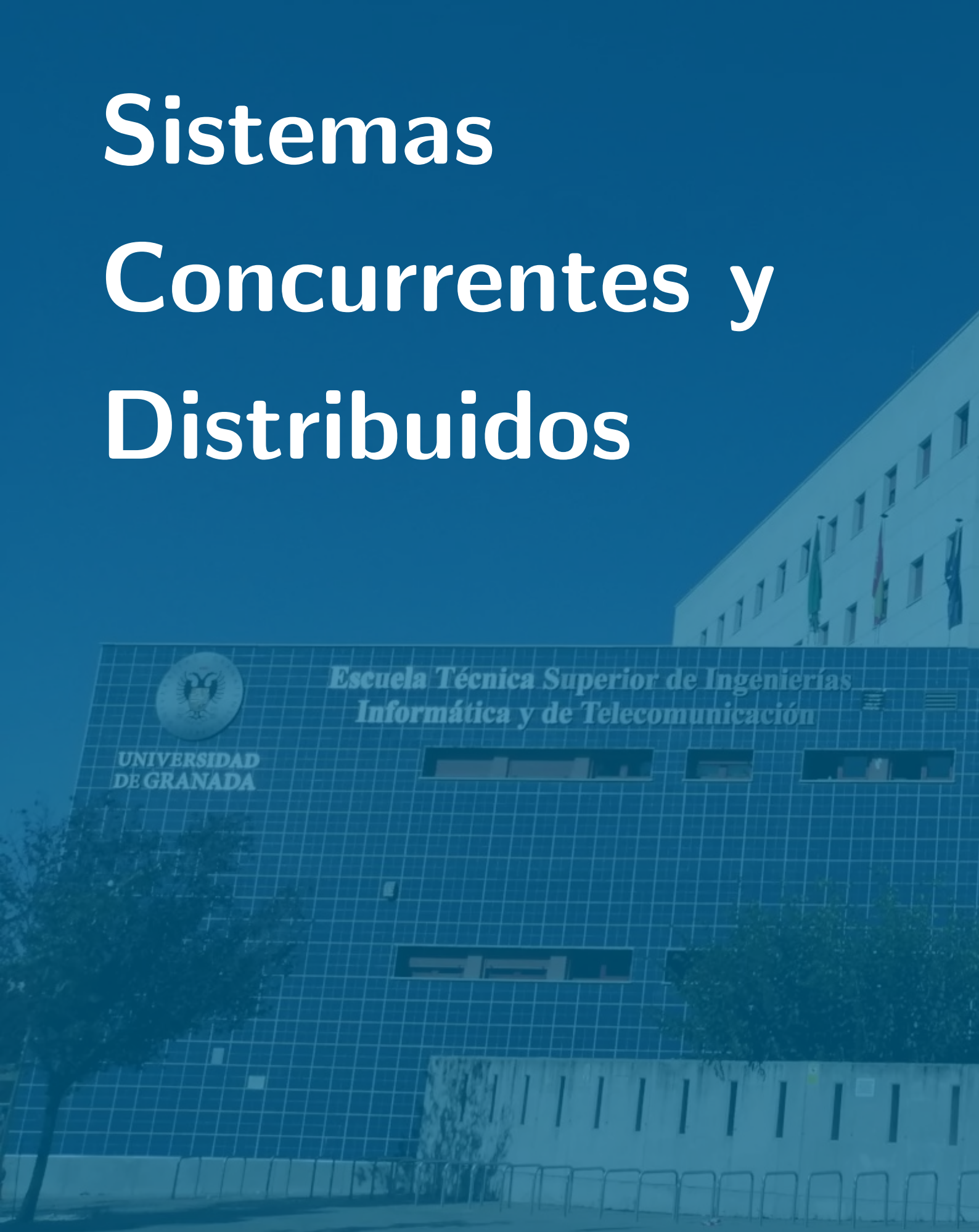
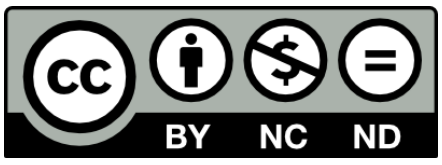
Sistemas Concurrentes y Distribuidos



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Sistemas Concurrentes y Distribuidos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Introducción a la Programación Concurrente

1.1. Conceptos básicos

Hasta ahora, nos hemos dedicado al estudio y desarrollo de programas secuenciales, que podemos entender de forma intuitiva como una ejecución lineal de instrucciones.

En programación concurrente, tendremos ahora múltiples unidades de ejecución independientes, a las que llamaremos procesos (sea un core o un procesador). La programación concurrente trata de coordinar los procesos para que cooperen entre sí con el fin de realizar un problema global de forma mucho más rápida de como lo haría un programa secuencial.

Podemos pensar que un proceso es una unidad de software abstracta conformada por con un conjunto de instrucciones a ejecutar y por el contexto del procesador (como los valores de los registros, el contador de programa, el puntero de pila, la memoria Heap, memoria para variables, el acceso a determinados recursos, ...), al que llamamos estado del proceso.

Cuando en esta asignatura aparezca "flujo de control", debemos pensar en una secuencia de ejecución de instrucciones. Es decir, como si fuera un proceso pero carente de un estado.

Nuestro trabajo en esta asignatura será gestionar la concurrencia, es decir, la ejecución independiente de dichos procesos con el fin de que no sea una sucesión de eventos incontrolados.

1.1.1. Comparación de programas concurrentes con secuenciales

Normalmente, en un programa concurrente tendremos más procesos que núcleos donde ejecutar dichos procesos, de donde aparece el concepto de concurrencia: en programación concurrente debe parecer que todos los procesos avanzan de forma simultánea, pese a haber más procesos que núcleos.

Si provocamos cambios de contexto dejando avanzar al resto de flujos de con-

trol, el programa no sufrirá las latencias provocadas por los procesos de E/S (por ejemplo), haciendo que el programa global sea más eficiente gracias a la concurrencia.

En sistemas que simulen el mundo real, podemos asociar un proceso con cada ente que intervenga en nuestro sistema (como una simulación del tráfico en una ciudad, o del movimiento de planetas), con lo que los sistemas de simulación pueden modelarse mejor con procesos concurrentes independientes, más que con programas secuenciales.

1.1.2. Definición de concurrencia

Podríamos definir la concurrencia como el paralelismo potencial que existe en los programa que puede aprovecharse independientemente de las limitaciones del hardware en el que se ejecuta el programa.

Como ya hemos mencionado, podremos tener un mayor número de procesos que de cores, y con este modelo cada uno de los procesos se ejecuta aparentemente al mismo tiempo que los demás.

El concepto de concurrencia es un concepto de programación a alto nivel que trata de representar el paralelismo potencial que existe en un programa. Con los compiladores adecuados, podemos programar en función de dichas características sin limitarnos por la arquitectura hardware del ordenador.

El objetivo fundamental de la concurrencia es simplificar toda la parte de la sincronización y comunicación entre los diferentes procesos de un programa, el cual suele ser un problema complejo sin solución fácil. Nos da un nivel algorítmico suficientemente independiente de los detalles del hardware para resolver dichos problemas, facilitando la portabilidad del código entre arquitecturas y lenguajes de programación.

Como beneficios de este modelo abstracto (el de la concurrencia), podemos destacar:

- Da herramientas, instrucciones y sentencias útiles para problemas de sincronización entre procesos.
- Las primitivas de programación en un lenguaje de alto nivel (como son los lenguajes concurrentes) son más fáciles de utilizar que con lenguajes de bajo nivel. Por ejemplo, los semáforos son más complejos que los monitores.
- Evita la dependencia con instrucciones de bajo nivel, haciendo que el programa pueda ejecutarse en otra computadora.

1.1.3. Axiomas de la programación concurrente

La programación concurrente es un modelo abstracto definido en base a 5 axiomas que nos dicen si un lenguaje es o no concurrente. En caso de no cumplirse, el código no va a poder ser transportable ni verificable.

Estos axiomas son:

1. **Atomicidad y entrelazamiento de instrucciones atómicas.**
   Al menos ciertas instrucciones han de ser atómicas (esto es, instrucciones que no pueden ser interrumpidas, como por ejemplo las lecturas y escrituras en memoria).

2. **Consistencia de los datos tras un acceso concurrente.**
   El entrelazamiento de instrucciones atómicas preserva la consistencia de los resultados de las operaciones. Es decir, si tenemos muchos procesos actuando a la vez sobre un conjunto de datos compartidos, debemos estar seguros de que los accesos a los mismos no los estropeen.

3. **Irrepetibilidad de las secuencias de instrucciones.**
   Cuando se ejecuta un programa concurrente, se sucede un entrelazamiento de las instrucciones de los procesos que se ejecutan a la vez, con lo que la secuencia de instrucciones que obtenemos como resultado de volver a ejecutar el mismo programa con otros datos es muy probable que no sea la misma.

   Esto dificulta el "debugging" de un programa concurrente, ya que podemos tener un error en el programa que repercuta en el mal funcionamiento del mismo sólo cuando se suceda una secuencia de instrucciones específica en la ejecución del mismo.

4. **Independencia de la velocidad de los procesos.**
   No puede hacerse ninguna suposición en la velocidad de ejecución de un proceso, ya que este puede verse suspendido o ralentizado, salvo que esta es positiva.

   La corrección en programas concurrentes no debe depender de la velocidad relativa de los procesos.

5. **Hipótesis del progreso finito.**

   - Un proceso debe tratar de avanzar todo lo que pueda. Esto es, si un proceso se está ejecutando, debe tratar de ejecutar tantas instrucciones como sea posible.
   - Una vez que un proceso comienza a ejecutar una sección de código, debe terminar dicha sección.
   - Todo proceso debe seguir progresando durante la ejecución de un programa.

Cuando se interpreta la ejecución de un programa concurrente como un conjunto de trazas de las cuales elegimos una al ejecutar el programa, estamos ignorando ciertos detalles, como:

- El estado de la memoria asignado a cada proceso.
- El valor de los registros de cada proceso.
- El coste computacional de los cambios de contexto.
- La política de planificación que se emplea de los procesos.
- El desarrollo de los programas es independiente del hardware.

1.2. Modelos para creación de procesos en un programa

En relación al número de procesos que se ejecutan en un programa, podemos clasificarlos en:

- Sistemas estáticos: El número de proesos en el programa es el mismo durante su ejecución. Dicho número se define al programarlo y en el momento de la compilación.
- Sistemas dinámicos: El número de procesos es variable, de forma que durante la ejecución del programa pueden crearse y destruirse procesos.

1.2.1. Grafos de Sincronización

Un Grafo de Sincronización es un Grafo Dirigido Acíclico (DAG) donde cada nodo representa una secuencia de sentencias del programa (o actividad). Nos sirven para definir situaciones de precedencia en la ejecución de un programa. Tenemos que tener instrucciones en el lenguaje concurrente que nos permitan representar el comienzo de las instrucciones con un DAG.

En un DAG, se suceden dependencias secuenciales, esto es, un proceso no empieza hasta que termina otro: dadas dos actividades S_1 y S_2, una arista desde la primera hacia la segunda ($S_1 \rightarrow S_2$) significa que S_2 no puede comenzar su ejecución hasta que S_1 haya finalizado.

Ejemplo. El DAG de la Figura 1.1 nos indica que la primera actividad que tendrá lugar en nuestro programa será la actividad S_1. Tras el fin de esta, se sucederán de forma concurrente las actividades S_2 y S_3. Tras terminar S_2, comenzará S_4 y, tras esta, se ejecutarán de forma concurrente S_5 y S_6. Finalmente, tras el final de S_5, S_6 y S_3, el programa terminará con la actividad S_7.

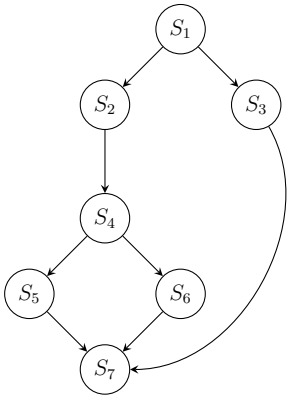


Figura 1.1: Ejemplo de DAG

En relación a cómo podemos crear los procesos, destacamos dos formas que podemos encontrarnos en los lenguajes paralelos:

1.2.2. Definición estructurada de procesos

En programación estructurada, contaremos con dos palabras reservadas del lenguaje que nos permitirán recrear la siguiente funcionalidad a explicar. En pseudocódigo, nos referiremos a ellas como `cobegin` y `coend`.

Dados dos procesos P_1 y P_2 que queremos que se ejecuten de forma concurrente, bastará especificar en pseudocódigo:

```
cobegin
  P1;
  P2;
coend
```

Hasta llegar a la palabra `cobegin` no comenzará ningún proceso. Tras esta, se sucederá un entrelazado de las instrucciones de P_1 y P_2, y no se saldrá de dicha región hasta que terminen ambos procesos.

Ejemplo. Un programa utilizando la definición estructurada de procesos que cumpla el DAG de la Figura 1.1 es el siguiente:

```
begin
  S1;
  cobegin
    begin
      S2;
      S4;
      cobegin
        S5;
        S6;
      coend
    end
    S3;
  coend
  S7;
end
```

1.2.3. Definición no estructurada de procesos

En lenguajes concurrentes que no cuenten con palabras reservadas que simulen `cobegin` y `coend`, contaremos con dos llamadas al sistema que nos permitirán replicar dicha funcionalidad para crear procesos:

fork
: Duplica el proceso que actualmente se está ejecutando y lo lanza a ejecución. Si se le especifica una rutina, cambiará el código del clon por dicha rutina.

join
: Espera a que cierto proceso termine de ejecutarse antes de proseguir con la ejecución del resto de instrucciones.

La función `fork` ya se vió en la asignatura de Sistemas Operativos, por lo que el estudiante debería estar familiarizado con ella.

Ejemplo. Un programa con definición no estructurada de procesos para el DAG de la Figura 1.1 es el siguiente:

```
begin
  S1;
  fork S3;
  S2;
  S4;
  fork S6;
  S5;
  join S3;
  join S6;
  S7;
end
```

1.3. Exclusión mutua y sincronización

No todas las secuencias de entrelazamiento de un programa concurrente van a ser aceptables. Para impedir que sucedan ciertas secuencias (o trazas) tenemos condiciones de sincronización, relacionadas con instrucciones de lenguajes de programación de tal forma que dichas instrucciones no se ejecutan hasta que no es cierta una condición que depende de las variables del proceso.

De esta forma, una **condición de sincronización** es una restricción en el orden en que se pueden entremezclar las instrucciones que generan los procesos de un programa. Podemos utilizarlas para asegurarnos de que todas las trazas del programa son correctas.

La **exclusión mutua** es un caso particular de sincronización en el que se obliga a que un trozo de código de un proceso sea ejecutado de forma totalmente secuencial de manera que no se permita el entrelazamiento con otros procesos. Este trozo de código (en el que no se permite el entrelazamiento de instrucciones con otros procesos) recibe el nombre de **sección crítica**. Se dice que las secciones críticas se ejecutan en exclusión mutua.

La mayoría de instrucciones en un programa son instrucciones compuestas (esto es, formadas por varias instrucciones en lenguaje máquina). Si queremos establecer secciones críticas para la ejecución de cada una de dichas instrucciones, rodearemos la instrucción por < y >. Notaremos así que se ejecuta de forma atómica.

Ejemplo. Por ejemplo, ante el siguiente código concurrente:

```
begin
  x := 0;
  cobegin
    x := x+1;
    x := x-1;
  coend
end
```

El resultado obtenido en la variable `x` es indeterminado, ya que puede ser 1, -1 o 0:

- El segundo proceso puede leer la variable `x` antes de que el primero escriba en ella, leyendo 0; y podría escribir en ella después de que lo haga el primer proceso, escribiendo finalmente un -1.

- Podría ejecutarse el primer proceso antes que el segundo, dejando la variable `x` a 1 y el segundo le cambiaría el valor a 0.

- El primer proceso puede leer la variable `x` antes de que el segundo escriba en ella, leyendo 0; y podría escribir en ella después de que lo haga el segundo proceso, escribiendo finalmente un 1.

Notemos que esto sucede ya que la instrucción `x := x OP a` es una instrucción compuesta de las instrucciones máquina: `LOAD x`, `OP a, x` y `STORE x`.

Sin embargo, ante el siguiente código concurrente:

```
1 begin
    x := 0;
    cobegin
      < x := x+1 >;
5     < x := x-1 >;
    coend
  end
```

Obtenemos siempre 0 en `x`, ya que las instrucciones de cada instrucción compeusta no se entrelazan, al ser secciones críticas.

Paradigma del Productor Consumidor

El paradigma del productor/consumidor es una situación de dos procesos que cooperan, uno escribiendo datos en una variable, al que llamaremos productor; y otro que leerá dicha variable y realizará cálculos con ella, al que llamaremos consumidor.

Este paradigma nos sirve de ejemplo para justificar las condiciones de sincronización, así como para ponerlas en práctica.

Son necesarias condiciones de sincronización ya que no todas las trazas de ejecución de un programa con estructura productor/consumidor son correctas.

Ejemplo. Si notamos por L a las lecturas del consumidor y por E a las escrituras del productor, las tres siguientes trazas de ejecución no son correctas:

1. `L, E, L, E, ...`, porque leemos una lectura de la variable antes de que el productor escriba en ella, leyendo un valor indeterminado y puediendo provocar el fallo del programa.

2. `E, L, E, E, L, ...`, porque el consumidor se ha perdido una escritura del productor en la variable, que puede hacer que cambie la salida del programa a una errónea.

3. `E, L, L, E, L, ...`, porque el consumidor ha usado un mismo dato dos veces, que también puede resultar en un mal funcionamiento del programa.

Para que el paradigma del productor/consumidor funcione correctamente, han de cumplirse las dos condiciones de sincronización siguientes:

1. El consumidor no puede leer la variable hasta que el productor haya escrito en ella. Cuando el consumidor lee, debe esperar a que el productor proporcione un nuevo dato antes de volver a leer.

2. El productor no puede escribir un nuevo valor hasta que el consumidor haya leido el último dato escrito (salvo en el primer valor a escribir).

Para cumplir con las condiciones de sincronización, deberemos añadir instrucciones en el código para que:

- El consumidor se detenga la primera vez hasta que el productor escriba en la variable.

- Se impida un segundo ciclo del consumidor hasta que se produzca el siguiente dato.

- Se impida un segundo ciclo del productor hasta que el dato anterior no haya sido leído por el consumidor.

1.4. Propiedades de los sistemas concurrentes

Una propiedad de un sistema concurrente es un atributo que se cumple en toda la ejecución del sistema, mientras que el conjunto de todas sus ejecuciones (de todas las posibles trazas generadas en la ejecución) nos dan el comportamiento del sistema.

Cualquier propiedad de un sistema concurrente puede ser formulada como combinación de dos tipos de propiedades fundamentales:

- Propiedades de seguridad (*safety*): Una propiedad de este tipo afirma que hay un estado del programa que es inalcanzable.

- Propiedades de vivacidad (*liveness*): Propiedades que afirman que en algún momento se alcanzará un estado deseado.

1.4.1. Propiedades de seguridad (*safety*)

Estas propiedades expresan determinadas condiciones que han de cumplirse durante toda la ejecución del programa. Cualquier propiedad que pueda ser formulada por la existencia de un estado inalcanzable, es una propiedad de seguridad. En dicho caso, deberíamos poder definir qué estado es inalcanzable y demostrar que el programa concurrente nunca puede llegar a dicho estado.

Las propiedades de seguridad pueden ya comprobarse en tiempo de compilación, ya que se cumplen independientemente de la ejecución concreta que sigue el sistema en tiempo de ejecución. Es por esto que se trata de una propiedad estática.

Ejemplos de problemas donde vemos propiedades de seguridad son:

- El problema de la exclusión mutua: La condición de que dos procesos del programa no puedan ejecutar simultáneamente las instrucciones de una sección crítica es de seguridad.
- Problema del productor/consumidor: Todos los estados que lleven a una traza distinta de `E, L, E, L, ...` son estados prohibidos.
- La situación de interbloqueo: Es una de las situaciones más críticas que se dan tras quebrantar una propiedad de seguridad, ya que hay procesos ocupando recursos que no están usando y que no liberarán.

1.4.2. Propiedades de vivacidad (*liveness*)

Las propiedades de vivacidad expresan que el sistema llegará en un futuro a cumplir determinadas condiciones (en un tiempo no indeterminado). En determinados ejemplos, dichas propiedades pueden entenderse como que las condiciones dinámicas de ejecución no lleven a que determinados procesos sean sistemáticamente adelantados por otros, no pudiendo avanzar en la ejecución de instrucciones útiles, de forma que el proceso sufra inanición (*starvation*).

Para demostrar que una propiedad es de vivacidad, debemos definir un "buen estado" del programa, y demostrar que es alcanzable para todos los procesos en un determinado tiempo.

Ejemplos de problemas donde vemos propiedades de vivacidad son:

- El problema de la exclusión mutua: Las secciones críticas se ejecutan por un proceso a vez. El sistema debe garantizar que, en la espera por entrar a una región crítica, no ocurra que un proceso sea siempre adelantado por otros procesos, llevando a que dicho proceso nunca ejecute la región crítica (que es nuestro estado deseado).
- El problema del productor/consumidor: Un proceso que quiera escribir o leer de la variable compartida ha de poder hacerlo en un tiempo finito.

Debemos notar que el axioma de proceso finito expuesto en secciones anteriores no tiene nada que ver con la ausencia de inanición:

- El axioma de proceso finito afirma que los procesos no pueden quedarse parados arbitrariamente, sino que estos deben intentar ejecutar instrucciones conforme les sea posible.
- Un proceso puede estar ejecutando instrucciones en un bucle indefinido pero no avanzar en la ejecución de las instrucciones de su código (es decir, puede estar realizando un trabajo inútil). En este caso, se cumpliría el axioma del proceso finito pero no se cumpliría la propiedad de vivacidad, ya que el proceso sufriría inanición.

Como ya venimos avisando, el no cumplimiento de la propiedad de vivacidad puede llevar a uno o más procesos a un estado de inanición (es indefinidamente pospuesto por otros, de forma que no pueda realizar aquello para lo que está programado). Aunque dicha situación es menos grave que una situación de interbloqueo

(ya que hace que el programa no avance nada), tenemos procesos inoperantes (que no realizan su trabajo), por lo que consideraríamos que el programa concurrente no es correcto.

De esta forma, un programa concurrente solo podrá ser completamente correcto cuando se demuestre que los procesos que lo integran no sufren inanición en ninguna de sus posibles ejecuciones.

Ejemplo (Cena de filósofos)**.** Disponemos de cinco filósofos, F_0, F_1, F_2, F_3 y F_4, que dedican su vida a pensar y en algún momento desean comer. Acceden a una mesa redonda en la que hay un plato del que todos pueden comer, siempre y cuando dispongan de dos palillos. Sólo hay 5 palillos, estos distribuidos de forma que entre dos filósofos hay un palillo.

Los filósofos son cabezotas, por lo que una vez congen un palillo, no están dispuestos a soltarlo. Ademś, no pueden arrebatar un palillo a otro filósofo por ir en contra de sus ideales morales.

Ante la situación descrita, podemos llegar a ver los dos ejemplos siguientes:

- Si todos los filósofos cogen a la vez el palillo de su derecha, cada filósofo dispondrá de un palillo y no habrá más palillos libres.

  Estamos ante una situación de interbloqueo: ningún filósofo puede comer y no podrá hacerlo jamás. Como resultado, todos los filósofos se morirán de hambre.

- Si, por ejemplo, los filósofos F_0 y F_2 (que rodean al filósofo F_1 en la mesa) conspiran para dejar morir de hambre al filósofo F_1 de forma que cuando F_0 deje el palillo que hay entre F_0 y F_1, F_2 coja el palillo que hay entre él y F_1 (y viceversa), conseguirán que F_1 nunca consiga sus dos palillos, llevando al filósofo a un estado de inanición y, posteriormente, la muerte.

Esta asignatura trata de crear protocolos que podamos demostrar que cumplen con las propiedades de seguridad y vivacidad, con el fin de no llevar nunca a situaciones de interbloqueos, inanición de algún(os) proceso(s), o alguna de las malas situaciones comentadas anteriormente.

1.5. Lógica de programas de Hoare y verificación de programas concurrentes

1.5.1. Corrección de los programas concurrentes

En los programas secuenciales, para comprobar la corrección total de los mismos, debemos probar que el programa **termina** dando **salidas esperadas** ante determinadas entradas.

Diremos que un programa secuencial es *parcialmente correcto* si, supuesto que este termine, entonces los resultados que obtiene tras ejecutarse son esperados.

En un programa secuencial, hay un único conjunto de datos de entrada que provoca un único conjunto de datos de salida. Esto no sucede en programas concurrentes, ya que el indeterminismo en la ejecución provoca distintas trazas posibles

del programa, y es bastante probable que todas las trazas posibles no provoquen los mismos resultados.

