

Variable Compleja I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Números complejos	5
1.2. Topología del plano complejo	15
1.3. Funciones holomorfas	20
1.4. Funciones analíticas	21

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Para comprobar ahora que M es isomorfo a \mathbb{C} , se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar que f es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3. $f(1) = 1$.

$$\text{Tenemos que } f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1.$$

Por tanto, f es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- f es inyectiva.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, igualando componente a componente, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, y tenemos que $f(z) = A$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto, M es isomorfo a \mathbb{C} .

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

$$1. \ z_1 = \frac{i - \sqrt{3}}{1 + i}.$$

Tenemos que:

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1 + i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 1 + 3 + 3}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$2. \ z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}.$$

Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 + 3}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Im} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 3}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U . Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \iff |z - a| < |1 - \bar{a}z| \iff |z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \iff \\ &\iff (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \iff z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a} < 1 - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a}z\bar{z} \iff \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\ &\iff |z|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1. \end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1 - |a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U . A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \rightarrow U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

■ Inyectividad:

Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1} &= \frac{z_2 - a}{1 - \bar{a}z_2} \implies (z_1 - a)(1 - \bar{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \bar{a}z_1) \implies \\ &\implies z_1 - a - \bar{a}z_1z_2 + |a|^2z_2 = z_2 - a - \bar{a}z_2z_1 + |a|^2z_1 \implies \\ &\implies z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \implies (1 - |a|^2)z_1 = (1 - |a|^2)z_2 \implies z_1 = z_2. \end{aligned}$$

■ Sobreyectividad:

Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} &= w \implies z - a = w(1 - \bar{a}z) \implies z - a = w - w\bar{a}z \implies z + w\bar{a}z = a + w \implies \\ &\implies z(1 + w\bar{a}) = a + w \implies z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}. \end{aligned}$$

donde, en el último paso, hemos hecho uso de que $1 + w\bar{a} \neq 0$, ya que $|wa| = |w||a| < 1$ y:

$$|1 + w\bar{a}| \geq |1 - |w||a|| = 1 - |w||a| > 0 \iff 1 > |w||a|$$

y por tanto $1 + w\bar{a} \neq 0$. Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}$.

Vamos a comprobar que $z \in U$:

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{a + w}{1 + w\bar{a}} \right| = \frac{|a + w|}{|1 + w\bar{a}|} < 1 \iff |a + w| < |1 + w\bar{a}| \iff |a + w|^2 < |1 + w\bar{a}|^2 \iff \\ &\iff (a + w)(\bar{a} + \bar{w}) < (1 + w\bar{a})(1 + \bar{w}a) \iff \\ &\iff a\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{a} + w\bar{w} < 1 + w\bar{a} + \bar{w}a + a\bar{a}w\bar{w} \iff \\ &\iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\ &\iff |w|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{aligned} f^{-1}: U &\longrightarrow U \\ w &\longmapsto \frac{a+w}{1+w\bar{a}} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

\implies) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $n = 2$: Hay dos opciones:

Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| \implies |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \implies \\ &\implies z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2|z_1||z_2| \implies (z_1\bar{z}_2)^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \implies \\ &\implies (z_1\bar{z}_2)^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies (z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \implies z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos opciones:

Opción 1 Tenemos que:

$$z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 = \overline{z_1\bar{z}_2} \implies z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora $\lambda_2 = \frac{z_2\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\lambda_2 z_1 = \frac{z_2\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} z_1 = z_2$$

Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 &= (a + bi)(c - di) = ac + bd + (bc - ad)i, \\ z_2\bar{z}_1 &= (c + di)(a - bi) = ac + bd + (ad - bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_1 \implies bc - ad = ad - bc \implies ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de b :

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.
 - Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
 - Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = c/a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = ad/b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = d/b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.

$$\lambda_2 z_1 = \frac{d}{b}(a + bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2 z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1(1 + \lambda_2)| = |z_1||1 + \lambda_2| \\ |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda_2 z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en \mathbb{R} se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de \mathbb{C} como elementos de \mathbb{R}^2 , con el producto escalar de \mathbb{R}^2 y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en \mathbb{R}^2 , se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2 \rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, \lambda z_1 \rangle = \lambda \langle z_1, z_1 \rangle = \lambda \|z_1\|^2 > 0 \iff \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$.

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| \right) + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| + |z_{n+1}| \end{aligned}$$

Notando por $w = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho w = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$. Por tanto, se cumple para $n + 1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k z_1 \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| = \sum_{k=1}^n \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geoméricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2|z - i|\}$.

Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy + i| &= 2|x + iy - i| \implies |x + (y + 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \implies x^2 + (y + 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \implies \\ &\implies x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \implies 3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 = 0 \implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$.

Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy - i| + |x + iy + i| &= 4 \implies |x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \implies \\ &\implies x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies -2y = 16 + 2y - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies 4 + y = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies 16 + 8y + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4 + 8y \implies \\ &\implies 4x^2 + 3y^2 = 12 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4-3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, consideramos $\arg z \in]-\pi, \pi[$. Entonces, como en particular se tiene $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como $z \notin \mathbb{R}^-$ (y por tanto $|z| \neq -\operatorname{Re} z$), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z) \cdot |z|}{\cos(\arg z) \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen $\arg z$. Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} f :]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \alpha - 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que $f(0) = 0 - 2 \arctan(0) = 0$. Por otro lado, como $f \in C^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$, consideramos la derivada de f :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 + 2 \cos \alpha} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

Por tanto, f es constante, por lo que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Tomando como ángulo $\alpha = \arg z$, que por la elección hecha sabemos que $\arg z \in]-\pi, \pi[$, tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como $\arg z \in \text{Arg } z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\text{Re } z}{|z|} \quad \wedge \quad \sin(\arg z) = \frac{\text{Im } z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que $x = \text{Re } z = |z| \cos(\arg z)$ e $y = \text{Im } z = |z| \sin(\arg z)$. Por tanto, distinguimos en función de los valores de x e y , usando además que $\arg z \in]-\pi, \pi[$:

■ Si $x > 0$:

En este caso, $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan(\tan(\arg z)) = \arg z$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

■ Si $x < 0, y > 0$:

En este caso, $y = |z| \sin(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]0, \pi[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in]\pi/2, \pi[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z - \pi \in]-\pi/2, 0[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z - \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \end{aligned}$$

■ Si $x < 0, y < 0$:

En este caso, $y = |z| \sin(\arg z) < 0 \implies \arg z \in]-\pi, 0[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in]-\pi, -\pi/2[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z + \pi \in]0, \pi/2[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z + \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{aligned}$$

- Si $x = 0, y > 0$:

En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]0, \pi[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = \pi/2$.

- Si $x = 0, y < 0$:

En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \implies \arg z \in]-\pi, 0[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = -\pi/2$.

Ejercicio 1.1.8. Probar las fórmulas de De Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.
- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= \cos(n\theta) \cos \theta - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen} \theta + i(\cos(n\theta) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos \theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre θ , se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^8.$$

Sea $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\ \arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que $\operatorname{Re} z' > 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ z &= (z')^8 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^8 \stackrel{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

donde en (*) hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \quad (1.2)$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por i y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^k$$

donde en (*) hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo $z = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$, definimos $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, por lo que $u^2 = z$. Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k \bar{u}^k - u^{2k} = u^k (\bar{u}^k - u^k) = -2i \operatorname{sen}\left(k \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de z , tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{-2i \operatorname{sen}\left((n+1) \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^{n+1}}{-2i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot u} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot u^n = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

donde en (*) hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que $z \neq 1$; es decir, que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Por el Ejercicio 1.1.6, sabemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

Consideramos $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Como la función Id es continua, tenemos que $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$ son continuas en \mathcal{C} . Además, como el denominador tan solo se anula en \mathbb{R}_0^- , el argumento de la arcotangente restringido a Ω es una función continua. Por ser la arcotangente continua en \mathbb{R} y serlo el producto de funciones continuas, concluimos que $\arg|_{\Omega}$ es continua. Como Ω es abierto, por el carácter local de la continuidad, \arg es continua en $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Tan falta por estudiar la continuidad en \mathbb{R}^- . Para ello, sea $z \in \mathbb{R}^-$, del que sabemos que $\arg z = \pi$. Sea la sucesión $\{\theta_n\}$ que recorre los ángulos desde 0 en sentido horario hasta $-\pi$, límite de la sucesión:

$$\{\theta_n\} = \left\{ -\pi \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} \rightarrow -\pi$$

A partir de dicha sucesión, definimos $\{z_n\}$ como los números complejos de módulo $|z|$ y argumento θ_n ; que recorren los puntos de la circunferencia unitaria desde el eje positivo en sentido horario hasta el eje negativo.

$$\{z_n\} = \{|z|(\cos(\theta_n) + i \sin(\theta_n))\} \rightarrow |z|(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -|z| = z$$

Por último, tenemos que:

$$\{\arg z_n\} = \{\theta_n\} \rightarrow -\pi \neq \pi = \arg z$$

Por tanto, hemos encontrado una sucesión $\{z_n\}$ con $z_n \in \mathbb{C}^* \forall n \in \mathbb{N}$, con $\{z_n\} \rightarrow z$ pero $\{\arg z_n\} \not\rightarrow \arg z$. Por tanto, \arg no es continua en z . Como z era arbitrario, concluimos que \arg no es continua en \mathbb{R}^- .

