

# Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025



# Índice general

<b>1. Ecuaciones y sistemas</b>	<b>9</b>
1.1. Crecimiento proporcional . . . . .	11
1.2. Interpretación geométrica . . . . .	13
1.3. Funciones implícitas . . . . .	16
1.3.1. Derivación implícita . . . . .	21
1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones . . . . .	22
1.5. Problemas geométricos . . . . .	24
1.5.1. Trayectorias ortogonales . . . . .	26
1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . . .	28
1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano . . . . .	30
<b>2. Cambios de Variable</b>	<b>37</b>
2.1. Cálculo de primitivas . . . . .	44
2.2. Ecuaciones de variables separadas . . . . .	45
2.3. Ecuaciones homogéneas . . . . .	50
2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas . . . . .	60
2.5. Ecuaciones lineales . . . . .	62
2.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas . . . . .	63
2.5.2. Ecuaciones lineales completas . . . . .	64
2.6. Ecuación de Riccati . . . . .	67
2.7. Relación con Teoría de Grupos . . . . .	72
2.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales	79
2.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias . . . . .	80
<b>3. Condición de exactitud y factores integrales</b>	<b>81</b>
3.1. Condición de exactitud . . . . .	83
3.1.1. Integrales dependientes de un parámetro . . . . .	86
3.1.2. Interpretación de la demostración . . . . .	89
<b>4. Relaciones de Problemas</b>	<b>91</b>
4.1. Ecuaciones y sistemas . . . . .	91
4.2. Cambios de Variable . . . . .	104

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal <https://www.ugr.es/~rortega/>. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

# Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área “Ecuaciones Funcionales”, pero gracias a que en física  $F = m \cdot a$ , podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

**Ejemplo.** Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos  $l$ .
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos  $g$ .
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos  $\theta$ .



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo ( $t$ ), y ver ahora la variable  $\theta$  como una variable dependiente en función de  $t$ :

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si  $\theta(t)$  es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación<sup>1</sup>:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \tag{1}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones  $\theta$  que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

---

<sup>1</sup>De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente ( $t$ , que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función ( $x$ , en función de  $t$ ), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La  $\Phi$  que aparece en (2) será una función:

$$\begin{aligned} \Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y) \end{aligned}$$

Donde trataremos de ver  $x$  como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de  $t$ :  $x = x(t)$ , siendo  $y$  su derivada.

**Ejemplo.** Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función  $\Phi$  en cuestión es:

$$\begin{aligned} \Phi : D = \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$



Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t & x(t) &= \cos t \\ x(t) &= 1 & x(t) &= -1 \end{aligned}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \sin(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geq 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en  $\mathbb{R}^*$  por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{aligned} f : C \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para  $x'$ :  $x'(t) = h(t)$ , a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7t \\ f(t, x) &= 7t\end{aligned}$$

con  $D = \mathbb{R}^3$  y  $C = \mathbb{R}^2$ .

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - 7x \\ f(t, x) &= 7x\end{aligned}$$

con  $D = \mathbb{R}^3$  y  $C = \mathbb{R}^2$ .

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \quad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

**Ejemplo.** Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \text{sen } t$
- $x'(t) = \text{sen } x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \text{sen } t \\ f(t, x) &= \text{sen } t\end{aligned}$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, y) &= y - \text{sen } x \\ f(t, x) &= \text{sen } x\end{aligned}$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

# 1. Ecuaciones y sistemas

**Definición 1.1** (Ecuación Diferencial y solución). Una ecuación diferencial viene dada por una función

$$\begin{aligned}\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto \Phi(t, x, y)\end{aligned}$$

**continua** donde  $D$  es un **abierto**<sup>1</sup> **conexo**<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^3$ .

Una **solución** de dicha ecuación diferencial será una función  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subseteq \mathbb{R}^2$  **intervalo**<sup>3</sup> **abierto**<sup>4</sup> tal que:

- (I)  $x$  sea derivable en  $I$ <sup>5</sup>.
- (II)  $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ <sup>6</sup>.
- (III)  $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ .

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

y la expresión:

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}$$

Probar que dicha expresión es solución de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial viene dada por

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto y - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

- Cogiendo  $I = ]19, +\infty[$ , tenemos (I).
- Por ser la raíz una función continua y creciente, tenemos que  $x(I) = ]0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$ , de donde se cumple (II).

---

<sup>1</sup>Por convenio, ya que las ecuaciones diferenciales no se comportan bien en los bordes.

<sup>2</sup>Es lógico pensarlo, ya que estamos estudiando movimientos.

<sup>3</sup>Es lógico, pues usualmente  $t$  será el tiempo.

<sup>4</sup>Pudiendo trabajar con funciones continuas en un cerrado y derivables en el abierto, evitando así por ejemplo tangentes verticales

<sup>5</sup>Necesario para poder considerar  $x'(t)$  en la propia ecuación.

<sup>6</sup>En vistas de (III).

■

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-38}} = \frac{1}{x(t)} \quad \forall t \in I$$

**Notación.** La notación que hemos estado utilizando para las ecuaciones diferenciales no es la que usaremos a lo largo del curso:

Lo que hasta ahora hemos notado y entendido por:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Como en el caso:

$$x'(t) = 3x(t)$$

Lo notaremos ahora por:

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, x') &= 0 \\ x' &= 3x \end{aligned}$$

Que recordamos tiene por solución:

$$x(t) = c \cdot e^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo.** Para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , resolver:

1.  $x' = \lambda x$

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

2.  $x' = \lambda t$

$$x(t) = \frac{\lambda}{2} t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

**Definición 1.2** (Ecuación Diferencial en forma normal). Una ecuación diferencial en forma normal viene dada por una expresión

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

**continua** donde  $D$  es un conjunto **abierto** y **conexo** de  $\mathbb{R}^2$ .

Una solución de dicha ecuación diferencial será una función  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un **intervalo abierto** tal que:

(I)  $x$  sea derivable en  $I$ .

(II)  $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$ .

(III)  $x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I$ .

*Observación.* Notemos que las ecuaciones diferenciales en forma normal son ecuaciones diferenciales, ya que dada una ecuación diferencial en forma normal mediante una función  $f : C \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo y una solución suya  $x$  definida en un intervalo abierto  $I$ , entonces puedo definir la función

$$\begin{aligned} \Phi : D = C \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\longmapsto y - f(t, x) \end{aligned}$$

con  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto (por ser producto de abiertos) y conexo (por ser producto de conexos),  $\Phi$  una función continua por ser diferencia de funciones continuas y:

- (I)  $x$  es derivable en  $I$ .
- (II) Como  $D = C \times \mathbb{R}$  y como  $(t, x(t)) \in C \forall t \in I$ , entonces  $(t, x(t), x'(t)) \in D \forall t \in I$ .
- (III) Como  $x'(t) = f(t, x(t)) \forall t \in I$ , entonces tendremos que:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = x'(t) - f(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

## 1.1. Crecimiento proporcional

En el capítulo anterior nos preguntábamos si todas las soluciones de la ecuación  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$  eran de la forma

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora daremos respuesta a dicha cuestión, comentando además utilidades de la misma ecuación.

**Proposición 1.1.** *Dada  $x(t)$ , solución de  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definida en un intervalo abierto  $I$ , existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que*

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad t \in I$$

Antes de dar paso a la demostración, observemos que si suponemos cierta la tesis:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \iff e^{-\lambda t} x(t) = c \implies \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} x(t)) = 0$$

*Demostración.* Definimos la función

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-\lambda t} x(t) \end{aligned}$$

que es derivable por ser producto de funciones derivables.

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} x(t)) = -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + e^{-\lambda t} x'(t) \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + \lambda e^{-\lambda t} x(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por ser  $f$  continua y definida en un intervalo, llegamos a que es constante, luego  $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = e^{-\lambda t} x(t) = c \quad \forall t \in I$ , de donde deducimos que:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

□

Nos centraremos ahora en la idea intuitiva de derivada como representación de la variación de una variable dependiente para dar lugar a los siguientes dos ejemplos que nos muestran cómo surge la ecuación diferencial  $x' = \lambda x$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$  de forma natural.

**Ejemplo.** Si ingresamos un capital inicial  $C(0) = 100$  en un banco que nos da el 2 % anual de interés, al cabo de un año tendremos en nuestra cuenta:

$$C(1) = C(0) + \frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{2}{100} \cdot 100 = 102$$

Sin embargo, si acudimos a otro banco que nos ofrece la misma tasa anual de interés pero que nos realiza pagos semestrales, al cabo de un año conseguiremos reunir:

$$\begin{aligned} C(1/2) &= C(0) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(0) = 100 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 100 = 101 \\ C(1) &= C(1/2) + \frac{1}{2} \frac{2}{100} C(1/2) = 101 + \frac{1}{2} \frac{2}{100} \cdot 101 = 102,01 > 102 \end{aligned}$$

En general, si  $\Delta t$  es la fracción del año en la que se nos hacen los pagos ( $\Delta t = 1$  significa que es pago anual), la fórmula es:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{2}{100} \Delta t C(t)$$

de donde:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{2}{100} C(t)$$

Si ahora vamos a un banco que nos haga pagos continuos, dicha fracción de tiempo será mínima, por lo que podemos pensar que  $\Delta t \rightarrow 0$  y hacer un paso al límite (no riguroso) para obtener que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t) = \frac{2}{100} C(t)$$

De donde tenemos

$$C' = \frac{2}{100} C$$

o de forma general, si notamos por  $I \in \mathbb{R}$  a la tasa de interés:

$$C' = IC$$

Cuyas soluciones ya sabemos que se tratan de cualquier función de la familia:

$$C(t) = c \cdot e^{It} \quad c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el crecimiento del dinero en un banco que nos ofrezca un interés continuo es exponencial. En este ejemplo, vemos cómo el crecimiento del dinero en una cuenta bancaria es exponencial a la propia cantidad de dinero de la que disponemos en la misma.

**Ejemplo.** La teoría física de la radioactividad nos dice que las sustancias radioactivas van perdiendo masa a una velocidad proporcional a la masa de la propia sustancia. Es decir, si representamos la masa de una sustancia radioactiva como variable dependiente del tiempo  $m = m(t)$ :

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

Para cierto parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  relativo a la sustancia radioactiva que consideremos.

Gracias al estudio anteriormente realizado de la ecuación diferencial  $m' = -\lambda m$ , sabemos ya que soluciones de esta son cualesquiera funciones de la forma:

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

En este ejemplo, hemos vuelto a observar la interpretación de la derivada como cuantía de la variación de una determinada variable dependiente.

## 1.2. Interpretación geométrica

A continuación, trataremos de dar una interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones, basándonos en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que describe la función en dicho punto.

Como ya mencionamos anteriormente, para dar una ecuación diferencial de orden 1 en forma normal nos es suficiente con dar una función

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

continua de tal forma que la ecuación diferencial a resolver es

$$x' = f(t, x)$$

cuya solución será una función  $x = x(t)$ .

Interpretaremos la función  $f$  como un campo de direcciones, es decir, a cada punto del plano  $(t, x)$  le asignamos un número  $f(t, x)$  e interpretaremos dicho número como la pendiente de la recta que pasa por dicho punto.

A partir de dicha función podemos ir construyendo un “campo de direcciones”, una regla que a cada punto del plano le asigna una recta que pasa por dicho punto.

Recordando la ecuación diferencial  $x' = f(t, x)$  que nos da la igualdad  $x'(t) = f(t, x(t))$ , en el miembro derecho de esta última tenemos la pendiente asociada a la recta del campo de direcciones del punto  $(t, x(t))$ , mientras que a la izquierda tenemos la pendiente de la recta tangente a la curva  $x = x(t)$  en el punto  $(t, x(t))$ .

De esta forma, podemos imaginarnos la ecuación diferencial como un campo de direcciones, mientras que las soluciones son curvas que “peinan” dicho campo.

A continuación, ilustraremos gráficamente varios campos de direcciones dados por ecuaciones diferenciales y soluciones a dichas ecuaciones diferenciales, mediante varios ejemplos.

**Ejemplo.** Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 0$$

Cuyas soluciones son todas las funciones constantes:

$$x(t) = c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

por lo que a cada punto  $(t, x)$  del plano le asociamos rectas de pendiente 0 que pasen por dicho punto, es decir, rectas horizontales.

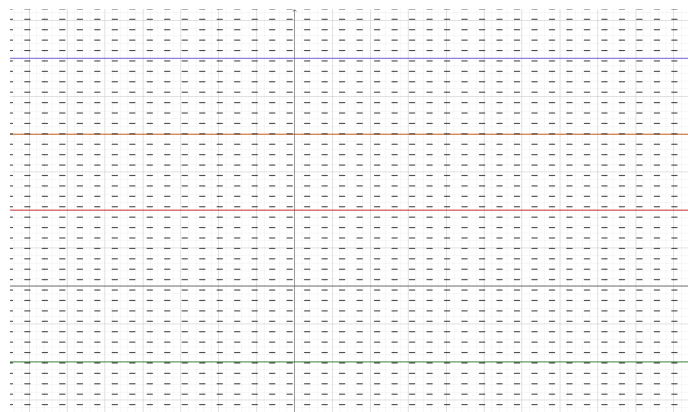


Figura 1.1: Campo de direcciones para  $x' = 0$  y algunas soluciones de la misma.

**Ejemplo.** Consideremos ahora:

$$x' = 1$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$x(t) = t + c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, el campo de direcciones viene dado por

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

por lo que a cada punto  $(t, x)$  le asociamos una recta a  $45^\circ$  de inclinación.

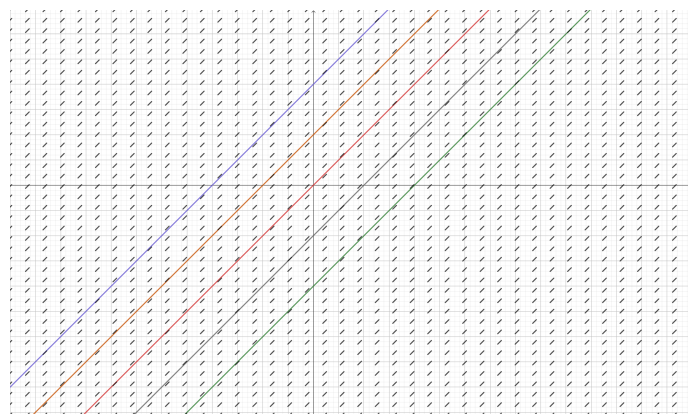


Figura 1.2: Campo de direcciones para  $x' = 1$  y algunas soluciones de la misma.



**Ejemplo.** Consideramos:

$$x' = x$$

Cuyas soluciones sabemos que son:

$$x(t) = c \cdot e^t \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Para pensar en el campo de direcciones, pensemos en ir dibujándolo por cada recta horizontal del plano:

- Para puntos  $(t, x)$  de la recta  $x = 0$ , tendremos  $f(t, x) = 0$ , luego para todos los puntos del eje de abscisas tenemos siempre rectas horizontales.
- Para los puntos de la recta  $x = 1$ , tendremos rectas a  $45^\circ$  de inclinación.
- Para  $x = -1$ , tendremos rectas a  $-45^\circ$  de inclinación.
- De igual forma, para la recta  $x = 2$ , tendremos rectas más inclinadas que la de  $45^\circ$ .
- De forma análoga, para los puntos de la recta  $x = -2$ , tendremos rectas más inclinadas que la de  $-45^\circ$ .

En definitiva, cuanto más nos alejamos del eje de abscisas, más pendientes se ponen las rectas del campo de direcciones.



Figura 1.3: Campo de direcciones para  $x' = x$  y algunas soluciones de la misma.

**Ejemplo.** Consideramos:

$$x' = t^2 + x^2$$

Cuyas soluciones se ha demostrado<sup>7</sup> que no tienen fórmula que pueda escribirse con funciones elementales clásicas.

<sup>7</sup>No se verá por exceder el conocimiento de la presente asignatura.

Pese a ello, sabemos que la función que nos da su campo de direcciones es:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto t^2 + x^2 \end{aligned}$$

Para visualizar el campo de direcciones, pensaremos en circunferencias centradas en el origen con distinto radio  $r \in \mathbb{R}_0^+$ :

- Para  $r = 0$ , tenemos la circunferencia formada por el punto  $(0, 0)$ , con  $f(0, 0) = 0$ , luego tenemos que la recta asociada a dicho punto es una recta horizontal.
- Para  $r = 1$ , tenemos que  $t^2 + x^2 = r^2 = 1$  para cada punto  $(t, x)$  de dicha circunferencia, luego tenemos una recta a  $45^\circ$  de inclinación en cada punto de dicha circunferencia.
- Para  $r = 2$ , tenemos que  $t^2 + x^2 = r^2 = 4$  para cada punto de la circunferencia, luego tendríamos una recta de mayor inclinación en dichos puntos.

Podemos ya imaginarnos cuál será el campo de direcciones, el cual podemos graficar gracias a los ordenadores:

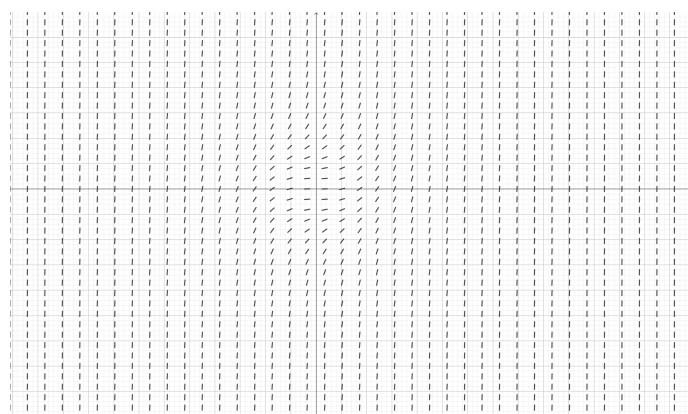


Figura 1.4: Campo de direcciones para  $x' = t^2 + x^2$ .

No conocemos soluciones para esta ecuación diferencial. Sin embargo, observando el campo de direcciones, observamos que las soluciones son funciones crecientes, con límite a  $-\infty$  por la izquierda y a  $+\infty$  por la derecha.

### 1.3. Funciones implícitas

Hasta ahora, hemos trabajado principalmente con funciones definidas en forma explícita  $x = x(t)$ . Sin embargo, en ecuaciones diferenciales es común trabajar con funciones definidas por una ecuación de la forma

$$F(t, x) = 0$$

por lo que tenemos que saber trabajar con ellas.

Cabe destacar que toda función explícita puede ponerse como implícita, pero no toda función implícita dada por una fórmula puede ponerse como función explícita. De esta forma, el estudio que realizaremos a continuación está enfocado a dichas funciones implícitas que no pueden ponerse de forma explícita.

Por lo tanto, si nos encontramos con una ecuación que nos da una función implícita de la cual podemos despejar  $x$ , podemos expresar la función de forma explícita y no será necesario aplicar lo aprendido en esta sección.

**Ejemplo.** La fórmula

$$x - t = 0$$

nos define una ecuación implícita  $x = x(t)$ , ya que dado un  $t \in \mathbb{R}$ , existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifica la fórmula. Sin embargo, dicha función  $x$  podemos expresarla de forma explícita, sacando su fórmula despejando  $x$  de la fórmula anterior:

$$x(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y podremos trabajar con ella como una función explícita, algo a lo que ya estamos acostumbrados.

**Ejemplo.** Veamos que la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0 \tag{1.1}$$

nos define una función implícita  $x(t)$ , es decir, que dado un número  $t \in \mathbb{R}$ , existe un único valor  $x \in \mathbb{R}$  que verifique la fórmula (1.1).

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , hemos de probar la existencia y unicidad de  $x \in \mathbb{R}$  tal que verifique la fórmula (1.1). Cuando lo tengamos probado, notaremos  $x(t) = x$  para dicho  $t$  y tendremos probado que la fórmula (1.1) nos define una función implícita.

*Demostración.* Demostremos por un lado la existencia y por otro la unicidad:

**Existencia.**

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , podemos definir el polinomio

$$p_t(x) = x^7 + 3x + t^2$$

Y por ser un polinomio de grado impar, conocemos que al menos tiene una raíz  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifica la fórmula (1.1)<sup>8</sup>.

**Unicidad.**

Derivamos ahora el polinomio  $p_t$ :

$$p'_t(x) = 7x^6 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego es una función estrictamente creciente, por lo que a lo sumo tiene una raíz.

---

<sup>8</sup>Es contenido de Álgebra I, pero puede deducirse ya que tiene límite a  $-\infty$  por la izquierda y a  $+\infty$  por la derecha, y aplicamos el Teorema de Bolzano.

□

Acabamos de ver un ejemplo de fórmula que nos define una única función implícita  $x = x(t)$ . Nos preguntamos a continuación si cualquier fórmula nos provee de una función implícita. En caso de hacerlo, ¿obtenemos funciones derivables? Dicha pregunta nos servirá de paso para probar que la función implícita  $x = x(t)$  del ejemplo anterior es derivable.

1. Como primera observación sencilla, mostramos que hay ecuaciones que no nos definen ninguna función implícita, como:

$$x^2 + t^2 = -1$$

Esto se debe a que, dado  $t \in \mathbb{R}$ , no podemos encontrar ningún  $x \in \mathbb{R}$  tal que se verifique la ecuación.

2. Además, hay ecuaciones que nos dan más de una función implícita, como el clásico ejemplo de la circunferencia:

$$x^2 + t^2 = 1$$

Dicha ecuación nos fabrica dos funciones implícitas que además podemos expresar de forma explícita:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= +\sqrt{1-t^2}, & t \in [-1, 1] \\ x_2(t) &= -\sqrt{1-t^2}, & t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

3. Finalmente, observamos que hay funciones implícitas que no se pueden derivar. Por ejemplo, la fórmula:

$$x^3 - t^2 = 0$$

nos da una función implícita que podemos poner como explícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pero dicha función no es derivable en 0.

En resumen, dada una fórmula que nos relacione dos variables:

$$F(t, x) = 0$$

no podemos asegurar que la función implícita que nos da (en caso de hacerlo) sea derivable, puede pasar cualquier cosa: a veces no define ecuación implícita, a veces define varias, puede definirlas sólo una que no sea derivable, o que sí lo sea, ... No contamos por tanto con una teoría general de ecuaciones implícitas.

Sin embargo, contamos con un resultado bastante útil que ya conocimos en Análisis Matemático I, el Teorema de la Función Implícita<sup>9</sup>. Se trata de un teorema local que da condiciones para que exista la función implícita y sea única, dentro de un entorno suficientemente pequeño.

<sup>9</sup>Aunque en Análisis Matemático I se dio el teorema en su forma más general, en esta asignatura nos interesará el caso de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.2** (Función Implícita). Sea  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto y sea

$$\begin{aligned} F : \quad G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

una función de clase  $\mathcal{C}^1(G)$ , es decir, que existan las parciales respecto a  $t$  y respecto a  $x$  y que ambas sean continuas.

Sea  $(t_0, x_0) \in G$  de forma que  $F(t_0, x_0) = 0$  y se cumpla que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$

Entonces, existe una función

$$\begin{aligned} x : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto de forma que  $x \in \mathcal{C}^1(I)$  y se verifica:

1.  $t_0 \in I$ .
2.  $x(t_0) = x_0$ .
3.  $(t, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$ .
4.  $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ .

Veremos ahora varios usos prácticos del teorema:

**Ejemplo.** En el caso

$$x^2 + t^2 = 1$$

Tenemos la función

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x^2 + t^2 - 1 \end{aligned}$$

que es de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 2x \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Buscamos ahora un punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  para aplicar el teorema:

- Ha de ser un punto de la circunferencia de radio 1, para que  $F(t_0, x_0) = 0$ .
- Además, ha de ser  $x_0 \neq 0$ , para que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = 2x_0 \neq 0$$

De esta forma, podemos elegir cualquier punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$  para aplicar el teorema. Por tanto, dado cualquier punto  $t_0 \in ]-1, 1[$ , el teorema nos dice que hay un intervalo abierto  $I$  de forma que  $t_0 \in I \subseteq ]-1, 1[$  en el que la función (ya sea la anterior  $x_1$  o  $x_2$  de la última enumeración) es derivable.

Es cierto que sabíamos ya de antemano la existencia de dichas funciones, pero en caso de no saberlo el Teorema nos garantiza dicha existencia. Este es el primer uso del teorema.

**Ejemplo.** En el caso del ejemplo anterior, la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0$$

ya sabemos que existe la función implícita, pero no sabemos si dicha función es derivable o no. Usaremos el Teorema de la Función Implícita para probar que la función  $x = x(t)$  que nos da la fórmula es derivable.

Sea  $G = \mathbb{R}^2$  y  $F(t, x) = x^7 + 3x + t^2$  que es una función de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 7x^6 + 3 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 7x^6 + 3 > 0$$

Por lo que podemos elegir cualquier punto en el que  $F(t, x) = 0$  para aplicar el teorema, obteniendo que la función  $x$  es derivable.

Este es el segundo uso práctico del teorema, probar de forma fácil que una función implícita que ya conocemos es derivable.

**Ejemplo.** Anteriormente, vimos que la fórmula

$$x^3 - t^2 = 0$$

que define una función implícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

no era derivable. Comprobamos qué hipótesis es la que falla del teorema:

Tenemos

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x^3 - t^2 \end{aligned}$$

con parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = -2t \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3x^2 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

luego  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ . En el ejemplo anterior, fallaba la derivabilidad en  $t_0 = 0$ , luego comprobamos por qué la función no es derivable:

En primer lugar, para tener que  $x_0^3 - t_0^2 = 0$  con  $t_0 = 0$  ha de ser  $x_0 = 0$ . Sin embargo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$$

Luego no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita.

### 1.3.1. Derivación implícita

Hasta ahora, tenemos una forma de probar la existencia de funciones implícitas así como su derivabilidad, pero no sabemos cómo derivarlas, lo cual trataremos de resolver a continuación.

Usualmente, tendremos una función

$$\begin{aligned} F : G \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  que verifique las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, de forma que:

$$F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I \quad (1.2)$$

para cierta función  $x = x(t)$  e  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalo abierto. Nuestro objetivo será derivar la expresión anterior.

**Proposición 1.3.** *Dadas unas funciones  $F$  como la definida anteriormente,  $x$  y  $t$  funciones reales de variable real de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  y una función como resultado de la composición de funciones:*

$$s \longmapsto (t(s), x(s)) \longmapsto F(t(s), x(s))$$

que es también una función real de variable real de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , tenemos que:

$$\frac{d}{ds}[F(t(s), x(s))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s), x(s)) \cdot t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s), x(s)) \cdot x'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Usando esta proposición sobre la fórmula (1.2), llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

Que no se encuentra en forma normal. Sin embargo, es usual haber aplicado el Teorema de la Función Implícita antes de este resultado, luego, suponiendo que estamos bajo dichas hipótesis, tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \neq 0$$

en un entorno de  $t$ , por lo que en dicho caso sí que podremos despejar la ecuación diferencial anterior, para expresarla en forma normal:

$$x'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t))}{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))}$$

## 1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones

Al igual que sucede con los polinomios y sus raíces, es mucho más simple construir una ecuación diferencial a partir de una familia de soluciones a obtener la familia de funciones que resuelve una ecuación diferencial.

En esta sección, nos centraremos en cómo construir una ecuación diferencial de primer orden a partir de una familia uniparamétrica de funciones implícitas.

Para ello, nos darán una ecuación del tipo:

$$F(t, x, c) = 0$$

siendo  $c$  el parámetro, y definiéndonos una familia de funciones implícitas, de donde obtenemos la función implícita  $x = x(t)$ , y llegamos a:

$$F(t, x(t), c) = 0$$

y lo que haremos para obtener la ecuación diferencial es derivar:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t), c) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0$$

Que no es una ecuación diferencial, sino una familia de ecuaciones diferenciales, ya que para cada  $c \in \mathbb{R}$  tenemos una ecuación diferencial distinta.

