

# Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025



# Índice general

<b>1. Cambios de Variable</b>	<b>5</b>
1.1. Cálculo de primitivas . . . . .	12
1.2. Ecuaciones de variables separadas . . . . .	13
1.3. Ecuaciones homogéneas . . . . .	18
1.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas . . . . .	28
1.5. Ecuaciones lineales . . . . .	30
1.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas . . . . .	31
1.5.2. Ecuaciones lineales completas . . . . .	32
1.6. Ecuación de Riccati . . . . .	35
1.7. Relación con Teoría de Grupos . . . . .	40
1.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales	47
1.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias . . . . .	48



# 1. Cambios de Variable

Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$$

mediante una función

$$\begin{aligned} f : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

continua definida en  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo, nuestro objetivo será, dado un cambio de variable por dos ecuaciones

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x) \end{aligned}$$

cambiar tanto la expresión de la ecuación diferencial como el dominio para facilitar la resolución del mismo, mediante una aplicación

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad D &\longrightarrow D_1 \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) \end{aligned}$$

con  $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y conexo, que nos lleve a una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

para cierta función

$$\begin{aligned} \hat{f} : \quad D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, y) &\longmapsto \hat{f}(s, y) \end{aligned}$$

Y será de nuestro interés buscar la expresión de dicha  $\hat{f}$ .

Nos preguntamos también por las condiciones que tenemos que exigirle a dicha  $\varphi$  para que el cambio de variable sea bueno:

1. Que  $\varphi$  sea biyectiva, o equivalentemente, que tenga inversa  $\psi = \varphi^{-1}$ , para poder deshacer el cambio de variable.

2. Que podamos hacer cálculo diferencial en ambos lados y que podamos transportarlo, es decir, que tanto  $\varphi$  como  $\psi$  sean de clase  $C^1$ .
3. Además, también tendremos que buscar cómo poner  $y$  en función de  $s$ , y exigir hipótesis para que podamos hacerlo.

**Definición 1.1** (Difeomorfismo). Sea  $r \in \mathbb{N}$ , una aplicación  $f : A \rightarrow B$  es un  $C^r$ -difeomorfismo si  $f$  es de clase  $C^r(A)$ , biyectiva y su inversa  $f^{-1}$  es de clase  $C^r(B)$ .

De esta forma, nos interesará que  $\varphi$  sea un  $C^1$ -difeomorfismo, para que se cumplan los dos primeros puntos de la enumeración anterior<sup>1</sup>.

A continuación, realizaremos un razonamiento informal con la finalidad de comprobar qué pasará al realizar el cambio de variable, para luego formalizar el mismo.

Volviendo a la situación inicial, nos encontrábamos ante una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

y nos disponíamos a realizar un cambio de variable

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

De esta forma, suponiendo que  $x = x(t)$  es solución de la ecuación, tenemos las variables  $s$  y  $y$  en función de  $t$ .

$$\begin{cases} s(t) = \varphi_1(t, x(t)) \\ y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Suponiendo ahora que podemos expresar  $y$  en función de  $s$ :  $y = y(s)$ , buscamos calcular:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}$$

Primero, calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)x'(t) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Donde en  $(*)$  hemos usado que  $x$  era solución de la ecuación diferencial. Posteriormente:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Así, llegamos a que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)}$$

---

<sup>1</sup>Recordamos que una función de  $\mathbb{R}^2$  sea de clase  $C^1$  significa que podemos hacer sus derivadas parciales respecto a las dos variables y que ambas son continuas.



Pero todavía no hemos terminado, ya que ahora tenemos la ecuación diferencial en función de las variables  $s$ ,  $y$ ,  $t$  y  $x$ , por lo que tenemos que terminar de librarnos de las variables  $t$  y  $x$ . Para ello, usamos la función  $\psi$ , ya que:

$$\varphi(t, x) = (s, y) \implies \psi(s, y) = (t, x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

En caso de que el denominador sea distinto de 0, tendremos ya la nueva expresión de la ecuación diferencial, definiendo:

$$\hat{f}(s, y) = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}$$

llegamos a que

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

buscamos aplicarle un cambio de variable.

La ecuación diferencial así no tiene sentido, pues nos falta darle un dominio de definición: Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada por:

$$f(t, x) = \frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2}$$

Buscamos un conjunto  $D$  abierto y conexo que haga que  $f$  sea continua.

$f$  es continua en todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  salvo en los que se anula su denominador, y esto sucede en la recta

$$x - 2t + 1 = 0$$

que divide el plano en dos componentes conexas. Para el dominio de la función  $f$ , hemos de quedarnos con un semiplano. Elegimos el de la izquierda<sup>2</sup>, por lo que nos quedamos con

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2t + 1 > 0\}$$

Vamos a aplicarle a esta ecuación diferencial un cambio de variable:

$$\begin{cases} y &= x + t - 3 &= \varphi_2(t, x) \\ s &= x - 2t + 1 &= \varphi_1(t, x) \end{cases}$$

Primero, veamos que  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  es un difeomorfismo de todo el plano en todo el plano:

<sup>2</sup>Sin ningún motivo, podría hacerse con el de la derecha.

1.  $\varphi$  es biyectiva, ya que se puede despejar de manera única (es un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado).
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , ya que sus dos componentes son polinomios.
3.  $\varphi^{-1}$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ : ya que al despejar para hallar la expresión de  $\varphi^{-1}$ , sale que es un polinomio también.

Por tanto,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un  $C^1$ -difeomorfismo. Sin embargo, nos interesa verlo como un difeomorfismo de  $D$ . Buscamos su codominio  $D_1$  para conseguirlo:

Primero, buscamos qué imagen tiene la recta  $x - 2t + 1 = 0$ , y es la recta  $s = 0$ , que nos divide del plano en dos semiplanos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Ahora, la imagen de nuestro conjunto  $D$  es el plano de la derecha, ya que tiene que cumplir que:

$$x - 2t + 1 = s > 0$$

En definitiva:

$$D_1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$$

Además, sabemos que  $D_1$  es abierto y conexo.

Ahora, buscamos la fórmula para nuestra aplicación  $\hat{f}$ . Podríamos usar la fórmula pero vamos a repetir los cálculos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt}$$

Pensando que tanto  $y$  como  $x$  dependen de  $t$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = x' + 1 \\ \frac{ds}{dt} = x' - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2}$$

Ahora, usamos que  $x$  es solución de la ecuación diferencial, luego se cumplirá que  $x' = f(t, x)$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2} = \frac{\frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} + 1}{\frac{\sin(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} - 2}$$

A continuación, falta poner la ecuación en función de  $(s, y)$ . Para ello, componemos con la  $\psi$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\sin y}{s^2} + 1}{\frac{\sin y}{s^2} - 2} = \frac{\sin y + s^2}{\sin y - 2s^2} = \hat{f}(s, y)$$

Finalmente, surge que tenemos que poner la  $y$  en función de  $s$ . La ecuación diferencial no está definida en todo el semiplano: el denominador de la expresión no puede anularse. Los puntos que cumplan:

$$\sin y - 2s^2 = 0$$

no pueden entrar en el dominio de la ecuación diferencial.

Lo que sucede es que los difeomorfismos trasladan curvas en curvas, pero no necesariamente curvas en explícitas a curvas en explícitas, luego puede que una curva que en  $D$  se expresaba en explícitas no se pueda expresar en  $D_1$  con ecuaciones explícitas, con lo que nos daría una singularidad (en este caso, se anularía dicho denominador). Próximamente, veremos la interpretación gráfica de que esto es lo que realmente sucede.

Ahora, precedemos a realizar una teoría formal que sustente todas las cuentas realizadas hasta el momento.

**Definición 1.2** (Cambio de variable admisible). Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$x' = f(t, x)$$

Con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo, un cambio de variable admisible es una transformación:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con  $D, D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  abiertos y conexos,  $\varphi$  es  $C^1$ -difeomorfismo, y además cumple la condición de admisibilidad<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D \quad (1.1)$$

*Observación.* La condición de admisibilidad de un cambio admisible tiene un sentido geométrico, y es que estaremos interesados en dar solución a una ecuación diferencial mediante una curva en explícitas. Sin embargo, al realizar un cambio de variable con cualquier difeomorfismo nada nos garantiza que al pasar la curva en explícitas por el difeomorfismo su imagen siga siendo una curva en explícitas (lo que sí nos garantiza es que siga siendo una curva).

Veamos qué condición nos garantiza que al pasar una curva en explícitas  $x = x(t)$  por un difeomorfismo

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

sigamos teniendo una curva en explícitas  $y = y(s)$ .

Dada una función  $x = x(t)$ , la curva que esta función describe viene dada por la gráfica de dicha función (suponiendo que el dominio de  $x$  es  $I$ ):

$$G = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

---

<sup>3</sup>Esta última condición nos permite que podamos llevar curvas en explícitas  $x = x(t)$  que son solución de la ecuación diferencial en  $D$  a curvas en explícitas  $y = y(s)$  que son solución de la ecuación diferencial en  $D_1$ .

Si ahora aplicamos el difeomorfismo a  $G$ :

$$\varphi(G) = \{(\varphi_1(t, x(t)), \varphi_2(t, x(t))) \mid t \in I\}$$

Dicha curva se podrá poner en explícitas si existe una función  $y$  tal que  $y = y(s)$ . Es decir, que podamos expresar la segunda coordenada en función de la primera. Para ello, necesitamos que cada primera coordenada tenga una única coordenada segunda, para poder construir una función. Esto se garantiza si la función que lleva cada  $t$  en  $\varphi_1(t, x(t))$  es inyectiva. Llamaremos a dicha función  $g$ :

$$g(t) = \varphi_1(t, x(t)) \quad t \in I$$

Si exigimos que su derivada sea distinta de cero en todos los puntos de  $I$ , entonces  $g$  será estrictamente creciente o estrictamente decreciente, garantizando su inyectividad y que podamos pasar curvas en explícitas a curvas en explícitas. Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))x'(t) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Donde en  $(*)$  hemos usado que estábamos trabajando con  $x$ , una función solución de nuestra ecuación diferencial en cuestión.

