Cálculo I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Juan Manuel Fernández García

Granada, 2023

Introducción

La intención de este documento es que sirva de referencia al lector/a a la hora de estudiar la asignatura de Cálculo I del Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas de la UGR. En cualquier caso, el autor del documento no pretende ni puede sustituir el papel de la bibliografía complementaria recomendada en la guía docente de la asignatura.

Los cuatro primeros temas están dedicados a establecer las propiedades básicas del conjunto de los números reales, la base de todo el Análisis Matemático.

Los temas 5, 6, 7 y 8 tratan del estudio de las sucesiones de números reales, que será la herramienta fundamental de la que dispondremos en el presente texto. Es muy importante que el lector interiorice los conceptos sobre sucesiones que aquí se exponen, pues serán recurrentes, no solo a lo largo del resto de estos apuntes, sino también en el resto de asignaturas de Análisis (Cálculo II, Análisis Matemático I y II, etc).

En los temas 9, 10 y 11 se hace una introducción a las series numéricas de números reales y se estudian sus propiedades básicas.

Finalmente, los temas 12 y 13 están dedicados a realizar un estudio detallado de los conceptos de función real de variable real, continuidad y límite funcional.

Índice general

1. Números reales: Propiedades básicas

El primer paso para avanzar con provecho en el estudio del Análisis Matemático es establecer sólidamente la base sobre la que se asienta todo él: **El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales**.

Entre las distintas formas que tenemos de introducir el cuerpo de los números reales, elegimos hacerlo de forma axiomática debido al bagaje de conocimientos que se presupone.

1.1. Axiomas de cuerpo

Admitimos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, que tiene las siguientes propiedades.

A. En $\mathbb{R}$ hay definida una operación binaria, llamada suma y denotada por "+", que verifica los siguientes axiomas:

A.1 La suma es asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.
A.2 La suma es conmutativa: $a+b = b+a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$.
A.3 Existe un elemento neutro para la suma:

$$\exists e \in \mathbb{R}\ :\ a+e = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

A.4 Todo número real admite un simétrico para la suma:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ :\ a+b = e$$

Estos 4 axiomas se resumen diciendo que $\mathbb{R}$ con la operación suma es un grupo conmutativo o abeliano.

Proposición 1.1.1. *Respecto a la operación suma, se cumplen las siguientes propiedades:*

I. *Solo hay un elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}$.*

II. *El simétrico para la suma de cualquier número real es único.*

Demostración. Demostramos cada parte por separado:

I. Si $\overline{e}$ fuera otro elemento neutro, tendríamos que

$$\overline{e} = \overline{e} + e = e$$

II. Para probar la unicidad del elemento simétrico para la suma, dado $a \in \mathbb{R}$, supongamos que b y c son elementos simétricos de a. Entonces, $a+b = e = a+c$, por lo que

$$b+(a+b) = b+(a+c) \iff (b+a)+b = (b+a)+c \iff e+b = e+c \iff b = c$$

□

De ahora en adelante, al elemento neutro de la suma lo notaremos por 0. Al simétrico de a lo representaremos por $-a$ y lo llamaremos el **opuesto de** a. Escribiremos $a - b$ en lugar de $a + (-b)$

B. En $\mathbb{R}$ hay definida una operación binaria, llamada producto y denotada por yuxtaposición o "·", que verifica los siguientes axiomas:

B.1 El producto es asociativo: $(ab)c = a(bc), \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

B.2 El producto es conmutativo: $ab = ba, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.
B.3 Existe un elemento neutro no nulo para el producto:

$$\exists u \in \mathbb{R}, \ u \neq 0 \ : \ au = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

B.4 Todo número real no nulo admite un simétrico para el producto:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \ \exists b \in \mathbb{R} \ : \ ab = u$$

B.5 El producto cumple la propiedad distributiva respecto de la suma:

$$a(b + c) = ab + ac, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Los axiomas A y B se resumen diciendo que el conjunto $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo.

Proposición 1.1.2. *Respecto a la operación producto, se cumplen las siguientes propiedades:*

I. *Solo hay un elemento neutro para el producto en* $\mathbb{R}$.

II. *El simétrico para el producto de cualquier número real es único.*

Demostración. Demostramos cada parte por separado:

I. Si $\overline{u}$ fuera otro elemento neutro, tendríamos que

$$\overline{u} = \overline{u}u = u$$

II. Para probar la unicidad del elemento simétrico para el producto, dado $a \in \mathbb{R}$, supongamos que b y c son elementos simétricos de a. Entonces, $ba = 1 = ac$, por lo que

$$bac = bac \Longleftrightarrow (ba)c = b(ac) \Longleftrightarrow 1c = b1 \Longleftrightarrow b = c$$

$\square$

Por tanto, queda probada la unicidad del elemento neutro y simétrico para el producto. Al elemento neutro del producto lo llamaremos 1. Al simétrico de a lo notaremos a^{-1} o $\frac{1}{a}$, y lo llamaremos el **inverso de** a. Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, escribiremos $\frac{a}{b}$ en vez de ab^{-1}.

1.2. Axiomas de cuerpo ordenado

C. En el conjunto $\mathbb{R}$ hay definida una relación binaria, $\leq$, que verifica los siguientes axiomas:

C.1 Propiedad reflexiva: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

C.2 Propiedad antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \Longrightarrow a = b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

C.3 Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que en $\mathbb{R}$ hay definida una relación de orden.

C.4 La relación de orden $\leq$ es total:

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b \text{ , o bien, } b \leq a$$

Los siguientes axiomas ligan la relación de orden con la estructura de cuerpo.

C.5 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ a \leq b$ tenemos que $a + c \leq b + c$.

C.6 $\forall c \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq c$, $\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ a \leq b$ tenemos que $ac \leq bc$.

Notacion. Algunas notaciones relevantes para la relación binaria descrita son:

- Diremos que $a < b \Longleftrightarrow a \leq b$ y $a \neq b$.
- Diremos que $a > b \Longleftrightarrow b < a$.
- Diremos que $a \geq b \Longleftrightarrow b \leq a$.

Las siguientes notaciones son usuales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ 0 < a\} \\
\mathbb{R}_0^+ &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq a\} \\
\mathbb{R}^- &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ a < 0\} \\
\mathbb{R}_0^- &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ a \leq 0\} \\
\mathbb{R}^* &= \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}$$

Los axiomas A, B y C se resumen diciendo que el conjunto $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado.

Para completar la axiomática del número real, queda por enunciar un último axioma. Este axioma, que es sin duda el más importante, se introducirá más adelante por dos razones. La primera es la necesidad de introducir algunos conceptos para poder dar su enunciado. Por otra parte, los axiomas del cuerpo ordenado nos permiten deducir una amplia gama de propiedades que no necesitan el axioma que nos falta.

1.3. Valor absoluto

Definición 1.3.1 (Valor absoluto)**.** Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos el **valor absoluto de** a, notaremos $|a|$ como

$$|a| = \left\{ \begin{array}{c} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{array} \right\} = \text{máx}\{a, -a\}$$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. Probar las siguientes propiedades:

i. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a = -(-a)$

ii. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $-(a - b) = b - a$

iii. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b = a + c \Longleftrightarrow b = c$ (Ley de cancelación)

iv. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$. En particular, el 0 no tiene inverso.

v. Si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $ab = 0$, entonces $a = 0 \ \vee \ b = 0$.

vi. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall c, d \in \mathbb{R}^*$ tenemos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

vii. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que $a(-b) = -(ab) = (-a)b$ y $(-a)(-b) = ab$

Notacion. A partir de ahora, notaremos $a^2 := a \cdot a \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.4.2. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, probar las siguientes propiedades:

I. $a \leq b \iff -b \leq -a$

II. $\left\{ \begin{array}{l} a < b \\ c \leq d \end{array} \right. \Longrightarrow a + c < b + d$

III. $\left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow ca \geq cb$

IV. $\left\{ \begin{array}{l} a < b \\ 0 < c \end{array} \right. \Longrightarrow ac < bc$

V. $a \cdot a > 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^*$. En particular, $1 > 0$ y

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \dots \ (\mathbb{R} \text{ tiene “muchos” elementos})$$

VI. $\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^+ \iff a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\ a \in \mathbb{R}^- \iff a^{-1} \in \mathbb{R}^- \end{array} \right.$

VII. $0 < a < b \iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

VIII. $\left\{ \begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array} \right. \Longrightarrow 0 < ac < bd$

IX. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

Ejercicio 1.4.3. Probar las siguientes propiedades del valor absoluto:

I. $\forall a \in \mathbb{R},\ |a| \geq 0$

II. $|a| = 0 \iff a = 0$

III. $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq |a|$

IV. $\forall a \in \mathbb{R}, |-a| = |a|$

V. $\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| = |a| \cdot |b|$

VI. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

VII. Dados $a, b \in \mathbb{R},\ |a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

VIII. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)

IX. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a - b| \geq |a| - |b|$. En particular, $|a - b| \geq ||a| - |b||$

X. $a^2 = (|a|)^2 = |a^2| \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

2. Números naturales y conjuntos numerables

Para seguir avanzando en nuestro estudio de las propiedades de los números reales, introduciremos algunos subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$ y algunas propiedades básicas de estos que nos permitan caracterizarlos.

2.1. Conjuntos inductivos y el Principio de inducción

Intuitivamente, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales está formado por el 1 y por todos los elementos que se obtienen sumando 1 consigo mismo. En un ejercicio anterior hemos justificado que estos elementos son distintos. En particular, $\mathbb{N}$ verifica que $1 \in \mathbb{N}$ y que dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n+1 \in \mathbb{N}$. A pesar de que no es el único conjunto de números reales que verifica estas propiedades, notemos que $\mathbb{N}$ debe estar contenido en todos y cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que las verifican. En ese sentido, el conjunto $\mathbb{N}$ es el más pequeño de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que gozan de estas propiedades.

Definición 2.1.1. Se dice que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **inductivo** si:

I. $1 \in A$

II. Si $x \in A \Longrightarrow x+1 \in A$

Definición 2.1.2. Definimos el **el conjunto de los números naturales**, notado por $\mathbb{N}$, como el conjunto que resulta de la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A_i \text{ inductivo}} A_i = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in A, \ \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ inductivo}\}$$

Teorema 2.1.3. $\mathbb{N}$ *es un conjunto inductivo y si* $A \subseteq \mathbb{R}$ *es inductivo, entonces* $\mathbb{N} \subseteq A$.

Demostración. Demostraremos únicamente la primera afirmación, ya que la segunda es evidente.

Es claro que $1 \in \mathbb{N}$, pues $1 \in A, \ \forall A \subseteq \mathbb{R}$ inductivo.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. Entonces $n \in A, \ \forall A$ inductivo. Por tanto, $n+1 \in A$ $\forall A$ inductivo, lo que prueba que $n+1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.1.4 (Principio de inducción)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si A es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$.*

Demostración. Si A es inductivo, entonces $\mathbb{N} \subseteq A$, y al darse la doble inclusión se deduce que $A = \mathbb{N}$ $\square$. $\square$

La utilización usual del teorema anterior es la siguiente:

Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene una cierta afirmación P_n y se quiere probar que P_n es cierta para todo n natural. Para ello, basta probar que P_1 es cierta y que de ser cierta P_n se deduce que P_{n+1} también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$. La implicación $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ se conoce como **hipótesis de inducción**.

En efecto, definimos $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ P_n \text{ es cierta}\} \subseteq \mathbb{N}$. Dado que P_1 es cierta y como P_n es cierta implica que P_{n+1} es cierta, si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$, luego A es inductivo. Concluimos por el teorema anterior que $A = \mathbb{N}$, lo que prueba que P_n es cierta para todo n natural. Este razonamiento es muy usual en matemáticas y se conoce como **demostración por inducción**.

Ejemplo. Probar que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\} \subseteq \mathbb{N}$.

Es fácil comprobar que $1 \in A$.
Hipótesis de inducción: Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \in A$. Entonces:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Por lo que $n + 1 \in A$.

Hemos probado que A es inductivo, por lo que, en virtud del Principio de inducción, $A = \mathbb{N}$, o lo que es lo mismo, que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el siguiente resultado se resumen las propiedades más inmediatas de los números naturales.

Corolario 2.1.5. *Algunas de las propiedades de $\mathbb{N}$ son:*

I. $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

II. *Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m + n, mn \in \mathbb{N}$.*

III. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $-n$ no es natural. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\frac{1}{n} \in \mathbb{N}$, entonces $n = 1$.*

Demostración. Demostramos cada una de las partes:

I. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x\}$ es inductivo, luego incluye a $\mathbb{N}$.

II. Dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y arbitrario, se demuestra fácilmente por inducción sobre n.

III. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 < 1 \leq n$, luego $-n < 0$ y así $-n$ no es natural.
Si fuera $n \neq 1$ se tiene que $1 < n$, luego $\frac{1}{n} < 1$ y $\frac{1}{n}$ es un real no natural como consecuencia del apartado I).

□

Lema 2.1.6. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n-1 \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, probaremos que A es inductivo.

Que $1 \in A$ es evidente y si $x \in A$, entonces $x \in \mathbb{N}$, por lo que $x + 1 \in \mathbb{N}$ y $(x + 1) - 1 \in \mathbb{N}$, luego $x + 1 \in A$. □

Proposición 2.1.7. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$n < m \Longleftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ m - n \in \mathbb{N}\}$.

$1 \in A$ como consecuencia del lema anterior. Queremos probar que si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$.

Para ello, sea $n \in A$ y sea m un natural tal que $n+1 < m$. Al ser $n < m$, deducimos que $m-n \in \mathbb{N}$ por hipótesis de inducción. Si fuera $m-n = 1$ tendríamos que $n + 1 = m$ y hemos supuesto que $n + 1 < m$, por lo que $m - n \neq 1$ y aplicando el lema anterior obtenemos que $m - (n + 1) = (m - n) - 1 \in \mathbb{N}$, es decir, $n + 1 \in A$.

Hemos probado que A es inductivo, luego $A = \mathbb{N}$. Queda probado que si m y n son naturales cualesquiera tales que $n < m$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) Si $m - n \in \mathbb{N}$, entonces $m - n \geq 1$, de donde se deduce que $m > n$.

□

La proposición anterior es una caracterización algebraica del orden de los naturales.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la anterior proposición.

Corolario 2.1.8. *Si m y n son naturales cualesquiera verificando que $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$.*

El anterior corolario afirma que no existe ningún número natural comprendido estrictamente entre n y $n + 1$. Esta propiedad se enuncia a veces diciendo que el orden de $\mathbb{N}$ es discreto.

Nuestro siguiente objetivo es obtener un resultado de extraordinaria importancia relativo a los conjuntos de números naturales. Para poder enunciarlo, es preciso introducir un nuevo concepto.

Definición 2.1.9 (Máximo/Mínimo)**.** Se dice que un conjunto de números reales A tiene **máximo** cuando existe $a \in A$ tal que $a \geq x,\ \forall x \in A$. Análogamente, diremos que tiene **mínimo** cuando existe $a \in A$ tal que $a \leq x,\ \forall x \in A$. Notaremos $\max A$ y $\min A$, respectivamente. Es inmediato que, en caso de existir, son únicos.

Resaltamos que un conjunto de números reales puede no tener máximo y/o mínimo. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ no tiene máximo ni mínimo. Sin embargo, el siguiente resultado asegura la existencia del mínimo en determinadas circunstancias.

Teorema 2.1.10 (Principio de buena ordenación de los naturales)**.** *Todo conjunto no vacío A de números naturales tiene mínimo.*

Demostración. Si $1 \in A$, tenemos que $1 = \min A$ y no hay nada que probar.

De lo contrario, sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n < a,\ \forall a \in A\}$. Claramente, $1 \in B$. Si B fuera inductivo, entonces $A = \emptyset$, luego B no es inductivo. Entonces, existe $n \in B$ tal que $n + 1 \notin B$, por lo que $n + 1 \leq a,\ \forall a \in A$ (Corolario 2.1.8). Como $n + 1 \in A$, pues en otro caso $n + 1$ pertenecería a B, concluimos que $n + 1 = \min A$. □

2.2. Potencias de exponente natural

Dado $x \in \mathbb{R}$, se definen las potencias de exponente natural como sigue:

$$x^1 := x$$
$$x^{n+1} := x^n x,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Nótese que la definición dada es inductiva, pues se obtienen las sucesivas potencias de x a partir de las anteriores.

La siguiente proposición resume las propiedades esenciales.

Proposición 2.2.1. *Algunas de las propiedades de las potencias de exponente natural son:*

i. $x^{m+n} = x^m x^n$, *$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

ii. $(x^m)^n = x^{mn}$, *$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

iii. *Si $1 < x$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $n < m \Leftrightarrow x^n < x^m$*

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

i. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x^{m+n} = x^m x^n\}$. Por definición de potencia de exponente natural, $1 \in A$.

   Si $n \in A$, entonces

   $$x^{m+n+1} = x^{m+n}x = (x^m x^n)x = x^m(x^n x) = x^m x^{n+1}$$

   Así, A es inductivo, por lo que $A = \mathbb{N}$ como queríamos.

II. Análogo a I).

III. Sea $1 < x$, es fácil ver que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ 1 < x^n\}$ es inductivo. Entonces, $1 < x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $n < m$, sabemos que $m - n \in \mathbb{N}$ y por tanto $1 < x^{m-n}$, luego $x^n < x^m$. Recíprocamente, supongamos que $x^n < x^m$ y $n \geq m$. Entonces, por lo ya demostrado, $x^n \geq x^m$ lo cual es una contradicción.

□

2.3. Conjutos finitos e infinitos

De forma intuitiva, cabría decir que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos cuando existe alguna aplicación biyectiva de uno sobre otro. Es igualmente intuitivo que el conjunto $\{m \in \mathbb{N} \ : \ m \leq n\}$, con n natural, tiene n elementos. Vamos a formalizar estas ideas intuitivas a continuación.

Definición 2.3.1 (Conjunto Equipotente)**.** Dado un conjunto A, diremos que es *equipotente* a otro conjunto B si existe alguna biyección de A sobre B. En tal caso, escribiremos $A \sim B$.

Es fácil ver que la relación "ser equipotente a" cumple las siguientes propiedades:

I. Propiedad reflexiva: $A \sim A, \ \forall A \subseteq \mathbb{R}$

II. Propiedad simétrica: $A \sim B \Longleftrightarrow B \sim A, \ \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$

III. Propiedad transitiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim C \end{array} \right. \Longrightarrow A \sim C, \ \forall A, B, C \subseteq \mathbb{R}$$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que la relación de ser equipotente es una **relación de equivalencia**.

Dado un natural n, definimos el conjunto $S(n)$ como sigue:

$$S(n) := \{m \in \mathbb{N} \ : \ m \leq n\}$$

Proposición 2.3.2. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $S(m) \sim S(n)$. Entonces, $m = n$.*

Demostración. Para cada n natural, consideramos la proposición P_n siguiente: "Si m es un natural verificando $S(m) \sim S(n)$, entonces $m = n$". Probaremos por inducción que P_n es cierta para todo n natural.

Para $n = 1$, si f es una biyección de $S(m)$ sobre $S(1)$, entonces $f(m) = f(1) = 1$, por lo que $m = 1$ por ser f inyectiva.