El último paso, por tanto, es tratar de expresar  $c$  en función de  $x$  y de  $t$ , para sustituirlo y obtener finalmente la ecuación diferencial:

$$\left. \begin{array}{l} F(t, x(t), c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Despejar } c} \Phi(t, x, x') = 0$$

No es necesario hacer este proceso de forma rigurosa, ya que lo único que nos pedirán es obtener una ecuación diferencial que tenga por soluciones la familia uniparamétrica de funciones dada. Por tanto, siempre y cuando consigamos este objetivo, podemos responder a la pregunta simplemente dando la ecuación diferencial y probando que, efectivamente, dicha familia es solución de la ecuación.

**Ejemplo.** Hallar la ecuación diferencial que tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x^2 + t^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

En primer lugar, ya sabemos que dicha fórmula nos da una familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm \sqrt{c - t^2}, \quad t \in ]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$$

Tratamos ahora de hallar la ecuación diferencial que nos solicitan, que lo haremos derivando en ambos miembros de la fórmula (1.3):

$$\begin{aligned} (x(t))^2 + t^2 &= c \\ \frac{d}{dt} ((x(t))^2 + t^2) &= \frac{d}{dt}(c) \\ 2xx' + 2t &= 0 \end{aligned}$$



En este caso, no ha sido necesario despejar  $c$  para sustituirlo al final del cálculo anterior, ya que directamente ha desaparecido de la ecuación diferencial. De esta forma, la ecuación diferencial buscada es:

$$2xx' + 2t = 0$$

Que podemos expresar en forma normal como:

$$x' = \frac{-t}{x}$$

*Observación.* Notemos que acabamos de aprender a resolver la ecuación diferencial

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c-t^2} \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad t \in ]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$$

Para el dominio de la función hemos elegido el intervalo abierto, ya que al ser una solución de una ecuación diferencial, tiene que estar definida en un abierto conexo, tal y como concretamos en la definición de una solución de una ecuación diferencial.

**Ejemplo.** Buscar una ecuación diferencial que tenga como soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$\frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \sin t = c \tag{1.4}$$

Tendríamos que  $F(t, x, c) = \frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \sin t - c$  y ahora derivaremos de forma implícita, pensando que la fórmula nos da una función  $x = x(t)$ :

$$\frac{dF}{dt}(t, x, c) = e^{cx}x' - 2x'x - \cos t = 0 \tag{1.5}$$

Ahora, nos disponemos a eliminar el parámetro  $c$ . Despejando en la fórmula (1.5) llegamos a que:

$$\begin{aligned} e^{cx} &= \frac{2xx' + \cos t}{x'} \\ cx &= \ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right) \\ \frac{1}{c} &= \frac{x}{\ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right)} \end{aligned}$$

Y ahora sustituyendo  $c$  y  $\frac{1}{c}$  en (1.4), tenemos que la ecuación diferencial buscada es:

$$\frac{x}{\ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right)} \frac{2xx' + \cos t}{x'} - x^2 - \sin t - \frac{1}{x} \ln \left( \frac{2xx' + \cos t}{x'} \right) = 0$$

## 1.5. Problemas geométricos

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales es hallar curvas exigiendo condiciones sobre sus tangentes o normales. Por ejemplo, podemos tratar de hallar la curva cuyas normales sean todas coincidentes en un mismo punto.

**Notación.** En esta sección haremos un cambio de notación, ya que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ya no serán movimientos donde tratamos de expresar la posición  $x$  de un móvil en función del tiempo  $t$ ,  $x = x(t)$ ; sino que las soluciones serán curvas geométricas, por lo que trataremos de, dada una abscisa  $x$ , hallar la coordenada en las ordenadas  $y$  que nos diga un punto de la curva,  $y = y(x)$ .

De esta forma, sustituiremos la notación que venimos usando de las ecuaciones diferenciales  $F(t, x) = 0$  por la notación  $F(x, y) = 0$ .

Aunque toda curva en el plano puede expresarse con una ecuación implícita (esto no sucede con explícitas), supondremos siempre que las curvas las podremos poner en explícitas, con la finalidad de que nos aparezcan siempre ecuaciones de primer orden (usando ecuaciones paramétricas, por ejemplo, obtenemos sistemas de ecuaciones).

De esta forma, trabajaremos con curvas  $y = y(x)$  con  $x \in I$  intervalo abierto, siendo  $y \in \mathcal{C}^1(I)$ <sup>10</sup>.

### Rectas tangentes a una curva

Sabemos ya que, dada una curva  $y = y(x)$ , podemos encontrar en cada punto  $(x, y(x))$  una recta tangente a dicha curva. A medida que movemos el punto por la curva, vamos obteniendo todo el haz de rectas que son tangentes a dicha curva.

Dado un punto  $(x, y(x))$  de una curva  $y = y(x)$ , la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto viene dada por:

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

siendo  $u$  y  $v$  las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación<sup>11</sup>.

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , el punto  $(x, y(x))$  nos da una recta tangente a la curva por dicho punto. Si movemos la variable  $u$ , nos estaremos moviendo a lo largo de la recta tangente. Si ahora también movemos  $x$ , nos estaremos moviendo por todo el haz de rectas.

### Rectas normales a una curva

Dada una curva  $y = y(x)$ , podemos encontrar también en cada punto  $(x, y(x))$  una recta normal a dicha curva (esto es, que sea perpendicular a la recta tangente en dicho punto) que pase por el mismo punto.

<sup>10</sup>Con vistas para derivar y aplicar el Teorema de la Función Implícita.

<sup>11</sup>Notemos que no podemos usar  $x$  e  $y$  como variables por ser ya un punto que hemos fijado de la curva por el que queremos hacer pasar la recta tangente.

Para hallar la ecuación de dicha recta, pensamos en que debe pasar por el punto  $(x, y(x))$  y en que debe ser perpendicular a la recta tangente. De esta forma, si  $m_1$  y  $m_2$  son las pendientes de las rectas tangente y normal respectivamente, tenemos que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \implies m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Como la pendiente en la recta tangente es  $m_1 = y'(x)$ , tenemos ya la ecuación de la recta normal a una curva en el punto  $(x, y(x))$ , siempre y cuando  $y'(x) \neq 0$ :

$$v - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u - x) \quad (1.6)$$

siendo  $u$  y  $v$  las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación.

Sin embargo, podemos expresar dicha ecuación como:

$$y'(x)(v - y(x)) = x - u$$

Y ya podremos considerarla también cuando  $y'(x) = 0$ .

**Ejemplo.** Buscamos la curva para la que todas las rectas normales pasan por el origen<sup>12</sup>.

Para ello, buscamos expresar  $y$  como función de  $x$  para obtener la curva deseada:  $y = y(x)$ . Cuando vamos considerando todas las rectas normales, lo que hacemos es mover la ecuación de la recta normal por los puntos  $(x, y(x))$  que cumplen la curva.

Debemos imponer que todas las rectas normales de ecuación (1.6) pasen por el origen, es decir, que la ecuación de las rectas normales se cumpla para el punto  $(0, 0)$  siempre. Esto sucede cuando  $u = v = 0$ , para cada punto  $(x, y(x))$  de la curva.

Luego se cumple que:

$$-y'(x)y(x) = x$$

Ecuación diferencial que no está en forma normal:

$$y'y + x = 0$$

Pasaremos a resolverla con un truco que aprenderemos en el Capítulo 3:

Para ello, buscamos expresar la ecuación diferencial como la derivada de una expresión igualada a 0, luego esta nueva expresión será constante, y obtendremos una ecuación que nos defina una función implícita:

$$\begin{aligned} y'(x)y(x) + x &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) &= 0 \\ \frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 &= c \quad c \in \mathbb{R}^+ \\ (y(x))^2 + x^2 &= k \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Notemos que si tenemos otro punto, podemos trasladar todo el problema al origen, trasladando de nuevo la solución a dicho punto.

Dicha curva es una circunferencia centrada en el origen de radio  $k^2$ . Estamos buscando la solución en explícitas, luego despejamos y obtenemos:

$$y(x) = \pm\sqrt{k-x^2} \quad x \in ]-\sqrt{k}, \sqrt{k}[$$

(Hemos puesto el intervalo abierto por ser solución de una ecuación diferencial, luego debe estar definida en un abierto).

### 1.5.1. Trayectorias ortogonales

Dada una familia  $\mathcal{F}$  de curvas uniparamétricas en la plano mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, c) = 0 \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

de forma que por cada punto del plano pase una curva de este tipo, busquemos otra familia  $\mathcal{G}$  de curvas uniparamétricas de forma que corten ortogonalmente a las curvas de la familia  $\mathcal{F}$ . Llamaremos a las curvas de  $\mathcal{G}$  trayectorias ortogonales a las curvas de  $\mathcal{F}$ .

El procedimiento a seguir será obtener la ecuación diferencial que nos define a la familia  $\mathcal{F}$ , de la cual obtendremos la ecuación diferencial que define a la familia  $\mathcal{G}$ , obligando a que el producto de las derivadas de las curvas sea  $-1$ . Finalmente, resolveremos esta segunda ecuación diferencial, para obtener la ecuación que nos defina la familia de curvas uniparamétricas del plano.

Por tanto, con vistas a obtener la ecuación diferencial que define a la familia  $\mathcal{F}$ , derivaremos la ecuación (1.7):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' = 0 \quad (1.8)$$

Ahora, juntaremos las expresiones (1.7) y (1.8) para eliminar el parámetro  $c$ , obteniendo la ecuación diferencial de la familia  $\mathcal{F}$ , de la forma que aprendimos en la Sección 1.4 y la pondremos en forma normal:

$$y' = f(x, y)$$

Suponiendo que podemos dividir, la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales  $\mathcal{G}$  será:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Ahora, bastará resolver la ecuación diferencial obtenida para obtener una ecuación implícita que nos define la familia uniparamétrica de funciones:

$$G(x, y, k) = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo.** Demostrar que las trayectorias ortogonales a la familia:

$$x^2 + y^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+$$

son las rectas que pasan por el origen.

Para ello, derivaremos dicha expresión entendiendo que  $y$  está en función de  $x$ :

$$2x + 2yy' = 0$$

Suponiendo que  $y \neq 0$ , llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia dada:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Suponiendo ahora que  $x \neq 0$ , llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{y}{x}$$

A poco que se piense<sup>13</sup>, llegamos a que tiene por soluciones la familia

$$y(x) = k \cdot x \quad k \in \mathbb{R}$$

Estas son las rectas que pasan por el origen.

**Ejemplo.** Consideramos la siguiente ecuación que nos describe una familia uniparamétrica  $\mathcal{F}$ :

$$y = cx^2 \quad c \in \mathbb{R}$$

Buscamos la familia de trayectorias ortogonales.

La familia  $\mathcal{F}$  es la familia de parábolas con vértices en el origen:



Con vistas a obtener la ecuación diferencial que nos describa a la familia, derivamos:

$$\begin{aligned} y &= cx^2 \\ y' &= 2cx \end{aligned}$$

<sup>13</sup>En futuros temas aprenderemos a resolver más tipos de ecuaciones diferenciales.

Despejando, obtenemos el valor de  $c$ :

$$c = \frac{y}{x^2}$$

Substituímos este valor en la segunda expresión, obteniendo la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Ahora, escribimos la ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial a resolver, mediante el mismo truco que antes:

$$\begin{aligned} 2yy' + x &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( y^2 + \frac{x^2}{2} \right) &= 0 \\ y^2 + \frac{x^2}{2} &= k \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Estas son las elipses de eje mayor  $\sqrt{2}$  (en el de abscisas) y eje menor 1 (cuando  $k = 1$ ):



## 1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Nos centramos ahora en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de  $d \in \mathbb{N}$  ecuaciones será de la forma:

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_d) \quad i = 1, \dots, d$$

Y nuestras incógnitas serán:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_d = x_d(t)$$

Las familias de funciones que obtendremos ahora dependerán de  $d$  parámetros.

**Ejemplo.** Un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{cases}$$

Una solución que podemos ver fácil es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sen} t \\ x_2(t) &= \cos t \end{aligned}$$

Otra es:

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, llegamos a la familia de soluciones:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k \operatorname{sen} t \\ x_2(t) &= k \cos t \\ k &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Que no son todas las soluciones, ya que sólo tenemos una familia uniparamétrica. Para hallar otro parámetro, podemos cambiar la fase de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b \operatorname{sen}(t + a) \\ x_2(t) &= b \cos(t + a) \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En el último Capítulo, aprenderemos a demostrar que esta familia nos da todas las soluciones. Dicha familia se puede escribir también como:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \\ c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Demostrar que ambas familias de funciones son las mismas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1(t) &= b \operatorname{sen}(t + a) \\ x_2(t) &= b \cos(t + a) \end{cases} & \quad a, b \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} y_1(t) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \end{cases} & \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Curvas en paramétricas

Volveremos a la notación  $x$  e  $y$  para las variables, y nos centraremos en las ecuaciones paramétricas. Esto es, dar  $x$  e  $y$  en función de una variable independiente  $t$ , por lo que ahora tendremos dos funciones: Estas son:

$$\begin{aligned} x, y: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t), y(t) \end{aligned}$$

La diferencia entre implícitas y paramétricas es que ahora pensamos en una curva como un movimiento, no como un lugar geométrico que cumple una cierta propiedad:

$$F(x, y) = 0$$

Dado un instante de tiempo  $t$ , el móvil que realiza el movimiento se encontrará en el punto  $(x(t), y(t))$ . Podemos encontrar muchas parametrizaciones para una misma curva (ya que puede recorrerse de distintas formas).

**Ejemplo.** Podemos dibujar  $\frac{3}{4}$  de una circunferencia mediante la curva en paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ t \in I &= \left] 0, \frac{3\pi}{2} \right[ \end{aligned}$$

**Definición 1.3** (Órbita). Dada una curva en paramétricas mediante dos funciones

$$\begin{aligned} x, y: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t), y(t) \end{aligned}$$

El lugar geométrico de todos los puntos del plano por el que pasa dicho movimiento es:

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

al que llamaremos órbita.

### 1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano

Dado un sistema autónomo en el plano, es decir, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (para así obtener una curva plana) de forma que la variable independiente  $t$  no aparezca en las ecuaciones del sistema (aunque  $x$  e  $y$  sean dependientes de  $t$ ). Dicho sistema será de la forma:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Para ciertas funciones

$$\begin{aligned} f, g: D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), g(x, y) \end{aligned}$$

Con  $D$  un conjunto abierto y conexo,  $f$  y  $g$  funciones continuas.

Tratamos de buscar soluciones

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Buscar las soluciones de cualquier sistema de esta forma es demasiado difícil. Nos centraremos por ahora simplemente en calcular las órbitas del sistema. Esto es, sabremos calcular el lugar geométrico de los puntos del plano por el que pasan las



soluciones, pero no sabremos calcular cómo son los movimientos que describen las soluciones.

De forma **NO RIGUOSA**, en física se da un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Y se saca la órbita poniendo  $y$  en función de  $x$  dividiendo:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

En lo sucesivo, trataremos de dar un fundamento teórico a esta cuenta, con el fin de aprender por qué podemos realizarla y dar condiciones para cuándo poder hacerlo.

**Ejemplo.** Vamos a ver un ejemplo en el que la cuenta anterior funciona. Tomamos el sistema:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

Del que podemos coger como una solución las funciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sin t \\ y(t) &= -2 \cos t \\ t &\in ]0, \pi[ \end{aligned}$$

Suponiendo que podemos dividir:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

En la notación usual, esta es la ecuación:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Sus soluciones veremos que son:

$$y^2 + x^2 = c$$

La ecuación en implícitas de la órbita para dicha solución concreta es:

$$y^2 + x^2 = 4$$

Por tanto, el cálculo parece que funciona.

## Función inversa

Hagamos un breve repaso de lo que sabemos sobre funciones inversas.

- Podemos pensar en la noción conjuntista de función inversa: dada una función  $f : I \rightarrow J$ , si esta función es biyectiva, podemos encontrar una función  $f^{-1} : J \rightarrow I$  tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_I \\ f \circ f^{-1} &= id_J \end{aligned}$$

- O también podemos pensar en la noción clásica de función inversa: si tenemos una variable  $x$  dependiente de  $t$ :  $x = f(t)$ , bajo unas ciertas condiciones podemos encontrar una función  $g$  de forma que hagamos  $t$  depender de  $x$ :  $t = g(x)$ .

Para este apartado, dada una función:

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto, siempre que esta sea inyectiva, obtendremos una nueva función restringiendo el codominio de  $f$  a  $f(I)$ , una función biyectiva que sí tendrá inversa, a la que notaremos por  $f^{-1}$ .

**Proposición 1.4.** *Toda función continua e inyectiva es estrictamente monótona*<sup>14</sup>.

A partir del resultado, al buscar funciones que puedan tener inversa, buscaremos funciones estrictamente monótonas.

**Teorema 1.5** (Función inversa). *Sea una función*

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

*derivable en un intervalo abierto  $I$  con  $J = f(I)$  y*

$$f'(t) > 0 \quad \forall t \in I$$

*Entonces, dicha función tiene inversa,  $g : J \rightarrow I$  y además es derivable en  $J$ , con:*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

**Ejemplo.** Dada la función:

$$f : I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x \quad \forall x \in I$$

Sabemos que es una función derivable en  $I$ , con  $J = f(I) = ]-1, 1[$  y con  $f'(x) > 0$   $\forall x \in I$ , por lo que podemos aplicar el teorema, luego existirá una función

$$g : J \rightarrow R$$

---

<sup>14</sup>El lector debe estar familiarizado con esta Proposición y el siguiente Teorema, al ser contenido de Cálculo II.

Que será su función inversa y sabemos que dicha función es la función arcoseno, la cual es derivable (por el teorema), con:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}$$

Tratamos ahora de simplificar dicha expresión:

Si  $\theta = \arcsen x$ , entonces  $\theta \in I$  y:

$$\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \implies \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sen^2 \theta}$$

Luego:

$$\cos(\arcsen x) = \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sen^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Por ser  $\theta \in I$ , sabemos que  $\cos \theta > 0$ , por lo que nos quedamos con el signo positivo de la raíz. Finalmente, llegamos a que:

$$g'(x) = \arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Notemos que  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$  siempre y cuando  $x \in J$ .

Tenemos ya todas las herramientas necesarias para formalizar el cálculo de la ecuación diferencial de la órbita de un sistema autónomo plano.

**Teorema 1.6.** *Dado un sistema de la forma:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

*Para ciertas funciones*

$$\begin{aligned} f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), g(x, y) \end{aligned}$$

*Con  $D$  un conjunto abierto y conexo,  $f$  y  $g$  funciones continuas, de forma que el sistema tiene una solución:*

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

*con  $I$  un intervalo abierto.*

*Si se verifica que:*

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

*Entonces, la órbita  $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$  puede escribirse como una curva en explícitas  $y = y(x)$  de forma que venga dada por la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

*Demostración.* Por ser  $f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$  y ser  $f$  continua, esta será siempre positiva o siempre negativa. Supongamos que es siempre positiva, y la demostración será análoga si esta es siempre negativa.

Por tanto, tenemos que

$$x' = \varphi'(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) > 0 \quad \forall t \in I$$

Por lo que  $\varphi$  cumple las hipótesis del Teorema 1.5. De esta forma, sea  $J = \varphi(I)$ , existirá una función  $T : J \rightarrow I$  derivable en  $J$  y función inversa de  $\varphi$  con:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} \quad \forall x \in J$$

Como teníamos  $x = \varphi(t)$ , ahora tenemos  $t = T(x)$ .

Definimos una función

$$\begin{aligned} y : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \psi(T(x)) \end{aligned}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \psi'(T(x)) \cdot T'(x) \\ &= g(\varphi(T(x)), \psi(T(x))) \cdot T'(x) \\ &= g(x, y(x)) \cdot T'(x) \end{aligned}$$

Y como:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} = \frac{1}{f(\varphi(T(x)), \psi(T(x)))} = \frac{1}{f(x, y(x))}$$

Juntando estas últimas dos expresiones, llegamos a que:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

□

**Ejemplo.** Dado el sistema:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

Con funciones

$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto y, -x \end{aligned}$$

Con una solución  $x = \varphi(t)$  y  $y = \psi(t)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2 \sin t \\ \psi(t) &= 2 \cos t \end{aligned}$$

Funciones definidas en un intervalo abierto  $I$ . Se pide hallar la órbita de dicha solución.

Necesitamos ver que

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

es decir:

$$2 \cos t \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Para ello, cogemos el intervalo  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , aunque se podría hacer con otros intervalos, pero complican el proceso.

Tenemos:

$$x = 2 \operatorname{sen} t \quad J = ]-2, 2[$$

y buscamos poner  $t$  en función de  $x$ :

$$t = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)$$

Tenemos la función  $T : J \rightarrow I$  con  $T(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)$

Definimos ahora una función  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$y(x) = \psi(T(x)) = 2 \cos \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \right)$$

Si llamamos  $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)$ , entonces  $\theta \in I$  y sabemos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \implies \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Y por el intervalo en el que estamos, el coseno es positivo, luego cogemos la raíz positiva. Finalmente, llegamos a que:

$$y(x) = 2 \cos \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{4 - x^2}$$

**Ejercicio 1.6.1.** Repetir el ejemplo cogiendo otro intervalo  $I$ .



## 2. Cambios de Variable

Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$$

mediante una función

$$\begin{aligned} f : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

continua definida en  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo, nuestro objetivo será, dado un cambio de variable por dos ecuaciones

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x) \end{aligned}$$

cambiar tanto la expresión de la ecuación diferencial como el dominio para facilitar la resolución del mismo, mediante una aplicación

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D_1 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) \end{aligned}$$

con  $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y conexo, que nos lleve a una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

para cierta función

$$\begin{aligned} \hat{f} : \quad D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, y) &\longmapsto \hat{f}(s, y) \end{aligned}$$

Y será de nuestro interés buscar la expresión de dicha  $\hat{f}$ .

Nos preguntamos también por las condiciones que tenemos que exigirle a dicha  $\varphi$  para que el cambio de variable sea bueno:

1. Que  $\varphi$  sea biyectiva, o equivalentemente, que tenga inversa  $\psi = \varphi^{-1}$ , para poder deshacer el cambio de variable.

2. Que podamos hacer cálculo diferencial en ambos lados y que podamos transportarlo, es decir, que tanto  $\varphi$  como  $\psi$  sean de clase  $C^1$ .
3. Además, también tendremos que buscar cómo poner  $y$  en función de  $s$ , y exigir hipótesis para que podamos hacerlo.

**Definición 2.1** (Difeomorfismo). Sea  $r \in \mathbb{N}$ , una aplicación  $f : A \rightarrow B$  es un  $C^r$ -difeomorfismo si  $f$  es de clase  $C^r(A)$ , biyectiva y su inversa  $f^{-1}$  es de clase  $C^r(B)$ .

De esta forma, nos interesará que  $\varphi$  sea un  $C^1$ -difeomorfismo, para que se cumplan los dos primeros puntos de la enumeración anterior<sup>1</sup>.

A continuación, realizaremos un razonamiento informal con la finalidad de comprobar qué pasará al realizar el cambio de variable, para luego formalizar el mismo.

Volviendo a la situación inicial, nos encontrábamos ante una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

y nos disponíamos a realizar un cambio de variable

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

De esta forma, suponiendo que  $x = x(t)$  es solución de la ecuación, tenemos las variables  $s$  y  $y$  en función de  $t$ .

$$\begin{cases} s(t) = \varphi_1(t, x(t)) \\ y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Suponiendo ahora que podemos expresar  $y$  en función de  $s$ :  $y = y(s)$ , buscamos calcular:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}$$

Primero, calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)x'(t) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Donde en  $(*)$  hemos usado que  $x$  era solución de la ecuación diferencial. Posteriormente:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Así, llegamos a que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)}$$

---

<sup>1</sup>Recordamos que una función de  $\mathbb{R}^2$  sea de clase  $C^1$  significa que podemos hacer sus derivadas parciales respecto a las dos variables y que ambas son continuas.



Pero todavía no hemos terminado, ya que ahora tenemos la ecuación diferencial en función de las variables  $s$ ,  $y$ ,  $t$  y  $x$ , por lo que tenemos que terminar de librarnos de las variables  $t$  y  $x$ . Para ello, usamos la función  $\psi$ , ya que:

$$\varphi(t, x) = (s, y) \implies \psi(s, y) = (t, x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

En caso de que el denominador sea distinto de 0, tendremos ya la nueva expresión de la ecuación diferencial, definiendo:

$$\hat{f}(s, y) = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

llegamos a que

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

buscamos aplicarle un cambio de variable.

La ecuación diferencial así no tiene sentido, pues nos falta darle un dominio de definición: Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada por:

$$f(t, x) = \frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

Buscamos un conjunto  $D$  abierto y conexo que haga que  $f$  sea continua.

$f$  es continua en todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  salvo en los que se anula su denominador, y esto sucede en la recta

$$x - 2t + 1 = 0$$

que divide el plano en dos componentes conexas. Para el dominio de la función  $f$ , hemos de quedarnos con un semiplano. Elegimos el de la izquierda<sup>2</sup>, por lo que nos quedamos con

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2t + 1 > 0\}$$

Vamos a aplicarle a esta ecuación diferencial un cambio de variable:

$$\begin{cases} y &= x + t - 3 &= \varphi_2(t, x) \\ s &= x - 2t + 1 &= \varphi_1(t, x) \end{cases}$$

Primero, veamos que  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  es un difeomorfismo de todo el plano en todo el plano:

<sup>2</sup>Sin ningún motivo, podría hacerse con el de la derecha.

1.  $\varphi$  es biyectiva, ya que se puede despejar de manera única (es un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado).
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , ya que sus dos componentes son polinomios.
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ : ya que al despejar para hallar la expresión de  $\varphi^{-1}$ , sale que es un polinomio también.

Por tanto,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un  $C^1$ -difeomorfismo. Sin embargo, nos interesa verlo como un difeomorfismo de  $D$ . Buscamos su codominio  $D_1$  para conseguirlo:

Primero, buscamos qué imagen tiene la recta  $x - 2t + 1 = 0$ , y es la recta  $s = 0$ , que nos divide del plano en dos semiplanos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Ahora, la imagen de nuestro conjunto  $D$  es el plano de la derecha, ya que tiene que cumplir que:

$$x - 2t + 1 = s > 0$$

En definitiva:

$$D_1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$$

Además, sabemos que  $D_1$  es abierto y conexo.

Ahora, buscamos la fórmula para nuestra aplicación  $\hat{f}$ . Podríamos usar la fórmula pero vamos a repetir los cálculos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt}$$

Pensando que tanto  $y$  como  $x$  dependen de  $t$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = x' + 1 \\ \frac{ds}{dt} = x' - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2}$$

Ahora, usamos que  $x$  es solución de la ecuación diferencial, luego se cumplirá que  $x' = f(t, x)$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2} = \frac{\frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} + 1}{\frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} - 2}$$

A continuación, falta poner la ecuación en función de  $(s, y)$ . Para ello, componemos con la  $\psi$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\sin y}{s^2} + 1}{\frac{\sin y}{s^2} - 2} = \frac{\sin y + s^2}{\sin y - 2s^2} = \hat{f}(s, y)$$

Finalmente, surge que tenemos que poner la  $y$  en función de  $s$ . La ecuación diferencial no está definida en todo el semiplano: el denominador de la expresión no puede anularse. Los puntos que cumplan:

$$\sin y - 2s^2 = 0$$

no pueden entrar en el dominio de la ecuación diferencial.

