

Variable Compleja I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Números complejos	5
1.2. Topología del plano complejo	15
1.3. Funciones holomorfas	16
1.4. Funciones analíticas	17

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Para comprobar ahora que M es isomorfo a \mathbb{C} , se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar que f es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3. $f(1) = 1$.

$$\text{Tenemos que } f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1.$$

Por tanto, f es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- f es inyectiva.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, igualando componente a componente, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, y tenemos que $f(z) = A$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto, M es isomorfo a \mathbb{C} .

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

$$1. \ z_1 = \frac{i - \sqrt{3}}{1 + i}.$$

Tenemos que:

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1}{1 + i} = (-\sqrt{3} + i) \cdot \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - i^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 1 + 3 + 3}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$2. \ z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}.$$

Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 + 3}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Im} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 3}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U . Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \iff |z - a| < |1 - \bar{a}z| \iff |z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \iff \\ &\iff (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \iff z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a} < 1 - a\bar{z} - z\bar{a} + a\bar{a}z\bar{z} \iff \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\ &\iff |z|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1. \end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1 - |a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U . A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \rightarrow U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

■ Inyectividad:

Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1} &= \frac{z_2 - a}{1 - \bar{a}z_2} \implies (z_1 - a)(1 - \bar{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \bar{a}z_1) \implies \\ &\implies z_1 - a - \bar{a}z_1z_2 + |a|^2z_2 = z_2 - a - \bar{a}z_2z_1 + |a|^2z_1 \implies \\ &\implies z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \implies (1 - |a|^2)z_1 = (1 - |a|^2)z_2 \implies z_1 = z_2. \end{aligned}$$

■ Sobreyectividad:

Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} &= w \implies z - a = w(1 - \bar{a}z) \implies z - a = w - w\bar{a}z \implies z + w\bar{a}z = a + w \implies \\ &\implies z(1 + w\bar{a}) = a + w \implies z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}. \end{aligned}$$

Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \frac{a + w}{1 + w\bar{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{a + w}{1 + w\bar{a}} \right| = \frac{|a + w|}{|1 + w\bar{a}|} < 1 \iff |a + w| < |1 + w\bar{a}| \iff |a + w|^2 < |1 + w\bar{a}|^2 \iff \\ &\iff (a + w)(\bar{a} + \bar{w}) < (1 + w\bar{a})(1 + \bar{w}a) \iff \\ &\iff a\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{a} + w\bar{w} < 1 + w\bar{a} + \bar{w}a + a\bar{a}w\bar{w} \iff \\ &\iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\ &\iff |w|^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{aligned} f^{-1} : U &\longrightarrow U \\ w &\longmapsto \frac{a+w}{1+w\bar{a}} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

\implies) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $n = 2$: Hay dos opciones:

Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\implies |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \implies \\ &\implies z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \implies \\ &\implies z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 2|z_1||z_2| \implies (z_1 \bar{z}_2)^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2 \bar{z}_1)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \implies \\ &\implies (z_1 \bar{z}_2)^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2 \bar{z}_1)^2 = 0 \implies (z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1)^2 = 0 \implies z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_1 \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos opciones:

Opción 1 Tenemos que:

$$z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_1 = \overline{z_1 \bar{z}_2} \implies z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora $\lambda_2 = \frac{z_2 \bar{z}_2}{z_1 \bar{z}_2} \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\lambda_2 z_1 = \frac{z_2 \bar{z}_2}{z_1 \bar{z}_2} z_1 = z_2$$

Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= (a + bi)(c - di) = ac + bd + (bc - ad)i, \\ z_2 \bar{z}_1 &= (c + di)(a - bi) = ac + bd + (ad - bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_1 \implies bc - ad = ad - bc \implies ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de b :

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.

- Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
- Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = c/a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = ad/b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = d/b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2 z_1$.

$$\lambda_2 z_1 = \frac{d}{b}(a + bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2 z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1(1 + \lambda_2)| = |z_1||1 + \lambda_2| \\ |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda_2 z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en \mathbb{R} se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de \mathbb{C} como elementos de \mathbb{R}^2 , con el producto escalar de \mathbb{R}^2 y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en \mathbb{R}^2 , se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2 \rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, \lambda z_1 \rangle = \lambda \langle z_1, z_1 \rangle = \lambda \|z_1\|^2 > 0 \iff \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$.

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| \right) + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| + |z_{n+1}| \implies \\ &\implies \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 + z_{n+1} \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| + |z_{n+1}| \end{aligned}$$

Notando por $w = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho w = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$. Por tanto, se cumple para $n + 1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k z_1 \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1 \right| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) |z_1| = \sum_{k=1}^n \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_1| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geoméricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2|z - i|\}$.

Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy + i| &= 2|x + iy - i| \implies |x + (y + 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \implies x^2 + (y + 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \implies \\ &\implies x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \implies 3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + y^2 - \frac{10}{3}y + 1 = 0 \implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \implies \\ &\implies x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}$.

Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x + iy - i| + |x + iy + i| &= 4 \implies |x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \implies \\ &\implies \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \implies \\ &\implies x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies -2y = 16 + 2y - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies \\ &\implies 4 + y = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \implies 16 + 8y + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4 + 8y \implies \\ &\implies 4x^2 + 3y^2 = 12 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4-3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, consideramos $\arg z \in]-\pi, \pi[$. Entonces, como en particular se tiene $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como $z \notin \mathbb{R}^-$ (y por tanto $|z| \neq -\operatorname{Re} z$), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z) \cdot |z|}{\cos(\arg z) \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen $\arg z$. Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} f :]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \alpha - 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que $f(0) = 0 - 2 \arctan(0) = 0$. Por otro lado, como $f \in C^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$, consideramos la derivada de f :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 + 2 \cos \alpha} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

Por tanto, f es constante, por lo que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Tomando como ángulo $\alpha = \arg z$, que por la elección hecha sabemos que $\arg z \in]-\pi, \pi[$, tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como $\arg z \in \text{Arg } z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\text{Re } z}{|z|} \quad \wedge \quad \sin(\arg z) = \frac{\text{Im } z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que $x = \text{Re } z = |z| \cos(\arg z)$ e $y = \text{Im } z = |z| \sin(\arg z)$. Por tanto, distinguimos en función de los valores de x e y , usando además que $\arg z \in]-\pi, \pi[$:

■ Si $x > 0$:

En este caso, $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan(\tan(\arg z)) = \arg z$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

■ Si $x < 0, y > 0$:

En este caso, $y = |z| \sin(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]0, \pi[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in]\pi/2, \pi[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z - \pi \in]-\pi/2, 0[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z - \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \end{aligned}$$

■ Si $x < 0, y < 0$:

En este caso, $y = |z| \sin(\arg z) < 0 \implies \arg z \in]-\pi, 0[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in]-\pi, -\pi/2[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z + \pi \in]0, \pi/2[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \arctan(\tan(\arg z)) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta = \arg z + \pi \implies \\ &\implies \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{aligned}$$

- Si $x = 0, y > 0$:

En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \implies \arg z \in]0, \pi[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = \pi/2$.

- Si $x = 0, y < 0$:

En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \implies \arg z \in]-\pi, 0[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = -\pi/2$.

Ejercicio 1.1.8. Probar las fórmulas de De Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre n .

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.
- Supongamos que se cumple para n , demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \\ &= \cos(n\theta) \cos \theta - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen} \theta + i(\cos(n\theta) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos \theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre θ , se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^8.$$

Sea $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\ \arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que $\operatorname{Re} z' > 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ z &= (z')^8 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^8 \stackrel{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

donde en (*) hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \quad (1.2)$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por i y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^k$$

donde en (*) hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo $z = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$, definimos $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, por lo que $u^2 = z$. Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k \bar{u}^k - u^{2k} = u^k (\bar{u}^k - u^k) = -2i \operatorname{sen}\left(k \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de z , tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{-2i \operatorname{sen}\left((n+1) \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot u^{n+1}}{-2i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot u} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot u^n = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

donde en (*) hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que $z \neq 1$; es decir, que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \text{Arg } z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \text{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo \mathbb{C}^* por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \text{Arg } z$, se puede elegir $\theta_n \in \text{Arg } z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \rightarrow \theta$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ no es convergente y calcular su límite.

1.3. Funciones holomorfas

Ejercicio 1.3.1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como se indica:

1. $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $f(x + iy) = x^3 - y + i \left(y^3 + \frac{x^2}{2} \right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, con $f(0) = 0$.

Ejercicio 1.3.2. Probar que existe una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

Ejercicio 1.3.3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.3.4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que:

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 1.3.5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Ejercicio 1.3.6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{para todo } z \in \Omega^*.$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

Ejercicio 1.3.7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

1.4. Funciones analíticas

Ejercicio 1.4.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$$

$$2. \sum_{n \geq 0} z^{2n}$$

$$3. \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$$

$$4. \sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$5. \sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

$$6. \sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n \text{ con } a \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 1.4.2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

$$1. \sum_{n \geq 0} n^k \alpha_n z^n \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$$

Ejercicio 1.4.3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Ejercicio 1.4.4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$