Por tanto, la condición de admisibilidad nos garantiza que podemos pasar curvas en explícitas en curvas en explícitas.

**Proposición 1.1.** *Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x)$$

*con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo. Dado un cambio de variable admisible mediante una transformación*

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

*Entonces,  $\psi = \varphi^{-1}$  es un cambio de variable admisible para la ecuación diferencial*

$$y' = \hat{f}(s, y)$$

**Teorema 1.2** (Cambio de variable para ecuaciones diferenciales). *Dado una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x) \tag{1.2}$$

*Con  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $D$  un conjunto abierto y conexo. Sea  $\varphi : D \rightarrow D_1$  un cambio de variable admisible.*

*Entonces, la ecuación 1.2 es equivalente<sup>4</sup> a la ecuación*

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) \tag{1.3}$$

---

<sup>4</sup>Quiere decir, que siempre que tengamos una curva en  $D$  que sea solución de la ecuación diferencial, podamos ir a  $D_1$  aplicando  $\varphi$  y tendremos una solución de la ecuación diferencial definida en  $D_1$ , así como este mismo procedimiento al revés.

donde

$$\hat{f}(s, y) = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y))f(\psi(s, y))} \quad \forall (s, y) \in D_1$$

*Demostración.* Supongamos que  $x = x(t)$  es solución de la ecuación 1.2 definida en un intervalo abierto  $I \subseteq \mathbb{R}$ , y queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Defino

$$\begin{aligned} S: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi_1(t, x(t)) \end{aligned}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con derivada distinta de 0:

$$S'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)x'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

ya que el cambio era admisible. Defino  $J = S(I)$  intervalo abierto, y podemos ahora aplicar el Teorema de la función inversa sobre  $S$ , obteniendo una función

$$\begin{aligned} T: J &\longrightarrow I \\ s &\longmapsto T(s) \end{aligned}$$

de forma que cumpla

$$\begin{aligned} T(S(t)) &= t \quad \forall t \in I \\ S(T(s)) &= s \quad s \in J \end{aligned}$$

Teníamos  $s$  en función de  $t$  y ahora hemos puesto  $t$  en función de  $s$  utilizando la primera ecuación del cambio de variable. Ahora, podemos definir (usando la segunda ecuación del cambio) la siguiente función, para expresar  $y$  en función de  $s$ , gracias a que hemos expresado  $t$  en función de  $s$ :

$$\begin{aligned} y: J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \varphi_2(T(s), x(T(s))) \end{aligned}$$

Nos falta derivar  $y$  respecto a  $s$  para comprobar que sea solución de la ecuación diferencial 1.3:

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) \cdot T'(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \cdot T'(s) \\ &= T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \right) \\ &= T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot f(T(s), x(T(s))) \right) \end{aligned}$$

Ahora, usamos que  $\varphi$  tiene de inversa a  $\psi$ , para así poder expresar

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

y eliminar  $t$  y  $x$  de la expresión, dejándolo todo en función de  $s$  e  $y$ :

$$y'(s) = T'(s) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y(s))) \cdot f(\psi(s, y(s))) \right)$$

Falta ver que  $T'(s)$  es el denominador de la expresión 1.3. Para ello, aplicamos la regla de derivación de la función inversa:

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))f(T(s), x(T(s)))}$$

Ahora, volvemos a usar que

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

para obtener

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y(s)))f(\psi(s, y(s)))}$$

Finalmente, falta ver que si tenemos una solución en  $D_1$ , volvemos a tener una solución en  $D$ . Bastaría aplicar el mismo proceso pero al revés. Sin embargo, debemos comprobar que si  $\varphi$  es admisible para la ecuación 1.2, entonces  $\psi$  lo es para la ecuación 1.3.

Faltaría comprobar la expresión análoga a 1.1 para  $\psi$ , esto es:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(s, y)\hat{f}(s, y) \neq 0 \quad \forall (s, y) \in D_1$$

Usando que:

$$\varphi'(\psi(s, y))\psi'(s, y) = Id$$

□

Nos falta ahora aprender estrategias para buscar el cambio de variable adecuado en cada caso. Para ello, aprenderemos primero a resolver las ecuaciones diferenciales más sencillas para así cuando se nos presente una más complicada, aplicar un cambio de variable para obtener una ecuación sencilla que sí sepamos resolver.

## 1.1. Cálculo de primitivas

Buscamos resolver ecuaciones diferenciales sencillas. Las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos encontrarnos son el cálculo de primitivas, es decir, cuando la derivada de  $x$  sólo está en función de  $t$ .

Pensamos en la ecuación diferencial:

$$x' = p(t) \quad (1.4)$$

con  $p : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, el dominio de la ecuación diferencial es  $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Sabemos que dicha ecuación diferencial tiene solución, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo:

**Teorema 1.3** (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, fijado  $t_0 \in I$ , entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(s) \, ds \quad t \in I$$

*es una función de clase  $C^1(I)$  que cumple  $P'(t) = p(t)$ .*

Por tanto, fijado  $t_0 \in I$ , las soluciones de la ecuación diferencial 1.4 son de la forma:

$$x(t) = k + \int_{t_0}^t p(s) \, ds \quad k \in \mathbb{R}$$

Tenemos una primera clase de ecuaciones diferenciales que sabemos resolver, al menos a nivel teórico, ya que hay integrales que no pueden calcularse.

## 1.2. Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de variables separadas es una ecuación de la forma

$$x' = p(t)q(x)$$

con funciones

$$\begin{aligned} p : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto p(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto q(x) \end{aligned}$$

continuas con  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalos abiertos. De esta forma, estamos manejando la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

con

$$\begin{aligned} f : D = I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto p(t)q(x) \end{aligned}$$

*Observación.* Notemos que el cálculo de primitivas es caso particular de las ecuaciones de variables separadas, ya que tomando  $q(x) = 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$ :

$$p(t)q(x) = p(t) \quad \forall t \in I$$

Para su resolución, comenzaremos primero con unos cálculos informales que luego formalizaremos. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Primero, buscaremos los valores  $a \in J$  que hagan que  $q(a) = 0$ . En dicho caso, podemos definir la función

$$x(t) = a \quad t \in I$$

que es solución de la ecuación diferencial.

Una vez localizados todos los ceros de la ecuación, tendremos ya todas las soluciones constantes localizadas. Ahora, haremos separación de variable, que precisamente busca las soluciones que no son constantes. Hacemos la siguiente operación, que por ahora carece de rigor:

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t) dt$$

Posteriormente, tomaremos primitivas en ambos lados:

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t) dt$$

Notando por  $\Phi$  a una primitiva para  $\frac{1}{q}$  y por  $P$  a una primitiva de  $p$ , tendremos que:

$$\Phi(x) + c_1 = P(t) + c_2$$

Para ciertas constantes arbitrarias  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, como la diferencia de constantes sigue siendo una constante, podemos escribir simplemente:

$$\Phi(x) = P(t) + c$$

Si ahora podemos calcular una inversa de  $\Phi$  (en caso de que esta sea biyectiva), podemos deducir que:

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

**Ejemplo.** En este ejemplo, mostraremos que el procedimiento anterior parece funcionar ante las ecuaciones diferenciales de variables separadas, pese a carecer de sentido aparente. Para ello, trataremos de resolver la ecuación

$$x' = e^{t+x}$$

con dominio  $D = \mathbb{R}^2$ , que es una ecuación en variables separadas, ya que:

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x$$

En este caso, no encontramos soluciones constantes, ya que  $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Resolvámosla con la receta que acabamos de aprender:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t e^x \\ e^{-x} dx &= e^t dt \\ \int e^{-x} dx &= \int e^t dt \\ -e^{-x} &= e^t + c \end{aligned}$$



La última igualdad nos da la función  $x$  de manera implícita, busquemos ahora la forma de dar la función  $x$  de forma explícita:

$$e^{-x} = -e^t - c$$

y tomamos logaritmos, pensando en que esto nos va a determinar luego el dominio de la solución (de forma implícita, suponemos que la cantidad de la derecha es positiva).

$$\begin{aligned} -x(t) &= \ln(-e^t - c) \\ x(t) &= -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora por qué constantes  $c$  nos sirven y por el dominio de la función  $x$ :

- Cuando  $c$  tome valores positivos o 0, no va a tener sentido la expresión, por lo que exigimos  $c < 0$ .
- A continuación, buscamos el intervalo abierto en el que esté definida  $x$ . Nos interesa que  $-e^t - c > 0$  para cierta constante negativa  $c$ , luego nos interesa que  $t$  sea chico, para que la cantidad sea positiva. Por tanto, el intervalo de definición de  $x$  será de la forma  $I_c = ]-\infty, a_c[$ , para cierto  $a_c \in \mathbb{R}$ , que dependerá del valor de la constante  $c$  escogida para la solución.

Buscamos ahora dicha  $a_c$ , sea  $c \in \mathbb{R}^-$ :

$$-e^t - c > 0 \iff -c > e^t \iff \ln(-c) > \ln(e^t) = t$$

donde hemos usado que  $\ln$  es una función estrictamente creciente, obteniendo que:

$$t \in I_c = ]-\infty, \ln(-c)[$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación planteada al inicio son

$$\begin{aligned} x : I_c &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Dado que hemos hecho una cuenta que a priori carece de sentido, la única forma de comprobar que lo que hemos hecho está bien es derivar  $x$  y comprobar que, efectivamente, es una solución de la ecuación diferencial.