Lo que sucede es que los difeomorfismos trasladan curvas en curvas, pero no necesariamente curvas en explícitas a curvas en explícitas, luego puede que una curva que en  $D$  se expresaba en explícitas no se pueda expresar en  $D_1$  con ecuaciones explícitas, con lo que nos daría una singularidad (en este caso, se anularía dicho denominador). Próximamente, veremos la interpretación gráfica de que esto es lo que realmente sucede.

Ahora, precedemos a realizar una teoría formal que sustente todas las cuentas realizadas hasta el momento.

**Definición 2.2** (Cambio de variable admisible). Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$x' = f(t, x)$$

Con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo, un cambio de variable admisible es una transformación:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con  $D, D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  abiertos y conexos,  $\varphi$  es  $C^1$ -difeomorfismo, y además cumple la condición de admisibilidad<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D \quad (2.1)$$

*Observación.* La condición de admisibilidad de un cambio admisible tiene un sentido geométrico, y es que estaremos interesados en dar solución a una ecuación diferencial mediante una curva en explícitas. Sin embargo, al realizar un cambio de variable con cualquier difeomorfismo nada nos garantiza que al pasar la curva en explícitas por el difeomorfismo su imagen siga siendo una curva en explícitas (lo que sí nos garantiza es que siga siendo una curva).

Veamos qué condición nos garantiza que al pasar una curva en explícitas  $x = x(t)$  por un difeomorfismo

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

sigamos teniendo una curva en explícitas  $y = y(s)$ .

Dada una función  $x = x(t)$ , la curva que esta función describe viene dada por la gráfica de dicha función (suponiendo que el dominio de  $x$  es  $I$ ):

$$G = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

---

<sup>3</sup>Esta última condición nos permite que podamos llevar curvas en explícitas  $x = x(t)$  que son solución de la ecuación diferencial en  $D$  a curvas en explícitas  $y = y(s)$  que son solución de la ecuación diferencial en  $D_1$ .

Si ahora aplicamos el difeomorfismo a  $G$ :

$$\varphi(G) = \{(\varphi_1(t, x(t)), \varphi_2(t, x(t))) \mid t \in I\}$$

Dicha curva se podrá poner en explícitas si existe una función  $y$  tal que  $y = y(s)$ . Es decir, que podamos expresar la segunda coordenada en función de la primera. Para ello, necesitamos que cada primera coordenada tenga una única coordenada segunda, para poder construir una función. Esto se garantiza si la función que lleva cada  $t$  en  $\varphi_1(t, x(t))$  es inyectiva. Llamaremos a dicha función  $g$ :

$$g(t) = \varphi_1(t, x(t)) \quad t \in I$$

Si exigimos que su derivada sea distinta de cero en todos los puntos de  $I$ , entonces  $g$  será estrictamente creciente o estrictamente decreciente, garantizando su inyectividad y que podamos pasar curvas en explícitas a curvas en explícitas. Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))x'(t) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Donde en  $(*)$  hemos usado que estábamos trabajando con  $x$ , una función solución de nuestra ecuación diferencial en cuestión.

Por tanto, la condición de admisibilidad nos garantiza que podemos pasar curvas en explícitas en curvas en explícitas.

**Proposición 2.1.** *Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x)$$

*con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo. Dado un cambio de variable admisible mediante una transformación*

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

*Entonces,  $\psi = \varphi^{-1}$  es un cambio de variable admisible para la ecuación diferencial*

$$y' = \hat{f}(s, y)$$

**Teorema 2.2** (Cambio de variable para ecuaciones diferenciales). *Dado una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x) \tag{2.2}$$

*Con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo. Sea  $\varphi : D \rightarrow D_1$  un cambio de variable admisible.*

*Entonces, la ecuación 2.2 es equivalente<sup>4</sup> a la ecuación*

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) \tag{2.3}$$

---

<sup>4</sup>Quiere decir, que siempre que tengamos una curva en  $D$  que sea solución de la ecuación diferencial, podamos ir a  $D_1$  aplicando  $\varphi$  y tendremos una solución de la ecuación diferencial definida en  $D_1$ , así como este mismo procedimiento al revés.

donde

$$\hat{f}(s, y) = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))} \quad \forall (s, y) \in D_1$$

*Demostración.* Supongamos que  $x = x(t)$  es solución de la ecuación 2.2 definida en un intervalo abierto  $I \subseteq \mathbb{R}$ , y queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Defino

$$\begin{aligned} S: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi_1(t, x(t)) \end{aligned}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con derivada distinta de 0:

$$S'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)x'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

ya que el cambio era admisible. Defino  $J = S(I)$  intervalo abierto, y podemos ahora aplicar el Teorema de la función inversa sobre  $S$ , obteniendo una función

$$\begin{aligned} T: J &\longrightarrow I \\ s &\longmapsto T(s) \end{aligned}$$

de forma que cumpla

$$\begin{aligned} T(S(t)) &= t \quad \forall t \in I \\ S(T(s)) &= s \quad s \in J \end{aligned}$$

Teníamos  $s$  en función de  $t$  y ahora hemos puesto  $t$  en función de  $s$  utilizando la primera ecuación del cambio de variable. Ahora, podemos definir (usando la segunda ecuación del cambio) la siguiente función, para expresar  $y$  en función de  $s$ , gracias a que hemos expresado  $t$  en función de  $s$ :

$$\begin{aligned} y: J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \varphi_2(T(s), x(T(s))) \end{aligned}$$

Nos falta derivar  $y$  respecto a  $s$  para comprobar que sea solución de la ecuación diferencial 2.3:

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) \cdot T'(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \cdot T'(s) \\ &= T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \right) \\ &= T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot f(T(s), x(T(s))) \right) \end{aligned}$$

Ahora, usamos que  $\varphi$  tiene de inversa a  $\psi$ , para así poder expresar

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

y eliminar  $t$  y  $x$  de la expresión, dejándolo todo en función de  $s$  e  $y$ :

$$y'(s) = T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y(s))) \cdot f(\psi(s, y(s))) \right)$$

Falta ver que  $T'(s)$  es el denominador de la expresión 2.3. Para ello, aplicamos la regla de derivación de la función inversa:

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))f(T(s), x(T(s)))}$$

Ahora, volvemos a usar que

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

para obtener

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y(s)))f(\psi(s, y(s)))}$$

Finalmente, falta ver que si tenemos una solución en  $D_1$ , volvemos a tener una solución en  $D$ . Bastaría aplicar el mismo proceso pero al revés. Sin embargo, debemos comprobar que si  $\varphi$  es admisible para la ecuación 2.2, entonces  $\psi$  lo es para la ecuación 2.3.

Faltaría comprobar la expresión análoga a 2.1 para  $\psi$ , esto es:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(s, y)\hat{f}(s, y) \neq 0 \quad \forall (s, y) \in D_1$$

Usando que:

$$\varphi'(\psi(s, y))\psi'(s, y) = Id$$

□

Nos falta ahora aprender estrategias para buscar el cambio de variable adecuado en cada caso. Para ello, aprenderemos primero a resolver las ecuaciones diferenciales más sencillas para así cuando se nos presente una más complicada, aplicar un cambio de variable para obtener una ecuación sencilla que sí sepamos resolver.

## 2.1. Cálculo de primitivas

Buscamos resolver ecuaciones diferenciales sencillas. Las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos encontrarnos son el cálculo de primitivas, es decir, cuando la derivada de  $x$  sólo está en función de  $t$ .

Pensamos en la ecuación diferencial:

$$x' = p(t) \quad (2.4)$$

con  $p : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, el dominio de la ecuación diferencial es  $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Sabemos que dicha ecuación diferencial tiene solución, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo:

**Teorema 2.3** (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, fijado  $t_0 \in I$ , entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(s) \, ds \quad t \in I$$

*es una función de clase  $C^1(I)$  que cumple  $P'(t) = p(t)$ .*

Por tanto, fijado  $t_0 \in I$ , las soluciones de la ecuación diferencial 2.4 son de la forma:

$$x(t) = k + \int_{t_0}^t p(s) \, ds \quad k \in \mathbb{R}$$

Tenemos una primera clase de ecuaciones diferenciales que sabemos resolver, al menos a nivel teórico, ya que hay integrales que no pueden calcularse.

## 2.2. Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de variables separadas es una ecuación de la forma

$$x' = p(t)q(x)$$

con funciones

$$\begin{aligned} p : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto p(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto q(x) \end{aligned}$$

continuas con  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalos abiertos. De esta forma, estamos manejando la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

con

$$\begin{aligned} f : D = I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto p(t)q(x) \end{aligned}$$

*Observación.* Notemos que el cálculo de primitivas es caso particular de las ecuaciones de variables separadas, ya que tomando  $q(x) = 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$ :

$$p(t)q(x) = p(t) \quad \forall t \in I$$

Para su resolución, comenzaremos primero con unos cálculos informales que luego formalizaremos. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Primero, buscaremos los valores  $a \in J$  que hagan que  $q(a) = 0$ . En dicho caso, podemos definir la función

$$x(t) = a \quad t \in I$$

que es solución de la ecuación diferencial.

Una vez localizados todos los ceros de la ecuación, tendremos ya todas las soluciones constantes localizadas. Ahora, haremos separación de variable, que precisamente busca las soluciones que no son constantes. Hacemos la siguiente operación, que por ahora carece de rigor:

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t) dt$$

Posteriormente, tomaremos primitivas en ambos lados:

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t) dt$$

Notando por  $\Phi$  a una primitiva para  $\frac{1}{q}$  y por  $P$  a una primitiva de  $p$ , tendremos que:

$$\Phi(x) + c_1 = P(t) + c_2$$

Para ciertas constantes arbitrarias  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, como la diferencia de constantes sigue siendo una constante, podemos escribir simplemente:

$$\Phi(x) = P(t) + c$$

Si ahora podemos calcular una inversa de  $\Phi$  (en caso de que esta sea biyectiva), podemos deducir que:

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

**Ejemplo.** En este ejemplo, mostraremos que el procedimiento anterior parece funcionar ante las ecuaciones diferenciales de variables separadas, pese a carecer de sentido aparente. Para ello, trataremos de resolver la ecuación

$$x' = e^{t+x}$$

con dominio  $D = \mathbb{R}^2$ , que es una ecuación en variables separadas, ya que:

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x$$

En este caso, no encontramos soluciones constantes, ya que  $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Resolvámosla con la receta que acabamos de aprender:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t e^x \\ e^{-x} dx &= e^t dt \\ \int e^{-x} dx &= \int e^t dt \\ -e^{-x} &= e^t + c \end{aligned}$$



La última igualdad nos da la función  $x$  de manera implícita, busquemos ahora la forma de dar la función  $x$  de forma explícita:

$$e^{-x} = -e^t - c$$

y tomamos logaritmos, pensando en que esto nos va a determinar luego el dominio de la solución (de forma implícita, suponemos que la cantidad de la derecha es positiva).

$$\begin{aligned} -x(t) &= \ln(-e^t - c) \\ x(t) &= -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora por qué constantes  $c$  nos sirven y por el dominio de la función  $x$ :

- Cuando  $c$  tome valores positivos o 0, no va a tener sentido la expresión, por lo que exigimos  $c < 0$ .
- A continuación, buscamos el intervalo abierto en el que esté definida  $x$ . Nos interesa que  $-e^t - c > 0$  para cierta constante negativa  $c$ , luego nos interesa que  $t$  sea chico, para que la cantidad sea positiva. Por tanto, el intervalo de definición de  $x$  será de la forma  $I_c = ]-\infty, a_c[$ , para cierto  $a_c \in \mathbb{R}$ , que dependerá del valor de la constante  $c$  escogida para la solución.

Buscamos ahora dicha  $a_c$ , sea  $c \in \mathbb{R}^-$ :

$$-e^t - c > 0 \iff -c > e^t \iff \ln(-c) > \ln(e^t) = t$$

donde hemos usado que  $\ln$  es una función estrictamente creciente, obteniendo que:

$$t \in I_c = ]-\infty, \ln(-c)[$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación planteada al inicio son

$$\begin{aligned} x : I_c &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Dado que hemos hecho una cuenta que a priori carece de sentido, la única forma de comprobar que lo que hemos hecho está bien es derivar  $x$  y comprobar que, efectivamente, es una solución de la ecuación diferencial.

De forma alternativa, veamos ahora que en realidad la receta que usamos tiene un fundamento teórico, que nos permite usarla bajo unas ciertas hipótesis, obteniendo siempre unos resultados fiables.

De esta forma, supongamos que  $q(x) \neq 0 \forall x \in J$  (para los valores en los que se anule  $q$ , tenemos soluciones constantes, luego falta comprobar qué ocurre donde  $q$  no se anula). Vamos a intentar hacer un cambio de variable que transforme la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \tag{2.5}$$

en un cálculo de primitivas de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(s) \quad (2.6)$$

En vez de dar el cambio, vamos a buscarlo. Dada una función

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

Exigimos que  $\varphi_1 = Id_I$  y notaremos  $\phi = \varphi_2$  por comodidad, con lo que queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \phi(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

por lo que tendremos que buscar dicha función  $\phi$ . Para que  $\varphi$  sea un difeomorfismo, es necesario que la función

$$\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$$

sea de clase  $C^1$ , así como que  $\phi'(x) \neq 0 \ \forall x \in J$ . No es necesario exigir que sea biyectiva, ya que luego tomaremos como codominio  $\hat{J} = \phi(J)$ , intervalo abierto. De esta forma, la ecuación diferencial tras el cambio de variable tendrá como dominio  $D_1 = I \times \hat{J}$ .

Ahora, busquemos que  $\varphi$  sea admisible, es decir, que cumpla la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D$$

Lo cual es inmediato, ya que  $\varphi_1(t, x) = t$ , luego:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = 1 + 0 \neq 0$$

La interpretación geométrica de que la condición de admisibilidad sea cierta siempre bajo un cambio del tipo 2.7 cuenta con una interpretación geométrica, ya que al ser  $t = s$ , cualquier curva que escribamos de forma explícita en  $D$ , al aplicarle el difeomorfismo podrá seguir escribiéndose de forma explícita en  $D_1$ , y viceversa.

Sea  $x = x(t)$  una solución de 2.5, aplicamos ahora el cambio de variable, tal y como aprendimos al inicio de este Capítulo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(*)}{=} \phi'(x)x' = \phi'(x)p(t)q(x)$$

donde en  $(*)$  hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

y en la segunda igualdad que  $x$  es solución de 2.5.

Todavía no tenemos la ecuación cambiada, ya que seguimos teniendo los parámetros  $t$  y  $x$ . Para quitarlos, basta con usar  $\psi = \phi^{-1}$ , que sabemos que existe según las condiciones que hemos impuesto<sup>5</sup> sobre  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\phi(x) = y &\implies x = \psi(y) \quad \forall x \in J \\ \frac{dy}{ds} &= p(t)\phi'(\psi(y))q(\psi(y))\end{aligned}$$

Sin embargo, no hemos terminado, ya que queríamos buscar un cambio de variable que nos llevase a:

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Por lo que tenemos que exigir finalmente a  $\phi$  que:

$$\phi'(x)q(x) = 1$$

Por tanto, fijado  $x_0 \in J$ , defino

$$\begin{aligned}\phi: J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}\end{aligned}$$

Para que:

$$\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \implies \phi'(x)q(x) = 1$$

Resumiendo, dada una ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Si aplicamos el cambio:

$$\begin{cases} s = t \\ y = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{cases} \quad x_0 \in J$$

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Que teóricamente sabemos resolver, ya que se trata de un cálculo de primitiva.

**Ejemplo.** Volvemos a la ecuación con la que empezamos el curso, con el fin de aplicarle la regla que acabamos de aprender:

$$x' = \lambda x$$

con dominio  $D = \mathbb{R}^2$ . Es de variables separadas. Las soluciones constantes de la ecuación son:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

---

<sup>5</sup>Hasta ahora, que  $\phi$  sea de clase  $C^1(J)$  y que tenga derivada no nula.

Ahora, como  $J$  debemos tomar tanto  $\mathbb{R}^+$  como  $\mathbb{R}^-$ . En este ejemplo, tomaremos  $J = \mathbb{R}^-$ , y el resultado debe repetirse en  $\mathbb{R}^+$  de forma análoga.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \lambda dt \\ \ln(-x) &= \lambda t + c\end{aligned}$$

y despejamos  $x$ :

$$\begin{aligned}-x(t) &= e^{\lambda t + c} \\ x(t) &= -e^{\lambda t + c} = -e^c e^{\lambda t}\end{aligned}$$

En definitiva, las soluciones son:

$$x(t) = k \cdot e^{\lambda t} \quad k < 0$$

## 2.3. Ecuaciones homogéneas

Siguiendo con un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales que aprenderemos a resolver reduciéndolas a un tipo de ecuaciones diferenciales que ya sabemos resolver, ahora es el turno de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

con  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, siendo  $J$  un intervalo abierto.

### Cómo identificarlas

Anteriormente estudiamos las ecuaciones de variables separadas, las cuales eran fáciles de identificar. Sin embargo, las ecuaciones homogéneas ya empiezan a ser algo más difíciles de identificar.

Mostraremos ahora varios ejemplos de ecuaciones diferenciales que son homogéneas, aunque no sea fácil verlo:

1. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

es homogénea, para la función

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u + 1\end{aligned}$$

Ya que

$$h\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + 1 = \frac{x}{t} + \frac{t}{t} = \frac{x+t}{t}$$

## 2. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2 + x^2}$$

es homogénea, ya que si dividimos el numerador y el denominador entre  $t^2$ , llegamos a que:

$$x' = \frac{\frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2}}{\frac{t^2 + x^2}{t^2}} = \frac{1 + 2\left(\frac{x}{t}\right) + 3\left(\frac{x}{t}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}$$

Luego la función  $h$  en este caso es la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + u^2} \end{aligned}$$

Esta última ecuación diferencial parece haber sido identificada mediante una idea feliz (dividir todo entre  $t^2$ ). Sin embargo, existe una teoría sobre funciones homogéneas, la cual pasamos a desarrollar brevemente ahora. Esta nos permitirá darnos cuenta de forma rápida de si una ecuación diferencial es o no homogénea.

**Definición 2.3** (Función homogénea). Dada una función  $f : V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ , decimos que es homogénea de grado  $r$  si se verifica que

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda^r f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \forall v \in V$$

**Proposición 2.4.** Dado un polinomio en  $n$  variables, este es una función homogénea de grado  $r$  si, y solo si todos sus monomios son de grado  $r$

A dichos polinomios, los llamamos polinomios homogéneos de grado  $r$ .

Se verifica que si tenemos una ecuación diferencial que venga dada por un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado  $r$ , entonces estamos ante una ecuación diferencial homogénea:

$$x' = \frac{f(t, x)}{g(t, x)}$$

Para comprobarlo, tendríamos que dividir el numerador y denominador del cociente entre  $t^r$ , obteniendo así la función  $h$ .

Observemos que lo que sucedía en el ejemplo anterior es que teníamos un cociente de polinomios homogéneos de grado 2 (por estar formados únicamente por monomios de grado 2), por lo que dividiendo entre  $t^2$  pudimos sacar al función  $h$ .

**Ejemplo.** La ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

es homogénea, ya que tengo dos funciones homogéneas de grado 1 divididas. Si dividimos numerador y denominador por  $t$ , conseguimos verlo más fácil. Sin embargo, hemos de distinguir casos:

- Si  $t > 0$ :

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t} = \frac{\frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} + \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

- Si  $t < 0$ :

$$x' = \frac{\frac{t}{t} + \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{-t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 - \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

### Dominio de la ecuación diferencial

Ahora, trabajamos con una ecuación que es de la forma:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo<sup>6</sup> de forma que

$$f(t, x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta función  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $J$  un intervalo abierto y continua.

En primer lugar, observamos que  $f$  es continua, por ser composición de funciones continuas:

$$(t, x) \mapsto \frac{x}{t} \mapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Ahora, queremos ver cuál es dicho dominio  $D$  en el que está definida nuestra ecuación diferencial.

- Como primera observación, debemos excluir de  $D$  la recta  $t = 0$ , para que la definición de  $f$  tenga sentido.
- Suponiendo que<sup>7</sup>  $J = ]\alpha, \beta[$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

Dado un punto  $(t, x) \in D$  de nuestro dominio, este punto debería cumplir que  $\frac{x}{t} \in J$  para que la definición de  $f$  tenga sentido. Decir que  $\frac{x}{t} \in J$  es equivalente a que

$$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

Por lo que los puntos  $(t, x) \in D$  de nuestro dominio deberían cumplir dicha condición. Notemos que  $\frac{x}{t}$  es la pendiente de un punto  $(t, x)$  de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que todos los puntos que cumplen la ecuación superior son los que se encuentran en un sector angular, delimitado por las rectas  $x = \alpha t$  y  $x = \beta t$ :

<sup>6</sup>Por la definición de ecuación diferencial.

<sup>7</sup>En el caso de que sea un intervalo no acotado, se razonaría de forma similar.



Figura 2.1: Sector angular, sin incluir el punto  $(0, 0)$ .

Como  $D$  ha de ser conexo, hemos de quedarnos con la parte de la izquierda o con la parte de la derecha del sector angular. Algebraicamente, estos dos son los conjuntos:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J \right\}$$

$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, \frac{x}{t} \in J \right\}$$

*Observación.* Notemos que en el ejemplo superior de la ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

distinguíamos los casos en los que  $t$  era positivo y en los que  $t$  era negativo. Esto tiene todo el sentido, ya que en realidad no estamos trabajando con una ecuación diferencial, sino con 2, ya que no habíamos tenido en cuenta el dominio de la ecuación diferencial. Esta puede estar definida o bien en  $D_+$  o bien en  $D_-$ , por lo que estaríamos trabajando o bien con  $t > 0$  o bien con  $t < 0$ , respectivamente.

### Posicionamiento de las ecuaciones homogéneas

Nos preguntamos ahora por las relaciones que hay entre las ecuaciones homogéneas y las ya vistas hasta el momento: cálculo de primitivas y de variables separadas. ¿Son todas las ecuaciones de variables separadas homogéneas?

Respondemos a esta y a muchas más preguntas con los siguientes ejemplos:

- El cálculo de primitivas no está incluido en las ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo la ecuación  $x' = 0$ .
- $x' = xt$  es de variables separadas pero no es homogénea.
- $x' = \frac{x}{t}$  es homogénea y es de variables separadas.

- $x' = \frac{x+t}{t}$  es homogénea pero no es de variables separadas.

Por tanto, vemos que hay ecuaciones homogéneas que son de cálculo de primitivas (aunque pocas), que hay algunas ecuaciones homogéneas que son a su vez de variables separadas y que hay ecuaciones homogéneas que no son de variables separadas. La situación es similar a la del diagrama 2.2.



Figura 2.2: Diagrama de los tipos de ecuaciones diferenciales.

### Resolución de ecuaciones homogéneas

Hay un cambio de variable que nos permite llevar ecuaciones diferenciales homogéneas a ecuaciones diferenciales de variables separadas, que ya sabemos resolver. Por comodidad, supondremos que<sup>8</sup> el dominio elegido para la ecuación diferencial es  $D_+$ .

El cambio viene dado por la función

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

- Podemos despejar de manera única las variables  $t$  y  $x$ , luego es biyectiva, con inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= sy \end{cases}$$

- Las componentes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de  $\varphi$  son polinomios, luego es de clase  $C^1(D_+, \mathbb{R}^2)$ .
- Y además, como las componentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$  de  $\psi$  también son polinomios, tenemos que  $\psi$  es de clase  $C^1(\varphi(D_+), \mathbb{R}^2)$ .

Por tanto, hemos comprobado que  $\varphi$  es un  $C^1$ -difeomorfismo, luego falta comprobar la condición de admisibilidad para comprobar que sea un cambio de variable admisible. Sin embargo, esta propiedad estará garantizada, ya que no hemos cambiado la variable  $t$ , por lo que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = 1 + 0 \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D_+$$

<sup>8</sup>En caso contrario, es análogo.



Una vez comprobado que  $\varphi$  es un cambio de variable admisible, vemos cuál será el nuevo dominio de la ecuación diferencial una vez hecho el cambio de variable:

$$\varphi(D_+) = \varphi\left(\left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}\right) = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, y \in J\} = ]0, +\infty[ \times J$$

Por tanto, el sector angular  $D_+$  que teníamos como dominio de la ecuación diferencial original, se aplica mediante  $\varphi$  en una banda horizontal, tal y como vemos en la figura 2.3.



Figura 2.3: Banda horizontal, sin incluir la recta  $s = 0$ .

Procederemos ahora a realizar el cambio de variable, para ver qué forma adopta la ecuación. Teníamos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

a la que le aplicamos el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

Pensando que  $x$  está en función de  $t$  y que  $y$  está en función de  $s$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(*)}{=} \frac{t \cdot \frac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t} \cdot \frac{x}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} \right)$$

Donde en  $(*)$  hemos aplicado que  $y = \frac{x}{t}$ , junto con la regla de derivación de un cociente. Tenemos ya la ecuación diferencial, pero sigue estando en función de las variables  $x$  y  $t$ . Falta aplicar que  $y = \frac{x}{t}$  otra vez, que  $s = t$  y que  $x$  era solución de la ecuación diferencial, por lo que se verifica:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Aplicando esto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{t} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} \left( h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t} \right) = \frac{1}{s} (h(y) - y)$$

Que es una ecuación de variables separadas, para las funciones<sup>9</sup>  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  y  $q : J \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$p(s) = \frac{1}{s}$$

$$q(y) = h(y) - y$$

Luego acabamos de ver que toda ecuación homogénea puede llevarse a una ecuación de variables separadas.

Recordamos que en variables separadas podíamos encontrarnos dos tipos de soluciones, constantes y no constantes. Observemos que cuando  $q(b) = h(b) - b = 0$  para cierto  $b$ , encontramos soluciones constantes de la ecuación diferencial de variables separadas, que serán las funciones:

$$z(s) = b \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

Que al deshacer el cambio de variable, nos darán una semirrecta en el dominio original:

$$x(t) = b \cdot t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Resumiendo, dada una ecuación diferencial en un dominio  $D_+$  por:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua, podemos aplicar el cambio de variable

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

para llegar a la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

que ya sabemos resolver.

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial (en la que usamos la notación geométrica en lugar de la física):

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Se pide hallar su dominio de definición, así como encontrar una solución de dicha ecuación, cogiendo como condición de dicha solución que ha de cumplir:

$$y(-1) = -1$$

---

<sup>9</sup>El dominio de la primera es  $\mathbb{R}^+$  porque es el mismo dominio en el que se mueve  $t$  y el de la segunda es el dominio en el que se mueve  $\frac{x}{t}$ .

Se trata de una ecuación diferencial homogénea, ya que se trata de un cociente de dos polinomios homogéneos de grado 1. Podemos comprobarlo dividiendo numerador y denominador entre  $x$ :

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y+x}{x}} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

Por lo que la función  $h$  a escoger sería:

$$h(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

Y debemos elegir bien el dominio de definición de dicha función. Podría ser o bien  $J_- = ]-\infty, -1[$  o bien  $J_+ = ]-1, +\infty[$ .

Como queremos que  $y(-1) = -1$ , buscamos tener  $\frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$ , luego tomaremos  $J = J_+$ , ya que contiene el 1.

Una vez conocido el dominio de  $h$ , podemos ya escoger el dominio de definición de la ecuación diferencial. Este será  $D_+$  o  $D_-$ . Como ha de cumplir que  $(-1, -1) \in D$  siendo  $D$  el dominio de la ecuación diferencial, nos quedaremos con  $D = D_-$ , ya que es la opción que nos contiene las abscisas negativas. De esta forma:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \frac{y}{x} > -1 \right\}$$

Gráficamente, el dominio de definición  $D$  es el sector angular de la figura 2.4.

