 10 \qquad x_{25} = 3$$

Como sabemos sigue un modelo malthusiano, tenemos que $x_n = r^n x_0$. Veamos cuánto vale r.

$$x_7 = 10 = r^7 \cdot 20 \Longrightarrow r^7 = \frac{1}{2} \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} \approx 0{,}9057$$

Veamos si el modelo de Malthus predice correctamente el valor de x_{25}:

$$x_{25} = r^{25} x_0 \approx 1{,}6823$$

Como en la realidad se da que $x_{25} = 3$, tenemos que en realidad el Modelo de Malthus no es idóneo para este fármaco.

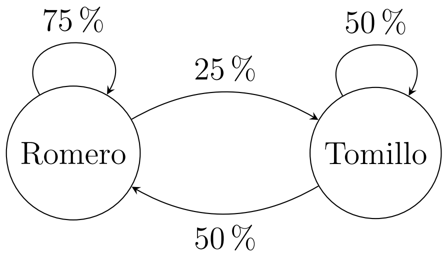
Ejercicio 2.1.6. Una apicultora de la Alpujarra está estudiando el comportamiento de sus abejas. Ha observado que se distribuyen entre el romero y el tomillo en primavera. Empíricamente ha observado que cada día cambian de unas flores a otras de la siguiente forma:

- El 75 % de las abejas que están en las flores de romero en un determinado día permanecen en ellas al día siguiente, mientras que el resto cambia a las flores de tomillo.
- El 50 % de las abejas que están en las flores de tomillo en un determinado día permanecen en ellas al día siguiente, mientras que el resto cambia a las flores de romero.

Al comienzo de su estudio había 3400 abejas en las flores de romero y 2600 en las de tomillo. La apicultora pretende estudiar cómo evoluciona la población de abejas en relación con las dos clases de flores, para lo cual llama x_n al número de abejas que hay en el romero en el $n-$ésimo día e y_n al número de abejas que hay en el tomillo en el $n-$ésimo día.

1. Escribe las leyes de recurrencia que modelan la cantidad de abejas en cada tipo de flor según las observaciones de la apicultora.

   Tenemos la siguiente situación:



- Sea x_n el número de abejas en romero en el n-ésimo día.
- Sea y_n el número de abejas en tomillo en el n-ésimo día.

La ley de recurrencia que modela la cantidad de abejas en el romero es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}25x_n + 0{,}5y_n \\ x_0 = 3400 \end{cases}$$

La ley de recurrencia que modela la cantidad de abejas en el tomillo es:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - 0{,}5y_n + 0{,}25x_n \\ y_0 = 2600 \end{cases}$$

2. Demuestra que $x_n + y_n = 6000$.

   Demostramos por inducción sobre n:

   - <u>Caso base $n = 1$</u>:

     Tenemos que:

     $$x_1 = x_0 - 0{,}25x_0 + 0{,}5y_0$$
     $$y_1 = y_0 - 0{,}5y_0 + 0{,}25x_0$$

     Por tanto, se tiene:

     $$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= x_0 - \cancel{0{,}25x_0} + \cancel{0{,}5y_0} + y_0 - \cancel{0{,}5y_0} + \cancel{0{,}25x_0} \\ &= x_0 + y_0 = 3400 + 2600 = 6000 \end{aligned}$$

   - <u>Supuesto cierto para n, lo demostramos para $n + 1$</u>:

     $$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n - \cancel{0{,}25x_n} + \cancel{0{,}5y_n} + y_n - \cancel{0{,}5y_n} + \cancel{0{,}25x_n} = x_n + y_n \overset{(*)}{=} 6000$$

     donde en $(*)$ hemos empleado la hipótesis de inducción.

3. Escribe una ecuación en diferencias para x_n y resuélvela.

   Como $x_n + y_n = 6000$, tenemos que $y_n = 6000 - x_n$. Por tanto, de la Ley de Recurrencia calculada antes, deducimos que:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}75x_n + 0{,}5y_n = 0{,}75x_n + 0{,}5\,(6000 - x_n) = \\ &= 0{,}75x_n + 3000 - 0{,}5x_n = \\ &= 0{,}25x_n + 3000 \end{aligned}$$

Para resolverla, por lo visto en teoría sabemos que:

$$
\begin{aligned}
x_n &= 0{,}25^n x_0 + 3000 \cdot \frac{1-0{,}25^n}{1-0{,}25} = 0{,}25^n x_0 + 4000 \cdot (1-0{,}25^n) = \\
&= 0{,}25^n x_0 + 4000 - 4000 \cdot 0{,}25^n = 0{,}25^n\,(x_0 - 4000) + 4000
\end{aligned}
$$

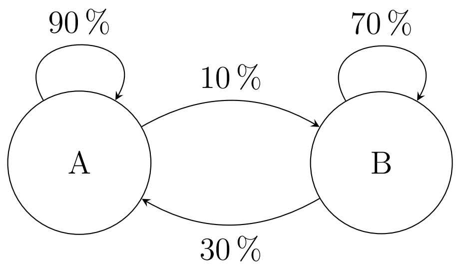
4. Determina el comportamiento asintótico de la población de abejas en ambas flores.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}25^n\,(x_0 - 4000) + 4000 = 4000$$

Por tanto, se quedarán 4000 en el romero y 2000 en el tomillo.

Ejercicio 2.1.7. Dos países, A y B, compiten por el abastecimiento del crudo mundial. Se sabe que el país A cuida más a su clientes y, por tanto, el 90 % de quienes un año contratan el abastecimiento con dicho país vuelven a hacerlo el año siguiente. Sin embargo, solo el 70 % de los clientes de B vuelven a concertar de nuevo su abastecimiento con este país. Se supone que todos los países tienen que contratar su abastecimiento con A o con B. Este año la situación política del país A impide que pueda abastecer a ningún otro país. ¿Cómo evolucionarán a partir de ahí las cuotas de mercado, es decir, el número de países que contratan el abastecimiento con A y con B medido en tanto por uno?

Tenemos la siguiente situación:



- Sea a_n los clientes del país A en el año n.
- Sea b_n los clientes del país B en el año n.

Las leyes de recurrencia que modelan ambos datos son:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 0{,}9a_n + 0{,}3b_n \\
b_{n+1} &= 0{,}7b_n + 0{,}1a_n
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que $a_n + b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que se reparten la totalidad del mercado en tanto por cierto. Por hipótesis, tenemos también que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Como $b_n = 1 - a_n$, tenemos que:

$$a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}3(1 - a_n) = 0{,}6a_n + 0{,}3$$

Por lo visto en teoría, tenemos que:

$$a_n = \left(a_0 - \frac{0{,}3}{1-0{,}6}\right) \cdot 0{,}6^n + \frac{0{,}3}{1-0{,}6} = -\frac{0{,}3}{0{,}4} \cdot 0{,}6^n + \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75\,(1 - 0{,}6^n)$$

Por tanto, se tiene que:

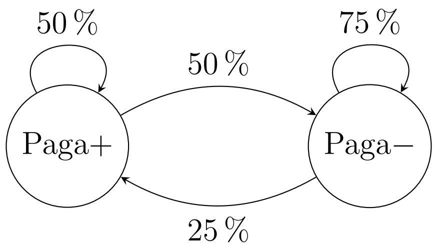
$$b_n = 1 - a_n = 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}6^n$$

A largo plazo, cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}75 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0{,}25$$

Ejercicio 2.1.8. Las compañías Paga+ y Paga− se han repartido el mercado de la telefonía. A pesar de la agresiva campaña desarrollada por Paga+, Paga− viene consiguiendo una mayor fidelización. Se ha observado que cada año el 25 % de los clientes de Paga− se pasan a Paga+, mientras que el 50 % de los de Paga+ cambian a Paga−. ¿Qué se puede decir sobre el mercado de la telefonía a largo plazo?

