Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/~rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Condición de exactitud y factores integrantes

Una vez estudiados los principales cambios de variable para resolver ecuaciones diferenciales, cambiamos ahora la forma en la que las resolveremos, procedimiento que describiremos y desarrollaremos a lo largo de este Capítulo.

Notación. Volveremos nuevamente a la notación geométrica, donde notaremos por x a la variable independiente y por $y = y(x)$ a la función incógnita.

Ahora, no estaremos interesados en buscar ecuaciones diferenciales en forma normal, sino que buscaremos ecuaciones de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{1.1}$$

Y lo que haremos ahora para resolverla será buscar diferenciales exactas, es decir, buscar una función U de forma que la expresión (**??**) se reescriba como

$$\frac{d}{dx}[U(x, y)] = 0$$

De forma que, bajo unas ciertas condiciones, tendremos que $U(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ con lo que tendremos una solución $y = y(x)$ expresada en forma implícita gracias a la función U.

Ejemplo. Motivaremos lo anteriormente descrito con este ejemplo, en el que trataremos de resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \tag{1.2}$$

buscando para ello una función que al derivarla respecto a x nos de la expresión que tenemos.

Lo primero para ello será reescribir la ecuación (**??**) para que sea de la forma (**??**). Para ello, es suficiente con desplazar todos los términos a la izquierda de la igualdad, obteniendo

$$x - y + (x + y)y' = 0 \tag{1.3}$$

Por lo que en este caso, tenemos las funciones

$$P(x, y) = x - y \qquad Q(x, y) = x + y$$

Reescribiendo la ecuación (**??**) con el objetivo de buscar un diferencial exacto, llegamos a la expresión

$$x + yy' - y + xy' = 0$$

donde observamos que la parte de la izquierda de la resta podemos verla como:

$$x + yy' = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0$$

Si también pudiéramos hacerlo también en la derecha (algo que a priori parece más difícil), llegaríamos a una expresión de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - \frac{d}{dx}[H(x,y)] = 0$$

Veremos próximamente que esto es imposible de hacer en este caso.

Sin embargo, existe un truco que sí nos permite resolver la ecuación (**??**), se basa en dividir la expresión entre $x^2 + y^2$ (algo que por ahora parece una idea feliz, pero que cobrará sentido a lo largo del Capítulo, algo que llamaremos *factor integrante*):

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} + \frac{x+y}{x^2+y^2}y' = 0$$

Vamos a reorganizar los términos cuidadosamente, para buscar un diferencial exacto:

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} + \frac{-y+xy'}{x^2+y^2} = 0$$

Es difícil hallar un diferencial exacto a partir de una expresión, pero es fácil comprobar que algo lo sea. Proponemos la siguiente expresión como diferencial exacto y comprobaremos que funciona, por tener por ahora poco manejo en este procedimiento (aunque el término de la izquierda no es difícil de averiguar). Proponemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

Es sencillo comprobar que el término de la izquierda se corresponde con lo que queríamos hacer, comprobémoslo ahora en la derecha:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

Finalmente, vemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

gracias a la linealidad de la derivada, y por ser la función[1]

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

de clase C^1, concluimos finalmente que

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

[1]En este ejemplo no nos preocupamos por su intervalo de definición, ya que solo queremos mostrar el procedimiento que realizaremos a partir de ahora para resolver las ecuaciones diferenciales.

Una vez explicada de forma breve lo que haremos y motivada con el ejemplo anterior, pasaremos ahora al desarrollo teórico de este procedimiento, el cual se divide en dos:

- En primer lugar, estudiar una condición necesaria y suficiente para tener la condición de exactitud (esto es, poder encontrar un diferencial exacto) que nos permita obtener la función U anteriormente mencionada.
- En caso de que no podemos hacerlo, buscar algo por lo que multiplicar la ecuación original (un factor integrante) para que sí podamos hacerlo, tal y como hicimos en el ejemplo con $x^2 + y^2$.

Exigiremos varias hipótesis sobres las funciones P y Q de la expresión (**??**) (y sobre otros elementos relacionados con la ecuación diferencial) con el fin de obtener el resultado buscado.

1.1. Condición de exactitud

En todo lo que sigue, trabajaremos en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y con dos funciones[2] $P, Q \in C^1(\Omega)$.

Si existe $U \in C^1(\Omega)$ una función de dos variables de forma que la ecuación (**??**) se transforme en una de la forma:

$$\frac{d}{dx}(U(x,y)) = 0$$

Derivando de forma implícita:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)y' = 0$$

Por tanto, lo que buscamos es una función U que cumpla:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Veremos a continuación que esto no es posible en general (sin exigir más condiciones). Es decir, no tiene por qué existir una funcion U de forma que sus dos parciales sean las funciones P y Q dadas. Para ello, recuperaremos el ejemplo anterior, introduciendo antes un teorema importante en esta sección[3].

Teorema 1.1 (de Clairaut). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si $f \in C^2(\Omega)$, entonces las derivadas cruzadas de f son iguales, es decir:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

[2]Notemos que en el ejemplo anterior, P y Q eran polinomios, por lo que cumplian esta condición.

[3]Se trata de un Teorema que se debería haber visto anteriormente, pero que no se ha hecho por la planificación del doble grado.