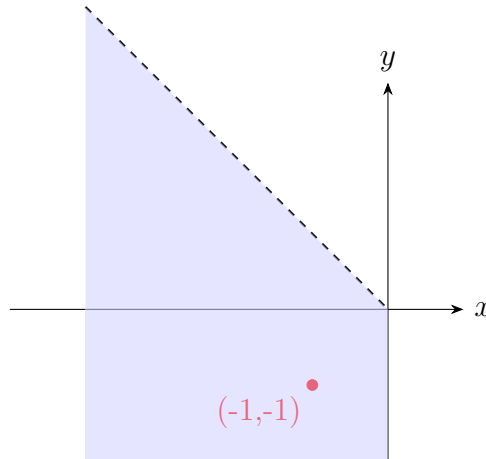


Figura 2.4: El sector angular  $D$ .

Ahora, haremos el cambio de variable, usando como nuevas variables  $u$  y  $v$ :

$$\varphi : \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto  $D$  pasa a:

$$\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, v > -1\} = ]-\infty, 0[ \times ]-1, +\infty[$$

Y el punto  $(-1, -1)$  pasa a:

$$\varphi(-1, -1) = \left(-1, \frac{-1}{-1}\right) = (-1, 1)$$

Gráficamente, vemos  $\varphi(D)$  en la figura 2.5.



Figura 2.5: Dominio tras hacer el cambio de variable

Buscamos ahora la ecuación diferencial tras el cambio de variable, la cual resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{du} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x} \left( \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{u} (h(v) - v) = \frac{1}{u} \left( \frac{v-1}{v+1} - v \right) \\ &= \frac{1}{u} \left( \frac{v-1}{v+1} - \frac{v^2+v}{v+1} \right) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{1+v^2}{1+v} \end{aligned}$$

Y tenemos nuestra ecuación de variables separadas, que pasamos a resolver. Lo primero a observar es que nos interesa la solución concreta  $v$  tal que  $v(-1) = 1$ .

Observamos que la ecuación anterior no tienen soluciones constantes, por ser:

$$\frac{1+v^2}{1+v} > 0$$

Luego resolvemos por variables separadas:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{-1}{u} \cdot \frac{1+v^2}{1+v} \\ \int \frac{1+v}{1+v^2} dv &= - \int \frac{du}{u} \end{aligned}$$

Como estamos trabajando con  $u < 0$ :

$$- \int \frac{du}{u} = -\ln(-u) + k$$

Y la primera integral la partimos en dos para resolverla, llegando a que:

$$\int \frac{1+v}{1+v^2} dv = \int \frac{1}{1+v^2} dv + \int \frac{v}{1+v^2} dv = \arctan v + \frac{1}{2} \ln(1+v^2) + k'$$

Por tanto:

$$\operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = -\ln(-u) + k$$

Y por el desarrollo teórico visto en la sección de ecuaciones de variables separables, sabemos que dicha expresión define de forma implícita una función  $v$  en función de  $u$ , para cierto  $k \in \mathbb{R}$ .

Ahora, volveremos al dominio original, deshaciendo el cambio de variable:

$$\operatorname{arc\,tg} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = -\ln(-x) + k$$

Que define  $y$  como función de  $x$  de forma implícita. Usando que  $(x < 0)$ :

$$\ln(-x) = \frac{1}{2} \ln(x^2)$$

Podemos darle otra forma a la expresión, para verla de forma más clara:

$$\operatorname{arc\,tg} \left( \frac{y}{x} \right) + \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = k$$

Es la familia de soluciones que nos resuelven la ecuación diferencial. Buscamos  $k$  para  $y(-1) = -1$ , sustituyendo  $y$  y  $x$  por  $-1$ :

$$k = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2})$$

Para ver que esto define una ecuación implícita, deberíamos aplicar el Teorema, pero gracias a la teoría que venimos desarrollando hasta ahora, lo tenemos visto. Tenemos visto que dicha fórmula dos define una ecuación implícita en un entorno del punto  $(-1, -1)$ .

Sin embargo, estamos ante un problema específico en el que podemos llegar a ver algo más. Se trata de una curva que en cartesianas tiene una expresión compleja, pero en coordenadas polares puede intuirse la gráfica de la función de forma más fácil, por lo que cambiamos a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$

Y como:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$$

Buscamos  $\theta$  de forma que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ . Como estamos trabajando con la solución que pasa por el  $(-1, -1)$ , estamos trabajando en el tercer cuadrante, por lo que tendremos  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ . Como la función  $\arctan$  es la inversa de  $\tan$  sólo en el intervalo  $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ , desplazamos  $\theta$ , usando que la tangente es  $\pi$ -periódica:

$$\begin{aligned} \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ &\implies \theta - \pi \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \arctan(\tan \theta) &= \arctan(\tan(\theta - \pi)) = \theta - \pi \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\arctan(\tan \theta) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta - \pi \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\end{aligned}$$

Y también:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, llegamos a que la expresión en polares es:

$$\theta + \ln r = k + \pi$$

Se trata de la espiral logarítmica o de Arquímedes, que se entiende mejor tomando exponenciales:

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$

Fijado un  $r$ , conforme movemos  $\theta$ , se va formando una especie de circunferencia pero con  $r$  disminuyendo, luego se forma una espiral.

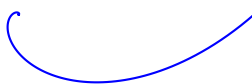


Figura 2.6: Espiral logarítmica.

*Observación.* Notemos que las espirales son curvas de la forma

$$r = f(\theta)$$

con  $f$  creciente o decreciente, escritas en coordenadas polares.

## 2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

A continuación, estudiaremos otro tipo de ecuaciones diferenciales, las reducibles a homogéneas. Estas son similares a las homogéneas, pero en vez de ser una función en función de  $\frac{x}{t}$ , es una función en función de un cociente de polinomios en dos variables, ambos de grado 1, luego son de la forma:

$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$$

con  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $I$  un intervalo abierto.

**Ejercicio.** Dar un dominio de definición para una ecuación reducible a homogénea. Estaremos trabajando por tanto con una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(t, x)$$

con

$$f(t, x) = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad \forall(t, x) \in D$$

Y busquemos el dominio  $D$  en el que la función  $f$  está definida. Este tiene que ser un conjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^2$ .

Dado  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , nos interesa:

- Primero, que el cociente anterior tenga sentido, es decir, que  $At + Bx + C \neq 0$ . Por tanto, esta recta estará excluida de  $D$ .
- Que podamos aplicar  $h$  al cociente anterior, es decir, que

$$\frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I$$

El conjunto más grande en el que podemos definir  $f$  será un conjunto de la forma:

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid At + Bx + C \neq 0, \frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I \right\}$$

Finalmente, falta comprobar que el conjunto sea abierto y conexo. Como el conjunto excluye a una recta del plano, sabemos por tanto que este contendrá como mínimo dos componentes conexas<sup>10</sup>.

### Resolución de ecuaciones reducibles a homogéneas

El truco que funciona casi siempre es realizar una traslación. Fijado  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$ , defino

$$\varphi : \begin{cases} s &= t - t_* \\ y &= x - x_* \end{cases} \quad (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$$

que es fácil ver que es un cambio de variable admisible.

El cambio de variable es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Y hay que quitar las variables  $t$  y  $x$ :

$$\frac{dy}{ds} = h \left( \frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C} \right)$$

Si conseguimos hacer:

$$\begin{cases} at_* + bx_* + c &= 0 \\ At_* + Bx_* + C &= 0 \end{cases}$$

Nos quedaría que:

$$\frac{dy}{ds} = h \left( \frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C} \right) = h \left( \frac{as + by}{As + By} \right)$$

Que se trata de una ecuación homogénea, por ser un cociente de polinomios homogéneos de grado 1.

<sup>10</sup>Si algún lector termina el ejercicio, solicitamos que se nos envíe para completar los apuntes.

- En el caso de que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo que existe una solución del sistema. Para realizar el cambio de variable, tomamos  $(t_*, x_*)$  de forma que sea solución del sistema, y al realizar el cambio de variable, podremos seguir el razonamiento superior, llegando a una ecuación homogénea.

- En el caso de que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, se trata de un sistema incompatible, por lo que no podremos realizar el razonamiento anterior.

Sin embargo, lo que sucederá en dicho caso es que los vectores  $(a, b)$  y  $(A, B)$  serán linealmente dependientes en  $\mathbb{R}^2$ , luego podemos hacer:

$$(A, B) = \lambda(a, b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

De esta forma, podemos escribir:

$$x' = h \left( \frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \right) = h \left( \frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + C} \right)$$

Que no es una ecuación homogénea, pero nos permite hacer el cambio de variable (suponiendo que  $b \neq 0$ ):

$$y = at + bx$$

## 2.5. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

para ciertas funciones  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  continuas definidas en un intervalo abierto  $J$ .

Por tanto, la ecuación diferencial vendrá dada por una función  $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que

$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t) \quad (t, x) \in J \times \mathbb{R}$$

Observemos que el dominio de  $f$  se trata de una banda vertical.

Las ecuaciones lineales pueden clasificarse en dos tipos:

- Si  $b(t) = 0 \forall t \in J$ , entonces estamos ante una ecuación lineal homogénea<sup>11</sup>.
- Si  $b$  no es la función constantemente igual a cero, decimos que es una ecuación lineal completa.

*Observación.* Observemos que  $x' = \frac{x}{t}$  es de variables separadas, homogénea, reducible a homogénea y lineal homogénea.

<sup>11</sup>no tiene nada que ver con las ecuaciones homogéneas



### 2.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas

Como hemos comentado antes, se tratan de ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x$$

para  $a : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un intervalo abierto  $J$ . Este tipo de ecuaciones sabemos ya resolverlas, pues son ecuaciones de variables separadas:

$$x' = p(t)q(x)$$

Para las funciones  $p : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) & t \in J \\ q(x) &= x & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como  $q(x) = 0 \iff x = 0$ , tenemos que sólo hay una solución constante:

$$x(t) = 0 \quad t \in J$$

Para sacar el resto, hacemos separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x \\ \int \frac{dx}{x} dx &= \int a(t) dt \end{aligned}$$

Y dependerá de que  $x$  sea positivo o negativo para calcular la primera integral:

$$\int \frac{dx}{x} dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y notando por:

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

para cierto  $t_0 \in I$ , tenemos que:

- Suponiendo que  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \ln x &= A(t) + c \\ x(t) &= e^c e^{A(t)} \quad t \in J \end{aligned}$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}^+, \quad t \in J$$

- Suponiendo que  $x < 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(-x) &= A(t) + c \\ x(t) &= -e^c e^{A(t)} \quad t \in J \end{aligned}$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}^-, \quad t \in J$$

En definitiva, dada una ecuación de la forma

$$x' = a(t)x \quad t \in J$$

Entonces, sus soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds \quad t \in J$$

para cierto  $t_0 \in J$ .

**Ejemplo.** Resolvamos

$$x' = \frac{x}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Trabajaremos por tanto en el semiplano en el que  $t < 0$ .

En este caso, tenemos  $a(t) = \frac{1}{t}$ , por lo que:

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{s} \, ds = \ln(-t)$$

para cierto  $t_0 \in \mathbb{R}^-$ . Las soluciones de dicha ecuación serán:

$$x(t) = k \cdot e^{\ln(-t)} = -k \cdot t \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

## 2.5.2. Ecuaciones lineales completas

Son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{2.8}$$

para ciertas funciones  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $J$  un intervalo abierto de forma que la función  $b$  no es constantemente igual a 0. Notaremos a su dominio  $D = J \times \mathbb{R}$ .

Resolveremos este tipo de ecuaciones mediante un cambio de variable, el cual pasamos a buscar. Dada una función  $l : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0 \, \forall t \in J$  y  $l \in C^1(J)$ , definimos el cambio de variable:

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= l(t)x \end{cases}$$

Que tenemos que ver que es admisible:

- $\varphi$  es de clase  $C^1(D)$ , ya que sus componentes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son de clase  $C^1(D)$  ( $\varphi_2$  es producto de funciones de clase  $C^1(D)$ ).
- Despejando las variables  $t$  y  $x$  (gracias a que  $l(t) \neq 0 \, \forall t \in J$ ), podemos dar una inversa  $\psi$  de  $\varphi$ , por lo que es biyectiva:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \frac{y}{l(s)} \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\psi$  es inversa de  $\varphi$ .

- Observando las componentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , vemos que estas son de clase  $C^1$ , luego  $\psi$  es de clase  $C^1$ . Tenemos ya probado que  $\varphi$  es un difeomorfismo.
- Por ser  $s = t$ , tenemos garantizada la condición de admisibilidad, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = 1 + 0 \neq 0 \quad \forall t \in J$$

- Finalmente, observemos que si  $(t, x) \in D$ , entonces  $\varphi(t, x) \in D$ , por lo que  $\varphi(D) = D$ :

$$\varphi(t, x) = (t, l(t)x) \in J \times \mathbb{R} = D$$

A continuación, aplicaremos dicha familia de cambios de variable (ya que por cada función  $l$  tenemos un cambio de variable distinto) a la ecuación 2.8:

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= lx \end{cases}$$

entendiendo que todo son funciones dependientes de  $t$ :

$$y' = l'x + lx' = l'x + l(ax + b)$$

sustituimos  $x$  por  $\frac{y}{l}$ :

$$y' = \frac{l'}{l}y + l \left( a\frac{y}{l} + b \right)$$

Y obtenemos otra ecuación diferencial lineal:

$$y' = \left( \frac{l'}{l} + a \right) y + bl$$

Sin embargo, podemos convertirlo en un cálculo de primitivas, buscando que:

$$\frac{l'}{l} + a = 0$$

Que podemos pensarlo como una ecuación diferencial para  $l$ :

$$l' = -a(t)l$$

Que es una ecuación lineal homogénea, cuyas soluciones sabemos ya que son de la forma:

$$l(t) = k \cdot e^{-A(t)} \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

Escogemos la solución  $l(t) = e^{-A(t)}$ .

Por tanto, el resultado tras aplicar el cambio de variable con la función  $l$  ahora conocida resulta en la ecuación diferencial

$$y' = b(t)l(t)$$

que la resolvemos mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_{t_0}^t b(s)l(s) ds + k$$

con nuestra función  $l$ :

$$y(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds + k$$

Una vez obtenida  $y$ , sacamos las soluciones de las ecuaciones lineales completas, deshaciendo el cambio de variable  $x = \frac{y}{l}$ :

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds$$

**Ejemplo.** Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x}{t} + 1$$

con  $t < 0$ .

Hacemos el cambio  $y = l(t)x$ , luego:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \frac{l'}{l}y + l\left(\frac{y/l}{t} + 1\right)$$

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + l$$

Buscamos una solución que cumpla:

$$\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$$

Es decir:

$$l' = -\frac{l}{t}$$

No nos hacen falta todas las soluciones, simplemente una. Cogemos:

$$l(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

tenemos que  $l(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}^-$ .

Por tanto, tenemos:

$$y' = l(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y(t) = k - \ln(-t) \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Luego:

$$x(t) = -t \cdot (k - \ln(-t)) \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

## 2.6. Ecuación de Riccati

Podemos entender la ecuación lineal como una ecuación diferencial que simula ser un polinomio de primer grado. Riccati intentó solucionar aquella ecuación diferencial que simula ser un polinomio de segundo grado:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (2.9)$$

para ciertas  $a, b, c : J \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas definidas en un intervalo abierto  $J$ .

La ecuación diferencial estará, por tanto, definida en un conjunto abierto y conexo  $D = J \times \mathbb{R}$  y vendrá dada por la función

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \end{aligned}$$

A diferencia de la ecuación lineal, la ecuación de Riccati no puede resolverse a no ser que se conozca de antemano una solución de la misma<sup>12</sup>. En dicho caso, podremos hallar todas las demás soluciones.

Suponemos, por tanto, que conocemos una solución  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (2.9) en forma explícita definida en cierto intervalo abierto  $I \subseteq J$  (ya que la solución no tiene por qué estar definida en todo el intervalo  $J$ ).

Conocida dicha función  $\phi$ , trataremos de resolverla aplicando el siguiente cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{1}{x - \phi(t)} \end{cases}$$

Por tanto, de nuestro dominio  $D$  tendremos que quitar la recta  $x - \phi(x) = 0$ , para que podamos considerar dicho cambio de variable. Para garantizar que el nuevo dominio a considerar siga siendo un conjunto conexo, tenemos dos posibles dominios a elegir:

$$\begin{aligned} D_+ &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x > \phi(t)\} \\ D_- &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x < \phi(t)\} \end{aligned}$$

Se verifica que si tenemos una solución de (2.9), entonces esta estará definida bien en  $D_+$  o bien en  $D_-$ , por lo que no perdemos (o partimos en dos) ninguna solución de la ecuación diferencial, salvo la solución  $x = \phi(t)$ , que no está presente en ninguno de los dos dominios.

La situación es la que representamos en la Figura 2.7.

<sup>12</sup>O que pueda obtenerse una a simple vista, por la sencillez de la ecuación.

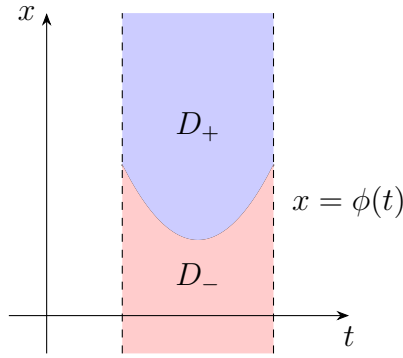


Figura 2.7: Componentes conexas de  $I \times \mathbb{R}$  divididas por  $x = \phi(t)$ .

Veamos qué codominio tiene el cambio  $\varphi$ :

- Si nos encontramos en el dominio  $D_+$ , tenemos que  $x > \phi(t)$ , luego:

$$x - \phi(t) > 0 \implies \frac{1}{x - \phi(t)} > 0$$

Y como  $t$  no varía, su codominio será  $\mathcal{D}_+ = I \times \mathbb{R}^+$ .

- Si nos encontramos en el dominio  $D_-$ , tenemos que  $x < \phi(t)$ , luego:

$$x - \phi(t) < 0 \implies \frac{1}{x - \phi(t)} < 0$$

Y como  $t$  no varía, su codominio será  $\mathcal{D}_- = I \times \mathbb{R}^-$ .

- Finalmente, de forma intuitiva podemos decir que la curva  $x = \phi(t)$  se va a infinito y que el infinito del dominio  $D$  se va a la recta  $y = 0$  tras el cambio.

Por tanto, el codominio del cambio de variable será el representado en la Figura 2.8.



Figura 2.8: Componentes conexas de  $I \times \mathbb{R}$  divididas por  $y = 0$ .

Finalmente, veamos que  $\varphi$  es un cambio de variable admisible para la ecuación (2.9):

- En primer lugar, veamos que es un difeomorfismo. Si miramos sus componentes:

$$\varphi(t, x) = \left( t, \frac{1}{x - \phi(t)} \right) = (s, y)$$

Como  $\phi$  era solución de la ecuación diferencial, entonces es de clase  $C^1$ . Por tanto, las dos componentes de  $\varphi$  son de clase  $C^1$ , luego  $\varphi$  es de clase  $C^1$ .

- Buscamos ahora la inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \frac{1}{y} + \phi(t) \end{cases}$$

Con lo que tenemos la función

$$\psi(s, y) = \left( s, \frac{1}{y} + \phi(s) \right)$$

Que también es de clase  $C^1$ .

- Finalmente, como  $s = t$ , el cambio es admisible.

Buscamos ahora expresar la ecuación diferencial tras realizar el cambio de variable. En lugar de derivar en la expresión de  $y$  en la fórmula de  $\varphi$ , preferimos derivar  $x$  en la fórmula de  $\psi$  para no tener que derivar un cociente:

$$x = \frac{1}{y} + \phi$$

Pensando que tanto  $x$ ,  $y$  y  $\phi$  son funciones dependientes de  $t$ :

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' \quad (2.10)$$

Por otra parte, sustituyendo  $x$  en la ecuación (2.9), tenemos que:

$$\begin{aligned} x' &= ax^2 + bx + c = a\left(\frac{1}{y} + \phi\right)^2 + b\left(\frac{1}{y} + \phi\right) + c \\ &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned}$$

Y como  $\phi$  era solución de la ecuación (2.9):

$$\phi' = a\phi^2 + b\phi + c$$

Sustituyendo en (2.10):

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' = \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c$$

En definitiva:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c \\ x' &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-y'}{y^2} = \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + \frac{b}{y}$$

Y multiplicando por  $y^2$ , llegamos a que:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Que es una ecuación lineal, la cual pasaremos a resolver tanto en  $\mathcal{D}_+$  como en  $\mathcal{D}_-$ . Puede pasar por tanto, que alguna solución corte  $y = 0$ , por lo que tengamos que tratarla como dos soluciones, una de una ecuación diferencial y otra de la otra.

Además, tendremos que agregar al conjunto final de soluciones la solución inicial  $x = \phi(t)$ , la cual despreciamos al realizar el cambio de variable.

En resumen, dada una ecuación de Riccati de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Conocida una solución  $x = \phi(t)$ , podemos aplicar el cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{1}{x - \phi(t)} \end{cases}$$

Para llegar a una ecuación lineal, que tendrá la forma:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

**Ejemplo.** Veamos un ejemplo de resolución de una ecuación Riccati (posiblemente una de las más sencillas de resolver), aunque se trate también de una ecuación de variables separadas.

$$x' = x^2$$

Tenemos por tanto que el dominio en el que está definida es  $D = \mathbb{R}^2$ .

A simple vista, observamos que una solución particular es  $x(t) = 0$ . Se deja como ejercicio tratar de resolver la ecuación con dicha solución inicial.

En este ejemplo, tomaremos como solución la función  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(t) = \frac{-1}{t} \quad t \in I$$

Para el intervalo  $I = \mathbb{R}^-$  (también lo podríamos haber hecho en  $\mathbb{R}^+$ ). Teníamos por tanto que la variable  $t$  se movía en  $J = \mathbb{R}$  y ahora se mueve en  $I = \mathbb{R}^-$ .

Trabajaremos ahora en los dominios:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x > \frac{-1}{t} \right\}$$

$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x < \frac{-1}{t} \right\}$$

El cambio de variable escogido es, por tanto:

$$y = \frac{1}{x - \phi(t)} = \frac{1}{x + \frac{1}{t}}$$



que también lo podemos escribir como:

$$x = \frac{1}{y} + \phi(t) = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \quad (2.11)$$

Esta función  $\varphi$  nos transforma ambos dominios en:

$$\begin{aligned}\varphi(D_+) &= \mathcal{D}_+ = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \varphi(D_-) &= \mathcal{D}_- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-\end{aligned}$$

Derivamos la ecuación (2.11) pensando que tanto  $x$  como  $y$  dependen de  $t$ :

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{t^2}$$

Como inicialmente teníamos:

$$x' = x^2 = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty} + \frac{1}{t^2}$$

Llegamos a que:

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty}$$

Multiplicamos por  $y^2$  y:

$$y' = \frac{2}{t}y - 1$$

Llegamos a una ecuación lineal que pasamos a resolver, mediante otro cambio de variable:

$$z = l(t)y$$

que también podemos escribir por comodidad como

$$l(t)z = y$$

para distinta función<sup>13</sup>  $l$ . Derivamos:

$$\begin{aligned}y' &= l'z + lz' \\ y' &= \frac{2}{t}lz - 1\end{aligned}$$

Y tenemos

$$lz' = y' - l'z = \frac{2}{t}lz - 1 - l'z = \left(\frac{2l}{t} - l'\right)z - 1$$

Buscamos que el paréntesis sea 0:

$$l' = \frac{2l}{t}$$

Y cogemos como solución:

$$l(t) \stackrel{(*)}{=} e^{2\ln(-t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2 \quad t \in \mathbb{R}^-$$

---

<sup>13</sup>A partir del cambio anterior, estamos trabajando con  $\frac{1}{l(t)}$ .

Teniendo en cuenta que en  $(*)$  debemos considerar que  $t < \mathbb{R}^-$ . Luego:

$$lz' = t^2 z' = -1 \implies z' = \frac{-1}{t^2}$$

Luego tenemos como soluciones:

$$z(t) = \frac{1}{t} + k \quad k \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Deshaciendo un cambio de variable  $y = lz = t^2 z$ :

$$y(t) = t + kt^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

Para  $k = 1$  por ejemplo, sucede que tenemos la mitad de la solución en  $\mathcal{D}_+$  y la otra mitad en  $\mathcal{D}_-$ .

Deshacemos ahora el otro cambio,  $x = \frac{1}{y} + \phi$ :

$$x(t) = \frac{1}{t + kt^2} - \frac{1}{t} \quad k \in \mathbb{R}$$

Y habría que ver dónde están definidas las soluciones. Además, tenemos que añadir la solución de partida:

$$x(t) = \phi(t) = \frac{-1}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Al conjunto de posibles soluciones.

## 2.7. Relación con Teoría de Grupos

Como introducción a esta sección, recordamos primero la definición de grupo.

**Definición 2.4** (Grupo). Sea  $A$  un conjunto no vacío con una operación binaria interna<sup>14</sup> de la forma

$$*: A \times A \rightarrow A$$

Es un grupo si se verifica que:

(1)  $*$  es asociativa:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$$

(2) Existencia de un elemento neutro para  $*$ :

$$\exists e \in A \mid a * e = e * a = a \quad \forall a \in A$$

(3) Existencia de opuestos para  $*$ :

$$\forall a \in A \quad \exists b \in A \mid a * b = b * a = e$$

Al opuesto de  $a$  lo denotaremos por  $a^{-1}$ .

---

<sup>14</sup>Esto es, que el resultado de operar con dos elementos de  $A$  vuelve a ser un elemento de  $A$ .

**Definición 2.5.** Diremos que  $G \subseteq \mathcal{G}$  es un subgrupo de un grupo  $\mathcal{G}$  si  $G$  es un grupo con la operación interna de  $\mathcal{G}$  inducida a  $G$ .

Además, en Álgebra I se probó la siguiente caracterización de subgrupo:

**Proposición 2.5.** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo y  $G \subseteq \mathcal{G}$ . Entonces,  $G$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$  si y solo si:

1.  $G$  es cerrado para la operación interna de  $\mathcal{G}$ .
2.  $g \in G \implies g^{-1} \in G$ .

Hay una teoría matemática que trata de dar sentido a que ciertos cambios de variable funcionan para ciertos “tipos” de ecuaciones diferenciales y que otros cambios de variable funcionan para otros tipos de ecuaciones diferenciales.

En álgebra, hay una teoría que relaciona las ecuaciones polinómicas con un grupo. *Sophus Lie* trató de hacer lo mismo para las ecuaciones diferenciales, tratar de relacionarlas con un grupo para poder explicar qué cambio de variable hay que hacer para resolver una ecuación en cada caso. De esta forma, conectaría la Teoría de grupos con la solubilidad de las ecuaciones diferenciales.

Geométricamente, podemos decir que los grupos tienen la misión de detectar simetrías. Si tenemos por ejemplo un cuadrado con vértices numerados del 1 al 4 y lo rotamos  $45^\circ$  sobre el centro, obtenemos otro cuadrado distinto. Si por contrario lo rotamos  $90^\circ$ , tenemos el mismo cuadrado pero con distinta numeración en los vértices.

Hay una serie de rotaciones especiales que hace que el cuadrado sea invariante. El conjunto de rotaciones que deja invariante un cuadrado (esto es, el conjunto formado por las rotaciones de 0, 90, 180 y 270 grados) forma un grupo. Podemos pensar en él como en el conjunto  $\{1, -1, i, -i\}$ , que efectivamente es un grupo<sup>15</sup>.