Para extender la definición de programa correcto a los programs concurrentes, notemos primero que muchos de ellos están pensado para no terminar nunca, de forma que su fin esté relacionado con alguna situación de error. Los sistemas operativos o los cajeros automáticos son programas concurrentes que están pensados para que nunca terminen, por lo que no podemos decir que una condición necesaria para que un programa concurrente sea correcto es que termine.

Para llevar a cabo la verificación de software, es decir, la demostración de que un programa es correcto, podemos emplear diferentes métodos:

Depuración de código. Explorar algunas ejecuciones de un código y comprobar que dichas ejecuciones son aceptables porque se cumplen las propiedades previamente fijadas.

Este método sirve para programas secuenciales, pero no para programas paralelos, ya que nos es imposible depurar un código ante todas las posibles combinaciones de distintas trazas de ejecución.

Razonamiento operacional. Realizar un análisis de casos exhaustivo para explorar todas las posibilidades de secuencias de ejecución de un código con el fin de garantizar que todas son correctas.

Es un método inviable para programas concurrentes. Por ejemplo, en un programa que use dos procesos, cada uno con 3 instrucciones atómicas, el número de posibles trazas de ejecución es de 20.

Razonamiento asertivo. Realizar un análisis abstracto basado en Lógica Matemática que permita representar de forma abstracta los estados[1] concretos que un programa alcanza.

De esta forma, el únifco enfoque posible es el razonamiento asertivo.

1.5.2. Introducción a la Lógica de Hoare

Axiomática del lenguaje

Construiremos ahora un sistema lógico formal (SLF) que facilite la elaboración de asertos o proposiciones lógicas ciertas con una base lógico-matemática precisa.

Nuestro SLF estará formado por:

- Símbolos: Como sentencias del lenguaje de programación, variables proposicionales, operadores, ...
- Fórmulas: Secuencias de símbolos bien formadas[2].

[1] Un estado del programa viene definido por los valores que tienen las variables del programa en determinado instante durante su ejecución.

[2] Entendemos por esto a sucesiones de símbolos con un significado fácilmente entendible.

- Axiomas: Proposiciones que mediante un consenso se consideran verdaderas.
- Reglas de inferencia o de derivación: Reglas que nos permiten derivar fórmulas ciertas a partir de axiomas o de fórmulas que ya conocemos que son ciertas.

Podemos pensar en las reglas de inferencia como teoremas matemáticos: tienen unas hipótesis y unas tesis de forma que, en cualquier situación que las hipótesis sean ciertas, las tesis lo serán.

Notación. Notaremos a las reglas de inferencia por:

$$(\text{nombre de la regla})\frac{H_1, H_2, \ldots, H_n}{C}$$

De forma que disponemos de n hipótesis (H_1, H_2, ..., H_n) en conjunción que nos llevan a la tesis C.

Para proseguir con el detallamiento del SLF, es necesario antes la definición de interpretación:

Definición 1.1 (Interpretación)**.** Sea A el conjunto de todos los asertos o fórmulas lógicas, una interpretación será una aplicación de dominio A y codominio el conjunto $\{V, F\}$[3].

De esta forma, dada una interpretación y un aserto v, podemos ver la veracidad o falsedad de v gracias a la interpretación.

Para que las demostraciones de nuestro SLF sean confiables, este sistema debe ser seguro y completo. Fijada una interpretación:

- Decimos que un sistema es seguro si todos los asertos son hechos ciertos.
- Decimos que un sistema es completo si todos los hechos ciertos son asertos.

A partir de ahora, supondremos que no hay diferencia entre asertos y hechos ciertos. Es decir, que nuestro sistema es seguro y completo.

Lógica proposicional

Las fórmulas del SLF que estamos construyendo se llaman proposiciones, y están formadas por:

- Constantes proposicionales $\{V, F\}$.
- Variables proposicionales $\{p, q, r, \ldots\}$.
- Operadores lógicos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \longleftrightarrow\}$.
- Expresiones formadas por constantes, variables y operadores.

[3]Cuyos elementos interpretamos como verdadero y falso.

Al igual que sucedía en la asignatura de Lógica y Métodos Discretos, podemos extender la definición de las interpretaciones y aplicarlas sobre las proposiciones del lenguaje, mediante unas reglas ya conocidas.

De esta forma, diremos que:

- Una fórmula es satisfacible si existe alguna interpretación que la satisfaga.
- Una fórmula será válida si se satisface en cualquier estado del programa (es decir, si cualquier interpretación la satisface). Las llamaremos tautologías.

Dentro de la lógica proposicional de este SLF son tautologías algunas fórmulas ya conocidas, como la distributiva de $\wedge$ y de $\vee$ o la conmutatividad de las mismas, por ejemplo.

Definición 1.2. Dadas dos fórmulas P y Q, diremos que son equivalentes siempre y cuando que P se satisfaga para una cierta interpretación si y solo si Q se satisface para la misma interpretación.

Por ejemplo, $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ son fórmulas equivalentes.

1.5.3. Lógica de programas

Este SLF trata de hacer afirmaciones sobre la ejecución de un programa. Incluimos por tanto a los triples, que tienen la forma

$$\{P\}S\{Q\}$$

donde P y Q son asertos (llamados precondición y poscondición, respectivamente) y S es una sentencia simple o estructurada de un lenguaje de programación. En P y Q podrán aparecer tanto variables lógico-matemáticas como variables del propio programa. Para distinguirlas, notaremos a las primeras con letas mayúsculas y a las segundas con minúsculas.

Un triple $\{P\}$ S $\{Q\}$ se interpreta como cierto si S es ejecutado en un estado del programa que satisface P y, si la ejecución de S termina, el estado en el que S termina satisface Q, independientemente de los efectos producidos por los entrelazamientos de instrucciones atómicas de S.

Notemos que de esta forma el triple $\{V\}$ `while true do begin end` $\{F\}$ es siempre cierto, ya que S se ejecuta en un estado del programa que satisface P y S nunca termina.

Notación. A partir de la notación de los triples, y siendo P una fórmula del lenguaje, notaremos por

$$\{P\}$$

Al conjunto de los estados del programa que verifican P.

De esta forma, $\{V\}$ es el conjunto de todos los estados de un programa, ya que todos los estados de dicho programa verifican V. Análogamente, $\{F\}$ se corresponde con el conjunto vacío.

Notación. Dadas P y Q asertos equivalentes, entonces obtenemos el mismo conjunto de estados del programa que verifican dichos asertos:

$$\{P\} = \{Q\}$$

Sin embargo, para evitar la confusión con el operador de asignación, notaremos las igualdades entre los conjuntos de estados de un programa con el operador $\equiv$.

Observación. Notemos que, dados cualesquiera asertos $\{P\}$ y $\{Q\}$, podemos pensar en:

- $\{P \wedge Q\}$ como en $\{P\} \cap \{Q\}$.
- $\{P \vee Q\}$ como en $\{P\} \cup \{Q\}$.
- $\{P\} \rightarrow \{Q\}$ como en $\{P\} \subseteq \{Q\}$

De esta forma, notemos que siempre se verifica que:

- $\{V \wedge P\} = \{P\}$.
- $\{V \vee P\} = \{V\}$.
- $\{F \wedge P\} = \{F\}$.
- $\{F \vee P\} = \{P\}$.
- $\{F\} \rightarrow \{P\} \rightarrow \{V\}$.
- $\{P \wedge Q\} \rightarrow \{P\} \rightarrow \{P \vee Q\}$.

Definición 1.3 (Sustitución textual)**.** Dado un aserto P, que contiene al menos una aparición libre de la variable x, y una expresión e, definimos la sustitución textual de x por e, notado por P_e^x, como la sustitución textual de todas las ocurrencias libres de x en P por e.

Verificación de programas secuenciales

Enumeramos ahora los axiomas de nuestra Lógica de programas:

Axioma de la sentencia nula $\{P\}$ *null* $\{P\}$**.**
Es decir, si el aserto P es cierto antes de la ejecución de la sentencia nula (esta es, la que no cambia nada en el programa), P seguirá siendo cierto tras la ejecución de la misma.

Axioma de asignación $\{P_e^x\}\ x = e\ \{P\}$**.**
Es decir, la asignación de un determinado valor e a una variable x solo cambia en el programa el valor de dicha variable x.

Ejemplo. Un ejemplo de uso del axioma de asignación es el siguiente:
Tratamos de probar que el triple $\{V\}\ x = 5\ \{x = 5\}$ es cierto. Es decir, que desde cualquier estado del programa, si asignamos 5 a x, acabaremos en cualquier estado del programa en el que x valga 5.

Demostración. Sea P la fórmula dada por $x = 5$ y e el valor numérico 5, sabemos que el axioma de asignación es cierto, luego se cumplirá que:

$$\{P_e^x\}\ x = e\ \{P\}$$

de donde:

$$\{V\} \equiv \{5 = 5\}\ x = e\ \{x = 5\}$$

□

Seguidamente, para cada una de las sentencias que afectan al flujo de control en un programa secuencial, contamos con reglas de inferencia para poder formar triples correctos en las demostraciones; además de dos reglas básicas de consecuencia.

Regla de la consecuencia (1).

$$\frac{\{P\}S\{Q\}, \{Q\} \rightarrow \{R\}}{\{P\}S\{R\}}$$

Es decir, siempre podemos hacer más débil la poscondición de un triple, de forma que este siga siendo cierto.

Regla de la consecuencia (2).

$$\frac{\{R\} \rightarrow \{P\}, \{P\}S\{Q\}}{\{R\}S\{Q\}}$$

Es decir, siempre podemos hacer más fuerta la precondición de un triple, manteniendo su veracidad.

Regla de la composición.

$$\frac{\{P\}S_1\{Q\}, \{Q\}S_2\{R\}}{\{P\}S_1; S_2\{R\}}$$

Es decir, podemos condensar dos triples en uno, siempre y cuando la poscondición de uno sea la precondición del otro.

Regla de la conjunción.

$$\frac{\{P_1\}\ S\ \{Q_1\}, \{P_2\}\ S\ \{Q_2\}}{\{P_1 \wedge P_2\}\ S\ \{Q_1 \wedge Q_2\}}$$

Es decir, si tenemos distintas pre y poscondiciones para una misma instrucción, podemos juntarlas todas en conjunción.

Regla del *if*.

$$\frac{\{P \wedge B\}S_1\{Q\}, \{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}}{\{P\}\ \texttt{if B then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ \{Q\}}$$

De esta forma, siempre que queramos probar que una tripleta de la forma

$$\{P\}\ \texttt{if X then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ \{Q\}$$

es cierta, tendremos que probar que las tripletas

$$\{P \wedge X\}S_1\{Q\} \qquad \{P \wedge \neg X\}S_2\{Q\}$$

son ciertas.

Regla de la iteración. Suponiendo que una sentencia `while` puede iterar un número arbitrario de veces (incluso 0), tenemos que:

$$\frac{\{I \wedge B\} S \{I\}}{\{I\} \texttt{ while B do } S \texttt{ end do } \{I \wedge \neg B\}}$$

Donde a la proposición I la llameremos invariante.

1.5.4. Verificación de sentencias concurrentes

Sabemos ya hacer demostraciones para verificar la corrección de programas secuenciales. Será de nuestro interés ahora permitir la ejecución concurrente de dichos flujos de ejecución secuenciales, con el objetivo de probar la corrección de un programa concurrente.

Si entendemos la ejecución de un programa concurrente como un entrelazamiento de las instrucciones atómicas ejecutadas por los procesos del programa, entonces hemos de tener en cuenta para la demostración de corrección que no todas las secuencias de entrelazamiento resultan ser aceptables. Para poder programar correctamente, usamos sentencias de sincronización, tales como:

- Secciones críticas en el código para evitar condiciones de carrera.
- Sincronización con una condición (hacer que un proceso espere hasta que se dé una determinada condición en el estado del programa).

Usando estas operaciones, conseguiremos hacer correctos nuestros programas concurrentes (que es de lo que trata la asignatura), para luego demostrar matemáticamente que, efectivamente, dichos programas son correctos.

Dados varios triples de Hoare que representan secciones de programas secuenciales de los que hemos probado su corrección parcial, tratamos ahora de introducir estas secciones de programa en un programa concurrente.

Sin embargo, puede suceder que un proceso ejecute una instrucción atómica de su región de código que haga falsa la precondición o la poscondición de una sentencia que esté siendo simultáneamente ejecutada por otro proceso, invalidando su corrección.

Ejemplo. Por ejemplo, tenemos los dos siguientes triples:

$$\{x = 0\}\ x = x + 2\ \{x = 2\}$$
$$\{V\}\ x = 0\ \{x = 0\}$$

cuya corrección puede comprobarse fácilmente usando el axioma de asignación.

Ahora, nos disponemos a ejecutar el siguiente código concurrente:

```
1 x = 0;
  cobegin
    <x = x + 2;> || <x = 0;>
  coend
```

donde podemos ver que la ejecución de una instrucción *interfiere* con la poscondición de la otra instrucción:

- La poscondición $\{x = 0\}$ de la instrucción de la derecha no se cumple tras la ejecución de `<x = x + 2;>` (en caso de que esta se ejecute después).
- La poscondición $\{x = 2\}$ de la instrucción de la izquierda no se cumple tras la ejecución de `<x = 0;>` (en caso de que esta se ejecute después).
- Notemos que la ejecución de una instrucción no *interfiere* con la precondición de la otra.

La ejecución de una instrucción hace falsa la poscondición de la otra, invalidando la demostración que hicimos del trozo de programa secuencial y, por tanto, del programa concurrente.

Sin embargo, podemos hacer un cambio en los triples iniciales para no tener este problema: usando la primera regla de la consecuencia, podemos relajar las poscondiciones de ambos triples:

$$\{x = 0\}\ x = x + 2\ \{x = 0 \vee x = 2\}$$
$$\{V\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\}$$

haciendo que estos sigan siendo correctos. Si ahora tratamos de ejecutar de forma concurrente estas dos instrucciones, observamos que independientemente de la traza de ejecución, la ejecución de una instrucción no hace falsas las pre o poscondición de la otra.

Antes de proceder a la formalización del concepto de interferencia, hemos de comentar ciertos detalles:

- Una acción atómica elemental o sección crítica realiza una transformación indivisible del estado del programa, de forma que cualquier estado intermedio que pudiera existir no sería visible para el resto de los procesos.

  En los programas concurrentes, puede suceder que las asignaciones no sean atomicas, por estar típicamente implementadas por varias instrucciones máquina:

```
1 y = 0; z = 0;
  cobegin
    x = y + z; || y = 1; z = 2
  coend
```

  El programa superior puede dar como resultados esperados de `x` 0, 1, 3 (como el lector habrá podido adivinar) y 2. Este último valor sería resultado de haber leído en la instrucción de la izquierda el valor de `y`, la ejecución de las dos instrucciones de la derecha, y finalmente añadir `z` al valor leído, guardándolo en `x`.

  Se trata de un ejemplo curioso, ya que $z + y = 2$ no se correponde con ningún estado del programa. Esta situación puede resolverse con el uso de secciones críticas, ya que en este caso lo que falla es el programa concurrente, que está mal programado.

- Una expresión que no hace referencia a ninguna variable modificada por otro proceso será evaluada de forma atómica, ya que ninguno de los valores de la variable puede ser modfiicada mientras la expresión resulta evaludada.

  De esta forma, si consideramos el siguiente programa concurrente en el que los procesos se encuentran usando variables disjuntas:

```
x = 0; y = 0;
cobegin x = x + 1; || y = y + 1; coend
```

  La ejecución de una instrucción no tiene nada que ver con la ejecución de la otra.

Interferencia

Dado un triple $\{P\}S\{Q\}$, este puede contener varios asertos: $\{P\}$, $\{Q\}$ y cualquiera que sirve como pre y poscondición entre las acciones atómicas incluidas en la sección de código S.

Ejemplo. De esta forma, el triple

$$\{V\}\ x = 0;\ x = x + 1;\ \{x = 1\}$$

contiene los asertos $\{V\}$, $\{x = 0\}$ y $\{x = 1\}$. Sin embargo, el triple

$$\{V\}\ <x = 0;\ x = x + 1;>\ \{x = 1\}$$

contiene los asertos $\{V\}$ y $\{x = 1\}$, ya que la ejecución de las dos instrucciones se hace de forma atómica y ningún otro proceso puede ver el estado intermedio ($x = 0$) de la variable x, ya que como hemos mencionado en el primer punto, las regiones críticas realizan una transformación **indivisible** del estado del programa.

Definición 1.4 (Interferencia)**.** Dado un triple $\{P\}S\{Q\}$ y una sentencia atómica a[4] con precondición $pre(a)$, decimos que a no interfiere con $\{P\}S\{Q\}$ si para todo aserto A del triple se cumple el triple

$$NI(A, a) :\equiv \{A \wedge pre(a)\}a\{A\}$$

Es decir, si el aserto A es invariante para la sentencia a.

Observación. Notemos que, en la definición anterior, hemos empleado el símbolo $\equiv$ para denotar la igualdad entre dos triples. Este abuso de la notación será no obstante fácil de distinguir en el contexto.

Definición 1.5. Dados n triples $\{P_i\}S_i\{Q_i\}$, decimos que están libres de interferencia si S_i no interfiere con $\{P_j\}S_j\{Q_j\}$, para cada par (i, j) con $i \neq j$.

[4]Esta puede contener tantas líneas de código como queramos, lo importante es que su ejecución se haga de forma atómica.

La falta de interferencia significa que la ejecución atómica de pasos de un proceso del programa nunca falsifica los asertos usados en las demostraciones individuales de los otros procesos.

Esto es de especial relevancia en los programas concurrentes, ya que para demostrar su corrección, primero hemos de demostrar que la ejecución secuencial de cada proceso es correcta (en caso de no serlo, directamente el programa concurrente no es correcto), para luego demostrar que la ejecución de un proceso no interfiere con otro, para así garantizar que, aunque tengamos varios procesos ejecutándose de forma concurrente, como no interfieren entre sí, no se modifica la corrección del programa.

Veremos próximamente que con garantizar la corrección secuencial de los procesos y la no interferencia entre los mismos, nos es suficiente para garantizar la corrección de los programas concurrentes, gracias a este razonamiento intuitivo que acabamos de realizar (lo único que cambia al ejecutar los procesos de forma concurrente es que puedan modificar variables de otros procesos, interfiriendo en su ejecución, sin embargo, si no interfieren en la misma, todo saldrá bien).

Ejemplo. Recuperando el ejemplo del inicio de la sección, nos disponemos a demostrar que los triples $\{x = 0\}\ x = x + 2\ \{x = 0 \vee x = 2\}$, $\{V\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\}$ están libres de interferencia. Para ello, hemos de demostrar $2 \cdot 2 = 4$ triples (ya que tenemos dos instrucciones, cada una con 2 asertos):

$$
\begin{aligned}
NI(x = 0,\ x = 0) &\equiv \{x = 0 \wedge V\}\ x = 0\ \{x = 0\} \\
NI(x = 0 \vee x = 2,\ x = 0) &\equiv \{(x = 0 \vee x = 2) \wedge V\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\} \\
NI(V,\ x = x + 2) &\equiv \{V \wedge x = 0\}\ x = x + 2\ \{V\} \\
NI(x = 0 \vee x = 2,\ x = x + 2) &\equiv \{(x = 0 \vee x = 2) \wedge x = 0\}\ x = x + 2\ \{x = 0 \vee x = 2\}
\end{aligned}
$$

1. Para el primer triple:

   $$\{x = 0 \wedge V\}\ x = 0\ \{x = 0\}$$

   Tenemos que $\{x = 0 \wedge V\} \equiv \{x = 0\}$, por lo que basta con probar:

   $$\{x = 0\}\ x = 0\ \{x = 0\}$$

   Usando el axioma de asignación:

   $$\{V\} \equiv \{0 = 0\} \equiv \{x = 0\}_0^x\ x = 0\ \{x = 0\}$$

   Y como $\{x = 0\} \rightarrow \{V\}$, usando la segunda regla de consecuencia, tenemos ya probado $NI(x = 0,\ x = 0)$.

2. Para el segundo triple

   $$\{(x = 0 \vee x = 2) \wedge V\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\}$$

   Tenemos que $\{(x = 0 \vee x = 2) \wedge V\} \equiv \{x = 0 \vee x = 2\}$, por lo que basta con probar:

   $$\{x = 0 \vee x = 2\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\}$$

Usando el axioma de asignación:

$$\{V\} \equiv \{V \vee F\} \equiv \{0 = 0 \vee 0 = 2\} \equiv \{x = 0 \vee x = 2\}_0^x \; x = 0 \; \{x = 0 \vee x = 2\}$$

Y como $\{x = 0 \vee x = 2\} \rightarrow \{V\}$, tenemos el triple probado usando otra vez la segunda regla de la consecuencia.

3. Para el tercer triple:

$$\{V \wedge x = 0\} \; x = x + 2 \; \{V\}$$

Como $\{V \wedge x = 0\} \equiv \{x = 0\}$, probamos:

$$\{x = 0\} \; x = x + 2 \; \{V\}$$

Dado que el triple $\{x = 0\} \; x = x + 2 \; \{x = 2\}$ es cierto (se comprueba trivialmente con el axioma de asignación) y como $\{x = 2\} \rightarrow \{V\}$, tenemos el triple probado usando la primera regla de la consecuencia.

4. Para el cuarto triple:

$$\{(x = 0 \vee x = 2) \wedge x = 0\} \; x = x + 2 \; \{x = 0 \vee x = 2\}$$

Como:

$$\{(x = 0 \vee x = 2) \wedge x = 0\} \equiv \{x = 0\}$$

Tenemos que probar:

$$\{x = 0\} \; x = x + 2 \; \{x = 0 \vee x = 2\}$$

Usando el axioma de asignación:

$$\{x = 0 \vee x = 2\}_{x+2}^x \; x = x + 2 \; \{x = 0 \vee x = 2\}$$

$$\{x = 0 \vee x = 2\}_{x+2}^x \equiv \{x + 2 = 0 \vee x + 2 = 2\} \equiv \{x = -2 \vee x = 0\}$$

Y como $\{x = 0\} \rightarrow \{x = 0 \vee x = -2\}$, lo tenemos demostrado usando la segunda regla de consecuencia.

A continuación, veremos una regla de inferencia relacionada con lo que explicamos tras la definición de interferencia, y es que nos es suficiente con demostrar la corrección secuencial de los procesos y la no interferencia entre los mismos para poder garantizar la corrección de un programa concurrente.
Un programa concurrente pueden entenderse como la ejecución secuencial de estructuras `cobegin-coend`, por lo que será suficiente con demostrar la corrección parcial de cada una de estas estructuras para luego demostrar la corrección parcial de todo el programa, que se reducirá a una demostración de un programa secuencial.

Regla de la composición concurrente segura de procesos.

$$\frac{\{P_i\} \; S_i \; \{Q_i\} \text{ son triples libres de interferencia } 1 \leqslant i \leqslant n}{\{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n\} \; \texttt{cobegin} \; S_1 \; || \; S_2 \; || \; \ldots \; || \; S_n \; \texttt{coend} \; \{Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n\}}$$

Ejemplo. Aplicamos ahora la regla de la composición concurrente al ejemplo que venimos manejando. Como hemos visto, los triples $\{x = 0\}\ x = x+2\{x = 0 \vee x = 2\}$ y $\{V\}\ x = 0\ \{x = 0 \vee x = 2\}$ están libres de interferencia, por lo que podemos aplicar la regla de la composición concurrente, llegando a que el triple

$$\{x = 0\}$$
$$\texttt{cobegin}\ \ x = x + 2;\ \ ||\ x = 0;\ \ \texttt{coend}$$
$$\{x = 0 \vee x = 2\}$$

es cierto.

Ejemplo. Ante el siguiente código:

```
1 x = 0; y = 0;
  cobegin x = y + 1; || y = x + 1; coend
```

Notemos que los posibles resultados de ejecución del mismo son (donde se ha notado por $l(x)$ la lectura de la variable x y por $e(x)$ a la escritura en la variable x, respectivamente con y):

Traza	x	y	Traza	x	y	Traza	x	y
$l(x)$	0	0	$l(x)$	0	0	$l(y)$	0	0
$l(y)$	0	0	$e(y)$	0	1	$e(x)$	1	0
$e(x)$	1	0	$l(y)$	0	1	$l(x)$	1	0
$e(y)$	1	1	$e(x)$	2	1	$e(y)$	1	2

Vemos en la tabla que hay tres posibles resultados del programa:

1. Uno en el que primero se leen las variables y luego se modifican.
2. Otro en el que primero se modifica y y luego x.
3. Un último en el que primero se modifica x y luego y.

Vemos que al tener varios procesos que escriben y modifican varias variables, debemos distinguir varias casuísticas para luego determinar los posibles resultados del programa.

