

Probabilidad

Examen VII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Probabilidad

Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 15 de febrero de 2022.

Ejercicio 1. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias continuas e independientes, tales que $\exists E[X_i] \forall i = 1, \dots, n$, con momento no centrado de orden dos finito. Justificar que:

1. **(0.5 puntos)** $\exists \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$
2. **(0.5 puntos)** (X_1, \dots, X_n) es un vector aleatorio continuo.

Ambos apartados se encuentran demostrados en el Tema correspondiente a independencia de variables aleatorias.

Ejercicio 2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recito

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \quad x, y \geq 0\}$$

Observación. Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \sin(t)$.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

Observación. Se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.25 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.

Calculamos en primer lugar la función de densidad conjunta. Esta es constante en C , por lo que:

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & x^2 + y^2 < 1, x, y \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

Hay dos opciones:

Integrando de la forma usual: Es necesario que:

$$1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} k dy dx = k \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

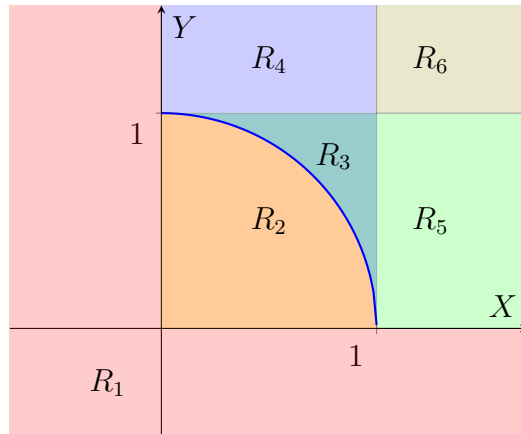
Haciendo el cambio de variable $x = \sin(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= k \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k \left[\frac{\pi}{4} \right] \implies k = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Razonando la forma de C : Sabemos que C es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x, y) = k \int_C 1 = k \cdot \lambda(C) = k \cdot \frac{\pi}{4} \implies k = \frac{4}{\pi}.$$

Para calcular la función de distribución conjunta, dividimos el plano cartesiano en las distintas regiones:



Distinguimos casos:

- Si $x \leq 0$ o $y \leq 0$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = 0.$$

- Si $x \in]0, 1[$ y $y \in]0, \sqrt{1-x^2}[$ (zona R_2):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du = \int_0^x \int_0^y \frac{4}{\pi} dv du = \int_0^x \frac{4}{\pi} y du = \\ &= \frac{4}{\pi} [yu]_0^x = \frac{4}{\pi} \cdot xy \end{aligned}$$

- Si $x \in]0, 1[$ y $y \in]\sqrt{1-x^2}, 1[$ (zona R_3):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y \frac{4}{\pi} dv du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi} dv du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} y du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \frac{4}{\pi} \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, hacemos el cambio de variable dado por $u = \text{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} \cos^2(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4} \right]_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\text{arc sen}(x)} = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{\text{sen}(2 \text{arc sen}(x))}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{\text{sen}(2 \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4} \right] \end{aligned}$$

Veamos cuánto vale anteriormente $\text{sen}(2 \text{arc sen}(x))$ para cierto $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(2 \text{arc sen}(x)) = 2 \text{sen}(\text{arc sen}(x)) \cos(\text{arc sen}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{2\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2}}{4} \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(x) + \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2} - \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi} y\sqrt{1-y^2}. = \\ &= \frac{2}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(x) + \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) \end{aligned}$$

- Si $x \in]0, 1[$ y $y \geq 1$ (zona R_4):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du = \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi} dv du = \\ &= \int_0^x \frac{4}{\pi} \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

Para resolver la integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \text{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\text{arc sen}(x)} \cos^2(t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\text{arc sen}(x)} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4} \right]_0^{\text{arc sen}(x)} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{\text{sen}(2 \text{arc sen}(x))}{4} \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\text{arc sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} \right] = \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(x) + \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

- Si $y \in]0, 1[$ y $x \geq 1$ (zona R_5):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y \frac{4}{\pi} dv du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi} dv du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} y du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{4}{\pi} \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \text{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \frac{4}{\pi} y [u]_0^{\sqrt{1-y^2}} + \frac{4}{\pi} \int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \int_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4} \right]_{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\pi/2}{2} + \frac{\text{sen}(\pi)}{4} - \frac{\text{arc sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{sen}(2 \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4} \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi} y \sqrt{1-y^2} = \\ &= \frac{2}{\pi} y \sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) \end{aligned}$$