Resulta que cada figura simétrica tiene un grupo cíclico asociado que las dejan invariantes, llamado grupo de simetrías.

Podemos hacer una analogía entre las figuras con las rotaciones y las ecuaciones diferenciales con los cambios de variable. De esta forma, buscamos los cambios de variable que nos dejan las ecuaciones diferenciales invariantes. Esto es, que tanto el dominio como la expresión de la ecuación diferencial sea la misma, aunque pueda pasar que una solución vaya en otra distinta tras aplicar el cambio de variable, al igual que sucedía con la numeración de los vértices de nuestro cuadrado.

La idea es, que dada una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x) \tag{2.12}$$

definida en un dominio  $D$  dentro del plano, buscaremos un cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

<sup>15</sup>Para la operación interna de multiplicación en  $\mathbb{C}$ , con neutro 1.

que nos lleve  $D$  en él mismo y que tras hacer el cambio obtengamos que:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) = f(s, y) \quad \forall (s, y) \in D$$

En este caso, diremos que (2.12) es invariante por  $\varphi$ .

Notemos que para  $\varphi = Id_D$ , esto se cumple para cualquier ecuación diferencial.

**Ejemplo.** Con este ejemplo, tratamos de mostrar que existen cambios de variable admisibles para una ecuación diferencial distintos de  $Id_{\mathbb{R}^2}$  que dejan la ecuación diferencial invariante. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{3x^2 + 1}$$

Definida en  $D = \mathbb{R}^2$ . Le haremos el siguiente cambio de variable y veremos que dicho cambio deja la ecuación invariante.

$$\varphi : \begin{cases} s &= -t \\ y^3 + y &= x^3 + x + 8 \end{cases}$$

Supondremos por ahora que  $\varphi$  está bien definida (no sabemos por ahora si la segunda ecuación nos da una función implícita  $y = y(x)$ ), para ver que el cambio deja invariante la ecuación y luego veremos que es un cambio de variable bien definido y admisible para la misma.

Apliquemos el cambio de variable para ver qué ecuación obtenemos al final:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt}$$

Derivamos de forma implícita:

$$\begin{aligned} 3y^2 y' + y' &= 3x^2 x' + x' \\ (3y^2 + 1)y' &= (3x^2 + 1)x' = \frac{(3x^2 + 1)t}{3x^2 + 1} = t \end{aligned}$$

Luego:

$$y' = \frac{t}{3y^2 + 1}$$

por lo que:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{3y^2 + 1} = \frac{s}{3y^2 + 1}$$

Luego tenemos como nueva ecuación:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{3y^2 + 1} = \hat{f}(s, y) = f(s, y)$$

Falta ahora ver que la ecuación anterior nos da un cambio de variable admisible:

1. Veamos primero que las ecuaciones

$$\varphi : \begin{cases} s &= -t \\ y^3 + y &= x^3 + x + 8 \end{cases}$$

Definen un cambio de variable admisible. Suponiendo que no nos sabemos las fórmulas de Cardano Vieta<sup>16</sup>, definimos una función:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \xi^3 + \xi \end{aligned}$$

con

$$\sigma'(\xi) = 3\xi^2 + 1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Por lo que es estrictamente creciente, luego inyectiva.

Notemos además que es sobreyectiva, ya que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \sigma(\xi) = \pm\infty$$

Y como  $\sigma$  es una función continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que tiene que tomar todos los valores, luego  $\sigma$  es sobreyectiva. En definitiva,  $\sigma$  es biyectiva y además tiene inversa, la cual es derivable, gracias al Teorema de la Función Inversa, por ser  $\sigma'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ .

Resulta por tanto que  $\sigma$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$ .

Pensamos ahora en las ecuaciones como en:

$$\sigma(y) = \sigma(x) + 8$$

Y como es un difeomorfismo, podemos tomar la inversa:

$$y = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8)$$

Luego efectivamente, la fórmula anterior nos define  $y$  como función implícita, en función de  $x$ . Podemos ya escribir:

$$\varphi(t, x) = (s, y)$$

donde:

$$\begin{cases} s &= \varphi_1(t, x) = -t \\ y &= \varphi_2(t, x) = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8) \end{cases}$$

Con lo que la función  $\varphi$  está bien definida.

2. Además, vemos que  $\varphi$  es de clase  $C^1$ , por serlo sus componentes.

---

<sup>16</sup>Las que dan las raíces de los polinomios cúbicos..

3. Vemos que  $\varphi$  tiene inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= \psi_1(s, y) = -s \\ x &= \psi_2(s, y) = \sigma^{-1}(\sigma(y) - 8) \end{cases}$$

Y que además  $\psi$  es de clase  $C^1$ , luego tenemos que  $\varphi$  era, efectivamente, un difeomorfismo.

4. Finalmente, vemos que es un cambio de variable admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = -1 + 0 \neq 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, hemos visto ya un ejemplo de un difeomorfismo distinto de la identidad que deja una ecuación diferencial invariante.

**Proposición 2.6.** Sea  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  el conjunto de todos los difeomorfismos en el plano:

$$\text{Diff}(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ difeomorfismo}\}$$

$\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo con la operación de composición de funciones  $\circ$ .

*Demostración.*

1. En primer lugar, para ver que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  sea un grupo, buscamos primero demostrar que la composición de funciones es cerrada para  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, que la composición de cualesquiera dos difeomorfismos es un difeomorfismo.

Sean  $\Phi, \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , buscamos ver que  $\phi = \Phi \circ \varphi$  es un difeomorfismo.

- La composición de funciones de clase  $C^1$  es de clase  $C^1$ , luego  $\phi$  es de clase  $C^1$ .
- La composición de funciones biyectivas resulta en una función biyectiva, luego  $\phi$  es biyectiva.
- Se verifica que<sup>17</sup>:

$$\phi^{-1} = (\Phi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

Y tanto  $\varphi^{-1}$  como  $\Phi^{-1}$  son de clase  $C^1$  por ser ambos difeomorfismos, luego  $\phi^{-1}$  es de clase  $C^1$ .

Finalmente, llegamos a que:

$$\Phi, \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2) \implies \Phi \circ \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$$

2. Además, tenemos que ver que se cumplen las tres propiedades de la definición de grupo:

(1) La composición de funciones es asociativa<sup>18</sup>.

---

<sup>17</sup>Visto en Álgebra I.

<sup>18</sup>Visto en Álgebra I.

- (2) Tiene un elemento neutro,  $Id_{\mathbb{R}^2} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .  
 (3) Para cada  $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , tenemos  $\varphi^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , con lo que:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Concluimos por tanto que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo con la operación  $\circ$ .  $\square$

Tenemos que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es el grupo de todos los cambios de variable que existen en el plano.

A continuación, vamos a introducir tres grupos relevantes: el grupo de las traslaciones, el grupo de las homotecias y el grupo de las rotaciones. Para un conocimiento más en profundidad de los resultados aquí descritos, se insta al lector que acuda a los apuntes de Geometría III.

### Grupo de traslaciones

Dado  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = (v_1, v_2)$  un vector del plano, podemos definir el cambio

$$\varphi : \begin{cases} s &= t + v_1 \\ y &= x + v_2 \end{cases}$$

Resultado de trasladar cualquier punto del plano  $(t, x)$  por el vector  $v$ . Su inversa será

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} t &= s - v_1 \\ x &= y - v_2 \end{cases}$$

Que es la traslación según el vector  $-v$ .

**Proposición 2.7.** *Fijado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos la traslación según el vector  $\lambda v = \lambda(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ :*

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= t + \lambda v_1 \\ y &= x + \lambda v_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

*Variando  $\lambda$ , consideramos ahora la familia uniparamétrica de traslaciones  $G$ :*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

*Entonces,  $G$  es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .*

*Demostración.* Por una parte, tenemos que  $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , ya que todas las traslaciones son difeomorfismos.

1. En primer lugar, observemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda+\mu}(t, x) &= (t + (\lambda + \mu)v_1, x + (\lambda + \mu)v_2) = ((t + \lambda v_1) + \mu v_1, (x + \lambda v_2) + \mu v_2) \\ &= \varphi_\mu(t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) = \varphi_\mu(\varphi_\lambda(t, x)) \end{aligned}$$

Por lo que  $\varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda$ . De esta forma, dadas dos traslaciones cualesquiera, su composición es una traslación, por lo que tenemos la primera propiedad.

2. Dado  $\varphi_\lambda$ , tenemos que  $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{-\lambda}$ , que también es una traslación.

Luego  $G$  es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

### Grupo de homotecias

Una homotecia de razón  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  es de la forma:

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= \lambda t \\ y &= \lambda x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Que tiene por inversa

$$\varphi_\lambda^{-1} : \begin{cases} t &= \frac{t}{\lambda} \\ x &= \frac{y}{\lambda} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

**Proposición 2.8.** *La familia uniparamétrica de homotecias es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ :*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda > 0\}$$

*Demostración.* Para ello, primero vemos que

$$\varphi_{\lambda \cdot \mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$$

- De esta forma, la composición de dos homotecias es una homotecia.
- Además,  $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$ ,  $\forall \varphi \in G$ .

□

### Grupo de rotaciones

Sea la matriz de la rotación de un ángulo  $\theta$ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si le damos el valor  $\theta = \pi/2$ , vemos que es la matriz de la función lineal que nos da la rotación en sentido antihorario:

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el vector  $e_1 = (1, 0)$  lo lleva en  $e_2 = (0, 1)$  y el vector  $e_2$  lo lleva en  $-e_1$ .

**Proposición 2.9.** *La familia uniparamétrica de rotaciones es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ :*

$$G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

*Demostración.* Se comprueba viendo primero que

$$R_{\theta+\Theta} = R_\theta \circ R_\Theta$$

- De esta forma, la composición de dos giros es un giro.
- Además,  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ ,  $\forall R_\theta \in G$ .

□

Aunque hay otros grupos uniparamétricos, estos son los más simples.



### 2.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales

Tomamos  $v = (1, 0)$ , luego trabajaremos con el grupo uniparamétrico de cambios de variable:

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= t + \lambda \\ y &= x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Partimos de una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

Para una cierta función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Le aplicamos el cambio y llegaremos a una nueva ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s, y)$$

Y lo que buscamos es que

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

con el fin de dejar la ecuación diferencial invariante para dicho cambio de variable.

La primera observación es que  $\varphi_\lambda$  es siempre admisible para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Que en las nuevas variables queda como:

$$\frac{dy}{ds} = f(s - \lambda, y)$$

Ahora, buscamos que la ecuación sea invariante por todos los cambios de variable:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s - \lambda, y) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

De esta forma, tenemos una función  $f$  en dos variables que toma los mismos valores en todas las líneas horizontales, luego  $f$  sólo depende de  $y$ , con lo que la ecuación en función de las variables  $t$  y  $x$  sólo depende de  $x$ .

**Ejemplo.** Por ejemplo, la ecuación

$$x' = \sin x$$

es invariante por traslaciones horizontales, ya que  $f$  sólo depende de  $x$ :

$$y' = \sin y$$

**Ejemplo.** Si por contrario tomamos la ecuación

$$x' = \sin(t + x)$$

Y hacemos el mismo cambio:

$$y' = \sin(s + y - \lambda)$$

*Observación.* Las ecuaciones diferenciales que son invariantes por el grupo de traslaciones verticales son aquellas que sólo dependen de  $t$  (por un razonamiento similar). Es decir, las ecuaciones diferenciales que se resuelven mediante cálculo de primitivas.

### 2.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias

Trabajamos ahora con el grupo uniparamétrico de cambios

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= \lambda t \\ y &= \lambda x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

Que también resulta ser un cambio de variable admisible,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Dada una ecuación diferencial cualquiera:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua, podemos aplicar el cambio de variable:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\lambda x'}{\lambda} = x' = f(t, x)$$

Cambiando ahora las variables por las nuevas:

$$\frac{dy}{ds} = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

Ahora, busquemos que la solución sea invariante por todos los infinitos cambios de variable, es decir:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que esto lo cumplen todas las funciones homogéneas de grado 0:

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^r P(t, x) = P(t, x) \quad r = 0$$

Geométricamente, son las funciones que sólo dependen de la pendiente de un punto, luego son las funciones constantes en las rectas que pasan por el origen.

*Observación.* Notemos que las ecuaciones diferenciales homogéneas son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Por lo que la  $f$  de esta ecuación diferencial es una función homogénea, luego es invariante por homotecias.

**Ejercicio.** Encontrar la clase de ecuaciones diferenciales que son invariantes por rotaciones.

Como resumen de esta sección, podemos decir que encontrar un cambio de variable que deja una ecuación diferencial invariante es equivalente a resolverla.

### 3. Condición de exactitud y factores integrales

Una vez estudiados los principales cambios de variable para resolver ecuaciones diferenciales, cambiamos ahora la forma en la que las resolveremos, procedimiento que describiremos y desarrollaremos a lo largo de este Capítulo.

**Notación.** Volveremos nuevamente a la notación geométrica, donde notaremos por  $x$  a la variable independiente y por  $y = y(x)$  a la función incógnita.

Ahora, no estaremos interesados en buscar ecuaciones diferenciales en forma normal, sino que buscaremos ecuaciones de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (3.1)$$

Y lo que haremos ahora para resolverla será buscar diferenciales exactas, es decir, buscar una función  $U$  de forma que la expresión (3.1) se reescriba como

$$\frac{d}{dx}[U(x, y)] = 0$$

De forma que, bajo unas ciertas condiciones, tendremos que  $U(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  con lo que tendremos una solución  $y = y(x)$  expresada en forma implícita gracias a la función  $U$ .

**Ejemplo.** Motivaremos lo anteriormente descrito con este ejemplo, en el que trataremos de resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \quad (3.2)$$

buscando para ello una función que al derivarla respecto a  $x$  nos de la expresión que tenemos.

Lo primero para ello será reescribir la ecuación (3.2) para que sea de la forma (3.1). Para ello, es suficiente con desplazar todos los términos a la izquierda de la igualdad, obteniendo

$$x - y + (x + y)y' = 0 \quad (3.3)$$

Por lo que en este caso, tenemos las funciones

$$P(x, y) = x - y \quad Q(x, y) = x + y$$

Reescribiendo la ecuación (3.3) con el objetivo de buscar un diferencial exacto, llegamos a la expresión

$$x + yy' - y + xy' = 0$$

donde observamos que la parte de la izquierda de la resta podemos verla como:

$$x + yy' = 0 \implies \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = 0$$

Si también pudiéramos hacerlo también en la derecha (algo que a priori parece más difícil), llegaríamos a una expresión de la forma:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) - \frac{d}{dx} [H(x, y)] = 0$$

Veremos próximamente que esto es imposible de hacer en este caso.

Sin embargo, existe un truco que sí nos permite resolver la ecuación (3.3), se basa en dividir la expresión entre  $x^2 + y^2$  (algo que por ahora parece una idea feliz, pero que cobrará sentido a lo largo del Capítulo, algo que llamaremos *factor integrante*):

$$\frac{x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} y' = 0$$

Vamos a reorganizar los términos cuidadosamente, para buscar un diferencial exacto:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} + \frac{-y + xy'}{x^2 + y^2} = 0$$

Es difícil hallar un diferencial exacto a partir de una expresión, pero es fácil comprobar que algo lo sea. Proponemos la siguiente expresión como diferencial exacto y comprobaremos que funciona, por tener por ahora poco manejo en este procedimiento (aunque el término de la izquierda no es difícil de averiguar). Proponemos:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{d}{dx} \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = 0$$

Es sencillo comprobar que el término de la izquierda se corresponde con lo que queríamos hacer, comprobémoslo ahora en la derecha:

$$\frac{d}{dx} \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

Finalmente, vemos que:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{d}{dx} \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = 0$$

gracias a la linealidad de la derivada, y por ser la función<sup>1</sup>

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

de clase  $C^1$ , concluimos finalmente que

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \left( \frac{y}{x} \right) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

---

<sup>1</sup>En este ejemplo no nos preocupamos por su intervalo de definición, ya que solo queremos mostrar el procedimiento que realizaremos a partir de ahora para resolver las ecuaciones diferenciales.

Una vez explicada de forma breve lo que haremos y motivada con el ejemplo anterior, pasaremos ahora al desarrollo teórico de este procedimiento, el cual se divide en dos:

- En primer lugar, estudiar una condición necesaria y suficiente para tener la condición de exactitud (esto es, poder encontrar un diferencial exacto) que nos permita obtener la función  $U$  anteriormente mencionada.
- En caso de que no podemos hacerlo, buscar algo por lo que multiplicar la ecuación original (un factor integrante) para que sí podamos hacerlo, tal y como hicimos en el ejemplo con  $x^2 + y^2$ .

Exigiremos varias hipótesis sobre las funciones  $P$  y  $Q$  de la expresión (3.1) (y sobre otros elementos relacionados con la ecuación diferencial) con el fin de obtener el resultado buscado.

### 3.1. Condición de exactitud

En todo lo que sigue, trabajaremos en un abierto conexo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  y con dos funciones<sup>2</sup>  $P, Q \in C^1(\Omega)$ .

Si existe  $U \in C^1(\Omega)$  una función de dos variables de forma que la ecuación (3.1) se transforme en una de la forma:

$$\frac{d}{dx}(U(x, y)) = 0$$

Derivando de forma implícita:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)y' = 0$$

Por tanto, lo que buscamos es una función  $U$  que cumpla:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Veremos a continuación que esto no es posible en general (sin exigir más condiciones). Es decir, no tiene por qué existir una función  $U$  de forma que sus dos parciales sean las funciones  $P$  y  $Q$  dadas. Para ello, recuperaremos el ejemplo anterior, introduciendo antes un teorema importante en esta sección<sup>3</sup>.

**Teorema 3.1** (de Clairaut). *Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de dos variables definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , si  $f \in C^2(\Omega)$ , entonces las derivadas cruzadas de  $f$  son iguales, es decir:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

<sup>2</sup>Notemos que en el ejemplo anterior,  $P$  y  $Q$  eran polinomios, por lo que cumplían esta condición.

<sup>3</sup>Se trata de un Teorema que se debería haber visto anteriormente, pero que no se ha hecho por la planificación del doble grado.

**Ejemplo.** Para las funciones

$$P(x, y) = x - y \quad Q(x, y) = x + y$$

no es posible encontrar una función  $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$  que cumpla

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*Demostración.* Por reducción al absurdo, suponemos que existe una función  $U$  de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = x - y \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = x + y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

En dicho caso, entonces  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  (de hecho,  $U \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  por tratarse de polinomios). Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (Q(x, y)) = 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (P(x, y)) = -1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Clairaut, llegamos a que:

$$1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) = -1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Contradicción, con lo que no existe dicha función  $U$ . □

En general, dadas dos funciones de clase  $C^1$  no podemos encontrar una tercera función de clase  $C^1$  de forma que sus derivadas parciales sean las dos primeras funciones. Notemos que en el caso unidimensional, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que esto sí que es cierto, cosa que no pasa en varias variables.

Buscamos ahora una condición que nos permita encontrar una función  $U \in C^1(\Omega)$  de forma que podamos escribir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Para dos funciones  $P$  y  $Q$  de clase  $C^1(\Omega)$ . Veamos primero un resultado que nos da una condición necesaria:

**Proposición 3.2** (Condición necesaria). *Dadas dos funciones  $P, Q \in C^1(\Omega)$ , si existe una función  $U \in C^1(\Omega)$  tal que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*Entonces, se ha de cumplir la **condición de exactitud**:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*Demostración.* Recuperando parte de la demostración del ejemplo anterior, si existiera dicha función  $U$ , esta sería de clase  $C^2(\Omega)$ , luego aplicando el Teorema de Clairaut:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

□

Sin embargo, la condición de exactitud no se trata de una condición suficiente para poder encontrar dicha función  $U$ , sino que dependerá de la topología de  $\Omega$  de que esto pueda hacerse o no. Para ver este resultado, es necesario introducir previamente un concepto ya visto en otras asignaturas.

**Definición 3.1** (Forma de estrella). Diremos que  $\Omega$  tiene forma de estrella (o que es estrellado<sup>4</sup>) si existe  $z_* \in \Omega$  tal que

$$[z, z_*] \subseteq \Omega \quad \forall z \in \Omega$$

Es decir, que el segmento de extremos  $z$  y  $z_*$  esté contenido en  $\Omega$ :

$$(1-t)z + tz_* \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1], z \in \Omega$$

Notemos que la condición de ser estrellado se trata de una condición geométrica. Ejemplos de conjuntos estrellados son:

$$\mathbb{R}^2 \quad [0, 1] \times [0, 1] \quad \mathbb{S}^1$$

Todos estos son convexos. Sin embargo, existen conjuntos con forma de estrella que no son convexos, como el conjunto de la Figura 3.1.

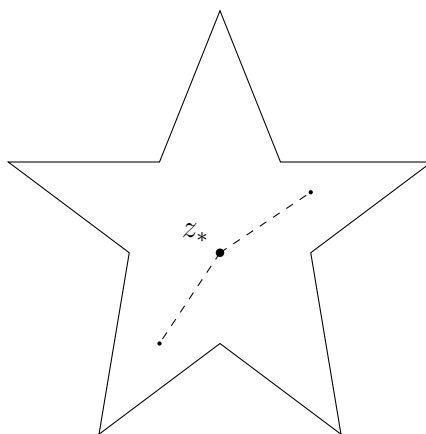


Figura 3.1: Conjunto estrellado desde  $z_*$ .

Recordando la Proposición 3.2, mostramos ahora el siguiente teorema, el cual nos proporciona la otra implicación que venimos buscando para tener una condición necesaria y suficiente.

---

<sup>4</sup>Tal y como se desarrolló en los apuntes de Topología I.

**Teorema 3.3.** Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto y tiene forma de estrella, sean  $P, Q \in C^1(\Omega)$  funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, existe una función  $U \in C^2(\Omega)$  tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

En realidad, obtenemos un teorema mucho más general exigiendo solo que  $\Omega$  sea simplemente conexo<sup>5</sup>.

Para realizar la demostración, es necesario recordar previamente un concepto ya visto en Análisis Matemático II, las integrales dependientes de un parámetro.

### 3.1.1. Integrales dependientes de un parámetro

Sabemos que si tenemos una función continua  $f$  definida en un intervalo  $I$ , entonces si definimos

$$F(y) = \int_{y_0}^y f(\xi) d\xi \quad y_0 \in I, \forall y \in I$$

Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que  $F \in C^1(I)$ , con  $F'(y) = f(y)$ .

Sin embargo, nos podemos encontrar funciones definidas por integrales de diversas formas, como una función dada por la integral de una función de dos variables integrando solo una de ellas. Sea  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a, b \in J$ , definimos  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in I$$

Las funciones obtenidas de esta forma decimos que son funciones obtenidas mediante integrales dependientes de un parámetro (en este caso, el parámetro es  $y$ ).

Antes de ver cómo podemos derivar este tipo de funciones, pensaremos en “el caso discreto”. Es decir, dada una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  todas ellas definidas en un cierto intervalo  $I$  y dado  $N \in \mathbb{N}$ , podemos definir una función  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(y) = \sum_{n=1}^N f_n(y) \quad \forall y \in I$$

De esta forma, sabemos ya derivar la función  $F$ :

$$\frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \left( \sum_{n=1}^N f_n(y) \right) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{df_n}{dy}(y) \right) \quad \forall y \in I$$

---

<sup>5</sup>Noción que no hemos visto todavía. Intuitivamente, un conjunto es simplemente conexo si no tiene agujeros.



gracias a la linealidad de la derivada. Resulta que esto se mantiene al pasar al “caso continuo”, tal y como veremos en el siguiente teorema.

Veremos una versión más débil del teorema visto en Análisis Matemático II, que cuenta con las consecuencias justas para demostrar el Teorema 3.3.

**Teorema 3.4** (Integral dependiente de un parámetro). *Sea  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto abierto, dada una aplicación  $f : G \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1(G \times [a, b])$ , definimos una función  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \int_a^b f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, t) dt$$

Entonces,  $F \in C^1(G)$  y

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, t) dt \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

Como consecuencia del teorema, la función  $F$  anteriormente definida como

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in I$$

Si  $I$  era un intervalo abierto y  $f$  era de clase<sup>6</sup>  $C^1([a, b] \times I)$ , entonces  $F \in C^1(I)$ , y tenemos que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \forall y \in I$$

**Ejemplo.** Dada la función

$$F(y) = \int_0^1 e^x \sin(x + y^2) dx \quad \forall y \in I$$

Gracias al teorema de integrales dependientes de un parámetro, sabemos que la derivada de esta función es:

$$F'(y) = \int_0^1 2ye^x \cos(x + y^2) dx = 2y \int_0^1 e^x \cos(x + y^2) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Una vez terminado el repaso de integrales dependientes de un parámetro, estamos ya preparados para proceder con la demostración del Teorema 3.3, el cual volvemos a enunciar:

**Teorema 3.5.** *Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto y tiene forma de estrella, sean  $P, Q \in C^1(\Omega)$  funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, existe una función  $U \in C^2(\Omega)$  tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

---

<sup>6</sup>Notemos que el teorema se anunció pensando que los parámetros de la función serían los primeros, pero ahora tenemos el parámetro al final, es una situación totalmente análoga.

*Demostración.* La demostración la haremos pensando que el punto  $z_*$  de  $\Omega$  que nos da la condición de que tenga forma de estrella sea  $z_* = (0, 0)$  y la demostración en el caso general se deja como ejercicio para el lector.

En dicho caso, definimos una función  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$U(x, y) = x \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) d\lambda + y \int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y) d\lambda \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Notemos que  $U$  está bien definida, ya que:

- En primer lugar, como  $\Omega$  tiene forma de estrella desde  $z_* = (0, 0)$ , entonces el segmento que une cualquier punto  $(x, y)$  con  $z_*$  estará en  $\Omega$ , luego si  $(x, y) \in \Omega$ , entonces  $(\lambda x, \lambda y) \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ .
- Además,  $P$  y  $Q$  son funciones continuas, luego integrables en cualquier conjunto compacto (como lo es  $[0, 1]$ ), luego podemos calcular dichas integrales.

Como las funciones resultantes de las composiciones siguientes

$$\begin{aligned} (x, y, \lambda) &\longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto P(x\lambda, y\lambda) \\ (x, y, \lambda) &\longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto Q(x\lambda, y\lambda) \end{aligned}$$

son de clase  $C^1(\Omega \times [0, 1])$ , podemos aplicar dos veces el teorema de las integrales dependientes de un parámetro, obteniendo que  $U \in C^1(\Omega)$  y que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) d\lambda + x \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) d\lambda + y \int_0^1 \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) d\lambda \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) d\lambda + x \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) d\lambda + y \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) d\lambda \end{aligned}$$

Donde en  $(*)$  hemos usado que  $P$  y  $Q$  cumplen la condición de exactitud. Podemos ahora escribirla como una diferencial exacta (compruébese), obteniendo que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) d\lambda + \int_0^1 \lambda \frac{d}{d\lambda} [P(\lambda x, \lambda y)] d\lambda$$

Que podemos volver a escribir como una diferencial exacta (vuélvase a comprobar), llegando a que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [\lambda P(\lambda x, \lambda y)] d\lambda$$

donde podemos aplicar la Regla de Barrow:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} [\lambda P(\lambda x, \lambda y)] d\lambda = [\lambda P(\lambda x, \lambda y)]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = P(x, y)$$

Por un razonamiento análogo, llegamos a que:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

Finalmente, como las dos derivadas parciales de  $U$  son de clase  $C^1(\Omega)$ , concluimos que  $U \in C^2(\Omega)$ .  $\square$

### 3.1.2. Interpretación de la demostración

Pese a haber demostrado el Teorema 3.3, la demostración no es gratificante, ya que hemos obtenido de forma “mágica” una función  $U$  que cumplía lo que queríamos, y no sabemos de dónde proviene dicha fórmula. Trataremos en esta sección de dar sentido a esta, usando para ello la física.