Sin embargo, ante el siguiente código:

```
1 x = 0; y = 0;
  z = x;
  cobegin x = y + 1; || y = z + 1; coend
```

obtenemos los siguientes posibles resultados:

Traza	x	y	Traza	x	y	Traza	x	y
$l(z)$	0	0	$l(z)$	0	0	$l(y)$	0	0
$l(y)$	0	0	$e(y)$	0	1	$e(x)$	1	0
$e(x)$	1	0	$l(y)$	0	1	$l(z)$	1	0
$e(y)$	1	1	$e(x)$	2	1	$e(y)$	1	1

Donde sólo hay una única variable compartida que es leida y escrita por un único proceso, el número de casos a tener en cuenta disminuye, ya que sólo debemos distinguir dos casos:

1. Al ejecutar el código de la izquierda, la variable y todavía no ha sido modificada.

2. Al ejecutar el código de la izquierda, la variable y ha sido modificada ya.

Esta propiedad de los programa recibe el nombre de **como máximo una vez**, donde solo encontramos una variable que es leída por varios procesos pero que solo es modificada por uno de ellos. De esta forma, el número de casuísticas disminuye considerablemente, ya que sólo hemos de distinguir el caso de que la variable haya sido modificada y el caso de que todavía no lo haya sido.

1.5.5. Verificación usando invariantes globales

La demostración de verificación de programas concurrentes usando la regla de la composición concurrente es tediosa, ya que es necesario comprobar la veracidad de muchos triples antes de poder aplicarla. Es por tanto que buscamos otra forma predominante de probar los programas concurrentes.

Los invariantes globales (IG) de un programa pueden entenderse como expresiones definidas a partir de las variables globales de un programa. Estas suelen definirse como un predicado de la Lógica de Programas que captura la relación que existe entre las variables compartidas por los procesos de un programa concurrente.

Si cualquier aserto $\{C\}$ de un triple $\{P_i\}\ S_i\ \{Q_i\}$ se puede escribir como una conjunción del tipo $\{IG \wedge L\}$ donde IG es un invariante global del programa y $\{L\}$ es un predicado en el que intervienen solo variables de un proceso o parámetros de una función, entonces las demostraciones de los procesos secuenciales estarán libres de interferencias.

De esta forma, para que un predicado $\{I\}$ definido a partir de las variables compartidas entre los procesos pueda ser considerado un IG válido, se ha de cumplir que:

1. Sea cierto para los valores iniciales de las variables del programa que aparecen en $\{I\}$.

2. Se ha de poder demostrar la no interferencia de dicho aserto I con cualquier sentencia atómica de S_i, es decir, se ha de poder probar el triple

$$NI(I, a) \equiv \{I \wedge pre(a)\}\ a\ \{I\}$$

para toda a sentencia atómica de S_i.

Ejemplo. Si tenemos un programa que sigue el paradigma del productor/consumidor y queremos probar su corrección parcial (esto es, que el programa hace lo que esperamos), suponiendo que ya tenemos demostrada las correcciones parciales del

productor y del consumidor, faltaría probar la no interferencia entre ambos. Para ello, y con el fin de evitar comprobar múltiples triples de Hoare, decidimos realizar la prueba mediante un invariante global, de foma que dicho invariante nos dé la corrección parcial de nuestro programa. Si conseguimos probar la invarianza de dicha propiedad, tendremos demostrada la corrección del programa.

Para la corrección parcial, queremos probar que el consumidor no lea una determinada variable x antes de que el productor no escriba en ella, y que el productor espere a que el consumidor lea el valor anterior de x antes de modificarlo. Debemos buscar una forma de representar esto matemáticamente, para así definir I como la relación matemática que cumpla esto, y proceder a demostrar que I es un invariante global, para así tener la corrección de nuestro programa probado.

Una forma de hacerlo es contando el número de veces que se lee y escribe en la variable:
Sea n el número de veces que el productor ha producido y escrito un valor en x y m el número de veces que el consumidor ha leído el valor de x, debe cumplirse que consumidor no lea x más veces que el productor haya escrito en ella, es decir, que

$$m \leqslant n$$

Así mismo, el productor no puede escribir en x más veces de las que el consumidor haya leido x, sino que sólo puede hacerlo una vez que este lo haya hecho. Es decir, si $m = n$, entonces el productor podrá volver a escribir en x, por lo que tendremos que $n = m+1$. Sin embargo, este no puede volver a escribir hasta que el consumidor haya leido la variable. De esta forma, limitamos al productor de generar más datos de las que el productor pueda consumir, con la expresión:

$$n \leqslant m + 1$$

En resumen, el buen funcionamiento del programa dependerá del invariante global:

$$I = m \leqslant n \leqslant m + 1$$

siendo m y n las variables anteriormente definidas.

Pasamos ahora a la demostración de la corrección de nuestro programa:

1. Primero, debemos comprobar que el invariante es cierto al inicio del programa.

   Inicialmente, el productor no ha escrito todavía en x, al igual que el consumidor no ha leido todavía x, por lo que:

   $$0 = m \leqslant n = 0 \leqslant m + 1 = 0 + 1$$

   Y vemos que se verifica I.

2. Posteriormente, debemos dividir el programa en bloques de forma que debemos probar que antes y después de cada bloque el invariante sigue siendo válido. Los bloques que consideraremos estarán formados por una iteración del productor y por una del consumidor.

Suponiendo que al inicio de un bloque se verifica I, es decir, que $m \leqslant n \leqslant m+1$, debemos probar que las la escritura de x por el productor y tras la lectura de x por el consumidor se verifica $m' \leqslant n' \leqslant m' + 1$, siendo m' y n' el número actualizado de veces que se ha leido y escrito en la variable, respectivamete.

Para ello, suponemos que se verifica I. Como demostramos anteriormente la corrección parcial de cacda programa (del productor y del consumidor), sabemos que tras un bloque (es decir, una iteración de cada uno de los dos programas), el productor habrá generado un dato que el consumidor habrá leido (o que el consumidor habrá leido un dato y el productor habrá generado el siguiente). En cualquier traza de ejecución, tendremos que:

$$m' = m + 1 \qquad n' = n + 1$$

Y ahora tendremos que comprobar que el invariante se sigue cumpliendo:

$$m \leqslant n \leqslant m + 1 \Longrightarrow m + 1 \leqslant n + 1 \leqslant m + 2 \Longrightarrow m' \leqslant n' \leqslant m' + 1$$

Notemos que hemos supuesto que se verificaba I al inicio del bloque. En principio nada nos garantiza esto, pero como anteriormente probamos que se cumplía al inicio del programa, se cumple antes de la primera ejecución del bloque, y como hemos demostrado que se cumple tras el bloque, se cumplirá antes de la segunda ejecución del bloque, ... Hemos realizado una especie de inducción en nuestro SLF.

Hemos demostrado ya que I es un invariante global. Como este nos garantiza la corrección de nuestro programa concurrente, tenemos ya demostrada la corrección del mismo.

1.5.6. Demostrar que un programa termina

Para demostrar que un programa concurrente que no realiza llamadas bloqueantes termina, es necesrio para ello el concepto de *vector variante*.

Definición 1.6 (Vector variante)**.** Dado un bucle en un lenguaje de programación:

```
1 while B do begin
     {Cuertpo del bucle}
  end
```

Donde la condición `B` tiene n variables que son modificadas dentro de dicho bucle: a_1, a_2, ..., a_n. Entonces, el vector variante para dicho bucle es un conjunto de n-uplas de la forma $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de forma que p_i es un posible valor que puede tomar la variable a_i dentro del bucle, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si no admitimos la existencia de llamadas bloqueantes, la única forma en la que un programa puede no terminar es debido a la existencia de un bucle de forma que la condición de iteración B nunca sea falsa, por lo que dicho bucle permanecerá iterando por siempre, haciendo que nuestro programa no termine.

Por tanto, cuando nos pregunten demostrar que un programa $\{P\}\ S\ \{Q\}$ termina, deberemos demostrar que cada bucle que lo compone termina. Para ello:

1. Debemos primero identificar en cada bucle las variables de la condición de iteración B del bucle que adoptan distintos valores a lo largo del bucle.

2. Posteriormente, identificaremos cada uno de los posibles valores que pueden tomar cada una de esas variables, con lo que tendremos el vector variante del bucle. En caso de que la condición de salida ($\neg B$) no forme parte del vector variante, el bucle no terminará y por tanto el programa tampoco.

3. Si la condición de salida se encuentra en el vector variante, debemos razonar que en algún momento del bucle se alcanzará esta condición.

Ejemplo. Imponer condiciones iniciales sobre `n` para demostrar que el siguiente programa termina.

```
1 max = a[1]; i = 0;
  while (i <> n+1) do begin
     if (a[i] >= max) then max = a[i];
     i = i + 1;
5 end
```

1. La condición de iteración es $i \neq n+1$, y como la instrucción `i=i+1;` está presente en el cuerpo del bucle, la única variable de la condición de iteración que es modificada dentro del bucle es i.

2. El vector variante para dicho bucle contiene los posibles valores de i dentro del bucle, los cuales se corresponden con:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$

3. Como i comienza el bucle en 0 y en cada iteración se incrementa una unidad, tendremos que $i = n+1$ en alguna iteración si $n+1 \in \mathbb{N} \iff n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

   Distinguiendo casos:

   - Si $n < -1$, entonces $n - 1 < 0$, por lo que $i_0 = 0 \neq n+1$ y como i se incrementa en una unidad, el programa no terminaría.
   - Si $n = -1$, entonces $i_0 = 0 = n+1$, por lo que el bucle no llegaría a ejecutarse y el programa terminaría.
   - Si $n > -1$, entonces $n - 1 > 0$ y como i se inicializa a 0 y se incrementa una unidad en cada iteración, la condición de salida sería cierta tras $n+1$ interaciones, que pueden hacerse en tiempo finito, luego el programa terminaría.

Finalmente, concluimos que el programa termina si, y solo si $n + 1 \in \mathbb{N}$.

2. Sincronización en memoria compartida. Monitores

Suponiendo que existe una memoria común para los distintos procesos que ejecutan un programa concurrente, este Capítulo trata sobre la sincronización de los mismos usando para ello instrucciones que usan dicha memoria compartida. Nos centraremos en el uso de los monitores, construcciones de alto nivel que nos ofrecen mayor libertad que los semáforos.

El concepto de semáforo se desarrolló previamente en el Seminario 1 de prácticas[1]. Los semáforos presentan dos grandes limitaciones:

1. Están basados en variables compartidas del programa, por lo que no fomentan la modularidad de los programas, impidiendo su reutilización.

2. Las operaciones de los semáforos (`sem_wait` y `sem_signal`) se encuentran dispersas a lo largo del código del programa concurrente. Además, estas instrucciones no solo afectan al bloque de código en el que se encuentran, sino a cualquier otro bloque que use el mismo semáforo.

En definitiva, los semáforos no son un buen mecanismo de programación concurrente, y además la verificación de programas que usan semáforos es muy complicada.

Era necesario encontrar un nuevo mecanismo de programación concurrente que permitiera la encapsulación de la información y de la sincronización entre procesos, así como programar las operaciones de sincronización (como `wait` o `signal`) dentro de bloques o procedimientos que se ejecuten con instrucciones atómicas, para que las instrucciones de sincronización no se encuentren desperdigadas por el programa. Fue Charles Antony Richard Hoare quien inventó los monitores, concepto en el que ahondaremos a lo largo de este Capítulo.

2.1. Definición de un monitor

La idea básica de monitor es un módulo que contiene un conjunto de variables a las que llamaremos *variables permanentes*[2], de forma que dichas variables solo podrán ser alteradas dentro de los procedimientos del módulo monitor. Garantizaremos que la ejecución de cada uno de esos procedimientos se ejecute la mayor parte del tiempo como una única instrucción atómica, salvo que se produzca algo por lo

[1] Por lo que el lector debería estar familiarizado con ellos.

[2] A pesar de su nombre, no serán constantes, sino que podremos modificar su valor.

que interrumpir la ejecución del procedimiento.

Podemos pensar en un monitor como en un tipo de dato abstracto que define tipos y variables permanentes propias del monitor, así como un conjunto de procedimientos dentro de dicho módulo. No debemos pensar en los monitores como en una clase, ya que no pueden hacer lo mismo que ellas (no se pueden instanciar y tampoco existe polimorfismo o ligadura dinámica).

Ventajas

A continuación, los programas concurrentes estarán formados tanto por procesos que se ejecutarán de forma concurrente, como por monitores, los cuales velarán por la sincronización y acceso a variables compartidas de dichos procesos, de forma que no se produzcan condiciones de carrera o comportamientos indeseados. Podremos modelar tantas relaciones de interacción entre los procesos de un programa concurrente como queramos. De esta forma, el uso de los monitores o de procedimientos asociados a monitores no restringen las posibilidades del modelado de un sistema concurrente.

Los procesos de un programa concurrente no tendrán que llamar a operaciones de sincronización, sino que llamarán a procedimientos del monitor, los cuales realizarán la funcionalidad deseada sobre las variables compartidas garantizando la sincronización entre los procesos.

Además, los monitores nos permiten una alta reusabilidad de código, ya que podremos reutilizar un monitor ya creado para resolver problemas similares. Sin embargo, la reutilización de código no es similar a la usada en programación orientada a objetos mediante instancias de una misma clase, sino que se hará por copias parametrizables: tendremos una definición de un monitor basada en parámetros, y cuando necesitemos usar un monitor, crearemos una copia de dicha definición parametrizándola (pasándole los parámetros que necesitemos para resolver nuestro problema). De esta forma, no es reutilización por instanciación, sino por *parametrización*.

Los procesos que usemos en los progrmas concurrentes no verán el acceso a las variables compartidas, sino que será realizado por los procedimientos del monitor, garantizando que se hacen como deben hacerse, evitando condiciones de carrera. De esta forma, los monitores garantizan la ocultación de las variables compartidas, haciéndolas transparentes a los procesos del sistema concurrente.

Finalmente, existen unos axiomas que nos permiten verificar los programas concurrentes que usen monitores de forma sencilla. Dichas demostraciones estarán basadas en el uso de los invariables globales. Ahondaremos en la verificación de programas concurrentes que utilicen monitores más adelante.

2.1.1. Concepto de monitor

A modo de resumen para comenzar a definir lo que es un monitor, podemos decir que:

- Es un módulo con un conjunto de variables permanentes que solo pueden ser modificadas por los procedimientos del monitor.
- Cada uno de los procedimientos[3] de un monitor se ejecutan en exclusión mutua (garantizando el acceso a las variables compartidas sin condiciones de carrera). Sin embargo, estos no tienen por qué ejecutarse completamente, sino que pueden interrumpirse y en algún momento futuro seguir ejecutándose en exclusión mutua.
- La ejecución de los procedimientos de un monitor modifican el estado interno del mismo (esto es, el conjunto de las variables permanentes asociadas al monitor).
- El estado inicial del monitor (de sus variables permanentes) se establece mediante la ejecución de un procedimiento especial, al que llamaremos *código de inicialización*. Este se ejecuta tras la declaración de una variable de tipo monitor y da valores iniciales a las variables permanentes.

De esta forma, un monitor puede visualizarse de forma intuitiva en la Tabla 2.1, como un conjunto que englobla:

- Un conjunto de variables, llamadas *variables permanentes*, que no son accesibles desde fuera del monitor.
- Un conjunto de procedimientos que el monitor proporciona como servicio a los procesos de un programa concurrente (para por ejemplo, acceder a las variables permanentes que serán las variables que compartan dichos procesos), llamados *procedimientos exportados* o *exportables*.
- Un procedimiento especial llamado *código de inicialización*, que permite inicializar las variable permanentes.

Variables permanentes
Procedimientos exportados
Código de inicialización

Tabla 2.1: Esquema de un monitor.

Ejemplo. Aunque todavía no entendemos muy bien qué es un monitor, daremos a continuación un ejemplo de uso del mismo para ilustrar la definición que queremos dar de monitor, pese a que algunas cosas del ejemplo no podamos entenderlas todavía y deberemos dejarlas para más adelante[4].

[3] Podemos pensar en ellos como en los "métodos" de una clase, haciendo hincapié en que los monitores **no son** clases.

[4] Como el tipo de dato `cond`.

En este ejemplo, queremos solventar un problema mediante el paradigma productor/consumidor. Tendremos dos procesos, un productor y un consumidor, de forma que el productor escribirá en un buffer (o vector) que usaremos como cola cíclica (esto es, que si nos pasamos de la posición final, volvemos al inicio y con planificación FIFO), mientras que el consumidor irá leyendo los datos de dicho buffer. Siendo `Buf` una variable de tipo monitor que luego definiremos en este ejemplo, el código del productor y del consumidor será el siguiente (pensando en que tenemos que usar procedimientos del monitor para el acceso a las variables compartidas, en este caso el buffer):

```
Proceso Prod1::
  var d : tipo_dato;

  while true do begin
    d = producir();
    Buf.insertar(d); {mete d en el buffer}
  end do
```

```
Proceso Cons1::
  var x : tipo_dato;

  while true do begin
    Buf.retirar(x); {retira del buffer en x}
    consumir(x);
  end do
```

El código del monitor será el siguiente en pseudo-pascal (hemos omitido el código de inicialización):

```
Monitor Buf
  var
    -elementos_ocupados : int;
    -frente, atras: 0..N-1;
    -no_vacio, no_lleno : cond;

  +insertar(d : tipo_dato);
  +retirar(var x : tipo_dato);
```

Donde vemos 5 variables permanentes: `elementos_ocupados`, que mide la cantidad de posiciones ocupadas del buffer, `frente`, que marca la casilla en la que el productor insertará el próximo dato (por tanto, ha de estar siempre vacía), `atras`, que marca la casilla de la que leerá el consumidor, `no_vacio` y `no_lleno`, variables de tipo `cond`, las cuales aprenderemos lo que hacen más adelante.

Contamos además con dos procedimientos: `insertar`, que inserta un dato en el buffer en caso de que haya hueco (si no hay hueco, se bloquea hasta que el consumidor lea un dato y deje un hueco libre):

```
procedure insertar(d : tipo_dato) begin
  if((frente + 1) mod N = frente) then no_lleno.wait();
  introducir(buf, frente, d);  {inserta d en la posicion frente en el buffer}
```

```
  elementos_ocupados += 1;
  frente = (frente + 1) mod N;
  no_vacio.signal();
end
```

Y con el procedimiento `retirar`, que retira un dato del buffer y lo devuelve como resultado del procedimiento, siempre que esto sea posible (es decir, si no hay ningún dato que leer en el buffer, se bloquea esperando a que el productor ponga algún dato):

```
procedure retirar(var x : tipo_dato) begin
  if(frente = atras) then no_vacio.wait();
  eliminar(buf, atras, x);  {inserta buf[atras] en x y lo borra del buffer}
  elementos_ocupados -= 1;
  atras = atras mod N + 1;
  no_lleno.signal();
end
```

Como hemos ya comentado mientras mostrábamos los pseudocódigos del ejemplo, hay que establecer condiciones que identifiquen las dos condiciones inseguras del ejemplo: que el buffer esté lleno o que el buffer esté vacío:

- Si `frente = atras`, entonces el último dato que se ha de consumir está en una casilla vacía en la que el productor escribirá. Se trata de la situación en la que el buffer está vacío. Debemos por tanto, evitar que el consumidor lea un dato del buffer.

- Si `(frente + 1) mod N = atras`, entonces el siguiente dato a introducir en el buffer está justo delante del dato a consumir. Se trata de la situación en la que el buffer está lleno. Debemos por tanto, evitar que el productor introduzca un dato en el buffer[5].

Los procesos del programa llaman a los procedimientos del monitor, y no tienen acceso directo al buffer, por lo que no pueden saber cuándo este está lleno o vacío. De esta forma, lo que sucederá es que los procedimientos internos del monitor realizarán una sincronización interna mediante el uso de llamadas bloqueantes:

- Si el buffer está lleno y el productor se dispone a escribir un dato, quedará el proceso bloqueado hasta que un consumidor lea un dato. Este señalará (`signal`) al productor, desbloqueándolo.

- Si el buffer está vacío y el consumidor se disopne a leer un dato, quedará bloqueado el proceso que ejecute el procedimiento del monitor. Cuando el productor escriba un dato, enviará una señal al consumidor, desbloqueándolo.

Esta funcionalidad se consigue mediante las variables de tipo `cond`. Se verán a continuación, pero para entenderlas por ahora digamos que necesitamos tener una variable

[5]Definimos anteriormente que `frente` siempre apunta a una casilla vacía, por lo que como máximo el buffer tendrá ocupados $N - 1$ elementos.

de tipo `cond` por cada razón por la que queremos bloquear un proceso[6].

El código de los procedimientos es ejecutado por los propios procesos que ejecutan cada proceso (productor o consumidor, en este caso) del programa concurrente. Por tanto, si el productor ejecuta un procedimiento del monitor con un `wait`, dicho proceso se bloqueará y no podrá ejecutar código hasta desbloquearse.

Para que el código que hemos visto funcione adecuadamente, nos falta introducir un último concepto en los monitores, y es que mientras se ejecuta un procedimiento de un monitor, no se puede ejecutar ningún otro, sino que han de ejecutarse en **exclusión mutua**.

2.1.2. Características de programación con monitores

Una vez ilustrado el uso de la herramienta que estamos construyendo en este Capítulo mediante el ejemplo anterior, vamos ahora a introducir la noción de que solo puede ejecutarse a la vez un único procedimiento de un monitor.

Como ya hemos visto, los procedimientos de los monitores no tienen por qué ejecutarse de principio a fin, sino que un proceso puede comenzar a ejecutar un procedimiento, bloquearse (dejando por tanto libre al monitor) y que otro proceso comience a ejecutar un procedimiento de dicho monitor, sucediéndose un entrelazamiento de las trazas de ejecución de los procedimientos.

Cuando un proceso se encuentra ejecutando un procedimiento del monitor, decimos que el monitor está *ocupado*. En caso contrario, diremos que este está *libre*. Notemos que si un proceso se bloquea mientras ejecuta un procedimiento del monitor, el monitor tiene que quedar libre, ya que si no no habría forma de volver a despertar a dicho proceso (tenemos que ejecutar un `signal` sobre la misma variable `cond` que bloqueó al proceso[7]). La situación de bloquear a un proceso y dejar que entre otro al monitor es delicada y debe hacerse con cuidado, para garantizar que solo haya un único proceso ejecutando un procedimiento del monitor al mismo tiempo.

Los monitores son objetos *pasivos*. Esto es, no tienen una hebra dentro que ejecute su código, sino que simplemente proporciona código (sus procedimientos) a otros procesos para que sean ellos quien ejecuten el código del monitor.

Para implementar una librería con monitores en un lenguaje de programación base, este debe tener la propiedad de ser *reentrante*.

Definición 2.1. Un lenguaje de programación tiene la propiedad de ser reentrante si, siempre que tengamos un proceso ejecutando una función y este se bloquea, sea capaz de conservar la siguiente instrucción a ejecutar y el valor de sus variables

[6]En el caso de productor/consumidor, queremos bloquear un proceso si sucede alguno de los dos puntos superiores, condiciones inseguras, luego nos harán falta dos variables de tipo `cond`. En otros problemas, el número de variables de tipo `cond` podría ser otro.

[7]Se explicará más adelante.

locales tras desbloquearse. Es decir, el proceso no debe enterarse localmente[8] de que nada haya cambiado mientras estaba bloqueado.

Notemos que debemos tener esta propiedad en el lenguaje de programación con el que trabajemos para poder hacer uso de funciones bloqueantes (como `wait`) dentro de los procedimientos de un monitor, algo básico en el funcionamiento de este. Afortunadamente, actualmente todos los lenguajes de programación que encontramos en el mercado son reentrantes.

Copias paramétricas de un monitor

El siguiente ejemplo nos ilustra cómo podemos crear nuevos monitores a partir de uno ya creado, fijando parámetros que use el código de inicialización.

Ejemplo. Aunque los monitores están pensados para programas concurrentes (ya que no tiene sentido su uso en programas secuenciales), usaremos en este ejemplo un monitor en un programa secuencial, ya que solo nos interesa la forma en la que los monitores inicializan sus variables permanentes[9].

Tenemos un programa en el que necesitamos dos variables, las cuales queremos consultar e incrementar mediante un incremento previamente fijado que no cambiará. Para ello, creamos un monitor de acceso a una variable, con parámetros de entrada, para luego poder crear dos copias parametrizadas del mismo. El código del monitor será algo parecido a:

```
1  class monitor VariableProtegida(inicio, incremento : integer);
     var x, inc : integer;

     procedure incremento();
5    begin
       x = x + inc;
     end

     procedure valor(var v : integer);
10   begin
       v = x;
     end

     begin
15     x = inicio; inc = incremento;
     end
```

De esta forma, podemos usar dos copias del monitor de la forma:

[8] Las variables locales a la función deben mantenerse, pero puede haber variables globales que sí hayan cambiado.