Tenemos la siguiente situación:



- Sea x_n el número de clientes de Paga+ en el año n-ésimo.
- Sea y_n el número de clientes de Paga− en el año n-ésimo.

Las leyes de recurrencia que modelan ambos datos son:

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}25y_n$$
$$y_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}75y_n$$

Como se han repartido la totalidad del mercado, tenemos que $x_n + y_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver observación debajo). Por tanto:

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}25y_n = 0{,}5x_n + 0{,}25(1 - x_n) = 0{,}25x_n + 0{,}25$$

Por tanto, la solución de este modelo es:

$$x_n = 0{,}25^n x_0 + 0{,}25 \cdot \frac{1 - 0{,}25^n}{0{,}75} = 0{,}25^n x_0 + \frac{1 - 0{,}25^n}{3}$$

Tomamos límite para ver el comportamiento del mercado a largo plazo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}25^n x_0 + \frac{1 - 0{,}25^n}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{2}{3}$$

En conclusión, el número de empleados de Paga+ se establecerá en el 33 % del total del mercado, mientras que Paga− en el 66 % del total del mercado.

Observación. Notemos que la elección de $x_n+y_n = 1$ es insignificante: ante cualquier constante obtendríamos el mismo resultado. Esto se debe a que se trata de un sistema "cerrado", ningún cliente sale de las dos compañías al mismo tiempo y tampoco tenemos clientes nuevos que se apunten a alguna y no estuvieran apuntados antes.

Esto nos permite fijar un valor cualesquiera para $x_n + y_n$ constante.

Ejercicio 2.1.9. Una jugadora de ajedrez es contratada por la compañía Galactic Chess. Su trabajo consiste en jugar 40 partidas simultáneas cada semana. La jugadora dispone de dos estrategias, A y B. Gana en el 80 % de los casos con la estrategia A y en el 60 % de los casos con la B. Para diversificar su juego decide que cada semana empleará la estrategia B tantas veces como derrotas o tablas haya cosechado la semana anterior. Después de algunas semanas de practicar este sistema observa que siempre acaba jugando el mismo número de partidas con la estrategia B. ¿Cómo se explica este hecho?

- Sea a_n el número de partidas que se juegan la semana n con la estrategia A.
- Sea b_n el número de partidas que se juegan la semana n con la estrategia B.
- Sea g_n el número de partidas ganadas en la semana n.

Veremos dos formas de plantear el ejercicio:

Opción 1.

Sabemos que $a_n + b_n = 40$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que:

$$g_n = 0{,}8a_n + 0{,}6b_n = 0{,}8(40 - b_n) + 0{,}6b_n = 32 - 0{,}2b_n$$

Como cada semana juega con la estrategia B tantas partidas como derrotas o tablas (no victorias) haya cosechado la semana anterior, tenemos que $b_n = 40 - g_{n-1}$. Por tanto,

$$g_n = 32 - 0{,}2 \cdot (40 - g_{n-1}) = 24 + 0{,}2g_{n-1}$$

La solución por tanto de dicha recurrencia es:

$$g_n = \left(x_0 - \frac{24}{1-0{,}2}\right) 0{,}2^n + \frac{24}{1-0{,}2} = (x_0 - 30)\, 0{,}2^n + 30$$

Para $n \to \infty$, tenemos que $\{g_n\} \to 30$, por lo que el número de partidas perdidas en tablas se estabilizará en 10, que será el número de partidas que jugará con la estrategia B.

Opción 2.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} &a_n + b_n = 40 \Longrightarrow a_n = 40 - b_n \\ &b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}4b_n \end{aligned}$$

Combinando las dos:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 0{,}2a_n + 0{,}4b_n = 0{,}2(40 - b_n) + 0{,}4b_n \\ &= 0{,}2b_n + 8 \end{aligned}$$

La solución de dicha recurrencia nos es conocida:

$$b_n = 0{,}2^n b_0 + 8\frac{1 - 0{,}2^n}{1 - 0{,}2} = 0{,}2^n b_0 + 10(1 - 0{,}2^n)$$

Para $n \to \infty$, tenemos que $\{b_n\} \to 10$, el número en el que se estabilizará el número de partidas a partir de una en adelante.

Ejercicio 2.1.10. Una compañía maderera tala el 10 % de un bosque anualmente. Para compensar el perjuicio causado, cada año se planta un número fijo de árboles K. Si no se tienen en cuenta otros condicionantes:

1. Escribe la ley de recurrencia que modela el tamaño del bosque.

   Tenemos que:
   $$x_{n+1} = x_n + K - 0{,}1x_n = 0{,}9x_n + K$$

2. Si el tamaño inicial del bosque es de 10000 árboles, calcula la solución de la ecuación del modelo.

   Opción 1. Demostramos mediante inducción que:
   $$x_n = 0{,}9^n \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(0{,}9^i K)$$

   - Para $n = 1$:
     $$x_1 = 0{,}9 \cdot x_0 + K$$
   - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:
     $$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}9x_n + K = 0{,}9\left[0{,}9^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 0{,}9^i K\right] + K = \\ &= 0{,}9^{n+1}x_0 + \sum_{i=1}^{n} 0{,}9^i K + K = 0{,}9^{n+1}x_0 + \sum_{i=0}^{n} 0{,}9^i K \end{aligned}$$

   Por tanto, resolviendo la suma, tenemos que:
   $$\begin{aligned} x_n &= 0{,}9^n \cdot x_0 + K\sum_{i=0}^{n-1} 0{,}9^i = 0{,}9^n \cdot x_0 + K \cdot \frac{1 - 0{,}9^n}{1 - 0{,}9} = \\ &= 0{,}9^n x_0 + 10K(1 - 0{,}9^n) \end{aligned}$$

Opción 2. Notando $a = 0{,}9$ y $b = K$, por lo visto en teoría sabemos que:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a} = (x_0 - 10K)0{,}9^n + 10K$$

3. Si plantar un árbol tiene un coste de 1 euro, calcula el precio mínimo al que deben venderse los árboles talados para que la explotación sea rentable a largo plazo.

   Veamos en primer lugar cuántos árboles hay a largo plazo. Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_0 - 10K)0{,}9^n + 10K = 10K$$

   Sea v el precio de venta, y notemos por v_n las ganancias en el periodo n. Tenemos que:

$$v_n = 0{,}1vx_n - 1\cdot K$$

   Como se busca que sea rentable a largo plazo, necesitamos que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}1vx_n - 1\cdot K = 0{,}1v\cdot 10K - K = vK - K = K(v-1) > 0 \Longleftrightarrow v > 1$$

   Por tanto, para que no haya pérdidas a largo plazo el precio mínimo es $v = 1$.

Ejercicio 2.1.11. Los precios de cierto producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña con funciones de oferta y demanda dadas por

$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - 2p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:

$$1 + p_n = 2 - 2p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:

$$p^* = -\frac{1}{2}p^* + \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2}p^* = \frac{1}{2} \Longrightarrow p^* = \frac{1}{3}$$

   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{1}{3}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:

$$p_n = (p_0 - p^*) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n + p^*$$

   Como $|{-1/2}| < 1$, tenemos que $\{p_n\} \to p^*$, es decir, a largo plazo el precio se estabiliza en el precio de equilibrio. Sabemos además que lo hace oscilando.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

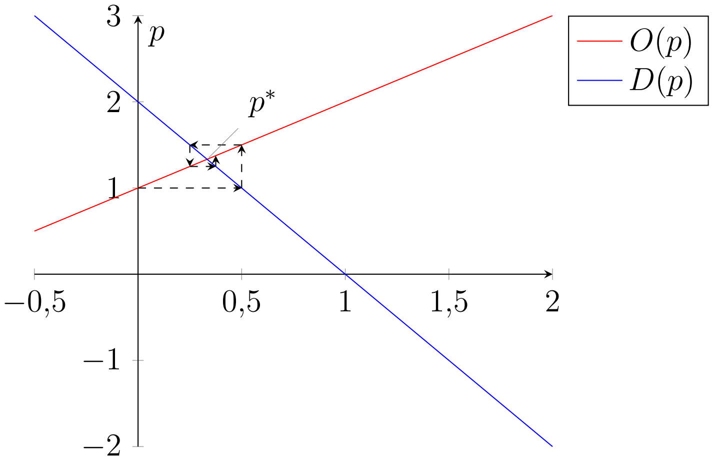


Figura 2.1: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 2.1.11.