De forma alternativa, veamos ahora que en realidad la receta que usamos tiene un fundamento teórico, que nos permite usarla bajo unas ciertas hipótesis, obteniendo siempre unos resultados fiables.

De esta forma, supongamos que  $q(x) \neq 0 \forall x \in J$  (para los valores en los que se anule  $q$ , tenemos soluciones constantes, luego falta comprobar qué ocurre donde  $q$  no se anula). Vamos a intentar hacer un cambio de variable que transforme la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \tag{1.5}$$

en un cálculo de primitivas de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(s) \quad (1.6)$$

En vez de dar el cambio, vamos a buscarlo. Dada una función

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \quad \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

Exigimos que  $\varphi_1 = Id_I$  y notaremos  $\phi = \varphi_2$  por comodidad, con lo que queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \phi(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

por lo que tendremos que buscar dicha función  $\phi$ . Para que  $\varphi$  sea un difeomorfismo, es necesario que la función

$$\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$$

sea de clase  $C^1$ , así como que  $\phi'(x) \neq 0 \ \forall x \in J$ . No es necesario exigir que sea biyectiva, ya que luego tomaremos como codominio  $\hat{J} = \phi(J)$ , intervalo abierto. De esta forma, la ecuación diferencial tras el cambio de variable tendrá como dominio  $D_1 = I \times \hat{J}$ .

Ahora, busquemos que  $\varphi$  sea admisible, es decir, que cumpla la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D$$

Lo cual es inmediato, ya que  $\varphi_1(t, x) = t$ , luego:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = 1 + 0 \neq 0$$

La interpretación geométrica de que la condición de admisibilidad sea cierta siempre bajo un cambio del tipo 1.7 cuenta con una interpretación geométrica, ya que al ser  $t = s$ , cualquier curva que escribamos de forma explícita en  $D$ , al aplicarle el difeomorfismo podrá seguir escribiéndose de forma explícita en  $D_1$ , y viceversa.

Sea  $x = x(t)$  una solución de 1.5, aplicamos ahora el cambio de variable, tal y como aprendimos al inicio de este Capítulo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(*)}{=} \phi'(x)x' = \phi'(x)p(t)q(x)$$

donde en  $(*)$  hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

y en la segunda igualdad que  $x$  es solución de 1.5.

Todavía no tenemos la ecuación cambiada, ya que seguimos teniendo los parámetros  $t$  y  $x$ . Para quitarlos, basta con usar  $\psi = \phi^{-1}$ , que sabemos que existe según las condiciones que hemos impuesto<sup>5</sup> sobre  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\phi(x) = y &\implies x = \psi(y) \quad \forall x \in J \\ \frac{dy}{ds} &= p(t)\phi'(\psi(y))q(\psi(y))\end{aligned}$$

Sin embargo, no hemos terminado, ya que queríamos buscar un cambio de variable que nos llevase a:

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Por lo que tenemos que exigir finalmente a  $\phi$  que:

$$\phi'(x)q(x) = 1$$

Por tanto, fijado  $x_0 \in J$ , defino

$$\begin{aligned}\phi: J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}\end{aligned}$$

Para que:

$$\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \implies \phi'(x)q(x) = 1$$

Resumiendo, dada una ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Si aplicamos el cambio:

$$\begin{cases} s = t \\ y = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{cases} \quad x_0 \in J$$

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Que teóricamente sabemos resolver, ya que se trata de un cálculo de primitiva.

**Ejemplo.** Volvemos a la ecuación con la que empezamos el curso, con el fin de aplicarle la regla que acabamos de aprender:

$$x' = \lambda x$$

con dominio  $D = \mathbb{R}^2$ . Es de variables separadas. Las soluciones constantes de la ecuación son:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

---

<sup>5</sup>Hasta ahora, que  $\phi$  sea de clase  $C^1(J)$  y que tenga derivada no nula.

Ahora, como  $J$  debemos tomar tanto  $\mathbb{R}^+$  como  $\mathbb{R}^-$ . En este ejemplo, tomaremos  $J = \mathbb{R}^-$ , y el resultado debe repetirse en  $\mathbb{R}^+$  de forma análoga.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \lambda dt \\ \ln(-x) &= \lambda t + c\end{aligned}$$

y despejamos  $x$ :

$$\begin{aligned}-x(t) &= e^{\lambda t + c} \\ x(t) &= -e^{\lambda t + c} = -e^c e^{\lambda t}\end{aligned}$$

En definitiva, las soluciones son:

$$x(t) = k \cdot e^{\lambda t} \quad k < 0$$

### 1.3. Ecuaciones homogéneas

Siguiendo con un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales que aprenderemos a resolver reduciéndolas a un tipo de ecuaciones diferenciales que ya sabemos resolver, ahora es el turno de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

con  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, siendo  $J$  un intervalo abierto.

#### Cómo identificarlas

Anteriormente estudiamos las ecuaciones de variables separadas, las cuales eran fáciles de identificar. Sin embargo, las ecuaciones homogéneas ya empiezan a ser algo más difíciles de identificar.

Mostraremos ahora varios ejemplos de ecuaciones diferenciales que son homogéneas, aunque no sea fácil verlo:

1. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

es homogénea, para la función

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u + 1\end{aligned}$$

Ya que

$$h\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + 1 = \frac{x}{t} + \frac{t}{t} = \frac{x+t}{t}$$

2. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2 + x^2}$$

es homogénea, ya que si dividimos el numerador y el denominador entre  $t^2$ , llegamos a que:

$$x' = \frac{\frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2}}{\frac{t^2 + x^2}{t^2}} = \frac{1 + 2\left(\frac{x}{t}\right) + 3\left(\frac{x}{t}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}$$

Luego la función  $h$  en este caso es la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + u^2} \end{aligned}$$

Esta última ecuación diferencial parece haber sido identificada mediante una idea feliz (dividir todo entre  $t^2$ ). Sin embargo, existe una teoría sobre funciones homogéneas, la cual pasamos a desarrollar brevemente ahora. Esta nos permitirá darnos cuenta de forma rápida de si una ecuación diferencial es o no homogénea.

**Definición 1.3** (Función homogénea). Dada una función  $f : V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ , decimos que es homogénea de grado  $r$  si se verifica que

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda^r f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \forall v \in V$$

**Proposición 1.4.** Dado un polinomio en  $n$  variables, este es una función homogénea de grado  $r$  si, y solo si todos sus monomios son de grado  $r$

A dichos polinomios, los llamamos polinomios homogéneos de grado  $r$ .

Se verifica que si tenemos una ecuación diferencial que venga dada por un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado  $r$ , entonces estamos ante una ecuación diferencial homogénea:

$$x' = \frac{f(t, x)}{g(t, x)}$$

Para comprobarlo, tendríamos que dividir el numerador y denominador del cociente entre  $t^r$ , obteniendo así la función  $h$ .

Observemos que lo que sucedía en el ejemplo anterior es que teníamos un cociente de polinomios homogéneos de grado 2 (por estar formados únicamente por monomios de grado 2), por lo que dividiendo entre  $t^2$  pudimos sacar al función  $h$ .

**Ejemplo.** La ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

es homogénea, ya que tengo dos funciones homogéneas de grado 1 divididas. Si dividimos numerador y denominador por  $t$ , conseguimos verlo más fácil. Sin embargo, hemos de distinguir casos:

- Si  $t > 0$ :

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t} = \frac{\frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} + \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

- Si  $t < 0$ :

$$x' = \frac{\frac{t}{t} + \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \frac{\sqrt{x^2 + t^2}}{-t}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{\frac{t}{t} - \sqrt{\frac{x^2 + t^2}{t^2}}}{\frac{2x - t}{t}} = \frac{1 - \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\frac{x}{t}\right) - 1}$$

### Dominio de la ecuación diferencial

Ahora, trabajamos con una ecuación que es de la forma:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo<sup>6</sup> de forma que

$$f(t, x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta función  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $J$  un intervalo abierto y continua.

En primer lugar, observamos que  $f$  es continua, por ser composición de funciones continuas:

$$(t, x) \mapsto \frac{x}{t} \mapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Ahora, queremos ver cuál es dicho dominio  $D$  en el que está definida nuestra ecuación diferencial.

- Como primera observación, debemos excluir de  $D$  la recta  $t = 0$ , para que la definición de  $f$  tenga sentido.
- Suponiendo que<sup>7</sup>  $J = ]\alpha, \beta[$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

Dado un punto  $(t, x) \in D$  de nuestro dominio, este punto debería cumplir que  $\frac{x}{t} \in J$  para que la definición de  $f$  tenga sentido. Decir que  $\frac{x}{t} \in J$  es equivalente a que

$$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

Por lo que los puntos  $(t, x) \in D$  de nuestro dominio deberían cumplir dicha condición. Notemos que  $\frac{x}{t}$  es la pendiente de un punto  $(t, x)$  de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que todos los puntos que cumplen la ecuación superior son los que se encuentran en un sector angular, delimitado por las rectas  $x = \alpha t$  y  $x = \beta t$ :

<sup>6</sup>Por la definición de ecuación diferencial.

<sup>7</sup>En el caso de que sea un intervalo no acotado, se razonaría de forma similar.



Figura 1.1: Sector angular, sin incluir el punto  $(0, 0)$ .