[9] Además, no hemos terminado de desarrollar cómo es que solo puede ejecutarse a la vez un único procedimiento del monitor, por lo que no entendemos hasta ahora cómo es que sirven para sincronizar programas concurrentes.

```
var mv1 : VariableProtegida(0,1);   {empieza en 0 e incrementa en 1}
    mv2 : VariableProtegida(10,4);  {empieza en 10 e incrementa en 4}
    a, b : integer;
begin
  mv1.incremento();  {+=1}
  mv1.valor(a);      {a=1}
  mv2.incremento();  {+=4}
  mv2.valor(b);      {b=14}
end
```

2.1.3. Exclusión mutua en los procedimientos de un monitor

Si tenemos varios procesos del programa concurrente que quieren hacer uso de procedimientos del monitor a la vez, solo podremos dejar pasar un proceso al monitor (suponiendo que este se encuentre libre). Para los otros procesos, almacenaremos su llamada al procedimiento.

Para ello, todos los monitores tienen implementada una cola con planificación FIFO, llamada *cola de entrada al monitor*. Si tenemos dos procesos que quieren acceder a un procedimiento de un monitor libre, solo podrá hacerlo un proceso. La llamada al procedimiento del monitor del otro proceso quedará almacenada en la cola de entrada al monitor, y este pasará a ejecutar el procedimiento deseado una vez el proceso anterior haya dejado libre el monitor.

Observación. En esta asignatura, supondremos que la cola de entrada al monitor es suficientemente larga como para albergar a todos los procesos que necesiten esperar a que el monitor quede libre.

Podemos representar la vida de un proceso de un programa concurrente que hace uso de monitores para sincronizar a sus procesos con el siguiente diagrama:

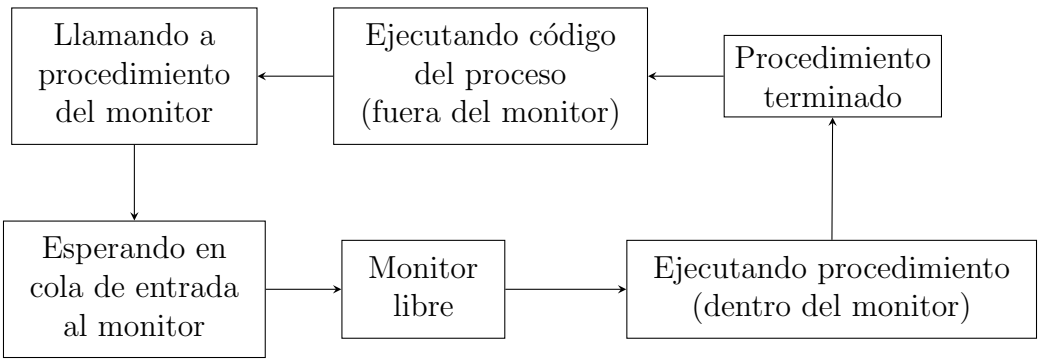


Figura 2.1: Vida de un proceso en un programa concurrente con monitores.

De esta forma, podemos ahora reescribir la descripción gráfica de monitor que hicimos en la tabla 2.1, incluyendo ahora la cola de entrada al monitor, tal y como vemos en la tabla 2.2

Cola del monitor
Variables permanentes
Procedimientos exportados
Código de inicialización

Tabla 2.2: Esquema de un monitor incluyendo la cola de entrada.

2.1.4. Operaciones de sincronización

Las operaciones de sincronización entre los procesos de un programa concurrente se programan, como ya hemos visto, dentro de los procedimientos del monitor. Son instrucciones que permiten detener la ejecución de un procedimiento de un monitor y bloquear en una cola al proceso que ha hecho la llamada del procedimiento del monitor. Tenemos para realizar esta acción dos operaciones principales: `wait` y `signal`.

Sin embargo, las operaciones `wait` y `signal` que manejamos en monitores no se parecen a las que usábamos en los semáforos:

- En los semáforos, la ejecución de `wait` ofrecía la posibilidad de bloquear al proceso, ya que no lo hacía si el entero de dentro del semáforo era mayor estricto que 0. Por contra, en monitores la llamada `wait` siempre será bloqueante.

- Las operaciones `wait` y `signal` eran relativas a un semáforo: hacía falta usar un semáforo por cada razón que tuviéramos dentro de un programa concurrente para bloquear a uno o varios procesos (en el caso del productor/consumidor, usar dos semáforos). Sin embargo, con un solo monitor podremos bloquear procesos por tantas razones como queramos, usando un nuevo tipo de dato.

Tipo de dato `cond`

En los monitores, para poder usar las operaciones de `wait` y `signal`, será necesario utilizar una variable de tipo de dato condición, o `cond`.

Las variables tipo `cond` se encuentran junto con las variables permanentes de un monitor. Estas no se inicializan a ningún valor.

En nuestro monitor, tendremos varias razones por las que queramos bloquear a los procesos concurrentes de nuestro programa por alguna determinada razón, hasta que se cumpla una condición determinada, a la que llamaremos *condición de sincronización*. Por ejemplo, en el problema del productor/consumidor:

- Queremos bloquear a cualquier productor que intente escribir si la estructura de datos intermedia que usamos está llena. Desbloquearemos a un proceso productor cuando se vacíe un hueco en dicha estructura.

- Además, queremos bloquear a cualquier consumidor que intente leer de la estructura de datos intermedia cuando esta esté vacía. Desbloquearemos a un consumidor cuando algún productor haya escrito algún dato.

Por cada razón o condición distinta por la que queramos bloquear a los procesos de un programa concurrente en relación a una misma variable compartida (para evitar estados inseguros), crearemos una variable de tipo `cond`. Es decir, una variable por cada una de las razones por las que queramos que esperen los procesos. En el ejemplo del productor/consumidor, son necesarias únicamente dos variables de tipo `cond`.

Las variables de tipo `cond` admiten 4 métodos (aunque solo recomendamos usar los dos primeros):

wait Bloquea al proceso que ejecuta este método. Dicho proceso pasa a una cola asociada a la variable condición correspondiente con planificación FIFO.

signal En caso de haber algún proceso bloqueado en la cola asociada a la variable condición correspondiente, lo desbloquea[10]. Si esta cola está vacía, es equivalente a una operación nula[11].

queue Devuelve un booleano que indica (`true`) si la cola asociada a la variable condición contiene al menos un proceso bloqueado.

signal_all Desbloquea de una sola vez a todos los procesos bloqueados en la cola asociada a la variable condición. El orden de dicha cola no se mantiene para realizar la petición de acceso al monitor, por lo que se produce competencia entre los procesos para entrar al monitor, incumpliendo la propiedad de equidad entre procesos. Depende de la semántica de las señales del lenguaje[12]. Se recomienda **no usarla**.

De esta forma, la representación gráfica final de un monitor es la que se muestra en la tabla 2.3:

Cola del monitor
Variables permanentes
Variables condición y colas de procesos bloqueados
Procedimientos exportados
Código de inicialización

Tabla 2.3: Esquema de un monitor incluyendo las variables condición.

[10] Hemos de tener cuidado con esto, se explicará más adelante.
[11] Esto es, equivalente a la instrucción `;`.
[12] Se explicará más adelante qué es esto.

Semánticas de señales

Como hemos comentado ya, los monitores solo permiten que un único proceso se encuentre ejecutando un procedimiento del mismo. En este caso, decíamos que el monitor está ocupado. En caso de que un proceso que estaba ejecutando el procedimiento ejecute un `wait` (o salga del procedimiento), hay que dejar el monitor libre para dejar pasar a otro. Se trata de un momento muy delicado, ya que se pueden producir condiciones de carrera entre los procesos que quieran conseguir el monitor. Esta situación la hemos solucionado ya con la cola de entrada al monitor, ya que con la planificación FIFO, solo podrá entrar un único proceso al monitor.

Si ahora el proceso nuevo que ejecuta el monitor ejecuta un `signal` sobre una variable condición (recordemos que tenemos al menos un proceso bloqueado), desbloqueará al primer proceso de su cola asociada, que estaba ejecutando código del monitor, por lo que ahora tenemos dos procesos ejecutando código del monitor: el proceso que señala y el señalado (el recién desbloqueado). Esta condición no puede darse, ya que los procedimientos de un monitor deben ejecutarse en exclusión mutua. Una solución a este problema es que el procedimiento que señala se bloquee en la cola de entrada al monitor[13], dejando paso al recién desbloqueado.

Esta solución plantea un problema, y es que si el proceso señalador se bloquea, puede que en algún momento deje al monitor libre, por lo que se meta un proceso de la cola de entrada al monitor, planteando nuevamente la situación en la que tenemos dos procesos en el monitor (el desbloqueado y el primero que estaba esperando entrar al monitor). Deberá haber un mecanismo que elija quién de los dos acaba finalmente con el monitor. En caso de que sea el proceso que estaba esperando en la cola de entrada, diremos que se produce un *robo de señal*, donde el proceso recién desbloqueado debe irse al final de la cola de entrada al monitor.

Para solucionar este segundo problema, algunos lenguajes implementan una *semántica desplazante*[14] en las señales: el proceso que ejecuta el `signal` le pasa el monitor al proceso que recibió la señal (el primero en la cola de bloqueados de la variable condición correspondiente), sin liberar en ningún momento el monitor, de forma que el proceso señalado tiene prioridad. Se dice que la señal usada con la operación `signal` tiene *semántica desplazante*.

Cabe destacar que **no todos los lenguajes con monitores tienen señales con semántica desplazante**, por lo que en dichos lenguajes pueden sucederse robos de señales. En esta sección y en la siguiente, supondremos que estaremos trabajando siempre con señales `signal` con semántica desplazante, de forma que el proceso señalador se bloqueará tras ejecutar un `signal` y podemos pensar que es enviado a la cola de entrada al monitor. En una futura sección veremos los tipos de semánticas de señales que podemos encontrarnos (cada uno hará que el comportamiento de `signal` sea distinto).

Como comentario final a la descripción de un monitor y para motivar la siguiente

[13] Veremos más soluciones.

[14] Se trabajará más adelante sobre las semánticas de las señales.

sección:

- Se presupone que el programador de monitores es un programador experto, de forma que el compilador en ningún momento se dedicará a comprobar si hemos programado de forma correcta un monitor o un procedimiento de él, más allá de la sintaxis del código.
- No deben programarse operaciones `wait` indebidas ni omitirse operaciones `signal` innecesarias. Para comprobar esto, usaremos nuestro sistema de verificación formal.

2.2. Verificación de programas con monitores

En la verificación de los programas concurrentes que hemos manejado hasta ahora, hemos primero demostrado la corrección secuencial de cada proceso que forma parte de un programa secuencial, para luego demostrar la no interferencia entre los mismos.

Sin embargo, ahora que introducimos los monitores, esto no podrá ser nunca más así, ya que un programador nunca puede conocer a priori la traza que genera un proceso que forma parte de un programa concurrente con monitores, ya que al ejecutar procedimientos de monitores, estos pueden quedar bloqueados y se ejecutarían en medio instrucciones de otros procesos que podrían alterar las variables compartidas del programa, falseando alguna precondición o poscondición del proceso bloqueado, por lo que tras desbloquearse, no podemos esperar nada de dicho proceso.

Es por tanto que ahora la estrategia a seguir en las demostraciones es mediante un Invariante de Monitor.

2.2.1. Invariante de monitor

Definición 2.2 (Invariante de Monitor)**.** Un Invariante de Monitor (IM) es una relación entre las variables permanentes de un monitor que debe ser cierta en cualquier estado del programa concurrente, excepto cuando un proceso esté ejecutando código de un procedimiento del monitor.

De esta forma, un IM puede no ser cierto durante la ejecución de un procedimiento por parte de un proceso, pero este ha de cumplirse antes y después de la ejecución de dicho procedimiento.

Si conseguimos probar la existencia de un IM en un programa concurrente, entonces bastará con probar cada una de las secciones de código secuenciales entre llamadas a procedimientos del monitor. Para probar finalmente la corrección de los procesos, usaremos que los IM se mantienen antes y después de las llamadas a procedimientos, para conseguir probar finalmente la corrección de cada uno de los procesos. Si nuestro IM estaba relacionado con la solución al problema, como el acceso a variables compartidas estará controlado por los monitores, al final del programa todos los IMs demostrados se seguirán compliendo, por lo que tendremos probada la corrección de nuestro programa concurrente.

Es decir, primero demostraremos que por cada monitor que usamos se verifica un IM, y luego pasaremos a probar la corrección de cada proceso que interviene en el programa concurrente, usando para ello dichos IMs. Finamente, tendremos probado el programa concurrente.

Esquema de demostración

Suponiendo que hemos encontrado una relación matemática entre las variables permanentes de un monitor y queremos probar que se trata de un IM[15], lo primero será probar que IM se cumple en el estado inicial del monitor, esto es, justo después de la inicialización de las variables permanentes, por lo que tendremos que probar que se verifica el **triple de inicialización de variables**:

$$\{V\} \text{ código de inicialización } \{IM\}$$

Posteriormente, deberemos probar que IM se mantiene antes y después de la llamada a cada procedimiento. Es decir, notando por IN a las precondiciones que tenemos antes de la ejecución de un procedimiento y por OUT a las poscondiciones que deseamos tener tras dicho procedimiento, debemos demostrar los **triples de procedimientos del monitor**, es decir, demostrar un triple

$$\{IM \wedge IN\} \text{ procedimiento } \{IM \wedge OUT\}$$

por cada procedimiento que tenga nuestro monitor.

Cuidado con las intereferencias

Terminaremos de ver esto más adelante, pero es necesario darnos cuenta de un detalle, y es que si un procedimiento modifica el valor de alguna variable compartida que se usa en otro proceso, debemos demostrar la no interferencia entre dichas instrucciones. Ilustramos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Si tenemos un monitor llamado `Buf` con un procedimientos `retirar(x)`, de forma que modifica el valor del parámetro que le pasamos, ante el siguiente código (si `x` es una variable compartida):

```
1 cobegin y = x; || Buf.retirar(x); coend
```

Tenemos que probar que al cambiar el valor de `x` con el procedimiento `retirar`, no hay interferencia con la instrucción de la izquierda. Es decir, tenemos que probar:

$$NI(pre(y = x), Buf.retirar(x))$$
$$NI(pos(y = x), Buf.retirar(x))$$

Sin embargo, en caso de ejecutar el siguiente código:

[15] A continuación, llamaremos a dicha condición `IM`, pese a no haber demostrado aún que se trate de verdad de un IM.

```
1 z = x;
cobegin y=z; || Buf.retirar(x); coend
```

No tendríamos que hacerlo, ya que el uso de variables disjuntas nos garantiza la no interferencia entre dichas instrucciones.

2.2.2. Axiomas para operaciones de sincronización desplazantes

Sabemos ya demostrar toda la corrección de un programa secuencial que usa monitores, salvo por un detalle, y es que no sabemos nada sobre cómo demostrar los triples:

$$\{P\}\ c.wait();\ \{Q\}$$
$$\{P\}\ c.signal();\ \{Q\}$$

para cualesquiera asertos P y Q.

En esta subsección, trataremos de dar axiomas para la comprobación de dichos triples, razonándolos de forma intuitiva y mediante el uso de Invariantes de Monitores.

Axioma de operación `wait`

Comenzaremos primero con el triple $\{P\}\ c.wait();\ \{Q\}$. Para necesitar ejecutar una instrucción `wait` en un procedimiento de un monitor, lo que sucede es que estamos cerca de un estado inseguro del programa (intuitivamente, que IM está a punto de incumplirse), pero no llegamos a él, porque para ello ejecutamos esta operación, para impedir que el proceso ejecute una instrucción que falsee el IM. Por tanto, el proceso se bloquea, dejando libre el monitor, por lo que entra otro proceso a ejecutar otro procedimiento.

Solo podremos desbloquear al proceso cuando nos alejemos de dicho estado inseguro, por lo que además de cumplirse el IM, deberá cumplirse una condición un tanto más estricta que el IM (que nos indique que estamos lejos de aquel estado inseguro por el cual se bloqueó el proceso). Dicha condición recibe el nombre de *condición de sincronización*, y la notaremos por C[16].

Resumiendo:

- Antes de ejecutar la operación `wait`, hemos de estar en un estado seguro del programa, por lo que ha de cumplirse el IM.
- Tras ejecutar la operación `wait` (es decir, después de que el proceso haya sido desbloqueado), ha de cumplirse la condición de sincronización C.

Teniendo en cuenta que además se puede cumplir un invariante local al que llamamos L (esto es, relaciones entre variables locales del procedimiento del monitor) antes y después[17] de dicha instrucción `wait`.

[16] Notemos que según hemos definido C, ha de verificarse que $IM \to C$.

[17] Gracias a que estamos en lenguajes reentrantes.

De esta forma, acabamos de razonar de forma intuitiva el **Axioma de la operación wait**:

$$\{IM \wedge L\}\ c.wait();\ \{C \wedge L\}$$

Axioma de operación `signal`

Si nos disponemos a ejecutar una instrucción `signal` en nuestro código, es porque el estado del programa se ha alejado de la condición insegura de la que hablábamos en la subsección anterior, que falsearía el valor de verdad de IM. Por tanto, el programa ha llegado a un punto en el que se cumple la condición de sincronización C, y ya puede desbloquear al proceso que anteriormente bloqueó. Tras su desbloqueo, este proceso podría ejecutar una instrucción que volviera a acercarnos a un estado inseguro, pero sin llegar a él (ya que C era suficientemente restrictiva), por lo que como poscondición de la instrucción `signal` no podremos garantizar C, sino solo podremos asegurar que se sigue cumpliendo IM.

Añadiendo la posibilidad de tener un invariante local L y que si la cola de la variable condición está vacía, la operación `signal` es una instrucción nula, llegamos al **Axioma de la operación signal**:

$$\{\neg vacio(c) \wedge C \wedge L\}\ c.signal();\ \{IM \wedge L\}$$

o equivalentemente:

$$\{c.queue() \wedge C \wedge L\}\ c.signal();\ \{IM \wedge L\}$$

En caso de cumplirse que $c.queue() = false$, entonces negaría la precondición del triple, haciéndolo la regla cierta por un razonamiento por vacuidad.

Observación. Notemos que el axioma de la operación `signal` funciona porque hemos suspuesto que **tenemos semántica desplazante**, ya que después de ejecutar `signal` desbloqueamos al proceso que teníamos bloqueado, cediéndole el monitor, por lo que dicho proceso seguirá procesando su procedimiento. Cuando el proceso señalador vuelva al monitor, solo podremos garantizar que se cumple IM, ya que tanto el proceso señalado como cualquier otro que se introduzca en el monitor después del señalado (veremos más adelante si esto es posible), pueden cambiar la condición C, por lo que solo podemos esperar IM.

Una vez vistos ya todos los axiomas sobre verificación de operaciones de sincronización de monitores, estamos listos para desmotrar la corrección de un IM. Lo haremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. En este ejemplo, queremos programar un monitor que simule el funcionamiento de un semáforo. Para ello, se nos ha ocurrido el siguiente código:

```
1 Monitor Semaforo;
    var s : integer;
        c : cond;
```

```
5   procedure P;
    begin
      if s=0 then
        c.wait;
      else
10      null;
      end if
      s = s - 1;
    end

15  procedure V;
    begin
      s = s + 1;
      c.signal;
    end
20
    begin   {código de inicialización}
      s = 0;
    end
```

Donde hemos llamado `P` a la función `sem_wait` del semáforo y por `V` a la función `sem_signal`.

Procedemos a realizar la demostración de que existe un Invariante de Monitor que se mantiene tras la inicialización de las variables permanentes de nuestro monitor y antes y después de cada procedimiento, con la finalidad de poder usar dicho IM en las demostraciones de cualquier programa concurrente que use el semáforo que acabamos de implementar mediante un monitor.

Demostración. Tratamos de demostrar que este monitor tiene como IM el aserto

$$IM \equiv \{s \geqslant 0\}$$

1. Primero, tenemos que demostrar el triple de inicialización de variables:

   $$\{V\}\ s = 0;\ \{s \geqslant 0\}$$

   Como el triple $\{V\}\ s = 0;\ \{s = 0\}$ es cierto por el axioma de asignación y tenemos que $\{s = 0\} \rightarrow \{s \geqslant 0\}$, usando la primera regla de la consecuencia tenemos demostrado el triple.

2. Posteriormente, demostraremos el triple de procedimiento del monitor para el procedimiento `P`: $\{IM\}\ P\ \{IM\}$. Para ello, primero tendremos que probar el triple

   $$\{IM\}\ \texttt{if}\ s = 0\ \texttt{then}\ c.wait;\ \texttt{else}\ null;\ \texttt{end if}\ \{s > 0\}$$

   Luego usaremos la regla del `if`, por lo que será suficiente con probar los triples:

   $$\{IM \wedge s = 0\}\ c.wait;\ \{s > 0\}$$
   $$\{IM \wedge s \neq 0\}\ null;\ \{s > 0\}$$

a) Comenzamos por el segundo, por ser más sencillo. Tenemos:

$$\{IM \wedge s \neq 0\} \equiv \{s \geqslant 0 \wedge s \neq 0\} \equiv \{s > 0\}$$

Por tanto, basta probar el triple $\{s > 0\}$ *null*; $\{s > 0\}$, que es cierto por el axioma de la sentencia nula.

b) Para el primer triple, buscamos aplicar el axioma de la operación `wait`, por lo que tenemos que buscar la condición de sincronización. Para ello, buscamos la precondición del `signal` asociado a la misma variable condición, que se encuentra en el procedimiento `V`. Para hallar la precondición de la instrucción `c.signal`, tendremos que demostrar alguna instrucción de dicho procedimiento, con el fin de hallar la precondición.

Sobre el código de `V`, vemos que antes de `c.signal` se ejecuta una primera instrucción `s=s+1;`. Suponemos que `V` tiene como precondición IM, por lo que buscamos una poscondición para `s=s+1;`:

$$\{IM\} \equiv \{s \geqslant 0\}\ s = s + 1;$$

Puede comprobarse con el axioma de asignación que la poscondición buscada es $\{s > 0\}$. Por tanto, esta será la condición de sincronización de la variable condición `c`:

$$C \equiv \{s > 0\}$$

Por tanto, por el axioma de la operación `wait` usado con $L = \{V\}$, tenemos que el siguiente triple es cierto:

$$\{IM\}\ c.wait;\ \{s > 0\}$$

Como $\{IM \wedge s = 0\} \rightarrow \{IM\}$, por la segunda regla de la consecuencia, tenemos demostrado el triple que buscábamos.

Una vez demostrados los dos triples, tenemos probado el triple del `if`, por lo que solo faltará probar el triple

$$\{s > 0\}\ s = s - 1;\ \{IM\}$$

Para tener probado el triple del procedimiento `P`.

Como $\{IM\} \equiv \{s \geqslant 0\}$, basta aplicar el axioma de asignación, para obtener $\{s > 0\}\ s = s - 1;\ \{s \geqslant 0\}$.

Aplicando finalmente la regla de composición sobre el triple del `if` y este último triple, tenemos ya probado $\{IM\}\ P\ \{IM\}$.

3. Finalmete, hemos de probar el triple $\{IM\}\ V\ \{IM\}$ para garantizar al fin que IM es un IM. Para ello, hemos de probar el triple

$$\{IM\}\ s = s + 1; c.signal;\ \{IM\}$$

Basta con probar los triples

$$\{IM\}\ s = s + 1;\ \{s > 0\}$$
$$\{s > 0\}\ c.signal;\ \{IM\}$$

y aplicar la regla de composición. El primer triple ya lo demostramos en la demostración del triple del procedimiento `P`, luego bastará probar el segundo, el cual es cierto gracias al axioma de la operación `signal`.

Acabamos de probar que $\{IM\}\ V\ \{IM\}$, que era el último procedimiento del monitor, luego IM es un IM.

□

Ejercicio. Se pide demostrar que el siguiente monitor funciona como un semáforo de Habermann. En un semáforo de Habermann, queremos llevar la cuenta de:

- El número de recursos que han estado disponibles en algún momento, `nv`.
- El número de procesos que han podido hacer uso de un recurso, `np`.
- El número de procesos que han solicitado hacer uso de un recurso, `na`.

```
1  Monitor Semaforo;
     var na, np, nv : int;
         c : cond;

5    procedure P;
     begin
       na = na + 1;
       if(na > nv) then c.wait();
       np = np + 1;
10   end

     procedure V;
     begin
       nv = nv + 1;
15     if(na > np) then c.signal();
     end

     begin
       na = 0; np = 0; nv = 0;
20   end
```

- Como para poder hacer uso de un recurso hay que haber solicitado acceso a él previamente, siempre tendremos que $na \geqslant np$.
- Como un proceso solo puede hacer uso de un recurso a la vez, el número de recursos que en algún momento han estado disponibles debe ser mayor o igual al número de recursos que en algún momento han sido utilizados por algún proceso: $nv \geqslant np$.
- Ahora, destacamos dos casos:
  - Si el número de peticiones para un recurso es mayor que el número de recursos que en algún momento han estado libre, $na \geqslant nv$, entonces es que no se han podido cumplir todas las peticiones, por lo que tienen que haber más procesos que han podido hacer uso de un recurso que recursos disponibles, es decir, $np \geqslant nv$.