Supongamos que P_n es cierta y veamos que P_{n+1} también lo es. Sea h una biyección de $S(n+1)$ sobre $S(m)$ y consideramos la aplicación $g : S(m) \longrightarrow S(m)$ dada por:

$$\begin{cases} g(h(n+1)) = m \\ \\ g(m) = h(n+1) \\ \\ g(x) = x, \ \forall x \in S(m) - \{m, h(n+1)\} \end{cases}$$

Es fácil ver que g es biyectiva. Por tanto, la aplicación $f = g \circ h$ es una biyección de $S(n+1)$ sobre $S(m)$ verificando

$$f(n+1) = g(h(n+1)) = m$$

La restricción de f a $S(n)$ puede considerarse una biyección de $S(n)$ sobre $S(m-1)$ (Notemos que $m > 1$, de lo contrario, al ser P_1 cierta, tendríamos $n+1 = 1$ lo cual es absurdo).

Como suponemos que P_n es cierta, tenemos $n = m - 1 \iff n + 1 = m$, como queríamos probar. □

Definición 2.3.3 (Conjunto finito)**.** Un conjunto A se dice que es **finito** si es vacío o si existe un natural n tal que A es equipotente a $S(n)$. Por la proposición anterior, dicho n es único y diremos que n es el **número de elementos del conjunto**. Convenimos que el número de elementos del conjunto vacío es 0.

Un conjunto se dice **infinito** si no es finito.

La principal propiedad de los conjuntos finitos de números reales que nos interesa es la siguiente:

Proposición 2.3.4. *Todo conjunto finito de números reales tiene máximo y mínimo.*

Demostración. Hacemos inducción sobre el número de elementos del conjunto.

Es evidente que todos los conjuntos de un elemento tienen máximo y mínimo.

Supongamos que el resultado es cierto para conjuntos de n elementos y veámoslo para conjuntos de $n + 1$ elementos.

Sean A un conjunto con $n + 1$ elementos, f una biyección de $S(n + 1)$ sobre A tal que $a = f(n + 1)$. Sabemos que $A \sim S(n + 1)$. El conjunto $A - \{a\}$ tiene n elementos (¡Compruébese!), por lo que sea M su máximo y m su mínimo. Para ver que A tiene máximo, si $M < a$, entonces $\max A = a$, mientras que si $a < M$, entonces $\max A = M$. En cualquier caso, A tiene máximo.

El razonamiento para ver que A tiene mínimo es análogo. □

Dado $x \in \mathbb{R}$, $x < x+1$, luego $\mathbb{R}$ no tiene máximo. El mismo razonamiento aplica para $\mathbb{N}$. Por lo tanto:

Corolario 2.3.5. $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{R}$ *son conjuntos infinitos.*

El siguiente enunciado se usa con frecuencia para decidir si un conjunto de números reales es finito.

Proposición 2.3.6. *Algunas propiedades de los conjuntos finitos son:*

I. *Si n es un natural, todo subconjunto de $S(n)$ es finito.*

II. *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

III. *Si A es un conjunto no vacío y existe un natural n y una aplicación inyectiva de A en $S(n)$, entonces A es finito.*

IV. *Si A es un conjunto no vacío y existe un natural n y una aplicación sobreyectiva de $S(n)$ sobre A, entonces A es finito.*

Demostración. Demostramos cada una de las afirmaciones:

I. Hacemos inducción sobre n. Para $n = 1$, la afirmación es evidente.

Supongamos que todo subconjunto de $S(n)$ es finito y sea B un subconjunto de $S(n+1)$. Si B es vacío o $B = S(n+1)$, entonces B es finito. Supongamos que B es no vacío y que existe un $m \in S(n+1)$ tal que $m \notin B$. Definimos $f : S(n+1) \longrightarrow S(n+1)$ la aplicación dada por:

$$\begin{cases} f(n+1) = m \\ \\ f(m) = n+1 \\ \\ f(x) = x, \ \forall x \in S(n+1) - \{m, n+1\} \end{cases}$$

Es fácil ver que f es biyectiva luego $f(B)$ es equipotente a B. Dado que $m \notin B$, entonces $f(m) = n+1 \notin f(B)$, por lo que $f(B) \subseteq S(n)$, por lo que $f(B)$ es finito y lo mismo le ocurre a B.

II. Sea B un conjunto finito no vacío de n elementos y sea A un subconjunto no vacío de B.

Si f es una biyección de B en $S(n)$, entonces A y $f(A)$ son equipotentes y al ser $f(A) \subseteq S(n)$ y aplicando I), tenemos que A es finito.

III. Sea A un conjunto finito no vacío y $f : A \longrightarrow S(n)$ inyectiva. Entonces, A es equipotente a $f(A) \subseteq S(n)$, luego A es finito.

IV. Sea $f : S(n) \longrightarrow A$ sobreyectiva. Para cada elemento $a \in A$, el conjunto $B_a = \{m \in S(n) \ : \ f(m) = a\}$ es no vacío, luego por el principio de buena ordenación de los naturales tiene mínimo. Definimos

$$g(a) = \text{mín}\, B_a, \ \forall a \in A$$

Claramente $g(a) \in S(n), \ \forall a \in A$ luego g es una aplicación de A en $S(n)$ y que $f(g(a)) = a, \ \forall a \in A$.

Veamos que g es inyectiva. Sean $a, b \in A$ tales que $g(a) = g(b)$. Entonces,

$$a = f(g(a)) = f(g(b) = b$$

Por lo que g es inyectiva y aplicando III), A es finito.

□

2.4. Conjuntos numerables

Hasta ahora, hemos clasificado los conjuntos en infinitos y finitos, y estos últimos a su vez según el número de elementos. Pretendemos realizar ahora una clasificación de los conjuntos infinitos según su "tamaño". Introducimos en primer lugar a los conjuntos infinitos "más pequeños".

Definición 2.4.1 (Conjunto numerable)**.** Un conjunto A se dice **numerable** si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Es fácil ver que todo conjunto finito, $\mathbb{N}$ y todo conjunto infinito equipotente a $\mathbb{N}$ son numerables. Veremos enseguida que no existen más conjuntos numerables que los citados. Para ello, veamos el siguiente lema:

Lema 2.4.2. *Todo conjunto infinito de números naturales es equipotente a $\mathbb{N}$. De hecho, si A es un tal conjunto, existe una biyección f de $\mathbb{N}$ sobre A verificando que si $n < m$ entonces $f(n) < f(m)$.*

Demostración. Sea $a \in A$; el conjunto $B_a = \{x \in A \ : \ a < x\}$ es no vacío, pues si lo fuese entonces $A \subseteq S(a)$, por lo que A sería finito por la proposición 2.3.6.i. Teniendo en cuenta el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$, definimos para cada $a \in A$

$$g(a) = \text{mín}\, B_a$$

Por lo que $g : A \longrightarrow A - \{\text{mín}\, A\}$ es una aplicación, verificando que

$$a < g(a), \ \forall a \in A$$

Veamos que g es sobreyectiva (De hecho, es biyectiva).

Sea $a \in A - \{\text{mín}\, A\}$. Como el conjunto $B^a = \{x \in A \ : \ x < a\}$ es finito y no vacío ($B^a \subseteq S(a)$), la proposición 2.3.4 nos asegura que dicho conjunto tiene máximo. Sea $b = \text{máx}\, B^a$, por lo que $b \in A$ y $b < a$. Por ser $g(b) = \text{mín}\{x \in A \ : \ b < x\}$, tenemos que $g(b) \leq a$.

Por otra parte, al ser $\text{máx}\, B^a = b < g(b)$ se tiene que $g(b) \notin B^a$ y al ser $g(b) \in A$, concluimos que $a \leq g(b)$. Así, $a = g(b)$ y g es sobreyectiva.

Definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ como sigue:

$$\begin{cases} f(1) = \text{mín}\, A \\ \\ f(n+1) = g(f(n)), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es claro que $f(n) < f(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y es fácil probar por inducción que si n es un número natural, $f(n) < f(n+p)$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Entonces (ver proposición 2.1.7):

$$n, m \in \mathbb{N}, \ n < m \Longrightarrow f(n) < f(m)$$

Y en particular, f es inyectiva (¿Por qué?).

Queda probar que f es sobreyectiva. Si $A - \{f(\mathbb{N})\}$ no fuese vacío, sea c su mínimo. Como $\min A = f(1)$, entonces $c \neq \min A$, por lo que existe $k \in A$ tal que $g(k) = c$. Como $k < g(k) = c$, existe un natural n tal que $f(n) = k$, pero entonces

$$f(n+1) = g(f(n)) = g(k) = c$$

Lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.4.3. *Si A es un conjunto numerable, entonces es finito o equipotente a $\mathbb{N}$.*

Demostración. Si A es vacío, entonces es finito. En otro caso sea $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva. Es claro que A y $f(A)$ son equipotentes. Si $f(A)$ es finito, entonces A también lo es. Si fuera infinito, $f(A) \sim \mathbb{N}$ por el lema anterior, de donde $A \sim \mathbb{N}$. □

La consecuencia fundamental del anterior teorema es que todo conjunto infinito numerable es equipotente a $\mathbb{N}$. Intuitivamente, esto quiere decir que $\mathbb{N}$ es el más "pequeño" conjunto infinito que existe. Aunque aún no es posible probar la existencia de conjuntos no numerables, adelantamos, sin demostrar, que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Teorema 2.4.4. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es no numerable.*

2.5. Ejercicios

Ejercicio 2.5.1. Pruébense las siguientes afirmaciones:

I. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

II. Si $0 < x < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$n < m \Longleftrightarrow x^n > x^m$$

III. Probar que:

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

IV. Probar que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

V. Probar que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

VI. Probar que:

$$3^n - 1 \text{ es par},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

vii. Probar que:

$$n^3 + 5n \text{ es múltiplo de } 6, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

viii. Probar que:

$$3^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 8, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ix. Probar que:

$$n^5 - n \text{ es múltiplo de } 5, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

x. La aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{1\}$ dada por

$$f(n) = n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

es biyectiva.

Ejercicio 2.5.2. Probar que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

Ejercicio 2.5.3. Probar que si A es un conjunto no vacío, es numerable si, y sólo si, existe una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.

Ejercicio 2.5.4. Probar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Ejercicio 2.5.5. Probar que si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.

3. Números enteros y racionales

En los métodos constructivos, partiendo de los números naturales se construyen en tres etapas sucesivas los números enteros, racionales y reales. En los métodos axiomáticos, por el contrario, se admite la existencia de los números reales y los naturales, enteros y racionales aparecen como subconjuntos distinguidos de $\mathbb{R}$. Ya hemos destacado quiénes son los números naturales y en este tema destacaremos quienes son los enteros y los racionales y estudiaremos sus propiedades más importantes.

3.1. Números enteros

Definición 3.1.1. Definimos **el conjunto de los números enteros**, notado por $\mathbb{Z}$, como:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Es fácil ver que la diferencia de dos números naturales es siempre un entero.

En efecto, sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$ entonces $m - n$ es natural por la Proposición 2.1.7, y por tanto, entero. Si $m = n$, entonces $m - n = 0 \in \mathbb{Z}$. Finalmente, si $m < n$, entonces $n - m$ es natural y $m - n = -(n - m) \in \mathbb{Z}$.

Recíprocamente, todo entero p puede expresarse como diferencia de dos naturales. Basta ver que $|p| + 1$ y $|p| - p + 1$ son naturales y que

$$p = |p| + 1 - (|p| - p + 1)$$

Las dos proposiciones siguientes resumen las propiedades de los números enteros que nos interesan destacar.

Proposición 3.1.2. *La suma y producto de números enteros es un número entero.*
Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $a^{-1} \in \mathbb{Z}$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.
Por tanto, $\mathbb{Z}$ es un subanillo de $\mathbb{R}$ pero no un subcuerpo.

Demostración. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $p_1 = m_1 - n_1$ y $p_2 = m_2 - n_2$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$p_1 + p_2 = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)$$
$$p_1 p_2 = (m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + n_1 m_2)$$

Como la suma y producto de naturales es un natural (Corolario 2.1.5.ii), las ecuaciones anteriores expresan $p_1 + p_2$ y $p_1 p_2$ como diferencia de números naturales, por lo $p_1 + p_2, p_1p_2 \in \mathbb{Z}$.

Sea $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ con $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$ y por tanto $a^{-1} \in \mathbb{N}$, por lo que $a = 1$ (Corolario 2.1.5.III). Si $a < 0$, aplíquese el mismo razonamiento para $-a$, obteniéndose $a = -1$. $\square$

Proposición 3.1.3. *Algunas propiedades de $\mathbb{Z}$ son:*

I. *$\mathbb{Z}$ no tiene mínimo.*

II. *Si $p, q \in \mathbb{Z}$ y $p < q$, entonces $p + 1 \leq q$.*

III. *$\mathbb{Z}$ es numerable.*

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

I. Si p es un entero, entonces $p - 1$ es también entero y sabemos que $p - 1 < p$.

II. $q - p$ es un entero mayor estricto que 0, luego es natural, de donde $q - p \geq 1$.

III. Definimos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

$$\begin{cases} f(-n) = 2n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \\ f(0) = 1 \\ \\ f(n) = 2n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es fácil ver que f es inyectiva (de hecho es biyectiva).

$\square$

Eventualmente se utilizarán en lo sucesivo algunas propiedades algebraicas del anillo $\mathbb{Z}$, como por ejemplo, cuestiones de divisibilidad o la descomposición en factores primos de un número entero. Daremos por conocidas estas propiedades, cuya demostración no es propia de un curso de Análisis Matemático.

3.2. Números racionales

Definición 3.2.1. Definimos **el conjunto de los números racionales**, notado por $\mathbb{Q}$, como:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \right\}$$

Es obvio que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Proposición 3.2.2. *$\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Hay que probar que la suma y el producto de racionales es racional y que el inverso de todo racional no nulo es racional. Todo ello se deduce con facilidad de la proposición 3.1.2 y el corolario 2.1.5 (Ver el ejercicio 1.4.1 apartado VI). $\square$

Utilizando la proposición anterior, deducimos que $\mathbb{Q}$ con las operaciones suma y producto determinadas por las de $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo.

La relación de orden de $\mathbb{R}$ determina obviamente una relación de orden total en $\mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado, al igual que $\mathbb{R}$.

A pesar de la gran cantidad de consecuencias que hemos demostrado hasta ahora, por ahora no somos capaces de probar la existencia de números reales no racionales. Veamos algunas propiedades más de $\mathbb{Q}$ antes de poner de manifiesto la necesidad de un último axioma.

Proposición 3.2.3. *Dados $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$. Entonces, el conjunto*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ r < x < s\}$$

es un conjunto infinito.

Demostración. Dado n natural se tiene que $n + 1 > 1 > 0$, luego $0 < \frac{1}{n+1} < 1$ y por tanto, $r < r + \frac{s-r}{n+1} < s$ con lo que

$$r + \frac{s-r}{n+1} \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ dada por

$$f(n) = r + \frac{s-r}{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

que claramente es inyectiva, determina una biyección de $\mathbb{N}$ sobre un subconjunto de A. Por tanto, A es infinito. $\square$

Podríamos pensar que $\mathbb{Q}$ es "mucho más grande" que $\mathbb{N}$. Sin embargo, esto esta lejos de ser cierto.

Proposición 3.2.4. $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. Usando que $\mathbb{Z}$ es numerable, es fácil probar que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es numerable (¡¡Hágase!!, similar al ejercicio 2.5.4). Por tanto, existe una biyección f de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (Teorema 2.4.3).

Sea $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por:

$$g((p, q)) = \frac{p}{q}, \ \forall p \in \mathbb{Z}, \ \forall q \in \mathbb{N}$$

Claramente, g es sobreyectiva, luego $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es sobreyectiva y $\mathbb{Q}$ es numerable (Ver ejercicio 2.5.3). $\square$

Para terminar, veamos que es necesario introducir un nuevo axioma para probar la existencia de números reales no racionales.

Proposición 3.2.5. *No existe ningún número racional r tal que $r^2 = 2$.*

Demostración. Supongamos que existe $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $mcd(p,q) = 1$, tal que $r^2 = 2$.

Entonces, $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$. Deducimos que p^2 es par, de donde p es par. Sea $p = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$2q^2 = 4k^2 \Longrightarrow q^2 = 2k^2$$

Y razonando igual que antes, q es par. Pero entonces p y q son ambos pares y $mcd(p,q) = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe ningún racional r tal que $r^2 = 2$. □

3.3. Ejercicios

Ejercicio 3.3.1. Probar que si p es un entero no nulo, entonces:

$$-1 \leq \frac{1}{p} \leq 1$$

Ejercicio 3.3.2. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{m} \Leftrightarrow pm < qn \Leftrightarrow pm - qn \in \mathbb{N}$$

($\mathbb{N}$ determina el orden de $\mathbb{Q}$).

Ejercicio 3.3.3. Dados n natural y r racional positivo tales que $r^2 = n$, probar que $r \in \mathbb{N}$.

4. El último axioma

Ya hemos visto que existen conjuntos de números reales que no tienen máximo ni mínimo. $\mathbb{R}$ no tiene máximo ni mínimo. El conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\}$$

tampoco tiene máximo ni mínimo. Sin embargo, a diferencia de $\mathbb{R}$, existen números reales mayores que todos los elementos de A y menores que todos los elementos de A. A continuación, damos nombres a estos números reales. Merece la pena hacer notar que estas definiciones pueden hacerse en cualquier cuerpo ordenado.

4.1. Mayorantes, minorantes, supremo e ínfimo

Definición 4.1.1. Sea A un conjunto no vacío de números reales.

I. Diremos que un número real x es **mayorante** de A si verifica:

$$x \geq a, \ \forall a \in A$$

II. Diremos que un número real x es **minorante** de A si verifica:

$$x \leq a, \ \forall a \in A$$

Nótese que, a diferencia del máximo y del mínimo de un conjunto, un mayorante o minorante de un conjunto no tiene por qué pertencer al conjunto. De hecho, el máximo (respectivamente mínimo) de un conjunto A es mayorante (respectivamente minorante) de dicho conjunto y un mayorante (respectivamente minorante) del conjunto A es máximo (respectivamente mínimo) si, y sólo si, pertenece a A.

Si un conjunto admite mayorantes, diremos que está **mayorado**. Si un conjunto admite minorantes, diremos que está **minorado**. Si un conjunto de números reales está a la vez mayorado y minorado, diremos que está **acotado**.

Dado un conjunto de números reales A, notaremos $M(A)$ al conjunto de sus mayorantes y $m(A)$ al conjunto de sus minorantes. Nótese que si A está mayorado, el conjunto $M(A)$ es infinito, y lo mismo le ocurre a $m(A)$ si A está minorado.

El siguiente lema puede ser de ayuda para determinar todos los mayorantes y minorantes de un conjunto.

Lema 4.1.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Entonces, $a \leq b$.*

Demostración. Si fuera $a > b$, tomando $\varepsilon = a - b$, tenemos que:

$$a < b + \varepsilon = b + (a - b) = a$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $a \leq b$. □

Ejemplo. Utilizando el lema anterior, es fácil ver que

$$M(\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x\}$$
$$m(\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 0\} = \mathbb{R}_0^-$$

Definición 4.1.3. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Si A está mayorado y el conjunto de los mayorantes de A tiene mínimo, se define el **supremo** de A como el mínimo del conjunto de mayorantes de A. Análogamente se define el **ínfimo** de un conjunto como el máximo del conjunto de sus minorantes supuesto que exista.

Claramente el supremo y el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos y son respectivamente un mayorante y un minorante del mismo. Notaremos $\sup A$ e $\inf A$, respectivamente. Volviendo al ejemplo anterior, tenemos que

$$\sup\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\} = 1$$
$$\inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\} = 0$$

$$\sup \mathbb{R}^- = \sup \mathbb{R}_0^- = 0; \ \ \inf \mathbb{R}^+ = \inf \mathbb{R}_0^+ = 0;$$

La relación existente entre el supremo y el máximo de un conjunto y la relación entre el mínimo y el ínfimo, se especifican a continuación.

