Algoritmo de Davis-Putnam

Arturo Olivares Martos

13 de marzo de 2025

Resumen

En el presente documento, resolveremos los ejercicios propuestos relativos al Algoritmo de Davis-Putnam.

Ejercicio 1. Dado el conjunto de proposiciones $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, son equivalentes:

1. $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es inconsistente.
2. $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente.

Demostración. Demostraremos el resultado mediante una doble implicación.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

puesto que uno de los factores ($I(\psi_i)$) es 0. Por tanto, $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\{\psi_1 \land \ldots \land \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, tenemos que:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i\right) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

Por tanto, por ser $\mathbb{Z}_2$ un cuerpo (y en particular un dominio de integridad), tenemos que $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto, $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ es inconsistente.

$\square$

Ejercicio 2. Demostrar que:

$$\models (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma)$$

Demostración. Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, eso equivale a demostrar que:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \vee \beta\} \vDash \gamma$$

Además, sabemos que demostrar esa consecuencia lógica equivale a probar que el siguiente conjunto es inconsistente:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

Para poder aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam, necesitamos transformar las fórmulas en cláusulas. De esta forma:

$$\alpha \to \gamma \equiv \neg\alpha \vee \gamma$$
$$\beta \to \gamma \equiv \neg\beta \vee \gamma$$

Por tanto, el conjunto de cláusulas sobre el cual aplicaremos el Algoritmo de Davis-Putnam (y el cual será inconsistente si y solo si la consecuencia lógica de partida es cierta) es:

$$\Sigma = \{\neg\alpha \vee \gamma, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

□