Como  $D$  ha de ser conexo, hemos de quedarnos con la parte de la izquierda o con la parte de la derecha del sector angular. Algebraicamente, estos dos son los conjuntos:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J \right\}$$

$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, \frac{x}{t} \in J \right\}$$

*Observación.* Notemos que en el ejemplo superior de la ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

distinguíamos los casos en los que  $t$  era positivo y en los que  $t$  era negativo. Esto tiene todo el sentido, ya que en realidad no estamos trabajando con una ecuación diferencial, sino con 2, ya que no habíamos tenido en cuenta el dominio de la ecuación diferencial. Esta puede estar definida o bien en  $D_+$  o bien en  $D_-$ , por lo que estaríamos trabajando o bien con  $t > 0$  o bien con  $t < 0$ , respectivamente.

### Posicionamiento de las ecuaciones homogéneas

Nos preguntamos ahora por las relaciones que hay entre las ecuaciones homogéneas y las ya vistas hasta el momento: cálculo de primitivas y de variables separadas. ¿Son todas las ecuaciones de variables separadas homogéneas?

Respondemos a esta y a muchas más preguntas con los siguientes ejemplos:

- El cálculo de primitivas no está incluido en las ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo la ecuación  $x' = 0$ .
- $x' = xt$  es de variables separadas pero no es homogénea.
- $x' = \frac{x}{t}$  es homogénea y es de variables separadas.

- $x' = \frac{x+t}{t}$  es homogénea pero no es de variables separadas.

Por tanto, vemos que hay ecuaciones homogéneas que son de cálculo de primitivas (aunque pocas), que hay algunas ecuaciones homogéneas que son a su vez de variables separadas y que hay ecuaciones homogéneas que no son de variables separadas. La situación es similar a la del diagrama 1.2.



Figura 1.2: Diagrama de los tipos de ecuaciones diferenciales.

### Resolución de ecuaciones homogéneas

Hay un cambio de variable que nos permite llevar ecuaciones diferenciales homogéneas a ecuaciones diferenciales de variables separadas, que ya sabemos resolver. Por comodidad, supondremos que<sup>8</sup> el dominio elegido para la ecuación diferencial es  $D_+$ .

El cambio viene dado por la función

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

- Podemos despejar de manera única las variables  $t$  y  $x$ , luego es biyectiva, con inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= sy \end{cases}$$

- Las componentes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de  $\varphi$  son polinomios, luego es de clase  $C^1(D_+, \mathbb{R}^2)$ .
- Y además, como las componentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$  de  $\psi$  también son polinomios, tenemos que  $\psi$  es de clase  $C^1(\varphi(D_+), \mathbb{R}^2)$ .

Por tanto, hemos comprobado que  $\varphi$  es un  $C^1$ -difeomorfismo, luego falta comprobar la condición de admisibilidad para comprobar que sea un cambio de variable admisible. Sin embargo, esta propiedad estará garantizada, ya que no hemos cambiado la variable  $t$ , por lo que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = 1 + 0 \neq 0 \quad \forall (t, x) \in D_+$$

---

<sup>8</sup>En caso contrario, es análogo.



Una vez comprobado que  $\varphi$  es un cambio de variable admisible, vemos cuál será el nuevo dominio de la ecuación diferencial una vez hecho el cambio de variable:

$$\varphi(D_+) = \varphi\left(\left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}\right) = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, y \in J\} = ]0, +\infty[ \times J$$

Por tanto, el sector angular  $D_+$  que teníamos como dominio de la ecuación diferencial original, se aplica mediante  $\varphi$  en una banda horizontal, tal y como vemos en la figura 1.3.



Figura 1.3: Banda horizontal, sin incluir la recta  $s = 0$ .

Procederemos ahora a realizar el cambio de variable, para ver qué forma adopta la ecuación. Teníamos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

a la que le aplicamos el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

Pensando que  $x$  está en función de  $t$  y que  $y$  está en función de  $s$ :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(*)}{=} \frac{t \cdot \frac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t} \cdot \frac{x}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} \right)$$

Donde en  $(*)$  hemos aplicado que  $y = \frac{x}{t}$ , junto con la regla de derivación de un cociente. Tenemos ya la ecuación diferencial, pero sigue estando en función de las variables  $x$  y  $t$ . Falta aplicar que  $y = \frac{x}{t}$  otra vez, que  $s = t$  y que  $x$  era solución de la ecuación diferencial, por lo que se verifica:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Aplicando esto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{t} \left( \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} \left( h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t} \right) = \frac{1}{s} (h(y) - y)$$

Que es una ecuación de variables separadas, para las funciones<sup>9</sup>  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  y  $q : J \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$p(s) = \frac{1}{s}$$

$$q(y) = h(y) - y$$

Luego acabamos de ver que toda ecuación homogénea puede llevarse a una ecuación de variables separadas.

Recordamos que en variables separadas podíamos encontrarnos dos tipos de soluciones, constantes y no constantes. Observemos que cuando  $q(b) = h(b) - b = 0$  para cierto  $b$ , encontramos soluciones constantes de la ecuación diferencial de variables separadas, que serán las funciones:

$$z(s) = b \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

Que al deshacer el cambio de variable, nos darán una semirrecta en el dominio original:

$$x(t) = b \cdot t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Resumiendo, dada una ecuación diferencial en un dominio  $D_+$  por:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua, podemos aplicar el cambio de variable

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{x}{t} \end{cases}$$

para llegar a la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

que ya sabemos resolver.

**Ejemplo.** Dada la ecuación diferencial (en la que usamos la notación geométrica en lugar de la física):

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Se pide hallar su dominio de definición, así como encontrar una solución de dicha ecuación, cogiendo como condición de dicha solución que ha de cumplir:

$$y(-1) = -1$$

---

<sup>9</sup>El dominio de la primera es  $\mathbb{R}^+$  porque es el mismo dominio en el que se mueve  $t$  y el de la segunda es el dominio en el que se mueve  $\frac{x}{t}$ .

Se trata de una ecuación diferencial homogénea, ya que se trata de un cociente de dos polinomios homogéneos de grado 1. Podemos comprobarlo dividiendo numerador y denominador entre  $x$ :

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y+x}{x}} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

Por lo que la función  $h$  a escoger sería:

$$h(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

Y debemos elegir bien el dominio de definición de dicha función. Podría ser o bien  $J_- = ]-\infty, -1[$  o bien  $J_+ = ]-1, +\infty[$ .

Como queremos que  $y(-1) = -1$ , buscamos tener  $\frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$ , luego tomaremos  $J = J_+$ , ya que contiene el 1.

Una vez conocido el dominio de  $h$ , podemos ya escoger el dominio de definición de la ecuación diferencial. Este será  $D_+$  o  $D_-$ . Como ha de cumplir que  $(-1, -1) \in D$  siendo  $D$  el dominio de la ecuación diferencial, nos quedaremos con  $D = D_-$ , ya que es la opción que nos contiene las abscisas negativas. De esta forma:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \frac{y}{x} > -1 \right\}$$

Gráficamente, el dominio de definición  $D$  es el sector angular de la figura 1.4.

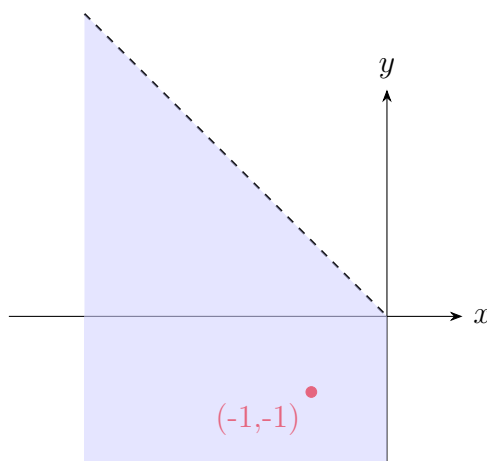


Figura 1.4: El sector angular  $D$ .

Ahora, haremos el cambio de variable, usando como nuevas variables  $u$  y  $v$ :

$$\varphi : \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto  $D$  pasa a:

$$\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, v > -1\} = ]-\infty, 0[ \times ]-1, +\infty[$$

Y el punto  $(-1, -1)$  pasa a:

$$\varphi(-1, -1) = \left(-1, \frac{-1}{-1}\right) = (-1, 1)$$

Gráficamente, vemos  $\varphi(D)$  en la figura 1.5.



Figura 1.5: Dominio tras hacer el cambio de variable

Buscamos ahora la ecuación diferencial tras el cambio de variable, la cual resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{du} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x} \left( \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{u} (h(v) - v) = \frac{1}{u} \left( \frac{v-1}{v+1} - v \right) \\ &= \frac{1}{u} \left( \frac{v-1}{v+1} - \frac{v^2+v}{v+1} \right) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{1+v^2}{1+v} \end{aligned}$$

Y tenemos nuestra ecuación de variables separadas, que pasamos a resolver. Lo primero a observar es que nos interesa la solución concreta  $v$  tal que  $v(-1) = 1$ .

Observamos que la ecuación anterior no tienen soluciones constantes, por ser:

$$\frac{1+v^2}{1+v} > 0$$

Luego resolvemos por variables separadas:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{-1}{u} \cdot \frac{1+v^2}{1+v} \\ \int \frac{1+v}{1+v^2} dv &= - \int \frac{du}{u} \end{aligned}$$

Como estamos trabajando con  $u < 0$ :

$$- \int \frac{du}{u} = -\ln(-u) + k$$

Y la primera integral la partimos en dos para resolverla, llegando a que:

$$\int \frac{1+v}{1+v^2} dv = \int \frac{1}{1+v^2} dv + \int \frac{v}{1+v^2} dv = \arctan v + \frac{1}{2} \ln(1+v^2) + k'$$

Por tanto:

$$\operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = -\ln(-u) + k$$

Y por el desarrollo teórico visto en la sección de ecuaciones de variables separables, sabemos que dicha expresión define de forma implícita una función  $v$  en función de  $u$ , para cierto  $k \in \mathbb{R}$ .