Proposición 4.1.4. *Sea A un conjunto no vacío de números reales.*

I. *Si A tiene máximo, entonces tiene supremo y* $\sup A = \max A$.

II. *Si A tiene mínimo, entonces tiene ínfimo e* $\inf A = \min A$.

III. *Supongamos que A tiene supremo.*

- *Si* $\sup A \in A$, *A tiene máximo y* $\sup A = \max A$.
- *Si* $\sup A \notin A$, *A no tiene máximo.*

IV. *Análogo a III) cambiando "supremo" por "ínfimo" y "máximo" por "mínimo".*

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

I. Si x es mayorante de A, $a \leq x$, $\forall a \in A$ y cómo $\max A \in A$ y $\max A \leq x$, tenemos que $\max A$ es el mínimo de los mayorantes de A, es decir, $\sup A = \max A$.

II. Análoga a I).

III. Si $\sup A \in A$, $\sup A$ es un mayorante que pertenece a A, luego es el máximo de A. Si $\sup A \notin A$, supongamos que A tuviese máximo. Por I), $\sup A = \max A \in A$, lo cual es absurdo.

IV. Análoga a IV).

□

Proposición 4.1.5 (Caracterización del supremo y del ínfimo)**.** *Sean A un conjunto no vacío de números reales y $x \in \mathbb{R}$. Entonces:*

I. *Respecto al supremo,*

$$x = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \ \forall a \in A \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : \ a > x - \varepsilon \end{cases}$$

II. *Respecto al ínfimo,*

$$x = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \ \forall a \in A \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : \ a < x + \varepsilon \end{cases}$$

Demostración. Demostramos el primer apartado, ya que el segundo es análogo. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Si $x = \sup A$, x es mayorante de A y dado $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ no puede ser mayorante de A, luego $\exists a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon$.

$\Longleftarrow$) Por hipótesis, x es un mayorante de A. Sea y un mayorante cualquiera de A. Si fuera $y < x$, tomando $\varepsilon = x - y$, tenemos que $\exists a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon = x - (x - y) = y$, lo cual es absurdo, pues y es un mayorante de A. Así, $x \leq y$, lo que prueba que x es el mínimo de los mayorantes de A.

□

4.2. El axioma del supremo.

El siguiente axioma, en unión con los axiomas A, B y C, que se resumían diciendo que $\mathbb{R}$ era un cuerpo conmutativo totalmente ordenado, completa la axiomática que define el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Axioma del supremo
Todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.

Nótese que para que un conjunto de números reales tenga supremo, debe ser no vacío y mayorado. El axioma del supremo nos garantiza que estas condiciones, trivialmente necesarias, son también suficientes. Cabría preguntarse porque no se exige también un "axioma del ínfimo". La respuesta es que no es necesario, pues puede deducirse directamente del axioma del supremo. Veámoslo:

Proposición 4.2.1 (Principio del ínfimo)**.** *Todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo.*

Demostración. Sea A un conjunto de números reales no vacío y minorado. Si consideramos el conjunto

$$-A := \{-x \ : \ x \in A\}$$

Es fácil ver que

$$m \in m(A) \iff m \leq a, \ \forall a \in A \iff -m \geq -a, \ \forall a \in A \iff -m \in M(-A)$$

Lo que prueba que A está minorado si, y sólo si, $-A$ está mayorado. Sea $h = \sup(-A)$; como h es mayorante de $-A$, $-h$ es minorante de A. Dado m minorante de A, tenemos que $-m$ es mayorante de $-A$, luego $h \leq -m \iff -h \geq m$ y así, $-h = \text{ínf}\, A$. □

Nótese que hemos probado que si A es un conjunto de números reales no vacío y minorado, $-A$ está mayorado y se tiene:

$$\text{ínf}\, A = -\sup(-A)$$

Cambiando A por $-A$, si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, $-A$ está minorado y se tiene:

$$\sup A = -\,\text{ínf}(-A)$$

Corolario 4.2.2. *Todo conjunto de números reales no vacío y acotado tiene supremo e ínfimo.*

4.3. Primeras consecuencias del axioma del supremo

Teorema 4.3.1 (Propiedad Arquimediana[1] del Orden de $\mathbb{N}$)**.** *El conjunto de los números naturales no está mayorado.*

Demostración. Si lo estuviera, sea $m = \sup \mathbb{N}$. Dado n natural, se tiene que $n + 1$ es natural, por lo que $n + 1 \leq m$. Pero entonces $n \leq m - 1$ para todo n natural, por lo que $m - 1$ es un mayorante de $\mathbb{N}$ más pequeño que m, lo cuál es absurdo al ser m el mínimo de los mayorantes. □

Corolario 4.3.2. *Si $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\beta \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\beta = 0$.*

Demostración. Si fuera $\beta \neq 0$, entonces $\beta > 0$, por lo que $\beta^{-1} \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero esto implica que β es un mayorante de $\mathbb{N}$, lo que contradice la Propiedad Arquimediana. Por tanto, ha de ser $\beta = 0$. □

En el tema anterior aún no éramos capaces de probar la existencia de números reales no racionales. Gracias al axioma del supremo, podremos probar la existencia de dichos números.

[1] También conocido como Principio de Arquímedes.

Proposición 4.3.3. *Existe* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\alpha^2 = 2$.

Demostración. Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^+ \ : \ x^2 \leq 2\}$. Es claro que A es un conjunto de números reales no vacío ($1 \in A$) y mayorado ($x \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \leq 25,\ \forall x \in A$, luego $5 \in M(A)$, por ejemplo). Sea $\alpha = \sup A$. Es claro que $\alpha \geq 1$ y queda probar que $\alpha^2 = 2$.

Tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha + \frac{1}{n} > \alpha \Longrightarrow \alpha + \frac{1}{n} \notin A \Longrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2 \tag{4.1}$$

Dado que $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$, entonces

$$\exists a_n \in A \ : \ \alpha - \frac{1}{n} < a_n \tag{4.2}$$

Utilizando las ecuaciones 4.1 y 4.2, vemos que:

$$\alpha^2 - \frac{1+2\alpha}{n} < \alpha^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2\alpha}{n} = \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 < a_n^2 < 2 \leq$$
$$\leq \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2\alpha}{n} \leq \alpha^2 + \frac{1+2\alpha}{n}$$

Y en consecuencia

$$-\left(\frac{1+2\alpha}{n}\right) \leq 2 - \alpha^2 \leq \frac{1+2\alpha}{n}$$

De donde deducimos que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{2-\alpha^2}{1+2\alpha} \leq \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \left|\frac{2-\alpha^2}{1+2\alpha}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Sea $\beta = \left|\dfrac{2-\alpha^2}{1+2\alpha}\right| = \dfrac{|2-\alpha^2|}{1+2\alpha}$. Por lo anterior:

$$\beta \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por la Propiedad Arquimediana, deducimos que

$$\beta = 0 \Longleftrightarrow |2 - \alpha^2| = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 = 2$$

Como queríamos probar. □

Puesto que no existe ningún racional cuyo cuadrado sea 2, deducimos que el número α que aparece en la anterior proposición no es racional. Por tanto, hemos probado la existencia de números reales no racionales. Al conjunto de los números reales no racionales lo llamaremos el **conjunto de los números irracionales**, notaremos $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Teorema 4.3.4 (Densidad de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** *Si* $x, y \in \mathbb{R} \ : \ x < y$, *entonces* $\exists \gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ : \ x < \gamma < y$.

Demostración. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, si uno de ellos es racional y el otro es irracional, basta tomar $\gamma = \frac{x+y}{2}$.

Si ambos son irracionales, sea $z = \frac{x+y}{2}$. Si z es irracional, hacemos $\gamma = z$ y hemos acabado. De lo contrario, basta con tomar $\gamma = \frac{z+y}{2}$.

Si ambos son racionales, sea α el irracional dado por la proposición anterior. Dado que $1 < \alpha$, $\frac{1}{\alpha} < 1$, y basta con tomar $\gamma = x + \frac{y-x}{\alpha}$. □

Teorema 4.3.5 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** *Si* $x, y \in \mathbb{R} \ : \ x < y$*, entonces* $\exists r \in \mathbb{Q} \ : \ x < r < y$.

Demostración. Realizamos la siguiente distinción de casos:

- Supongamos que $0 < x < y$. Dado que $\frac{1}{y-x}$ no puede ser mayorante de $\mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{y-x} < n_0$, de donde $y - x > \frac{1}{n_0}$. Consideramos el siguiente conjunto:
$$P = \{m \in \mathbb{N} \ : \ m > n_0 x\}$$
Es claro que P es no vacío y al ser un subconjunto de $\mathbb{N}$, tiene mínimo. Sea $m_0 = \min P$. Es claro que $m_0 - 1 \leq n_0 x$ y que $m_0 > n_0 x$, por lo que:
$$x < \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \leq x + \frac{1}{n_0} < x + (y - x) = y$$
De donde se tiene que $x < \dfrac{m_0}{n_0} < y$ y basta tomar $r = \frac{m_0}{n_0}$.
- Si fuera $x < 0 < y$, tomamos $r = 0$.
- Si fuera $x < y < 0$, entoces $0 < -y < -x$ y aplicando lo ya demostrado, encontramos $r' \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < r' < -x$, de donde $x < -r' < y$. Basta con tomar $r = -r'$.

□

4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.4.1. Probar los siguientes enunciados:

I. Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado (resp. minorado) tiene máximo (resp. mínimo).

II. Un conjunto no vacío de números enteros está acotado si, y sólo si, es finito.

Ejercicio 4.4.2. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos. Consideramos el siguiente conjunto:
$$C = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}$$
Probar que si A y B están mayorados, también lo está C y se verifica que
$$\sup C = \sup A + \sup B$$

Ejercicio 4.4.3. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos.

I. Si $A \subseteq B$ y B está mayorado, entonces A está mayorado y

$$\sup A \leq \sup B.$$

II. Si $A \subseteq B$ y B está minorado, entonces A está minorado y

$$\text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B.$$

III. Si A y B están mayorados, entonces $A \cup B$ está mayorado y

$$\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}.$$

IV. Si A y B están minorados, entonces $A \cup B$ está minorado y

$$\text{ínf}(A \cup B) = \text{mín}\{\text{ínf}\, A, \text{ínf}\, B\}.$$

V. Si A y B están mayorados y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B$ está mayorado y

$$\sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup A, \sup B\}.$$

VI. Si A y B están minorados y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B$ está minorado y

$$\text{ínf}(A \cap B) \geq \text{máx}\{\text{ínf}\, A, \text{ínf}\, B\}.$$

Ejercicio 4.4.4. Dado $x \in \mathbb{R}$, probar que:

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \ : \ r < x\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ : \ \alpha < x\}$$
$$x = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} \ : \ r > x\} = \text{ínf}\{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ : \ \alpha > x\}$$

Ejercicio 4.4.5. Dado $x \in \mathbb{R}$, probar que:

$$x = \sup\{\in \mathbb{Q} \ : \ r < x\} = \text{ínf}\{\in \mathbb{Q} \ : \ r > x\}$$
$$x = \sup\{\in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ : \ r < x\} = \text{ínf}\{\in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ : \ r > x\}$$

5. Sucesiones de números reales

En este tema nos introduciremos al estudio de las sucesiones de números reales, siendo nuestro principal objetivo conseguir una familiaridad con el concepto de convergencia para dichas sucesiones, uno de los conceptos básicos del Análisis Matemático, que será la herramienta fundamental para el estudio posterior de las funciones reales de variable real.

5.1. Definición y propiedades básicas.

Definición 5.1.1. Sea A un conjunto no vacío. Una **sucesión de elementos de** A es una aplicación de $\mathbb{N}$ en A. En particular, una **sucesión de números reales** es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Nótese que para definir una sucesión de números reales basta con asociar a cada número natural un número real. Así, dado un natural n, al número real $f(n)$, que notaremos por x_n, lo llamaremos **término n-ésimo** de la sucesión $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(n) = x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En vez de referirnos a esta sucesión por f, emplearemos la notación $\{x_n\}$ para aludir a ella. Así, por ejemplo, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es la sucesión $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(n) = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Antes de seguir, merece la pena remarcar que no debe confundirse la sucesión $\{x_n\}$ con el conjunto de sus términos, $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas por

$$x_1 = 0; \ x_n = 1, \ \forall n \geq 2$$
$$y_1 = 1; \ y_n = 0, \ \forall n \geq 2$$

son sucesiones diferentes[1], pero

$$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$$

por lo que los conjuntos de los términos de ambas sucesiones coinciden.

Definición 5.1.2. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es **convergente al número real** $x \in \mathbb{R}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ \text{Si } n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

[1]Evidentemente, diremos que dos sucesiones, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, son iguales si $x_n = y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que a partir de un término x_m en adelante (en general, m depende del término ε escogido) la distancia entre x y un término x_n cualquiera tal que $n \geq m$ es menor que ε.

Ejemplo. Probar que $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \text{Sea } m \in \mathbb{N},\ m > \frac{1}{\varepsilon}\ :\ \text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

lo cual es cierto por la elección de m, y sabiendo que $n \geq m$.

A continuación, veremos que si existe tal x de la definición anterior, necesariamente es único. Diremos entonces que x es el **límite de la sucesión** $\{x_n\}$ o que la sucesión $\{x_n\}$ **converge** a x, escribiremos $x = \lim\{x_n\}$ o también $\{x_n\} \longrightarrow x$.

Lema 5.1.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$\{x_n\} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \{x_n - x\} \longrightarrow 0$$

Demostración. Es trivial, ya que la expresión de la convergencia de ambas sucesiones a su límite es idéntica.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ \text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

□

Proposición 5.1.4 (Unicidad del límite de una sucesión convergente)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$ y $\{x_n\} \longrightarrow y$, entonces $x = y$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \neq y$. Sea $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$. Por ser $\{x_n\} \longrightarrow x$, tenemos que

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}\ :\ \text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

y por ser $\{x_n\} \longrightarrow y$, tenemos que

$$\exists m_2 \in \mathbb{N}\ :\ \text{Si } n \in \mathbb{N},\ n \geq m_2 \Longrightarrow |x_n - y| < \varepsilon$$

Sea $m = \max\{m_1, m_2\}$. Si $n \geq m$, entonces:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon = |x - y|$$

Lo que es una contradicción. Por tanto, ha de ser $x = y$, como queríamos probar. □

Proposición 5.1.5. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$. Entonces $\{|x_n|\} \longrightarrow |x|$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq m$, entonces $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$, lo que prueba que $\{|x_n|\} \longrightarrow |x|$. □

Es fácil probar que el recíproco no es cierto. Basta con considerar la sucesión $\{(-1)^n\}$ y ver que no es convergente, pero la sucesión $\{|(-1)^n|\}$=$\{1\}$ que claramente converge a 1 por ser constante, como podemos ver a continuación.

Definición 5.1.6. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es **constante** si $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n = a, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.1.7. *Toda sucesión constante* $\{x_n\} = \{a\}$ *es convergente, con* $\lim\{x_n\} = a$.

Demostración. Por la definición de convergencia:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ \text{Si } n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \Longrightarrow |a - a| = 0 < \varepsilon$$

□

5.2. Sucesiones acotadas

Definición 5.2.1. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

- Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ está **mayorada** si el conjunto $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ está mayorado.

- Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ está **minorada** si el conjunto $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ está minorado.

- Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ está **acotada** si está mayorada y minorada.

Proposición 5.2.2. *Toda sucesión de números reales convergente está acotada.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \longrightarrow x$. Para $\varepsilon = 1$, tenemos que

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow |x_n - x| < 1$$

Con lo que para $n \geq m$:

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Lo que prueba que el conjunto $\{x_n \ : \ n \geq m\}$ está acotado. Ello implica que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, pues el conjunto $\{x_n \ : \ n < m\}$ es finito, luego está acotado (Proposición 2.3.4). Por lo tanto (ejercicio 4.4.3), el conjunto

$$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \ : \ n < m\} \cup \{x_n \ : \ n \geq m\}$$

está acotado. □

Nótese que el recíproco de la proposición anterior no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente aunque está acotada.

5.3. Propiedades de las sucesiones convergentes

A continuación, vamos a analizar la relación entre la convergencia de sucesiones de números reales con las 3 estructuras básicas de la axiomática de $\mathbb{R}$: Suma, producto y orden. Se obtendrán las primeras reglas elementales para el cálculo de límites de sucesiones de números reales.

- Definimos la sucesión suma de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ como una nueva sucesión $\{z_n\}$ tal que
$$z_n = x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
- Definimos la sucesión opuesta de $\{x_n\}$ como una nueva sucesión $\{z_n\} = \{-x_n\}$ tal que
$$z_n = -x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
- Definimos la sucesión producto de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ como una nueva sucesión $\{z_n\}$ tal que
$$z_n = x_n \cdot y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
- Si $x_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión inversa como una nueva sucesión $\{z_n\}$ tal que
$$z_n = \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposición 5.3.1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sean $\{x_n\} \longrightarrow x$ e $\{y_n\} \longrightarrow y$. Entonces, se tiene que $\{x_n + y_n\} \longrightarrow x + y$.*

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergentes, se tiene que

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists m_2 \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_2 \Longrightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$. Si $n \geq m$, entonces:

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo que $\{x_n + y_n\} \longrightarrow x + y$. □

Proposición 5.3.2. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\{x_n\} \longrightarrow x$. Entonces, se tiene que $\{-x_n\} \longrightarrow -x$.*

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\}$ convergente, se tiene que

$$\exists m_m \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Para el mismo m, se tiene que:

$$|-x_n - (-x)| = |-(x_n - x)| = |x_n - x| < \varepsilon$$

Por lo que $\{-x_n\} \longrightarrow -x$. □

Proposición 5.3.3. *Sean* $\{x_n\} \longrightarrow 0$ *e* $\{y_n\}$ *una sucesión acotada. Entonces, se tiene que* $\{x_n \cdot y_n\} \longrightarrow 0$.

Demostración. Por ser $\{y_n\}$ acotada, vemos que

$$\exists M > 0 \ : \ |y_n| < M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\} \longrightarrow 0$,

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \Longrightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Por tanto, si $n \geq m$, tenemos que

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Por lo que $\{x_n \cdot y_n\} \longrightarrow 0$. □

Proposición 5.3.4. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y sean* $\{x_n\} \longrightarrow x$ *e* $\{y_n\} \longrightarrow y$. *Entonces, se tiene que* $\{x_n y_n\} \longrightarrow xy$.

Demostración.

$$\{x_n y_n - xy\} = \{x_n y_n - x_n y + x_n y - xy\} = \{x_n(y_n - y)\} + \{(x_n - x)y\} \longrightarrow 0 + 0 = 0$$

Donde hemos usado la proposición anterior para ver que la sucesión $\{x_n(y_n - y)\}$ converge a 0 y que $\{x_n\} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \{x_n - x\} \longrightarrow 0$ (lema 5.1.3) en la segunda sucesión.

Por lo tanto, $\{x_n y_n\} \longrightarrow xy$. □

Proposición 5.3.5. *Sea* $x \neq 0$ *y* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales tal que* $\{x_n\} \longrightarrow x$ *y* $x_n \neq 0$ *para todo natural* n. *Entonces,* $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow \dfrac{1}{x}$.

Demostración. Al ser $\{x_n\} \longrightarrow x$ y $x_n \neq 0$, tenemos que:

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$

De donde si $n \geq m$ se verifica

$$|x_n| = |x - (x - x_n)| \geq |x| - |x - x_n| > \frac{|x|}{2}$$

por lo que $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|x|}$, de donde deducimos que la sucesión $\{\frac{1}{x_n}\}$ está acotada. Finalmente, vemos que

$$\left\{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{x - x_n}{x}\frac{1}{x_n}\right\}$$

Y al ser $\left\{\dfrac{x - x_n}{x}\dfrac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow 0$, tenemos que $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow \dfrac{1}{x}$. □

Corolario 5.3.6. *Sean* $\{x_n\} \longrightarrow x$ *e* $\{y_n\} \longrightarrow y$*, con* $y \neq 0$ *y* $y_n \neq 0$ *para todo natural* n*. Entonces,* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \longrightarrow \dfrac{x}{y}$.