- Por otra parte, si el número de peticiones es menor al número de recursos que en algún momento han estado disponibles, $na \leqslant nv$, entonces todas las peticiones se han podido completar, por lo que $np \geqslant na$.

Combinando estos dos puntos finales, deducimos que $np \geqslant \text{mín}(na, nv)$.

2.2.3. Regla de concurrencia para programas con monitores

Consideramos un programa concurrente en el que tenemos n procesos ejecutándose que podemos representar como triples de Hoare ciertos $\{P_i\}\ S_i\ \{Q_i\}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ de forma que ninguna variable en P_i o en Q_i es modificada por ningún S_j con $i \neq j$. Si en dicho código tenemos m monitores de forma que para cada uno hemos conseguido probar un IM, IM_k con $1 \leqslant k \leqslant m$, entonces podemos aplicar la **regla de concurrencia para programas con monitores**:

$$\frac{\{P_i\}\ S_i\ \{Q_i\} \quad 1 \leqslant i \leqslant n}{\begin{array}{c}\{MI_1 \wedge \ldots \wedge MI_m \wedge P_1 \wedge \ldots \wedge P_n\} \\ cobegin\ S_1\ ||\ S_2\ ||\ \ldots\ ||\ S_n\ coend \\ \{MI_1 \wedge \ldots \wedge MI_m \wedge Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n\}\end{array}}$$

Obteniendo así la verificación de nuestro programa concurrente.

2.3. Patrones de uso de un monitor

Al programar programas concurrentes que nos resuelvan un problema, encontramos muchas veces ciertos pequeños problemas a resolver que se repiten a menudo. En esta sección, destacamos tres de estos problemas, describiéndolos, planteando una solución mediante un monitor a utilizar en ellos y demostrando que el monitor realiza el funcionamiento esperado.

2.3.1. Espera única

Puede suceder que en un programa concurrente queramos que un proceso espere a que otro proceso haya realizado una cierta acción para seguir con su ejecución. Llamaremos al proceso que tiene que esperar al otro *consumidor* y a dicho otro *productor*.

El problema se resuelve de forma muy sencilla, con una variable compartida que indique si el productor ha realizado ya su acción por la que el consumidor debe esperar o si no lo ha hecho todavía. Cuando el consumidor se acerque a la zona en la que debe esperar al productor, consultará la variable compartida y en caso de que esta indique que no se ha realizado la acción, bloquearemos al proceso. Si se ha realizado la acción, no haremos nada.

Además, cuando el productor haya realizado la acción que ha de realizar, cambiaremos el valor de dicha variable compartida, indicando que ya se ha realizado la acción. En caso de que el consumidor se haya bloqueado antes de realizar la acción, lo desbloquearemos.

Observemos que estamos haciendo uso de una variable compartida, que es modificada por un proceso. Debemos por tanto acceder a ella en exclusión mutua. Esto es garantizado por el uso del monitor.

Monitor a usar

El monitor que usaremos tendrá dos procedimentos exportables, uno llamado `esperar` que será el que use el proceso consumidor, y otro llamado `notificar`, que será el que use el proceso productor para avisar al consumidor de que ya ha realizado la acción.

De esta forma, podemos ver el código monitor en pseudo código:

```
1  monitor EU;
   var terminado : boolean;  {si terminado = true, se ha realizado la acción}

       {variable auxiliar para la demostracion}
5      autorizado : boolean; {si autorizado = true, consumidor puede ejecutarse}

       c : cond;

      procedure esperar(); begin
10       if (not terminado) then
            c.wait();
         autorizado = true;
      end

15    procedure notificar(); begin
         terminado = true;
         c.signal();
      end

20    begin {codigo de inicializacion}
         terminado = false; autorizado = false;
      end
```

Para su demostración, usaremos el invariante

$$\{IM\} \equiv \{terminado = false \implies autorizado = false\}$$

La demostración se deja como ejercicio al lector.

2.3.2. Exclusión mutua

Es muy habitual que en programas concurrentes tengamos una o varias regiones de código que queramos que se ejecuten en exclusión mutua, llamadas secciones críticas. Es decir, mientras que un proceso se encuentre ejecutando una sección crítica, ningún otro proceso podrá estar ejecutando a la vez la misma sección crítica[18].

[18]Podemos tener dos secciones críticas con distintos códigos pero que sean referidas al acceso para la misma variable compartida. En dicho caso, pensamos que las secciones críticas son iguales, ya que solo puede haber un proceso que ejecute una u otra a la vez.

Usualmente, querremos tener exclusiones mutuas cuando varios procesos de un programa hagan uso de un recurso compartido, tal como una variable compartida, una salida a un fichero o imprimir información en un entorno gráfico.

Monitor a usar

El monitor que resuelve el problema de la exclusión mutua tendrá dos procedimientos exportables, `entrar`, que se ejecutará antes de cualquier sección crítica, y `salir`, que se ejecutará al final de cada sección crítica.

De esta forma, tenemos el monitor:

```
1  monitor EM;
   var ocupada : boolean;  {ocuapda = true si hay un proceso en seccion critica}
       cola : cond;

5     procedure entrar(); begin
         if ocupada then
            cola.wait();
         ocupada = true;
      end

10
      procedure salir(); begin
         ocupada = false;
         cola.signal();
      end
15
      begin
         ocupada = false;
      end
```

Para demostrarlo, primero definiremos la variable num_{sc} como el número de procesos que se encuentran ejecutando la sección crítica. Una vez definido, el invariante a usar será

$$\{IM\} \equiv \{(ocupada = false \iff num_{sc} = 0) \land 0 \leqslant num_{sc} \leqslant 1\}$$

La demostración se deja como ejercicio al lector.

2.3.3. Productores/Consumidores

Volvemos otra vez al paradigma del productor/consumidor, el cual hemos explicado varias veces ya en este documento. Ahora, admitiremos la existencia de varios procesos productores que querrán generar datos y escribirlos en una variable compartida, así como varios consumidores, que querrán leer dicha variable compartida y realizar los cálculos pertinentes.

Monitor a usar

Usaremos un monitor con dos procedimientos: `escribir`, que permitirá escribir en la variable compartida el valor indicado, y `leer`, que permitirá leer el valor de la variable compartida. La ventaja de usar un monitor es que los códigos de sincronización solo los tenemos que realizar en el monitor, dejando limpios los códigos de los procesos.

Como tenemos dos condiciones de sincronización, bloquear a productores que quieran escribir en una variable que no se ha leído, o bloquear a consumidores que quieran leer de una variable cuyo valor ya ha sido leído, necesitaremos dos variables de tipo `cond`:

```
monitor PC;
var valor : integer;  {variable compartida a usar}
    pendiente : boolean;  {si pendiente = true, valor escrito y no leido}
    cola_prod, cola_cons : cond;

   procedure escribir(v : integer); begin
      if pendiente then
         cola_prod.wait();
      valor = v;
      pendiente = true;
      cola_cons.signal();
   end

   procedure leer() : integer; begin
      if (not pendiente) then
         cola_cons.wait();
      result = valor;
      pendiente = false;
      cola_prod.signal();
   end

   begin
      pendiente = false;
   end
```

Para la demostración, debemos definir primero:

$$E = \text{ número de llamadas a escribir } \textbf{completadas}.$$
$$L = \text{ número de llamadas a leer } \textbf{completadas}.$$

De esta forma, podemos definir el invariante

$$\{IM\} \equiv \left\{ E - L = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } pendiente = false \\ 1 & \text{si } pendiente = true \end{array} \right\} \right\} \equiv$$
$$\equiv \{(pendiente = false \wedge E - L = 0) \vee (pendiente = true \wedge E - L = 1)\}$$

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

Asímismo, notemos que la demostración es similar a la del monitor para exclusión mutua, teniendo en cuenta que:

$$E - L = num_{sc}$$
$$pendiente = \neg libre$$

Ejercicio. Si ahora los productores no escriben sobre una misma variable compartida sino sobre un buffer (por ejemplo, un array con planificación FIFO), plantear un monitor que solucione el problema de los productores/consumidores, así como desmostrar que dicho monitor funciona correctamente.
(**Pista:** para la demostración, sustituir en el IM "1" por el tamaño del buffer)

2.4. Semánticas de señales

Como comentamos ya al inicio del Capítulo, las operaciones `signal` de las variables condición son operaciones delicadas, ya que son ejecutadas por un proceso que se encuentra ejecutando algún procedimiento del monitor y que lo que hacen es desbloquear a algún proceso se que se encontraba ejecutando código del monitor, por lo que (si no hacemos nada), tendremos dos procesos distintos ejecutando a la vez procedimientos (podría ser el mismo procedimiento) de un mismo monitor, algo que no puede darse.

Para solucionar el problema que nos plantea la operación `signal`, plantearemos distintas *semánticas de señales* `signal`. Esto es, plantearemos varios paradigmas en los que la señal `signal` tendrá un significado u otro, de forma que su finalidad sea siempre *sacar al primero proceso de la cola de la variable condición* en cuestión y ponerlo en otro sitio que permita que dicho proceso entre al monitor en algún futuro próximo, garantizando la propiedad de vivacidad de que dicho proceso en algún momento volverá a entrar al monitor.

Además, clasificaremos los distintos tipos de semánticas de señales que veremos en **no desplazantes** y **desplazantes**.

Definición 2.3. Diremos que **una semántica de señal es desplazante** si, siempre que un proceso ejecute una operación `signal` sobre una variable condición `c`, en dicho instante cederá el monitor al primer proceso de la cola de bloqueados de la variable condición `c` sin que el monitor quede libre en ningún momento[19]. Además, debe garantizarse la propiedad de vivacidad de que el proceso señalador volverá a entrar al monitor en algún momento.

Veremos ahora todas las posibles semánticas de señales que podemos encontrarnos, entendienod que el proceso *señalador* es aquel que ejecuta la operación `signal` sobre una variable condición; y que el proceso *señalado* es aquel que estaba primero en la cola de bloqueados de la misma variable condición.

2.4.1. Señalar y Continuar (SC)

El proceso señalador no se bloquea tras ejecutar `signal`, sino que sigue con la ejecución del procedimiento en cuestión. El proceso señalado se bloquea hasta que se pueda adquirir de nuevo el monitor.

Como podemos ver, se trata de una semántica no desplazante, ya que el proceso señalador no se bloquea tras ejecutar la instrucción `signal`. En relación al proceso señalado, se produce una *competición* contra el resto de procesos que esperan en la cola de entrada al monitor. Esta "competición" que hemos mencionado depende de la implementación que se haga, destacando dos posibilidades:

1. El proceso señalado pasa al final de la cola de entrada al monitor.

[19] Evitando que entre al monitor cualquier otro proceos de la cola de entrada al monitor.

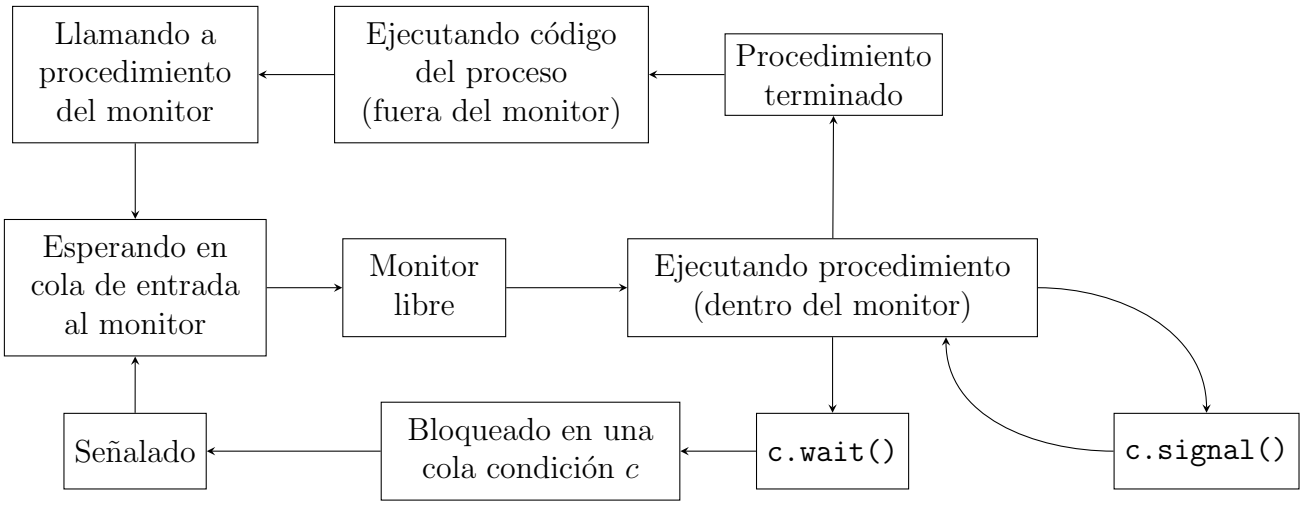


Figura 2.2: Vida de un proceso en un programa con monitores con semántica SC.

2. Después de que el proceso señalador deje libre el monitor (ya sea porque termina el procedimiento o se bloquea debido a una instrucción `wait`), se desbloquea al proceso señalado y al primero de la cola de entrada al monitor, se sucede una condición de carrera entre ambos y el vencedor (el que primero llega al monitor), acaba ejecutándolo. El perdedor acaba al final de la cola de entrada al monitor.

   Como podemos entender, la primera opción es mejor, ya que en la segunda puede suceder que un proceso pierda varias veces la competición por el monitor, incumpliendo la condición de equidad entre procesos; además de que no sabemos qué sucede tras desbloquear a dicho proceso, debido a que la competición que es transparente para el programador.

De esta forma, podemos representar la vida de un proceso que forma parte de un programa concurrente que usa monitores con semántica de señales de señalar y continuar con el diagrama de la Figura 2.2.

A tener en cuenta para bloquear

Como se trata de una semántica no desplazante, debemos tener cuidado con un detalle:

En semántica desplazante, bloqueamos a un proceso porque se acerca a un estado inseguro del programa. Cuando nos alejemos de dicho estado, realizaremos la instrucción `signal`, por lo que el proceso que bloqueamos se podrá ejecutar al habernos alejado del estado inseguro del programa.

Por otra parte, ahora también desbloquearemos al proceso por alejarnos de dicho estado inseguro, pero el proceso señalado no se ejecutará tras esto, por lo que puede que se ejecuten procesos en medio que vuelvan a acercarse a este estado inseguro, luego tendremos que volver a comprobar si estamos cerca o no de dicho estado inseguro.

Por tanto, en semánticas se señales no desplazantes, en vez de bloquear a procesos con:

```
1 if (cerca de estado inseguro) then
    c.wait();
```

Tendremos que plantear el código

```
1 while (cerca de estado inseguro) do begin
    c.wait();
  end
```

Ya que cuando el proceso señalado vuelva no sabremos si la condición por la que lo bloqueamos es cierta o no. Puede suceder que bloqueemos a un proceso por acercarse a un estado inseguro, que lo desbloqueemos cuando el estado del programa se aleje de dicho estado, que se ejecuten procesos que se acerquen a dicho estado y que cuando el proceso que fue señalado entre al monitor, se encuentre cerca del mismo estado inseguro por el que tuvo que bloquearse, teniendo que hacerlo nuevamente.

2.4.2. Señalar y Salir (SS)

El proceso señalador **finaliza** la ejecución de su procedimiento tras la ejecución de una instrucción `signal`. El proceso señalado se desbloquea posteriormente y en todo este tiempo el monitor no queda libre en ningún momento. Se trata, por tanto, de una semántica desplazante, ya que el proceso señalador cede el monitor al proceso señalado.

Notemos que en señalar y salir, el proceso señalador **finaliza** la ejecución de su procedimiento. Es decir, cualquier instrucción que haya tras una operación `signal` no se ejecutará nunca. Obliga por tanto a una disciplina de programación en la que si queremos realizar un `signal` dentro de un procedimiento, esta instrucción debe ser la última dentro del procedimiento, para poder ejecutar antes todas las instrucciones que deseemos.

Si recordamos el ejemplo de la Sección 2.1.1, observamos que en este las instrucciones `signal` se encuentran al final de los procedimientos de forma natural. Por tanto, la semántica SS funciona bien para este monitor.

Al igual que hicimos para SC, podemos representar la vida de un proceso que forma parte de un programa concurrente que usa monitores con semántica de señales de señalar y salir con el diagrama de la Figura 2.3.

2.4.3. Señalar y Esperar (SE)

El proceso señalador se bloquea al final de la cola de entrada al monitor y cede el monitor al proceso señalado. El monitor no queda libre en ningún momento. Se trata de otro tipo de señal con semántica desplazante.

Puede considerarse una semántica *injusta*, ya que cada vez que un proceso ejecuta la operación `signal`, debe irse al final de la cola de entrada al monitor, teniendo que esperar entre todos los procesos nuevamente (el proceso probablemente tuvo ya

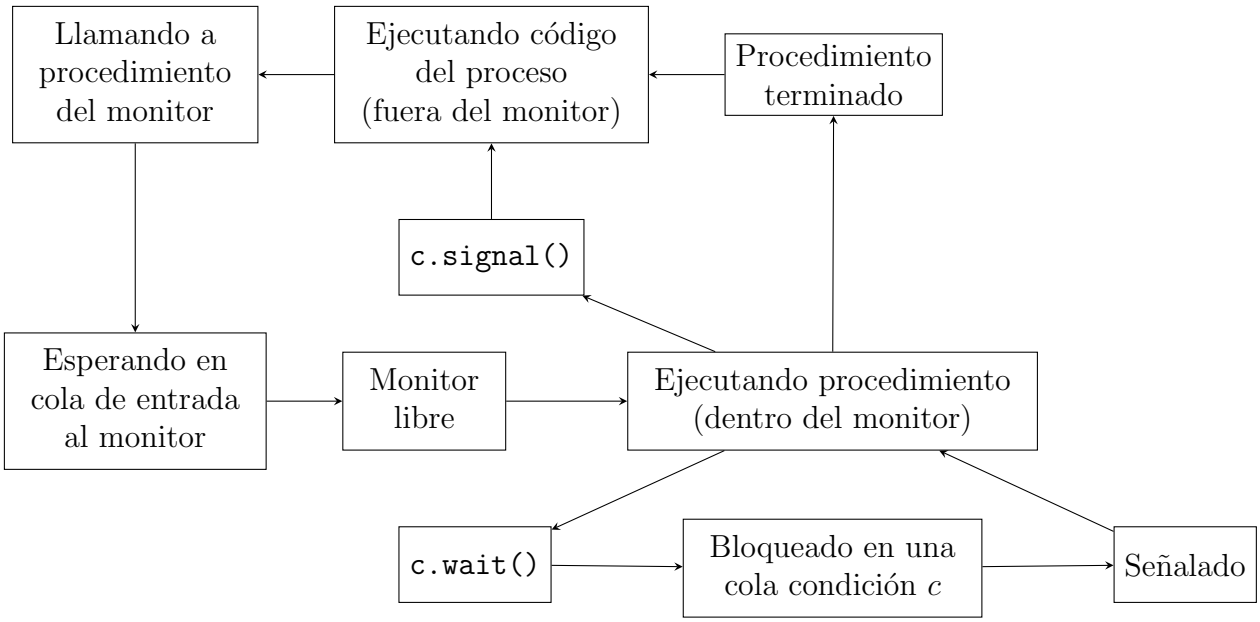


Figura 2.3: Vida de un proceso en un programa con monitores con semántica SS.

que esperar para entrar al monitor para ejecutar el procedimiento que contenía la operación `signal`).

Podemos representar la vida de un proceso que forma parte de un programa concurrente que usa monitores con semántica de señales de señalar y esperar con el diagrama de la Figura 2.4.

2.4.4. Señalar y Espera Urgente (SU)

El proceso señalador se bloquea en una nueva cola del monitor llamada *cola de procesos urgentes*, cediendo el monitor al proceso señalado. El monitor no queda libre en ningún momento, por lo que se trata de una señal con semántica desplazante.

La nueva cola de procesos urgentes actúa como una nueva cola de entrada al monitor, pero con mayor preferencia que la cola de entrada que ya teníamos. De esta forma, es similar a la semántica de señalar y esperar pero sin ser tan *injusta*, ya que da preferencia a los procesos que se bloquearon tras ejecutar un `signal` y deja en segunda posición a los proceos que esperan para ejecutar procedimientos del monitor.

Esta semántica modifica la última representación gráfica que teníamos de un monitor en la Tabla 2.3, dejándola finalmente en la que observamos en la Tabla 2.4.

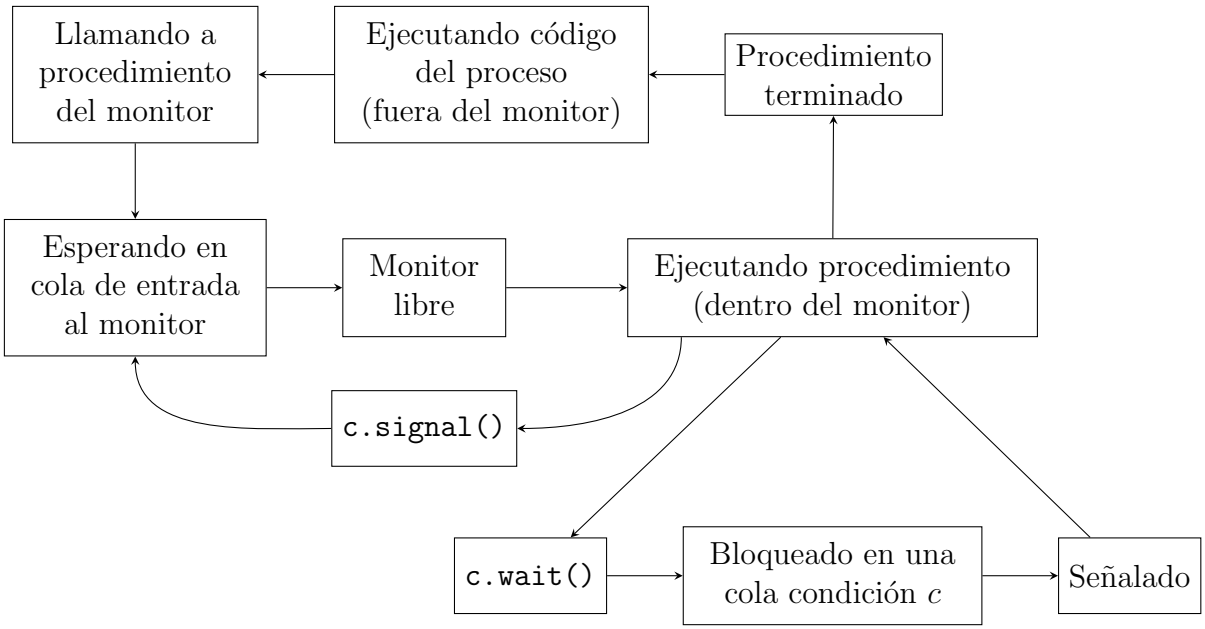


Figura 2.4: Vida de un proceso en un programa con monitores con semántica SE.

Cola del monitor
Cola de urgentes
Variables permanentes
Variables condición y colas de procesos bloqueados
Procedimientos exportados
Código de inicialización

Tabla 2.4: Esquema de un monitor incluyendo la cola de urgentes.