- Si $x, y \geq 1$ (zona R_6):

$$F_{(X,Y)}(x, y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in R_1, \\ 4/\pi xy, & (x, y) \in R_2, \\ 2/\pi \left[y\sqrt{1-y^2} + x\sqrt{1-x^2} - \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) \right], & (x, y) \in R_3 \\ 2/\pi \left[\text{arc sen}(x) + x\sqrt{1-x^2} \right], & (x, y) \in R_4, \\ 2/\pi \left[y\sqrt{1-y^2} + \pi/2 - \text{arc sen}(\sqrt{1-y^2}) \right], & (x, y) \in R_5, \\ 1, & (x, y) \in R_6. \end{cases}$$

2. (1.25 puntos) Calcular las funciones de densidad condicionadas.

Para ello, calculamos en primer lugar las funciones de densidad marginales.

Para $x \in [0, 1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi} dy = \frac{4}{\pi} [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

Para $y \in [0, 1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} dx = \frac{4}{\pi} [x]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2}.$$

Una vez calculadas estas, calculamos las funciones de densidad condicionadas. Dado $x^* \in [0, 1]$, tenemos para $y \in [0, \sqrt{1-(x^*)^2}]$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*, y)}{f_X(x^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-(x^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^*)^2}}.$$

Dado $y^* \in [0, 1]$, tenemos para $x \in [0, \sqrt{1-(y^*)^2}]$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{4/\pi}{\frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-(y^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^*)^2}}.$$

Ejercicio 3. Sea considera (X, Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $Z = (X + Y, X - Y)$.

Como cuadrado unidad, entendemos $C = [0, 1] \times [0, 1]$. La función de densidad conjunta es constante en C , por lo que:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k, & (x, y) \in C, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para que $f_{(X,Y)}$ sea una función de densidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 k dx dy = k \int_0^1 [x]_0^1 dy = k \int_0^1 1 dy = k [y]_0^1 = k. \end{aligned}$$

Definimos ahora la transformación:

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto (Z, T) = (X + Y, X - Y) \end{aligned}$$

Para obtener g^{-1} , buscamos despejar (X, Y) en función de (Z, T) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = X + Y \\ T = X - Y \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Z+T}{2} \\ Y = \frac{Z-T}{2} \end{array} \right\}$$

Por tanto, la inversa es:

$$\begin{aligned} g^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (Z, T) &\longmapsto (X, Y) = \left(\frac{Z+T}{2}, \frac{Z-T}{2} \right) \end{aligned}$$

Todas las componentes de g^{-1} son derivables, con:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial Z}(Z, T) &= 1/2, & \frac{\partial X}{\partial T}(Z, T) &= 1/2, \\ \frac{\partial Y}{\partial Z}(Z, T) &= 1/2, & \frac{\partial Y}{\partial T}(Z, T) &= -1/2.\end{aligned}$$

Además, tenemos que:

$$\det Jg^{-1}(z, t) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall (z, t) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, $g(X, Y)$ es un vector aleatorio. Su función de densidad conjunta es:

$$f_{(Z, T)}(z, t) = f_{(X, Y)}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \cdot |Jg^{-1}(z, t)| = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \in R$$

Veamos cuál es este conjunto. Tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{z+t}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{z-t}{2} \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z+t \leq 2 \\ 0 \leq z-t \leq 2 \end{array} \right\}$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $Z = (X + Y, X - Y)$ es:

$$f_{(Z, T)}(z, t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq z+t \leq 2, 0 \leq z-t \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. **(1.25 puntos)** La función de densidad de probabilidad conjunta del máximo y el mínimo.

Calculamos en primer lugar la función de distribución conjunta:

$$F_{(\max\{X, Y\}, \min\{X, Y\})}(z, t) = P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t]$$

Distinguimos en función de los valores de z y t :

- Si $z \leq t$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = P[\max\{X, Y\} \leq z] = P[X \leq z, Y \leq z]$$

Distinguimos en función del valor de z :

- Si $z \leq 0$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = P[X \leq z, Y \leq z] = 0$$

- Si $0 \leq z \leq 1$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = P[X \leq z, Y \leq z] = \int_0^z \int_0^z 1 \, dx dy = z^2$$

- Si $1 \leq z$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = P[X \leq z, Y \leq z] = 1$$

- Si $t < z$:

$$\begin{aligned} P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] &= \\ &= P[\max\{X, Y\} \leq z] - P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} > t] = \\ &= P[\max\{X, Y\} \leq z] - P[t < X \leq z, t < Y \leq z] \end{aligned}$$