Por tanto, concluimos que \arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, pero no lo es en \mathbb{R}^- .

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

La elección del argumento principal de un número complejo realizada provoca que haya una discontinuidad en $\mathbb{R}^- = S_\pi$. Este ejercicio nos pide encontrar una función que, dado un argumento θ , sea continua en \mathbb{C}^* excepto en los puntos z para los cuales $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Dado $z \in S_\theta$, como \arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, en primer lugar definiremos una función $g_\theta : S_\theta \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ que nos lleve z a un punto $w \notin \mathbb{R}^-$; para poder aplicar

luego \arg y modificar el valor de forma que $\varphi(z) \in \text{Arg } z$. Vamos a ello.

Definimos en primer lugar $w_\theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \in \mathbb{C}$, de forma que $|w_\theta| = 1$ y $\pi - \theta \in \text{Arg } w_\theta$. Definimos g_θ como:

$$\begin{aligned} g_\theta : S_\theta &\longrightarrow \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \\ z &\longmapsto zw_\theta \end{aligned}$$

En primer lugar, como g_θ es polinómica, tenemos que $g_\theta \in \mathcal{C}(S_\theta)$. Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\text{Arg } g_\theta(z) = \text{Arg}(zw_\theta) = \text{Arg } z + \text{Arg } w_\theta = (\arg z + \pi - \theta) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Veamos que $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$. Supongamos que $g_\theta(z) \in \mathbb{R}^-$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg z + \pi - \theta = 2k\pi$. Por tanto, $\arg z = 2k\pi - \pi + \theta = (2k - 1)\pi + \theta$. Por tanto, $\theta \in \text{Arg } z$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$.

A continuación, definimos φ como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi : S_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \arg(g_\theta(z)) - (\pi - \theta) \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que φ es continua en S_θ , puesto que \arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y g_θ es continua en S_θ . Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\varphi(z) \in \text{Arg } g_\theta(z) - \text{Arg } w_\theta = \text{Arg } g_\theta(z) + \text{Arg } \frac{1}{w_\theta} = \text{Arg} \left(\frac{g_\theta(z)}{w_\theta} \right) = \text{Arg} \left(\frac{zw_\theta}{w_\theta} \right) = \text{Arg } z$$

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ de forma que $\varphi(z) \in \text{Arg } z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo \mathbb{C}^* por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z \forall z \in \mathbb{C}^*$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \varphi(z) - \varphi(-z) \end{aligned}$$

Por ser φ continua, f es continua. Además, dado $z \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) - \varphi(-z) \\ f(-z) &= \varphi(-z) - \varphi(z) = -(\varphi(z) - \varphi(-z)) = -f(z) \end{aligned}$$

Por tanto, fijado $w \in \mathbb{C}^*$, hay dos opciones:

- Si $f(w) = 0$, entonces sea $z_0 = w$, y se tiene que $f(z_0) = 0$.
- Si $f(w) \neq 0$, entonces $f(w)f(-w) < 0$. Como \mathbb{C}^* es conexo, por el Teorema del Valor Intermedio $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$.

En cualquier caso, $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$. Por tanto, $\varphi(z_0) = \varphi(-z_0)$. Esto implica que $\text{Arg } z_0 = \text{Arg } -z_0$, lo cual es una contradicción ya que:

$$\text{Arg } -z_0 = (\arg z_0 + \pi) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Por tanto, no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Por otro lado, consideramos el caso para \mathbb{T} . Hay diversas formas de probarlo:

- De forma análoga, habiendo uso ahora de que \mathbb{T} es conexo.
- Aplicando de forma directa el Teorema de Borsuk-Ulam a φ (esto es lo que en realidad hacemos en la opción anterior).
- Haciendo uso de lo anteriormente demostrado.

Desarrollaremos la tercera opción, por ser aquella que difiere de lo anterior. De nuevo, supongamos por reducción al absurdo que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z \forall z \in \mathbb{T}$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \end{aligned}$$

Tenemos que f es continua, y verifica que:

$$f(z) = \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \text{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \text{Arg } z - \text{Arg}(|z|) = \text{Arg } z - 2\pi\mathbb{Z} = \text{Arg } z$$

No obstante, hemos demostrado que no puede existir una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $f(z) \in \text{Arg } z \forall z \in \mathbb{C}^*$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción, y concluimos que no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z \forall z \in \mathbb{T}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \text{Arg } z$, se puede elegir $\theta_n \in \text{Arg } z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \rightarrow \theta$.