Ejercicio 2.1.12. Resuelve el Ejercicio 2.1.11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - 0{,}5p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:

$$1 + p_n = 2 - 0{,}5p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -2p_n + 2$$

   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:

$$p^* = -2p^* + 2 \Longrightarrow p^* = \frac{2}{3}$$

   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{2}{3}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:

$$p_n = (p_0 - p^*) \cdot (-2)^n + p^*$$

   Como $|-2| > 1$, tenemos que $\{|p_n|\} \to +\infty$, es decir, a largo plazo el precio se dispara. No tiene sentido considerarlo.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

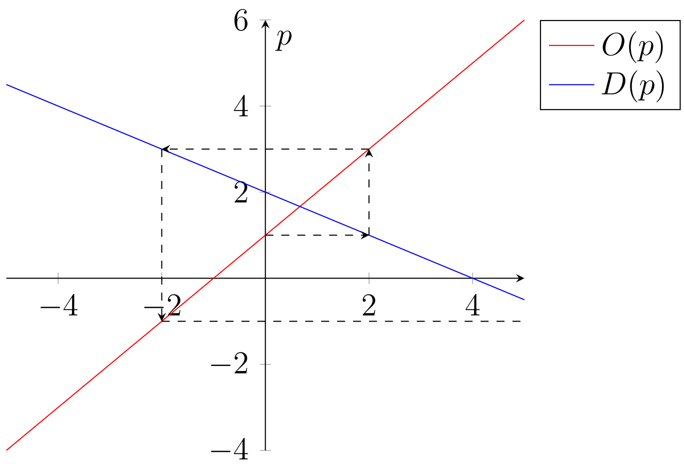


Figura 2.2: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 2.1.12.

   Como podemos ver, claramente el precio se dispara, oscilando entre valores positivos y negativos.

Ejercicio 2.1.13. Resuelve el Ejercicio 2.1.11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p, \qquad D(p) = 2 - p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)-$ésimo depende del precio de equilibrio $n-$ésimo.

1. Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

   Sea p_n la sucesión que determina el precio en el mercado en el periodo n. Tenemos que la ecuación en diferencias a calcular es $O(p_n) = D(p_{n+1})$, es decir:

$$1 + p_n = 2 - p_{n+1} \Longrightarrow p_{n+1} = -p_n + 1$$

   El precio de equilibrio p^* es la solución constante de dicha solución, es decir:

$$p^* = -p^* + 1 \Longrightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

   Por tanto, tenemos que el precio de equilibrio es $p^* = \frac{1}{2}$ euros.

2. ¿Cuál es la tendencia del precio del producto a largo plazo?

   La solución de la ecuación en diferencias sabemos que es:

   $$p_n = (p_0 - p^*) \cdot (-1)^n + p^*$$

   Veamos que es un 2−ciclo:

   $$\begin{aligned} p_{2n} &= p_0 \\ p_{2n+1} &= -(p_0 - p^*) + p^* = 2p^* - p_0 \end{aligned}$$

   Por tanto, irá alternando.

3. Analiza gráficamente la evolución de los precios.

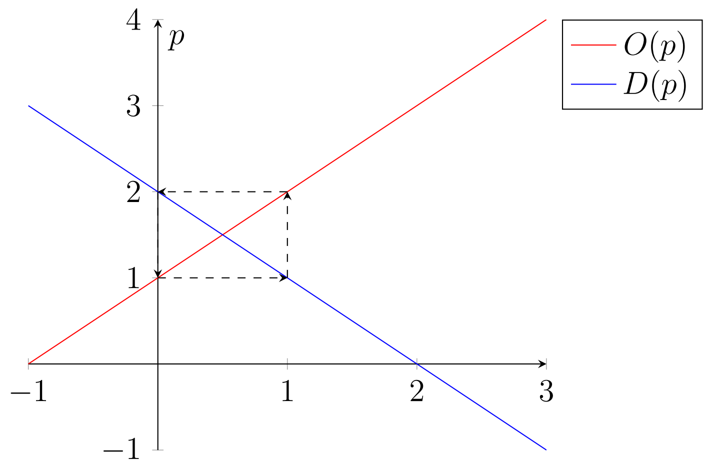


Figura 2.3: Representación del modelo de la Telaraña para el ejercicio 2.1.13.

   Como podemos ver, claramente se trata de un 2−ciclo, ya que el esquema vuelve al valor de p_0.

Ejercicio 2.1.14 (Modelo de von Bertalanffy)**.** El modelo de von Bertalanffy se emplea para describir la longitud de ciertos seres vivos o de partes de ellos. En su versión discreta se puede formular como una ecuación lineal de orden 1:

$$L_{n+1} = a + bL_n,$$

donde L_n representa la longitud esperada en el periodo n, $a > 0$ es una constante relativa a la capacidad de absorción celular y $0 < b < 1$ es una constante relacionada con la degradación celular.

1. Supongamos que la altura en metros de un árbol se ajusta a la expresión dada por $L_n = 3{,}8(1 - (0{,}9)^n)$, donde n es el número de años. Haz una tabla con las alturas del árbol en los 5 primeros años. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ e interpreta el resultado.

n [años]	L_n $[m]$
0	0 m
1	0,38 m
2	0,722 m
3	1,0298 m
4	1,30682 m
5	1,556138 m

Tabla 2.1: Altura del árbol del ejercicio 2.1.14.

Además, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 3{,}8(1-(0{,}9)^n) = 3{,}8(1-0) = 3{,}8 \text{ m}$$

Por tanto, tenemos que el árbol no crecerá indefinidamente, sino que llegará a una altura máxima de 3,8 metros.

2. La longitud en centímetros de las hojas de los árboles de una determinada especie se aproxima por el modelo $L_{n+1} = 3{,}9 + 0{,}7L_n$. Una hoja que tiene una longitud de 3 cm, ¿llegará a medir 10 cm? ¿Y 15 cm? Determina la longitud que se estima que pueden llegar a alcanzar las hojas de cualquier árbol de dicha especie.

   Por lo visto en teoría, sabemos que la solución de dicha ecuación en diferencias es:

$$L_n = \left(L_0 - \frac{3{,}9}{1-0{,}7}\right)0{,}7^n + \frac{3{,}9}{1-0{,}7} = (L_0 - 13)0{,}7^n + 13$$

   Demostramos ahora que $L_{n+1} > L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} L_{n+1} > L_n &\Longleftrightarrow 3{,}9 + 0{,}7L_n > L_n \Longleftrightarrow 13 > L_n \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 13 > (L_0 - 13)0{,}7^n + 13 \Longleftrightarrow 0 > (L_0 - 13)0{,}7^n \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow L_0 < 13 \end{aligned}$$

   donde he empleado que $0{,}7^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para $3 = L_0 < 13$ cm, se tiene que la sucesión es creciente; es decir, que las hojas siempre crecen.

   Veamos ahora el valor límite de L_n:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} (L_0 - 13)0{,}7^n + 13 = 13$$

   donde he empleado que $|0{,}7| < 1$. Por tanto, como las hojas siempre crecen y su tamaño máximo es 13 cm, tenemos que sí podrá llegar a medir 10 cm, pero no 15 cm.

   Como observación, veamos que no tiene sentido físico dar $L_0 \geqslant 13$.