Ahora, volveremos al dominio original, deshaciendo el cambio de variable:

$$\operatorname{arc\,tg} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = -\ln(-x) + k$$

Que define  $y$  como función de  $x$  de forma implícita. Usando que  $(x < 0)$ :

$$\ln(-x) = \frac{1}{2} \ln(x^2)$$

Podemos darle otra forma a la expresión, para verla de forma más clara:

$$\operatorname{arc\,tg} \left( \frac{y}{x} \right) + \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = k$$

Es la familia de soluciones que nos resuelven la ecuación diferencial. Buscamos  $k$  para  $y(-1) = -1$ , sustituyendo  $y$  y  $x$  por  $-1$ :

$$k = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2})$$

Para ver que esto define una ecuación implícita, deberíamos aplicar el Teorema, pero gracias a la teoría que venimos desarrollando hasta ahora, lo tenemos visto. Tenemos visto que dicha fórmula dos define una ecuación implícita en un entorno del punto  $(-1, -1)$ .

Sin embargo, estamos ante un problema específico en el que podemos llegar a ver algo más. Se trata de una curva que en cartesianas tiene una expresión compleja, pero en coordenadas polares puede intuirse la gráfica de la función de forma más fácil, por lo que cambiamos a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$

Y como:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$$

Buscamos  $\theta$  de forma que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ . Como estamos trabajando con la solución que pasa por el  $(-1, -1)$ , estamos trabajando en el tercer cuadrante, por lo que tendremos  $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ . Como la función  $\arctan$  es la inversa de  $\tan$  sólo en el intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , desplazamos  $\theta$ , usando que la tangente es  $\pi$ -periódica:

$$\begin{aligned} \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ &\implies \theta - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \arctan(\tan \theta) &= \arctan(\tan(\theta - \pi)) = \theta - \pi \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\arctan(\tan \theta) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta - \pi \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\end{aligned}$$

Y también:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, llegamos a que la expresión en polares es:

$$\theta + \ln r = k + \pi$$

Se trata de la espiral logarítmica o de Arquímedes, que se entiende mejor tomando exponenciales:

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$

Fijado un  $r$ , conforme movemos  $\theta$ , se va formando una especie de circunferencia pero con  $r$  disminuyendo, luego se forma una espiral.

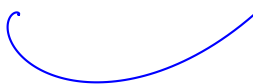


Figura 1.6: Espiral logarítmica.

*Observación.* Notemos que las espirales son curvas de la forma

$$r = f(\theta)$$

con  $f$  creciente o decreciente, escritas en coordenadas polares.

## 1.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

A continuación, estudiaremos otro tipo de ecuaciones diferenciales, las reducibles a homogéneas. Estas son similares a las homogéneas, pero en vez de ser una función en función de  $\frac{x}{t}$ , es una función en función de un cociente de polinomios en dos variables, ambos de grado 1, luego son de la forma:

$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$$

con  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $I$  un intervalo abierto.

**Ejercicio.** Dar un dominio de definición para una ecuación reducible a homogénea. Estaremos trabajando por tanto con una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(t, x)$$

con

$$f(t, x) = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad \forall(t, x) \in D$$

Y busquemos el dominio  $D$  en el que la función  $f$  está definida. Este tiene que ser un conjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^2$ .

Dado  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , nos interesa:

- Primero, que el cociente anterior tenga sentido, es decir, que  $At + Bx + C \neq 0$ . Por tanto, esta recta estará excluida de  $D$ .
- Que podamos aplicar  $h$  al cociente anterior, es decir, que

$$\frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I$$

El conjunto más grande en el que podemos definir  $f$  será un conjunto de la forma:

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid At + Bx + C \neq 0, \frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \in I \right\}$$

Finalmente, falta comprobar que el conjunto sea abierto y conexo. Como el conjunto excluye a una recta del plano, sabemos por tanto que este contendrá como mínimo dos componentes conexas<sup>10</sup>.

### Resolución de ecuaciones reducibles a homogéneas

El truco que funciona casi siempre es realizar una traslación. Fijado  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$ , defino

$$\varphi : \begin{cases} s &= t - t_* \\ y &= x - x_* \end{cases} \quad (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$$

que es fácil ver que es un cambio de variable admisible.

El cambio de variable es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Y hay que quitar las variables  $t$  y  $x$ :

$$\frac{dy}{ds} = h \left( \frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C} \right)$$

Si conseguimos hacer:

$$\begin{cases} at_* + bx_* + c &= 0 \\ At_* + Bx_* + C &= 0 \end{cases}$$

Nos quedaría que:

$$\frac{dy}{ds} = h \left( \frac{a(s + t_*) + b(y + x_*) + c}{A(s + t_*) + B(y + x_*) + C} \right) = h \left( \frac{as + by}{As + By} \right)$$

Que se trata de una ecuación homogénea, por ser un cociente de polinomios homogéneos de grado 1.

---

<sup>10</sup>Si algún lector termina el ejercicio, solicitamos que se nos envíe para completar los apuntes.

- En el caso de que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo que existe una solución del sistema. Para realizar el cambio de variable, tomamos  $(t_*, x_*)$  de forma que sea solución del sistema, y al realizar el cambio de variable, podremos seguir el razonamiento superior, llegando a una ecuación homogénea.

- En el caso de que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, se trata de un sistema incompatible, por lo que no podremos realizar el razonamiento anterior.

Sin embargo, lo que sucederá en dicho caso es que los vectores  $(a, b)$  y  $(A, B)$  serán linealmente dependientes en  $\mathbb{R}^2$ , luego podemos hacer:

$$(A, B) = \lambda(a, b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

De esta forma, podemos escribir:

$$x' = h \left( \frac{at + bx + c}{At + Bx + C} \right) = h \left( \frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + C} \right)$$

Que no es una ecuación homogénea, pero nos permite hacer el cambio de variable (suponiendo que  $b \neq 0$ ):

$$y = at + bx$$

## 1.5. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

para ciertas funciones  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  continuas definidas en un intervalo abierto  $J$ .

Por tanto, la ecuación diferencial vendrá dada por una función  $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que

$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t) \quad (t, x) \in J \times \mathbb{R}$$

Observemos que el dominio de  $f$  se trata de una banda vertical.

Las ecuaciones lineales pueden clasificarse en dos tipos:

- Si  $b(t) = 0 \forall t \in J$ , entonces estamos ante una ecuación lineal homogénea<sup>11</sup>.
- Si  $b$  no es la función constantemente igual a cero, decimos que es una ecuación lineal completa.

*Observación.* Observemos que  $x' = \frac{x}{t}$  es de variables separadas, homogénea, reducible a homogénea y lineal homogénea.

<sup>11</sup>no tiene nada que ver con las ecuaciones homogéneas



### 1.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas

Como hemos comentado antes, se tratan de ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x$$

para  $a : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un intervalo abierto  $J$ . Este tipo de ecuaciones sabemos ya resolverlas, pues son ecuaciones de variables separadas:

$$x' = p(t)q(x)$$

Para las funciones  $p : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) & t \in J \\ q(x) &= x & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como  $q(x) = 0 \iff x = 0$ , tenemos que sólo hay una solución constante:

$$x(t) = 0 \quad t \in J$$

Para sacar el resto, hacemos separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x \\ \int \frac{dx}{x} dx &= \int a(t) dt \end{aligned}$$

Y dependerá de que  $x$  sea positivo o negativo para calcular la primera integral:

$$\int \frac{dx}{x} dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y notando por:

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

para cierto  $t_0 \in I$ , tenemos que:

- Suponiendo que  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \ln x &= A(t) + c \\ x(t) &= e^c e^{A(t)} \quad t \in J \end{aligned}$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}^+, \quad t \in J$$

- Suponiendo que  $x < 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(-x) &= A(t) + c \\ x(t) &= -e^c e^{A(t)} \quad t \in J \end{aligned}$$

Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}^-, \quad t \in J$$

En definitiva, dada una ecuación de la forma

$$x' = a(t)x \quad t \in J$$

Entonces, sus soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds \quad t \in J$$

para cierto  $t_0 \in J$ .

**Ejemplo.** Resolvamos

$$x' = \frac{x}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Trabajaremos por tanto en el semiplano en el que  $t < 0$ .

En este caso, tenemos  $a(t) = \frac{1}{t}$ , por lo que:

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{s} \, ds = \ln(-t)$$

para cierto  $t_0 \in \mathbb{R}^-$ . Las soluciones de dicha ecuación serán:

$$x(t) = k \cdot e^{\ln(-t)} = -k \cdot t \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

### 1.5.2. Ecuaciones lineales completas

Son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.8}$$

para ciertas funciones  $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $J$  un intervalo abierto de forma que la función  $b$  no es constantemente igual a 0. Notaremos a su dominio  $D = J \times \mathbb{R}$ .

Resolveremos este tipo de ecuaciones mediante un cambio de variable, el cual pasamos a buscar. Dada una función  $l : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $l(t) \neq 0 \, \forall t \in J$  y  $l \in C^1(J)$ , definimos el cambio de variable:

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= l(t)x \end{cases}$$

Que tenemos que ver que es admisible:

- $\varphi$  es de clase  $C^1(D)$ , ya que sus componentes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son de clase  $C^1(D)$  ( $\varphi_2$  es producto de funciones de clase  $C^1(D)$ ).
- Despejando las variables  $t$  y  $x$  (gracias a que  $l(t) \neq 0 \, \forall t \in J$ ), podemos dar una inversa  $\psi$  de  $\varphi$ , por lo que es biyectiva:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \frac{y}{l(s)} \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\psi$  es inversa de  $\varphi$ .