Proposición 5.3.7. *Sean* $\{x_n\} \longrightarrow x$ *e* $\{y_n\} \longrightarrow y$*. Si* $x < y$*, entonces existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq m$*, entonces* $x_n < y_n$.

Demostración. Sean $x < y$ y sea $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$. Notemos que $x + \varepsilon = y - \varepsilon$. Por convergencia de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, entonces:

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_2 \Longrightarrow y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$$

Sea $m = \max\{m_1, m_2\}$. Si $n \geq m$, entonces:

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon = y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$$

Por lo que $x_n < y_n$ para todo $n \geq m$. □

Lema 5.3.8 (Lema de sucesiones encajadas o "Lema del sandwich")**.** *Sea* $x \in \mathbb{R}$*. Sean* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *sucesiones de números reales tales que* $\{x_n\} \longrightarrow x$*,* $\{z_n\} \longrightarrow x$ *y existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < y_n < z_n$ *para todo* $n \geq m_0$*. Entonces,* $\{y_n\} \longrightarrow x$.

Demostración. Por convergencia de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$, entonces:

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon,$$
$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_2 \Longrightarrow x - \varepsilon < z_n < x + \varepsilon.$$

Por hipótesis,

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_0 \Longrightarrow x_n < y_n < z_n.$$

Sea $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$. Si $n \geq m$, entonces:

$$x - \varepsilon < x_n < y_n < z_n < x + \varepsilon \Longrightarrow x - \varepsilon < y_n < x + \varepsilon$$

Por lo que $\{y_n\} \longrightarrow x$. □

Proposición 5.3.9 (Caracterización del supremo con sucesiones)**.** *Sea* A *un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Entonces,* $\alpha = \sup A$ *si, y sólo si,* $\alpha \in M(A)$ *y existe una sucesión de elementos de* A *convergente a* α.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) La sucesión $\left\{\alpha - \frac{1}{n}\right\}$ converge a α. Por ser α el supremo de A, tenemos que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in A \ : \ \alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha$$

y por el lema anterior, $\{a_n\} \longrightarrow \alpha$.

$\Longleftarrow$) Sea α un mayorante de A y sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de A convergente a α. Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon.$$

Por tanto, tenemos que $\alpha \geq a$, $\forall a \in A$ y que $\forall \varepsilon > 0$ existe $a_n \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_n$, lo que prueba que $\alpha = \sup A$.

□

La proposición anterior nos dice que el único mayorante de un conjunto de números reales no vacío y mayorado que puede ser límite de una sucesión de elementos de dicho conjunto es el supremo. Es fácil deducir que el único minorante que puede ser límite de una sucesión de elementos de un conjunto de números reales no vacío y minorado es el ínfimo.

5.4. Ejercicios

Ejercicio 5.4.1. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales acotadas. Probar que las sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ están acotadas.

Ejercicio 5.4.2. Dar un ejemplo de 2 sucesiones de números reales, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, no convergentes tales que $\{x_n + y_n\}$ sea convergente.

Ejercicio 5.4.3. Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo. Probar que existen 4 sucesiones $\{r_n\}$, $\{q_n\}$, $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$, con $\{r_n\}$, $\{q_n\}$ sucesiones en $\mathbb{Q}$ y $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ convergentes a x tales que:

$$r_n < x < q_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\alpha_n < x < \beta_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 5.4.4. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y p un número natural. Definimos la sucesión $\{z_n\}$ tal que

$$z_n = x_{n+p}, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{x_n\}$ converge, si y sólo si, $\{z_n\}$ converge, en cuyo caso

$$\text{lím}\{x_n\} = \text{lím}\{z_n\} = \text{lím}\{x_{n+p}\}$$

6. Sucesiones monótonas, parciales y de Cauchy

6.1. Sucesiones monótonas

Definición 6.1.1. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es **creciente** (respectivamente **decreciente**) si $x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \geq\ x_{n+1}$, $\forall n \in\ \mathbb{N}$).

Definición 6.1.2. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es **estrictamente creciente** (respectivamente **estrictamente decreciente**) si $x_n < x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$).

Definición 6.1.3. Se dice que una sucesión de números reales es **monótona** cuando es creciente o decreciente. Si el crecimiento o decrecimiento es estrico, diremos que es **estrictamente monótona**.

Toda sucesión estrictamente monótona es monótona, pero el recíproco no es cierto. Las sucesiones constantes también son monótonas, pues cumplen con la definición de sucesión creciente (también la de decreciente). Es fácil ver que el que una sucesión sea monótona no implica que sea convergente en general. Vamos a ver la relación entre convergencia, acotación y monotonía en el siguiente teorema:

Teorema 6.1.4. *Toda sucesión de números reales $\{x_n\}$ creciente y mayorada es convergente con* $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Sea $\alpha = \sup\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ \alpha - \varepsilon < x_m$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, entonces:

$$\alpha - \varepsilon < x_m \leq x_n \implies \alpha - \varepsilon < x_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

Por lo que $\lim\{x_n\} = \alpha$, como queríamos. □

Análogamente, es fácil probar que toda sucesión de números reales decreciente y minorada es convergente con con $\lim\{x_n\} = \inf\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

Corolario 6.1.5. *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

6.2. Sucesiones parciales

Definición 6.2.1. Se dice que una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es **estrictamente creciente** si

$$\sigma(n) < \sigma(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es inmediato comprobar que $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente si y sólo si

$$n, m \in \mathbb{N},\ n < m \implies \sigma(n) < \sigma(m)$$

Definición 6.2.2. Dadas dos sucesiones de números reales $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, diremos que $\{y_n\}$ es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$ si existe $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, la sucesión $\{1\}$ (constantemente igual a 1) es una parcial de $\{(-1)^n\}$ (Tómese $\sigma(n) = 2n$). En general, las sucesiones parciales de $\{x_n\}$ son de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$, con σ una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente.

Las siguientes afirmaciones son de comprobación inmediata:

- Toda sucesión es una parcial de sí misma.
- Si $\{y_n\}$ es una parcial de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ es una parcial de $\{y_n\}$, entonces $\{z_n\}$ es una parcial de $\{x_n\}$ (Piénsese que la composición de aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente crecientes es a su vez estrictamente creciente).

Lema 6.2.3. *Sea $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente. Entonces, se tiene que $\sigma(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Hacemos inducción sobre n. Obviamente $\sigma(1) \geq 1$. Supuesto que $\sigma(n) \geq n$ para un cierto n natural, tenemos que

$$\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n \implies \sigma(n+1) \geq n+1$$

donde se ha usado el Corolario 2.1.8, lo que demuestra el lema. □

Proposición 6.2.4. *Cualquier sucesión parcial de una sucesión de números reales convergente es convergente y tiene el mismo límite*[1].

Demostración. Sea $\{x_n\} \longrightarrow x$ y sea $\{y_n\}$ una sucesión parcial de la anterior. Sea $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente tal que

$$\{x_{\sigma(n)}\} = \{y_n\},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\} \longrightarrow x$ tenemos

$$\exists m \in \mathbb{N} \ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

[1] Este resultado nos asegura que si una sucesión converge, cualquier parcial suya también lo hará y con el mismo límite. En general, que una sucesión admita una parcial convergente no implica que la sucesión sea convergente, pero la sucesión $\{z_n\} = \{x_{n+p}\}$, con $p \in \mathbb{N}$, es una sucesión parcial "muy especial", pues su convergencia equivale a la de la sucesión (Como ya se vio en el ejercicio 5.4.4).

Por el lema anterior, si $n \geq m$, entonces $\sigma(n) \geq n \geq m$ y por tanto

$$|y_n - x| = |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$$

por lo que $\{y_n\} \longrightarrow x$, como queríamos probar. $\square$

Lema 6.2.5 (Lema del Sol naciente)**.** *Toda sucesión de números reales admite una parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales cualquiera. Consideramos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \geq x_{n+h}, \ \forall h \in \mathbb{N}\}.$$

Supongamos que el conjunto A es infinito. Entonces, aplicando el Lema 2.4.2, obtenemos una aplicación $\sigma \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$. Dado un natural n arbitrario, se tiene que

$$x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)+h}, \ \forall h \in \mathbb{N}$$

y en particular, tomando $h = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ se tiene que

$$x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial decreciente.

Si A fuera finito, sea m un natural tal que $A \subseteq S(m)$. Dado p natural, con $p > m$, definimos

$$g(p) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \ : \ n > p, \ x_p < x_n\}.$$

Notemos que el conjunto de la derecha es no vacío por ser $p \notin A$, luego por el principio de buena ordenación tiene mínimo. Claramente $g(p) > p > m$, por lo que g es una aplicación del conjunto $\mathbb{N} - S(m)$ en sí mismo. Definimos ahora $\sigma \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ por inducción de la siguiente forma:

$$\sigma(1) = m + 1, \ \sigma(n+1) = g(\sigma(n)), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Evidentemente $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ para todo n natural, luego σ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente, por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Además, por ser $x_{g(p)} > x_p$ para todo $p \in \mathbb{N} - S(m)$, tenemos que

$$x_{\sigma(n+1)} = x_{g(\sigma(n))} > x_{\sigma(n)}$$

por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente. $\square$

Como consecuencia directa del lema anterior, obtenemos una importante propiedad de las sucesiones de números reales acotadas.

Teorema 6.2.6 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión de números reales acotada admite una parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Aplicando el lema anterior, obtenemos una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Dado que $\{x_{\sigma(n)}\}$ también está acotada ($\{x_{\sigma(n)} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$). Por tanto, por el corolario 6.1.5, se tiene que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente. $\square$

6.3. Sucesiones de Cauchy

Hasta ahora, salvo en el caso de sucesiones monótonas y acotadas, para determinar si una sucesión era o no convergente debíamos conocer de antemano su posible límite. Dedicamos este apartado para obtener una caracterización de las sucesiones convergentes sin presuponer el conocimiento de un posible límite.

Intuitivamente, si una sucesión de números reales es convergente, sus términos suficientemente avanzados son tan cercanos como se quiera. Formalizamos esta idea a continuación.

Definición 6.3.1. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si verifica:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Teorema 6.3.2 (de Complitud de $\mathbb{R}$)**.** *Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\} \longrightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m \implies |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, dados $p, q \in \mathbb{N}$, con $p, q \geq m$ tenemos

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon$$

por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Entonces

$$\exists m \in \mathbb{N}\ :\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < 1.$$

Tomando $K = x_m$ y haciendo $q = m$ se tiene

$$p \geq m \implies K - 1 < x_p < K + 1$$

luego $\{x_n\ :\ n \geq m\}$ es un conjunto acotado, por lo que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\}$. Sea $x = \text{lím}\{x_{\sigma(n)}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \implies |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists m_2 \in \mathbb{N}\ :\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq m_2 \implies |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$. Si $n \geq m$, entonces

$$\sigma(n) \geq n \geq m_1 \implies |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n, \sigma(n) \geq m_2 \implies |x_n - x_{\sigma(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

con lo que finalmente

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$$

por lo que $\{x_n\} \longrightarrow x$, como queríamos. □

6.4. Límites superior e inferior de una sucesión

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales acotada, entonces $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$A \leq x_n \leq B, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definimos las sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ como sigue:

$$\alpha_n = \text{ínf}\{x_k \ : \ k \geq n\}$$
$$\beta_n = \sup\{x_k \ : \ k \geq n\}$$

Es fácil ver que

$$A \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq B, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

que $\{\alpha_n\}$ es creciente y que $\{\beta_n\}$ es decreciente, luego ambas sucesiones son convergentes verificando que $\text{lím}\{\alpha_n\} \leq \text{lím}\{\beta_n\}$.

Definición 6.4.1. Sea $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales acotada. Definimos el **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$, notaremos $\text{lím sup}\{x_n\}$, como sigue:

$$\text{lím sup}\{x_n\} := \text{lím}\{\beta_n\}$$

Análogamente, definimos el **límite inferior** de la sucesión $\{x_n\}$, notaremos $\text{lím inf}\{x_n\}$, como sigue:

$$\text{lím inf}\{x_n\} := \text{lím}\{\alpha_n\}$$

Proposición 6.4.2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales acotada y $L \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\{x_n\} \longrightarrow L \Longleftrightarrow \text{lím inf}\{x_n\} = \text{lím sup}\{x_n\} = L$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longleftarrow$) Como $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím inf}\{x_n\} = \text{lím sup}\{x_n\} = L$, aplicando el Lema 5.3.8, tenemos que $\{x_n\} \longrightarrow L$.

$\Longrightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ se tiene que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Es claro que

$$\{x_k \ : \ k \geq n\} \subseteq \left]L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right[$$

y usando que

$$\alpha_n = \text{ínf}\{x_k \ : \ k \geq n\} \qquad \wedge \qquad \beta_n = \sup\{x_k \ : \ k \geq n\}$$

entonces

$$\alpha_n \geq L - \frac{\varepsilon}{2} > L - \varepsilon \qquad \wedge \qquad \beta_n \leq L + \frac{\varepsilon}{2} < L + \varepsilon$$

de donde deducimos que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow L - \varepsilon < \alpha_n \leq \beta_n < L + \varepsilon,$$

por lo que $\text{lím inf}\{x_n\} = \text{lím sup}\{x_n\} = L$.

□

6.5. Ejercicios

Ejercicio 6.5.1. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales positivos que sea convergente a 0, pero no sea monótona.

Ejercicio 6.5.2. Dar un ejemplo de una sucesión no acotada que admita una parcial convergente.

Ejercicio 6.5.3. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Probar que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 6.5.4. Sea $0 < x < 1$. Probar que $\{x^n\} \longrightarrow 0$.

Ejercicio 6.5.5. Sea $-1 < x < 1$. Probar que $\{x^n\} \longrightarrow 0$ y que

$$\{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\} \longrightarrow \frac{1}{1 - x}$$

Ejercicio 6.5.6. Sea $x > 1$. Probar que $\{x^n\}$ no está acotada.

Ejercicio 6.5.7. Sea $a > 0$. Definimos la sucesión $\{x_n\}$ como sigue:

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{x_n\} \longrightarrow 0$.

Ejercicio 6.5.8. Probar que la sucesión $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ es convergente y calcular su límite.

Ejercicio 6.5.9. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 2; \ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 6.5.10. Considera la sucesión

$$x_1 = 1; \ x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Calcular $\lim\{x_n\}$ y $\lim\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}$.

Ejercicio 6.5.11. Sea $a > 1$ fijo. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 6.5.12. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1, \ x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + 2x_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 6.5.13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada y sean $M, P \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup\{x_n\} < M$ y que $\liminf\{x_n\} > P$.

Probar que

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \ : \ n \in m_1 \Longrightarrow x_n < M$$
$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \ : \ n \in m_2 \Longrightarrow x_n > P$$

7. Sucesiones divergentes

7.1. Definiciones básicas

Definición 7.1.1. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ **diverge positivamente** si

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \implies x_n > K.$$

Escribiremos $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$.

En la definición se exige que todos los números reales cumplan una determinada condición. Es claro que si la condición anterior se cumple para un cierto $K \in \mathbb{R}$, también se cumple para cualquier número real menor que él. Por tanto, para que una sucesión de números reales diverja positivamente, basta con que dicha condición sea cierta para un conjunto de números reales no mayorado, como $\mathbb{R}^+$. Por ello, es usual poner en la definición "$\forall K \in \mathbb{R}^+$".

Definición 7.1.2. Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ **diverge negativamente** si

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \implies x_n < K.$$

Escribiremos $\{x_n\} \longrightarrow -\infty$.

Por un razonamiento similar al de la aclaración anterior, basta con exigir que la condición sea cierta para un conjunto de números reales no minorado, como como $\mathbb{R}^-$. Por ello, es usual poner en la definición "$\forall K \in \mathbb{R}^-$".

Definición 7.1.3. Diremos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ **diverge** cuando diverja positivamente o negativamente, escribiremos $\{|x_n|\} \longrightarrow +\infty$.

Es obvio que toda sucesión de números reales divergente es no acotada, pero merece la pena destacar que existen sucesiones de números reales que, **a pesar de no estar acotadas, no son divergentes**.

Aunque la gran mayoría de resultados de este tema se proponen como ejercicio, vamos a ver un resultado que nos será de utilidad más adelante.

Teorema 7.1.4. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que $\{x_n\}$ diverge positivamente y que $\{y_n\}$ verifica la siguiente condición:*

$$\exists \varepsilon > 0, \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ n \geq p \implies y_n > \varepsilon$$

Entonces $\{x_n y_n\} \longrightarrow +\infty$.

Demostración. Dado $K > 0$, por ser $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$, podemos encontrar un natural q tal que para $n \geq q$ se tenga $x_n > \frac{K}{\varepsilon}$. Tomando $m = \max\{p, q\}$ tenemos

$$n \geq m \Longrightarrow x_n y_n > \frac{K}{\varepsilon}\varepsilon = K$$

lo que prueba que $\{x_n y_n\} \longrightarrow +\infty$, como queríamos. □

7.2. Ejercicios

Probar los siguientes resultados:

Ejercicio 7.2.1. Si $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$, entonces $\{x_n\}$ está minorada.

Ejercicio 7.2.2. Si $\{x_n\} \longrightarrow -\infty$, entonces $\{x_n\}$ está mayorada.

Ejercicio 7.2.3. Probar que

$$\{x_n\} \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow \{-x_n\} \longrightarrow -\infty.$$

Ejercicio 7.2.4. Si $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, $\{x_n + y_n\} \longrightarrow +\infty$.

Ejercicio 7.2.5. Si $\{x_n\} \longrightarrow -\infty$ e $\{y_n\}$ está mayorada, $\{x_n + y_n\} \longrightarrow -\infty$.

Ejercicio 7.2.6. Si $\{x_n\}$ es divergente y $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n + y_n\}$ diverge.

Ejercicio 7.2.7. Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen ambas positivamente o ambas negativamente, entonces $\{x_n y_n\} \longrightarrow +\infty$.

Ejercicio 7.2.8. Si $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \longrightarrow -\infty$, entonces $\{x_n y_n\} \longrightarrow -\infty$.

Ejercicio 7.2.9. Si $\{x_n\} \longrightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \longrightarrow y > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \longrightarrow +\infty$.

Ejercicio 7.2.10. Si $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\{x_n\} \text{ diverge} \Longleftrightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow 0.$$

Ejercicio 7.2.11. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no nulos. Entonces, $\{x_n\}$ converge a cero si, y sólo si, la sucesión $\left\{\frac{1}{|x_n|}\right\}$ diverge positivamente.

8. Criterios de convergencia de sucesiones

En este tema veremos algunos criterios de convergencia básicos para sucesiones. Algunos de ellos los daremos sin demostrar, pues requieren de herramientas que aún no hemos introducido en estos apuntes, por lo que si el lector está interesado en conocer las demostraciones, se le recomienda buscar en la bibliografía recomendada en la guía docente de la asignatura.

8.1. Criterios de convergencia

Teorema 8.1.1 (Criterio de Stolz)**.** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales con $\{b_n\}$ estrictamente creciente y divergente positivamente. Entonces:*

$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} \longrightarrow L \implies \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L, \qquad L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Ejemplo. Estudia la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right\}$.