Distinguimos en función del valor de z (para tener así la distribución del máximo calculada):

- Si $z \leq 0$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = -P[t < X \leq z, t < Y \leq z]$$

Como la probabilidad debe ser positiva, tenemos que:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = 0$$

- Si $0 \leq z \leq 1$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = z^2 - P[t < X \leq z, t < Y \leq z]$$

Distinguimos ahora en función de t :

- Si $t \leq 0$:

$$P[t < X \leq z, t < Y \leq z] = \int_0^z \int_0^z 1 \, dx dy = z^2$$

Por tanto:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = z^2 - z^2 = 0$$

- Si $0 \leq t < z \leq 1$:

$$P[t < X \leq z, t < Y \leq z] = \int_t^z \int_t^z 1 \, dx dy = (z - t)^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] &= z^2 - (z - t)^2 = \\ &= z^2 - z^2 - t^2 + 2tz = t(2z - t) \end{aligned}$$

- Si $1 \leq z$:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = 1 - P[t < X \leq z, t < Y \leq z]$$

Distinguimos ahora en función de t :

o Si $t \leq 0$:

$$P[t < X \leq z, t < Y \leq z] = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy = 1$$

Por tanto:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = 1 - 1 = 0$$

o Si $0 \leq t < 1 \leq z$:

$$P[t < X \leq z, t < Y \leq z] = \int_t^1 \int_t^1 1 \, dx dy = (1 - t)^2$$

Por tanto:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = 1 - (1 - t)^2 = 1 - 1 - t^2 + 2t = t(2 - t)$$

o Si $1 \leq t < z$:

$$P[t < X \leq z, t < Y \leq z] = 0$$

Por tanto:

$$P[\max\{X, Y\} \leq z, \min\{X, Y\} \leq t] = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, y uniendo los distintos conjuntos, tenemos que la función de distribución conjunta queda:

$$F_{(\max\{X, Y\}, \min\{X, Y\})}(z, t) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \vee t \leq 0 & (R_0) \\ z^2 & z \leq t, 0 \leq z \leq 1 & (R_1) \\ t(2z - t) & 0 \leq t \leq z \leq 1 & (R_2) \\ t(2 - t) & 0 \leq t \leq 1 \leq z & (R_3) \\ 1 & 1 \leq z \vee 1 \leq t & (R_4) \end{cases}$$

En la Figura 1 comprobamos que cubrimos la totalidad del plano.

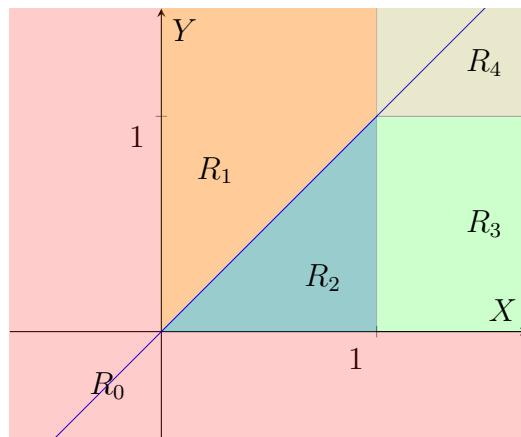


Figura 1: Comprobación de la función de distribución conjunta.

Una vez calculada la función de distribución, su función de densidad es:

$$f_{(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})}(z, t) = \frac{\partial^2 F_{(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})}(z, t)}{\partial z \partial t} = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \vee t \leq 0 & (R_0) \\ 0 & z \leq t, 0 \leq z \leq 1 & (R_1) \\ 2 & 0 \leq t \leq z \leq 1 & (R_2) \\ 0 & 0 \leq t \leq 1 \leq z & (R_3) \\ 0 & 1 \leq z \vee 1 \leq t & (R_4) \end{cases}$$

Uniando casos, tenemos que:

$$f_{(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})}(z, t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq z \leq 1 & (R_2) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Notemos que $f_{(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})}(z, t)$ es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua uniformemente distribuida en el triángulo R_2 . Por tanto, tenemos que:

$$(\max\{X, Y\}, \min\{X, Y\}) \sim \mathcal{U}(R_2).$$

Ejercicio 4. Dado un vector aleatorio con función generatriz de momentos

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \left(\frac{e^{t_1}}{2} + \frac{e^{t_2}}{4} + \frac{1}{4} \right)^5 \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Calcular la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables X_1 y X_2 .

