Variable Compleja I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{1 + i}$.
2. $z_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{3} - 1}$.

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \qquad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2|z - i|\}$.
2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ {}^{\pi}/_{2} & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -{}^{\pi}/_{2} & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.8. Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^8.$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \tag{1.2}$$

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right\}$ no es convergente y calcular su límite.