Podemos representar la vida de un proceso que forma parte de un programa concurrente que sua monitores con semántica de señalar y espera urgente con el diagrama de la Figura 2.5

2.4.5. Comparativa

Antes de comparar las semánticas de señales que ya hemos descrito, destacamos un último tipo de semántica de señales, las *señales automáticas* (SA). En estas, el programador programa las operaciones `wait` y es el compilador quien analiza los códigos programados y decide cuándo desbloquear a los procesos, por lo que se trata de unas señales implícitas (ya que en ningún moemnto se especifica cuándo hacer

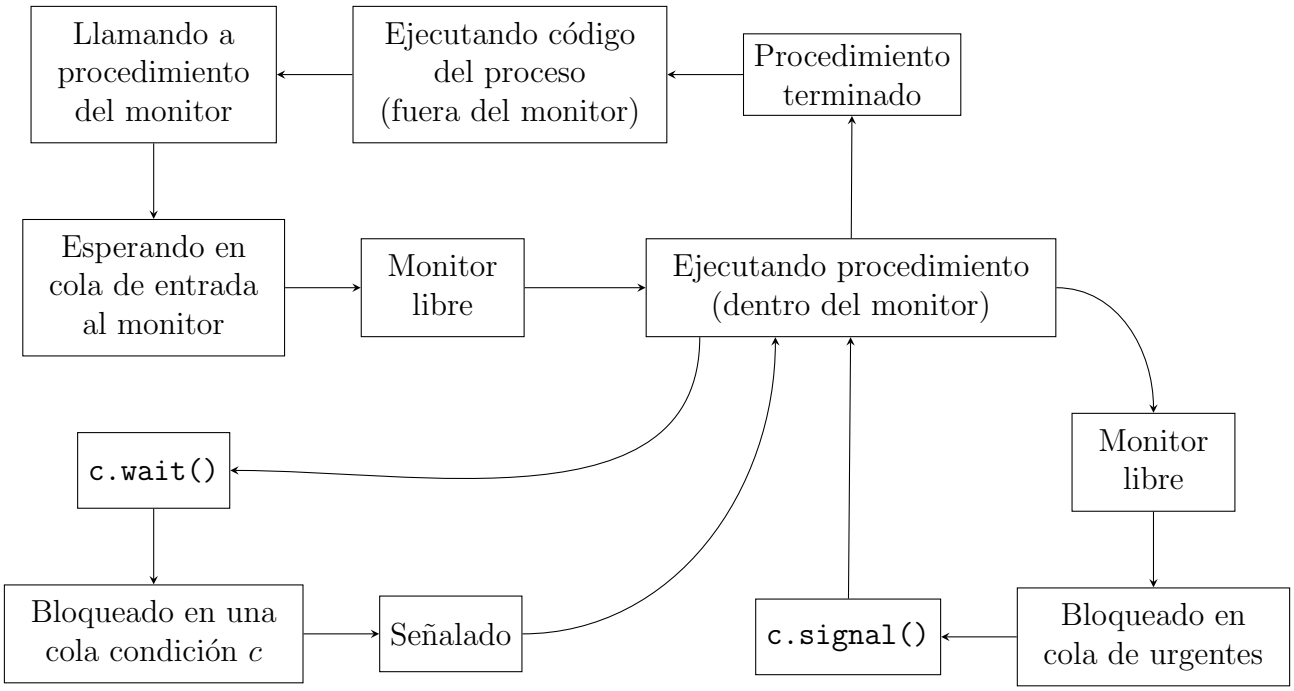


Figura 2.5: Vida de un proceso en un programa con monitores con semántica SU.

una instrucción `signal`).

A pesar de que este tipo de semántica aparece en la bibliografía, no aparece en ningún lenguaje de programación conocido, por lo que no tendrá relevancia en la asignatura ni en la comparativa que ahora realizaremos.

En primer lugar, hemos de destacar que cualquiera de las primeras 4 semánticas vistas es capaz de resolver cualquier problema, por lo que nos guiaremos por la sencillez de uso de cada una y la eficiencia que cada una nos aporta a los programas concurrentes para elegir una u otra semántica.

- En cuato a sencillez de uso, SC, SE y SU presentan la misma facilidad, mientras que SS nos condiciona a un paradigma de programación en el que las instrucciones `signal` sean las últimas que se ejecuten en los procedimientos de un monitor que contenga alguna operación `signal`.
- En cuanto a eficiencia:
  - Las semánticas SE y SU resultan ineficientes cuando las instrucciones `signal` se encuentran al final de los procedimientos (ya que habrá procesos que ejecutan un `signal`, se bloquearán, esperarán en la cola correspondiente de entrada al monitor, y cuando por fín tengan acceso a él no realizarán nada, sino que simplemente terminarán la ejecución del procedimiento), por lo que se saturará la cola de entrada al monitor y se realizarán cambios de contexto de formas innecesarias.
  - La semántica SC es poco eficiente, al tener que obligarnos a usar un bucle de comprobación para comprobar si estamos cerca de una situación insegura cada vez que entramos al monitor, como consecuencia de no tener semántica desplazante, pudiendo producirse robos de señal.

Por tanto, si no nos resulta incómodo tener que colocar todas las instrucciones `signal` como última instrucción de los procedimientos en los que aparecen, SS será probablemente la semántica se señales más eficientes.

Para concluir la comparativa de las semánticas de señales, veremos el siguiente ejemplo, que muestra que a veces la semántica elegida condiciona la forma en la que programamos los monitores.

Ejemplo. Queremos programar en un programa concurrente una *barrera parcial*.

A partir del concepto de barrera que ya manejamos en la asignatura de Arquitectura de Computadores[20], ahora no queremos tener a los procesos esperando a que todos los procesos que intervienen en el programa lleguen a un punto en específico, sino solo queremos que lo hagan n procesos.

De esta forma, cuando el primer proceso llegue al punto de la barrera, este se bloqueará. Estos les sucederá a los primeros $n-1$ procesos en llegar a la barrera. Cuando el proceso n-ésimo llegue a esta, se abrirá la barrera, dejando pasar a estos n primeros procesos que llegaron a esta. La barrera no debe dejar pasar al proceso número $n+1$, sino que este deberá esperar al proceso número $2n$ para voler a abrir la barrera.

Una vez descrito el problema a resolver, planteamos el siguiente monitor como primera solución:

```
1  Monitor BP;
       var cola : cond;
           contador : integer;

5      procedure barrera(); begin
           contador = contador + 1;
           if (contador < n) then
               cola.wait();
           else begin
10             for i=1 to n-1 do
                   cola.signal();
               end
               contador = 0;
           end
15         {Funcionalidad tras pasar la barrera parcial}
       end

       begin
           contador = 0;
20     end
```

Veamos ahora el comportamiento del monitor, según la semántica de señales que hayamos escogido:

Señalar y Continuar. Cuando llega el n-ésimo proceso de un grupo, este desbloquea a los últimos $n-1$ procesos bloqueados, que pasan a competir por el monitor. Puede suceder que algún proceso del siguiente grupo adelante a uno de este grupo, por lo que no sería una solución válida.

[20] Consultar los apuntes si no se conoce el concepto.

Señalar y Salir. El n-ésimo proceso solo podría despertar al primer proceso que llegó a la barrera (ya que tras ejecutar `signal`, este terminaría la ejecución de su procedimiento), sin reestablecer el contador a 0, por lo que cualquier proceso que pase por la barrera despertaría al siguiente proceso bloqueado, de forma que los últimos n procesos que ejecuten el protocolo `barrera` quedarán bloqueados de forma indefinida.

Señalar y Esperar. El n-ésimo proceso solo podría despertar al primer proceso que llegó a la barrera, volviendo el proceso señalador a la cola de entrada al monitor. El $n+1$-ésimo proceso solo podría despertar al segundo proceso, y se iría a la cola de entrada al monitor. Cuando el $2n$-ésimo proceso entre al monitor, este ya no ejecutará `signal` (ya que como la cola está vacía, es equivalente a una instrucción nula), poniendo por fin el contador a 0 y comenzando otra vez con dicho comportamiento.

No es una solución válida.

Señalar y Espera Urgente. El n-ésimo proceso desbloquea al primer proceso que llegó a la barrera y a continuación se bloquearía en la cola de urgentes, cediendo el monitor al primer proceso, que finalizaría la ejecución del procedimiento y volvería a entrar el n-ésimo proceso, por tener la cola de urgentes mayor prioridad que la cola de entrada al monitor. El proceso se repetiría hasta que el n-ésimo proceso finalie la ejecución del procedimiento, restaurando la barrera parcial para los siguientes n procesos.

Sería un funcionamiento correcto de la barrera, pero hace que el n-ésimo proceso realice $n-1$ cambios de contexto innecesarios.

Mostramos ahora una versión alternativa para el monitor que resuelve el problema de la barrera parcial:

```
1  Monitor BP;
       var cola : cond;
           contador : integer;

5      procedure barrera(); begin
           contador = contador + 1;
           if (contador < n) then
               cola.wait();
           contador = contador - 1;
10         {Funcionalidad tras pasar la barrera parcial}
           if (contador > 0) then
               cola.signal();
       end

15     begin
           contador = 0;
       end
```

Vemos su comportamiento:

- No funciona con la semántica SC.

- Funciona con cualquier semántica desplazante, ya que tras llegar a n procesos en la barrera, el n-ésimo desbloquea al primero, que desbloquea al segundo, que desbloquea al tercero, ..., hasta llegar al $n-1$, que realiza su funcionalidad y viceversa hasta el n-ésimo proceso, que deja la barrera en el estado inicial para los siguientes grupos de procesos.

En general, tenemos que tener cuidad con la semántica de señales que estemos empleando, sobre todo si las instrucciones `signal` tienen instrucciones detrás. Además, la semántica SC suele complicar como norma general los diseños de los monitores.

2.4.6. Axiomas para operaciones de sincronización no desplazantes

Como comentamos ya en la Sección 2.2.2, los axiomas que sabemos para demostrar las operaciones de sincronización en monitores sólo aplican cuando trabajamos con señales con semánticas desplazantes. Por tanto, si nos encontramos trabajando con semánticas de señales no desplazantes como SC, necesitamos unas nuevas reglas a aplicar.

Axioma de la operación `wait`.

Sea c una variable de tipo condición, L un invariante local del procedimiento en el que nos encontremos y IM el invariante del monitor que usamos para demostrar la corrección del mismo, se verifica que

$$\{IM \wedge L\}\ c.wait();\ \{IM \wedge L\}$$

Es decir, antes y después de la operación `wait` sólo podemos asegurar que se cumple el IM (ya que podrían producirse robos de señal), por lo que para asegurarnos de que estamos lejos de un estado inseguro del programa, debemos hacer uso de un bucle `while`, tal y como expusimos anteriormente:

```
1 while (cerca de estado inseguro) do begin
     c.wait();
  end
```

Axioma de la operación `signal`.

Como estamos ante una semántica no desplazante, el proceso señalador seguirá ejecutando el procedimiento que estaba ejecutando cuando ejecutó la operación `signal`, por lo que nada habrá cambiado:

$$\{P\}\ c.signal();\ \{P\}$$

Por tanto, la operación `signal` tiene el mismo comportamiento que la instrucción nula en semánticas no desplazantes, ya que podemos poner como pre y poscondición el mismo aserto P y el triple será cierto independientemente del aserto escogido.

3. Relaciones de problemas

3.1. Introducción

Ejercicio 3.1.1. Considerar el siguiente fragmento de programa para 2 procesos `P1` y `P2`: Los dos procesos pueden ejecutarse a cualquier velocidad. ¿Cuáles son los posibles valores resultantes para la variable `x`? Suponer que `x` debe ser cargada en un registro para incrementarse y que cada proceso usa un registro diferente para realizar el incremento.

```
{variables compartidas}
var x : integer := 0 ;
Process P1;
var i: integer;
begin
  begin
    for i:= 1 to 2 do begin
      x:= x + 1;
    end
  end
end
```

```


Process P2;
var j: integer;
begin
  begin
    for j:= 1 to 2 do begin
      x:= x + 1;
    end
  end
end
```

Observando el código, cada proceso hace 2 lecturas y dos escrituras (incrementos) en `x`.

- Como cada proceso aumenta dos veces el valor de `x`, el valor de `x` ha de ser, como mínimo, 2.
- Como en total se hacen 4 incrementos, el valor de `x` ha de ser 4 como máximo.

Notando por l_{ij} a la j-ésima lectura del proceso i y por e_{ij} a la j-ésima escritura del proceso i, ambas referidas a la variable `x`, podemos obtener cualquiera de las siguientes trazas de ejecución:

P1	P2	x	P1	P2	x	P1	P2	x	P1	P2	x
l_{11}	-	0	l_{11}	-	0	l_{11}	-	0	l_{11}	-	0
e_{11}	-	1	-	l_{21}	0	e_{11}	-	1	-	l_{21}	0
-	l_{21}	1	e_{11}	-	1	-	l_{21}	1	e_{11}	-	1
-	e_{21}	2	-	e_{21}	1	-	e_{21}	2	-	e_{21}	1
l_{12}	-	2	l_{12}	-	1	l_{12}	-	2	l_{12}	-	1
e_{12}	-	3	e_{12}	-	2	-	l_{22}	2	-	l_{22}	1
-	l_{22}	3	-	l_{22}	2	e_{12}	-	3	e_{12}	-	2
-	e_{22}	4	-	e_{22}	3	-	e_{22}	3	-	e_{22}	2

Luego los posibles valores resultantes para `x` son: 2, 3 y 4.

Ejercicio 3.1.2. ¿Cómo se podría hacer la copia del fichero `f` en otro `g`, de forma concurrente, utilizando la instrucción concurrente `cobegin-coend`? Para ello, suponer que:

1. Los archivos son una secuencia de items de un tipo arbitrario `T`, y se encuentran ya abiertos para lectura (`f`) y escritura (`g`). Para leer un ítem de `f` se usa la llamada a función `leer(f)` y para saber si se han leído todos los ítems de `f`, se puede usar la llamada `fin(f)` que devuelve verdadero si ha habido al menos un intento de leer cuando ya no quedan datos. Para escribir un dato `x` en `g` se puede usar la llamada a procedimiento `escribir(g,x)`.

2. El orden de los items escritos en `g` debe coincidir con el de `f`.

3. Dos accesos a dos archivos distintos pueden solaparse en el tiempo.

La copia del fichero `f` en el fichero `g` se podría realizar siguiendo el paradigma productor/consumidor que hemos visto en teoría en el Tema 1, mediante el uso de dos procesos:

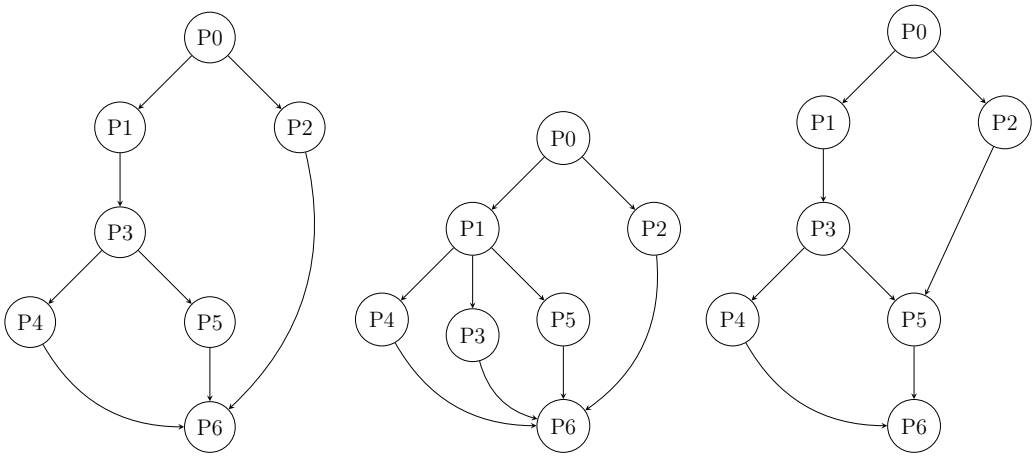
- Uno que lea un ítem del fichero `f` y lo escriba en una variable compartida.
- Otro que lea dicha variable compartida y escriba el ítem en el fichero `g`.

En dicho código, debemos garantizar que:

- El consumidor no lea la variable antes de que el productor escriba en ella.
- En la segunda escritura del productor, debemos esperar a que antes la haya leído el consumidor.
- En la segunda lectura del consumidor, debemos esperar a que antes haya modificado la variable el productor.

Siguiendo estos pasos, obtendríamos un código como el siguiente:

```
process CopiaFicheros ;
var ant, sig : T ;
begin
  sig = leer(f) ;
  while not fin(f) do begin
    ant = sig ;
    cobegin
      escribir(g, anterior) ;
      sig = leer(f) ;
    coend
  end
end
```



(a) DAG del apartado 1. (b) DAG del apartado 2. (c) DAG del apartado 3.

Figura 3.1: Grafos de precedencia del ejercicio 3.1.3.

Ejercicio 3.1.3. Construir, utilizando las instrucciones concurrentes `cobegin-coend` y `fork-join`, programas concurrentes que se correspondan con los grafos de precedencia que se muestran en la figura 3.1.

1. Grafo de precedencia de la figura 3.1a:

```
begin
  P0;
  fork P2; P1;
  P3;
  fork P5; P4;
  join P2; join P5;
  P6;
end
```

```
begin
  P0;
  cobegin
    P2;
    begin
      P1;
      P3;
      cobegin P4; P5; coend
    end
  coend
  P6;
end
```

2. Grafo de precedencia de la figura 3.1b:

```
begin
  P0;
  fork P2; P1;
  fork P5; fork P3; P4;
  join P2; join P5; join P3;
  P6;
end
```

```
begin
  P0;
  cobegin
    P2;
    begin
      P1;
      cobegin P4; P3; P5; coend
    end
  coend
  P6;
end
```

3. Grafo de precedencia de la figura 3.1c:

```
begin
  P0;
  fork P2; P1;
  P3;
  fork P4; join P2; P5;
  join P4;
  P6;
end
```

Sin embargo, no podemos hacer al 100 % el DAG de la figura 3.1c, ya que tras P3 debemos crear una estructura cobegin-coend. Sin embargo, este debe esperar a P2, por lo que la estructura cobegin-coend tendrá que esperar a P2, pero es que P4 no necesita que P2 termine.

Por tanto, no se puede programar con creación de hebras de forma estructurada. Sin embargo, podemos ofrecer dos soluciones, cada una que impone algo que el grafo no nos dice:

a) Si obligamos a que P4 también espere a P2, obtendríamos el código:

```
begin
  P0;
  cobegin
    P2;
    begin
      P1; P3;
    end
  coend
  cobegin P4; P5; coend
  P6;
end
```

b) Si ahora queremos ejecutar de forma concurrente el flujo que tiene a P1, P3 y P4 con el flujo que tiene a P2, entonces obligamos a que P5 espere a P4 (que no nos lo especifica el DAG, pero lo necesitamos para poder programarlo de forma estructurada):

```
begin
  P0;
  cobegin
    begin P1; P3; P4; end
    P2;
  coend
  P5;
  P6;
end
```

Ejercicio 3.1.4. Dados los siguientes fragmentos de programas concurrentes, obtener sus grafos de precedencia asociados:

```
begin
    P0 ;
    cobegin
        P1 ;
        P2 ;
        cobegin
            P3 ; P4 ; P5 ; P6 ;
        coend ;
        P7 ;
    coend
    P8 ;
end
```

(a) Programa 1.

```
begin
    P0 ;
    cobegin
        begin
            cobegin
                P1 ; P2 ;
            coend
            P5 ;
        end
        begin
            cobegin
                P3 ; P4 ;
            coend
            P6 ;
        end
    coend
    P7 ;
end
```

(b) Programa 2.

Figura 3.4: Programas concurrentes del ejercicio 3.1.4.

1. Programa de la figura 3.4a.

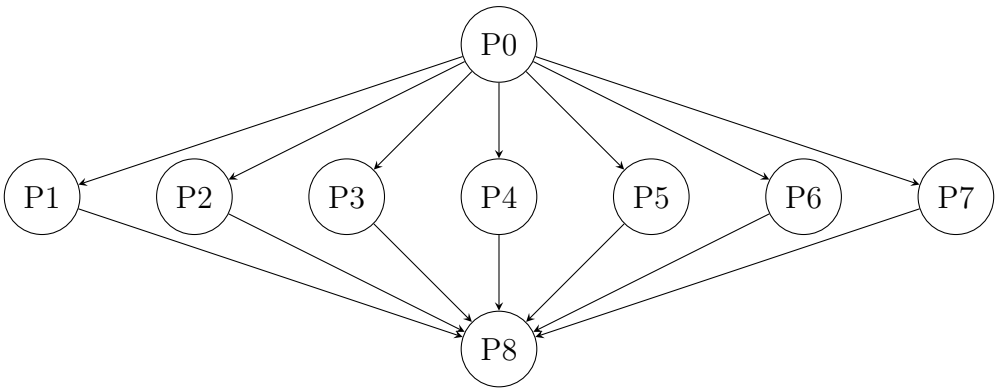


Figura 3.5: DAG para la figura 3.4a.

2. Programa de la figura 3.4b.

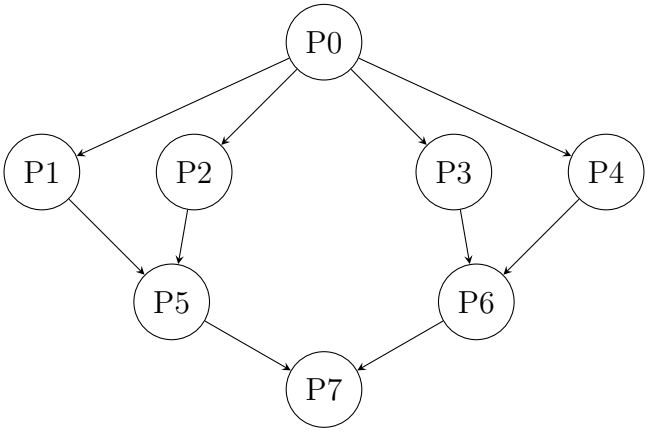


Figura 3.6: DAG para la figura 3.4b.

Ejercicio 3.1.5. Suponer un sistema de tiempo real que dispone de un captador de impulsos conectado a un contador de energía eléctrica. La función del sistema consiste en contar el número de impulsos producidos en 1 hora (cada Kwh consumido se cuenta como un impulso) e imprimir este número en un dispositivo de salida. Para ello se dispone de un programa concurrente con 2 procesos: un proceso acumulador (lleva la cuenta de los impulsos recibidos) y un proceso escritor (escribe en la impresora). En la variable común a los 2 procesos `n` se lleva la cuenta de los impulsos. El proceso acumulador puede invocar un procedimiento `Espera_impulso` para esperar a que llegue un impulso, y el proceso escritor puede llamar a `Espera_fin_hora` para esperar a que termine una hora. El código de los procesos de este programa podría ser el descrito en el Código Fuente 1.

Observación. En el programa se usan sentencias de acceso a la variable `n` encerradas entre los símbolos `<` y `>`. Esto significa que cada una de esas sentencias se ejecuta en exclusión mutua entre los dos procesos, es decir, esas sentencias se ejecutan de principio a fin sin entremezclarse entre ellas. Supongamos que en un instante dado el acumulador está esperando un impulso, el escritor está esperando el fin de una hora, y la variable `n` vale `k`. Después se produce de forma simultánea un nuevo impulso y el fin del periodo de una hora.

Obtener las posibles secuencias de interfolicación de las instrucciones (1),(2), y (3) a partir de dicho instante, e indicar cuales de ellas son correctas y cuales incorrectas (las incorrectas son aquellas en las cuales el impulso no se contabiliza).

En primer lugar, notemos que la intrucción 2 siempre se ejecutará antes que la instrucción 3, ya que están ambas en el mismo proceso (el escritor). Por tanto, las secuencia de instrucciones que se pueden dar son las intercalaciones de la instrucción 1 con las otras dos instrucciones; es decir: $A)$ $1-2-3$, $B)$ $2-1-3$ y $C)$ $2-3-1$. El análisis de cada una de ellas está en la Tabla 3.1. Notemos que tanto la opción A como la C son válidas, ya que en ambas se contabiliza el impulso. No obstante, difieren entre sí, puesto que en la opción A se contabiliza el impulso en la hora que termina (imprimiéndose entonces), mientras que en la opción C se contabiliza el impulso en la hora siguiente (no imprimiéndose entonces en esta salida). No obstante, la opción B es incorrecta, ya que no se contabiliza el impulso en la hora que termina ni en la siguiente.

```
{ variable compartida: }
var n : integer; { contabiliza impulsos }
begin
while true do begin
    Espera_impulso();
    < n := n+1 > ; { (1) }
    end
end
process Escritor ;
begin
while true do begin
    Espera_fin_hora();
    write( n ) ; { (2) }
    < n := 0 > ; { (3) }
    end
end
```

Código fuente 1: Código acumulador-escritor del ejercicio 3.1.5.

Opción A			Opción B			Opción C		
Operación	n	Salida	Operación	n	Salida	Operación	n	Salida
–	k	–	–	k	–	–	k	–
1→ n:=n+1	$k+1$	–	2→ write(n)	k	k	2→ write(n)	k	k
2→ write(n)	$k+1$	$k+1$	1→ n:=n+1	$k+1$	k	3→ n:=0	0	k
3→ n:=0	0	$k+1$	3→ n:=0	0	k	1→ n:=n+1	1	k

Tabla 3.1: Tabla de opciones del ejercicio 3.1.5.

```
procedure Sort( s,t : integer );
    var i, j : integer ;
    begin
        for i := s to t do
        for j:= s+1 to t do
            if a[i] < a[j] then
                swap( a[i], b[j] ) ;
    end

procedure Copiar( o,s,t : integer );
    var d : integer ;
    begin
        for d := 0 to t-s do
            b[o+d] := a[s+d] ;
    end
```

Código fuente 2: Procedimientos `Sort` y `Copiar` del ejercicio 3.1.6.