- Observando las componentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , vemos que estas son de clase  $C^1$ , luego  $\psi$  es de clase  $C^1$ . Tenemos ya probado que  $\varphi$  es un difeomorfismo.
- Por ser  $s = t$ , tenemos garantizada la condición de admisibilidad, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = 1 + 0 \neq 0 \quad \forall t \in J$$

- Finalmente, observemos que si  $(t, x) \in D$ , entonces  $\varphi(t, x) \in D$ , por lo que  $\varphi(D) = D$ :

$$\varphi(t, x) = (t, l(t)x) \in J \times \mathbb{R} = D$$

A continuación, aplicaremos dicha familia de cambios de variable (ya que por cada función  $l$  tenemos un cambio de variable distinto) a la ecuación 1.8:

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= lx \end{cases}$$

entendiendo que todo son funciones dependientes de  $t$ :

$$y' = l'x + lx' = l'x + l(ax + b)$$

sustituimos  $x$  por  $\frac{y}{l}$ :

$$y' = \frac{l'}{l}y + l \left( a\frac{y}{l} + b \right)$$

Y obtenemos otra ecuación diferencial lineal:

$$y' = \left( \frac{l'}{l} + a \right) y + bl$$

Sin embargo, podemos convertirlo en un cálculo de primitivas, buscando que:

$$\frac{l'}{l} + a = 0$$

Que podemos pensarlo como una ecuación diferencial para  $l$ :

$$l' = -a(t)l$$

Que es una ecuación lineal homogénea, cuyas soluciones sabemos ya que son de la forma:

$$l(t) = k \cdot e^{-A(t)} \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

Escogemos la solución  $l(t) = e^{-A(t)}$ .

Por tanto, el resultado tras aplicar el cambio de variable con la función  $l$  ahora conocida resulta en la ecuación diferencial

$$y' = b(t)l(t)$$

que la resolvemos mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_{t_0}^t b(s)l(s) ds + k$$

con nuestra función  $l$ :

$$y(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds + k$$

Una vez obtenida  $y$ , sacamos las soluciones de las ecuaciones lineales completas, deshaciendo el cambio de variable  $x = \frac{y}{l}$ :

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds$$

**Ejemplo.** Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x}{t} + 1$$

con  $t < 0$ .

Hacemos el cambio  $y = l(t)x$ , luego:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \frac{l'}{l}y + l\left(\frac{y/l}{t} + 1\right)$$

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + l$$

Buscamos una solución que cumpla:

$$\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$$

Es decir:

$$l' = -\frac{l}{t}$$

No nos hacen falta todas las soluciones, simplemente una. Cogemos:

$$l(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

tenemos que  $l(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}^-$ .

Por tanto, tenemos:

$$y' = l(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y(t) = k - \ln(-t) \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Luego:

$$x(t) = -t \cdot (k - \ln(-t)) \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

## 1.6. Ecuación de Riccati

Podemos entender la ecuación lineal como una ecuación diferencial que simula ser un polinomio de primer grado. Riccati intentó solucionar aquella ecuación diferencial que simula ser un polinomio de segundo grado:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (1.9)$$

para ciertas  $a, b, c : J \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas definidas en un intervalo abierto  $J$ .

La ecuación diferencial estará, por tanto, definida en un conjunto abierto y conexo  $D = J \times \mathbb{R}$  y vendrá dada por la función

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \end{aligned}$$

A diferencia de la ecuación lineal, la ecuación de Riccati no puede resolverse a no ser que se conozca de antemano una solución de la misma<sup>12</sup>. En dicho caso, podremos hallar todas las demás soluciones.

Suponemos, por tanto, que conocemos una solución  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (1.9) en forma explícita definida en cierto intervalo abierto  $I \subseteq J$  (ya que la solución no tiene por qué estar definida en todo el intervalo  $J$ ).

Conocida dicha función  $\phi$ , trataremos de resolverla aplicando el siguiente cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{1}{x - \phi(t)} \end{cases}$$

Por tanto, de nuestro dominio  $D$  tendremos que quitar la recta  $x - \phi(x) = 0$ , para que podamos considerar dicho cambio de variable. Para garantizar que el nuevo dominio a considerar siga siendo un conjunto conexo, tenemos dos posibles dominios a elegir:

$$\begin{aligned} D_+ &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x > \phi(t)\} \\ D_- &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x < \phi(t)\} \end{aligned}$$

Se verifica que si tenemos una solución de (1.9), entonces esta estará definida bien en  $D_+$  o bien en  $D_-$ , por lo que no perdemos (o partimos en dos) ninguna solución de la ecuación diferencial, salvo la solución  $x = \phi(t)$ , que no está presente en ninguno de los dos dominios.

La situación es la que representamos en la Figura 1.7.

---

<sup>12</sup>O que pueda obtenerse una a simple vista, por la sencillez de la ecuación.

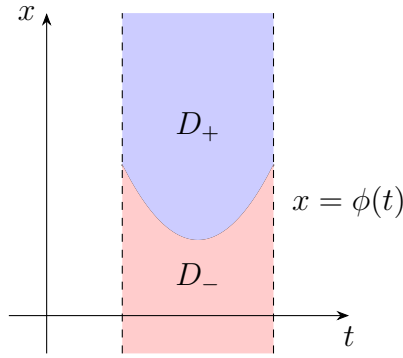


Figura 1.7: Componentes conexas de  $I \times \mathbb{R}$  divididas por  $x = \phi(t)$ .

Veamos qué codominio tiene el cambio  $\varphi$ :

- Si nos encontramos en el dominio  $D_+$ , tenemos que  $x > \phi(t)$ , luego:

$$x - \phi(t) > 0 \implies \frac{1}{x - \phi(t)} > 0$$

Y como  $t$  no varía, su codominio será  $\mathcal{D}_+ = I \times \mathbb{R}^+$ .

- Si nos encontramos en el dominio  $D_-$ , tenemos que  $x < \phi(t)$ , luego:

$$x - \phi(t) < 0 \implies \frac{1}{x - \phi(t)} < 0$$

Y como  $t$  no varía, su codominio será  $\mathcal{D}_- = I \times \mathbb{R}^-$ .

- Finalmente, de forma intuitiva podemos decir que la curva  $x = \phi(t)$  se va a infinito y que el infinito del dominio  $D$  se va a la recta  $y = 0$  tras el cambio.

Por tanto, el codominio del cambio de variable será el representado en la Figura 1.8.

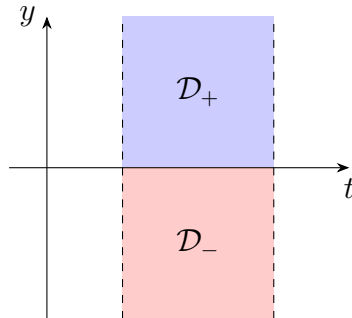


Figura 1.8: Componentes conexas de  $I \times \mathbb{R}$  divididas por  $y = 0$ .

Finalmente, veamos que  $\varphi$  es un cambio de variable admisible para la ecuación (1.9):

- En primer lugar, veamos que es un difeomorfismo. Si miramos sus componentes:

$$\varphi(t, x) = \left( t, \frac{1}{x - \phi(t)} \right) = (s, y)$$

Como  $\phi$  era solución de la ecuación diferencial, entonces es de clase  $C^1$ . Por tanto, las dos componentes de  $\varphi$  son de clase  $C^1$ , luego  $\varphi$  es de clase  $C^1$ .

- Buscamos ahora la inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \frac{1}{y} + \phi(t) \end{cases}$$

Con lo que tenemos la función

$$\psi(s, y) = \left( s, \frac{1}{y} + \phi(s) \right)$$

Que también es de clase  $C^1$ .

- Finalmente, como  $s = t$ , el cambio es admisible.

Buscamos ahora expresar la ecuación diferencial tras realizar el cambio de variable. En lugar de derivar en la expresión de  $y$  en la fórmula de  $\varphi$ , preferimos derivar  $x$  en la fórmula de  $\psi$  para no tener que derivar un cociente:

$$x = \frac{1}{y} + \phi$$

Pensando que tanto  $x$ ,  $y$  y  $\phi$  son funciones dependientes de  $t$ :

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' \quad (1.10)$$

Por otra parte, sustituyendo  $x$  en la ecuación (1.9), tenemos que:

$$\begin{aligned} x' &= ax^2 + bx + c = a\left(\frac{1}{y} + \phi\right)^2 + b\left(\frac{1}{y} + \phi\right) + c \\ &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned}$$

Y como  $\phi$  era solución de la ecuación (1.9):

$$\phi' = a\phi^2 + b\phi + c$$

Sustituyendo en (1.10):

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' = \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c$$

En definitiva:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c \\ x' &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned} \right\} \implies \frac{-y'}{y^2} = \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + \frac{b}{y}$$

Y multiplicando por  $y^2$ , llegamos a que:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Que es una ecuación lineal, la cual pasaremos a resolver tanto en  $\mathcal{D}_+$  como en  $\mathcal{D}_-$ . Puede pasar por tanto, que alguna solución corte  $y = 0$ , por lo que tengamos que tratarla como dos soluciones, una de una ecuación diferencial y otra de la otra.

Además, tendremos que agregar al conjunto final de soluciones la solución inicial  $x = \phi(t)$ , la cual despreciamos al realizar el cambio de variable.

En resumen, dada una ecuación de Riccati de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Conocida una solución  $x = \phi(t)$ , podemos aplicar el cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= \frac{1}{x - \phi(t)} \end{cases}$$

Para llegar a una ecuación lineal, que tendrá la forma:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

**Ejemplo.** Veamos un ejemplo de resolución de una ecuación Riccati (posiblemente una de las más sencillas de resolver), aunque se trate también de una ecuación de variables separadas.

$$x' = x^2$$

Tenemos por tanto que el dominio en el que está definida es  $D = \mathbb{R}^2$ .