Sean $\{a_n\} = \{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\}$ y $\{b_n\} = \{n^4\}$. Es fácil ver que $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y que diverge positivamente, por lo que podemos aplicar el criterio de Stolz.

$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}\right\} = \left\{\frac{n^3+3n^2+3n+1}{4n^3+6n^2+4n+1}\right\}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^3, tenemos

$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} = \left\{\frac{\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3}}{\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3}}\right\} = \left\{\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right\} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

Por el criterio de Stolz, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \{\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\} \longrightarrow \dfrac{1}{4}$.

Corolario 8.1.2 (Criterio de la media aritmética)**.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Definimos la siguiente sucesión:*

$$\{y_n\} = \left\{\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}\right\}.$$

Entonces:

$$\{x_n\} \longrightarrow L \Longrightarrow \{y_n\} \longrightarrow L, \qquad L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Demostración. Basta con considerar $\{a_n\} = \{x_1 + x_2 + \ldots x_n\}$ y $\{b_n\} = \{n\}$ y aplicar el criterio de Stolz para la sucesión $\{y_n\} = \{\frac{a_n}{b_n}\}$. □

Corolario 8.1.3 (Criterio de las medias geométricas)**.** *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales positivos y sea $\{\beta_n\}$ tal que*

$$\beta_n = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \alpha_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $\{\alpha_n\} \longrightarrow L$, entonces $\{\beta_n\} \longrightarrow L$, $L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

Teorema 8.1.4 (Criterio del cociente para sucesiones)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \longrightarrow L \Longrightarrow \{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L, \qquad L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Demostración. Sea $\alpha_1 = a_1, \ \alpha_2 = \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Por hipótesis, $\{\alpha_n\} \longrightarrow L$. Nótese que

$$\beta_n = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \alpha_n} = \sqrt[n]{a_n}.$$

Aplicando el criterio de las medias geométricas a $\{\alpha_n\}$, tenemos el resultado buscado. □

Ejemplo. Estudia la convergencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$.

Sea $a_n = n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicamos el criterio del cociente:

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\} \longrightarrow 1$$

y por el criterio del cociente, $\{\sqrt[n]{n}\} \longrightarrow 1$.

Antes de dar el último criterio de convergencia, es necesario dar la siguiente definición.

Definición 8.1.5. Definimos el **número** e como sigue:

$$e = \text{lím}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Aunque no vamos a demostrarlo, el número e es irracional, y tenemos que

$$e \approx 2,718281828459.$$

Dado $a > 0$, definimos el **logaritmo neperiano de** a, notado por $\ln(a)$[1], como el único número real tal que

$$e^{\ln(a)} = a.$$

Ya estamos en condiciones de dar el último criterio de convergencia de sucesiones de números reales.

[1]Otros autores utilizan la notación $\log(a)$ para el logaritmo neperiano.

Teorema 8.1.6 (Criterio de Euler (o criterio exponencial)[2]). *Sean* $\{x_n\} \longrightarrow 1$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\{y_n\}$ *cualquiera. Entonces*

$$\{y_n(x_n - 1)\} \longrightarrow L \Longleftrightarrow \{x_n^{y_n}\} \longrightarrow e^L$$

con $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Ejemplo. Estudia la convergencia de la sucesión $\{n(\sqrt[n]{2} - 1)\}$.

Sean $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{2}\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$. Dado que $\{x_n\} \longrightarrow 1$ y que $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el criterio de Euler.

$$\{x_n^{y_n}\} = \{(\sqrt[n]{2})^n\} = \{2\}$$

y por tanto, por el criterio de Euler

$$\{x_n^{y_n}\} \longrightarrow 2 \Longleftrightarrow \{n(\sqrt[n]{2} - 1)\} \longrightarrow \ln(2)$$

ya que $2 = e^L \Longleftrightarrow L = \ln(2)$.

8.2. Ejercicios

Ejercicio 8.2.1. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

I. $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$

II. $\left\{\dfrac{2^n + n}{3^n - n}\right\}$

III. $\left\{\dfrac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}\right\}$

IV. $\left\{\dfrac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{n!}\right\}$

V. $\left\{\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}\right\}$

VI. $\{\sqrt[n]{n}\}$

VII. $\left\{\sqrt[n]{n!}\right\}$

VIII. $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}\right\}$

IX. $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

[2] Aunque en estos apuntes no vamos a definir las potencias de exponente real, daremos por conocidas sus propiedades y las de los logaritmos.

X. $\left\{\left(\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\dfrac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

XI. $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n!}{(2n)^{n+1}}}\right\}$

Ejercicio 8.2.2. Sean $a,b\in\mathbb{R}^+$ (fijos). Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left\{(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

Ejercicio 8.2.3. Estudiar la convergencia/divergencia de las siguientes sucesiones:

I. $\{\ln(n)\}$

II. $\left\{\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

III. $\left\{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\}$

IV. $\left\{\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right\}$

V. $\left\{\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n\right\}$

VI. $\left\{\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{n\ln(n+1)}\right\}$

Ejercicio 8.2.4. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

I. $\left\{\dfrac{n\ln(n)}{\ln(n!)}\right\},\quad n>2$

II. $\{n(\sqrt[n]{a}-1)\},\quad a\in\mathbb{R}^+$

III. $\left\{\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right\},\quad a,b\in\mathbb{R}^+,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ :\ \alpha+\beta\neq 0$

9. Series de números reales

9.1. Introducción a las series de números reales

Definición 9.1.1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales cualquiera. Definimos la sucesión $\{A_n\}$ como sigue:

$$A_1 = a_1,\ A_{n+1} = A_n + a_{n+1},\ \forall n \geq 2$$

A la sucesión $\{A_n\}$ la llamaremos **serie de término general** a_n. Usualmente, la notaremos por:

$$\sum_{n\geq 1} a_n$$

Al término $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ lo llamaremos **suma parcial**.

Cuando la serie sea convergente, escribiremos

$$\lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y será denominado por **suma de la serie** o **límite de la serie**.

Veamos ahora algunos ejemplos de series de números reales:

9.2. Algunas series importantes y primeros resultados

Series geométricas[1]: $\sum_{n\geq 1} r^n, \quad r \in \mathbb{R}$

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} r^n = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

La serie geométrica converge si y sólo si $|r| < 1$ y en tal caso se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$$

[1]Ver ejercicios 6.5.3 , 6.5.4, 6.5.5, 6.5.6.

Serie armónica: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

La serie armónica no es convergente. Para verlo, notemos que

$$A_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

En general, es fácil probar que $A_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ para todo n natural, por lo que $\{A_{2^n}\} \longrightarrow +\infty$, y entonces $\{A_n\} \longrightarrow +\infty$.

Serie armónica alternada: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

La serie armónica alternada sí es convergente. La demostración se verá más adelante.

Serie telescópica: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

La serie telescópica sí es convergente. Para verlo, notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

por lo que la serie telescópica es convergente con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Proposición 9.2.1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $\exists m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, tal que, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, entonces $a_n = b_n$. Entonces:*

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{m-1} b_n$$

Demostración. Teniendo en cuenta que para todo $n \geq m$ se verifica la igualdad

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{m-1} b_k$$

deducimos que

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

en cuyo caso, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{m-1} b_n$$

como queríamos probar. □

En particular, dado $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, hemos probado que

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq m} a_n \text{ converge}$$

La proposición anterior nos dice que la convergencia de una serie no se ve afectada al modificar un número finito de términos, aunque (como es lógico) la suma de dicha serie si se verá afectada.

Proposición 9.2.2 (Condición necesaria de convergencia de una serie)**.**

$$\textit{Si } \sum_{n\geq 1} a_n \textit{ converge} \Longrightarrow \{a_n\} \longrightarrow 0$$

Demostración. Supongamos que $\{A_n\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que

$$\{a_n\} = \{A_{n+1} - A_n\} \longrightarrow 0$$

como queríamos demostrar. □

10. Criterios de convergencia de series de términos no negativos

En este tema trataremos el estudio de las series de números reales de términos no negativos. Por ello, si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una serie, consideraremos que $a_n \geq 0$ para todo n natural.

10.1. Criterios de convergencia

Notemos que al ser $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, por lo que:

Proposición 10.1.1 (Criterio básico de convergencia)**.** *Si $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ está mayorada}$$

Proposición 10.1.2 (Criterio de comparación)**.** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales con $a_n, b_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que*

$$\exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Longrightarrow a_n \leq b_n$$

Entonces

$$\text{Si } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge, entonces } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}$$

Demostración. Supongamos que $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge. Usando que

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq m} a_n \text{ converge,}$$

deducimos que

$$\sum_{n\geq m} a_n \leq \sum_{n\geq m} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R},$$

por lo que $\sum_{n\geq 1} a_n$ está mayorada, y en consecuencia, es convergente. □

Corolario 10.1.3 (Criterio límite de comparación)**.** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales con $a_n, b_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Consideramos la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.*

- *Si* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow 0$, *entonces*

$$\textit{Si } \sum_{n\geq 1} b_n \textit{ converge, entonces } \sum_{n\geq 1} a_n \textit{ converge}$$

- *Si* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow +\infty$, *entonces*

$$\textit{Si } \sum_{n\geq 1} a_n \textit{ converge, entonces } \sum_{n\geq 1} b_n \textit{ converge}$$

- *Si* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L > 0$, *entonces*

$$\sum_{n\geq 1} a_n \textit{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \textit{ converge}$$

Demostración. Realizamos la distinción de casos:

- Supongamos que $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow 0$. Entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} < 1 \Longleftrightarrow 0 \leq a_n < b_n$$

  y basta con aplicar el criterio de comparación.

- Supongamos que $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow +\infty$. Entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} > 1 \Longrightarrow a_n > b_n > 0$$

  y basta con aplicar el criterio de comparación.

- Supongamos que $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{L}{2}$.

  Entonces, por convergencia de $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, tenemos que

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Longleftrightarrow \frac{L}{2}b_n < a_n < \frac{3L}{2}b_n.$$

  Teniendo en cuenta que (¿Por qué?)

$$\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{3L}{2}b_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{L}{2}b_n \text{ converge},$$

  aplicando convenientemente el criterio de comparación, tenemos que

$$\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{3L}{2}b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}$$

y también que

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{L}{2} b_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

por lo que

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

como queríamos ver.

□

Proposición 10.1.4 (Criterio de condensación)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente con $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{n\geq 1} a_n \textit{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n} \textit{ converge}$$

Demostración. Sean $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$.

Usando que $\{a_n\}$ es decreciente, tenemos que

$$A_n \leq A_{2^{n+1}-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y entonces

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \leq \\ \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = a_1 + B_n, \end{aligned}$$

por lo que si $\{B_n\}$ está mayorada, $\{A_n\}$ también.

Recíprocamente, para cada n natural tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B_n &= a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \leq \\ &\leq (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) = A_{2^n}, \end{aligned}$$

por lo que si $\{A_n\}$ está mayorada, $\{B_n\}$ también. □

Notemos que ya habíamos usado indirectamente el criterio de condensación para demostrar la no convergencia de la serie armónica. A continuación, veamos un ejemplo de uso del criterio de condensación para estudiar la convergencia de una importante familia de series de números reales relacionada con la serie armónica.

Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideramos la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

Si $\alpha \leq 0$, dicha serie no converge, pues $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ no tiende a 0.

Si $\alpha > 0$, tenemos que $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\} \longrightarrow 0$ y es estrictamente decreciente, por lo que podemos aplicar el criterio de condensación:

$$\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n\geq 1} (2^{1-\alpha})^n$$

que es una serie geométrica con $r = 2^{1-\alpha}$, por lo que

$$\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n} \text{ converge} \Longleftrightarrow 2^{1-\alpha} < 1 \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

y por el criterio de condensación:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

Las series de la forma $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se llaman **series de Riemman**[1].

Proposición 10.1.5 (Criterio de la raíz n-ésima)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tales que $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

- *Si $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow L < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.*
- *Si $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow L > 1$ o $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow +\infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ no converge.*

Demostración. Realizamos la misma distinción de casos para la demostración:

- Supongamos que $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow L < 1$. Sea $r \in \mathbb{R}$ con $L < r < 1$. Por convergencia de $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, sabemos que

  $$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} < r \Longleftrightarrow a_n < r^n$$

  Sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq} r^n$ converge por ser $r < 1$, por lo que aplicando el criterio de comparación, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

- Supongamos que $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow L > 1$ o $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow +\infty$. Sea $r \in \mathbb{R}$ con $1 < r < L$, en ambos casos tenemos que

  $$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} > r \Longleftrightarrow a_n > r^n$$

  Sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq} r^n$ no converge por ser $r > 1$, por lo que aplicando el criterio de comparación, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ no converge. □

[1] En otros textos, son llamadas series armónicas de exponente α.

El siguiente criterio de convergencia es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 10.1.6 (Criterio del cociente para series)**.** *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales tales que* $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$*. Supongamos que* $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$*. Entonces:*

- *Si* $L < 1$*, entonces* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$*, o* $L = +\infty$*, entonces* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *no converge.*

Demostración. Aplicando el criterio del cociente para sucesiones, tenemos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L$ y basta con aplicar la proposición anterior en cada caso. □

El último criterio de convergencia que veremos en este tema suele resultar especialmente útil cuando $L = 1$ al tratar de aplicar el criterio del cociente.

Proposición 10.1.7 (Criterio de Raabe)**.** *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales tal que* $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$*. Supongamos que*

$$\left\{n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\right\} \longrightarrow \alpha,$$

o equivalentemente

$$\left\{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n\right\} \longrightarrow e^\alpha,$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*.*

- *Si* $\alpha < -1$ *(*$e^\alpha < \frac{1}{e}$*, equivalentemente), entonces* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *converge.*
- *Si* $\alpha > -1$ *(*$e^\alpha > \frac{1}{e}$*, equivalentemente), entonces* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *no converge.*

Ejemplo. Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Si tratamos de aplicar el criterio del cociente, vemos que

$$\left\{\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right\} = \left\{\frac{n^2}{(n+1)^2}\right\} \longrightarrow 1,$$

por lo que el criterio del cociente tampoco nos dice nada. Probemos a aplicar el criterio de Raabe:

$$\left\{n\left(\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} - 1\right)\right\} = \left\{n\left(\frac{n^2}{(n+1)^2} - 1\right)\right\} = \left\{\frac{-2n^2 - n}{(n+1)^2}\right\} \longrightarrow -2$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en virtud del criterio de Raabe.

10.2. Ejercicios

Ejercicio 10.2.1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2n^2}{2^n+3}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)2^{2n}}$

d. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}$

e. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

f. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n-n}$

g. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n}$

h. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)2n}$

i. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

j. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

k. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}$

l. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

m. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{(n+2)!}{5\cdot 6\cdot 7\cdots(n+5)}}$

n. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(3n-1)^2}$

ñ. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

o. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

p. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

q. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$

r. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

s. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

t. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$

u. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$

v. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

w. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$

x. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$

y. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^{n-1}$

Ejercicio 10.2.2 (Debilitación del criterio límite de comparación)**.** Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales con $a_n, b_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } \liminf \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = l > 0 \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}\right)$$

$$\text{Si } \limsup \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = L < +\infty \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}\right)$$

Ejercicio 10.2.3 (Debilitación del criterio de la raíz n-ésima)**.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{a_n}\} = L < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}$$

$$\operatorname{lím\,inf}\{\sqrt[n]{a_n}\} = l > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ no converge}$$

Ejercicio 10.2.4 (Debilitación del criterio del cociente para series)**.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{lím\,sup}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = L < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}$$

$$\operatorname{lím\,inf}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = l > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ no converge}$$

11. Series de términos sin restricción de signos

Hasta ahora, sólo nos habíamos preocupado de estudiar las propiedades de las series de términos no negativos. Vamos a completar nuestro estudio básico de las series de números reales eliminando la suposición que hicimos al principio del tema pasado y trabajaremos con series con no todos sus términos necesariamente no negativos. No demostraremos los resultados de este tema, así que se recomienda al lector que consulte las demostraciones en la bibliografía recomendada en la guía docente de la asignatura.

11.1. Resultados básicos. Convergencia absoluta y conmutativa

Definición 11.1.1. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} a_n$ **converge absolutamente** si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge.

Nótese que en el caso de series de términos no negativos la convergencia absoluta y la convergencia de la serie son equivalentes.

Teorema 11.1.2. *Si la serie de números reales $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces es convergente, en cuyo caso se tiene que*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Ejemplo. Algunos ejemplos son:

I. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge, ya que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, por lo que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente.

II. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no converge absolutamente, pues la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ no converge como ya se probó anteriormente.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que la condición de converger absolutamente es más restrictiva que la de convergencia de la serie, pues ya hemos visto que hay series convergentes que no son absolutamente convergentes.

Las series que son convergentes pero no absolutamente convergentes tienen una sorprendente propiedad:

Teorema 11.1.3 (de Riemann). *Sea* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *una serie convergente pero no absolutamente convergente. Entonces:*

I. *Existe una biyección* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que la serie* $\sum_{n\geq 1} a_{\phi(n)}$ *no es convergente.*

II. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *existe una biyección* $\phi_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_x(n)} = x$$

Es decir, las series que son convergentes pero no convergen absolutamente cumplen que que existe una reordenación de los sumandos que hace que la serie obtenida no sea convergente y también que podemos reordenar los sumandos para que la nueva serie sea convergente a cualquier número real.

Definición 11.1.4. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} a_n$ **converge conmutativamente** si para toda biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ se tiene que la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\phi(n)}$ es convergente con el mismo límite de la serie de partida.

Obviamente toda serie conmutativamente convergente es convergente, pues la aplicación $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ (identidad de $\mathbb{N}$) es biyectiva. El siguiente resultado establece la relación entre convergencia absoluta y conmutativa.

Teorema 11.1.5. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales.*

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge conmutativamente} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge absolutamente}$$

Terminamos el tema dando un último criterio:

Teorema 11.1.6 (Criterio de Leibnitz). *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales convergente a* 0 *y decreciente. Entonces,* $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} a_n$ *converge.*

Realmente, no es necesario que la sucesión sea decreciente. Basta con exigir que exista un natural m tal que $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \geq m$, es decir, que sea decreciente a partir de un natural m en adelante (¿Por qué?).

Nótese que el criterio de Leibnitz nos sirve para probar la convergencia de la serie armónica alternada.

12. Funciones reales de variable real. Continuidad

12.1. Definiciones y propiedades básicas de las funciones

Definición 12.1.1. Una **función real de variable real** es una aplicación $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, donde A es un conjunto de números reales no vacío. Normalmente, nos referiremos a ellas como funciones simplemente.

Al conjunto A lo llamaremos **dominio de la función** f, al que notaremos por $\mathrm{Dom}(f)$. Cuando no especifiquemos el dominio de la función (aunque en estos apuntes siempre lo especificaremos), se entiende que el dominio será el mayor[1] conjunto posible para el que la función está bien definida. A dicho conjunto lo llamaremos **dominio maximal de** f.

A lo largo de este tema, salvo que se especifique lo contrario, supondremos que A es un conjunto no vacío de números reales.

Definición 12.1.2. Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la **suma de** f **y** g como la aplicación $f + g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in A$$

Definición 12.1.3. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el **producto escalar de** α **por** f como la aplicación $\alpha f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in A$$

Definición 12.1.4. Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos el **producto de** f **y** g como la aplicación $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in A$$

Definición 12.1.5. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la **imagen de** f, notaremos $\mathrm{Im}(f)$ o $f(A)$, como el siguiente conjunto:

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \ : \ x \in A\}$$

[1] Entenderemos que con “mayor”, nos referimos a que si un conjunto A es “mayor que” otro conjunto B, entonces $B \subseteq A$.

