Geometría III
Examen VI

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Convocatoria Ordinaria[1].

Fecha 20 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Contesta a dos de los tres siguientes apartados:

1. Razona si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "En un espacio afín 3−dimensional la intersección de tres planos distintos o es vacía, o un punto o una recta afín".

   Sabemos que la intersección de subespacios afines es, o vacía, o un subespacio afín de dimensión menor o igual a la dimensión de los subespacios afines que se intersecan. Por tanto, sabemos que la intersección puede ser vacía, un punto, una recta o un plano afín.

   No obstante, veamos que no puede ser un plano afín. Si lo fuese, para cada uno de los planos que intersecan tendríamos que tienen la misma dimensión que la intersección y la contienen, por tanto, serían la intersección. No obstante, esto es una contradicción, ya que son planos distintos.

2. Razona qué movimiento rígido resulta al componer un giro con una simetría axial en un plano euclídeo.

   En este caso, tenemos que $f = G_{\theta,p} \circ \sigma_R$, con $p \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in]0,\pi]$ y $R \subset \mathbb{R}^2$. Tenemos que $|f| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa. Por tanto, se trata de una simetría axial o una simetría axial con deslizamiento. Supongamos que es una simetría axial con deslizamiento, $t_v \circ \sigma_S$, con $v \in \overrightarrow{S} \setminus \{0\}$. Tenemos que:

   $$G_{\theta,p} \circ \sigma_R = t_v \circ \sigma_S \Longrightarrow G_{\theta,p} = t_v \circ \sigma_S \circ \sigma_R$$

   Distinguimos en funión de la posición relativa de S y R:

   - Si $S = R$ (son coincidentes), entonces sabemos que $\sigma_S \circ \sigma_R = Id_{\mathbb{R}^2}$, por lo que $G_{\theta,p} = t_v$, llegando a una contradicción, ya que el giro tiene puntos fijos pero la traslación no.
   - Si $S \| R$, $S \neq R$ (son paralelas), entonces sabemos que $\sigma_S \circ \sigma_R = t_w$, con $w \in \overrightarrow{S}^\perp \setminus \{0\}$. Como $w \in \overrightarrow{S}^\perp$ y $v \in \overrightarrow{S}$, tenemos que $w \perp v$, por lo que $v + w \neq 0$. por lo que $G_{\theta,p} = t_{v+w}$. Esto es una contradicción, ya que el giro tiene puntos fijos pero la traslación no.
   - Si $S \cap R \neq \emptyset$, $S \nparallel R$ (son secantes), sabemos que $\sigma_S \circ \sigma_R$ es un giro de centro q de ángulo no orientado $\theta' \in]0,\pi]$. Por tanto, tenemos que $G_{\theta,p} = t_v \circ G_{\theta',q}$, que también es una contradicción, ya que p no se mantiene fijo en el caso de la derecha.

   Por tanto, se trata de una simetría axial.

3. Enuncia y demuestra el Teorema de Thales.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** En $\mathbb{R}^3$, se consideran los planos $\Pi \equiv -x-y+z = 1$ y $\Pi' \equiv x+y+z = -1$ y las rectas $r = (-1,0,0)+\mathcal{L}\{(1,1,0)\}$ y $r' = (0,0,-1)+\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.

1. Prueba la existencia de una afinidad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique $f(\Pi) = \Pi'$ y $f(r) = r'$. Determina sus ecuaciones en el sistema de referencia canónico.

Sean los sistemas de referencia dados por $\mathcal{R} = \{(-1,0,0), \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}\}$ y $\mathcal{R}' = \{(0,0,-1), \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}\}$.

Consideramos ahora entonces f cuya matriz asociada es la siguiente:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} f(r) &= f\left((-1,0,0) + \mathcal{L}\{(1,1,0)\}\right) = f\left((-1,0,0)\right) + \overrightarrow{f}\left(\mathcal{L}\{(1,1,0)\}\right) = \\ &= (0,0,-1) + \mathcal{L}\{(1,0,1)\} = r' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\Pi) &= f\left((-1,0,0) + \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,1)\}\right) = f\left((-1,0,0)\right) + \overrightarrow{f}\left(\mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,1)\}\right) = \\ &= (0,0,-1) + \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\} = \Pi' \end{aligned}$$

Calculamos su expresión en el sistema de referencia canónico:

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_0) &= M\left(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0\right) \cdot M\left(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\right) \cdot M\left(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}\right) = \\ &= M\left(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0\right) \cdot M\left(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\right) \cdot M\left(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0\right)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) Id_4 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

2. Demuestra que r y r' se cruzan y calcula la distancia entre ellas.

   Calculamos la intersección entre r y r'. Para ello, tenemos que:

$$r = \{(-1+\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad r' = \{(\mu, 0, -1+\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

   Para que se intersequen, han de existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(-1+\lambda, \lambda, 0) = (\mu, 0, -1+\mu) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1+\lambda = \mu \\ \lambda = 0 \\ 0 = -1+\mu \end{array}\right.$$

   Por tanto, de la tercera ecuación deducimos que $\mu = 1$, y sustituyendo en la primera, tenemos que $\lambda = 2$. Por tanto, vemos que no se intersecan. Calculamos ahora la distancia entre ambas rectas. Necesitamos buscar $p \in r$ y $p' \in r'$ tales que $\overrightarrow{pp'} \in \overrightarrow{r}^{\perp} \cap \overrightarrow{r'}^{\perp}$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{pp'} = (\mu + 1 - \lambda, -\lambda, -1 + \mu), \qquad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, imponiendo que $\overrightarrow{pp'} \in \overrightarrow{r}^{\perp} \cap \overrightarrow{r'}^{\perp}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle(\mu+1-\lambda,-\lambda,-1+\mu),(1,1,0)\rangle &= 0 = \mu+1-\lambda-\lambda = \\
&= \mu-2\lambda=-1 \\
\langle(\mu+1-\lambda,-\lambda,-1+\mu),(1,0,1)\rangle &= 0 = \mu+1-\lambda-1+\mu = \\
&= 2\mu-\lambda=0
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que $\mu = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, por lo que $p = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ y además $p' = \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$. Tenemos que:

$$d(r,r') = d(p,p') = \sqrt{\frac{4^2}{3^2} + 2\cdot\frac{1}{3^2}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** En $\mathbb{R}^3$ y respecto del sistema de referencia euclídeo usual, calcula las ecuaciones de la simetría axial con deslizamiento, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que verifica $f(0,0,0) = (1,1,2)$ y $\overrightarrow{f}(1,1,0) = (1,1,0)$.