Demostración. Supuesto que $(0,0) \in \Omega$, por ser Ω abierto, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0,0) \in [0,h] \times [0,h] \subseteq \Omega$$

Sea $A = \{h \in \mathbb{R} \mid [0,h] \times [0,h] \subseteq \Omega\}$. Definimos $\Delta : A \to \mathbb{R}$ una función dada por

$$\Delta(h) = f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) \qquad h \in A$$

la demostración se basa en ver cómo es la función Δ:

Por una parte, fijado un $h \in A$, podemos definir la función $G_h : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$G_h(x) = f(x,h) - f(x,0) \qquad x \in A$$

Vemos fácilmente que $G_h \in C^2(A)$ $\forall h \in A$ por serlo f, con

$$G_h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \qquad \forall x \in A$$

Podemos ahora usar G_h para ver el comportamiento de Δ:

$$\Delta(h) = G_h(h) - G_h(0) \qquad \forall h \in A$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio, obtenemos un $\xi_h \in]0,h[$ tal que

$$\Delta(h) = G_h(h) - G_h(0) = hG_h'(\xi_h) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,0)\right] \qquad \forall h \in A$$

Como $f \in C^2(A)$, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función de clase $C^1(A)$. Podemos ahora volver a aplicar el Teorema del Valor Medio en este último término, sobre la función resultado de la composición

$$h \longmapsto (\xi_h, h) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h, h)$$

Que es de clase $C^1(A)$ por serlo $\frac{\partial f}{\partial x}$. De esta forma, obtenemos un $\eta_h \in]0,h[$ tal que

$$\Delta(h) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,0)\right] = h^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_h,\eta_h)\right] \qquad \forall h \in A$$

Buscamos ahora calcular el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Donde hemos usado la continuidad de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (por ser $f \in C^2(A)$), ya que:

$$h \to 0 \Longrightarrow (\xi_h, \eta_h) \to (0,0) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_h,\eta_h) \to \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

De forma totalmente análoga, fijado $h \in A$, podemos ahora definir la función $D_h : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$D_h(y) = f(h,y) - f(0,y) \qquad y \in A$$

Función de clase $C^2(A)$ por serlo f, con

$$D_h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \qquad y \in A$$

De forma similar a la anterior, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio dos veces en la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\Delta(h) = D_h(h) - D_h(0) = hD_h'(\xi_h) &= h\left[\frac{\partial f}{\partial y}(h,\xi_h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,\xi_h)\right] \\ &= h^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta_h,\xi_h)\right] \qquad \xi_h,\eta_h \in \left]0,h\right[\quad \forall h \in A\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Y por la unicidad del límite, concluimos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Una vez probado que las derivadas cruzadas coinciden en el origen (supuesto que $(0,0) \in \Omega$), veamos ahora que coinciden en cualquier $(x,y) \in \Omega$ (ya sin suponer necesariamente que $(0,0) \in \Omega$).

Sea pues $(x_0,y_0) \in \Omega$, consideramos la traslación $t : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$t(x,y) = (x,y) - (x_0,y_0) = (x - x_0, y - y_0) \qquad (x,y) \in \Omega$$

Es fácil ver que $t(\Omega) = \Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) + (x_0,y_0) \in \Omega\}$. Vemos también que t tiene como función inversa $t^{-1} : \Omega_0 \to \Omega$, con

$$t^{-1}(x,y) = (x,y) + (x_0,y_0) = (x + x_0, y + y_0) \qquad (x,y) \in \Omega_0$$

Definimos ahora la función $g : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = f(t^{-1}(x,y)) = f(x + x_0, y + y_0) \qquad (x,y) \in \Omega_0$$

Por ser t una traslación, se trata de una función continua, luego $t(\Omega) = \Omega_0$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Además, $t^{-1} \in C^\infty(\Omega_0)$, por lo que $g \in C^2(\Omega_0)$ por serlo también f. Finalmente:

$$(x_0,y_0) \in \Omega \Longrightarrow t(x_0,y_0) = (0,0) \in \Omega_0$$

Con lo que g cumple todas las hipótesis del Teorema recién demostrado en $(0,0)$, por lo que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Y solo faltará ver la relación entre las parciales de g y de f. En primer lugar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_2^{-1}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_2^{-1}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado que:

$$\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial t_2^{-1}}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial t_1^{-1}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial t_2^{-1}}{\partial x}(x,y) = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^{-1}(x,y))$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t^{-1}(x,y))$$

De donde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$$

Para cualquier $(x_0,y_0) \in \Omega$ arbitrario, de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

Ejemplo. Para las funciones

$$P(x,y) = x - y \qquad Q(x,y) = x + y$$

no es posible encontrar una función $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que cumpla

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. Por reducción al absurdo, suponemos que existe una función U de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = x - y \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x + y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

En dicho caso, entonces $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (de hecho, $U \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ por tratarse de polinomios). Notemos que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)) = 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por el Teorema de Clairaut, llegamos a que:

$$1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Contradicción, con lo que no existe dicha función U. □

En general, dadas dos funciones de clase C^1 no podemos encontrar una tercera función de clase C^1 de forma que sus derivadas parciales sean las dos primeras funciones. Notemos que en el caso unidimensional, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que esto sí que es cierto, cosa que no pasa en varias variables.

Buscamos ahora una condición que nos permita encontrar una función $U \in C^1(\Omega)$ de forma que podamos escribir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Para dos funciones P y Q de clase $C^1(\Omega)$. Veamos primero un resultado que nos da una condición necesaria:

Proposición 1.2 (Condición necesaria)**.** *Dadas dos funciones $P, Q \in C^1(\Omega)$, si existe una función $U \in C^1(\Omega)$ tal que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

*Entonces, se ha de cumplir la **condición de exactitud**:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. Recuperando parte de la demostración del ejemplo anterior, si existiera dicha función U, esta sería de clase $C^2(\Omega)$, luego aplicando el Teorema de Clairaut:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

□

Sin embargo, la condición de exactitud no se trata de una condición suficiente para poder encontrar dicha función U, sino que dependerá de la topología de Ω de que esto pueda hacerse o no. Para ver este resultado, es necesario introducir previamente un concepto ya visto en otras asignaturas.