Dada una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \text{Arg } z$, definimos θ_n como sigue:

- Si $z \notin \mathbb{R}^-$:

Como $\arg z \in \text{Arg } z$, tenemos que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = 2k\pi + \arg z$. Por tanto, definimos θ_n como:

$$\theta_n = \arg z_n + 2k\pi \in \text{Arg } z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, tenemos que:

$$\{\theta_n\} = \{\arg z_n + 2k\pi\} \rightarrow \arg z + 2k\pi = \theta$$

donde hemos usado que, al ser \arg continua en $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, como $\{z_n\} \rightarrow z$, se tiene que $\{\arg z_n\} \rightarrow \arg z$.

■ Si $z \in \mathbb{R}^-$:

Por el Ejercicio 1.2.2, sabemos que $\exists \varphi \in \mathcal{C}(S_0)$ tal que $\varphi(w) \in \text{Arg } w \ \forall w \in S_0$. En particular, $\varphi(z) \in \text{Arg } z$, por lo que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \theta + 2k\pi$.

Como $\{z_n\} \rightarrow z \in S_0 = S_0^\circ$ abierto, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $z_n \in S_0$. Por tanto, definimos θ_n como:

$$\begin{cases} \theta_n = \arg z_n & \text{si } n < N \\ \theta_n = \varphi(z_n) - 2k\pi & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

De esta forma, tenemos que $\theta_n \in \text{Arg } z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y además:

$$\{\theta_n\} \rightarrow \varphi(z) - 2k\pi = \theta$$

donde hemos usado que, al ser φ continua en $z \in S_0$, como $\{z_n\} \rightarrow z$, se tiene que $\{\varphi(z_n)\} \rightarrow \varphi(z)$.

Observación. Notemos que podríamos haber generalizado todo en el segundo caso, considerando $S_{\theta+\pi}$. No obstante, se ha optado por hacerlo de forma más explícita para facilitar la comprensión, ya que el primer caso seguramente sea más intuitivo.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Para facilitar la notación, sea:

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En primer lugar, vamos a estudiar el límite de la sucesión $\{|z_n|\}$:

$$\begin{aligned} |z_n| &= \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\text{Re } z}{n}\right)^2 + \left(\frac{\text{Im } z}{n}\right)^2} \right)^n = \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\text{Re}^2 z}{n^2} + \frac{2 \text{Re } z}{n} + \frac{\text{Im}^2 z}{n^2}\right)^n} = \sqrt{\left(1 + \frac{\frac{\text{Re}^2 z + \text{Im}^2 z}{n} + 2 \text{Re } z}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{\text{Re}^2 z + \text{Im}^2 z}{n} + 2 \text{Re } z}{n}\right)^n} = \\ &= \sqrt{\exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Re}^2 z + \text{Im}^2 z + 2n \text{Re } z}{n} + 2 \text{Re } z\right)} = \sqrt{\exp(2 \text{Re } z)} = e^{\text{Re } z} \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que la raíz es una función continua, y en la segunda igualdad hemos usado el Criterio de Euler. A continuación, estudiamos los argumentos de z_n . Para ello, definimos:

$$w_n = 1 + \frac{z}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{w_n\} \rightarrow 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $\operatorname{Re} w_n > 0$. Por tanto, $\forall n \geq N$ se tiene que:

$$\arg w_n = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} w_n}{\operatorname{Re} w_n} \right) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right)$$

Como $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg}((w_n)^n) = n \operatorname{Arg} w_n \implies n \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right) \in \operatorname{Arg} z_n \quad \forall n \geq N$$

Por tanto, definimos la sucesión $\{\theta_n\}$ como sigue:

$$\theta_n = \begin{cases} \arg z_n & \text{si } n < N \\ n \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right) & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$. Calculemos el límite de la sucesión $\{\theta_n\}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right)}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z} \right)^2} \cdot \frac{-\operatorname{Im} z}{(n + \operatorname{Re} z)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \operatorname{Im} z}{(n + \operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im}^2 z} = \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Uniando ambos resultados, tenemos que:

$$z_n = |z_n| (\cos(\theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite, y como las funciones seno y coseno son continuas, tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \left(\cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \right) + i \operatorname{sen} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \right) \right) = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$$

1.3. Funciones holomorfas

Ejercicio 1.3.1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como se indica:

1. $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $f(x + iy) = x^3 - y + i \left(y^3 + \frac{x^2}{2} \right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, con $f(0) = 0$.

Ejercicio 1.3.2. Probar que existe una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

Ejercicio 1.3.3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.3.4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que:

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 1.3.5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Ejercicio 1.3.6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{para todo } z \in \Omega^*.$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

Ejercicio 1.3.7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

1.4. Funciones analíticas

Ejercicio 1.4.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$$

$$2. \sum_{n \geq 0} z^{2n}$$

$$3. \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$$

$$4. \sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$5. \sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

$$6. \sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n \text{ con } a \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 1.4.2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

$$1. \sum_{n \geq 0} n^k \alpha_n z^n \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$$

Ejercicio 1.4.3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Ejercicio 1.4.4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$