En este caso, consideremos el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por $\Pi \equiv z = 1$, y el vector dado por $v = (1,1,0) \in \overrightarrow{\Pi}$. Sea f la simetría axial respecto de la recta $R = (0,0,1) + \mathcal{L}\{v\}$ compuesto con la traslación de vector v. En la base usual, tenemos que:

$$f(0,0,0) = (0,0,2) + (1,1,0) = (1,1,2) \qquad \overrightarrow{f}(1,0,0) = (1,0,0)$$
$$\overrightarrow{f}(0,1,0) = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{f}(0,0,1) = (0,0,-1)$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos las condiciones del enunciado. Tenemos que $f(0,0,0) = (1,1,2)$, y además:

$$\overrightarrow{f}(e_1+e_2) = \overrightarrow{f}(e_1) + \overrightarrow{f}(e_2) = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $F = (0,0,1)$ y el plano afín S de ecuación $x - z = 0$. Definimos el conjunto:

$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid d(p,F) = d(p,S)\}.$$

Demostrar que C es una cuádrica y clasificarla.

Sea el vector unitario $v_3 = \dfrac{\overrightarrow{\pi_S(F)F}}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} \in \overrightarrow{S}^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$ y sea $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Como $v_3 \in \overrightarrow{S}^{\perp}$, tenemos que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{S}$.

Consideramos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{m_{F\pi_S(F)}, \mathcal{B}\}$. Las coordenadas de F en $\mathcal{R}$ son:

$$F = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{F\pi_S(F)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} = m_{F\pi_S(F)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} \cdot \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} =$$
$$= \left(0, 0, \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

Además, dado $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$, calculamos las coordenadas en $\mathcal{R}$ de $\pi_S(p)$:

$$\begin{aligned}
\pi_S(p) &= \pi_S(m_{F\pi_S(F)} + xv_1 + yv_2 + zv_3) = \\
&= \pi_S\left(\pi_S(F) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 + zv_3\right) = \\
&= \pi_S(\pi_S(F)) + \pi_{\overrightarrow{R}}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 + zv_3\right) = \pi_S(F) + xv_1 + yv_2 = \\
&= m_{F\pi_S(F)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi_S(F)F} + xv_1 + yv_2 = \left(x, y, -\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

donde he hecho uso de que $v_1, v_2 \in \overrightarrow{S}$, $\;v_3, \overrightarrow{F\pi_S(F)} \in \overrightarrow{S}^{\perp}$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p \in H &\Longleftrightarrow d(p, F) = d(p, S) \Longleftrightarrow d(p, F) = d(p, \pi_S(p)) \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2} = \\
&\qquad = \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2 + \left(z + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2 = \left(z + \frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - z\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|^2}{4}} = \\
&\qquad = \cancel{z^2} + z\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\| + \cancel{\frac{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|^2}{4}} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2z = \frac{x^2 + y^2}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un paraboloide elíptico.

Una vez resuelto el ejercicio desde un enfoque más teórico y abstracto, vamos a obtener los resultados numéricos, sabiendo el valor de F y de S. Tenemos que

$S = (0,0,0) + \mathcal{L}\left\{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$. Por tanto, $\overrightarrow{S}^\perp = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\}$. Veamos si tomando $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, tenemos que la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Es directo ver que es ortonormal, por lo que comprobemos si es positivamente orientada:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base ortonormal orientada positivamente. Calculamos ahora $\pi_S(F)$, para lo cual nos definimos un sistema de referencia auxiliar (no es el buscado) para realizar de forma más sencilla los cálculos. Sea este $\mathcal{R}_{aux} = \{0, \mathcal{B}\}$:

$$\pi_S(0,0,1) = (0,0,0) + \pi_{\overrightarrow{S}}(0,0,1) = (0,0,0) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}_{aux}}$$

para lo cual he tenido que calcular que $(0,0,1) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}}$. Por tanto, calculamos ahora $m_{F\pi_S(F)}$:

$$\begin{aligned} m_{F\pi_S(F)} = (0,0,1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{F\pi_S(F)} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{R}_{aux}} + \frac{1}{2}\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}} &= \\ = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{\mathcal{R}_{aux}} \end{aligned}$$

Calculamos ahora las coordenadas de $m_{F\pi_S(F)}$ en el sistema de referencia usual:

$$\begin{aligned} m_{F\pi_S(F)} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{\mathcal{R}_{aux}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \\ &= \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{4}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Sea entonces $\mathcal{R}' = \{m_{F\pi_S(F)}, \mathcal{B}\}$ el sistema de referencia buscado. Tenemos entonces que, en dicho sistema la ecuación asociada a C es:

$$2z = \frac{x^2+y^2}{\left\|\overrightarrow{\pi_S(F)F}\right\|} \Longrightarrow 2z = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}/2} \Longleftrightarrow \sqrt{2}z = x^2 + y^2$$

Vemos que, efectivamente, es un paraboloide elíptico.