Definición 1.1 (Forma de estrella)**.** Diremos que Ω tiene forma de estrella (o que es estrellado[4]) si existe $z_* \in \Omega$ tal que

$$[z, z_*] \subseteq \Omega \qquad \forall z \in \Omega$$

Es decir, que el segmento de extremos z y z_* esté contenido en Ω:

$$(1-t)z + tz_* \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1], z \in \Omega$$

Notemos que la condición de ser estrellado se trata de una condicion geométrica. Ejemplos de conjuntos estrellados son:

$$\mathbb{R}^2 \qquad [0,1] \times [0,1] \qquad \mathbb{S}^1$$

[4] Tal y como se desarrolló en los apuntes de Topología I.

Todos estos son convexos. Sin embargo, existen conjuntos con forma de estrella que no son convexos, como el conjunto de la Figura **??**.

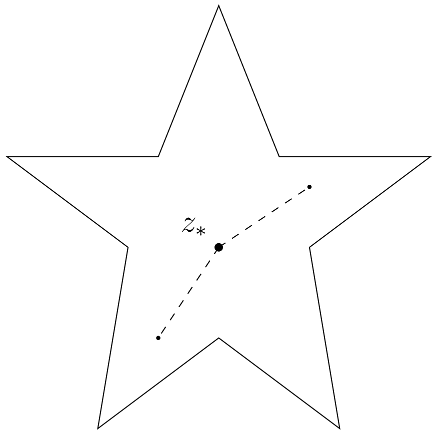

Figura 1.1: Conjunto estrellado desde z_*.

Definición 1.2 (Convexo)**.** Diremos que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es convexo si dados cualesquiera dos puntos $\alpha, \beta \in \Omega$, se tiene que

$$[\alpha, \beta] \subseteq \Omega \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega$$

Es decir, que el segmento de extremos α y β esté contenido en Ω:

$$(1-t)\alpha + t\beta \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1] \quad \alpha, \beta \in \Omega$$

De esta forma, vemos que un conjnto convexo es un conjunto estrellado desde cualquier punto, algo que se pondrá de manifiesto en la siguiente proposición. La propiedad de que un conjunto sea convexo se trata de una propiedad geométrica, concepto que ya se trató en Topología I y en Geometría III.

Proposición 1.3. *Sea Ω un conjunto convexo, entonces es estrellado.*

Demostración. Sea $z_* \in \Omega$, entonces $[z_*, \alpha] \subseteq \Omega$ $\forall \alpha \in \Omega$, por ser Ω convexo. □

Recordando la Proposición **??**, mostramos ahora el siguiente teorema, el cual nos proporciona la otra implicación que venimos buscando para tener una condición necesaria y suficiente.

Teorema 1.4. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y tiene forma de estrella, sean $P, Q \in C^1(\Omega)$ funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, existe una función $U \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

En realidad, obtenemos un teorema mucho más general exigiendo solo que Ω sea simplemente conexo[5].

Para realizar la demostración, es necesario recordar previamente un concepto ya visto en Análisis Matemático II, las integrales dependientes de un parámetro.

1.1.1. Integrales dependientes de un parámetro

Sabemos que si tenemos una función continua f definida en un intervalo I, entonces si definimos

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(\xi)\ d\xi \qquad y_0 \in I, \forall y \in I$$

Sabemos por el Teorema Fundametal del Cálculo que $F \in C^1(I)$, con $F'(y) = f(y)$.

Sin embargo, nos podemos encontrar funciones definidas por integrales de diversas formas, como una función dada por la integral de una función de dos variables integrando solo una de ellas. Sea $f : J \times I \to \mathbb{R}$ una función y $a, b \in J$, definimos $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)\ dx \qquad \forall y \in I$$

Las funciones obtenidas de esta forma decimos que son funciones obtenidas mediante integrales dependientes de un parámetro (en este caso, el parámetro es y).

Antes de ver cómo podemos derivar este tipo de funciones, pensaremos en "el caso discreto". Es decir, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ todas ellas definidas en un cierto intervalo I y dado $N \in \mathbb{N}$, podemos definir una función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \qquad \forall y \in I$$

De esta forma, sabemos ya derivar la función F:

$$\frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n(y)\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{df_n}{dy}(y)\right) \qquad \forall y \in I$$

gracias a la linealidad de la derivada. Resulta que esto se mantiene al pasar al "caso continuo", tal y como veremos en el siguiente teorema.

Veremos una versión más débil del teorema visto en Análisis Matemático II, que cuenta con las consecuencias justas para demostrar el Teorema **??**.

Teorema 1.5 (Integral dependiente de un parámetro)**.** *Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, dada una aplicación $f : G \times [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(G \times [a, b])$, definimos una función $F : G \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) = \int_{a}^{b} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d, t)\ dt$$

[5]Noción que no hemos visto todavía. Intuitivamente, un conjunto es simplemente conexo si no tiene agujeros.

Entonces, $F \in C^1(G)$ *y*

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, t)\ dt \qquad \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

Como consecuencia del teorema, la función F anteriormente definida como

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\ dx \qquad \forall y \in I$$

Si I era un intervalo abierto y f era de clase[6] $C^1([a, b] \times I)$, entonces $F \in C^1(I)$, y tenemos que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dx \qquad \forall y \in I$$

Ejemplo. Dada la función

$$F(y) = \int_0^1 e^x \operatorname{sen}(x + y^2)\ dx \qquad \forall y \in I$$

Gracias al teorema de integrales dependientes de un parámetro, sabemos que la derivada de esta función es:

$$F'(y) = \int_0^1 2ye^x \cos(x + y^2)\ dx = 2y \int_0^1 e^x \cos(x + y^2)\ dx \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Una vez terminado el repaso de integrales dependientes de un parámetro, estamos ya preparados para proceder con la demostracion del Teorema **??**, el cual volvemos a enunciar:

Teorema 1.6. *Si* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *es abierto y tiene forma de estrella, sean* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, existe una función $U \in C^2(\Omega)$ *tal que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. La demostración la haremos pensando que el punto z_* de Ω que nos da la condición de que tenga forma de estrella sea $z_* = (0, 0)$ y la demostración en el caso general se deja como ejercicio para el lector.

