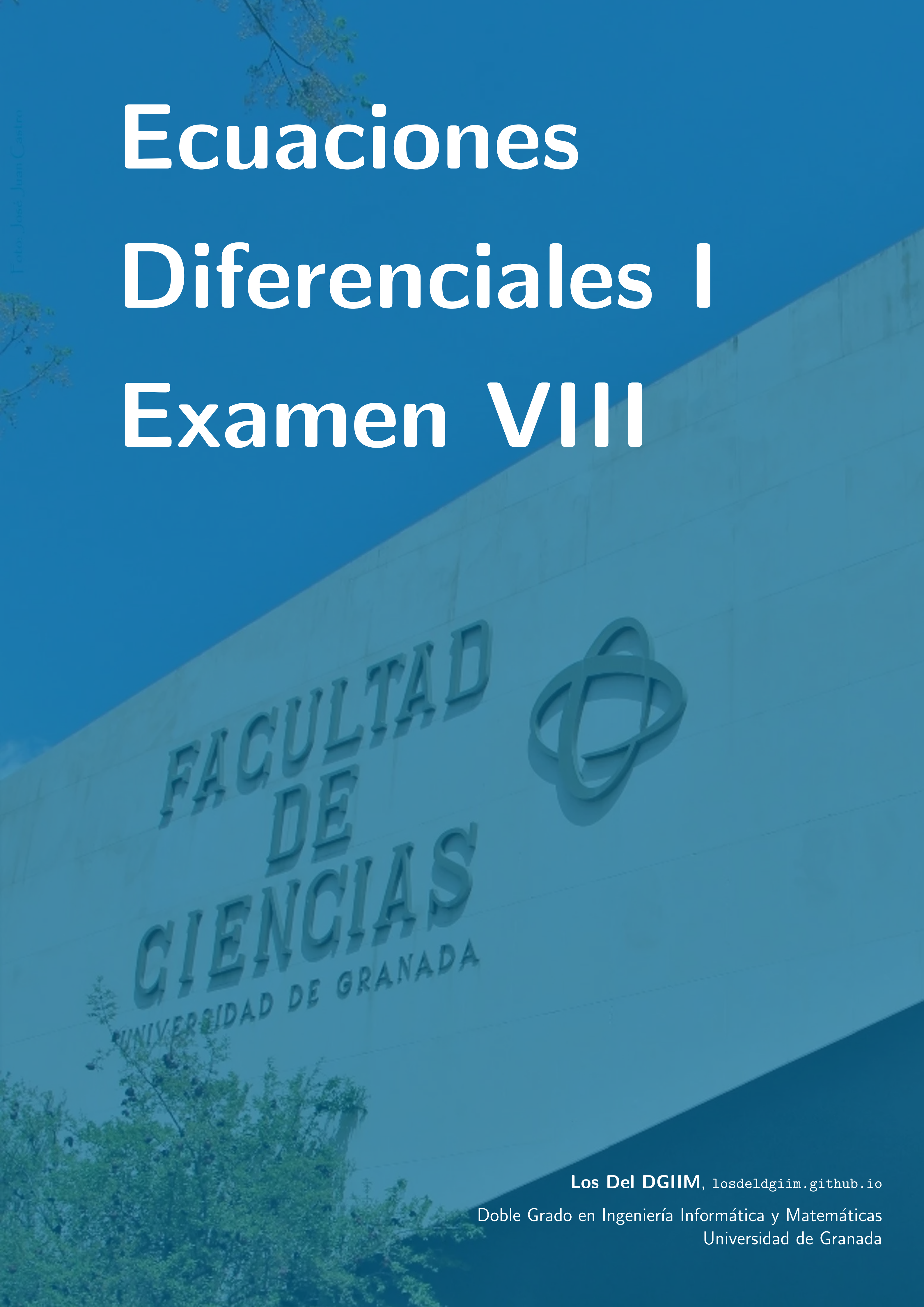
Ecuaciones Diferenciales I
Examen VIII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primer parcial.

Fecha 7 de noviembre de 2022.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1. Encuentra la ecuación diferencial de las curvas $(x, y(x))$ con la siguiente propiedad geométrica: en cada punto de la curva, su segunda coordenada coincide con la suma de las coordenadas del punto de intersección de la recta tangente con la bisectriz del primer cuadrante.

Dado un punto $P = (x, (y(x)))$, necesitamos calcular el punto de corte de la recta tangente a $y(x)$ por P con la bisectriz del primer cuadrante. Usando la ecuación punto−pendiente en las variables (u, v), tenemos que la recta tangente a $y(x)$ por u es:

$$y'(x) = \frac{v - y(x)}{u - x} \Longrightarrow r_t \equiv v = y'(x)(u - x) + y(x)$$

La bisectriz del primer cuadrante, en las variables (u, v), es:

$$b \equiv v = u$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} r_t \equiv v = y'(x)(u - x) + y(x) \\ b \equiv v = u \end{cases}$$

Igualando las componentes v, tenemos que:

$$y'(x)(u - x) + y(x) = u \Longrightarrow u = v = \frac{y(x) - y'(x)x}{1 - y'(x)}$$

Por tanto, la ecuación diferencial planteada es:

$$y = 2 \cdot \frac{y - y'x}{1 - y'}$$

En forma normal (aunque no es deseado por reducir el dominio), esta es:

$$y' = \frac{y - 2y}{-2x + y}$$

Ejercicio 2. Resuelve el problema de valores iniciales siguiente:

$$y^3 e^x + 3y^2 e^x y' = e^{-x}, \quad y(0) = 1.$$

Para ello, usa un cambio de variable del tipo $y = u^\alpha$ para α adecuada. Estudia el intervalo maximal de definición de la solución.

Ejercicio 3. Responda a los siguientes apartados:

1. Sean P, Q funciones de clase C^1 definidas en un dominio del plano. Argumenta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si $1\mu(x)$ es un factor integrante para la ecuación $P(x, y)dx + Q(x, y)y' = 0$, entonces también lo es para la ecuación $P(x, y) + Q(x, y)y' = h(x)$, con h función real de variable real de clase C^1.

2. Encuentra un factor integrante de la forma $\mu\left({}^{x}\!/_{y}\right)$ para la ecuación

$$x + y + (y - x)y' = 0.$$

Ejercicio 4. Sean P, Q funciones de clase C^1 definidas en un dominio del plano que verifican la condición de exactitud. Se define la función

$$U(x,y) = \int_0^1 \left[xP(\lambda x, \lambda^2 y) + 2\lambda y Q(\lambda x, \lambda^2 y) \right] \, d\lambda.$$

Calcula $\dfrac{\partial U}{\partial x}$.