En física, un campo vectorial en el plano es una aplicación que a cada punto  $z = (x, y)$  le hace corresponder un vector (una flecha),  $F(z) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ .

De esta forma, un campo vectorial para nosotros será una aplicación  $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$  con  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto. Pensaremos en este campo vectorial como en un campo de fuerzas (es decir, el vector  $F(z)$  nos indicará cómo es la fuerza que se sufre al estar en el punto  $z$ ).

**Definición 3.2** (Campo de fuerzas conservativo). Diremos que un campo de fuerzas  $F$  es conservativo si existe un potencial, es decir, una función  $U : G \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que

$$\nabla U = F$$

Es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

*Observación.* El lector estará acostumbrado a ver en física el gradiente notado por  $-\nabla V$  (con  $V = -U$ ). Sin embargo, en esta sección trabajaremos con el gradiente refiriéndonos a  $\nabla U$ .

**Ejemplo.** Dado el campo de fuerzas

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Que podemos pensar como una homotecia o como un campo vectorial:

- En el origen, tenemos el vector 0.
- Dado un punto  $(x, y)$ , tenemos que dibujar el vector fuerza (gradiente) como la mitad del vector de posición.

Notemos que se trata de un campo repulsor, de forma que el vector fuerza se mantiene constante en circunferencias de un determinado radio, con dirección perpendicular a los radios de la misma. Conforme nos alejamos del origen, la fuerza se incrementa.

Resulta que  $F$  es un campo de fuerzas conservativo, ya que podemos encontrar un potencial para dicho campo, es decir, una función  $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$  dada por

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} = F_1(x_1, x_2) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2} = F_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

**Ejemplo.** Un ejemplo de campo no conservativo es

$$F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Se trata de un giro de  $90^\circ$  en sentido antihorario, un campo de fuerzas que describe el comportamiento de un vórtice (como lo hace el agua cuando se cuele en un sumidero). Se trata de un campo no conservativo, ya que no podemos encontrar un potencial, debido a que no se cumple la condición de exactitud.

En un campo de fuerzas no hay necesariamente energía (ya que puede no ser conservativo), pero lo que siempre hay es trabajo.

**Definición 3.3** (Trabajo). Dado un conjunto abierto  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ , un campo de fuerzas en  $G$  y un camino en  $G$ , es decir, una función  $\gamma \in C^1([a, b])$ , el trabajo de  $F$  a lo largo de  $\gamma$  se define como

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

A continuación, podemos reformular el Teorema 3.3 en términos físicos, obteniendo el siguiente teorema:

**Teorema 3.6.** Si  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto y tiene forma de estrella, sea  $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$  un campo de fuerzas para el cual se cumple la condición de exactitud:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

Entonces,  $F$  es conservativo.

Finalmente, notemos que si tenemos dos caminos distintos con los mismos extremos, el trabajo por cada uno de ellos no tiene por qué coincidir. Sin embargo, esto sucede si el campo es conservativo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_a^b \left[ \frac{\partial U}{\partial x_1}(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\gamma(t)) \gamma'_2(t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [U(\gamma(t))] dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Por la regla de Barrow, concluimos que el trabajo para ir de un punto a otro por un camino  $\gamma$  es la diferencia del potencial entre los dos puntos.

Para entender ahora la interpretación de lo que hicimos en la demostración del Teorema 3.3, lo que hicimos fue fijar un nivel de potencial 0 en el origen  $z_* = (0, 0)$ . Hemos cogido un camino rectilíneo entre cada punto  $(x, y)$  de  $\Omega$  y  $z_*$  y hemos obtenido el trabajo para cada camino, sabiendo que el trabajo por cualquier otro camino se mantiene, al ser  $F = (P, Q)$  un campo conservativo, por cumplir la condición de exactitud.

## 4. Relaciones de Problemas

### 4.1. Ecuaciones y sistemas

**Ejercicio 4.1.1.** En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que  $M$  es la cantidad total de materia a memorizar y  $A(t)$  es la cantidad de materia memorizada a tiempo  $t$ . Determine una ecuación diferencial para  $A(t)$ . Encuentre soluciones de la forma  $A(t) = a + be^{\lambda t}$ .

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = \lambda(M - A),$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos, con dominio  $D = \mathbb{R}^2$  y condición inicial  $A(0) = 0$ .

Para resolverlo, empleamos conocimientos del Capítulo 2. Como se trata de una ecuación lineal, sus soluciones son de la forma:

$$A(t) = e^{-\lambda t} \left( \int e^{\lambda t} M \lambda dt + C \right) = e^{-\lambda t} (M e^{\lambda t} + C) = M + C e^{-\lambda t}$$

Empleando la condición inicial, tenemos que  $A(0) = M + C = 0 \implies C = -M$ . Por tanto, la solución es:

$$A(t) = M - M e^{-\lambda t} = M(1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{definida en } \mathbb{R}$$

**Ejercicio 4.1.2.** Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de  $y(x)$  verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

Sea el punto  $P = (x_0, y(x_0))$ . La pendiente de la recta tangente en dicho punto es  $m_t = y'(x_0)$ . Por otro lado, la distancia del punto al origen, notada por  $d(P, O)$  es  $d(P, O) = \sqrt{x_0^2 + y(x_0)^2}$ . Como la condición impuesta en el enunciado es  $m_t = (d(P, O))^2$ , tenemos que la ecuación diferencial que describe el enunciado es:

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

2. El grafo de  $y(x)$  verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

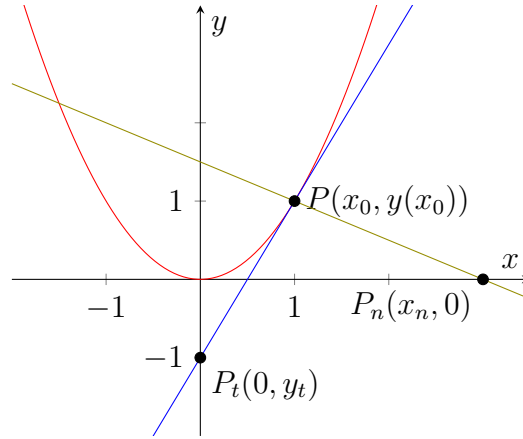


Figura 4.1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 4.1.2.2.

La representación gráfica de la situación se encuentra en la Figura 4.1.

Sea el punto  $P = (x_0, y(x_0))$ . Para ambas rectas, usaremos la ecuación punto-pendiente. Para la recta tangente, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} m_t = y'(x_0) \\ P_t = (0, y_t) \end{array} \right\} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{y(x_0) - y_t}{x_0 - 0} \Rightarrow y_t = y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)$$

Notemos además que, en el caso de  $x_0 = 0$ , también podemos ver que se cumple que  $y_t = y(x_0) - 0 \cdot y'(x_0) = y(x_0)$ . Respecto a la recta normal, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} m_n = -\frac{1}{y'(x_0)} \\ P_n = (x_n, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y(x_0)}{x_n - x_0} \Rightarrow x_n = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0$$

Notemos que, si  $y'(x_0) = 0$ , se cumple también que  $x_n = 0 \cdot y(x_0) + x_0 = x_0$ . Además, si  $x_n = x_0$ , entonces se tiene que  $y'(x_0) = 0$  o  $y(x_0) = 0$ , por lo que también se cumple.

La ecuación diferencial que especifica el enunciado es  $|y_t| = |x_n|$ . Por tanto, tenemos que:

$$|y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)| = |y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0|$$

Quitando los valores absolutos, llegamos a que:

$$\begin{aligned} y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) &= y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0 \Rightarrow y(x_0) - x_0 = y'(x_0) (y(x_0) + x_0) \\ y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) &= -y(x_0) \cdot y'(x_0) - x_0 \Rightarrow y(x_0) + x_0 = y'(x_0) (x_0 - y(x_0)) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales que describen el enunciado son:

$$\begin{aligned} y - x &= y'(y + x) && \text{con dominio } \Omega_1 = \mathbb{R}^3 \\ y + x &= y'(x - y) && \text{con dominio } \Omega_2 = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones diferenciales no están en forma normal. Si quisiésemos dejarlas en forma normal (que no es recomendable, puesto que se dividen los

dominios y se pierden soluciones), estas serían:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}. \end{cases}$$

$$y' = \frac{y+x}{x-y} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}. \end{cases}$$

**Ejercicio 4.1.3.** En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x - \alpha)(\beta - x),$$

donde  $x(t)$  es la cantidad de compuesto a tiempo  $t$ ,  $k > 0$  es una constante de proporcionalidad y  $\beta > \alpha > 0$ . Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

El dominio de la ecuación diferencial es  $D = \mathbb{R}^2$ . Tenemos que  $x'$  solo se anula en  $x = \alpha$  y  $x = \beta$ . Consideramos por tanto los siguientes casos:

- Si  $x \in ]-\infty, \alpha[$ : En este caso,  $x < \alpha < \beta$ , luego  $x - \alpha < 0$  y  $\beta - x > 0$ . Por tanto,  $x' < 0$ , luego es decreciente.
- Si  $x \in ]\alpha, \beta[$ : En este caso,  $\alpha < x < \beta$ , luego  $x - \alpha > 0$  y  $\beta - x > 0$ . Por tanto,  $x' > 0$ , luego es creciente.
- Si  $x \in ]\beta, +\infty[$ : En este caso,  $x > \beta > \alpha$ , luego  $x - \alpha > 0$  y  $\beta - x < 0$ . Por tanto,  $x' < 0$ , luego es decreciente.

El campo de direcciones se encuentra en la Figura 4.2.

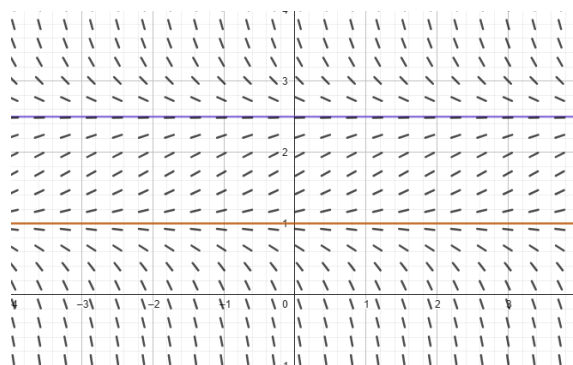


Figura 4.2: Campo de direcciones del Ejercicio 4.1.3.

Por tanto, para el comportamiento de  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , tenemos que:

- Si  $x(0) \in ]-\infty, \alpha[$ , entonces  $x'$  es decreciente, luego  $x(t) \rightarrow -\infty$ .
- Si  $x(0) \in ]\alpha, \beta[$ , entonces  $x'$  es creciente, luego  $x(t) \rightarrow \beta$ .

- Si  $x(0) \in ]\beta, +\infty[$ , entonces  $x'$  es decreciente, luego  $x(t) \rightarrow \beta$ .

**Ejercicio 4.1.4.** Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1.  $xy = k$ ,

Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = y + xy' \implies y' = -\frac{y}{x} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \vee \\ D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Notemos que hemos tenido que dividir el dominio en dos partes, puesto que la ecuación diferencial no está definida en  $x = 0$ . De aquí en adelante, debemos trabajar con ambos dominios. La familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial (en ambos dominios).

Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es  $-1$ , tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_{11} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ D_{12} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ \vee \\ D_{21} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ D_{22} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

2.  $y = kx^4$ ,

Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = 4kx^3 - y' \implies y' = 4kx^3 = 4 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{y}{x} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \vee \\ D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es  $-1$ , tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{4y} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_{11} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ D_{12} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ \vee \\ D_{21} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ D_{22} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-. \end{cases}$$



3.  $y = e^{kx}$ .

Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = ke^{kx} - y' \implies y' = ke^{kx}$$

Para despejar la  $k$ , tenemos que  $k = \frac{\ln y}{x}$ . Por tanto, tenemos que:

$$y' = \frac{\ln y}{x} \cdot e^{\frac{\ln y}{x} \cdot x} = \frac{\ln y}{x} \cdot y = \frac{y}{x} \ln y \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es  $-1$ , tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{y \ln y} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_{11} = \mathbb{R}^+ \times ]0, 1[ \\ \vee \\ D_{12} = \mathbb{R}^+ \times ]1, +\infty[ \\ \vee \\ D_{21} = \mathbb{R}^- \times ]0, 1[ \\ \vee \\ D_{22} = \mathbb{R}^- \times ]1, +\infty[. \end{cases}$$

**Ejercicio 4.1.5.** Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que  $x(0) = 0$ , demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Las soluciones alcanzan un punto crítico donde  $x'(t) = 0$ , es decir,  $t + x^3 = 0$ . Por tanto, las soluciones alcanzan un punto crítico en la curva  $x(t) = \sqrt[3]{-t}$ . Razonemos ahora el campo de direcciones:

- Sobre la recta  $x(t) = \sqrt[3]{-t}$ , tenemos que  $x'(t) = 0$ , por lo que el campo de direcciones es horizontal.
- Por encima de la recta, sabemos que  $t + x^3 > 0$ , por lo que  $x' > 0$ . El campo de direcciones es creciente.
- Por debajo de la recta, sabemos que  $t + x^3 < 0$ , por lo que  $x' < 0$ . El campo de direcciones es decreciente.

El dibujo, tanto del campo de direcciones como de la curva, se encuentra en la Figura 4.3.

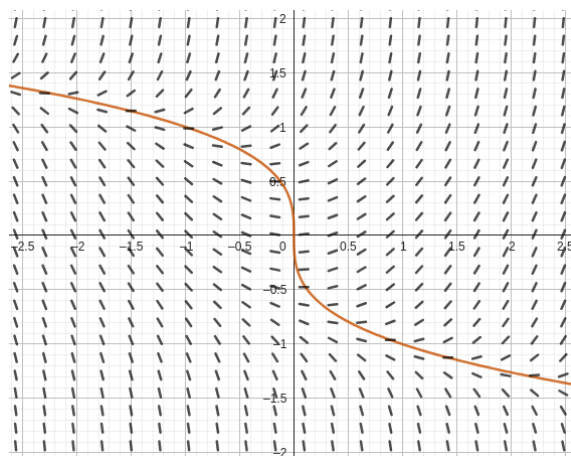


Figura 4.3: Campo de direcciones y curva del Ejercicio 4.1.5.

Supongamos ahora una solución tal que  $x(0) = 0$ . Como  $x$  es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, tenemos que  $x \in C^1(\mathbb{R})$ . Por tanto,  $x$  es derivable en 0. Calculamos la derivada de  $x$  en 0:

$$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$$

Por tanto, tenemos que es un punto crítico. Comprobemos que es un mínimo local estricto. Para ello, calculamos la segunda derivada de  $x$  en 0:

$$x''(0) = 1 + 3x(0)^2 \cdot x'(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 \cdot 0 = 1 > 0$$

Por tanto, es un mínimo local estricto.

Respecto de la demostración de que es un mínimo global, intuitivamente observando el campo de direcciones se tiene. No obstante, busquemos demostrarlo formalmente. Supongamos que  $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \neq 0$  tal que  $x(t_0) \leq 0$ .

- Como  $x(0) = 0$  es un mínimo local, en un entorno del origen, los puntos con coordenada  $t$  positiva están en el primer cuadrante. Además, como en ese cuadrante tenemos que  $x' > 0$ , entonces  $x(t) > 0$  para  $t > 0$ . Por tanto, ha de ser  $t_0 < 0$ .
- Como  $t_0 < 0$  y  $x(t_0) \leq 0$ , tenemos que  $(t_0, x(t_0))$  está en el tercer cuadrante o en el semieje  $OT$  negativo. En esta región, tenemos que  $x' < 0$ , por lo que  $x(t)$  es decreciente. Entonces, como  $x(t_0) \leq 0$  y  $t_0 < 0$ , tenemos que  $x(0) < x(t_0) \leq 0$ , lo que contradice que  $x(0) = 0$ .

Por tanto, no existe  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \neq 0$  tal que  $x(t_0) \leq 0$ , por lo que  $x(t) > 0$  para  $t \neq 0$ . Por tanto,  $x(0)$  es un mínimo global.

**Ejercicio 4.1.6.** Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables  $y(x)$  se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

Buscamos obtener  $y$  en función de  $x$ . Hay dos opciones:

**Opción 1:** Buscamos completar cuadrados para obtener las funciones  $y(x)$ :

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2x + 2y &= (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y) = \\ &= (x+1)^2 - 1 + 2(y^2 + y + 1/4 - 1/4) = \\ &= (x+1)^2 - 1 + 2(y + 1/2)^2 - 1/2 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$C \equiv (x+1)^2 + 2(y + 1/2)^2 = 5/2 \equiv (y + 1/2)^2 = \frac{5/2 - (x+1)^2}{2}$$

Aplicando la raíz cuadrada, tenemos que:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{5/2 - (x+1)^2}{2}} - \frac{1}{2}$$

**Opción 2:** Despejamos  $y$  usando la ecuación de segundo grado, considerando  $x$  fijo:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2 - 2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 2 \cdot (2) - 4 \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x + 1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{20 - 4 \cdot 2 \cdot (x+1)^2}{16}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5/2 - (x+1)^2}{2}} \end{aligned}$$

En ambos casos, vemos que obtenemos dos funciones diferenciables, una para cada signo. Como  $C$  es una elipse, se trata de la parte superior e inferior de la misma. El intervalo maximal de definición es aquel que mantiene el argumento de la raíz cuadrada positivo:

$$\begin{aligned} \frac{5/2 - (x+1)^2}{2} \geq 0 &\implies 5/2 \geq (x+1)^2 \implies |x+1| \leq \sqrt{5/2} \implies \\ &\implies -\sqrt{5/2} - 1 \leq x \leq \sqrt{5/2} - 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo maximal de definición es  $I = \left[-\sqrt{5/2} - 1, \sqrt{5/2} - 1\right]$ .

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma  $y' = f(x, y)$  que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

Derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$2x + 2 + (4y + 2)y' = 0 \implies y' = -\frac{2x + 2}{4y + 2} = -\frac{x + 1}{2y + 1}$$

Por tanto, la ecuación diferencial que describe las funciones del apartado anterior es  $y = f(x, y)$ , con:

$$f(x, y) = -\frac{x + 1}{2y + 1} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 1 > 0\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 1 < 0\}. \end{cases}$$

3. La misma cuestión para una ecuación del tipo  $g(y, y') = 0$ .

Despejamos  $x$  de la ecuación de  $C$  usando la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (2y^2 + 2y - 1)}}{2} = \\ &= -1 \pm \sqrt{1 - 2y^2 - 2y + 1} = -1 \pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)} \end{aligned}$$

Veamos cuál es el intervalo maximal de definición de  $x(y)$ :

$$1 - y^2 - y \geq 0 \implies y^2 + y - 1 \leq 0 \implies \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Por tanto, el intervalo maximal de definición es  $J = \left[ \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]$ .

Usando el resultado anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 2 + (4y + 2)y' = 2 \cdot \left( -1 \pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)} \right) + 2 + (4y + 2)y' = \\ &= \pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)} + (2y + 1)y' \end{aligned}$$

Por tanto, la curva  $C$  tiene como ecuaciones diferenciales asociadas las siguientes, ambas definidas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times J$ :

$$\pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)} + (2y + 1)y' = 0$$

**Ejercicio 4.1.7.** Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje  $x$  positivo tirando de una cuerda de longitud  $s$  atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida  $(0, s)$ . La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

*Observación.* Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

La situación descrita se encuentra en la Figura 4.4.

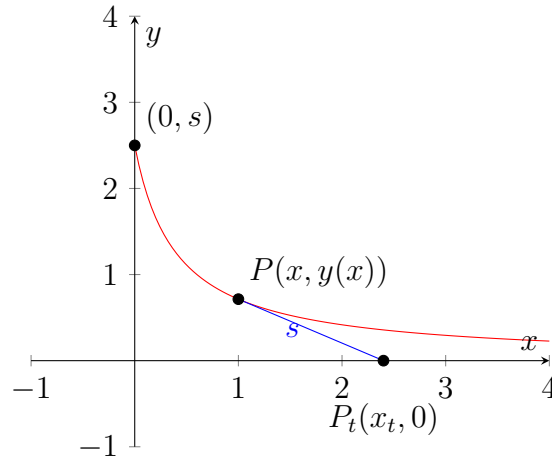


Figura 4.4: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 4.1.7.

Por tanto, la condición impuesta es que la distancia desde un punto de la gráfica al punto de corte de la tangente a la curva por ese punto con el eje de abscisas es constante e igual a  $s$ . Es decir, si el punto es  $(x, y(x))$ , entonces la condición es:

$$\sqrt{(x - x_t)^2 + y(x)^2} = s$$

Veamos cómo calcular  $x_t$ . Usando la definición de pendiente con los puntos  $P$  y  $P_t$ , tenemos:

$$y'(x) = \frac{y(x) - 0}{x - x_t} \implies x_t = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que  $y'(x) = 0$  no tiene sentido, puesto que la recta descrita sea horizontal, y por tanto no habría punto de corte con el eje  $X$  (es decir, no habría un único  $x_t$ ). Por tanto, la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$\sqrt{\left(x - x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right)^2 + y(x)^2} = s \implies \sqrt{\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2} = s$$

Elevando al cuadrado, tenemos que:

$$\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2 = s^2 \implies y'(x)^2 = \frac{y(x)^2}{s^2 - y(x)^2}$$

Notemos que  $y(x) < s$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , por lo que el denominador es siempre positivo. Aplicamos ahora la raíz cuadrada, sabiendo que  $y'(x) < 0$  por ser la pendiente de la curva decreciente, y  $y(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{s^2 - y(x)^2}}$$

Usando la notación correspondiente, tenemos que la ecuación diferencial que admite como solución a la curva descrita es:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}} \quad \text{con dominio } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -s < y < s\}$$

**Ejercicio 4.1.8.** Demuestre que si  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{4.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{4.2}$$

Encuentre una solución de  $(x')^2 + x^2 = 1$  que no sea solución de (4.1).

*Demostración.* Sea  $I \subset \mathbb{R}$  el intervalo de definición de  $x(t)$  solución de (4.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (x'(t))^2 + x^2(t). \end{aligned}$$

Por ser  $x$  una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que  $x \in C^2(I)$ . Por tanto,  $x, x' \in C^1(I)$  y, por tanto  $f$  es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t) [x''(t) + x(t)] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto,  $f'(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , lo que implica que  $f$  es constante en  $I$ . Es decir, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido.  $\square$

Para la segunda parte, sea la solución  $x(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + x^2(t) &= 0^2 + 1^2 = 1, \\ x''(t) + x(t) &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.1.9.** Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla  $y = -1$  a la orilla opuesta  $y = 1$ . La corriente es uniforme, con velocidad  $v_R > 0$  y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante  $v_N > 0$  y apunta siempre hacia una torre situada en el punto  $T = (2, 1)$ . Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}, \end{aligned}$$

describen la posición  $(x, y)$  de la nadadora en el instante  $t$ ; es decir  $x = x(t), y = y(t)$ .

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.

Representemos la situación en la Figura 4.5.

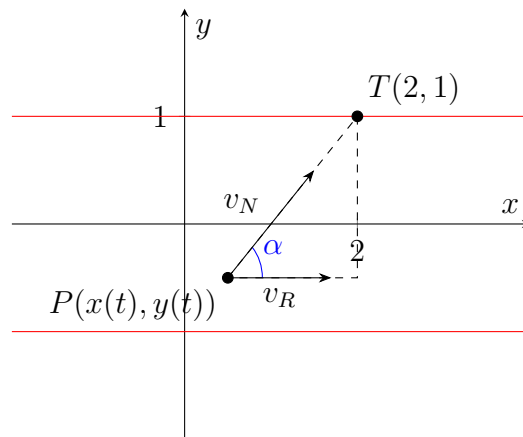


Figura 4.5: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 4.1.9.

Tenemos que  $x(t)$  es la componente horizontal de la posición de la nadadora, por lo que  $x'(t)$  es la velocidad horizontal de la nadadora:

$$x'(t) = v_R + v_N \cdot \cos(\alpha) \stackrel{(*)}{=} v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en  $(*)$  hemos empleado la definición de coseno como cateto contiguo sobre hipotenusa. Por otro lado,  $y(t)$  es la componente vertical de la posición de la nadadora, por lo que  $y'(t)$  es la velocidad vertical de la nadadora:

$$y'(t) = v_N \cdot \sin(\alpha) \stackrel{(*)}{=} v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en  $(*)$  hemos empleado la definición de seno como cateto opuesto sobre hipotenusa.

2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita  $y = y(x)$ .

Tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}}{v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}} = \frac{v_N}{v_R} \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} + 2-x}$$

**Ejercicio 4.1.10.** Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

1.  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ,

Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 e^t - c_2 e^{-t}, \\ x'' &= c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Como conclusión, vemos que  $x'' = x$  con dominio  $D = \mathbb{R}^2$  admite como solución a la familia de funciones dada.

2.  $x = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$ .

Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 \sinh t + c_2 \cosh t, \\ x'' &= c_1 \cosh t + c_2 \sinh t. \end{aligned}$$

Como conclusión, vemos que  $x'' = x$  con dominio  $D = \mathbb{R}^2$  admite de nuevo como solución a la familia de funciones dada.

**Ejercicio 4.1.11.** Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx' + \varphi(x')$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

La ecuación de la recta es:

$$x(t) = at + b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Veamos qué condición hemos de imponer para que cumpla la ecuación de Clairaut:

$$at + b = at + \varphi(a) \implies b = \varphi(a)$$

Por tanto, tenemos que una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas es:

$$x_a(t) = at + \varphi(a) \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Suponiendo que  $\varphi(x) = x^2$ , demuestre que  $x(t) = -\frac{t^2}{4}$  también es solución.

Para esto, vemos:

$$tx' + \varphi(x') = t \cdot \left( \frac{-2t}{4} \right) + \left( \frac{-2t}{4} \right)^2 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{4} = x$$

Por tanto,  $x(t) = -\frac{t^2}{4}$  es solución.

3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

Suponemos  $\varphi(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Veamos que, para cada  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\exists! t_a \in \mathbb{R}$  tal que  $x_a$  es tangente a  $x(t) = -\frac{t^2}{4}$  en  $t = t_a$ .

En primer lugar, calculamos los puntos de corte entre ambas curvas:

$$\begin{aligned} x_a(t) = -\frac{t^2}{4} &\implies at + a^2 = -\frac{t^2}{4} \implies t^2 + 4at + 4a^2 = 0 \implies \\ &\implies t_a = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a^2}}{2} = -2a \end{aligned}$$

Por tanto, el punto de tangencia es  $t_a = -2a$ . Por otro lado, calculamos la pendiente de la recta tangente en  $t_a$ :

$$x'(t_a) = \frac{-2t_a}{4} = \frac{4a}{4} = a$$

Por tanto, queda demostrado. Esto se conoce como que la solución hallada en el apartado anterior es la envolvente de la familia de soluciones rectilíneas.

**Ejercicio 4.1.12.** Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.

1. **Problema 6:** Transformar la ecuación  $e^{x'} = x$  en una ecuación en forma normal y prueba que tiene una única solución tal que  $x(t_0) = a$  para todo  $t_0$  y todo  $a \in \mathbb{R}^+$ .