En dicho caso, definimos una función $U : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$U(x, y) = x \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y \int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Notemos que U está bien definida, ya que:

[6] Notemos que el teorema se anunció pensando que los parámetros de la función serían los primeros, pero ahora tenemos el parámetro al final, es una situación totalmente análoga.

- En primer lugar, como Ω tiene forma de estrella desde $z_* = (0, 0)$, entonces el segmento que une cualquier punto (x, y) con z_* estará en Ω, luego si $(x, y) \in \Omega$, entonces $(\lambda x, \lambda y) \in \Omega\ \forall \lambda \in [0, 1]$.
- Ademś, P y Q son funciones continuas, luego integrables en cualquier conjunto compacto (como lo es $[0, 1]$), luego podemos calcular dichas integrales.

Como las funciones resultantes de las composiciones siguientes

$$\begin{gathered}(x, y, \lambda) \longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto P(x\lambda, y\lambda)\\ (x, y, \lambda) \longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto Q(x\lambda, y\lambda)\end{gathered}$$

son de clase $C^1(\Omega \times [0, 1])$, podemos aplicar dos veces el teorema de las integrales dependientes de un parámetro, obteniendo que $U \in C^1(\Omega)$ y que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + x \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y \int_0^1 \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda\\ &\overset{(*)}{=} \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + x \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y \int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que P y Q cumplen la condición de exactitud. Podemos ahora escribirla como una diferencial exacta (compruébese), obteniendo que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + \int_0^1 \lambda \frac{d}{d\lambda}[P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda$$

Que podemos volver a escribir como una diferencial exacta (vuélvase a comprobar), llegando a que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}[\lambda P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda$$

donde podemos aplicar la Regla de Barrow:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}[\lambda P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda = [\lambda P(\lambda x, \lambda y)]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = P(x, y)$$

Por un razonamiento análogo, llegamos a que:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

Finalmente, como las dos derivadas parciales de U son de clase $C^1(\Omega)$, concluimos que $U \in C^2(\Omega)$. □

1.1.2. Interpretación de la demostración

Pese a haber demostrado el Teorema **??**, la demostración no es gratificante, ya que hemos obtenido de forma "mágica" una función U que cumplía lo que queríamos, y no sabemos de dónde proviene dicha fórmula. Trataremos en esta sección de dar sentido a esta, usando para ello la física.

En física, un campo vectorial en el plano es una aplicación que a cada punto $z = (x, y)$ le hace corresponder un vector (una flecha), $F(z) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

De esta forma, un campo vectorial para nosotros será una aplicación $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$ con $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Pensaremos en este campo vectorial como en un campo de fuerzas (es decir, el vector $F(z)$ nos indicará cómo es la fuerza que se sufre al estar en el punto z).

Definición 1.3 (Campo de fuerzas conservativo)**.** Diremos que un campo de fuerzas F es conservativo si existe un potencial, es decir, una función $U : G \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\nabla U = F$$

Es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

Observación. El lector estará acostumbrado a ver en física el gradiente notado por $-\nabla V$ (con $V = -U$). Sin embargo, en esta sección trabajaremos con el gradiente refiriéndonos a ∇U.

Ejemplo. Dado el campo de fuerzas

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Que podemos pensar como una homotecia o como un campo vectorial:

- En el origen, tenemos el vector 0.
- Dado un punto (x, y), tenemos que dibujar el vector fuerza (gradiente) como la mitad del vector de posición.

Notemos que se trata de un campo repulsor, de forma que el vector fuerza se mantiene constante en circunferencias de un determinado radio, con dirección perpendicular a los radios de la misma. Conforme nos alejamos del origen, la fuerza se incrementa.

Resulta que F es un campo de fuerzas conservativo, ya que podemos encontrar un potencial para dicho campo, es decir, una función $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} = F_1(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2} = F_2(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo. Un ejemplo de campo no conservativo es

$$F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Se trata de un giro de 90º en sentido antihorario, un campo de fuerzas que describe el comportamiento de un vórtice (como lo hace el agua cuando se cuela en un sumidero). Se trata de un campo no conservativo, ya que no podemos encontrar un potencial, debido a que no se cumple la condición de exactitud.

En un campo de fuerzas no hay necesariamente energía (ya que puede no ser conservativo), pero lo que siempre hay es trabajo.

Definición 1.4 (Trabajo)**.** Dado un conjunto abierto $G \subseteq \mathbb{R}^2$, un campo de fuerzas en G y un camino en G, es decir, una función $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2)$, el trabajo de F a lo largo de γ se define como

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle \; dt$$

A continuación, podemos reformular el Teorema **??** en términos físicos, obteniendo el siguiente teorema:

Teorema 1.7. *Si $G \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y tiene forma de estrella, sea $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$ un campo de fuerzas para el cual se cumple la condición de exactitud:*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

Entonces, F es conservativo.

Finalmente, notemos que si tenemos dos caminos distintos con los mismos extremos, el trabajo por cada uno de ellos no tiene por qué coincidir. Sin embargo, esto sucede si el campo es conservativo:

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \; dt &= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right] \; dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[U(\gamma(t))] \; dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\end{aligned}$$

Por la regla de Barrow, concluimos que el trabajo para ir de un punto a otro por un camino γ es la diferencia del potencial entre los dos puntos.