A simple vista, observamos que una solución particular es  $x(t) = 0$ . Se deja como ejercicio tratar de resolver la ecuación con dicha solución inicial.

En este ejemplo, tomaremos como solución la función  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(t) = \frac{-1}{t} \quad t \in I$$

Para el intervalo  $I = \mathbb{R}^-$  (también lo podríamos haber hecho en  $\mathbb{R}^+$ ). Teníamos por tanto que la variable  $t$  se movía en  $J = \mathbb{R}$  y ahora se mueve en  $I = \mathbb{R}^-$ .

Trabajaremos ahora en los dominios:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x > \frac{-1}{t} \right\}$$

$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x < \frac{-1}{t} \right\}$$

El cambio de variable escogido es, por tanto:

$$y = \frac{1}{x - \phi(t)} = \frac{1}{x + \frac{1}{t}}$$



que también lo podemos escribir como:

$$x = \frac{1}{y} + \phi(t) = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \quad (1.11)$$

Esta función  $\varphi$  nos transforma ambos dominios en:

$$\begin{aligned} \varphi(D_+) &= \mathcal{D}_+ = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ \varphi(D_-) &= \mathcal{D}_- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

Derivamos la ecuación (1.11) pensando que tanto  $x$  como  $y$  dependen de  $t$ :

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{t^2}$$

Como inicialmente teníamos:

$$x' = x^2 = \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \right)^2 = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty} + \frac{1}{t^2}$$

Llegamos a que:

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty}$$

Multiplicamos por  $y^2$  y:

$$y' = \frac{2}{t}y - 1$$

Llegamos a una ecuación lineal que pasamos a resolver, mediante otro cambio de variable:

$$z = l(t)y$$

que también podemos escribir por comodidad como

$$l(t)z = y$$

para distinta función<sup>13</sup>  $l$ . Derivamos:

$$\begin{aligned} y' &= l'z + lz' \\ y' &= \frac{2}{t}lz - 1 \end{aligned}$$

Y tenemos

$$lz' = y' - l'z = \frac{2}{t}lz - 1 - l'z = \left( \frac{2l}{t} - l' \right) z - 1$$

Buscamos que el paréntesis sea 0:

$$l' = \frac{2l}{t}$$

Y cogemos como solución:

$$l(t) \stackrel{(*)}{=} e^{2\ln(-t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2 \quad t \in \mathbb{R}^-$$

---

<sup>13</sup>A partir del cambio anterior, estamos trabajando con  $\frac{1}{l(t)}$ .

Teniendo en cuenta que en  $(*)$  debemos considerar que  $t < \mathbb{R}^-$ . Luego:

$$lz' = t^2 z' = -1 \implies z' = \frac{-1}{t^2}$$

Luego tenemos como soluciones:

$$z(t) = \frac{1}{t} + k \quad k \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Deshaciendo un cambio de variable  $y = lz = t^2 z$ :

$$y(t) = t + kt^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

Para  $k = 1$  por ejemplo, sucede que tenemos la mitad de la solución en  $\mathcal{D}_+$  y la otra mitad en  $\mathcal{D}_-$ .

Deshacemos ahora el otro cambio,  $x = \frac{1}{y} + \phi$ :

$$x(t) = \frac{1}{t + kt^2} - \frac{1}{t} \quad k \in \mathbb{R}$$

Y habría que ver dónde están definidas las soluciones. Además, tenemos que añadir la solución de partida:

$$x(t) = \phi(t) = \frac{-1}{t} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Al conjunto de posibles soluciones.

## 1.7. Relación con Teoría de Grupos

Como introducción a esta sección, recordamos primero la definición de grupo.

**Definición 1.4** (Grupo). Sea  $A$  un conjunto no vacío con una operación binaria interna<sup>14</sup> de la forma

$$*: A \times A \rightarrow A$$

Es un grupo si se verifica que:

(1)  $*$  es asociativa:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$$

(2) Existencia de un elemento neutro para  $*$ :

$$\exists e \in A \mid a * e = e * a = a \quad \forall a \in A$$

(3) Existencia de opuestos para  $*$ :

$$\forall a \in A \quad \exists b \in A \mid a * b = b * a = e$$

Al opuesto de  $a$  lo denotaremos por  $a^{-1}$ .

---

<sup>14</sup>Esto es, que el resultado de operar con dos elementos de  $A$  vuelve a ser un elemento de  $A$ .

**Definición 1.5.** Diremos que  $G \subseteq \mathcal{G}$  es un subgrupo de un grupo  $\mathcal{G}$  si  $G$  es un grupo con la operación interna de  $\mathcal{G}$  inducida a  $G$ .

Además, en Álgebra I se probó la siguiente caracterización de subgrupo:

**Proposición 1.5.** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo y  $G \subseteq \mathcal{G}$ . Entonces,  $G$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$  si y solo si:

1.  $G$  es cerrado para la operación interna de  $\mathcal{G}$ .
2.  $g \in G \implies g^{-1} \in G$ .

Hay una teoría matemática que trata de dar sentido a que ciertos cambios de variable funcionan para ciertos “tipos” de ecuaciones diferenciales y que otros cambios de variable funcionan para otros tipos de ecuaciones diferenciales.

En álgebra, hay una teoría que relaciona las ecuaciones polinómicas con un grupo. *Sophus Lie* trató de hacer lo mismo para las ecuaciones diferenciales, tratar de relacionarlas con un grupo para poder explicar qué cambio de variable hay que hacer para resolver una ecuación en cada caso. De esta forma, conectaría la Teoría de grupos con la solubilidad de las ecuaciones diferenciales.

Geométricamente, podemos decir que los grupos tienen la misión de detectar simetrías. Si tenemos por ejemplo un cuadrado con vértices numerados del 1 al 4 y lo rotamos  $45^\circ$  sobre el centro, obtenemos otro cuadrado distinto. Si por contrario lo rotamos  $90^\circ$ , tenemos el mismo cuadrado pero con distinta numeración en los vértices.

Hay una serie de rotaciones especiales que hace que el cuadrado sea invariante. El conjunto de rotaciones que deja invariante un cuadrado (esto es, el conjunto formado por las rotaciones de 0, 90, 180 y 270 grados) forma un grupo. Podemos pensar en él como en el conjunto  $\{1, -1, i, -i\}$ , que efectivamente es un grupo<sup>15</sup>.

Resulta que cada figura simétrica tiene un grupo cíclico asociado que las dejan invariantes, llamado grupo de simetrías.

Podemos hacer una analogía entre las figuras con las rotaciones y las ecuaciones diferenciales con los cambios de variable. De esta forma, buscamos los cambios de variable que nos dejan las ecuaciones diferenciales invariantes. Esto es, que tanto el dominio como la expresión de la ecuación diferencial sea la misma, aunque pueda pasar que una solución vaya en otra distinta tras aplicar el cambio de variable, al igual que sucedía con la numeración de los vértices de nuestro cuadrado.

La idea es, que dada una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x) \tag{1.12}$$

definida en un dominio  $D$  dentro del plano, buscaremos un cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

<sup>15</sup>Para la operación interna de multiplicación en  $\mathbb{C}$ , con neutro 1.

que nos lleve  $D$  en él mismo y que tras hacer el cambio obtengamos que:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) = f(s, y) \quad \forall (s, y) \in D$$

En este caso, diremos que (1.12) es invariante por  $\varphi$ .

Notemos que para  $\varphi = Id_D$ , esto se cumple para cualquier ecuación diferencial.

**Ejemplo.** Con este ejemplo, tratamos de mostrar que existen cambios de variable admisibles para una ecuación diferencial distintos de  $Id_{\mathbb{R}^2}$  que dejan la ecuación diferencial invariante. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{3x^2 + 1}$$

Definida en  $D = \mathbb{R}^2$ . Le haremos el siguiente cambio de variable y veremos que dicho cambio deja la ecuación invariante.

$$\varphi : \begin{cases} s &= -t \\ y^3 + y &= x^3 + x + 8 \end{cases}$$

Supondremos por ahora que  $\varphi$  está bien definida (no sabemos por ahora si la segunda ecuación nos da una función implícita  $y = y(x)$ ), para ver que el cambio deja invariante la ecuación y luego veremos que es un cambio de variable bien definido y admisible para la misma.

Apliquemos el cambio de variable para ver qué ecuación obtenemos al final:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt}$$

Derivamos de forma implícita:

$$\begin{aligned} 3y^2 y' + y' &= 3x^2 x' + x' \\ (3y^2 + 1)y' &= (3x^2 + 1)x' = \frac{(3x^2 + 1)t}{3x^2 + 1} = t \end{aligned}$$

Luego:

$$y' = \frac{t}{3y^2 + 1}$$

por lo que:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{3y^2 + 1} = \frac{s}{3y^2 + 1}$$

Luego tenemos como nueva ecuación:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{3y^2 + 1} = \hat{f}(s, y) = f(s, y)$$

Falta ahora ver que la ecuación anterior nos da un cambio de variable admisible:

1. Veamos primero que las ecuaciones

$$\varphi : \begin{cases} s &= -t \\ y^3 + y &= x^3 + x + 8 \end{cases}$$

Definen un cambio de variable admisible. Suponiendo que no nos sabemos las fórmulas de Cardano Vieta<sup>16</sup>, definimos una función:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \xi^3 + \xi \end{aligned}$$

con

$$\sigma'(\xi) = 3\xi^2 + 1 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Por lo que es estrictamente creciente, luego inyectiva.