Ejercicio 3.1.6. Supongamos un programa concurrente en el cual hay, en memoria compartida dos vectores `a` y `b` de enteros y con tamaño par, declarados como sigue:

```
var a,b : array[1..2*n] of integer ; { n es una constante predefinida }
```

Queremos escribir un programa para obtener en `b` una copia ordenada del contenido de `a` (nos da igual el estado en que queda `a` después de obtener `b`). Para ello disponemos de la función `Sort` que ordena un tramo de `a` (entre las entradas `s` y `t`, ambas incluidas). También disponemos la función `Copiar`, que copia un tramo de `a` (desde `s` hasta `t`) en `b` (a partir de `o`). Estas funciones se muestran en el Código Fuente 2.

El programa para ordenar se puede implementar de dos formas:

1. Ordenar todo el vector `a`, de forma secuencial con la función `Sort`, y después copiar cada entrada de `a` en `b`, con la función `Copiar`.

2. Ordenar las dos mitades de `a` de forma concurrente, y después mezclar dichas dos mitades en un segundo vector `b` (para mezclar usamos un procedimiento `Merge`).

En el Código Fuente 3 se muestra el código de ambas versiones.

El código de la función `Merge`, disponible en el Código Fuente 4, se encarga de ir leyendo las dos mitades de `a`, en cada paso, seleccionar el menor elemento de los dos siguientes por leer (uno en cada mitad), y escribir dicho menor elemento en la siguiente mitad del vector mezclado `b`.

Llamaremos $T_s(k)$ al tiempo que tarda el procedimiento `Sort` cuando actúa sobre un segmento del vector con k entradas. Suponemos que el tiempo que (en media) tarda cada iteración del bucle interno que hay en `Sort` es la unidad (por definición). Es evidente que ese bucle tiene $\frac{k(k-1)}{2}$ iteraciones, luego:

$$T_s(k) = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot k^2 - \frac{1}{2} \cdot k$$

```
procedure Secuencial() ;
    var i : integer ;
    begin
        Sort( 1, 2*n ); { ordena a }
        Copiar( 1, 2*n ); { copia a en b }
    end

procedure Concurrente() ;
    begin
        cobegin
            Sort( 1, n );
            Sort( n+1, 2*n );
        coend
        Merge( 1, n+1, 2*n );
    end
```

Código fuente 3: Procedimientos `Secuencial` y `Concurrente` del ejercicio 3.1.6.

```
procedure Merge( inferior, medio, superior: integer ) ;
    { siguiente posicion a escribir en b }
    var escribir : integer := 1 ;
    { siguiente pos. a leer en primera mitad de a }
    var leer1 : integer := inferior ;
    { siguiente pos. a leer en segunda mitad de a }
    var leer2 : integer := medio ;
    begin
        { mientras no haya terminado con alguna mitad }
        while leer1 < medio and leer2 <= superior do begin
            if a[leer1] < a[leer2] then begin { minimo en la primera mitad }
                b[escribir] := a[leer1] ;
                leer1 := leer1 + 1 ;
            end else begin { minimo en la segunda mitad }
                b[escribir] := a[leer2] ;
                leer2 := leer2 + 1 ;
            end
            escribir := escribir+1 ;
        end
        { se ha terminado de copiar una de las mitades,
        copiar lo que quede de la otra }
        if leer2 > superior then
            { copiar primera } Copiar( escribir, leer1, medio-1 );
        else Copiar( escribir, leer2, superior ); { copiar segunda }
    end
```

Código fuente 4: Procedimiento `Merge` del ejercicio 3.1.6.

El tiempo que tarda la versión secuencial sobre $2n$ elementos (llamaremos S a dicho tiempo) será evidentemente $T_s(2n)$, luego:

$$S = T_s(2n) = \frac{1}{2} \cdot (2n)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2n = 2n^2 - n$$

Con estas definiciones, calcular el tiempo que tardará la versión paralela, en los dos siguientes casos. Para esto, hay que suponer que cuando el procedimiento `Merge` actúa sobre un vector con p entradas, tarda p unidades de tiempo en ello, lo cual es razonable teniendo en cuenta que en esas circunstancias `Merge` copia p valores desde `a` hacia `b`. Si llamamos a este tiempo $T_m(p)$, podemos escribir $T_m(p) = p$. Escribe también una comparación cualitativa de los tres tiempos (S, P_1 y P_2).

1. Las dos instancias concurrentes de `Sort` se ejecutan en el mismo procesador (llamamos P_1 al tiempo que tarda).

   En este caso, tenemos que hay ganancia de tiempo, ya que las dos instancias de `Sort` no pueden ejecutarse simultáneamente. Por tanto, tenemos que:

   $$P_1 = 2 \cdot T_s(n) + T_m(2n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} \cdot n \right) + 2n = n^2 - n + 2n = n^2 + n$$

2. Cada instancia de `Sort` se ejecuta en un procesador distinto (lo llamamos P_2).

   Al poder ejecutarse ahora de forma simultánea, tenemos que:

   $$P_2 = \text{máx}\{T_s(n), T_s(n)\} + T_m(2n) = \left(\frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} \cdot n \right) + 2n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{3}{2} \cdot n$$

Como podemos ver, en los tres casos la eficiencia es del orden cuadrático. No obstante, el coeficiente de n^2 es distinto en cada caso, siendo el mayor en la versión secuencial. Deducimos por tanto que las versiones concurrentes son más eficientes que la secuencial, y estas mejoras son significativas para valores de n grandes.

Ejercicio 3.1.7. Supongamos que tenemos un programa con tres matrices (`a`, `b` y `c`) de valores flotantes declaradas como variables globales. La multiplicación secuencial de `a` y `b` (almacenando el resultado en `c`) se puede hacer mediante un procedimiento `MultiplicacionSec` declarado como aparece aquí:

```
1  var a, b, c : array[1..3,1..3] of real ;
   procedure MultiplicacionSec()
       var i,j,k : integer ;
       begin
5          for i := 1 to 3 do
               for j := 1 to 3 do begin
                   c[i,j] := 0 ;
                   for k := 1 to 3 do
                       c[i,j] := c[i,j] + a[i,k]*b[k,j] ;
10             end
       end
```

Escribir un programa con el mismo fin, pero que use 3 procesos concurrentes. Suponer que los elementos de las matrices `a` y `b` se pueden leer simultáneamente, así

```
var a, b, c : array[1..3,1..3] of
real ;
process CalcularFila[ i : 1..3] ;
    var j, k : integer ;
    begin
        for j := 1 to 3 do begin
            c[i,j] := 0 ;
            for k := 1 to 3 do
                c[i,j] := c[i,j] +
                a[i,k]*b[k,j] ;
        end
    end
end
```

(a) Procesos concurrentes para calcular por filas.

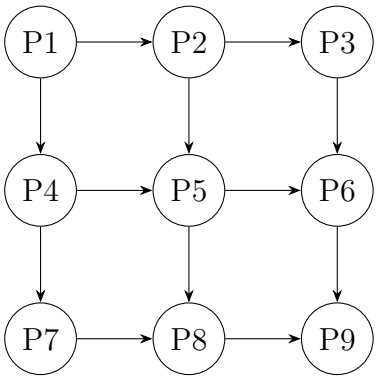
```
var a, b, c : array[1..3,1..3] of
real ;
process CalcularColumna[j : 1..3] ;
    var i, k : integer ;
    begin
        for i := 1 to 3 do begin
            c[i,j] := 0 ;
            for k := 1 to 3 do
                c[i,j] := c[i,j] +
                a[i,k]*b[k,j] ;
        end
    end
end
```

(b) Procesos concurrentes para calcular por columnas.

Figura 3.7: Códigos para el ejercicio 3.1.7.

```
while true do
cobegin
    P1 ; P2 ; P3 ;
    P4 ; P5 ; P6 ;
    P7 ; P8 ; P9 ;
coend
```

(a) Código del ejercicio 3.1.8.



(b) DAG del ejercicio 3.1.8.

Figura 3.8: Figuras del ejercicio 3.1.8.

como que elementos distintos de `c` pueden escribirse simultáneamente.

Esta solución puede llevarse a cabo de dos formas (tal y como vimos en la asigantura de AC). Crearemos tres procesos, y cada uno puede calcular una fila de la matriz `c` (Código Fuente 3.7a) o bien cada uno puede calcular una columna de la matriz `c` (Código Fuente 3.7b). No obstante, en la asignatura de AC se vio que, por norma general, es más eficiente calcular por filas que por columnas, ya que en el primer caso se accede a la matriz `a` de forma secuencial, aprovechando así la localidad espacial y provocando un número menor de fallos de caché.

Ejercicio 3.1.8. Un trozo de programa ejecuta nueve rutinas o actividades (`P1`, `P2`, ..., `P9`), repetidas veces, de forma concurrentemente con `cobegin-coend` (ver trozo de código de la figura 3.8a), pero que requieren sincronizarse según determinado grafo (ver la figura 3.8b).

Supón que queremos realizar la sincronización indicada en el grafo, usando para ello llamadas desde cada rutina a dos procedimientos (`EsperarPor` y `Acabar`). Se dan los siguientes hechos:

- El procedimiento `EsperarPor(i)` es llamado por una rutina cualquiera (la número k) para esperar a que termine la rutina número i, usando espera ocupada. Por tanto, se usa por la rutina k al inicio para esperar la terminación de las otras rutinas que corresponda según el grafo.
- El procedimiento `Acabar(i)` es llamado por la rutina número i, al final de la misma, para indicar que dicha rutina ya ha finalizado.
- Ambos procedimientos pueden acceder a variables globales en memoria compartida.
- Las rutinas se sincronizan única y exclusivamente mediante llamadas a estos procedimientos, siendo la implementación de los mismos completamente transparente para las rutinas.

Escribe una implementación de `EsperarPor` y `Acabar` (junto con la declaración e inicialización de las variables compartidas necesarias) que cumpla con los requisitos dados.

Usaremos para ello un vector de variables booleanas `finalizado`, donde `finalizado[i]` indica si la rutina i ha finalizado o no. Inicialmente estará inicializado a `false`, puesto que ningún proceso ha finalizado. Es decir:

```
var finalizado : array[1..9] of boolean := (false,...,false) ;
```

El procedimiento `EsperarPor` se implementa de la siguiente forma:

```
procedure EsperarPor( i : integer ) ;
begin
    while not finalizado[i] do
    begin
        { no hacer nada }
    end;
end.
```

Respecto a la función `Acabar`, podríamos pensar que tan solo se necesita cambiar el valor de la variable `finalizado[i]` a `true`. No obstante, hemos de tener en cuenta que este programa de ejecuta de forma repetida, por lo que si no se reinicia el vector `finalizado` al final de cada ejecución, en la siguiente ejecución ya no habrá la sincronización necesaria. Por tanto, tras el fin del proceso `P9`, se reinicia el vector `finalizado` a `false`.

```
procedure Acabar( i : integer ) ;
begin
    finalizado[i] := true ;
    if i >= 9 then
        finalizado := (false,...,false) ;
end
```

Ejercicio 3.1.9. En el ejercicio 3.1.8 los procesos `P1`, `P2`, ..., `P9` se ponen en marcha usando `cobegin-coend`. Escribe un programa equivalente, que ponga en marcha

todos los procesos, pero que use declaración estática de procesos, usando un vector de procesos `P`, con índices desde 1 hasta 9, ambos incluidos. El proceso `P[n]` contiene una secuencia de instrucciones desconocida, que llamamos `S_n`, y además debe incluir las llamadas necesarias a `Acabar` y `EsperarPor` (con la misma implementación que antes) para lograr la sincronización adecuada. Se incluye aquí una plantilla:

```
Process P[ n : 1..9 ]
begin
    ..... { esperar (si es necesario) a los procesos que corresponda }
    S_n ; { sentencias especificas de este proceso (desconocidas) }
    ..... { senalar que hemos terminado }
end
```

En primer lugar, hemos de especificar, en función de n, a qué procesos ha de esperar cada uno, lo cual se hará mediante una matriz compartida. Tenemos que:

```
var espera : array[1..9,1..2] of integer := (
    (-1, -1),    { P1 }
    (1, -1),     { P2 }
    (2, -1),     { P3 }
    (1, -1),     { P4 }
    (2, 4),      { P5 }
    (3, 5),      { P6 }
    (4, -1),     { P7 }
    (5, 7),      { P8 }
    (6, 8)       { P9 }
) ;
Process P[ n : 1..9 ]
begin
    for i := 1 to 2 do
        if espera[n,i] <> -1 then { != -1 }
            EsperarPor( espera[n,i] ) ;

    S_n ;
    Acabar( n ) ;
end
```

Ejercicio 3.1.10. Para los siguientes fragmentos de código, obtener la *poscondición* adecuada para convertirlo en un triple demostrable con la Lógica de Programas:

1. $\{i < 10\} \quad i = 2 * i + 1 \quad \{\}$
   Obtenemos la poscondición de este triple razonando matemáticamente:

$$\begin{aligned} i &< 10 \\ 2 * i &< 20 \\ i' = 2 * i + 1 &< 21 \end{aligned}$$

   donde hemos notado por i' al nuevo valor que adopta la variable i.

   Por tanto, la poscondición del triple es: $i < 21$.

   Pasamos ahora a demostrar el triple siguiente:

$$\{i < 10\} \quad i = 2 * i + 1 \quad \{i < 21\}$$

Usando el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{i < 21\}^{i}_{2*i+1} \quad i = 2 * i + 1 \quad \{i < 21\}$$

No obstante, de la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{i < 21\}^{i}_{2*i+1} \equiv \{2 * i + 1 < 21\} \equiv \{i < 10\}$$

Uniendo ambas ecuaciones, obtenemos que el triple es cierto.

$$\{i < 10\} \quad i = 2 * i + 1 \quad \{i < 21\}$$

2. $\{i > 0\} \quad i = i - 1; \quad \{\}$
Obtenemos la poscondición de este triple razonando matemáticamente:

$$i > 0$$
$$i' = i - 1 > -1$$

donde hemos notado por i' al nuevo valor que adopta la variable i.

Por tanto, la poscondición del triple es: $i > -1$.
Pasamos ahora a demostrar el triple siguiente:

$$\{i > 0\} \quad i = i - 1; \quad \{i > -1\}$$

Usando el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{i > -1\}^{i}_{i-1} \quad i = i - 1 \quad \{i > -1\}$$

No obstante, de la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{i > -1\}^{i}_{i-1} \equiv \{i - 1 > -1\} \equiv \{i > 0\}$$

Uniendo ambas ecuaciones, obtenemos que el triple es cierto.

$$\{i > 0\} \quad i = i - 1 \quad \{i > -1\}$$

3. $\{i > j\} \quad i = i + 1;\ j = j + 1 \quad \{\}$
De forma matemática y notando por i' y j' a las modificaciones de i y j, respectivamente:

$$i > j$$
$$i' = i + 1 > j + 1 = j'$$
$$i' > j'$$

Por tanto, la poscondición del triple es: $i > j$. Pasamos a demostrar el triple:

$$\{i > j\} \quad i = i + 1;\ j = j + 1 \quad \{i > j\}$$

Usando la regla de la composición, tenemos que:

$$\frac{\{P\}S_1\{Q\}, \{Q\}S_2\{R\}}{\{P\}S_1; S_2\{R\}}$$

Identificando Q con $i > j + 1$, tenemos que bastará con probar los triples:

a) $\{i > j\}\ i = i + 1\ \{i > j + 1\}$
Mediante el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{i > j\} \equiv \{i + 1 > j + 1\} \equiv \{i > j + 1\}^{i}_{i+1}\ i = i + 1\ \{i > j + 1\}$$

b) $\{i > j + 1\}\ j = j + 1\ \{i > j\}$
Mediante el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{i > j + 1\} \equiv \{i > j\}^{j}_{j+1}\ j = j + 1\ \{i > j\}$$

Como ambos son ciertos, el triple que queríamos demostrar también lo es gracias a la regla de composición.

4. $\{\text{falso}\}\quad a = a + 7;\quad \{\}$
En este caso, partimos de un estado del programa inalcanzable, por lo que en la poscondición podemos poner cualquier estado del programa, es decir, {verdad}.

5. $\{\text{verdad}\}\quad i = 3;\ j = 2 * i\quad \{\}$
Como partimos de cualquier estado del programa y sólo se realizan asignaciones, es fácil intuir cuál será la poscondición:

$$i = 3$$
$$j = 2 * i = 2 * 3 = 6$$

Pasamos a demostrar el triple

$$\{\text{verdad}\}\quad i = 3;\ j = 2 * i\quad \{i = 3\ \wedge\ j = 6\}$$

Usando la regla de composición, nos será suficiente probar los triples:

$$\{\text{verdad}\}\ i = 3\ \{i = 3\} \qquad \{i = 3\}\ j = 2 * i\ \{i = 3\ \wedge\ j = 6\}$$

a) Para el primer triple, usamos el axioma de asignación:

$$\{\text{verdad}\} \equiv \{3 = 3\} \equiv \{i = 3\}^{i}_{3}\ i = 3\ \{i = 3\}$$

b) Para el segundo, volvemos a usar el axioma de asignación:

$$\{i = 3\ \wedge\ j = 6\}^{j}_{2*i}\ j = 2 * i\ \{i = 3\ \wedge\ j = 6\}$$

No obstante, de la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{i = 3\ \wedge\ j = 6\}^{j}_{2*i} \equiv \{i = 3\ \wedge\ 2 * i = 6\} \equiv \{i = 3\ \wedge 2 * 3 = 6\} \equiv$$
$$\equiv \{i = 3\ \wedge\ 6 = 6\} \equiv \{i = 3\}$$

Uniendo ambas ecuaciones, obtenemos que el triple es cierto.

Ambos triples son ciertos, luego por la regla de la composición tenemos demostrado nuestro triple.

6. $\{\text{verdad}\} \quad c = a + b;\ c = c/2 \quad \{\}$
   Notando por c' al nuevo valor de c, tenemos que:

$$c = a + b$$
$$c' = c/2 = \frac{a+b}{2}$$

   Tratamos por tanto de probar el siguiente triple

$$\{\text{verdad}\} \quad c = a + b;\ c = c/2 \quad \left\{c = \frac{a+b}{2}\right\}$$

   Usando la regla de la composición, basta con probar los triples:

$$\{\text{verdad}\}\ c = a + b;\ \{c = a + b\} \qquad \{c = a + b\}\ c = c/2;\ \left\{c = \frac{a+b}{2}\right\}$$

   a) Para el primero, usamos el axioma de asignación:

$$\{\text{verdad}\} \equiv \{a + b = a + b\} \equiv \{c = a + b\}^{c}_{a+b}\ c = a + b\ \{c = a + b\}$$

   b) Para la segunda, también usamos el axioma de asignación:

$$\{c = a + b\} \equiv \left\{\frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}\right\} \equiv \left\{c = \frac{a+b}{2}\right\}^{c}_{c/2}\ c = c/2\ \left\{c = \frac{a+b}{2}\right\}$$

   Usando la relga de composición, tenemos demostrado nuestro triple.

Ejercicio 3.1.11. ¿Cuáles de los siguientes triples no son demostrables con la Lógica de Programas? (Considerando que $i, x, a \in \mathbb{Z}$)

1. $\{i > 0\} \quad i = i - 1; \quad \{i \geqslant 0\}$
   El siguiente triple sabemos que es cierto:

$$\{i > 0\}\ i = i - 1\ \{i > -1\}$$

   $\{i > -1\} \to \{i \geqslant 0\}$, luego es cierto por la primera regla de la consecuencia.

2. $\{x \geqslant 7\} \quad x = x + 3; \quad \{x \geqslant 9\}$
   El siguiente triple sabemos que es cierto:

$$\{x \geqslant 7\}\ x = x + 3\ \{x \geqslant 10\}$$

   $\{x \geqslant 10\} \to \{x \geqslant 9\}$, luego es cierto por la primera regla de la consecuencia.

3. $\{i < 9\} \quad i = 2 * i + 1; \quad \{i \leqslant 20\}$
   El siguiente triple sabemos que es cierto:

$$\{i < 9\}\ i = 2 * i + 1\ \{i < 19\}$$

   $\{i < 19\} \to \{i \leqslant 20\}$, luego es cierto por la primera regla de la consecuencia.

4. $\{a > 0\} \quad a = a - 7; \quad \{a > -6\}$

$$\{a > 0\}\ a = a - 7\ \{a > -7\}$$

Pero $\{a > -7\} \not\to \{a > -6\}$, luego este triple no es demostrable.

Ejercicio 3.1.12. Si el triple $\{P\}C\{Q\}$ es demostrable, indicar por qué los siguientes triples también lo son (o no se pueden demostrar y por qué):

1. $\{P\}C\{Q \vee P\}$
Es demostrable, ya que $\{Q\} \to \{Q \vee P\}$ y por la primera regla de la consecuencia, tomando $R = Q \vee P$:

$$\frac{\{P\}C\{Q\}, \{Q\} \to \{R\}}{\{P\}C\{R\}}$$

Tenemos que se debilita la poscondición.

2. $\{P \wedge D\}C\{Q\}$
Es demostrable, ya que $\{P \wedge D\} \to \{P\}$ y por la segunda regla de la consecuencia, tomando $R = P \wedge D$:

$$\frac{\{P\} \to \{R\}, \{R\}C\{Q\}}{\{P\}C\{Q\}}$$

Tenemos que se fortalece la precondición.

3. $\{P \vee D\}C\{Q\}$
No es demostrable, porque se debilita la precondición.

4. $\{P\}C\{Q \vee D\}$
Al igual que hemos hecho en el apartado 1, es demostrable ya que $\{Q\} \to \{Q \vee D\}$ y usando la primera regla de la consecuencia.

5. $\{P\}C\{Q \wedge P\}$
No podemos demostrarlo, ya que se fortalece la poscondición.

Ejercicio 3.1.13. Si el triple $\{P\}C\{Q\}$ es demostrable, ¿cuál de los siguientes triples no se puede demostrar?

1. $\{P \wedge D\}C\{Q\}$
Sabemos que $\{P \wedge D\} \to \{P\}$, luego puede demostrarse por la segunda regla de la consecuencia (se fortalece la precondición).

2. $\{P \vee D\}C\{Q\}$
No puede demostrarse, porque se debilita la precondición.

3. $\{P\}C\{Q \vee D\}$
Puede demostrarse mediante la primera regla de la consecuencia, ya que se tiene que $\{Q\} \to \{Q \vee D\}$.

4. $\{P\}C\{Q \vee P\}$
Puede demostrarse mediante la primera regla de la consecuencia, ya que se tiene que $\{Q\} \to \{Q \vee P\}$.

Ejercicio 3.1.14. Dado el siguiente programa, obtener:

```
int x = 5, y = 2;
cobegin
    < x = x + y >;
    < y = x * y >;
coend
```

1. Valores finales de x e y. Tenemos dos posibles trazas de ejecución:
   a) Primero se ejecuta la primera instrucción, por lo que obtendríamos $x = 7$ y $y = 14$.
   b) Primero se ejecuta la segunda instrucción, por lo que obtendríamos $x = 15$ y $y = 10$.
2. Valores finales de x e y si quitamos los símbolos `< >` de instrucción atómica.
   Encontramos cada uno de los dos estados anteriores, además de $x = 7$ y $y = 10$.

Ejercicio 3.1.15. Comprobar si la demostración del siguiente triple interfiere con los teoremas siguientes:

$$\{x \geqslant 2\} \quad < x = x - 2 > \quad \{x \geqslant 0\}$$

Es decir, queremos comprobar si $R \equiv < x = x-2 >$ con $pre(R) = \{x \geqslant 2\}$ interfiere con los triples siguientes:

1. $\{x \geqslant 0\} \quad < x = x + 3 > \quad \{x \geqslant 3\}$
   Comprobamos en primer lugar su interferencia con la precondición:

   $$\{x \geqslant 0 \wedge x \geqslant 2\} \ < x = x - 2 > \ \{x \geqslant 0\}$$

   Este triple es correcto por la segunda regla de la consecuencia, luego no interfiere con la precondición.

   Comprobemos ahora su interferencia con la poscondición:

   $$\{x \geqslant 3 \wedge x \geqslant 2\} \ < x = x - 2 > \ \{x \geqslant 1\}$$

   En este caso, $\{x \geqslant 1\} \not\to \{x \geqslant 3\}$, luego este triple no es demostrable y R interfiere con la poscondición del triple en cuestión.
2. $\{x \geqslant 0\} \quad < x = x + 3 > \quad \{x \geqslant 0\}$
   Comprobamos en primer lugar su interferencia con la precondición:

   $$\{x \geqslant 0 \wedge x \geqslant 2\} \ < x = x - 2 > \ \{x \geqslant 0\}$$

   Este triple es correcto por la segunda regla de la consecuencia, luego no interfiere con la precondición. Además, como la precondición y la poscondición son iguales, R tampoco interfiere con la poscondición, luego no interfiere con este triple.