Para entender ahora de dónde proviene la fórmula de la función U del Teorema **??**:

$$U(x,y) = x \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) \; d\lambda + y \int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y) \; d\lambda \qquad (x,y) \in \Omega$$

Lo que hacemos es pensar en que tenemos un campo de fuerzas $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Y resulta que este campo de fuerzas es conservativo, y como el trabajo en un campo conservativo es independiente del camino elegido para calcular dicho trabajo, podemos elegir cualqueir camino que queramos. Observamos ahora que la expresión de U es simplemente el trabajo a lo largo del camino dado por el segmento $[(0,0),(x,y)]$ para cualquier $(x,y) \in \Omega$. Es decir, sea $(x,y) \in \Omega$, obtenemos el camino $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\gamma(\lambda) = (\lambda x, \lambda y) \qquad \lambda \in [0,1]$$

resulta que $\gamma \in C^1([0,1])$, con

$$\gamma'(\lambda) = (x, y) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Y si ahora escribimos el trabajo de F a lo largo de γ:

$$\int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_0^1 [P(\lambda x, \lambda y)x + Q(\lambda x, \lambda y)y] \, d\lambda = U(x, y)$$

Además, puede probarse que la función U que nos da el Teorema **??** es única salvo una constante aditiva[7]. Lo que hicimos en la definición de U era fijar el origen de potencial en el origen, por lo que teníamos

$$U(0,0) = 0$$

Una vez que se conoce la existencia de dicho potencial (gracias al Teorema **??**), no es necesario aplicar la fórmula para calcularlo, sino que podemos hacerlo por un procedimiento más práctico, el cual ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Dadas las funciones

$$P(x, y) = 7x^6 + 6x^5 y + 3x^2 y^3$$
$$Q(x, y) = x^6 + 3x^3 y^2 - 4y^3$$

se pide calcular un potencial para el campo de fuerzas $F = (P, Q)$.

Por una parte, sabemos que $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por tratarse de polinomios, con lo que nuestro dominio Ω en este caso será $\mathbb{R}^2$, que sabemos que es estrellado por ser convexo: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, entonces:

$$(1-t)\alpha + t\beta \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Falta comprobar la condición de exactitud para poder aplicar el Teorema **??**, que nos provee de la existencia de un potencial para el campo F:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6x^5 + 9x^2 y^2$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 6x^5 + 9x^2 y^2$$

Aplicando el Teorema, sabemos que existe un potencial $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$, el cual pasamos a calcular de forma práctica:

Estamos buscando una función U de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = 7x^6 + 6x^5 y + 3x^2 y^3$$

Por tanto, integraremos en x pensando que la y es fija:

$$U(x, y) = \int (7x^6 + 6x^5 y + 3x^2 y^3) \, dx = x^7 + x^6 y + x^3 y^3 + \phi(y)$$

[7]De aquí que en los problemas de física podíamos poner el origen de potencial en el punto que queramos.

Es decir, por cada $y \in \mathbb{R}$, tenemos una primitiva a buscar, la cual tendrá una constante aditiva $c \in \mathbb{R}$. Si ahora juntamos todas las primitivas encontradas para cada y, la constante aditiva de cada y ahora será una función dependiente de y, ya que por cada valor de y habíamos encontrado una constante. Dicha función es la ϕ que hemos usado anteriormente.

Para terminar de buscar dicha ϕ (para determinar correctamente U), lo que hacemos es establecer la otra condición que teníamos de U, en relación a la función Q, que se pone de manifiesto en $(*)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^6 + 3x^3y^2 + \phi'(y) \overset{(*)}{=} x^6 + 3x^2y^2 - 4y^3 = Q(x,y)$$

De donde $\phi'(y) = -4y^3$, por lo que $\phi(y) = -y^4$. Finalmente:

$$U(x,y) = x^7 + x^6y + x^3y^3 - y^4$$

Notemos que podíamos haber escogido $\phi(y) = -y^4 + c$ con cualquier $c \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que como habíamos comentado antes, U es única salvo constante aditiva, lo que nos permite fijar el origen del potencial en el punto que queramos.

Veamos ahora un ejemplo donde no se puede buscar U porque el dominio que consideramos no tiene forma de estrella[8].

Ejemplo. Tomaremos como dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\right\}$$

Es decir, el anillo formado por los puntos que están entre una circunferencia de radio $\sqrt{1/4} = 1/2$ y radio $\sqrt{4} = 2$, tal y como vemos en la Figura **??**.

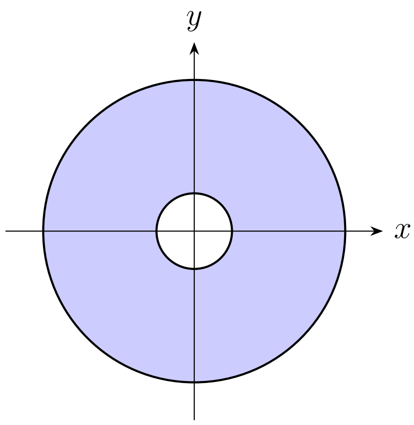

Figura 1.2: Dominio Ω.

Sean:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

[8] Con la intuición de que tenemos que buscar un conjunto que no sea simplemente conexo, buscamos un conjunto con un agujero.