Definición 12.1.6. Sean A, B dos conjuntos de números reales no vacíos. Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, con $f(A) \subseteq B$. Definimos la **composición de** g **con** f como la aplicación $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in A$$

Definición 12.1.7. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la **gráfica de la función** f, notaremos $\mathrm{Gr}(f)$, como el siguiente conjunto:

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Definición 12.1.8. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) \neq 0, \ \forall x \in A$. Definimos el **inverso de** f como la función $\dfrac{1}{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}, \ \forall x \in A$$

Definición 12.1.9. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva, entonces existe una única función $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A$. Dicha función g recibe el nombre de **función inversa de** f (No confundir con la definición anterior), y la notaremos por f^{-1}.

Definición 12.1.10. Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $B \subseteq A$ no vacío. A la función $f_{|B} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{|B}(x) = f(x), \ \forall x \in B$$

la llamaremos **restricción de** f **a** B. Diremos también que f es una **extensión de** $f_{|B}$ **al conjunto** A.

12.2. Definición y primeras propiedades de las funciones continuas

Definición 12.2.1. Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Diremos que f es **continua en el punto** x_0 si para toda sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A convergente a x_0 se tiene que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$.

Definición 12.2.2. Dado $B \subseteq A$ no vacío, diremos que f es **continua en (el conjunto)** B si f es continua en todos los puntos de B. En particular, diremos que una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Es importante notar que solo se puede hablar de continuidad de una función en puntos donde esta esté definida. Por ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

La afirmación "f no es continua en cero" carece de sentido, pues la función no está definida en cero.

Proposición 12.2.3 (Álgebra de funciones continuas). *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $a \in A$ fijo. Supongamos que f y g son continuas en a. Entonces:*

I. *$f + g$ es continua en el punto a.*

II. *$f \cdot g$ es continua en el punto a.*

III. *Si $g(x) \neq 0,\ \forall x \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en el punto a.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \longrightarrow a$, con $x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por continuidad de f y g en a, se tiene que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(a)$ y $\{g(x_n)\} \longrightarrow g(a)$, por lo que

$$\{(f+g)(x_n)\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} \longrightarrow f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

y también que

$$\{(f \cdot g)(x_n)\} = \{f(x_n) \cdot g(x_n)\} \longrightarrow f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Si además, $g(x) \neq 0,\ \forall x \in A$, razonando igual que antes vemos que

$$\left\{\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right\} = \left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a),$$

como queríamos ver. □

Ejemplo. Algunos ejemplos básicos de funciones continuas son:

I. Dado $c \in \mathbb{R}$, la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = c,\ \forall x \in A \text{ (función constantemente igual a c)}$$

es continua, pues si $x_0 \in A$ y $\{x_n\} \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{f(x_n)\} = \{c\} \longrightarrow c = f(x_0)$.

II. También es obvio que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x,\ \forall x \in A$$

es continua.

Definición 12.2.4. Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **polinómica** si existen $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p,\ \forall x \in A,$$

Utilizando lo probado en los ejemplos anteriores y la Proposición 12.2.3, tenemos que toda función polinómica es continua.

Definición 12.2.5. Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **racional** si existen dos funciones polinómicas f_1 y f_2 en A, con $f_2(x) \neq 0,\ \forall x \in A$, tales que

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},\ \forall x \in A$$

A partir de la Proposición 12.2.3 y del ejemplo anterior, se deduce inmediatamente que toda función racional es continua.

Proposición 12.2.6. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones, con* $f(A) \subseteq B$*. Sea* $a \in A$ *y* $b = f(a) \in B$*. Supongamos que* f *es continua en el punto* a *y que* g *es continua en el punto* b*. Entonces* $g \circ f$ *es continua en el punto* a*.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \longrightarrow a$, con $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y sea $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$. Por ser $y_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por continuidad de f, tenemos que $\{y_n\}$ es una sucesión de elementos de B convergente a b, y por continuidad de g, tenemos que

$$\{g(y_n)\} = \{g(f(x_n))\} \longrightarrow g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

como queríamos ver. □

12.3. Carácter local de la continuidad

La noción de continuidad de una función en un punto involucra claramente al conjunto en el que la función está definida. Vamos que ocurre con la continuidad cuando se modifica el dominio de la función mediante el procedimiento de restricción.

Proposición 12.3.1. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sea* $B \subseteq A$ *no vacío. Entonces,* $f_{|B}$ *es continua en todo punto de* B *en el que lo sea* f*.*

Demostración. Sea $x_0 \in B$ tal que f sea continua en x_0 y sea $\{x_n\} \longrightarrow x_0$, con $x_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Al ser $B \subseteq A$, tenemos que $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por continuidad de f tenemos que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$, por lo que

$$\{f_{|B}(x_n)\} \longrightarrow f_{|B}(x_0),$$

lo que prueba la continuidad de $f_{|B}$ en x_0. □

En general, el recíproco de la proposición anterior no se da. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea $B = \mathbb{Q}$. Es claro que $f_{|\mathbb{Q}}$ es continua, pero f no es continua en ningún punto de $\mathbb{Q}$ (de hecho no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$).

En general, si B es un subconjunto no vacío del dominio, el hecho de que $f_{|B}$ sea continua en todo punto de B sin que lo sea f se debe a que el conjunto B es "demasiado restrictivo". Obtenemos ahora un resultado que nos permite deducir la continuidad de f a partir de $f_{|B}$ cuando el conjunto B sea "suficientemente amplio".

Proposición 12.3.2. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función,* $B \subseteq A$ *no vacío y* $x_0 \in B$*. Supongamos que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left.\begin{array}{r} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in B$$

Entonces, si $f_{|B}$ *es continua en* x_0*,* f *es continua en* x_0*.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A convergente a x_0. Entonces

$$\exists p \in \mathbb{N} \ : \ n \geq p \Longrightarrow |x - x_0| < \delta$$

con lo que para todo natural $n \geq p$ se tiene que $x_n \in B$. La sucesión $\{x_{n+p}\}$ es una sucesión de elementos de B convergente a x_0, ya que es una parcial de $\{x_n\}$. Por ser $f_{|_B}$ continua en x_0 se tiene que $\{f(x_{n+p})\} \longrightarrow f(x_0)$, pero ello implica que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$. □

Observemos que la condición que se impone a B, en la proposición anterior, es que contenga todos los puntos de A "suficientemente próximos" a x_0. Por tanto, lo que nos dice la proposición anterior es que la continuidad de una función en un punto sólo depende de su comportamiento en puntos "suficientemente próximos" a él. Esta idea se suele expresar diciendo que la continuidad de una función en un punto es una **propiedad local**.

Corolario 12.3.3. *Sea $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Sea $\delta > 0$, consideramos el conjunto*

$$B = \{x \in A \ : \ |x - x_0| < \delta\}$$

Entonces, f es continua en x_0 si y sólo si $f_{|_B}$ es continua en x_0.

Demostración. Por la Proposición 12.3.1, si f es continua en x_0, $f_{|_B}$ es continua en x_0. Evidentemente, si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $x \in B$ y basta con aplicar la Proposición 12.3.2. □

Ejemplo. Definimos la función **parte entera** como la función $E \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(x) = \max \{p \in \mathbb{Z} \ : \ p \leq x\}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vamos a estudiar la continuidad de la función parte entera con ayuda del corolario anterior. Sea x_0 un número real no entero. Entonces:

$$\delta = \min \{x_0 - E(x_0), \ E(x_0) + 1 - x_0\} > 0$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x - x_0| < \delta$, se tiene que

$$E(x_0) < x < E(x_0) + 1$$

y por tanto $E(x) = E(x_0)$, luego si

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < \delta\}$$

entonces $E_{|_B}$ es constante y por el corolario anterior, es continua en x_0.

Sea ahora $x_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $x_0 - 1 \leq x_n < x_0$ para todo natural n, luego

$$E(x_n) = x_0 - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Así, $\{E(x_n)\}$ no converge a $E(x_0)$ y claramente $\{x_n\} \longrightarrow x_0$.

En resumen, la función parte entera es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ y no es continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$.

Corolario 12.3.4. *Sea A un conjunto de números reales no vacío y $x_0 \in A$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que*

$$\{x \in A \ : \ |x - x_0| < \delta\} = \{x_0\}$$

Entonces, toda función real de variable real definida en A es continua en x_0.

Demostración. Consecuencia inmediata del Corolario 12.3.3, pues si f es cualquier función real definida en A, entonces $f_{|\{x_0\}}$ es, obviamente, continua. □

12.4. Caracterización de la continuidad

Damos a continuación un par de teoremas que nos permitirán caracterizar la continuidad de una función en un punto, y serán de suma utilidad en lo sucesivo.

Teorema 12.4.1 (Caracterización ε-δ de la continuidad)**.** *Sea A un conjunto no vacío de números reales, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$ fijo. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } x_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ : \ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación.

$\Longrightarrow$) Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall \delta > 0,\ \exists x \in A \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ y } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Sea $\delta_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\exists x_n \in A \ : \ |x_n - x_0| < \delta_n$ y $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Entonces, tenemos que

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \{x_n\} \longrightarrow x_0$$

y al ser f continua, entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$. Pero $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ para todo n natural en contra de que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$, lo que es una contradicción.

$\Longleftarrow$) Sea $\{x_n\} \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall \varepsilon > 0$, por hipótesis, $\exists \delta > 0$ tal que si $x_n \in A$ con $|x_n - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Por convergencia de $\{x_n\}$, tenemos que

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow |x_n - x_0| < \delta$$

y aplicando la hipótesis, $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, y entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$, por lo que f es continua en x_0.

□

Aunque en la definición de continuidad de una función f en un punto x_0 de su dominio se exige que todas las sucesiones de elementos del dominio convergentes a x_0 verifiquen una determinada propiedad, podemos debilitar algo la condición de continuidad.

Teorema 12.4.2 (Debilitación de la condición de continuidad). *Sea A un conjunto no vacío de números reales, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$ fijo.*

Entonces, f es continua en x_0 si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, monótona y convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación.

$\Longrightarrow$) Evidente: Lo que se exige para toda sucesión de puntos de A convergente a x_0 se exige, en particular, para aquellas que sean monótonas.

$\Longleftarrow$) Por reducción al absurdo, supongamos que f no es continua en x_0. Entonces:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in A \text{ con } |x_\delta - x_0| < \delta \text{ y } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Para cada natural n, sea $\delta = \frac{1}{n}$ y sea $y_n = x_{\frac{1}{n}}$. Entonces, la sucesión $\{y_n\}$ de puntos de A verifica que

$$|y_n - x_0| < \delta \text{ y } |f(y_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Obviamente $\{y_n\} \longrightarrow x_0$. Sea $\{y_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{y_n\}$ que sea monótona (Lema 6.2.5). Aplicando la hipótesis, $\{f(y_{\sigma(n)})\} \longrightarrow f(x_0)$, lo cual es absurdo, pues

$$|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, f es continua en x_0.

$\square$

El teorema anterior nos dice que para estudiar la continuidad de una función en un punto, basta con estudiar únicamente lo que ocurre con las sucesiones monótonas y convergentes a dicho punto.

12.5. Intervalos

Vamos a presentar una amplia familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que jugarán un papel muy importante en los teoremas fundamentales de las funciones continuas.

Notacion. Dados dos números reales a y b, con $a \leq b$, notaremos:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} \\
[a,b[\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \\
]a,b[\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}
\end{aligned}$$

que reciben, respectivamente, el nombre de **intervalo cerrado, abierto por la derecha, abierto por la izquierda y abierto, de origen** a **y extremo** b.

Notacion. Dado un número real a cualquiera, notaremos:

$$\begin{aligned}]-\infty,a] &= \{x\in\mathbb{R}\ :\ x\leq a\}\\ ]-\infty,a[\ &= \{x\in\mathbb{R}\ :\ x< a\}\\ [a,+\infty[\ &= \{x\in\mathbb{R}\ :\ x\geq a\}\\ ]a,+\infty[\ &= \{x\in\mathbb{R}\ :\ x> a\}\end{aligned}$$

que reciben, respectivamente, el nombre de **semirrecta cerrada de extremo** a**, abierta de extremo** a**, cerrada de origen** a **y abierta de origen** a.

Definición 12.5.1. Diremos que un conjunto A de números reales es un **intervalo** si $A=\mathbb{R}$ o bien A responde a una de las 8 descripciones anteriores (Nótese que el conjunto vacío y el conjunto $\{a\}$ para todo $a\in\mathbb{R}$ son intervalos).

Es inmediato que si A es un intervalo y $x,y\in A$ con $x<y$, todo real z tal que

$$x\leq z\leq y$$

pertenece también al conjunto A. Veamos que esta propiedad caracteriza a los intervalos.

Teorema 12.5.2 (Caracterización de los intervalos)**.** *Un conjunto de números reales* A *es un intervalo si, y sólo si, para cualesquiera* $x,y\in A$ *con* $x<y$ *se verifica que* $[x,y]\subseteq A$.

Demostración. El razonamiento anterior nos dice que la condición es necesaria. Veamos que también es suficiente.

Si A es vacío no hay nada que probar, pues para todo $a\in\mathbb{R}$ se verifica que $A=\ ]a,a[$. Supongamos que A es no vacío; distinguiremos varios casos:

- Si A no está mayorado ni minorado, dado $z\in\mathbb{R}$, z no es mayorante ni minorante de A, luego existen $x,y\in A$ con $x<z<y$, de donde $z\in[x,y]\subseteq A$ y obtenemos que $A=\mathbb{R}$.

- Si A está mayorado pero no minorado, sea $b=\sup A$. Entonces, dado $z\in\mathbb{R}$, con $z<b$, z no es mayorante ni minorante del conjunto A, luego existen $x,y\in A$. con $x<z<y$, de donde $z\in[x,y]\subseteq A$. Se tiene por tanto:

  $$]-\infty,b[\ \subseteq A\subseteq\ ]-\infty,b]$$

  lo que deja dos posibilidades, $A=\ ]-\infty,b[$ o $A=\ ]-\infty,b]$.

- Si A está minorado pero no mayorado, se demuestra de forma análoga al caso anterior que $A=[a,+\infty[$ o que $A=\ ]a,+\infty[$, donde $a=\inf A$.

- Finalmente, si A está acotado, sean $a=\inf A$ y $b=\sup A$. Dado $z\in\mathbb{R}$ con $a<z<b$, z no puede ser mayorante ni minorante de A, luego existen $x,y\in A$ con $x<z<y$, de donde $z\in A$. Así tenemos que

  $$]a,b[\ \subseteq A\subseteq[a,b]$$

  lo que deja 4 posibilidades, según si a y b pertenezcan o no al conjunto A:

  $$A=\ ]a,b[\ \ ,\quad A=\ ]a,b]\ \ ,\quad A=[a,b[\ \ ,\quad A=[a,b]$$

$\square$

12.6. Resultados fundamentales sobre funciones continuas

Hasta ahora, solamente hemos tratado el problema sobre si una determinada función es continua. Ahora bien, supuesto que una función sea continua, ¿qué información adicional poseemos sobre la función?. Vamos a dedicar este apartado a obtener una serie de resultados fundamentales sobre las funciones continuas, preferentemente de las funciones continuas definidas en intervalos. En lo sucesivo, cuando se hable de un intervalo, entenderemos que es no vacío.

Proposición 12.6.1 (Conservación del signo)**.** *Sea A un conjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en x_0 con $f(x_0) \neq 0$.*

Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ con $|x-x_0| < \delta$ se tiene que $f(x)f(x_0) > 0$ ($f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$).

Demostración. Por ser f continua en x_0, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; x \in A \cap \;]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\varepsilon = |f(x_0)|$, obtenemos

$$\exists \delta > 0 \; : \; x \in A \cap \;]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|$$

y por tanto

$$f(x_0) - |f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)|$$

de donde se deduce que $f(x)$ y $f(x_0)$ tienen el mismo signo. □

Teorema 12.6.2 (de los ceros de Bolzano)**.** *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua verificando que*

$$f(a)f(b) < 0 \quad (f(a) \text{ y } f(b) \text{ tienen distinto signo})$$

Entonces, $\exists c \in \;]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Definimos el conjunto C como sigue:

$$C = \{x \in [a, b] \; : \; f(x) < 0\}$$

Es fácil ver que C es un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Sea $c = \sup C$. Es claro que $c \in [a, b]$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de C convergente a c y por continuidad de f en c entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(c)$. Dado que

$$f(x_n) < 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $f(c) \leq 0$. En particular, deducimos que $c \neq b$ y $c \leq b$, por lo que $c \in \;]a, b[$.

Sea $\{z_n\} = \left\{c + \frac{b-c}{n}\right\}$. Es claro que

$$z_n \in [a, b] \text{ y } z_n \notin C, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto ha de ser

$$f(z_n) \geq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Evidentemente, $\{z_n\} \longrightarrow c$ y usando que f es continua en c y lo anterior deducimos que

$$\{f(z_n)\} \longrightarrow f(c) \geq 0$$

y por tanto ha de ser $f(c) = 0$.

Si fuera $f(b) < 0 < f(a)$, podemos razonar igual que antes o aplicar lo que acabamos de obtener a la función $-f$ (f es continua si y sólo si lo es $-f$). $\square$

Proposición 12.6.3 (del valor intermedio)**.** *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I.*

Entonces, $f(I)$ es un intervalo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in f(I)$, con $\alpha \neq \beta$. Supongamos que $\alpha < \beta$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \lambda < \beta$. Sean $x, y \in I$ tales que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$.

Definimos $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(t) - \lambda, \ \forall t \in I$$

Es claro que g es una función continua, que $g(x) < 0$ y que $g(y) > 0$, por lo que, aplicando el Teorema de Bolzano a la restricción de g al intervalo $[x, y]$, existe $z \in I$ tal que

$$g(z) = 0 \Longleftrightarrow f(z) - \lambda = 0 \Longleftrightarrow f(z) = \lambda$$

Esto prueba que $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in f(I)$, con $\alpha < \beta$, por lo que $f(I)$ es un intervalo (Proposición 12.5.2).

Si fuera $\alpha > \beta$, basta con razonar igual que antes sobre la función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \lambda - f(t), \ \forall t \in I$$

$\square$

Nótese que el hecho de que $f(I)$ sea un intervalo significa que si f toma dos valores cualesquiera, entonces está obligada a tomar todos los intermedios. Por tanto, el Teorema del valor intermedio incluye al Teorema de Bolzano como caso particular, pero muy poco particular, ya que la demostración se reduce fácilmente, como hemos visto, a dicho caso.

Definición 12.6.4. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f está **acotada** (respectivamente **mayorada**, **minorada**) si el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ está acotado (respectivamente mayorado, minorado).

$$f \text{ está mayorada} \Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} : K \geq f(x), \ \forall x \in A$$
$$f \text{ está minorada} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : k \leq f(x), \ \forall x \in A$$
$$f \text{ está acotada} \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq M, \ \forall x \in A$$

Diremos que f tiene **máximo** (respectivamente **mínimo**) **absoluto** si su imagen tiene máximo (respectivamente mínimo) absoluto. Si $x_0 \in A$ con $f(x_0) = \max f(A)$ (respectivamente $f(x_0) = \min f(A)$), diremos que f alcanza su máximo absoluto (respectivamente mínimo absoluto) en el punto x_0.

Teorema 12.6.5 (de Weierstrass o Propiedad de compacidad[2]). *La imagen por una función continua de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado. En particular, f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en dicho intervalo.*

Demostración. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Ya sabemos que $f([a,b])$ es un intervalo por el teorema del valor intermedio.

Empezaremos probando que $f([a,b])$ está acotado. De lo contrario el conjunto

$$\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$$

no está mayorado, luego dado un natural n debe existir $x_n \in [a,b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $\{x_n\}$ así construida es acotada, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass admite una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente.