Sabemos que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X tal que $X \sim M_2(n, p_1, p_2)$ es:

$$M_X(t_1, t_2) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + (1 - p_1 - p_2))^n.$$

Por tanto, tenemos que:

$$(X_1, X_2) \sim M_2(5, 1/2, 1/4)$$

Por tanto, sabemos que $X_1 \sim B(5, 1/2)$ y $X_2 \sim B(5, 1/4)$. Además,

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = -n \cdot p_1 p_2$$

Al tratarse de una multinomial, tenemos que las curvas de regresión son rectas, luego la razón de correlación es:

$$\begin{aligned} \eta_{X_1/X_2}^2 &= \eta_{X_2/X_1}^2 = \rho_{X_1, X_2}^2 = \frac{\text{Cov}^2[X_1, X_2]}{\text{Var}[X_1] \text{Var}[X_2]} = \frac{np_1^2 p_2^2}{np_1(1-p_1) \cdot np_2(1-p_2)} = \frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} = \\ &= \frac{1/2 \cdot 1/4}{1/2 \cdot 3/4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\text{Cov}[X_1, X_2] = -np_1 p_2 < 0$, tenemos que el coeficiente de correlación lineal es:

$$\rho_{X_1, X_2} = -\sqrt{\rho_{X_1, X_2}^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 5. Dado el vector bidimensional (X, Y) con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

$X Y$	0	1	2
1	$1/4$	0	0
2	0	$1/4$	0
3	$1/4$	0	$1/4$

1. **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X , así como calcular una medida de la bondad del ajuste.

Completamos en primer lugar la función masa de probabilidad conjunta calculando las marginales:

$X \backslash Y$	0	1	2	
1	$1/4$	0	0	$1/4$
2	0	$1/4$	0	$1/4$
3	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
	$1/2$	$1/4$	$1/4$	

Mostramos ahora en la siguiente tabla la distribución condicionada a X , es decir, $P[Y|X = x]$:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	1	0	0
2	0	1	0
3	$1/2$	0	$1/2$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 E[Y|X = 1] &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\
 E[Y|X = 2] &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\
 E[Y|X = 3] &= 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, la mejor aproximación mínimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X es:

$$\hat{Y} = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 1 \\ 1 & \text{si } X = 2, 3 \end{cases}$$

Calculamos ahora una medida de la bondad del ajuste. Calculamos previa-

mente:

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
 E[Y^2] &= 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
 \text{Var}[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16} \\
 E[(E[Y|X])^2] &= \sum_{x \in \{1,2,3\}} E[Y|X=x]^2 P[X=x] = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\
 E[E[Y|X]] &= E[Y] = \frac{3}{4} \\
 \text{Var}[E[Y|X]] &= E[(E[Y|X])^2] - E[E[Y|X]]^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la medida de la bondad del ajuste es:

$$\eta_{Y/X}^2 = \frac{\text{Var}[E[Y|X]]}{\text{Var}[Y]} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{3}{11}$$

2. **(1.25 puntos)** Obtener las ecuaciones de las rectas de regresión de $Y | X$ y $X | Y$ y el error cuadrático medio.

Calculamos en primer lugar los resultados necesarios:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \\
 E[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{4} \\
 \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{23}{4} - \frac{81}{16} = \frac{11}{16} \\
 E[XY] &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 2 \\
 \text{Cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] = 2 - \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$

Calculamos ahora las rectas de regresión.

- Recta de regresión de Y sobre X :

$$\begin{aligned}
 Y - E[Y] &= \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}(X - E[X]) \\
 Y - \frac{3}{4} &= \frac{\frac{5}{16}}{\frac{11}{16}} \left(X - \frac{9}{4} \right) \\
 Y &= \frac{5}{11}X - \frac{3}{11}
 \end{aligned}$$

- Recta de regresión de X sobre Y :

$$\begin{aligned}
 X - E[X] &= \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[Y]}(Y - E[Y]) \\
 X - \frac{9}{4} &= \frac{\frac{5}{16}}{\frac{11}{16}} \left(Y - \frac{3}{4} \right) \\
 X &= \frac{5}{11}Y + \frac{21}{11}
 \end{aligned}$$

Respecto a los errores cuadráticos medios, tenemos que el error cuadrático medio de Y sobre X es:

$$\text{E.C.M.}(Y|X) = \text{Var}[Y] - \frac{\text{Cov}^2[X, Y]}{\text{Var}[X]} = \frac{11}{16} - \frac{(5/16)^2}{11/16} = \frac{6}{11}$$

Además, como $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$, el error cuadrático medio de X sobre Y es el mismo:

$$\text{E.C.M.}(X|Y) = \frac{6}{11}$$