Estas funciones no pueden definirse en $\mathbb{R}^2$ (por tener una singularidad en el origen), pero sí en Ω, donde son $C^1(\Omega)$, con:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

con lo que tenemos la condición de exactitud en un ejemplo en el que Ω no es estrellado. Para ver que no existe el potencial, lo razonaremos por el trabajo, buscando un camino cerrado en el que el trabajo no sea nulo, ya que si existiera un potencial U, entonces tendríamos que

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \; dt &= \int_a^b \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \; dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t)) \; dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\end{aligned}$$

Y si cogemos un camino cerrado, entonces $\gamma(a) = \gamma(b)$, con lo que obtendríamos trabajo nulo.

Cogeremos entonces el camino que recorre la circunferencia de radio 1 (a poco que se piense, para que el camino sea bueno tiene que pasar al otro lado del agujero del anillo[9]). Cogemos por tanto el camino $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

que es de clase $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, con

$$\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Vemos representado el camino escogido en la Figura **??**.

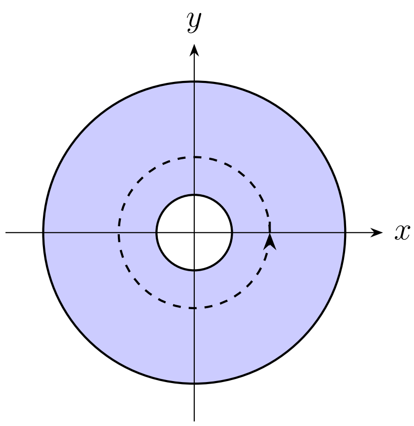

Figura 1.3: Camino γ.

Con lo que el trabajo del campo $F = (P, Q)$ será:

[9] Ya que si no podríamos coger un dominio mejor que contenga al camino y sí sea estrellado o simplemente conexo, con lo que sí existiría un potencial.

$$\int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\theta)), \gamma'(\theta)\rangle \, d\theta = \int_0^{2\pi} [-P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + Q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\cos\theta] \, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta] \, d\theta = -2\pi \neq 0$$

Tenemos ya un ejemplo en el que no se cumple la condición de exactitud y no podemos encontrar potencial y otro ejemplo en el que el dominio no es estrellado y tampoco podemos encontrar un potencial.

1.2. Ecuaciones exactas

Las ecuaciones exactas son ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{1.4}$$

Con $P, Q \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo.

La ecuación se dice que es exacta cuando se verifica la condición de exactitud.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

No son una familia de ecuaciones que se vean directamente. Por tanto, cuando veamos un tipo de ecuaciones que parezca no ser de ningún tipo, probablemente sea ecuaciones exactas.

Vamos a probar que si tenemos una ecuación exacta y fijamos un punto en el que $Q(x_0, y_0) \neq 0$, entonces siempre vamos a poder encontrar una solución de la ecuación diferencial, definida en un intervalo I abierto.

Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$. Supongamos que $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Existe una solución que cumple $y(x_0) = y_0$.

Demostración. Para demostrarlo, la primera dificultad es que no hemos dicho nada sobre el dominio (notemos que no tiene por qué tener forma de estrella), con lo que la condición de exactitud no nos asegura que tengamos un potencial en Ω.

Sin embargo, lo que sí podemos hacer es localizar, es decir, tomar un conjunto estrellado pequeño dentro de Ω (donde usamos que Ω es abierto).

Sea por tanto R un cuadrado (en los apuntes está hecho con circunferencia) de forma que esté dentro de Ω, con centro en (x_0, y_0).

De esta forma, podemos encontrar un potencial en R (aunque no en todo Ω), dado que es estrellado y se cumple la condición de exactitud, luego $\exists U \in C^2(R)$ de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \qquad \text{en } R$$

Ahora, donde pone P y Q podemos poner los parciales, con lo que la ecuación diferencial se queda en una diferencial exacta:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y} y' = \frac{d}{dx}[U(x, y)] = 0 \Longleftrightarrow U(x, y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Donde usamos un abuso de notación, estamos pensando en y como función de x. Como $U(x, y)$ es constante y tenemos que $y(x_0) = y_0$, dicha constante será $c = U(x_0, y_0)$.

De esta forma, buscamos una función y de forma que cumpla:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \qquad \text{y} \qquad y(x_0) = y_0$$

Y buscamos aplicar el Teorema de la Función Implícita, para obtener y en función de x. Sea $F : R \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = U(x, y) - U(x_0, y_0)$$

es una función de clase $F \in C^2(\mathbb{R})$, que cumple que $F(x_0, y_0) = 0$ y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

Por tanto, sabemos que existe una función $y : I \to \mathbb{R}$ en un intervalo abierto I de forma que:

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0 \\ F(x, y(x)) = 0 \end{gathered}$$

□

Notemos que la condición $Q(x, y) \neq 0$ significa que podemos despejar y', de forma que pongamos la ecuación en forma normal:

$$y' = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$$

En la práctica, no es difícil resolver ecuaciones diferenciales exactas, sino averiguar que sean exactas. Lo difícil es detectarlas. Una vez que las detectamos, es fácil resolverla, integrando para buscar el potencial, buscar la condición inicial y aplicar función implícita.

La recomendacion es que si vemos una ecuación que no es de ningún tipo, sospechemos que es exacta.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$y^2 + 2x + (5y^4 + 2xy)y' = 0 \qquad y(0) = 3 \tag{1.5}$$

Sean

$$\begin{gathered} P(x, y) = y^2 + 2x \\ Q(x, y) = 5y^4 + 2xy \end{gathered}$$

$P, Q \in C^2(\mathbb{R}^2)$, veamos si cumplen la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por tanto, la ecuación (**??**) es una ecuación exacta.

$$Q(0, 3) = 405 \neq 0$$

Ahora:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + 2x$$

$$U(x,y) = \int (y^2 + 2x)\ dx = y^2x + x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5y^4 + 2xy$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y)$$

con lo que $\varphi'(y) = 5y^4$ y podemos tomar, por ejemplo, $\varphi(y) = y^5$.