Sea $x = \lim\{x_{\sigma(n)}\}$. Dado que $a \leq x_{\sigma(n)} \leq b, \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in [a,b]$ y que por ser f continua en x tenemos que $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ converge a $f(x)$ y en particular es acotada. Pero entonces existe un número real M tal que $|f(x_{\sigma(n)})| \leq M$ para todo n natural, de donde deducimos que

$$n \leq \sigma(n) < |f(x_{\sigma(n)})| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que es una contradicción, pues $\mathbb{N}$ no está mayorado. Así, $f([a,b])$ está acotado.

Sea $\alpha = \inf f([a,b])$ y $\beta = \sup f([a,b])$. Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de $f([a,b])$ convergente a β y para cada natural n, sea $t_n \in [a,b]$ tal que $f(t_n) = y_n$.

Es claro que $\{t_n\}$ es una sucesión acotada; sea $\{t_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{t_n\}$ convergente a $t \in [a,b]$. Por ser f continua en t tenemos que $\{f(t_{\sigma(n)})\} \longrightarrow f(t)$, pero $\{f(t_{\sigma(n)})\} = \{y_{\sigma(n)}\}$ e $\{y_{\sigma(n)}\}$ converge a β, luego

$$\beta = f(t) \in f([a,b])$$

El mismo razonamiento puede aplicarse para probar que $\alpha \in f([a,b])$. Por el teorema del valor intermedio, $[\alpha,\beta] \subseteq f([a,b])$, pero la inclusión contraria es trivialmente cierta, luego

$$[\alpha,\beta] = f([a,b])$$

lo que demuestra el teorema. □

Óbservese que la hipótesis de que el intervalo de definición de la función, en el teorema anterior, sea cerrado y acotado es fundamental en la demostración. Si hubiésemos tenido un intervalo no acotado las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{t_n\}$ que aparecen en la demostración no tendrían que estar acotadas, mientras que si hubiéramos tenido un intervalo acotado pero no cerrado los límites x y t de las parciales convergentes extraídas no tendrían por qué pertenecer al intervalo.

[2]También conocido como Teorema de Bolzano-Weierstrass para funciones continuas. No confundirlo con el que dimos para sucesiones.

12.7. Funciones continuas e inyectivas

El último teorema que hemos visto afirmaba que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene máximo y mínimo absolutos, pero nada nos dice sobre los puntos en los que se alcanzan. Bajo la hipótesis adicional de que f sea inyectiva, veremos que el máximo y el mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo, pero esto no es más que el punto de partida para resultados más importantes[3].

Lema 12.7.1. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a < b$, continua e inyectiva. Supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces, para todo t verificando que $a < t < b$ se tiene que*

$$f(a) < f(t) < f(b)$$

Demostración. Sea $t \in \,]a,b[$. Si fuera $f(t) < f(a)$, si consideramos la restricción de f al intervalo $[t,b]$, tenemos que $f_{|[t,b]}$ es continua y al ser $f(t) < f(a)$, por el teorema del valor intermedio encontramos $z \in \,]t,b[$ tal que $f(z) = f(a)$. Pero $z \neq a$ en contra de que f es inyectiva.

Si fuera $f(b) < f(t)$, razonando igual que antes, encontramos $z \in \,]a,t[$ tal que $f(z) = f(b)$, pero $z \neq b$ en contra de que f es inyectiva.

Entonces, debe cumplirse que

$$f(a) \leq f(t) \leq f(b), \ \forall t \in [a,b],$$

pero al ser f inyectiva, ambas desigualdades son estrictas. □

Notemos que el lema anterior puede aplicarse sucesivamente. Si $c \in \,]a,b[$, tenemos que $f(a) < f(c) < f(b)$ y al volver a aplicar el lema a las restricciones de f a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, obtenemos que

$$a < x < c < y < b \Longrightarrow f(a) < f(x) < f(c) < f(y) < f(b)$$

y así sucesivamente. Vemos entonces que f tiene un comportamiento muy concreto, pues crece al crecer la variable. Antes de expresar de forma rigurosa este hecho, vamos a concretar algunos conceptos:

Definición 12.7.2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es **creciente** (respectivamente **decreciente**) si

$$\forall x,y \in A, \ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \text{ (respectivamente } f(x) \geq f(y))$$

Diremos que f es **estrictamente creciente** (respectivamente **estrictamente decreciente**) si

$$\forall x,y \in A, \ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \text{ (respectivamente } f(x) > f(y))$$

Diremos que f es **monótona** si es creciente o decreciente y **estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

[3] Los resultados que vamos a presentar en este apartado serán de gran utilidad cuando se estudie la derivabilidad de las funciones reales de variable real en la asignatura de Cálculo II.

Lema 12.7.3. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a < b$, una función continua e inyectiva. Entonces, f es estrictamente monótona.*

Demostración. Supongamos que $f(a) < f(b)$. Sean $x, y \in [a,b]$, con $x < y$. Si fuera $x = a$, usando el Lema 12.7.1 tenemos que $f(x) < f(y)$, e igual ocurre si $y = b$.

Supongamos entonces que $x, y \in \,]a,b[$. Entonces, aplicando de nuevo el Lema 12.7.1, tenemos que $f(x) < f(b)$ y aplicando de nuevo el lema a la restricción de f al intervalo $[x,b]$ tenemos que $f(x) < f(y) < f(b)$. Así, hemos probado en este caso que f es estrictamente creciente.

Si fuese $f(a) > f(b)$, el razonamiento anterior, aplicado a la función $-f$ prueba que $-f$ es estrictamente creciente, de donde deducimos que f es estrictamente decreciente, como queríamos ver. $\square$

El resultado anterior se puede generalizar, de manera que es cierto para funciones continuas e inyectivas definidas en un intervalo.

Teorema 12.7.4. *Sean I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces, f es estrictamente monótona.*

Demostración. Si $I = [a,b]$, con $a < b$ (si fuera $a = b$ no hay nada que probar), el resultado es cierto por el Lema 12.7.3. Sea I un intervalo cualquiera y supongamos, por reducción al absurdo, que f no es estrictamente monótona. Entonces, existen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ tales que

$$x_1 < y_1, \;\; f(x_1) < f(x_2), \;\; x_2 < y_2, \;\; f(x_2) > f(y_2)$$

Sean $a = \text{máx}\{x_1, x_2\}$ y $b = \text{máx}\{y_1, y_2\}$. Claramente $[a,b] \subseteq I$ y la restricción de f a $[a,b]$ es continua e inyectiva, luego es estrictamente monótona por lo ya probado. Pero ello es absurdo, pues $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a,b]$. $\square$

Una función estrictamente monótona es siempre inyectiva. Sin embargo, una función estrictamente monótona no tiene por qué ser continua. La función $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; 0 \le x \le 1 \\ 1 + x & \text{si } \; 1 < x \le 2 \end{cases}$$

es estrictamente monótona y no es continua. Damos a continuación un teorema que garantiza la continuidad de una función monótona con una hipótesis adicional.

Teorema 12.7.5. *Sea A un conjunto de números reales no vacío y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona tal que $f(A)$ es un intervalo. Entonces, f es continua.*

Demostración. Supongamos que f es creciente. Sea x_0 un punto de A y $\{x_n\}$ una sucesión creciente de puntos de A convergente a x_0. Para cada natural n se tiene entonces $x_n \le x_{n+1} \le x_0$, y por ser f creciente

$$f(x_n) \le f(x_{n+1}) \le f(x_0), \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $\{f(x_n)\}$ es creciente y mayorada, luego es convergente. Sea $L = \lim\{f(x_n)\}$, es claro que $L \leq f(x_0)$. Supongamos que $L < f(x_0)$ y sea $y = \frac{L+f(x_0)}{2}$. Entonces, tenemos que

$$f(x_n) < y < f(x_0), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser $f(A)$ un intervalo, entonces existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Si fuese $x < x_n$ para algún natural n, se tendría, por ser f creciente, que $y = f(x) \leq f(x_n)$, cosa que no ocurre, luego

$$x \geq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $x \geq x_0$, de donde $f(x) \geq f(x_0)$, lo que es absurdo.

Así, $L = f(x_0)$ y $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$. Un razonamiento enteramente análogo al anterior nos permite probar que si $\{x_n\}$ una sucesión decreciente de puntos de A convergente a x_0 entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$. Por lo tanto, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, monótona y convergente a x_0 se tiene que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x_0)$, lo que prueba la continuidad de f en x_0, y como x_0 era un punto arbitrario de A, f es continua en A.

Si f fuera decreciente, $-f$ es creciente y

$$(-f)(A) = \{-y \ : \ y \in f(A)\}$$

es, claramente, un intervalo, luego $-f$ es continua por lo ya demostrado, y en consecuencia, f es continua, como queríamos probar. □

Si f es una función inyectiva definida en un intervalo, la imagen de f^{-1} es un intervalo. Este hecho evidente junto con el siguiente lema, nos va a permitir obtener dos importantes consecuencias del teorema anterior.

Lema 12.7.6. *Si $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente), entonces $f^{-1} \ : \ f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente).*

Demostración. Sean $x, y \in f(A)$ con $x < y$; si fuese $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$, al ser f creciente, tendríamos que

$$f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) \Longleftrightarrow x \geq y$$

por tanto, ha de ser $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ y f^{-1} es estrictamente creciente.

Análogo razonamiento para el caso en el que f sea estrictamente decreciente. □

12.8. Continuidad uniforme

Sea A un conjunto no vacío de números reales y $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Según el Teorema 12.4.1, el hecho de que f sea continua en A se expresa de la siguiente forma:

$$\forall x \in A, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Es importante observar que el número δ que aparece en el enunciado anterior depende tanto del número ε escogido, como del punto x de A prefijado. En general, para un mismo ε pueden aparecer distintos δ según el punto x de que se trate. Tiene especial interés el caso en que, fijado un $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un δ común, válido para todos los puntos x del conjunto A.

Definición 12.8.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es **uniformemente continua**[4] si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ x, y \in A,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Si B es un subconjunto no vacío de A, diremos que f es uniformemente continua en B cuando la restricción de f a B sea uniformemente continua.

A título de ejemplo, si A es cualquier conjunto no vacío de números reales, la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x,\ \forall x \in A$$

es uniformemente continua (tómese $\delta = \varepsilon$). Es claro que, si f es uniformemente continua, entonces f es continua en A. El recíproco no es cierto.

Para verlo, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Supongamos f fuese uniformemente continua. Entonces

$$\exists \delta_1 > 0\ :\ x, y \in A,\ |x - y| < \delta_1 \Longrightarrow |x^2 - y^2| < 1$$

Tomando $x = \frac{2}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{4}$, $y = \frac{2}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{4}$, tenemos $|x - y| < \delta_1$ y $1 > |x^2 - y^2| = 2$, lo que es, evidentemente, absurdo.

El ejemplo anterior muestra que, a diferencia de lo que pasaba con la continuidad, puede ocurrir que el producto de funciones uniformemente continuas no sea uniformemente continua.

El resultado más importante relativo a la continuidad uniforme de funciones reales de variable real es, sin duda, el siguiente.

Teorema 12.8.2 (de Heine). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Por reducción al absurdo, supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ :\ \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in [a, b]\ :\ |x - y| < \delta \text{ y } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

En particular, tomando un natural n arbitrario, encontramos $x_n, y_n \in [a, b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ y } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (*) \tag{12.1}$$

[4] La continuidad uniforme no es algo que suela estudiarse en un curso de Cálculo I. Sin embargo, en estos apuntes vamos a ver una corta introducción, ya que es un concepto que será necesario cuando se estudie la integración de funciones reales de variable real acotadas, y en particular, de funciones continuas, definidas en intervalos cerrados y acotados en la asignatura de Cálculo II.

Entonces, obtenemos dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tales que la Ec. 12.1 es cierta para todo n natural. Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, la sucesión acotada $\{x_n\}$ admite una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente a un número real $x \in [a, b]$. Teniendo en cuenta que

$$\{y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow 0$$

y que

$$\{y_{\sigma(n)}\} = \{y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)} + x_{\sigma(n)}\}$$

deducimos que $\{y_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x$. Por ser f continua en el punto x, las sucesiones $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ y $\{f(y_{\sigma(n)})\}$ convergen a $f(x)$, y por tanto

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \;:\; n \in \mathbb{N},\ n \geq m_1 \Longrightarrow |f(x_{\sigma(n)}) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$
$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \;:\; n \in \mathbb{N},\ n \geq m_2 \Longrightarrow |f(y_{\sigma(n)}) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Tomando entonces $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ y $n = \sigma(n)$ tenemos:

$$|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \leq |f(x_{\sigma(n)}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{\sigma(n)})| < \varepsilon_0$$

lo cual es una contradicción, pues se tenía

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

□

12.9. Ejercicios

Ejercicio 12.9.1. Estudiar la continuidad de la función $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ejercicio 12.9.2. Sean $f, g \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$$

Probar que $f = g$. En particular, si $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f_{|\mathbb{Q}}$ constante, entonces f es constante.

Ejercicio 12.9.3. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Sea $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \text{ínf}\{|x - a| \;:\; a \in A\},\ \forall x \in A$$

Probar que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Deducir que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.9.4. Probar que toda función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{N}$ (Las sucesiones de números reales son funciones continuas).

Ejercicio 12.9.5. Probar que si A es un conjunto finito no vacío de números reales, toda función real definida en A es continua en A.

Ejercicio 12.9.6. Consideremos el siguiente conjunto de números reales:

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Probar que toda función real definida en A es continua en $\left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Dar un ejemplo de una función real definida en A que no sea continua en 0.

Ejercicio 12.9.7. Probar, utilizando la caracterización ε-δ de la continuidad, que la función $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.9.8. Dar un ejemplo de una función continua en un punto x_0 que no tenga signo constante en ningún intervalo abierto centrado en dicho punto (intervalo de la forma $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta > 0$).

Ejercicio 12.9.9. Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

Ejercicio 12.9.10. Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo, cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

Ejercicio 12.9.11. Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligadamente un intervalo) acotado.

Ejercicio 12.9.12. Pruébese que si I es un intervalo y $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en I tal que $f(I) \subseteq \mathbb{Q}$, entonces f es constante.

Ejercicio 12.9.13. Probar que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

Ejercicio 12.9.14. Dado $a > 0$, probar que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = a$. El tal x es único.

Ejercicio 12.9.15. Sea $f \ : \ [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo (Es decir, $\exists x \in [0,1] \ : \ f(x) = x$).

Ejercicio 12.9.16. Probar que la ecuación $e^x + x^3 - 6x = 2$ tiene, al menos, 3 soluciones en el intervalo $[-3,3]$.

Ejercicio 12.9.17. Dada $f \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(1)$, y dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, probar que $\exists c_n \in [0,1] \ : \ f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$.

Ejercicio 12.9.18. Sea $f \ : \ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\forall x \in [a,b], \ \exists y \in [a,b] \ : \ |f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$$

Probar que $\exists c \in [a,b] \ : \ f(c) = 0$.

Ejercicio 12.9.19. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

Ejercicio 12.9.20. Sea $f\ :\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x)=x,\ \forall x\in\ ]0,1[$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}_0^+\\ \frac{x}{1-x} & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}^-\end{cases}$$

Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

Ejercicio 12.9.21. Sea $f\ :\ [-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2},\ \forall x\in[-1,1]$$

Determinar la imagen de f.

Ejercicio 12.9.22. Sea $f\ :\ [-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2x}{1+|x|},\ \forall x\in[-1,1]$$

Determinar la imagen de f.

Ejercicio 12.9.23. Sea I un intervalo y $f\ :\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función inyectiva.
Analícese la relación entre las siguientes afirmaciones:

I. f es continua.

II. $f(I)$ es un intervalo.

III. f es estrictamente monótona.

IV. f^{-1} es continua.

Ejercicio 12.9.24. Pruébese que si A es un conjunto finito no vacío de números reales, toda función de A en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Ejercicio 12.9.25. Probar que la suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Ejercicio 12.9.26. Pruébese que si f,g son funciones uniformemente continuas y acotadas, entonces fg es uniformemente continua.

Ejercicio 12.9.27. Sea $f\ :\ A\longrightarrow\mathbb{R}$. Supongamos que existe $K>0$ tal que

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|,\ \forall x,y\in A$$

Probar que f es uniformemente continua[5].

[5]Las funciones que cumplen la propiedad de arriba se dicen **lipschitzianas**. Se verán más detalle en Cálculo II, cuando se analice su relación con la derivabilidad de una función.

Ejercicio 12.9.28. Compruébese que la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

no es uniformemente continua.

Ejercicio 12.9.29. Sea A un conjunto no vacío de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua.

Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de puntos de A (su límite no tiene por qué pertenecer al conjunto A), entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.

Probar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de elementos de A convergentes al mismo límite, entonces $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ convergen y tienen el mismo límite.

Ejercicio 12.9.30. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Pruébese que existe una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uniformemente continua, cuya restricción a $\mathbb{Q}$ coincide con f.

Ejercicio 12.9.31. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Probar que f es uniformemente continua si, y sólo si, f es la restricción al intervalo $]a, b[$ de una función continua en el intervalo $[a, b]$.

13. Límite funcional

En este tema introduciremos el concepto de límite de una función en un punto que, cómo se verá, está muy ligado al concepto de continuidad. Analizaremos detalladamente la relación entre ambas nociones, obteniendo de paso una clasificación de las posibles discontinuidades de una función. Con todo, el concepto de límite funcional adquirirá su verdadera relevancia cuando se estudie Cálculo Diferencial en una variable en Cálculo II.

Además, empleando lo que ya sabemos de sucesiones divergentes, podremos analizar el comportamiento de una función cuando la variable crece o decrece indefinidamente (límites en el infinito), y por otra, considerar la noción de divergencia de una función.

13.1. Concepto de límite funcional

Definición 13.1.1. Sea A un conjunto no vacío de números reales y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Diremos que α es un **punto de acumulación de** A cuando exista una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A, distintos de α, convergente a α. Notaremos A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

Diremos que un elemento a de A es un **punto aislado de** A si no es un punto de acumulación de A.

Ejemplo. Si $A = \{0\} \cup \ ]1,2[$, entonces $A' = [1,2]$, mientras que el único punto aislado de A es el 0.

El ejemplo anterior sirve para poner de manifiesto que ninguna de las inclusiones $A' \subseteq A$, $A \subseteq A'$ tiene por qué ser cierta. De hecho, ninguna lo es en el ejemplo anterior.

Proposición 13.1.2 (Caracterización de los puntos de acumulación)**.** *Sea A un conjunto de números reales no vacío y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$\alpha \in A' \Longleftrightarrow \forall \delta > 0, \ \exists x \in A \ : \ 0 < |x - \alpha| < \delta$$

Como consecuencia, un punto $a \in A$ es un punto aislado de A si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que $A \cap \ ]a - \delta, a + \delta[= \{a\}$.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sea $\alpha \in A'$ y $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de A, con $a_n \neq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\{a_n\} \longrightarrow \alpha$. Dado $\delta > 0$, tenemos que

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq m \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \delta,$$

y en particular, $0 < |a_m - \alpha| < \delta$.

$\Longleftarrow$) Para cada n natural, sea $a_n \in A$ tal que $0 < |a_n - \alpha| < \frac{1}{n}$; es inmediato que $\{a_n\} \longrightarrow \alpha$ y $a_n \neq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego α es un punto de acumulación de A.