   - En el caso de $L_0 = 13$, se tiene que el tamaño de las hojas es constantemente $L_n = 13$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que las hojas nunca crecerían, que no tiene sentido.

- En el caso de $L_0 > 13$, veamos que el tamaño de las hojas va decreciendo; es decir, $L_{n+1} < L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} L_{n+1} < L_n &\Longleftrightarrow 3{,}9 + 0{,}7L_n < L_n \Longleftrightarrow 13 < L_n \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 13 < (L_0 - 13)0{,}7^n + 13 \Longleftrightarrow 0 < (L_0 - 13)0{,}7^n \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow L_0 > 13 \end{aligned}$$

Esto por norma general tampoco tendría sentido, ya que no hay motivos aparentes por lo que una hoja sana deba menguar de tamaño.

2.2. Ecuaciones No Lineales

Ejercicio 2.2.1. Estudia el comportamiento local en torno a los puntos fijos de la ecuación en diferencias
$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 4x_n^2 - x_n^3}{5}$$

Su función asociada es:
$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x + 4x^2 - x^3}{5} \end{array}$$

Calculamos los puntos fijos de dicha ecuación en diferencias:
$$x = \frac{2x + 4x^2 - x^3}{5} \Longleftrightarrow 5x = 2x + 4x^2 - x^3 \Longleftrightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array} \right.$$

Para aplicar el criterio de la 1ª derivada, calculamos dicha derivada:
$$f'(x) = \frac{2 + 8x - 3x^2}{5}$$

Tenemos entonces que:

- $|f'(0)| = 2/5 < 1$, por lo que $x_1 = 0$ es asintóticamente estable.
- $|f'(1)| = 7/5 > 1$, por lo que $x_2 = 1$ es inestable.
- $|f'(3)| = 1/5 < 1$, por lo que $x_3 = 3$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 2.2.2. La *ecuación logística de Pielou* es una ecuación en diferencias no lineal de la forma
$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$
Su uso es frecuente en dinámica de poblaciones. Dado que no tiene sentido hablar de poblaciones negativas, la ecuación se plantea en $[0, \infty[$.

1. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación y demuestra que, para las elecciones $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, el punto de equilibrio positivo es asintóticamente estable.

   La función asociada es:
$$\begin{array}{rrcl} f: & [0, \infty[& \longrightarrow & [0, \infty[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{\alpha x}{1 + \beta x} \end{array}$$

   Los puntos fijos de dicha ecuación son:
$$x = \frac{\alpha x}{1 + \beta x} \Longleftrightarrow x + \beta x^2 = \alpha x \Longleftrightarrow x(1 - \alpha + \beta x) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{\alpha - 1}{\beta} \end{array} \right.$$

Para estudiar la estabilidad usando el criterio de la primera derivada, derivamos:

$$f'(x) = \frac{\alpha(1+\beta x) - \beta \cdot \alpha x}{(1+\beta x)^2} = \frac{\alpha}{(1+\beta x)^2}$$

Evaluando en x_2, que para los valores de α y β dados es el punto de equilibrio positivo, se tiene:

$$f'(x_2) = \frac{\alpha}{\alpha^2}$$

Para $\alpha = 2$ tenemos que $f'(x_2) = 1/2 < 1$, por lo que x_2 es asintóticamente estable.

2. Efectúa el cambio de variable $x_n = 1/z_n$ y calcula la expresión de todas las soluciones.

Notemos que se supone que $x_0 > 0$, ya que si fuese igual a 0 tendríamos una solución constante y el ejercicio estaría resuelto. En caso contrario, el cambio de variable queda:

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{\alpha/z_n}{1 + \beta/z_n} = \frac{\alpha}{z_n + \beta} \Longrightarrow z_{n+1} = \frac{z_n + \beta}{\alpha}$$

Tenemos que se trata de una ecuación lineal de orden 1 no homogénea. Para resolverla, en primer lugar distinguimos en función del valor de α:

- Si $\alpha \neq 1$:
  Hallamos en primer lugar su solución constante:

  $$z = \frac{z+\beta}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha z = z + \beta \Longleftrightarrow z = \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

  Por tanto, aplicamos el cambio de variable $y_n = z_n - \dfrac{\beta}{\alpha-1}$, y tenemos que:

  $$\begin{aligned} y_{n+1} &= z_{n+1} - \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{z_n+\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} + \beta}{\alpha} = \\ &= \frac{y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} + \beta - \alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha-1}}{\alpha} = \frac{y_n + (1-\alpha)\cdot\frac{\beta}{\alpha-1} + \beta}{\alpha} = \frac{y_n}{\alpha} \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$z_n = y_n + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{y_0}{\alpha^n} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{z_0 - \frac{\beta}{\alpha-1}}{\alpha^n} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)z_0 + (\alpha^n-1)\beta}{\alpha^n(\alpha-1)}$$

  Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que:

  $$\frac{1}{x_n} = \frac{(\alpha-1)\cdot\frac{1}{x_0} + (\alpha^n-1)\beta}{\alpha^n(\alpha-1)} \Longrightarrow x_n = \frac{\alpha^n(\alpha-1)}{(\alpha-1)\cdot\frac{1}{x_0} + (\alpha^n-1)\beta}$$

- Si $\alpha = 1$:
  Tenemos que $z_{n+1} = z_n + \beta$, por lo que:
  $$z_n = z_0 + n \cdot \beta$$
  Deshaciendo el cambio de variable, tenemos:
  $$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} + n \cdot \beta = \frac{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta}{x_0} \Longrightarrow x_n = \frac{x_0}{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta}$$

3. Determina el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación.
   Distinguimos en función de los valores de α:
   - Si $\alpha = 1$:
     $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{1 + n \cdot x_0 \cdot \beta} = 0$$
   - Si $\alpha \in \ ]0, 1[$:
     $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x_0} + (\alpha^n - 1)\beta} = 0$$
   - Si $\alpha \in \ ]1, +\infty[$:
     $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x_0} + (\alpha^n - 1)\beta} = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

Ejercicio 2.2.3. Una población de ganado se rige por el modelo discreto dado por $p_{n+1} = 10p_n \cdot e^{-p_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcula sus puntos de equilibrio y comprueba que son todos inestables.

Su función asociada es:
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & 10x \cdot e^{-x} \end{array}$$

Sus puntos fijos son las soluciones de:
$$x = 10xe^{-x}$$

Por tanto, una primera solución constante es $x_1 = 0$. Para la otra, resolvemos la siguiente ecuación:
$$1 = 10e^{-x_2} \Longleftrightarrow 0 = \ln 1 = \ln(10e^{-x_2}) = \ln(10) - x_2 \Longleftrightarrow x_2 = \ln 10$$

Para estudiar la estabilidad, aplicamos el criterio de la primera derivada:
$$f'(x) = 10e^{-x} - 10xe^{-x} = 10e^{-x}(1 - x)$$

- $f'(x_1) = 10 > 1$, por lo que x_1 es inestable.
- $f'(x_2) = 10 \cdot \frac{1}{10}(1 - \ln 10) = 1 - \ln 10 < -1 \Longleftrightarrow 2 < \ln 10 \Longleftrightarrow e^2 < 10$. Por tato, como es cierto, tenemos que x_2 es inestable.

Ejercicio 2.2.4. En relación con el modelo del ejercicio anterior (Ejercicio 2.2.3), se propone vender una fracción α $(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo, lo que da lugar al siguiente otro modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha)p_n \cdot e^{-(1-\alpha)p_n}$$

1. Encuentra el intervalo abierto (de amplitud máxima) al que debe pertenecer α para que esté asegurada la estabilidad asintótica del punto de equilibrio positivo.