Tenemos finalmente:

$$U(x,y) = y^2x + x^2 + y^5 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Y sabemos que la ecuación (**??**) podemos ponerla como la derivada de dicha expresión en x igualada a 0. Por tanto, sabemos que las soluciones se pueden escribir como:

$$U(x,y) = c$$

Sin embargo, como no queremos todas las soluciones, sino la que en 0 vale 3:

$$U(x,y) = y^2x + x^2 + y^5 = U(x_0, y_0) = 243$$

Y como $Q(0,3) \neq 0$, no hace falta aplicar el Teorema de la Función Implícita, porque acabamos de ver teóricamente que sí nos da una función y:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2x + x^2 + y^5 & = & 243 \\ y(0) & = & 3 \end{array} \right.$$

Que sospechamos que no puede ponerse en forma explícita, ya que requiere averiguar las raíces de un polinomio de grado 5.

Como hemos visto, lo más difícil es darnos cuenta de que la ecuación diferencial que nos solicitan sea o no exacta.

Es una idea totalmente distinta del cambio de variable y toca bastantes otros contextos, aunque desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales es muy pobre (ya que hay muy pocas ecuaciones diferenciales que sean exactas).

La gracia está en que esto de las ecuaciones exactas se puede llevar más lejos usando el factor integrante, ya que puede que nos den una ecuación que no sea exacta y que si la multiplicamos por un número, la convertimos en exacta.

Resulta que este método es aplicable a todas las ecuaciones diferenciales: Todas las ecuaciones se pueden multiplicar por algo que hace que se pueda expreasr como la derivada de algo igualada a 0.

1.3. Factor integante

En la notación clásica, integrar una ecuación diferencial es resolverla, con lo que el factor queda resuelto.

Veamos primero ejemplos que nos motiven el factor integrante:

Ejemplo. Dada la ecuación:

$$y' + y = 0 \tag{1.6}$$

Sus soluciones son de la forma:

$$y(x) = ke^{-x} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Y resulta que (**??**) no es una ecuación exacta, ya que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sin embargo, hay varios métodos que hacen que sí sea exacta:

$$e^x y + e^x y' = 0$$

Que ya sí es exacta, ya que:

$$e^x y + e^x y' = \frac{d}{dx}(e^x y) = 0$$

Por tanto, e^x es un factor integrante para (**??**).

Sin embargo, una ecuación diferencial no tiene un único factor integrante, sino que tiene muchos. Si ahora multiplicamos por $\frac{1}{y}$:

$$1 + \frac{y'}{y} = 0$$

Y vuelve a ser una ecuación exacta:

$$1 + \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(x + \ln y) = 0 \qquad y > 0$$

(Tomamos $\ln y$ o $\ln(-y)$ dependiendo de dónde se mueva la y)

El peligro de los factores integrantes que en algunos sitios se hace 0 o tiene singularidades, en dichos sitios perdemos a la ecuación diferencial. Por tanto, nos interesarán factores integrantes con mayor dominio de definición.

Definición 1.5 (Factor integante)**.** Dada una ecuación diferencial definida en un conjunto D. Sea $\Omega \subseteq D$, un factor integante es una función $\mu \in C^1(\Omega)$ de forma que:

1)
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \qquad \text{en } \Omega \tag{1.7}$$

Es decir, que si tenemos una ecuación de la forma (**??**) y la multiplicamos por μ, entonces obtenemos una ecuación exacta.

2) $\mu(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \Omega$, para no perder información.

Ejemplo. Como hemos visto en el ejemplo superior, ejemplos de factores integrantes distintos para la ecuación

$$y + y' = 0$$

son:

1. Tomando $\Omega = \mathbb{R}^2$:
$$\mu_1(x,y) = e^x$$

2. Tomando $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ o $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$:
$$\mu_2(x,y) = \frac{1}{y}$$

Observación. Notemos que si tenemos una ecuación diferencial exacta, factores integrantes de la misma son:

$$\mu_c(x,y) = c \qquad c \neq 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

La idea para buscar un factor integante es ver la ecuación (**??**) como una ecuación en derivadas parciales, o también, que este cumple (donde los subíndices son las parciales). Usando la fórmula de la ecuación de la derivación del producto:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)P(x,y) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y) = \mu(x,y)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$$

Con lo que obtenemos una ecuacion en derivadas parciales del factor integrante.

Las ecuaciones en derivadas parciales tienen bastantes soluciones. Dependen de infinitas constantes, con lo que sus espacios tienen dimensión infinita. La gracia es que no necesitamos todas, sólamente una, con lo que buscar todas puede ser difícil pero encontrar una puede llegar a ser fácil (notemos que no nos sirve $\mu = 0$).

Buscamos ahora el truco para buscar el factor integrante. Buscamos funciones μ dependientes de dos variables, pero buscaremos que esta sea una función solo de una variable:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} m(x) \\ m(y) \\ m(x+y) \\ m(x \cdot y) \\ \dots \end{cases}$$

Nota: para los problemas difíciles, buscar un factor integante dependiente de x^2+y^2. El origen de esto está en que muchas ecuaciones diferenciales provienen del siglo XIX de problemas geométricos, donde dichos problemas han sido olvidados.

Lo que hay que entender es el papel que juegan μ y m (en la notación clásica, llaman también μ a m).