□

Definición 13.1.3. Sea $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $\alpha \in A'$. Se dice que la función f tiene **límite en el punto** α si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A distintos de α, convergente a α, se tiene que $\{f(a_n)\} \longrightarrow L$. En tal caso, dicho L es único y diremos que L es **el límite de** f **en el punto** α y escribiremos:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$$

La definición anterior tiene sentido gracias a la condición de que α sea un punto de acumulación de A. Dado que un punto de acumulación de A no tiene por qué pertenecer a A, puede tener sentido hablar de la existencia de límite en puntos en los que la función no esté definida, a diferencia de lo que ocurría con la continuidad.

Por otra parte, si α es un punto aislado de A, entonces no tiene sentido hablar de la existencia de límite en el punto α para funciones definidas en α.

Finalmente, si $\alpha \in A$ es un punto de acumulación de A, el valor que tome una función $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α no afecta para nada a la existencia del límite de f en el punto α ni al valor de dicho límite en caso de que este exista.

Teorema 13.1.4 (Caracterización de límite funcional)**.** *Sea $f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, sea $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$

II. *Para toda sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A, monótona y convergente a α, se tiene que $\{f(a_n)\} \longrightarrow L$.*

III. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ 0 < |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Demostración. Demostramos por separado las equivalencias:

I. $\Longleftrightarrow$ **II.** Análoga a la demostración del Teorema 12.4.2.

I. $\Longleftrightarrow$ **III.** Análoga a la demostración del Teorema 12.4.1.

Dejamos como ejercicio la trascripción, casi literal, de las demostraciones referidas al caso presente. □

13.2. Relación entre límite funcional y continuidad

El siguiente enunciado permite analizar la continuidad de una función en un punto mediante el concepto de límite funcional.

Proposición 13.2.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in A$.*

I. *Si α es un punto aislado de A, entonces f es continua en α.*

II. *Si α es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.*

Demostración. Demostramos cada una de las afirmaciones:

I. Según la Proposición 13.1.2, α es un punto aislado de A si, y sólo si, existe un $\delta > 0$ tal que
$$\{x \in A \ : \ |x - \alpha| < \delta\} = \{\alpha\}$$
Y esto no es más que otra forma de enunciar el Corolario 12.3.4.

II. Si f es continua en α, para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, convergente a α la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a $f(\alpha)$, y esto ocurre, en particular, cuando $a_n \neq \alpha$ para todo n natural, luego $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Recíprocamente, si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - \alpha| < \delta$, entonces $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$. Si fuera $|x - \alpha| = 0$ tenemos $x = \alpha$ y $|f(x) - f(\alpha)| = 0 < \varepsilon$. Por tanto, hemos probado que
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in A, \ |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$
Aplicando el Teorema 12.4.1, f es continua en α, como queríamos.

□

Según la proposición anterior, si f no es continua en α puede ocurrir que f no tenga límite en α o que dicho límite sea distinto de $f(\alpha)$. Tenemos por tanto dos tipos de discontinuidades.

Definición 13.2.2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A \cap A'$. Diremos que f tiene una **discontinuidad evitable** en el punto α cuando f tenga límite en el punto α y dicho límite sea distinto de $f(\alpha)$.

El nombre de evitable se justifica por el hecho de que si cambiamos el valor de la función f en el punto α, dándole el valor $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$, obtenemos otra función que es continua en α y que coincide con f en $A - \{\alpha\}$.

Notemos que la Proposición 13.2.1 se aplica solamente a puntos del conjunto de definición de la función. Para puntos de acumulación de dicho conjunto que no pertenezcan al mismo, la existencia de límite de una función equivale a la posibilidad de extender la función de forma que se obtenga una función continua.

Proposición 13.2.3. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *f tiene límite en el punto α.*

II. *Existe una función $\hat{f} : A \cup \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en el punto α y tal que $\hat{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A - \{\alpha\}$.*

Además, en caso de que se cumplan I) y II), se tiene que $\hat{f}(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$. Como consecuencia, la función $\hat{f}$ es única.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

I. $\Longrightarrow$ II. Definimos $\hat{f} : A \cup \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\hat{f}(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x), \; \hat{f}(x) = f(x), \; \forall x \in A - \{\alpha\}$$

Es evidente que α es un punto de acumulación de $A \cup \{\alpha\}$ y que

$$\lim_{x\to\alpha} \hat{f}(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \hat{f}(\alpha)$$

por lo que, en virtud de la Proposición 13.2.1, $\hat{f}$ es continua en α; es obvio que f y $\hat{f}$ coinciden en $A - \{\alpha\}$.

II. $\Longrightarrow$ I. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de A distintos de α, convergente a α. Por ser $\hat{f}$ continua en α, tenemos que $\{\hat{f}(a_n)\} \longrightarrow \hat{f}(\alpha)$.

Como sabemos que $a_n \in A - \{\alpha\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\hat{f}(a_n) = f(a_n), \; \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto $\{f(a_n)\} \longrightarrow \hat{f}(\alpha)$, lo que prueba que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \hat{f}(\alpha)$.

□

Merece la pena clarificar un poco la proposición anterior distinguiendo varios casos. Si $\alpha \in A$ y f es continua en α, entonces $\hat{f} = f$; si $\alpha \in A$ y f tiene una discontinuidad evitable en α, entonces $A \cup \{\alpha\} = A$ y $\hat{f}$ es la función que se obtiene al "evitar" la discontinuidad de f. Finalmente, si $\alpha \notin A$, según la proposición anterior, f tiene límite en el punto α si, y sólo si, f admite una extensión al conjunto $A \cup \{\alpha\}$ que sea continua en α, que es precisamente la función $\hat{f}$.

13.3. Límites laterales

Según el Teorema 13.1.4, para comprobar la existencia de límite de una función en un punto, basta considerar sucesiones monótonas, es decir, considerar simultáneamente sucesiones crecientes y sucesiones decrecientes. Cuando se consideran unas y otras por separado se llega al concepto de límite lateral que introduciremos a continuación. Intuitivamente, el que una función tenga límite en un punto indica una regularidad al "acercarnos" a dicho punto. Cuando solamente admitimos la posibilidad de acercarnos al punto por la izquierda (respectivamente por la derecha), aparece el concepto de límite por la izquierda (respectivamente derecha).

Definición 13.3.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que α es un **punto de acumulación por su izquierda** (respectivamente **por su derecha**) de A si existe alguna sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, menores que α (respectivamente mayores que α), convergente a α. Escribiremos que $\alpha \in A'_-$ (respectivamente $\alpha \in A'_+$).

De forma equivalente, tenemos que

$$\alpha \in A'_- \Longleftrightarrow \forall \delta > 0,\ ]\alpha - \delta, \alpha[\ \cap\ A \neq \emptyset$$
$$\alpha \in A'_+ \Longleftrightarrow \forall \delta > 0,\ ]\alpha, \alpha + \delta[\ \cap\ A \neq \emptyset$$

Definición 13.3.2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que f tiene **límite por la izquierda** (respectivamente **límite por la derecha**) en el punto α, si existe un número real L verificando la siguiente propiedad:

Para toda sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A, distintos de α, creciente (respectivamente decreciente) y convergente a α, se tiene que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a L.

Se suele escribir

$$L = \lim_{x \to \alpha^-} f(x) \text{ (respectivamente } L = \lim_{x \to \alpha^+} f(x))$$

Si consideramos los conjuntos

$$A_\alpha^- = \{a \in A \ :\ a < \alpha\};\ A_\alpha^+ = \{a \in A \ :\ a > \alpha\}$$

Es inmediato que para que tenga sentido hablar de límite por la izquierda (respectivamente derecha) en α para funciones de A en $\mathbb{R}$ es condición necesaria y suficiente que $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ (respectivamente $\alpha \in (A_\alpha^+)'$).

También es inmediato que α es un punto de acumulación de A si, y sólo si, lo es de A_α^- o de A_α^+.

Por tanto, si tiene sentido hablar de límite de un función en un punto α para funciones de A en $\mathbb{R}$, también tiene sentido hablar de al menos uno de los límites laterales.

Proposición 13.3.3. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, $\alpha \in A'$ y L un número real.*

I. *Supongamos que $\alpha \notin (A_\alpha^+)'$ pero $\alpha \in (A_\alpha^-)'$. Entonces*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = L$$

II. *Supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ pero $\alpha \notin (A_\alpha^-)'$. Entonces*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to \alpha^+} f(x) = L$$

III. *Supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cap (A_\alpha^-)'$. Entonces*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = L$$

Demostración. Demostramos cada uno de los apartados:

I. En este caso, el conjunto de sucesiones monótonas de puntos de A distintos de α y convergentes a α coincide con el conjunto de sucesiones crecientes de puntos de A distintos de α y convergentes a α, luego los conceptos de límite de una función en un punto α y de límite por la izquierda en α son idénticos en vista del Teorema 13.1.4 I $\Longleftrightarrow$ II)).

II. Análoga a I).

III. No es más que otra forma de enunciar la equivalencia entre las afirmaciones I) y II) del Teorema 13.1.4.

$\square$

Definición 13.3.4. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Si no existe $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, diremos que f tiene una **discontinuidad esencial**.

Definición 13.3.5. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y y $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cap (A_\alpha^-)'$. Si f tiene límite por la izquierda y por la derecha en el punto α y ocurre que

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \neq \lim_{x\to\alpha^-} f(x)$$

diremos que f tiene una **discontinuidad de salto finito** en el punto α.

Como ejemplo, es fácil probar (¡Hágase!) que todas las discontinuidades de la función parte entera son de salto finito.

Proposición 13.3.6. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que α es un punto de acumulación de A_α^- (respectivamente A_α^+). Consideramos $g = f_{|_{A_\alpha^-}}$ (respectivamente $g = f_{|_{A_\alpha^+}}$). Entonces, f tiene límite por la izquierda (respectivamente derecha) en el punto α si, y sólo si, g tiene límite en el punto α, en cuyo caso*

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) \qquad \left(\textit{respectivamente } \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x)\right)$$

Demostración. El conjunto de las sucesiones crecientes (respectivamente decrecientes) de puntos de A distintos de α, convergentes a α, coincide con el conjunto de las sucesiones monótonas de puntos A_α^- (respectivamente A_α^+), distintos de α, convergentes a α. Con esto la proposición es evidente teniendo en cuenta una vez más el Teorema 13.1.4. $\square$

13.4. Límites en el infinito

El concepto de sucesión divergente, introducido en el tema 7, nos va a permitir estudiar el comportamiento de una función real de variable real cuando la variable crece o decrece sin límite.

Definición 13.4.1. Sea A un conjunto de números reales no mayorado (respectivamente no minorado) y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f tiene **límite cuando la variable diverge positivamente** (respectivamente **negativamente**) o que tiene **límite en** $+\infty$ (respectivamente que tiene **límite en** $-\infty$) cuando exista $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:

Para toda sucesión $\{x_n\}$ *de elementos de* A *que diverja positivamente (respectivamente negativamente) la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *converge a* L.

Si existe, dicho L es único y se suele escribir:

$$L = \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ (respectivamente } L = \lim_{x\to-\infty} f(x))$$

Proposición 13.4.2. *Sea* A *un conjunto de números reales no minorado y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Consideramos el siguiente conjunto*

$$B = \{-x \ : \ x \in A\} \ (\textit{Claramente } B \textit{ no está mayorado})$$

Definimos $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = f(-x), \ \forall x \in B$$

Si L *es un número real, entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = L$$

Demostración. Probaremos solamente la implicación a la derecha, pues la otra es enteramente análoga. Sea $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de B que diverja positivamente. Entonces $\{-x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que diverge negativamente, luego la sucesión $\{f(-x_n)\} = \{g(x_n)\}$ converge a L. □

Proposición 13.4.3. *Sea* A *un conjunto de números reales no mayorado y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Sea* $B = \left\{\frac{1}{x} \ : \ x \in A, \ x > 0\right\}$. *Definimos* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \in B$$

Entonces, $0 \in B'$ *y dado un número real* L *se tiene que*

$$\lim_{x\to 0} g(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Demostración. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de puntos de A que diverja positivamente. Entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geq m \Longrightarrow x_n > 0$$

La sucesión $\{x_{n+m}\}$ diverge positivamente (¿Por qué?) y todos sus términos son positivos, luego $\left\{\frac{1}{x_{n+m}}\right\}$ es una sucesión de puntos de B no nulos que, por el ejercicio 7.2.11, converge a 0. Esto prueba que $0 \in B'$.

Supongamos que $\lim_{x\to 0} g(x) = L$ y sea $\{x_n\}$ como antes. Entonces, la sucesión $\left\{g\left(\frac{1}{x_{n+m}}\right)\right\}$ converge a L, por lo que $\{f(x_{n+m})\}$ converge a L y, por tanto, $\{f(x_n)\}$ converge a L.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de puntos de B que converja a 0. Como $x_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar de nuevo el ejercicio 7.2.11, obteniendo que la sucesión $\left\{\frac{1}{|x_n|}\right\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ diverge positivamente. Como $\frac{1}{x_n} \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\left\{f\left(\frac{1}{x_n}\right)\right\} \longrightarrow L$, por lo que la sucesión $\{g(x_n)\}$ converge a L. □

13.5. Funciones divergentes

Definición 13.5.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Dado $\alpha \in A'$, diremos que la función f **diverge positivamente en el punto** α cuando para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A distintos de α, convergente a α, la sucesión $\{f(a_n)\}$ diverge positivamente. Escribiremos

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$$

Supongamos ahora que $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ (respectivamente $\alpha \in (A_\alpha^+)'$). Diremos que f **diverge positivamente en el punto** α **por la izquierda** (respectivamente **por la derecha**) cuando para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, distintos de α, creciente (respectivamente decreciente) y convergente a α, la sucesión $\{f(a_n)\}$ diverge positivamente. Escribiremos

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = +\infty \text{ (respectivamente } \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty)$$

Finalmente, supongamos que A no está mayorado (respectivamente no minorado). Diremos que f **diverge positivamente en** $+\infty$ (respectivamente en $-\infty$) cuando para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A que diverja positivamente (respectivamente negativamente) se tiene que $\{f(a_n)\}$ diverge positivamente. Escribiremos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ (respectivamente } \lim_{x-\infty} f(x) = +\infty)$$

Análogas definiciones para la divergencia negativa de f en un punto α, en el punto α por la izquierda, en el punto α por la derecha, en $+\infty$ y $-\infty$.

Las proposiciones que ya hemos probado referentes a la relación entre límites laterales y límite en un punto y a la reducción de los conceptos de límite lateral y límite en el infinito al de límite en un punto se pueden adaptar con facilidad al caso de funciones divergentes. Enunciamos la adaptación de la Proposición 13.4.3, cuya demostración se deja como ejercicio.

Proposición 13.5.2. *Sea A un conjunto de números reales no mayorado y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $B = \left\{\frac{1}{x} : x \in A,\ x > 0\right\}$. Definimos $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right),\ \forall x \in B$$

Entonces, $0 \in B'$ y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

En vista de lo anterior, el comportamiento de una función en un punto por la derecha o por la izquierda, en $+\infty$ o en $-\infty$ equivale al comportamiento de otra función en un punto. En el resto del tema, todos los resultados se referirán al límite o divergencia de una función en un punto. Sin embargo, debe quedar claro que todos ellos tienen automáticamente su correspondiente enunciado para límites laterales y límites en el infinito.

Definición 13.5.3. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $\alpha \in (A_\alpha^-)' \cap A$ (respectivamente $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cap A$). Diremos que f tiene una **discontinuidad de salto infinito por la izquierda** (respectivamente **derecha**) **de** α si f diverge en el punto α por la izquierda (respectivamente derecha).

13.6. Álgebra de límites

En este apartado, relacionamos los conceptos de límite y de divergencia de una función en un punto con las operaciones de suma y producto.

Proposición 13.6.1. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $\alpha \in A'$.*

I. *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to\alpha} g(x) = L_2$, entonces $\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = L_1 + L_2$.*

II. *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ y g verifica que*

$$\exists\delta > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ x \in A,\ |x-\alpha| < \delta \Longrightarrow g(x) \geq M$$

(esto es, g está minorada en la intersección de A con un cierto intervalo de centro α), entonces $\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = +\infty$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 5.3.1 y del ejercicio 7.2.4. □

Proposición 13.6.2. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $\alpha \in A'$.*

I. *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ y g verifica que*

$$\exists\delta > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ x \in A,\ |x-\alpha| < \delta \Longrightarrow |g(x)| \leq M$$

(esto es, g está acotada en la intersección de A con un cierto intervalo de centro α), entonces $\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = 0$.

II. *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ y g verifica que*

$$\exists\delta > 0,\ \exists\lambda > 0\ :\ x \in A,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \Longrightarrow g(x) \geq \lambda$$

(esto es, g está minorada por un número positivo en la intersección de A con un cierto intervalo de centro α salvo el propio punto α), entonces se tiene $\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = +\infty$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 5.3.3 y del Teorema 7.1.4. □

Corolario 13.6.3. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $\alpha \in A'$.*

I. *Si f y g tienen límite en el punto α, entonces fg tiene límite en el punto α y se verifica que*

$$\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

II. *Si f diverge en el punto α y g tiene límite no nulo o diverge en α, entonces fg diverge en el punto α.*

Demostración. Demostramos cada afirmación por separado:

I. Consecuencia de la Proposición 5.3.4 y también se puede deducir de la proposición anterior (proposición 13.6.2).

II. Se deduce de la segunda parte de la proposición anterior (proposición 13.6.2). Véanse el Teorema 7.1.4 y los ejercicios 7.2.7, 7.2.8, 7.2.9.

□

Proposición 13.6.4. *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Definimos $B = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$. Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \neq 0$ (respectivamente f diverge en α), entonces α es un punto de acumulación de B y la función $\frac{1}{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica:*

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L} \qquad \left(\textit{respectivamente } \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0\right)$$

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de A, distintos de α, convergente a α. Entonces, o bien $\{f(a_n)\} \longrightarrow L \neq 0$ o bien $\{f(a_n)\}$ diverge. En cualquier caso

$$\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Longrightarrow f(a_n) \neq 0$$

y la sucesión $\{a_{n+m}\}$ es una sucesión de puntos de B distintos de α convergente a α, luego α es un punto de acumulación de B. Sea $\{b_n\}$ cualquier sucesión de elementos de B, distintos de α, convergente a α. Aplicando la Proposición 5.3.3 y el ejercicio 7.2.11, tenemos en un caso que $\left\{\frac{1}{f}(b_n)\right\} \longrightarrow \frac{1}{L}$ y en otro $\left\{\frac{1}{f}(b_n)\right\} \longrightarrow 0$. □

13.7. Ejercicios

Ejercicio 13.7.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Probar que f tiene límite en el punto α si, y sólo si, para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, distintos de α, convergente a α, la sucesión $\{f(a_n)\}$ es convergente. ¿Es cierto el mismo enunciado pero considerando solamente sucesiones monótonas?

Ejercicio 13.7.2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Supongamos que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \neq 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \Longrightarrow Lf(x) > 0$$

Ejercicio 13.7.3. Sea $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ 1+x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

¿Tiene f límite en 0? ¿Existe algún valor de a para el cual f sea continua en 0? ¿Admite f una extensión continua al intervalo $]-1,1]$? ¿Y al intervalo $[-1,1]$?

Ejercicio 13.7.4. Calcula la imagen de la función $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)},\ \forall x \in\ ]0,1[$$

Ejercicio 13.7.5. Calcula la imagen de la función $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}, \ \forall x \in \ ]-1,1[$$

Ejercicio 13.7.6. Calcula la imagen de la función $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in \ ]-1,1[$$

Ejercicio 13.7.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Probar que:

I. f es continua.

II. f es decreciente en $\mathbb{R}^-$.

III. f es creciente en $\mathbb{R}^+$.

IV. Calcular la imagen de f.