   La función asociada es:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & 10(1-\alpha)x \cdot e^{-(1-\alpha)x} \end{array}$$

   Calculamos en primer lugar los puntos fijos. Además de $x_1 = 0$, la otra solución constante es:

$$1 = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x} \Longrightarrow 0 = \ln[10(1-\alpha)] - (1-\alpha)x \Longrightarrow x_2 = \frac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha}$$

   Para estudiar la estabilidad, aplicamos el criterio de la primera derivada:

$$f'(x) = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x} - 10(1-\alpha)^2 x e^{-(1-\alpha)x} = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x}[1 - x(1-\alpha)]$$

   Evaluando en x_2, tenemos:

$$f'(x_2) = 10(1-\alpha) \cdot \frac{1}{10(1-\alpha)}[1 - \ln[10(1-\alpha)]] = \ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right)$$

   Como necesitamos que $|f'(x_2)| < 1$, tenemos que:

$$\ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right) < 1 \Longleftrightarrow \frac{e}{10(1-\alpha)} < e \Longleftrightarrow \frac{1}{10(1-\alpha)} < 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{10} < 1-\alpha \Longleftrightarrow \alpha < \frac{9}{10}$$
$$\ln\left(\frac{e}{10(1-\alpha)}\right) > -1 \Longleftrightarrow \frac{e}{10(1-\alpha)} > \frac{1}{e} \Longleftrightarrow \frac{e^2}{10(1-\alpha)} > 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{e^2}{10} > 1-\alpha \Longleftrightarrow \frac{10-e^2}{10} < \alpha$$

   Por tanto, se asegura la estabilidad asintótica de x_2 si:

$$\alpha \in \left]\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10}\right[$$

2. Calcula el valor de α para el que la población (no nula) en equilibrio alcanza su valor máximo.

La población no nula en equilibrio es $x_2 = \dfrac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha}$. Para que alcance su valor máximo, es necesario que coincida con el máximo de f, calculémoslo:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - x(1-\alpha) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{1-\alpha}$$

Comprobemos que efectivamente dicho valor es un máximo relativo:

- Si $x < \dfrac{1}{1-\alpha}$, entonces $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente.
- Si $x > \dfrac{1}{1-\alpha}$, entonces $f'(x) < 0$, por lo que f es decreciente.

Por tanto, dicho valor efectivamente es un máximo relativo. Imponemos que dicho máximo sea igual al punto de equilibrio:

$$\frac{\ln[10(1-\alpha)]}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow \ln[10(1-\alpha)] = 1 \Longleftrightarrow 1-\alpha = \frac{e}{10} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{10-e}{10}$$

Por tanto, el valor de α buscado es $\alpha = \frac{10-e}{10}$.

Ejercicio 2.2.5. Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$ una función que satisface $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El método de Newton para resolver la ecuación $g(x) = 0$ se describe como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Si α es una raíz de $g(x) = 0$, demuestra que el método es convergente para cualquier dato inicial suficientemente próximo a la raíz.

La función asociada a dicha Ley de Recurrencia es:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que:

$$f(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$$

Por tanto, α es un punto fijo de f. Como $g \in C^2(\mathbb{R})$, tenemos que $g' \in C^1(\mathbb{R})$, por lo que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Tenemos que:

$$f'(x) = 1 - \frac{(g'(x))^2 - g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = 1 - 1 + \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$$

Por tanto, tenemos que $|f'(\alpha)| = 0 < 1$, y por el Criterio de la Primera Derivada α es asintóticamente estable localmente para f. En concreto, es un atractor local, por lo que:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x_0 - \alpha| < \delta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Queda por tanto demostrado lo pedido.

Ejercicio 2.2.6. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, donde:

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3$.

   Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo la siguiente ecuación:

$$1 - 2x + 3x^2 - x^3 = x \Longleftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 0$$

   Aplicamos el Método de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Figura 2.4: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

   De Ruffini, vemos que:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = -(x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^3$$

   Por tanto, tenemos que el único punto fijo es $x_c \equiv 1$. Para estudiar la estabilidad, como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(x) = -2 + 6x - 3x^2 \qquad f'(1) = 1$$

   Como vemos que el Criterio de la Primera Derivada no aporta información, buscamos aplicar el Criterio de la Segunda Derivada:

$$f''(x) = 6 - 6x \qquad f''(1) = 0$$

   Este tampoco nos aporta información, por lo que recurrimos al Criterio de la Tercera Derivada:

$$f'''(x) = -6 < 0$$

   Por tanto, tenemos que $x = 1$ es un punto de inflexión, en el que pasa de convexa a cóncava. Por el Criterio de la Tercera Derivada, tenemos que $x_c \equiv 1$ es asintóticamente estable localmente.

2. $f(x) = x^2 - x$.

   Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo la siguiente ecuación:

$$x^2 - x = x \Longleftrightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{c_1} \equiv 0 \\ \vee \\ x_{c_2} \equiv 2 \end{array} \right.$$

Para estudiar la estabilidad, como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$f'(x) = 2x - 1 \qquad f'(0) = -1,\ f(2) = 3$$

Por el Criterio de la Primera Derivada, deducimos que $x_{c_2} \equiv 2$ es inestable. Respecto al otro punto fijo, como es una parábola deducimos por la observación de la página 45 tenemos que es asintóticamente estable localmente.

3. $f(x) = \begin{cases} 3/2 - x/2 & \text{si} \quad x \in\ ]-\infty, 1[\\ x^2 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$

Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3}{2} - \frac{x}{2} = x \Longleftrightarrow 3 - x = 2x \Longleftrightarrow x = 1$$
$$x^2 = x \Longleftrightarrow x = 0,\ 1$$

Considerando los intervalos de definición de cada parte de f, tenemos que tan solo hay un punto fijo, $x_c \equiv 1$. Estudiemos ahora su estabilidad. Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{si} \quad x \in\ ]-\infty, 1[\\ 2x & \text{si} \quad x \in]1, \infty[\end{cases}$$

Veamos si es derivable en $x = 1$. Tenemos:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} 2x = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

Por tanto, tenemos que f no es derivable en $x = 1$, por lo que no podemos aplicar ninguno de los criterios ya conocidos. Veamos ahora qué ocurre en cada parte:

- Si $x_0 > 1$:

  Demostramos por inducción que $x_n = x_0^{(2^n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que:

  $$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_0^{(2^n)} = \infty$$

  Por tanto, tenemos que no es estable, ya que para valores cercanos a 1, la solución diverge. Por tanto, es inestable por arriba.

- Si $x_0 < 1$:

  Tenemos que:

  $$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_0}{2} = \frac{3 - x_0}{2} > 1 \Longleftrightarrow 3 - x_0 > 2 \Longleftrightarrow 1 > x_0$$

  Por tanto, como $x_1 > 1$, aplicando lo anterior tenemos que:

  $$x_n = \left(\frac{3 - x_0}{2}\right)^{(2^{n-1})} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Por tanto, con $n \to \infty$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-x_0}{2}\right)^{(2^{n-1})} = \infty$$

Por tanto, es inestable por abajo.

Por tanto, deducimos que $x_c \equiv 1$ es inestable.

4. $f(x) = \begin{cases} 0{,}25x + 1{,}5 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Buscamos en primer lugar los puntos fijos de dicha función resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} 0{,}25x + 1{,}5 = x \Longleftrightarrow 1{,}5 = 0{,}75x \Longleftrightarrow x = 2 \\ \sqrt{2x} = x \Longleftrightarrow 2x = x^2 \Longleftrightarrow x = 0, 2 \end{gathered}$$

Considerando los intervalos de definición de cada parte de f, tenemos que tan solo hay un punto fijo, $x_c \equiv 2$. Estudiemos ahora su estabilidad. Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ con:

$$f'(x) = \begin{cases} 0{,}25 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Veamos si es derivable en $x = 2$. Tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 0{,}25 = 0{,}25 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{2x}} = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

Por tanto, tenemos que f no es derivable en $x = 2$, por lo que no podemos aplicar ninguno de los criterios ya conocidos.