Aplicando el logaritmo neperiano, tenemos que la ecuación diferencial en forma normal es:

$$x' = \ln x \quad \text{con dominio } D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$



2. **Problema 7:** Encuentra la ecuación cuya solución es la catenaria:

$$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Calculamos su derivada:

$$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t)$$

Por tanto, la ecuación diferencial que describe la catenaria es:

$$x' = \sinh(t) \quad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

## 4.2. Cambios de Variable

**Ejercicio 4.2.1.** Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas de la forma dada por  $x' = p(t)q(x)$ , con:

$$\begin{aligned} p: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t-5 \\ q: J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

donde consideramos  $I = \mathbb{R}$  y, para que el dominio sea conexo, podemos considerar  $J = \mathbb{R}^+$  o  $J = \mathbb{R}^-$ .

Usamos por tanto el método de variables separadas. En primer lugar, comprobamos que  $q$  no tiene raíces en  $J$ :

$$q(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2} = 0 \iff 1 = 0$$

Una vez comprobado esto, procedemos a resolver la ecuación usando el método de variables separadas:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{t-5}{x^2} &\implies x^2 dx = (t-5)dt \implies \int x^2 dx = \int (t-5)dt \implies \\ &\implies \frac{x^3}{3} = \frac{t^2}{2} - 5t + C' \quad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Despejando  $x$  obtenemos la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - 15t + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Busquemos ahora su intervalo maximal de definición (llamémoslo  $\hat{I} \subset I$ ). Necesitamos que  $x(t) \in J$  para todo  $t \in \hat{I}$  y que  $x$  sea derivable en  $\hat{I}$ . Distinguimos casos:

- $J = \mathbb{R}^+$ : En este caso, necesitamos que  $x(t) > 0$  para todo  $t \in \hat{I}$ . Para ello, basta con que el radicando sea positivo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C > 0$$

Veamos en qué puntos se anula el radicando:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C = 0 \implies t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 6C}}{3} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Distinguimos en función de  $C$ :

$$25 - \frac{2C}{3} = 0 \implies C = \frac{75}{2}$$

- $C > 75/2$ : En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de  $x$ , y este es siempre positivo. Por tanto,  $x(t) > 0$  para todo  $t \in I$ ; es decir,  $x(t) \in J$  para todo  $t \in I$ . Además, como la raíz cúbica es derivable en  $\mathbb{R}^*$  y el radicando de  $x$  es siempre positivo,  $x$  es derivable en  $I$ , luego el intervalo maximal de definición es  $I$ ,  $\hat{I} = I$ .
- $C = 75/2$ : En este caso, el último radicando se anula en  $t = 5$ . Por tanto,  $\overline{x(t) > 0}$  para  $t \in I \setminus \{5\}$ . Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 = ]-\infty, 5[ \quad I_2 = ]5, +\infty[$$

En ambos casos, como  $x(t) \in J$  para todo  $t \in I_1$  y todo  $t \in I_2$ , y  $x$  es derivable en  $I_1$  y  $I_2$ , el intervalo maximal de definición es  $\hat{I} = I_1$  o  $\hat{I} = I_2$ .

- $C < 75/2$ : En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos,  $t_1$  y  $t_2$  dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \quad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto,  $x(t) > 0$  para  $t \in I \setminus [t_1, t_2]$ . Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 = ]-\infty, t_1[ \quad I_2 = ]t_2, +\infty[$$

En todos los casos, como  $x(t) \in J$  para todo  $t \in I_1$  y todo  $t \in I_2$ , y  $x$  es derivable en  $I_1$  y  $I_2$ , el intervalo maximal de definición es  $\hat{I} = I_1$  o  $\hat{I} = I_2$ .

- $J = \mathbb{R}^-$ : En este caso, necesitamos que  $x(t) < 0$  para todo  $t \in \hat{I}$ . Para ello, basta con que el radicando sea negativo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C < 0$$

Distinguimos en función de  $C$ :

- $C > 75/2$ : En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de  $x$ . Además,  $x(t) > 0$  para todo  $t \in I$ , por lo que no hay solución en este caso.
- $C = 75/2$ : En este caso, el último radicando se anula en  $t = 5$ . Por tanto,  $\overline{x(t) > 0}$  para  $t \in I \setminus \{5\}$ . Además, como el intervalo de definición de la solución debe ser abierto y conexo, no hay solución en este caso.
- $C < 75/2$ : En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos,  $t_1$  y  $t_2$  dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \quad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto,  $x(t) < 0$  para  $t \in [t_1, t_2]$ . Como en el abierto es derivable, el intervalo maximal de definición es  $\hat{I} = ]t_1, t_2[$ .

**Ejercicio 4.2.2.** En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P' = P(\alpha - \beta P)$$

y la ecuación de Gompertz

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P)$$

siendo  $P(t)$  la población a tiempo  $t$  de una determinada especie y  $\alpha, \beta$  parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial  $P(0) = 100$ .

Resolvamos en primer lugar la ecuación de Verhulst. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma  $P' = p(t)q(P)$ , con:

$$\begin{array}{ccc} p: & I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} q: & J & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto P(\alpha - \beta P) \end{array}$$

donde consideramos  $I = J = \mathbb{R}$ . Comprobamos las raíces de  $q$  en  $J$ :

$$q(P) = 0 \iff P(\alpha - \beta P) = 0 \iff P = 0, \frac{\alpha}{\beta}$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación son, para todo  $t \in I$ :

$$P(t) = 0 \quad P(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, bajaremos con  $J_1 = \mathbb{R}^-$ ,  $J_2 = ]0, \alpha/\beta[$  y  $J_3 = ]\alpha/\beta, +\infty[$ , ya que necesitamos que  $q(P) \neq 0$  para todo  $P$  en la segunda componente del dominio.

■  $J_1 = \mathbb{R}^-$ :

Como en este caso no cumple que  $P(0) = 100 \in J_1$ , no nos interesa este dominio.

■  $J_2 = ]0, \alpha/\beta[$ :

Veamos qué hemos de imponer para considerar este dominio; es decir, para que  $P(0) = 100 \in J_2$ :

$$100 \in J_2 \iff 100 < \frac{\alpha}{\beta} \iff 100\beta < \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio  $I \times J_2$ :

$$\begin{aligned} P' = P(\alpha - \beta P) &\implies \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \implies \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = dt \implies \\ &\implies \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt \end{aligned}$$

Para resolver la primera integral, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{P(\alpha - \beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P} = \frac{A(\alpha - \beta P) + BP}{P(\alpha - \beta P)}$$

- Para  $P = 0$ :  $1 = A \cdot \alpha \implies A = 1/\alpha$ .
- Para  $P = \alpha/\beta$ :  $1 = B \cdot \alpha/\beta \implies B = \beta/\alpha$ .

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \implies \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} &= \int dt \implies \frac{1}{\alpha} \int \frac{dP}{P} + \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dP}{\alpha - \beta P} = \int dt \implies \\ &\implies \frac{1}{\alpha} \ln(P) - \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha - \beta P) = t + C \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde en la última implicación hemos usado que  $P \in J_2$ .

Operando con la solución obtenida, llegamos a:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{P}{\alpha - \beta P} \right) &= \alpha(t + C) \implies \frac{P}{\alpha - \beta P} = e^{\alpha(t+C)} \implies \\ &\implies P(1 + \beta e^{\alpha(t+C)}) = \alpha e^{\alpha(t+C)} \implies P = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \end{aligned}$$

Estudiamos el intervalo de definición de la solución  $\hat{I} \subset I$  de manera que  $P(t) \in J_2$  para todo  $t \in \hat{I}$  y  $P$  sea derivable en  $\hat{I}$ . Como  $P$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , solo necesitamos que  $P(t) \in J_2$  para todo  $t \in \hat{I}$ :

$$\begin{aligned} 0 < P(t) &= \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \\ \frac{\alpha}{\beta} > P(t) &= \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \implies \alpha + \cancel{\alpha \beta e^{\alpha(t+C)}} > \cancel{\alpha \beta e^{\alpha(t+C)}} \implies \alpha > 0 \end{aligned}$$

Esto tenemos que se tiene directamente, luego  $\hat{I} = I$ .

Por tanto, para  $P \in J_2$ , la familia de soluciones es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial  $P(0) = 100$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P(0) = 100 &= \frac{\alpha e^{\alpha C}}{1 + \beta e^{\alpha C}} \implies 100(1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \implies \\ &\implies 100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \implies \\ &\implies 100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \implies \\ &\implies 100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \implies \\ &\implies e^{\alpha C} = \frac{100}{\alpha - 100\beta} \implies \\ &\implies C = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{100}{\alpha - 100\beta} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $P(0) = 100$  es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \quad C = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{100}{\alpha - 100\beta} \right)$$

$$\blacksquare \quad J_3 = ]\alpha/\beta, +\infty[:$$

Veamos qué hemos de imponer para considerar este dominio; es decir, para que  $P(0) = 100 \in J_3$ :

$$100 \in J_3 \iff 100 > \frac{\alpha}{\beta} \iff 100\beta > \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio  $I \times J_3$ . Por los cálculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha} \ln(P) - \frac{1}{\alpha} \ln(\beta P - \alpha) = t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Estudiamos el intervalo de definición de la solución  $\hat{I} \subset I$  de manera que  $P(t) \in J_3$  para todo  $t \in \hat{I}$  y  $P$  sea derivable en  $\hat{I}$ :

$$\frac{\alpha}{\beta} < P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \implies -\alpha + \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} < \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} \implies -\alpha < 0 \implies \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} \beta e^{\alpha(t+C)} \neq 1 &\implies e^{\alpha(t+C)} \neq \frac{1}{\beta} \implies \alpha(t+C) \neq \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \implies t+C \neq -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} \implies \\ &\implies t \neq -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C \end{aligned}$$

Como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$\hat{I}_1 = ]-\infty, -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C[ \quad \hat{I}_2 = ]-\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C, +\infty[$$

Llegamos por tanto a que la familia de soluciones para  $P \in J_3$  es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{con dominio} \quad \begin{cases} t \in \hat{I}_1 \\ \vee \\ t \in \hat{I}_2 \end{cases}$$

Estableciendo la condición inicial  $P(0) = 100$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P(0) = 100 &= \frac{\alpha e^{\alpha C}}{-1 + \beta e^{\alpha C}} \implies 100(-1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \implies \\ &\implies -100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \implies \\ &\implies -100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \implies \\ &\implies -100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \implies \\ &\implies e^{\alpha C} = \frac{-100}{\alpha - 100\beta} \implies \\ &\implies C = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right) \end{aligned}$$

Para dicho valor de  $C$ , veámos cuál es el intervalo de definición de la solución tal que 0 pertenece a él:

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(\beta) - \ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)}{\alpha} < 0 &\iff \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) - \ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right) < 0 \iff \\ &\iff \ln\left(\frac{100\beta - \alpha}{100\beta}\right) < 0 \iff \frac{100\beta - \alpha}{100\beta} < 1 \iff \\ &\iff 100\beta - \alpha < 100\beta \iff \alpha > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $P(0) = 100$  es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in \widehat{I}_2, \quad C = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Verhulst con condición inicial  $P(0) = 100$  son, en función de los parámetros  $\alpha, \beta$ :

- $100 = \alpha/\beta$ : En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = \frac{\alpha}{\beta} \quad t \in I$$

- $100 < \alpha/\beta$ : En este caso, la solución está en  $J_2$ , luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \quad C = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

- $100 > \alpha/\beta$ : En este caso, la solución está en  $J_3$ , luego:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in \widehat{I}_2, \quad C = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)$$

Resolvamos ahora la ecuación de Gompertz. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma  $P' = p(t)q(P)$ , con:

$$\begin{aligned} p : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(\alpha - \beta \ln P) \end{aligned}$$

donde consideramos  $I = \mathbb{R}$ ,  $J = \mathbb{R}^+$ . Comprobamos las raíces de  $q$  en  $J$ :

$$q(P) = 0 \iff P(\alpha - \beta \ln P) = 0 \iff P = 0, e^{\alpha/\beta}$$

La solución  $P = 0$  no es válida, puesto que no pertenece al dominio  $J$ . Por tanto, la única solución constante es:

$$P(t) = e^{\alpha/\beta} \quad t \in I$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con  $J_1 = ]0, e^{\alpha/\beta}[$  y  $J_2 = ]e^{\alpha/\beta}, +\infty[$ , ya que necesitamos que  $q(P) \neq 0$  para todo  $P$  en la segunda componente del dominio.

$$\blacksquare J_1 = ]0, e^{\alpha/\beta}[$$

Veamos qué hemos de imponer para considerar este dominio; es decir, para que  $P(0) = 100 \in J_1$ :

$$100 \in J_1 \iff 100 < e^{\alpha/\beta} \iff \ln 100 < \frac{\alpha}{\beta}$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio  $I \times J_1$ :

$$\begin{aligned} P' = P(\alpha - \beta \ln P) &\implies \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta \ln P) \implies \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = dt \implies \\ &\implies \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int dt \end{aligned}$$

Para resolver la integral del logaritmo, aplicamos el cambio de variable  $P = e^u$ , luego  $dP = e^u du$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} &= \int \frac{e^u du}{e^u(\alpha - \beta u)} = \int \frac{du}{\alpha - \beta u} = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta u) + C' = \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln P) + C' \quad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que:

$$\alpha - \beta u > 0 \iff u < \frac{\alpha}{\beta} \iff \ln P < \frac{\alpha}{\beta} \iff 0 < P < e^{\alpha/\beta} \iff P \in J_1$$

Operando, llegamos a que:

$$-\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln P) = t + C \implies \alpha - \beta \ln P = e^{-\beta(t+C)} \implies \ln P = \frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}$$

Por tanto, la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en  $J_1$  es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial  $P(0) = 100$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P(0) = 100 &= \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta C}}{\beta}\right) \implies \ln(100) = \frac{\alpha - e^{-\beta C}}{\beta} \implies \\ &\implies e^{-\beta C} = \alpha - \beta \ln(100) \implies C = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln(100)) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $P(0) = 100$  es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in I, \quad C = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln(100))$$



$$\blacksquare \quad J_2 = ]e^{\alpha/\beta}, +\infty[:$$

Veamos qué hemos de imponer para considerar este dominio; es decir, para que  $P(0) = 100 \in J_2$ :

$$100 \in J_2 \iff 100 > e^{\alpha/\beta} \iff \ln 100 > \frac{\alpha}{\beta}$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio  $I \times J_2$ . Por los cálculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$-\frac{1}{\beta} \ln(\beta \ln P - \alpha) = t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

donde hemos hecho uso de que:

$$\alpha - \beta u < 0 \iff u > \frac{\alpha}{\beta} \iff \ln P > \frac{\alpha}{\beta} \iff P > e^{\alpha/\beta} \iff P \in J_2$$

Operando, llegamos a que la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en  $J_2$ , definida en el intervalo  $\hat{I} \subset I$  es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in \hat{I}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Estudiemos el intervalo de definición de la solución  $\hat{I} \subset I$  de manera que  $P(t) \in J_2$  para todo  $t \in \hat{I}$  y  $P$  sea derivable en  $\hat{I}$ :

$$\frac{\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \iff \alpha + e^{-\beta(t+C)} > \alpha \iff e^{-\beta(t+C)} > 0$$

Por tanto, el intervalo de definición de la solución es  $\hat{I} = I$ .

Estableciendo la condición inicial  $P(0) = 100$ , y repitiendo los cálculos del apartado anterior, llegamos a:

$$P(0) = 100 \implies C = -\frac{1}{\beta} \ln(\beta \ln(100) - \alpha)$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $P(0) = 100$  es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in I, \quad C = -\frac{1}{\beta} \ln(\beta \ln(100) - \alpha)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Gompertz con condición inicial  $P(0) = 100$  son, en función de los parámetros  $\alpha, \beta$ :

- $100 = e^{\alpha/\beta}$ : En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t) = 100 = e^{\alpha/\beta} \quad t \in I$$

- $100 < e^{\alpha/\beta}$ : En este caso, la solución está en  $J_1$ , luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in I, \quad C = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta \ln(100))$$

- $100 > e^{\alpha/\beta}$ : En este caso, la solución está en  $J_2$ , luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \quad t \in I, \quad C = -\frac{1}{\beta} \ln(\beta \ln(100) - \alpha)$$

**Ejercicio 4.2.3.** Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t - x)$$

Compruebe que el cambio  $y = t - x$  nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de  $x(t)$ . Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

Al no indicarnos nada sobre la primera variable, suponemos que esta no varía, luego el cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{cases} s = t, \\ y = t - x. \end{cases}$$

Al no especificar dominio de la ecuación, suponemos que está definida en  $\mathbb{R}^2$ . Consideramos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, t - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = (\psi_1, \psi_2) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, s - y) \end{aligned}$$

Para emplear el cambio de variable, en primer lugar hemos de comprobar que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Para ello, hemos demostrado que  $\varphi$  es biyectiva y que  $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Demostraremos en primer lugar que  $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(s, y) &= \varphi(s, s - y) = (s, s - (s - y)) = (s, y) = Id_{\mathbb{R}^2}(s, y) & \forall (s, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi \circ \varphi(t, x) &= \psi(t, t - x) = (t, t - (t - x)) = (t, x) = Id_{\mathbb{R}^2}(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que  $\varphi$  es biyectiva y que  $\varphi^{-1} = \psi$ . Además, como ambas componentes de  $\varphi, \psi$  son de clase 1, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , luego  $\varphi$  es un difeomorfismo.

A continuación, hemos de comprobar que el cambio es admisible. Aunque lo sabemos puesto que no varía la primera variable, lo demostramos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t, x) = 1 + 0 \cdot \cos(t - x) = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que el cambio de variable es admisible. Procedemos a aplicarlo a la ecuación dada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = 1 - \cos(t - x) = 1 - \cos y$$

Usando la notación usual, la nueva ecuación diferencial, con dominio  $\mathbb{R}^2$ , es:

$$y' = 1 - \cos y$$

Esta es de la forma  $y' = p(s)q(y)$ , con:

$$\begin{array}{ccc} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} q : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 1 - \cos y \end{array}$$

Buscamos en primer lugar los valores en los que se anula  $q$ :

$$q(y) = 0 \iff 1 - \cos y = 0 \iff \cos y = 1 \iff y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fijado ahora  $k \in \mathbb{Z}$ , restringimos ahora el dominio de  $q$  a  $J_k = ]2\pi k, 2\pi(k+1)[$ . En  $J$  tenemos que  $q$  no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{ds} = 1 - \cos y \implies \frac{dy}{1 - \cos y} = ds \implies \int \frac{dy}{1 - \cos y} = \int ds$$

Para poder resolver la integral, reducimos el dominio de  $q$ , considerando ahora para cada  $k \in \mathbb{Z}$  el intervalo  $J'_k = ]\pi k, \pi(k+1)[$ . En este dominio, la función  $1 + \cos y$  no se anula, por lo que podemos multiplicar y dividir por ella para resolver la integral a la que hemos llegado:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1 - \cos y} &= \int \frac{1 + \cos y}{1 - \cos^2 y} dy = \int \frac{1 + \cos y}{\sin^2 y} dy = \int \frac{1}{\sin^2 y} dy + \int \frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \frac{1}{\sin y} + C' \quad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto, la familia de soluciones con  $y \in J'_k$  es:

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \frac{1}{\sin y} = s + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Sabemos que define una ecuación implícita  $y(s)$  en cierto dominio  $\hat{I} \subset \mathbb{R}$ .

- En  $J'_k$ , sabemos que  $\operatorname{tg}(y) > 0$ , luego  $-\frac{1}{\operatorname{tg} y} < 0$ .
- En  $J'_k$ , sabemos que  $\sin(y) > 0$ , luego  $-\frac{1}{\sin y} < 0$ .
- Por tanto, tenemos que  $s + C < 0$ , es decir,  $s < -C$ .

Por tanto, tan solo podemos concluir que  $\widehat{I} \subset ]-\infty, -C[$ .

Deshaciendo el cambio de variable, llegamos a que la familia de soluciones con  $t \in \widehat{I}$  es:

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}(t-x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(t-x)} = t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 4.2.4.** Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si  $v(t)$  es la velocidad a tiempo  $t$ , la ecuación de Newton nos dice que

$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g,$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $g$  es la constante de gravitación universal y  $k > 0$  depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que  $v(0) = 0$ , calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma  $v' = p(t)q(v)$ , con:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\frac{k}{m}v^2 + g \end{aligned}$$

Comprobamos las raíces de  $q$  en  $\mathbb{R}$ :

$$q(v) = 0 \iff -\frac{k}{m}v^2 + g = 0 \iff v^2 = \frac{gm}{k} \iff \begin{cases} v_1 = -\sqrt{\frac{gm}{k}}, \\ v_2 = \sqrt{\frac{gm}{k}}. \end{cases}$$

Como buscamos la solución que cumple  $v(0) = 0$ , consideramos el dominio dado por  $J = ]v_1, v_2[$ . En este dominio,  $q$  no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 + g &\implies \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = dt \implies \int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = \int dt \implies \\ &\implies m \int \frac{dv}{-kv^2 + gm} = t + C \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para resolver la integral, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{-kv^2 + gm} = \frac{A}{v - v_1} + \frac{B}{v - v_2} = \frac{A(v - v_2) + B(v - v_1)}{(v - v_1)(v - v_2)}$$

- Para  $v = v_1$ :  $1 = A(v_1 - v_2) \implies A = \frac{1}{v_1 - v_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$
- Para  $v = v_2$ :  $1 = B(v_2 - v_1) \implies B = \frac{1}{v_2 - v_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 m \int \frac{dv}{-kv^2 + gm} &= m \int \left( \frac{A}{v - v_1} + \frac{B}{v - v_2} \right) dv = \\
 &= m (A \ln(v - v_1) + B \ln(v_2 - v)) + C' = \\
 &= \frac{m}{2} \sqrt{\frac{k}{mg}} (\ln(v_2 - v) - \ln(v - v_1)) + C' = \\
 &= \frac{m}{2} \sqrt{\frac{k}{mg}} \ln \left( \frac{v_2 - v}{v - v_1} \right) + C' = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{k}{mg}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v} \right) + C'
 \end{aligned}$$

Por tanto, la familia de soluciones en  $J$  es:

$$\frac{m}{2} \sqrt{\frac{k}{mg}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v} \right) = t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Operando, llegamos a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v} &= \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \\
 -v \left[ 1 + \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \right] &= \sqrt{\frac{gm}{k}} \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) - \sqrt{\frac{gm}{k}} \\
 v &= - \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{1 + \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right)} \\
 v &= \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} \left[ 1 - \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \right]}{1 + \exp \left( (t + C) \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right)}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $v(0) = 0$  es:

$$\begin{aligned}
 v(0) = 0 &= \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} \left[ 1 - \exp \left( C \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \right]}{1 + \exp \left( C \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right)} \Rightarrow 1 = \exp \left( C \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow C \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} = 0 \Rightarrow C = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial  $v(0) = 0$  es:

$$v(t) = \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} \left[ 1 - \exp \left( t \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right) \right]}{1 + \exp \left( t \cdot \frac{2}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} \right)} \quad t \in \mathbb{R}$$

Estudiemos ahora el comportamiento a largo plazo de la solución. Para ello, consideramos el límite cuando  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

*Observación.* No nos termina de cuadrar el resultado obtenido, aunque hemos revisado los cálculos. Si algún lector encuentra algún error, le agradeceríamos que nos lo comunicara.

**Ejercicio 4.2.5.** Calcule la solución de la ecuación

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

que verifica  $y(0) = 1$ .

En este caso, se trata de una ecuación reducible a homogénea. Estudiemos qué cambio de variable hemos de emplear:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Por tanto, hemos de emplear una traslación según el vector  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ . En primer lugar, el dominio de la ecuación diferencial ha de ser una de las componentes conexas de:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 \neq 0\}$$

Para que el punto  $(0, y(0)) = (0, 1)$  esté en el dominio, el dominio será:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\}$$

Consideramos entonces el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D_1 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = (x - x_*, y - y_*) \end{aligned}$$

donde el codominio,  $D_1$ , es:

$$\begin{aligned} D_1 = \varphi(D) &= \{\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u + x_*, v + y_*) \in D\} = \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + x_* - v - y_* - 1 < 0\} \end{aligned}$$

La inversa de  $\varphi$ , puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad D_1 &\longrightarrow D \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = (u + x_*, v + y_*) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas. Como además son de clase  $C^1$  por ser ambas componentes polinómicas, tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' = 1 + 0 \cdot y' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1} = \frac{u + x_* + v + y_* - 3}{u + x_* - v - y_* - 1}$$

Buscamos ahora resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_* + y_* = 3, \\ x_* - y_* = 1. \end{cases} \implies \begin{cases} x_* = 2, \\ y_* = 1. \end{cases}$$

Por tanto, tras haber aplicado el cambio de variable según la traslación de  $(2, 1)$ , la ecuación diferencial se convierte en:

$$v' = \frac{u + v}{u - v}$$

Como buscamos que  $y(0) = 1$ , tenemos que  $v(-2) = 0$ . Esta es una ecuación homogénea, con dominio:

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{(u, v) \in D_1 \mid u < 0\} = \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, u - v < 0\} \end{aligned}$$

El cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{aligned} \varphi' = (\varphi'_1, \varphi'_2) : \quad D'_1 &\longrightarrow D_2 \\ (u, v) &\longmapsto (t, s) = (u, v/u) \end{aligned}$$

donde el codominio,  $D_2$ , es:

$$\begin{aligned} D_2 = \varphi'(D'_1) &= \{\varphi'(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v) \in D'_1\} = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, s \cdot t) \in D'_1\} = \\ &= \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, t - s \cdot t < 0\} \end{aligned}$$

La inversa de  $\varphi'$ , puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{aligned} (\varphi')^{-1} : \quad D_2 &\longrightarrow D'_1 \\ (t, s) &\longmapsto (u, v) = (t, s \cdot t) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi', (\varphi')^{-1}$  son biyectivas. Como además son de clase  $C^1$  por ser ambas componentes cociente o producto de funciones de clase  $C^1$ , tenemos que  $\varphi'$  es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que la primera componente no varía. La demostración de que es admisible es:

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial v} v' = 1 + 0 \cdot v' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{v}{u^2} + \frac{v'}{u} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{v}{u} + \frac{1}{u} \cdot \frac{1+v/u}{1-v/u} = -\frac{s}{t} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1+s}{1-s}$$

Por tanto, la ecuación homogénea se convierte en:

$$s' = \frac{1}{t} \left( \frac{1+s}{1-s} - s \right) \quad \text{con dominio } D_2 = \mathbb{R}^- \times ]-\infty, 1[$$

Esta es una ecuación de variables separadas, luego procedemos a resolverla. Buscamos las raíces de la función con variable  $s$ :

$$\frac{1+s}{1-s} - s = 0 \iff 1+s = s(1-s) = s-s^2 \iff s^2+1=0$$

Vemos que no tiene soluciones constantes, luego aplicamos el método de resolución:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\frac{1+s}{1-s} - s} = \frac{dt}{t} &\implies \int \frac{1-s}{1+s^2} ds = \int \frac{dt}{t} \implies \int \frac{1}{1+s^2} ds - \int \frac{s}{1+s^2} ds = \ln(-t) + C' \implies \\ &\implies \arctan(s) - \frac{1}{2} \ln(1+s^2) = \ln(-t) + C \end{aligned}$$

Por la teoría vista de resolución de ecuaciones en variables separadas, tenemos que esto define una función implícita  $s(t)$  en  $\widehat{I}_3 \subset \mathbb{R}^-$ . Veamos el dominio de la solución, para lo cual consideramos:

- $\arctan(s) \in ]-\pi/2, \pi/4[$  para todo  $s \in ]-\infty, 1[$ .
- $\ln(1+s^2) > 0$  para todo  $s \in ]-\infty, 1[$ , por lo que  $-\frac{1}{2} \ln(1+s^2) < 0$ .
- Por tanto, la parte izquierda de la igualdad es menor que  $\pi/4$  para cualquier  $s \in ]-\infty, 1[$ .
- Por tanto, y debido a que es una igualdad, tenemos que:

$$\ln(-t) + C < \frac{\pi}{4} \implies -t < e^{\pi/4-C} \implies t > -e^{\pi/4-C}$$

- Deducimos por tanto que  $\widehat{I}_3 \subset ]-e^{\pi/4-C}, 0[$ .