Ejemplo. Por ejemplo, cuando teníamos el factor integrante

$$\mu(x, y) = e^x$$

Lo que teníamos era la función

$$m(\xi) = e^\xi$$

Con lo que usamos la función:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \\ \xi &\longmapsto e^\xi \end{aligned}$$

Si ahora tomamos:

$$\mu(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$$

Lo que tenemos es:

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x + y \longmapsto \operatorname{sen}(x + y) \end{gathered}$$

Si ahora:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Lo que tenemos es:

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \end{gathered}$$

Vamos a hacer un par de factores integantes y vamos a pillar la mecánica de esto.

Ejemplo. Factor integante que solo depende de x: $\mu(x, y) = m(x)$. Sustituimos y:

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \mu_y &= 0 \\ \mu_x &= m' \end{aligned}$$

y obtenemos (suponiendo que $m \neq 0$, condición que obtenemos si μ será un factor integante y que $Q \neq 0$ en Ω):

$$\begin{aligned} -m'(x)Q &= m(x)(Q_x - P_y) \\ \frac{m'(x)}{m(x)} &= \frac{P_y - Q_x}{Q} \end{aligned}$$

Y lo que vemos es que no cualquier ecuación va a poder tener un factor integante de este tipo, ya que muchas veces tendremos a la izquierda una función de x y a la derecha una función de dos variables:

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{e^{y+x}}{x^3}$$

No es posible para todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, sí que será para una clase de ecuaciones diferenciales, para las cuales el cociente

$$\frac{P_y - Q_x}{Q}$$

Dependa solo de x, con lo que tendríamos:

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = f(x)$$

Que es una ecuación lineal homogénea, de soluciones:

$$m(\xi) = e^{F(\xi)} \qquad F' = f$$

Se supone que $Q(x, y) \neq 0 \ \forall (x, y) \in \Omega$.

De esta forma:

$$\exists \text{factor integante } \mu(x, y) = m(x) \Longleftrightarrow \frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)$$

En cuyo caso, el factor integrante será:

$$m(\xi) = e^{F(\xi)} \qquad F' = f$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación lineal completa:

$$b(t) + a(t)x - x' = 0$$

Siendo $a, b : J \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un intervalo abierto $J \subseteq \mathbb{R}$.

De esta forma, tenemos funciones:

$$P(t, x) = b(t) + a(t)x$$
$$Q(t, x) = -1$$

La condición de exactitud con esta nueva notación queda ahora como:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Veremos que esta ecuación no es exacta, pero que acepta un factor $\mu(t, x) = m(t)$. Esto pasrá si:

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = f(t)$$

sustituyendo:

$$\frac{a(t)}{-1} = f(t)$$

Obtenemos un cociente que es función de t, con lo que sabemos que existe el factor integrante μ, que sólo depende de t:

$$m(\xi) = e^{-A(\xi)} \qquad A' = a$$

De esta forma, podemos multiplicar la ecuación por μ, obteniendo una ecuación exacta:

$$b(t)e^{-A(t)} - \frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}x\right) = 0$$

Veamos ahora el factor integante del tipo $\mu(x, y) = x^2 + y^2$: Una condición necesaria y suficiente para que existan dichos factores integrantes:

$$\mu_x = 2xm'(x^2 + y^2)$$
$$\mu_y = 2ym'(x^2 + y^2)$$
$$_yP - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

Con lo que:

$$[2yP(x, y) - 2xQ(x, y)]\, m'(x^2 + y^2) = m(x^2 + y^2)(Q_x(x, y) - P_y(x, y))$$

Habrá un factor integante cuando podamos encontra una m que cumpla esto. Para verlo más claro, movemos a un lado lo que depende de m y a otro lo que depende de P y Q (abreviando notacion):

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{m'(x^2 + y^2)}{m(x^2 + y^2)}$$

Para que esto pase, m tiene que ser distinto de 0 (algo que sucederá, ya que buscamos que sea factor integante), así como que $2yP - 2xQ \neq 0$, lo que a partir de ahora supondremos como hipótesis:

$$yP(x, y) - xQ(x, y) \neq 0 \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Tenemos a la izquierda una función general en función de x e y. Tiene que pasar que dicha función no sea tan general, sino que se pueda expresar en términos de $x^2 + y^2$.

$$\exists \text{factor integante } \mu(x, y) = m(x^2 + y^2) \Longleftrightarrow \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = f(x^2 + y^2)$$

En caso afirmativo:

$$\frac{m'(x^2 + y^2)}{m(x^2 + y^2)} = f(x^2 + y^2)$$
$$m(\xi) = e^{F(\xi)} \qquad F' = f$$

Ejemplo. Volvamos a la ecuación de la espiral logarítmica:

$$x - y + (y + x)y' = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$x + y + (y - x)y' = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ninguna de las dos es exacta.

1. En $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{1+1}{2y(x-y) - 2x(y+x)} = \frac{1}{xy - y^2 - xy - x^2} = \frac{-1}{x^2+y^2}$$

   Función de x^2+y^2, con lo que admite un factor integante en función de x^2+y^2:

$$f(\xi) = \frac{-1}{\xi}$$

$$m(\xi) = e^{-\ln \xi} = \frac{1}{\xi}$$

   Con lo que el factor integante vale:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

2. Con la otra

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{-1-1}{2y(x+y) - 2x(y-x)} = \frac{-1}{x^2+y^2}$$

   Con lo que las dos admiten el mismo factor integrante.

Por tanto, si una ecuacion diferencial adminte un factor integante, la ecuacion diferencial cuyas soluciones son las inversas de la original tienen el mismo factor integante.

LO que tenemos es U(x,y), en uno ponemos $y = y(x)$ y en el otro $x = x(y)$.

De esta forma podemos buscar factores integrantes que dependan de cualquier función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de x e y: $\mu(x,y) = m(2x^7 + y)$.

2. Relaciones de Problemas