- Si $x_0 < 2$:
  Veamos en primer lugar que la sucesión solución está mayorada por 2:
  - Para $n = 0$, vemos que $x_0 < 2$.
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$x_n < 2 \Longrightarrow x_{n+1} = 0{,}25x_n + 1{,}5 < 0{,}25 \cdot 2 + 1{,}5 = 2$$

    Por tanto, para $n + 1$ se tiene.

  Veamos ahora que la sucesión solución es creciente:

  $$x_{n+1} = f(x_n) = 0{,}25 \cdot x_n + 1{,}5 > x_n \Longleftrightarrow 1{,}5 > 0{,}75x_n \Longleftrightarrow 2 > x_n$$

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, tenemos que $\{x_n\} \to 2$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es un atractor local por debajo. Además, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

  $$|x_0 - 2| = 2 - x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 2| = 2 - x_n < 2 - x_0 < \delta = \varepsilon$$

  donde se ha empleado que $x_0 < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es estable por abajo.

- Si $x_0 > 2$:

  Veamos en primer lugar que la sucesión solución está minorada por 2:

  - Para $n = 0$, vemos que $x_0 > 2$.
  - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

    $$x_n > 2 \Longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{2x_n} > \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

    Por tanto, para $n + 1$ se tiene.

  Veamos ahora que la sucesión solución es decreciente:

  $$x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{2 \cdot x_n} < x_n \Longleftrightarrow 2x_n < x_n^2 \Longleftrightarrow 2 < x_n$$

  Por tanto, como $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, tenemos que $\{x_n\} \to 2$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es un atractor local por encima. Además, fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

  $$|x_0 - 2| = x_0 - 2 < \delta \Longrightarrow |x_n - 2| = x_n - 2 < x_0 - 2 < \delta = \varepsilon$$

  donde se ha empleado que $x_0 > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x_c \equiv 2$ es estable por encima.

Uniendo ambos resultados, tenemos que $x_c \equiv 2$ es estable y es un atractor local, por lo que es asintóticamente estable localmente.

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

En este caso, tenemos que $[-1, 1]$ son todos ellos puntos fijos. No obstante, tenemos que f no es derivable en ± 1, por lo que no podemos aplicar los criterios ya conocidos.

- Para cualquier $x^* \in]-1, 1[$, tenemos que x no es un atractor local, ya que para $x_0 \neq x^*$, tenemos que:

  $$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \neq x^*$$

  No obstante, tomando $\delta = \varepsilon$ obtenemos que sí es estable.
- Para $x^* = 1$, tenemos que es estable en ambos lados y atractor local tan solo por arriba.
- Para $x^* = -1$, tenemos que es estable en ambos lados y atractor tan solo por debajo.

Ejercicio 2.2.7. Demuestra que $\{^2/_9, ^4/_9, ^8/_9\}$ es un 3−ciclo inestable para la función "tienda" *(tent map)* T definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2 \\ 2(1 - x) & \text{si} \quad {}^1/_2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.2.8. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\{s_0, s_1\}$ un $2-$ciclo de $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestra que entre s_0 y s_1 hay un punto de equilibrio.

Supongamos sin pérdida generalidad $s_0 < s_1$. Buscamos demostrar que $\exists c \in \ ]s_0, s_1[$ tal que $f(c) = c$. Definiendo $g = f - Id$, tenemos que es continua por ser diferencia de continuas. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(s_0) &= f(s_0) - s_0 = s_1 - s_0 \\ g(s_1) &= f(s_1) - s_1 = s_0 - s_1 = -(s_1 - s_0) \end{aligned}$$

donde he hecho uso que, por ser un $2-$ciclo, tenemos que $f(s_0) = s_1$ y $f(s_1) = s_0$. Por tanto, tenemos que $g(s_0)g(s_1) = -(s_1 - s_0)^2 < 0$, por lo que por el Teorema de los Ceros de Bolzano, $\exists c \in \ ]s_0, s_1[$ tal que $g(c) = 0 = f(c) - c$, por lo que $f(c) = c$.

Ejercicio 2.2.9. Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ con función asociada $f(x) = {}^1\!/\!_2 \cdot x(1 - 3x^2)$. Estudia la estabilidad del ciclo $\{-1, 1\}$. Estudia también la estabilidad del punto de equilibrio deducido en el ejercicio anterior (Ejercicio 2.2.8).

Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que podemos aplicar el Criterio de la Primera Derivada. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9x^2 = \frac{1 - 9x^2}{2}$$

Tenemos por tanto que $f'(1) = f(-1) = -{}^8\!/\!_2 = -4 < -1$. Como $|f'(1)f'(-1)| = 16 > 1$, tenemos que dicho ciclo es inestable. Además, en el ejercicio anterior hemos visto que tiene un punto fijo $c \in \ ]-1, 1[$. Calculémoslo explícitamente:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x(1 - 3x^2) = x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ 1 - 3x^2 = 2 \Longleftrightarrow 3x^2 = -1 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que el punto fijo es $x_c \equiv 0$. Tenemos que $|f'(0)| = \frac{1}{2} < 1$, y por el Criterio de la Primera Derivada tenemos que es asintóticamente estable localmente.

Ejercicio 2.2.10. Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

que describe la evolución de una población que se comporta como una exponencial cuando el tamaño de la población es bajo y tiene tendencia a disminuir cuando el tamaño es elevado. La cantidad

$$\lambda = e^{r(1-x_n)}$$

es la tasa de crecimiento de la población.

1. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación.

   Su función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{r(1-x)} \end{array}$$

Sus puntos fijos son, suponiendo $r \neq 0$, son:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x = xe^{r(1-x)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad \vee \\ 1 = e^{r(1-x)} \Longleftrightarrow 0 = r(1-x) \Longleftrightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

En el caso de $r = 0$, se tiene que $f(x) = xe^0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que todos los puntos son puntos fijos.

2. Determina las condiciones bajo las que dichos puntos de equilibrio son asintóticamente estables para $r \neq 0, 2$.

Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = e^{r(1-x)}(1 - r \cdot x) = e^{r(1-x)}(1 - rx)$$

Estudiamos ahora cada uno de los puntos:

- Para $x = 0$:

  Tenemos $f'(0) = e^r$. Tenemos que e^x es una función estrictamente creciente y positiva. Por tanto, para $r > 0$ ($f'(0) > 1$) se tiene que es inestable; mientras que para $r < 0$ ($f'(0) < 1$) se tiene que es asintóticamente estable localmente.

- Para $x = 1$:

  Tenemos $f'(1) = e^0(1-r) = 1-r$. Tenemos que, para $r \in]0, 2[$ ($|f'(1)| < 1$) se tiene que es asintóticamente estable localmente; mientras que para $r > 2$ y $r < 0$ ($|f'(1)| > 1$) se tiene que es inestable.

Los resultados se resumen en la siguiente tabla, donde *a.e.l.* representa *asintóticamente estable localmente.*

$0 < r$	0 es a.e.l. y 1 es inestable.
$r = 0$	No lo sabemos.
$0 < r < 2$	0 es inestable y 1 es a.e.l.
$r = 2$	0 es inestable, y para el 1 no lo sabemos.
$2 < r$	0 y 1 son inestables.

3. Estudia el caso $r = 2$.

Como hemos explicado antes, el 0 es inestable. Veamos el caso de $x_c \equiv 1$. Tenemos que $f'(1) = 1 - r = -1$. Calculamos entonces la derivada segunda y tercera:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -re^{r(1-x)}(1 - rx + 1) = -re^{r(1-x)}(2 - rx) \\ f'''(x) &= r^2e^{r(1-x)}(2 - rx + 1) = r^2e^{r(1-x)}(3 - rx) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $f''(1) = -r(2-r) = 0$, $f'''(1) = r^2(3-r) = 4$. Usando el Teorema correspondiente, tenemos que:

$$2f'''(1) + 3(f''(1))^2 = 2 \cdot 4 > 0$$

Por tanto, tenemos que $x_c \equiv 1$ es asintóticamente estable localmente.