No obstante, no podemos asegurar que se dé la igualdad, y estudiar el dominio concreto es complejo.

Deshacemos el segundo cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \ln(-u) + C$$

Esto define una función implícita  $v(u)$  en  $\widehat{I}_2 = \widehat{I}_3 \subset ]-e^{\pi/4-C}, 0[$ . Por último, deshacemos el primer cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln(-x+2) + C$$



Esta ecuación define una función implícita  $y(x)$  en el dominio  $\widehat{I}_1 \subset ]-e^{\pi/4-C} + 2, 2[$ . Estableciendo la condición inicial  $y(0) = 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1-1}{0-2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{1-1}{0-2}\right)^2\right) &= \ln(-0+2) + C \implies \\ &\implies \arctan(0) - \frac{1}{2} \ln(1+0) = \ln(2) + C \implies \\ &\implies C = -\ln(2) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $y(0) = 1$  es la función implícita  $y(x)$  definida por la ecuación siguiente en un dominio contenido en  $] -2e^{\pi/4} + 2, 2[$ :

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{-x+2}{2}\right)$$

**Ejercicio 4.2.6.** Resuelva los siguientes problemas lineales:

$$1. \quad x' + 3x = e^{-3t}, \quad x(1) = 5$$

En este caso, se trata de una ecuación lineal completa con dominio  $\mathbb{R}^2$ . Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $l \in C^1(\mathbb{R})$ , y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, l(t)x) \end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, y/l(s)) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable<sup>1</sup>. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l' \cdot \frac{y}{l} + l(-3x + e^{-3t}) = \left(\frac{l'}{l} - 3\right)y + le^{-3t}$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} - 3\right)y + le^{-3t} \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante, no lo demostraremos en cada ejercicio.

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos  $l$  tal que  $\frac{l'}{l} - 3 = 0$ , es decir,  $l' = 3l$ . Como dominio, como  $l$  no puede anularse, consideramos  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  (también podríamos haber elegido  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ ). Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$\begin{aligned} l' = 3l &\implies \frac{dl}{l} = 3dt \implies \int \frac{dl}{l} = \int 3dt \implies \ln(l) = 3t + C \implies \\ &\implies l = e^{3t+C} = ke^{3t} \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre  $l$ , sea (considerando  $k = 1$ ):

$$l(t) = e^{3t} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función  $l$ , la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = le^{-3t} = e^{3t}e^{-3t} = 1 \implies y(s) = s + C, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{t + C}{e^{3t}} = e^{-3t}(t + C) \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial  $x(1) = 5$ , obtenemos:

$$x(1) = e^{-3}(1 + C) = 5 \implies C = 5e^3 - 1$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $x(1) = 5$  es:

$$x(t) = e^{-3t}(t + 5e^3 - 1) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}, \quad x(2) = 0$$

En este caso, se trata de una ecuación lineal completa cuyo dominio viene dado por  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función  $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$  y  $l \in C^1(\mathbb{R}^+)$ , y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, l(t)x) \end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, y/l(s)) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1),

tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l' \cdot \frac{y}{l} + l \left( \frac{1}{1+t^2} + \frac{y}{tl(t)} \right) = \left( \frac{l'}{l} + \frac{1}{t} \right) y + \frac{l}{1+t^2}$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left( \frac{l'}{l} + \frac{1}{t} \right) y + \frac{l}{1+t^2} \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos  $l$  tal que  $\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$ , es decir,  $l' = -\frac{l}{t}$ . Como dominio, como  $l$  no puede anularse, consideramos el conjunto  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{l} = -\frac{dt}{t} &\implies \int \frac{dl}{l} = -\int \frac{dt}{t} \implies \ln(l) = -\ln(t) + C \implies \\ &\implies l = ke^{-\ln(t)} = \frac{k}{t} \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre  $l$ , sea (considerando  $k = 1$ ):

$$l(t) = \frac{1}{t} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, usando dicha función  $l$ , la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = \frac{l}{1+t^2} = \frac{1}{t+t^3} \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Esta ecuación se resuelve mediante cálculo de primitivas:

$$y' = \frac{1}{t+t^3} = \frac{1}{t(1+t^2)}$$

Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)t}{t(1+t^2)}$$

- Para  $t = 0$ :  $1 = A \cdot 1 \implies A = 1$ .
- Para  $t = 1$ :  $1 = 2A + B + C \implies B + C = -1$ .
- Para  $t = -1$ :  $1 = 2A + B - C \implies B - C = -1 \implies B = -1, C = 0$ .

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$y(t) = \int \frac{1}{t(1+t^2)} dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \ln \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + C}{1/t} = t \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + Ct \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial  $x(2) = 0$ , obtenemos:

$$x(2) = 2 \ln\left(\frac{2}{\sqrt{1+4}}\right) + 2C = 0 \implies -\ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = C$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $x(2) = 0$  es:

$$x(t) = t \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) - t \ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad t \in \mathbb{R}^+$$

3.  $x' = \cosh t \cdot x + \sinh t, \quad x(0) = 1$

En este caso, se trata de una ecuación lineal completa con dominio  $\mathbb{R}^2$ . Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $l \in C^1(\mathbb{R})$ , y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, l(t)x) \end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, y/l(s)) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = x l' + l x' = l' \cdot \frac{y}{l} + l(\cosh t \cdot \frac{y}{l} + \sinh t) = \left(\frac{l'}{l} + \cosh t\right) y + l \sinh t$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \cosh t\right) y + l \sinh t \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos  $l$  tal que  $\frac{l'}{l} + \cosh t = 0$ , es decir,  $l' = -l \cosh t$ . Como dominio, como  $l$  no puede anularse, consideramos  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$\begin{aligned} l' = -l \cosh t &\implies \frac{dl}{l} = -\cosh t dt \implies \int \frac{dl}{l} = - \int \cosh t dt \implies \ln(l) = -\sinh t + C \implies \\ &\implies l = k e^{-\sinh t} \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre  $l$ , sea (considerando  $k = 1$ ):

$$l(t) = e^{-\sinh t} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función  $l$ , la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = e^{-\sinh t} \sinh t$$

Empleando el método de cálculo de primitivas, obtenemos:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\sinh u} \sinh u \, du + C \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

donde dicha integral no hemos podido resolverla, puesto que no conocemos una primitiva suya.

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = e^{\sinh t} \left( \int_0^t e^{-\sinh u} \sinh u \, du + C \right) \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial  $x(0) = 1$ , obtenemos:

$$x(0) = e^{\sinh 0} \left( \int_0^0 e^{-\sinh u} \sinh u \, du + C \right) = 1 \cdot C = 1 \implies C = 1$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $x(0) = 1$  es:

$$x(t) = e^{\sinh t} \left( \int_0^t e^{-\sinh u} \sinh u \, du + 1 \right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Es cierto que la solución depende de una integral de la cual no conocemos una primitiva, pero hemos obtenido la solución en términos de dicha integral.

**Ejercicio 4.2.7.** Fijado  $c \in \mathbb{R}$ , sean  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tal que  $a(t) \geq c > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación  $x' = -a(t)x + b(t)$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ . (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes).

En primer lugar, buscamos las soluciones de la ecuación lineal dada, con dominio  $\mathbb{R}^2$ . Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $l \in C^1(\mathbb{R})$ , y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, l(t)x) \end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, y/l(s))\end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l' \cdot \frac{y}{l} + l \left( -a(t) \cdot \frac{y}{l} + b(t) \right) = \left( \frac{l'}{l} - a(t) \right) y + lb(t)$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left( \frac{l'}{l} - a(t) \right) y + lb(t) \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos  $l$  tal que  $\frac{l'}{l} - a(t) = 0$ , es decir,  $l' = a(t)l$ . Como dominio, como  $l$  no puede anularse, consideramos  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$\begin{aligned}l' = a(t)l &\implies \frac{dl}{l} = a(t)dt \implies \int \frac{dl}{l} = \int a(t)dt \implies \ln(l) = \int a(t)dt + C \implies \\ &\implies l = \exp \left( \int_0^t a(u) du + C \right) \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre  $l$ , sea (considerando  $C = 0$ ):

$$l(t) = \exp \left( \int_0^t a(u) du \right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función  $l$ , la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = lb(t) = \exp \left( \int_0^t a(u) du \right) b(t) \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

Esta ecuación se resuelve mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) dv \right) b(u) du + C \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) dv \right) b(u) du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) du \right)} \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia del denominador de la fracción:

$$\int_0^t a(u) du \geq \int_0^t c du = ct$$

Por tanto, el denominador diverge positivamente. No obstante, respecto del numerador no podemos concluir nada. Para evitar casos en los que el numerador oscila, estudiaremos el siguiente caso:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right) |b(t)|$$

Como el integrando es positivo, tenemos tan solo los dos siguientes casos:

- Si dicho límite converge a un valor  $k \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) \, dv \right) |b(u)| \, du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right)} = \frac{k}{\exp \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a(u) \, du \right)} = 0$$

- Si dicho límite diverge positivamente, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) \, dv \right) |b(u)| \, du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right)} &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right) |b(t)|}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right) a(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|b(t)|}{a(t)} = 0 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad he empleado que  $a(t) \geq c > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 0$ .

En conclusión, hemos demostrado que, en cualquier caso, se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) \, dv \right) |b(u)| \, du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right)} = 0$$

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado para todo  $t \in \mathbb{R}$ :

$$0 \leq \left| \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) \, dv \right) b(u) \, du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right)} \right| \leq \frac{\int_0^t \exp \left( \int_0^u a(v) \, dv \right) |b(u)| \, du + C}{\exp \left( \int_0^t a(u) \, du \right)}$$

Por el lema del sandwich, tomando límite a  $+\infty$  tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Por tanto, hemos demostrado lo pedido.

**Ejercicio 4.2.8.** La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas y  $n \in \mathbb{R}$ . Compruebe que el cambio de variable  $y = x^\alpha$  lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de  $\alpha$  para que la ecuación obtenida sea lineal ( $n = 0$ ). Usando el cambio anterior, resuelva los problemas de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

El dominio de la ecuación de Bernoulli es  $D = I \times J$ , con  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalos abiertos y  $J$  dependerá del exponente  $n$  (podrá ser  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$ , o  $\mathbb{R}$ ). Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \times J &\longrightarrow D_1 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (t, x^\alpha) \end{aligned}$$

Veamos cuál es el codominio de  $\varphi$ :

$$D_1 = \varphi(D) = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, y^{1/\alpha}) \in D\} = I \times J$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D_1 &\longrightarrow I \times J \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s, y^{1/\alpha}) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = \alpha x^{\alpha-1} x' = \alpha x^{\alpha-1} (a(t)x + b(t)x^n) = \\ &= \alpha x^{\alpha-1} a(t)x + \alpha x^{\alpha-1} b(t)x^n = \alpha x^\alpha a(t) + \alpha x^{\alpha-1+n} b(t) = \\ &= \alpha x^\alpha a(t) + \alpha (x^\alpha)^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} b(t) = \alpha a(t)y + \alpha b(t)y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \alpha a(t)y + \alpha b(t)y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} \quad \text{con dominio } I \times \hat{J}$$

Como tenemos que  $\frac{\alpha-1+n}{\alpha} \in \mathbb{R}$ , la ecuación obtenida es de Bernoulli. Para que la ecuación obtenida sea lineal, necesitamos que:

$$\frac{\alpha-1+n}{\alpha} = 0 \iff \alpha-1+n = 0 \iff \alpha = 1-n$$

Para valor de  $\alpha$  obtenido, la ecuación de Bernoulli se convierte en una ecuación lineal:

$$y' = \alpha a(t)y + \alpha b(t)y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} = (1-n)a(t)y + (1-n)b(t)$$

Resolvemos ahora la ecuación dada:

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1$$



Su dominio es  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Por lo visto, tenemos que el valor  $\alpha = 1 - 1/2 = 1/2$  hace que la ecuación de Bernoulli se convierta en una ecuación lineal:

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t \quad \text{con dominio } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Empleando la fórmula obtenida en Teoría para resolver ecuaciones lineales, obtenemos:

$$y(t) = e^{t/2} \left( \int e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2} du + C \right) \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Para resolver la integral, empleamos el método de integración por partes:

$$\begin{bmatrix} a = u/2 & a' = 1/2 \\ b' = e^{-u/2} & b = -2e^{-u/2} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2} du &= -2e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2} - \int -2e^{-u/2} \cdot \frac{1}{2} du = -ue^{-u/2} + \int e^{-u/2} du = \\ &= -ue^{-u/2} - 2e^{-u/2} + C = -e^{-u/2}(u + 2) + C \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$y(t) = e^{t/2} (C - e^{-t/2}(t + 2)) = Ce^{t/2} - (t + 2) \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = (y(t))^2 = (Ce^{t/2} - (t + 2))^2 \quad t \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial  $x(0) = 1$ , obtenemos:

$$x(0) = (C - 2)^2 = 1 \implies C - 2 \stackrel{(*)}{=} 1 \implies C = 3$$

donde en  $(*)$  hemos usado la condición de que  $x \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $x(0) = 1$  es:

$$x(t) = (3e^{t/2} - (t + 2))^2 \quad t \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 4.2.9.** Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma  $y(x) = x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple  $y(1) = 2$  y estudie su intervalo maximal de definición.

El dominio de la ecuación de Ricatti es  $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Buscamos en primer lugar la solución particular de la ecuación de Ricatti de la forma  $y(x) = x^\alpha$ :

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} = -\frac{1}{x^2} - \frac{x^\alpha}{x} + x^{2\alpha} = -\frac{1}{x^2} - x^{\alpha-1} + x^{2\alpha} \implies \alpha x^{\alpha+1} = -1 - x^{\alpha+1} + x^{2\alpha+2}$$

Al igualar dos polinomios, se ha de tener que coincidan en los términos del mismo grado, luego  $\alpha = -1$ . Por tanto, la solución particular de la ecuación de Ricatti es  $y(x) = \phi(x) = x^{-1} = 1/x$  definida en  $\mathbb{R}^+$ .

Buscamos entonces aplicar el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D_1 \\ (x, y) &\longmapsto (s, z) = \left(x, \frac{1}{y - \phi(x)}\right) = \left(x, \frac{1}{y - 1/x}\right)\end{aligned}$$

Veamos en primer lugar cuál es el dominio de  $\varphi$ ,  $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Como hemos de eliminar la recta  $y - \phi(x) = 0$ , tenemos dos componentes conexas a elegir. Necesitamos que  $(1, 2) \in D$ , y sabemos que  $\phi(1) = 1$ , luego necesitamos que  $y > \phi(x)$ , por lo que el dominio de  $\varphi$  es:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y > 1/x\}$$

Veamos cuál es el codominio de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}D_1 = \varphi(D) &= \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, 1/z + 1/s) \in D\} = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, 1/z + 1/s > 1/s\} = \\ &= \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, 1/z > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : \quad D_1 &\longrightarrow D \\ (s, z) &\longmapsto (x, y) = \left(s, \frac{1}{z} + \frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es suma de cocientes de funciones de clase 1), tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dz}{dx}$$

Para hallar esa derivada, trabajaremos mejor con la segunda componente de  $\varphi^{-1}$ , entendiendo que  $y, z$  y  $\phi$  son funciones dependientes de  $x$ :

$$\begin{aligned}y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \implies y' &= -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x^2} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{x} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)^2 = \\ &= -\frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{zx} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado la ecuación de Ricatti. Multiplicando por  $-z^2$  ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$z' = -\frac{z}{x} - 1 \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

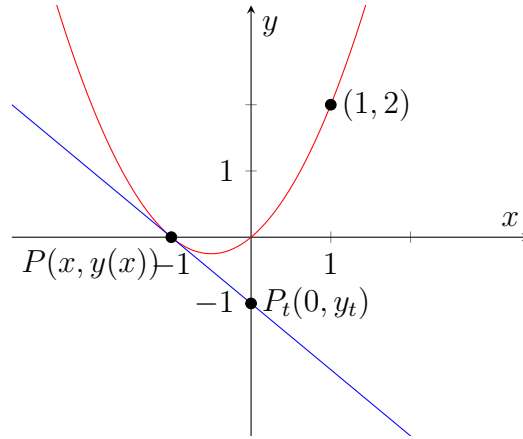


Figura 4.6: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 4.2.10.

Esta ecuación es lineal completa, por lo que podemos resolverla. Empleando la fórmula desarrollada en Teoría para resolverlas, tenemos que:

$$z(x) = e^{-\ln(x)} \left( - \int e^{\ln(u)} du + C \right) = \frac{1}{x} \left( - \int u du + C \right) = \frac{1}{x} \left( -\frac{x^2}{2} + C \right) = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Veamos el intervalo de definición  $J$  de la solución obtenida. Como necesitamos que  $x, z > 0$ , tenemos que:

$$-\frac{x}{2} + \frac{C}{x} > 0 \iff \frac{C}{x} > \frac{x}{2} \iff 2C > x^2 \implies \sqrt{2C} > x \implies J = ]0, \sqrt{2C}[$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + \frac{1}{x} = \frac{1}{-x/2 + C/x} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{2C - x^2} + \frac{1}{x} \quad x \in ]0, \sqrt{2C}[$$

Usando la condición inicial  $y(1) = 2$ , obtenemos:

$$y(1) = \frac{2 \cdot 1}{2C - 1} + \frac{1}{1} = 2 \implies \frac{2}{2C - 1} = 1 \implies 2 = 2C - 1 \implies C = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $y(1) = 2$  es:

$$y(x) = \frac{2x}{3 - x^2} + \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad x \in ]0, \sqrt{3}[$$

**Ejercicio 4.2.10.** Encuentre una curva  $y = y(x)$  que pase por el punto  $(1, 2)$  y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

La representación gráfica de la situación descrita se encuentra en la Figura 4.6.

La distancia de un punto  $P(x, y(x))$  al origen es  $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$ , y la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas es  $y_t$ . Calculemos  $y_t$  usando la definición de pendiente:

$$y'(x) = \frac{y(x) - y_t}{x - 0} \implies y_t = -y'(x)x + y(x)$$

Notemos además que, en el caso de  $x = 0$ , se tiene que  $y_t = y(x)$ , por lo que se sigue teniendo. Como la condición impuesta por el enunciado es que  $d(P, O) = y_t$ , tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + y(x)^2} = -y'(x)x + y(x) \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^3$$

Expresando en forma normal, tenemos que:

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y}{x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Notemos que, al pasar a forma normal, hemos tenido que reducir el dominio. Optamos por los valores de  $x$  positivos puesto que  $(1, 2)$  es un punto de la curva.

Pasamos entonces a resolver la ecuación diferencial dada. Para ello, como se trata de una ecuación homogénea, aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow D_1 \\ (x, y) &\longmapsto (x, z) = \left(x, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Veamos cuál es el codominio de  $\varphi$ :

$$D_1 = \varphi(D) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, zx) \in D\} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ (x, z) &\longmapsto (x, y) = (x, xz) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2} + \frac{y'}{x} = -\frac{z}{x} + \frac{-\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}}{x} = \frac{-\sqrt{1 + z^2}}{x} \quad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Esta ecuación es de variables separadas, y la función dependiente de  $z$  no tiene soluciones constantes, luego aplicamos directamente el método:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = -\frac{dx}{x} &\implies \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = -\int \frac{dx}{x} \implies \operatorname{arcsenh}(z) = -\ln(x) + C \implies \\ \implies z = \sinh(-\ln(x) + C) &\quad x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$y(x) = x \sinh(-\ln(x) + C) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Usando la condición inicial  $y(1) = 2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} y(1) = \sinh(-\ln(1) + C) = 2 &\implies \sinh(C) = 2 \implies \frac{e^C - e^{-C}}{2} = 2 \implies e^C - e^{-C} = 4 \implies \\ &\implies e^{2C} - 1 = 4e^C \implies (e^C)^2 - 4e^C - 1 = 0 \implies e^C = \frac{4 + \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 + \sqrt{5} \implies \\ &\implies C = \ln(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica  $y(1) = 2$  es:

$$y(x) = x \sinh(-\ln(x) + \ln(2 + \sqrt{5})) = x \sinh\left(\ln\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{x}\right)\right) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

**Ejercicio 4.2.11.** Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones  $s = \lambda t$ ,  $y = \lambda^2 x$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Consideramos un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  abierto y conexo, una función continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y una ecuación diferencial de la forma:

$$x' = f(t, x)$$

Consideramos ahora el cambio de variable dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (\lambda t, \lambda^2 x) \end{aligned}$$

Veamos qué condiciones hemos de imponer sobre el dominio  $D$  para que sea este invariante por  $\varphi$ , es decir,  $\varphi(D) = D$ :

$$D = \varphi(D) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2} \right) \in D \right\} = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2} \right) \in D \right\}$$

Imponer condiciones sobre  $D$  es complejo. El primer cuadrante sería un posible dominio, pero consideraremos  $D = \mathbb{R}^2$ , puesto que en clase solo se han estudiado transformaciones que dejan invariantes en todo el plano.

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{-1} : \quad D &\longrightarrow D \\ (s, y) &\longmapsto (t, x) = (s/\lambda, y/\lambda^2) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi_\lambda, \varphi_\lambda^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 por ser polinómicas, tenemos que  $\varphi_\lambda$  es un difeomorfismo. Además, es admisible ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} x' = \lambda + 0 \cdot f(t, x) = \lambda \neq 0$$

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda} = \lambda^2 x' \cdot \frac{1}{\lambda} = \lambda f(t, x) = \lambda f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) = \widehat{f}(s, y)$$

Por tanto, para que la ecuación sea invariante por el grupo de transformaciones dado, hemos de tener que:

$$f(s, y) = \widehat{f}(s, y) = \lambda f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) \quad \forall (s, y) \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Dar más información sobre  $f$  es complicado, por lo que nos limitamos a esta condición.

**Ejercicio 4.2.12.** Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.

1. **Problema 42:** Utilice la sustitución  $y = ux^2$  para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

Hay dos posibles dominios,  $D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  y  $D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ . Sea el dominio escogido  $D$ . Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D' \\ (x, y) &\longmapsto (x, u) = (x, y/x^2) \end{aligned}$$

Veamos cuál es el codominio de  $\varphi$ :

$$D' = \varphi(D) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, ux^2) \in D\} = D$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad D' &\longrightarrow D \\ (x, u) &\longmapsto (x, y) = (x, ux^2) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} \overset{1}{=} -\frac{2y}{x^3} + \frac{y'}{x^2} = -\frac{2u}{x} + \frac{\frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)}{x^2} = \\ &= -\frac{2u}{x} + \frac{2ux + \cos(u)}{x^2} = \frac{\cos(u)}{x^2} \quad \text{con dominio } D \end{aligned}$$

Esta ecuación es de variables separadas. Veamos las soluciones constantes:

$$\cos(u) = 0 \implies u = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Respecto a las soluciones no constantes, aplicamos el método de separación de variables. Fijado  $k \in \mathbb{Z}$ , sea el dominio  $D_k = D_k^1 = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$

o  $D_k^2 = \mathbb{R}^- \times ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ . Aplicamos el método de separación de variables:

$$\frac{du}{\cos(u)} = \frac{dx}{x^2} \implies \int \frac{du}{\cos(u)} = \int \frac{dx}{x^2}$$

Para resolver la primera integral, aplicamos el cambio de variable  $u = \arcsen(t) + k\pi$  definido en  $] -1, 1[$ , con  $du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\cos(u)} &= \int \frac{1}{\cos(\arcsen(t) + k\pi)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^2} dt = \\ &= \frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1-t^2} dt \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado que:

$$\begin{aligned} \cos(\arcsen(t) + k\pi) &= \cos(\arcsen(t)) \cos(k\pi) - \underbrace{\sen(\arcsen(t)) \sen(k\pi)}_{\rightarrow 0} = \\ &= \sqrt{1-t^2} \cos(k\pi) \end{aligned}$$

Para resolver la integral resultante, aplicamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-t^2} dt = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} dt = \frac{A(1-t) + B(1+t)}{1-t^2} dt$$

- Para  $t = 1$ :  $A = 1/2$
- Para  $t = -1$ :  $B = 1/2$

Por tanto, la integral resultante es:

$$\frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} dt = \frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) + C'$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln \left( \frac{1 + \sen(u - k\pi)}{1 - \sen(u - k\pi)} \right) &= -\frac{1}{x} + C \\ \frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln \left( \frac{1 + \sen(u) \cos(k\pi)}{1 - \sen(u) \cos(k\pi)} \right) &= -\frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$\frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln \left( \frac{1 + \sen(y/x^2) \cos(k\pi)}{1 - \sen(y/x^2) \cos(k\pi)} \right) = -\frac{1}{x} + C$$

2. **Problema 45: [Ecuaciones Acopladas]** Al analizar ecuaciones acopladas de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y,\end{aligned}$$

donde  $a, b, \alpha, \beta$  son constantes, quisiéramos determinar la relación entre  $x$  e  $y$  en vez de las soluciones individuales  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Para hacer esto, divida la primera ecuación entre la segunda para obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y}$$

Esta nueva ecuación es homogénea, de modo que podemos resolverla mediante la sustitución  $u = y/x$ . Nos referimos a sus soluciones como *curvas integrales*. Determine las curvas integrales del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -4x - y, \\ \frac{dx}{dt} &= 2x - y.\end{aligned}$$

Las curvas integrales de este sistema son las soluciones de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - y}{2x - y} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y < 0\} \\ \vee \\ D^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y > 0\} \end{cases}$$

Esta ecuación es homogénea. Como al aplicar el cambio de variable dividiremos entre  $x$ , los posibles dominios son:

$$D' = \begin{cases} D_-^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, 2x - y < 0\} \\ D_+^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 2x - y < 0\} \\ D_-^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, 2x - y > 0\} \\ D_+^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 2x - y > 0\} \end{cases}$$

Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D' &\longrightarrow D'_1 \\ (x, y) &\longmapsto (x, u) = (x, y/x)\end{aligned}$$

Veamos cuál es el codominio de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}D'_1 = \varphi(D') &= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, ux) \in D'\} = \\ &= \begin{cases} (D')_-^- &= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, 2x - ux < 0\} = \mathbb{R}^- \times ]-\infty, 2[ \\ (D')_+^- &= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 2x - ux < 0\} = \mathbb{R}^+ \times ]2, +\infty[ \\ (D')_-^+ &= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, 2x - ux > 0\} = \mathbb{R}^- \times ]2, +\infty[ \\ (D')_+^+ &= \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 2x - ux > 0\} = \mathbb{R}^+ \times ]-\infty, 2[ \end{cases}\end{aligned}$$



Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D'_1 &\longrightarrow D' \\ (x, u) &\longmapsto (x, y) = (x, ux) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} \overset{1}{=} -\frac{y}{x^2} + \frac{y'}{x} = -\frac{u}{x} + \frac{\frac{-4-u}{2-u}}{x} = \frac{u^2 - 3u - 4}{2-u} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{con dominio } D'_1$$

Las curvas integrales son las soluciones de esa ecuación de variables separadas, estudiadas en cada uno de los 4 posibles dominios. Luego sería necesario deshacer el cambio de variable para obtener la solución en términos de  $x$  e  $y$ .