Notemos además que es sobreyectiva, ya que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \sigma(\xi) = \pm\infty$$

Y como  $\sigma$  es una función continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que tiene que tomar todos los valores, luego  $\sigma$  es sobreyectiva. En definitiva,  $\sigma$  es biyectiva y además tiene inversa, la cual es derivable, gracias al Teorema de la Función Inversa, por ser  $\sigma'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ .

Resulta por tanto que  $\sigma$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}$ .

Pensamos ahora en las ecuaciones como en:

$$\sigma(y) = \sigma(x) + 8$$

Y como es un difeomorfismo, podemos tomar la inversa:

$$y = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8)$$

Luego efectivamente, la fórmula anterior nos define  $y$  como función implícita, en función de  $x$ . Podemos ya escribir:

$$\varphi(t, x) = (s, y)$$

donde:

$$\begin{cases} s &= \varphi_1(t, x) = -t \\ y &= \varphi_2(t, x) = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8) \end{cases}$$

Con lo que la función  $\varphi$  está bien definida.

2. Además, vemos que  $\varphi$  es de clase  $C^1$ , por serlo sus componentes.

---

<sup>16</sup>Las que dan las raíces de los polinomios cúbicos..

3. Vemos que  $\varphi$  tiene inversa:

$$\psi : \begin{cases} t &= \psi_1(s, y) = -s \\ x &= \psi_2(s, y) = \sigma^{-1}(\sigma(y) - 8) \end{cases}$$

Y que además  $\psi$  es de clase  $C^1$ , luego tenemos que  $\varphi$  era, efectivamente, un difeomorfismo.

4. Finalmente, vemos que es un cambio de variable admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x) = -1 + 0 \neq 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, hemos visto ya un ejemplo de un difeomorfismo distinto de la identidad que deja una ecuación diferencial invariante.

**Proposición 1.6.** *Sea  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  el conjunto de todos los difeomorfismos en el plano:*

$$\text{Diff}(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ difeomorfismo}\}$$

$\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo con la operación de composición de funciones  $\circ$ .

*Demostración.*

1. En primer lugar, para ver que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  sea un grupo, buscamos primero demostrar que la composición de funciones es cerrada para  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, que la composición de cualesquiera dos difeomorfismos es un difeomorfismo.

Sean  $\Phi, \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , buscamos ver que  $\phi = \Phi \circ \varphi$  es un difeomorfismo.

- La composición de funciones de clase  $C^1$  es de clase  $C^1$ , luego  $\phi$  es de clase  $C^1$ .
- La composición de funciones biyectivas resulta en una función biyectiva, luego  $\phi$  es biyectiva.
- Se verifica que<sup>17</sup>:

$$\phi^{-1} = (\Phi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

Y tanto  $\varphi^{-1}$  como  $\Phi^{-1}$  son de clase  $C^1$  por ser ambos difeomorfismos, luego  $\phi^{-1}$  es de clase  $C^1$ .

Finalmente, llegamos a que:

$$\Phi, \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2) \implies \Phi \circ \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$$

2. Además, tenemos que ver que se cumplen las tres propiedades de la definición de grupo:

(1) La composición de funciones es asociativa<sup>18</sup>.

---

<sup>17</sup>Visto en Álgebra I.

<sup>18</sup>Visto en Álgebra I.

- (2) Tiene un elemento neutro,  $Id_{\mathbb{R}^2} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .  
 (3) Para cada  $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , tenemos  $\varphi^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , con lo que:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Concluimos por tanto que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es un grupo con la operación  $\circ$ .  $\square$

Tenemos que  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$  es el grupo de todos los cambios de variable que existen en el plano.

A continuación, vamos a introducir tres grupos relevantes: el grupo de las traslaciones, el grupo de las homotecias y el grupo de las rotaciones. Para un conocimiento más en profundidad de los resultados aquí descritos, se insta al lector que acuda a los apuntes de Geometría III.

### Grupo de traslaciones

Dado  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = (v_1, v_2)$  un vector del plano, podemos definir el cambio

$$\varphi : \begin{cases} s &= t + v_1 \\ y &= x + v_2 \end{cases}$$

Resultado de trasladar cualquier punto del plano  $(t, x)$  por el vector  $v$ . Su inversa será

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} t &= s - v_1 \\ x &= y - v_2 \end{cases}$$

Que es la traslación según el vector  $-v$ .

**Proposición 1.7.** *Fijado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos la traslación según el vector  $\lambda v = \lambda(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ :*

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= t + \lambda v_1 \\ y &= x + \lambda v_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

*Variando  $\lambda$ , consideramos ahora la familia uniparamétrica de traslaciones  $G$ :*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

*Entonces,  $G$  es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .*

*Demostración.* Por una parte, tenemos que  $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ , ya que todas las traslaciones son difeomorfismos.

1. En primer lugar, observemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda+\mu}(t, x) &= (t + (\lambda + \mu)v_1, x + (\lambda + \mu)v_2) = ((t + \lambda v_1) + \mu v_1, (x + \lambda v_2) + \mu v_2) \\ &= \varphi_\mu(t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) = \varphi_\mu(\varphi_\lambda(t, x)) \end{aligned}$$

Por lo que  $\varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda$ . De esta forma, dadas dos traslaciones cualesquiera, su composición es una traslación, por lo que tenemos la primera propiedad.

2. Dado  $\varphi_\lambda$ , tenemos que  $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{-\lambda}$ , que también es una traslación.

Luego  $G$  es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

### Grupo de homotecias

Una homotecia de razón  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  es de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_\lambda : \begin{cases} s &= \lambda t \\ y &= \lambda x \end{cases} &\quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Que tiene por inversa

$$\varphi_\lambda^{-1} : \begin{cases} t &= \frac{t}{\lambda} \\ x &= \frac{y}{\lambda} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

**Proposición 1.8.** *La familia uniparamétrica de homotecias es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ :*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda > 0\}$$

*Demostración.* Para ello, primero vemos que

$$\varphi_{\lambda \cdot \mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$$

- De esta forma, la composición de dos homotecias es una homotecia.
- Además,  $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$ ,  $\forall \varphi \in G$ .

□

### Grupo de rotaciones

Sea la matriz de la rotación de un ángulo  $\theta$ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si le damos el valor  $\theta = \pi/2$ , vemos que es la matriz de la función lineal que nos da la rotación en sentido antihorario:

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el vector  $e_1 = (1, 0)$  lo lleva en  $e_2 = (0, 1)$  y el vector  $e_2$  lo lleva en  $-e_1$ .

**Proposición 1.9.** *La familia uniparamétrica de rotaciones es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ . Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ :*

$$G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

*Demostración.* Se comprueba viendo primero que

$$R_{\theta+\Theta} = R_\theta \circ R_\Theta$$

- De esta forma, la composición de dos giros es un giro.
- Además,  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ ,  $\forall R_\theta \in G$ .

□

Aunque hay otros grupos uniparamétricos, estos son los más simples.



### 1.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales

Tomamos  $v = (1, 0)$ , luego trabajaremos con el grupo uniparamétrico de cambios de variable:

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= t + \lambda \\ y &= x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Partimos de una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

Para una cierta función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Le aplicamos el cambio y llegaremos a una nueva ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s, y)$$

Y lo que buscamos es que

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

con el fin de dejar la ecuación diferencial invariante para dicho cambio de variable.

La primera observación es que  $\varphi_\lambda$  es siempre admisible para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Que en las nuevas variables queda como:

$$\frac{dy}{ds} = f(s - \lambda, y)$$

Ahora, buscamos que la ecuación sea invariante por todos los cambios de variable:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s - \lambda, y) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

De esta forma, tenemos una función  $f$  en dos variables que toma los mismos valores en todas las líneas horizontales, luego  $f$  sólo depende de  $y$ , con lo que la ecuación en función de las variables  $t$  y  $x$  sólo depende de  $x$ .

**Ejemplo.** Por ejemplo, la ecuación

$$x' = \sin x$$

es invariante por traslaciones horizontales, ya que  $f$  sólo depende de  $x$ :

$$y' = \sin y$$

**Ejemplo.** Si por contrario tomamos la ecuación

$$x' = \sin(t + x)$$

Y hacemos el mismo cambio:

$$y' = \sin(s + y - \lambda)$$

*Observación.* Las ecuaciones diferenciales que son invariantes por el grupo de traslaciones verticales son aquellas que sólo dependen de  $t$  (por un razonamiento similar). Es decir, las ecuaciones diferenciales que se resuelven mediante cálculo de primitivas.

### 1.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias

Trabajamos ahora con el grupo uniparamétrico de cambios

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= \lambda t \\ y &= \lambda x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

Que también resulta ser un cambio de variable admisible,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Dada una ecuación diferencial cualquiera:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua, podemos aplicar el cambio de variable:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\lambda x'}{\lambda} = x' = f(t, x)$$

Cambiando ahora las variables por las nuevas:

$$\frac{dy}{ds} = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

Ahora, busquemos que la solución sea invariante por todos los infinitos cambios de variable, es decir:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = f(s, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que esto lo cumplen todas las funciones homogéneas de grado 0:

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^r P(t, x) = P(t, x) \quad r = 0$$

Geométricamente, son las funciones que sólo dependen de la pendiente de un punto, luego son las funciones constantes en las rectas que pasan por el origen.

*Observación.* Notemos que las ecuaciones diferenciales homogéneas son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Por lo que la  $f$  de esta ecuación diferencial es una función homogénea, luego es invariante por homotecias.

**Ejercicio.** Encontrar la clase de ecuaciones diferenciales que son invariantes por rotaciones.

Como resumen de esta sección, podemos decir que encontrar un cambio de variable que deja una ecuación diferencial invariante es equivalente a resolverla.