4. Estudia el caso $r = 0$.

   En este caso, el modelo queda $x_{n+1} = x_n$, por lo que todos los valores iniciales son soluciones constantes. No es un atractor local, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ para cualquier valor de $x_0 \in \mathbb{R}$. No obstante, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que sí es estable.

Ejercicio 2.2.11. Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$, donde $f \in C^2(\mathbb{R})$ es una función que verifica las siguientes propiedades:

- $f(x)$ se anula solo en $x = -1$.
- $f'(x)$ es estrictamente decreciente con $f'(-1) = 0$.

Demuestra que $x^* = -1$ es un punto de equilibrio inestable siempre que $\alpha \neq 0$.

Sea la función asociada a dicha euación en diferencias la siguiente:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + \alpha f(x) \end{array}$$

Veamos que $x^* = -1$ es un punto fijo:

$$g(-1) = -1 + \alpha f(-1) = -1 + \alpha \cdot 0 = -1$$

Por tanto, x^* es un punto fijo. Como $f \in C^2(\mathbb{R})$, tenemos que $g \in C^2(\mathbb{R})$. Calculemos $g'(x^*)$:

$$g'(x) = 1 + \alpha f'(x) \qquad g'(-1) = 1 + \alpha f'(-1) = 1$$

Por tanto, el Criterio de la Primera Derivada no aporta información. Veamos ahora qué ocurre en $x^* = -1$:

- Para $x < -1$, como f' es estrictamente decreciente tenemos que $f'(x) > f'(-1) = 0$. Por tanto, f es estrictamente creciente.
- Para $x > -1$, como f' es estrictamente decreciente tenemos que $f'(x) < f'(-1) = 0$. Por tanto, f es estrictamente decreciente.

Por tanto, podemos afirmar que f tiene un máximo relativo en x^* y que cambia de creciente a decreciente, por lo que es cóncava y tenemos que $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que por tanto que:

$$g''(x) = \alpha f''(x)$$

Por tanto, como $\alpha, f''(-1) \neq 0$, tenemos que $g''(-1) \neq 0$. Por tanto, por el Criterio de la Segunda Derivada, tenemos que $x^* = -1$ será inestable bien por arriba o bien por abajo, pero en cualquier caso será inestable.

Ejercicio 2.2.12. En cierto mercado las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p^2, \qquad D(p) = c - dp, \qquad c \in \ ]1, +\infty[, \ d \in \mathbb{R}^+$$

1. Calcula el punto de equilibrio económicamente factible.

$$O(p) = D(p) \Longleftrightarrow 1+p^2 = c-dp \Longleftrightarrow p^2+dp+1-c = 0 \Longleftrightarrow p = \frac{-d \pm \sqrt{d^2+4(c-1)}}{2}$$

En el caso de la solución que lleva un -1 como coeficiente de la raíz, podemos confirmar que el valor es negativo, por lo que el punto de equilibrio económicamente estable es:

$$p^* = \frac{-d + \sqrt{d^2+4(c-1)}}{2}$$

2. Deduce las condiciones sobre c y d que aseguran la estabilidad asintótica de p^*. ¿Qué ocurre si $d = 2$ y $c = 4$?

El modelo viene dado por la ecuación $O(p_{n-1}) = D(p_n)$:

$$1 + p_{n-1}^2 = c - dp_n \Longrightarrow p_n = \frac{c - 1 - p_{n-1}^2}{d}$$

La función asociada es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \dfrac{c-1-x^2}{d} \end{array}$$

Tenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$, y su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{2}{d} \cdot x$$
$$f'(p^*) = -\frac{-d + \sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} = \frac{d - \sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} = 1 - \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d}$$

Para poder asegurar la estabilidad asintótica de p^*, empleando el Criterio de la Primera Derivada necesitamos que $|f'(p^*)| < 1$. Como sabemos que $\left(-d + \sqrt{d^2+4(c-1)}\right) > 0$ por tener $p^* > 0$ y, además, $d \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $f'(p^*) \leqslant 0$. Por tanto, basta con imponer que $-1 < f'(p^*)$:

$$-1 < 1 - \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} \Longleftrightarrow -2 < -\frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2 > \frac{\sqrt{d^2+4(c-1)}}{d} \Longleftrightarrow 2d > \sqrt{d^2+4(c-1)} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 4d^2 > d^2 + 4(c-1) \Longleftrightarrow 3d^2 > 4(c-1) \Longleftrightarrow 3d^2 - 4c > -4$$

Por tanto, hemos de imponer que $3d^2 - 4c > -4$. En el caso de $d = 2$ y $c = 4$, tenemos que:

$$3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 4 = 12 - 16 = -4$$

Por tanto, en este caso no basta con usar el Criterio de la Primera Derivada. Tenemos que:

$$p^* = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \qquad f'(-1) = -1$$

En este caso, y debido a la observación de la página 45, tenemos que $p^* = 1$ es asintóticamente localmente estable.

3. Para $c = 3$ y $d = 2$, usa un diagrama de Cobweb para trazar los valores de p_1 y p_2 a partir de $p_0 = 1$. ¿Cómo se comportarán los precios a largo plazo en este caso?

   En este caso, tenemos:

   $$3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0 > -4$$

   Por tanto, tenemos que el punto de equilibrio p^* es asintóticamente estable localmente. En este caso, $p^* = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}732$. Sabiendo la Ley de Recurrencia, tenemos que:

   $$p_0 = 1 \qquad p_1 = 1/2 \qquad p_2 = 7/8$$

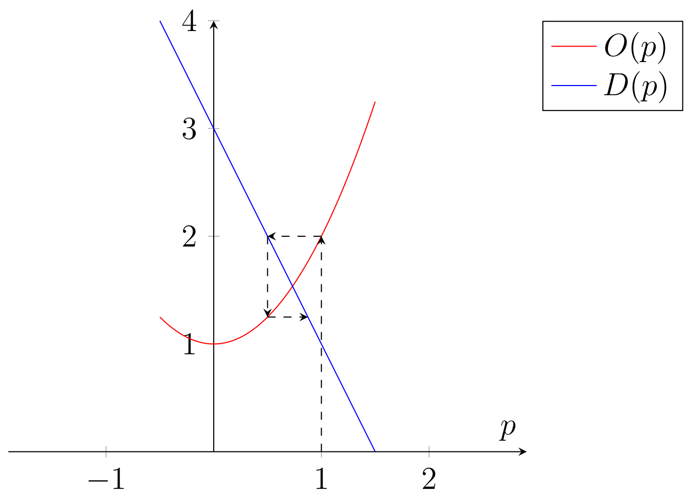


Figura 2.5: Representación del modelo de la Telaraña del Ejercicio 2.2.12.

Ejercicio 2.2.13. Determina los 2−ciclos de los siguientes sistema dinámicos y estudia su estabilidad:

1. $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

Su función asociada es:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$$

Para estudiar los 2−ciclos, necesitamos obtener f^2. Tenemos que:

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(1-x^2) = 1-(1-x^2)^2 = 1-(1-2x^2+x^4) = 2x^2-x^4 = x^2(2-x^2)$$

Los elementos del 2−ciclo serán los puntos fijos de f^2, calculémoslos:

$$f^2(x) = x \Longleftrightarrow x^2(2-x^2) = x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \quad\vee \\ x(2-x^2) = 1 \Longleftrightarrow -x^3+2x-1 \end{array} \right.$$

Aplicamos el Método de Ruffini para resolver dicha ecuación:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & & -1 & -1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Figura 2.6: División mediante Ruffini donde se ve que $x = 1$ es una solución.

