



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 17 de marzo de 2016.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes funciones $F y \varphi$:

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto F(x,y)$$

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi(x)$$

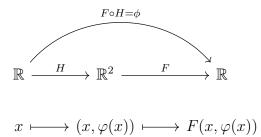
se define la siguiente función phi:

$$\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto F(x, \varphi(x))$$

Suponiendo que F y φ son de clase C^2 , expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ .

Veamos en primer lugar que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$. Tenemos que:



En primer lugar, $H=(Id,\varphi)$, donde Id es la función identidad. Por tanto, se tiene que $H\in C^2(\mathbb{R})$ por ser ambas componentes $C^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, $F\in C^2(\mathbb{R}^2)$ por hipótesis. Por tanto, $\phi=F\circ H\in C^2(\mathbb{R})$ por ser composición de funciones de clase $C^2(\mathbb{R})$. Tenemos por tanto que:

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

Derivando de nuevo, tenemos:

$$\phi''(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi''(x) + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x))\varphi'(x)\right)$$

Ejercicio 2. Encuentra la solución de la siguiente ecuación diferencial, precisando el intervalo *I* donde está definida:

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0) = 0$$

Ejercicio 3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones y = y(x) cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto (x, y(x)) coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

La distancia al origen desde un punto P = (x, y(x)), notada por d(P, O), viene dada por:

 $d(P, O) = \sqrt{x^2 + (y(x))^2}$

La recta tangente a la gráfica de y = y(x) en el punto (x, y(x)) tiene pendiente y'(x) y pasa por el punto (x, y(x)). Siendo $(x_0, 0)$ el punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas, se tiene que: Tenemos entonces que, de la definición de pendiente dada por dos puntos, tenemos que:

$$y'(x) = m_t = \frac{y(x) - 0}{x - x_0} = \frac{y(x)}{x - x_0}$$

Notemos que el caso $x=x_0$ no es posible, pues la recta tangente no estaría definida al solo tener entonces un punto.

La primera coordenada del punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas es x_0 . Por tanto, esta es:

$$x_0 = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Imponiendo la condición del enunciado de que $d(P, O) = x_0$, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + (y(x))^2} = -\frac{y(x)}{y'(x)} + x$$

Despejando y'(x), tenemos que:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x - \sqrt{x^2 + (y(x))^2}}$$

Expresado con la notación correspondiente a la ecuación diferencial, tenemos:

$$y' = -\frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables ϕ : $s = e^t$, $y = e^{-tx}$. Demuestra que ϕ define un difeomorfismo entre \mathbb{R}^2 y un dominio Ω del plano. Determina Ω . Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = tx^2$ y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

Ejercicio 5. Se considera la función seno hiperbólico f = senh definida como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto f(t) = \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Demuestra que f tiene una inversa¹ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t = g(x) y calcula g'(x).

¹Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{argsh} x$, argumento del seno hiperbólico