Por tanto, tenemos que dos puntos fijos de f^2 son $0, 1$. Además, también tendrá como puntos fijos las soluciones de la ecuación $-x^2 - x + 1 = 0$, pero esas son las soluciones de $f(x) = x$; es decir, son soluciones constantes. Por tanto, el 2−ciclo es:

$$\{0, 1\}$$

2. $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$.
   Su función asociada es:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\dfrac{6}{x} \end{array}$$

Para estudiar los 2−ciclos, necesitamos obtener f^2. Tenemos que:

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(5-\frac{6}{x}\right) = 5 - \frac{6}{5-\dfrac{6}{x}} = 5 - \frac{6x}{5x-6}$$

Los elementos del 2−ciclo serán los puntos fijos de f^2, calculémoslos:

$$f^2(x) = x \Longleftrightarrow 5 - \frac{6x}{5x-6} = x \Longleftrightarrow (5-x)(5x-6) = 6x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 25x - 30 - 5x^2 + 6x = 6x \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 3 \\ \vee \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Comprobemos ahora que no son soluciones constantes:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 5 - \frac{6}{x} = x \Longleftrightarrow 5x - 6 = x^2$$

Como podemos ver, los dos valores anteriores cumplen la ecuación, por lo que son puntos fijos. Por tanto, no hay 2−ciclos no triviales.

Ejercicio 2.2.14. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad x < 0 \\ bx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \end{cases}$$

demuestra las siguientes propiedades:

1. $\alpha = 0$ es un punto fijo de f para cualesquiera a y b.

   Para cualquier valores de a, b, tenemos que $f(0) = b \cdot 0 = 0$, por lo que $\alpha = 0$ es un punto fijo.

2. Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

   Distinguimos en función del signo de x_0:

   - Si $x_0 < 0$:
     Demostremos en primer lugar que la solución está mayorada por 0:
     - Para $n = 0$, tenemos $x_0 < 0$.
     - Supuesto cierto para n, demostramos para $n + 1$:

       $$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n < 0$$

       donde he aplicado que $a \geqslant 0$ y $x_n < 0$.

     Veamos ahora que la solución es estrictamente creciente:

     $$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n > x_n \Longleftrightarrow a < 1$$

     donde, tras simplificar x_n puesto que $x_n \neq 0$, he empleado que $x_n < 0$, por lo que se invierte el sentido de la desigualdad. Por tanto, $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por lo que $\{x_n\} \to 0$. Para demostrar que es estable, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

     $$|x_0 - 0| = -x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 0| = -x_n < -x_0 < \varepsilon$$

     donde he empleado que $x_0 < x_n$. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente por abajo.

   - Si $x_0 > 0$:
     Demostremos en primer lugar que la solución está minorada por 0:
     - Para $n = 0$, tenemos $x_0 > 0$.

- Supuesto cierto para n, demostramos para $n+1$:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n > 0$$

donde he aplicado que $b \geqslant 0$ y $x_n > 0$.

Veamos ahora que la solución es estrictamente decreciente:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n < x_n \Longleftrightarrow b < 1$$

donde, tras simplificar x_n puesto que $x_n \neq 0$, he empleado que $x_n > 0$, por lo que se mantiene el sentido de la desigualdad. Por tanto, $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, por lo que $\{x_n\} \to 0$. Para demostrar que es estable, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que:

$$|x_0 - 0| = x_0 < \delta \Longrightarrow |x_n - 0| = x_n < x_0 < \varepsilon$$

donde he empleado que la sucesión solución es creciente. Por tanto, tenemos que es asintóticamente estable localmente por encima.

Por tanto, deducimos que es asintóticamente estable localmente.

3. Si $0 < a < 1$ y $b > 1$ entonces $\alpha = 0$ es inestable.

   Veamos que no es estable. Tomado $x_0 > 0$, veamos que la solución es creciente:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b \cdot x_n > x_n \Longleftrightarrow b > 1$$

   Por tanto, la solución es estrictamente creciente. Veamos que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que lo está, y tengamos $\{x_n\} \to L$. Tenemos que:

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

   donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Por tanto, $f(L) = L$, por lo que L es un punto fijo y ha de ser $\alpha = 0$ por ser el único punto fijo. No obstante, la sucesión solución es estrictamente creciente con $x_0 > 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $\{x_n\}$ no está acotada, y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

   En concreto, tenemos que es inestable por encima, y por tanto es inestable.

4. Si $a < 0$ y $b < 0$ y $ab < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

5. ¿Qué puede decirse sobre la estabilidad de los puntos fijos cuando $b = 1$ y $a > 1$?

   En este caso, el conjunto de los puntos fijos es $\mathbb{R}_0^+$. Para los elementos de $\mathbb{R}^+$, tenemos que es estable tomando $\delta = \varepsilon$. No obstante, no es asintóticamente estable, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ para cualquier valor de $x_0 > 0$, y por tanto no es un atractor local.

En el caso de un punto $x_0 < 0$, tenemos que la solución es decreciente:

$$x_{n+1} = f(x_n) = a \cdot x_n < x_n \Longleftrightarrow a > 1$$

Por tanto, la solución es estrictamente decreciente. Veamos que no está acotada por reducción al absurdo. Supongamos que lo está, y tengamos $\{x_n\} \to L$. Tenemos que:

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(L)$$

donde en $(*)$ hemos empleado la continuidad de f. Por tanto, $f(L) = L$, por lo que L es un punto fijo y ha de ser $\alpha = 0$ por ser el único punto fijo. No obstante, la sucesión solución es estrictamente decreciente con $x_0 < 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $\{x_n\}$ no está acotada, y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

En concreto, tenemos que es inestable por debajo, y por tanto es inestable.

Ejercicio 2.2.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2}x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Estudia la estabilidad de los puntos fijos de $x_{n+1} = f(x_n)$. ¿Es f contractiva?

Tenemos que $f(0) = 0$. Veamos si hay otro punto fijo:

$$\frac{1}{2}x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = x \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

Por tanto, no hay más puntos fijos.

Ejercicio 2.2.16. La evolución de una determinada población viene descrita por la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n e^{a-x_n} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

1. Determina los puntos de equilibrio y estudia su estabilidad en función del valor de a.

   Sea su función asociada:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{a-x} \end{array}$$

   Tenemos que los puntos fijos, además de $x = 0$, son:

   $$1 = e^{a-x} \Longrightarrow 0 = a - x \Longrightarrow x = a$$

   Además, sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tenemos que:

   $$f'(x) = e^{a-x}(1 - x)$$

2. Para el caso $a = 3$, comprueba que $\{0{,}424321, 5{,}57568\}$ es un $2-$ciclo (aproximado). ¿Es asintóticamente estable?

Ejercicio 2.2.17. En cierto mercado los precios de un determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña, donde las funciones de oferta y demanda vienen dadas por:

$$D(p) = 5 - p, \qquad O()‘ = 2 + \frac{(p-2)^3}{3}.$$

Con el fin de estudiar la evolución de los precios se pide lo siguiente:

1. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y decreciente, entonces $x_{n+1} = f(x_n)$ tiene un único punto de equilibrio.

2. Construye una ecuación en diferencias para el precio y localiza un intervalo entre dos enteros consecutivos que contenga al precio de equilibrio.

3. Calcula la derivada de f en el entorno anterior. Comprueba que el punto de equilibrio obtenido es asintóticamente estable.

4. Sea $g(x) = f(f(x))$, donde f es la función del apartado anterior. Prueba que se verifica $g(3) < 3 < 4 < g(4)$, y deduce como consecuencia de ello que la ecuación en diferencias admite un $2-$ciclo.

5. ¿Es el precio de equilibrio un atractor global?

6. Estudia el comportamiento de los precios del modelo teniendo en cuenta la información obtenida en los apartados anteriores.