3. $\{x \geqslant 7\} \quad < x = x + 3 > \quad \{x \geqslant 10\}$
   Comprobamos en primer lugar su interferencia con la precondición:

   $$\{x \geqslant 7 \wedge x \geqslant 2\} \ < x = x - 2 > \ \{x \geqslant 5\}$$

   No obstante, como $\{x \geqslant 5\} \not\rightarrow \{x \geqslant 7\}$, R interfiere con la precondición de este triple.

4. $\{y \geqslant 0\} \quad < y = y + 3 > \quad \{y \geqslant 3\}$
   R no interfiere con este triple, ya que son variables disjuntas.

5. $\{x \text{ es impar}\} \quad < y = x + 1 > \quad \{y \text{ es par}\}$
   Comprobamos en primer lugar su interferencia con la precondición:

   $$\{x \text{ es impar } \wedge x \geqslant 2\} \ < x = x - 2 > \ \{x \text{ es impar } \wedge x \geqslant 0\}$$

   Por la 2^a regla de la consecuencia, como $\{x \text{ es impar } \wedge x \geqslant 0\} \rightarrow \{x \text{ es impar}\}$, tenemos que es correcto y R no interfiere con la precondición.

   Comprobamos ahora su interferencia con la poscondición:

   $$\{y \text{ es par } \wedge x \geqslant 0\} \ < x = x - 2 > \ \{y \text{ es par } \wedge x \geqslant -2\}$$

   Por la 2^a regla de la consecuencia, como $\{y \text{ es par } \wedge x \geqslant -2\} \rightarrow \{y \text{ es par}\}$, tenemos que es correcto y R no interfiere con la poscondición. Por tanto, R no interfiere con este triple.

Ejercicio 3.1.16. Dado el siguiente triple:

$$\{x = 0\}$$
$$\text{cobegin}$$
$$< x = x + a > \ || \ < x = x + b > \ || \ < x = x + c >$$
$$\text{coend}$$
$$\{x = a + b + c\}$$

Demostrarlo utilizando la lógica de asertos para cada una de las tres instrucciones atómicas y después que se llega a la poscondición final $x = a + b + c$ utilizando para ello la regla *de la composición concurrente* de instrucciones atómicas.

Inicialmente, demostraremos los 3 siguientes triples, uno por cada instrucción atómica. Hemos de notar que, en cada uno de ellos, como no sabemos en qué orden se ejecutan, tenemos que incluir en las precondiciones y las poscondiciones todas las posibilidades.

1. El correspondiente a la primera instrucción atómica:

   $$\{x = 0 \vee x = b \vee x = c \vee x = b + c\} \ < x = x + a >$$
   $$\{x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c\}$$

Mediante el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c\}^{a}_{x+a} < x = x + a >$$
$$\{x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c\}$$

No obstante, de la definición de Sustitución Textual, tenemos:

$$\{x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c\}^{a}_{x+a} \equiv$$
$$\equiv \{x + a = a \vee x + a = a + b \vee x + a = a + c \vee x + a = a + b + c\} \equiv$$
$$\equiv \{x = 0 \vee x = b \vee x = c \vee x = b + c\}$$

Por tanto, el triple en cuestión es cierto.

2. El correspondiente a la segunda instrucción atómica:

$$\{x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c\} \ < x = x + b >$$
$$\{x = b \vee x = a + b \vee x = b + c \vee x = a + b + c\}$$

Es cierto, y su demostración es análoga al primer caso.

3. El correspondiente a la tercera instrucción atómica:

$$\{x = 0 \vee x = b \vee x = a \vee x = a + b\} \ < x = x + c >$$
$$\{x = c \vee x = a + c \vee x = b + c \vee x = a + b + c\}$$

Es cierto, y su demostración es análoga al primer caso.

Seguidamente, tenemos que ver que dichos 3 triples están libres de interferencias. Para ello, hemos de probar 12 triples, ya que hay 3 instrucciones atómicas, cada una de ellas con 2 asertos, por lo que por cada instrucción hemos de comprobar 4 asertos:

$$NI(x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c, < x = x + a >)$$
$$NI(x = b \vee x = a + b \vee x = b + c \vee x = a + b + c, < x = x + a >)$$
$$NI(x = 0 \vee x = b \vee x = a \vee x = a + b, < x = x + a >)$$
$$NI(x = c \vee x = a + c \vee x = b + c \vee x = a + b + c, < x = x + a >)$$

$$NI(x = 0 \vee x = b \vee x = c \vee x = b + c, < x = x + b >)$$
$$NI(x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c, < x = x + b >)$$
$$NI(x = 0 \vee x = b \vee x = a \vee x = a + b, < x = x + b >)$$
$$NI(x = c \vee x = a + c \vee x = b + c \vee x = a + b + c, < x = x + b >)$$

$$NI(x = 0 \vee x = b \vee x = c \vee x = b + c, < x = x + c >)$$
$$NI(x = a \vee x = a + b \vee x = a + c \vee x = a + b + c, < x = x + c >)$$
$$NI(x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c, < x = x + c >)$$
$$NI(x = b \vee x = a + b \vee x = b + c \vee x = a + b + c, < x = x + c >)$$

Demostremos ahora el primero, ya que el resto son idénticos.

$$
\begin{aligned}
&NI(x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c, < x = x + a >) \equiv \\
&\quad \equiv \{(x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c) \wedge (x = 0 \vee x = b \vee x = c \vee x = b + c)\} \\
&\qquad < x = x + a > \{x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c\} \equiv \\
&\quad \equiv \{x = 0 \vee x = c\} < x = x + a > \{x = 0 \vee x = a \vee x = c \vee x = a + c\}
\end{aligned}
$$

Este triple efectivamente es cierto, lo cual se puede demostrar empleando en primer lugar el Axioma de Sustitución y, posteriormente, la primera regla de la consecuencia.

Por tanto, y tras aplicar la Regla de la Composición Concurrente, tenemos de forma directa que:

$$
\begin{gathered}
\{x = 0\} \\
\text{cobegin} \\
< x = x + a > \;||\; < x = x + b > \;||\; < x = x + c > \\
\text{coend} \\
\{x = a + b + c\}
\end{gathered}
$$

Ejercicio 3.1.17. El siguiente triple:

$$
\begin{gathered}
\{x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0\} \\
< x = z + a > \;||\; < y = x + b > \\
\{(x = a) \wedge (y = b \vee y = a + b) \wedge z = 0\}
\end{gathered}
$$

(a) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que $a = 0$.

(b) El triple anterior es demostrable para cualquier valor de las variables a o b.

(c) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que $b = 0$.

(d) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que $a = 0 \wedge b = 0$.

Veamos si podemos demostrarlo. Para ello, notamos cada instrucción atómica de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
S_1 &=< x = z + a > \\
S_2 &=< y = x + b >
\end{aligned}
$$

Veamos cuál ha de ser la precondición de cada instrucción atómica:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= x = 0 \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0 \\
P_2 &= (x = 0 \vee x = a) \wedge y = 0 \wedge z = 0
\end{aligned}
$$

Veamos cuál ha de ser la poscondición de cada instrucción atómica:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0 \\
Q_2 &= [(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0
\end{aligned}
$$

Vemos por tanto que ambos triples son ciertos:

1. $\{P_1\}S_1\{Q_1\}$

   De la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

   $$\{x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}^{x}_{z+a} \equiv \{z + a = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\} \equiv \\ \equiv \{(y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$$

   Por tanto, del Axioma de Asignación, tenemos que:

   $$\{(y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\} < x = z + a > \{x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$$

   Finalmente, usando la segunda regla de la consecuencia, como se tiene que $\{P_1\} \rightarrow \{(y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$, tenemos que el triple es cierto.

2. $\{P_2\}S_2\{Q_2\}$

   De la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

   $$\{[(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0\}^{y}_{x+b} \equiv \\ \equiv \{[(x = 0 \wedge x + b = b) \vee (x = a \wedge x + b = a + b)] \wedge z = 0\} \equiv \\ \equiv \{(x = 0 \vee x = a) \wedge z = 0\}$$

   Por tanto, del Axioma de Asignación, tenemos que:

   $$\{(x = 0 \vee x = a) \wedge z = 0\} < y = x + b > \\ \{[(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0\}$$

   Por tanto, usando la segunda regla de la consecuencia, como se tiene que $\{P_2\} \rightarrow \{(x = 0 \vee x = a) \wedge z = 0\}$, tenemos que el triple es cierto.

Veamos ahora que no interfieren entre sí. Como tenemos dos instrucciones atómicas, cada una con dos asertos, hemos de comprobar 4 asertos:

$$NI(P_2, S_1) \equiv \{P_1 \wedge P_2\}S_1\{P_2\}$$
$$NI(Q_2, S_1) \equiv \{P_1 \wedge Q_2\}S_1\{Q_2\}$$
$$NI(P_1, S_2) \equiv \{P_2 \wedge P_1\}S_2\{P_1\}$$
$$NI(Q_1, S_2) \equiv \{P_2 \wedge Q_1\}S_2\{Q_1\}$$

Veamos por tanto en qué queda cada uno de ellos:

$$NI(P_2, S_1) \equiv \{x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0\} < x = z + a > \{(x = 0 \vee x = a) \wedge y = 0 \wedge z = 0\}$$
$$NI(Q_2, S_1) \equiv \{x = 0 \wedge y = b \wedge z = 0\} < x = z + a > \\ \{[(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0\}$$
$$NI(P_1, S_2) \equiv \{x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0\} < y = x + b > \{x = 0 \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$$
$$NI(Q_1, S_2) \equiv \{x = a \wedge y = 0 \wedge z = 0\} < y = x + b > \{x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$$

Intentemos demostrar el segundo. Usando la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{[(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0\}^{x}_{z+a} \equiv$$
$$\equiv \{[(z + a = 0 \wedge y = b) \vee (z + a = a \wedge y = a + b)] \wedge z = 0\} \equiv$$
$$\equiv \{y = a + b \wedge z = 0\}$$

Por tanto, del Axioma de Asignación, tenemos que:

$$\{y = a+b \wedge z = 0\} < x = z+a > \{[(x = 0 \wedge y = b) \vee (x = a \wedge y = a+b)] \wedge z = 0\}$$

No obstante, de forma general, tenemos que $\{x = 0 \wedge y = b \wedge z = 0\} \not\rightarrow \{y = a + b \wedge z = 0\}$, por lo que $NI(Q_2, S_1)$ no es demostrable. No obstante, si $a = 0$, entonces sí que sería demostrable. Supongamos por tanto a partir de ahora que $\underline{a = 0}$.

Intentemos ahora demostrar el cuarto. Usando la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}^{y}_{x+b} \equiv$$
$$\equiv \{x = a \wedge (x + b = 0 \vee x + b = b) \wedge z = 0\} \equiv$$
$$\equiv \{x = a \wedge (x = -b \vee x = 0) \wedge z = 0\} \equiv \{x = 0 \wedge z = 0\}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\underline{a = 0}$. Por tanto, del Axioma de Asignación, tenemos que:

$$\{x = 0 \wedge z = 0\} < y = x + b > \{x = a \wedge (y = 0 \vee y = b) \wedge z = 0\}$$

Además, como $\underline{a = 0}$, tenemos que $\{x = 0 \wedge z = 0\} \rightarrow \{x = a \wedge y = 0 \wedge z = 0\}$, tenemos que es cierto. Por tanto, $NI(P_1, S_2)$ es demostrable.

Los otros dos triples son análogamente ciertos, por lo que podemos aplicar la regla de la composición concurrente y llegar al siguiente triple:

$$\{x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0\}$$
$$< x = z + a > \,||\, < y = x + b >$$
$$\{x = a \wedge y = a + b \wedge z = 0\}$$

Este es el triple que queríamos demostrar, suponiendo que $\underline{a = 0}$. Por tanto, la respuesta correcta es la **a)**, ya que no es demostrable salvo que se cumpla siempre que $a = 0$.

Ejercicio 3.1.18. Suponer que $\{suma > 1\}\ suma = suma + 4\ \{suma > 5\}$ es demostrable, entonces: ¿cuál de los siguientes triples es también demostrable? (indicar por qué)

1. $\{suma > 2\}\ suma = suma + 4\ \{suma > 5\}$.
   Es demostrable, ya que $\{suma > 2\} \rightarrow \{suma > 1\}$ y podemos aplicar la segunda regla de la consecuencia.

2. $\{suma \geqslant 1\}\ suma = suma + 4\ \{suma > 5\}$.
   No es demostarble, ya que debilita la precondición.

3. $\{suma > 0\}\ suma = suma + 4\ \{suma > 5\}$.
   No es demostarble, ya que debilita la precondición.

4. $\{suma > 1\}\ suma = suma + 4\ \{suma > 6\}$.
   No es demostrable, ya que fortalece la poscondición.

Ejercicio 3.1.19. Suponer que $\{x < y\}\ C_1\ \{u < v\}$ es demostrable, entonces: ¿cuáles de los siguientes triples son también demostrables? (indicar por qué)

1. $\{x \leqslant y\}\ C_1\ \{u < v\}$.
   No es demostrable, ya que debilita la precondición.

2. $\{x \leqslant y - 2\}\ C_1\ \{u < v\}$.
   Es demostrable, ya que $\{x \leqslant y - 2\} \rightarrow \{x + 2 \leqslant y\} \rightarrow \{x < y\}$, y mediante la segunda regla de la consecuencia se tiene que es cierto.

3. $\{x \leqslant y\}\ C_1\ \{u \leqslant v\}$.
   El triple $\{x < y\}\ C_1\ \{u \leqslant v\}$ sí que es demostrable ya que relaja la poscondición, pero el triple que se nos dice no es demostrable, ya que también relaja la precondición. Como además no tenemos relación entre x y u ni entre y y v, no podemos inferir nada.

4. $\{x < y\}\ C_1\ \{u < v - 2\}$.
   No es demostrable, ya que fortalecemos la poscondición.

Ejercicio 3.1.20. Seleccionar el valor correcto de las 2 variables (x e y) después de ejecutarse el siguiente programa concurrente:

```
1 int x=5, y=2;
  cobegin <x=x+y>; <y=x*y>; <x=x-y>; coend;
```

(a) $x = 7$ y $y = 14$.

(b) $x = 5$ y $y = 10$.

(c) $x = -7$ y $y = 14$.

(d) $x = -3$ y $y = 10$.

Numeramos las instrucciones atómicas de la siguiente forma:

1. `<x=x+y>`
2. `<y=x*y>`
3. `<x=x-y>`

Veamos ahora, en función del orden de ejecución, cuál sería el valor de las variables x e y:

- 1, 2, 3: $x = -7$ y $y = 14$.
- 1, 3, 2: $x = 5$ y $y = 10$.
- 3, 1, 2: $x = 5$ y $y = 10$.

- 2, 1, 3: $x = 5$ y $y = 10$.
- 2, 3, 1: $x = 5$ y $y = 10$.
- 3, 2, 1: $x = 9$ y $y = 6$.

Por tanto, las respuestas b y c son correctas.

Ejercicio 3.1.21. El siguiente código concurrente no puede ser demostrado directamente con la lógica de aserciones (pre y poscondiciones). Elegir la respuesta que explica correctamente la razón de que ocurra esto.

```
1 {x=0} cobegin <x=x+a>; <x=x+a> coend; {x=2*a}
(a es un valor entero positivo)
```

(a) Porque la poscondición que se propone $\{x = 2 * a\}$ es falsa.

(b) Porque falta incluir la posibilidad de que el valor final de x sea también $\{x = a\}$.

(c) Porque al aplicar directamente la regla de inferencia de la *composición concurrente* utilizo unas condiciones (pre y post-condiciones) demasiado débiles.

(d) Porque tengo que incluir en los asertos el valor del contador de programa de cada procesador.

Notamos cada instrucción atómica de la siguiente forma:

$$S_1 = S_2 =< x = x + a >$$

Veamos cuál ha de ser la precondición de cada instrucción atómica:

$$P_1 = P_2 = x = 0 \vee x = a$$

Veamos cuál ha de ser la poscondición de cada instrucción atómica:

$$Q_1 = Q_2 = x = a \vee x = 2a$$

Veamos ahora que cada triple es cierto. Como son los mismos, hemos de demostrar:

$$\{x = 0 \vee x = a\} < x = x + a > \{x = a \vee x = 2a\}$$

Este se demuestra de forma directa. Además, también hemos de demostrar que no interfieren entre sí. Tenemos que demostrar:

$$NI(P_1, S_2) \equiv \{x = 0 \vee x = a\} < x = x + a > \{x = 0 \vee x = a\}$$
$$NI(Q_1, S_2) \equiv \{x = a\} < x = x + a > \{x = a \vee x = 2a\}$$

Estos también son ciertos, por lo que podemos aplicar la regla de la composición concurrente y llegar al siguiente triple:

$$\{x = 0 \vee x = a\} cobegin < x = x + a >; < x = x + a > coend; \{x = a \vee x = 2a\}$$

Por la primera regla de la consecuencia, podemos debilitar la precondición, llegando al siguiente triple:

$$\{x = 0\} cobegin < x = x + a >; < x = x + a > coend; \{x = a \vee x = 2a\}$$

No obstante, la poscondición no se puede debilitar, por lo que la respuesta correcta es la **b)**, ya que falta incluir en los asertos el valor final de x sea también $\{x = a\}$.

Ejercicio 3.1.22. Estudiar cuáles son los valores finales de las variables `x` e `y` en el siguiente programa. Insertar los asertos adecuados entre llaves, antes y después de cada sentencia, para poder obtener una traza de demostración del programa, que incluya en su último aserto los valores finales de las variables.

```
1 int x = c1;
  int y = c2;
  x = x + y;
  y = x * y;
5 x = x - y;
```

Tenemos que cada triple, por orden, es:

$$\{x = c_1 \wedge y = c_2\}$$
$$x = x + y$$
$$\{x = c_1 + c_2 \wedge y = c_2\}$$
$$y = x * y$$
$$\{x = c_1 + c_2 \wedge y = (c_1 + c_2) \cdot c_2\}$$
$$x = x - y$$
$$\{x = (c_1 + c_2) - (c_1 + c_2) \cdot c_2 = (c_1 + c_2) \cdot (1 - c_2) \wedge y = (c_1 + c_2) \cdot c_2\}$$

Ejercicio 3.1.23. Demostrar que el siguiente triple es cierto:

$$\{x = 0\}$$
$$\texttt{cobegin}$$
$$< x = x + 1 > \,||\, < x = x + 2 > \,||\, < x = x + 4 >$$
$$\texttt{coend}$$
$$\{x = 7\}$$

Notamos cada instrucción atómica de la siguiente forma:

$$S_1 =< x = x + 1 >$$
$$S_2 =< x = x + 2 >$$
$$S_3 =< x = x + 4 >$$

Veamos cuál ha de ser la precondición de cada instrucción atómica:

$$P_1 = x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4 \vee x = 6$$
$$P_2 = x = 0 \vee x = 1 \vee x = 4 \vee x = 5$$
$$P_3 = x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$$

Veamos cuál ha de ser la poscondición de cada instrucción atómica:

$$Q_1 = x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5 \vee x = 7$$
$$Q_2 = x = 2 \vee x = 3 \vee x = 6 \vee x = 7$$
$$Q_3 = x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = 7$$

Cada triple es directamente cierto por el Axioma de Asignación. Veamos ahora que no interfieren entre sí. Tenemos que demostrar:

$$NI(P_2, S_1) \equiv \{x = 0 \vee x = 4\} < x = x + 1 > \{x = 0 \vee x = 1 \vee x = 4 \vee x = 5\}$$
$$NI(Q_2, S_1) \equiv \{x = 2 \vee x = 6\} < x = x + 1 > \{x = 2 \vee x = 3 \vee x = 6 \vee x = 7\}$$
$$NI(P_3, S_1) \equiv \{x = 0 \vee x = 2\} < x = x + 1 > \{x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$$
$$NI(Q_3, S_1) \equiv \{x = 4 \vee x = 6\} < x = x + 1 > \{x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = 7\}$$

$$NI(P_1, S_2) \equiv \{x = 0 \vee x = 4\} < x = x + 2 > \{x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4 \vee x = 6\}$$
$$NI(Q_1, S_2) \equiv \{x = 1 \vee x = 5\} < x = x + 2 > \{x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5 \vee x = 7\}$$
$$NI(P_3, S_2) \equiv \{x = 0 \vee x = 1\} < x = x + 2 > \{x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$$
$$NI(Q_3, S_2) \equiv \{x = 4 \vee x = 5\} < x = x + 2 > \{x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = 7\}$$

$$NI(P_1, S_3) \equiv \{x = 0 \vee x = 2\} < x = x + 4 > \{x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4 \vee x = 6\}$$
$$NI(Q_1, S_3) \equiv \{x = 1 \vee x = 3\} < x = x + 4 > \{x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5 \vee x = 7\}$$
$$NI(P_2, S_3) \equiv \{x = 0 \vee x = 1\} < x = x + 4 > \{x = 0 \vee x = 1 \vee x = 4 \vee x = 5\}$$
$$NI(Q_2, S_3) \equiv \{x = 2 \vee x = 3\} < x = x + 4 > \{x = 2 \vee x = 3 \vee x = 6 \vee x = 7\}$$

Todos estos son ciertos, por lo que podemos aplicar la regla de la composición concurrente y llegar al siguiente triple:

$$\{x = 0\}$$
$$\texttt{cobegin}$$
$$< x = x + 1 > || < x = x + 2 > || < x = x + 4 >$$
$$\texttt{coend}$$
$$\{x = 7\}$$

Ejercicio 3.1.24. Dada la siguiente construcción de composición concurrente `P`:

$$\texttt{cobegin}$$
$$< x = x - 1 >; < x = x + 1 >; || < y = y - 1 >; < y = y + 1 >;$$
$$\texttt{coend}$$

demostrar que se cumple la invarianza de $\{x = y\}$, es decir, que $\{x = y\}\ P\ \{x = y\}$ es un triple cierto.

Para ello, comenzamos demostrando los siguientes triples (se ha de mantener la invarianza en el código secuencial)

$$\{x = y\}\ x = x - 1; x = x + 1;\ \{x = y\}$$
$$\{x = y\}\ y = y - 1; y = y + 1;\ \{x = y\}$$

1. Respecto al primero, tenemos que los siguientes triples son ciertos:

$$\{x = y\}\ x = x - 1\ \{x + 1 = y\}$$
$$\{x + 1 = y\}\ x = x + 1\ \{x = y\}$$

   Usando la regla de la composición, se tiene.

2. Respecto al segundo, tenemos que los siguientes triples son ciertos:

$$\{y = x\}\ y = y - 1\ \{y + 1 = x\}$$
$$\{y + 1 = x\}\ y = y + 1\ \{y = x\}$$

   Usando la regla de la composición, se tiene.

Ahora, los triples son libres de interferencia por tener variables disjuntas. Podemos aplicar por tanto la regla de la composición concurrente, llegando a lo que queríamos probar:

$$\{x = y\}$$
$$\texttt{cobegin}$$
$$< x = x - 1 >; < x = x + 1 >; || < y = y - 1 >; < y = y + 1 >;$$
$$\texttt{coend}$$
$$\{x = y\}$$

Ejercicio 3.1.25. Usando la regla de la conjunción, demostrar que

$$\{i > 2\}\ i = 2 * i\ \{i > 4\}$$

Aunque se podría demostrar de forma directa mediante el axioma de asignación, vamos a demostrarlo mediante la regla de la conjunción. Para ello, consideramos los siguientes triples:

$$\{V\}\ i = 2 * i\ \{i = 2 * i\}$$
$$\{i > 2\}\ i = 2 * i\ \{i > 2\}$$

Estos son directamente ciertos por el axioma de asignación. Por tanto, podemos aplicar la regla de la conjunción, llegando a que el siguiente triple es cierto:

$$\{i > 2\} \equiv \{V \wedge i > 2\}\ i = 2 * i\ \{i > 2 \wedge i = 2 \cdot i\} \equiv \{i > 4\}$$

Ejercicio 3.1.26. Se dan los siguientes triples de Hoare:

$$\{j > 1\}\ i = i + 2;\ j = j + 3;\ \{j > 4\}$$
$$\{i > 2\}\ i = i + 2;\ j = j + 3;\ \{i > 4\}$$

Demostrar que estos triples implican que

$$\{j > 1 \wedge i > 2\}\ i = i + 2;\ j = j + 3\ \{j > 4 \wedge i > 4\}$$

¿Qué regla se debe utilizar para la demostración?

Se tiene de forma directa mediante la regla de la conjunción.

Ejercicio 3.1.27. Sean A y B los valores iniciales de a y b respectivamente. Escribir un fragmento de código que tenga $\{a = A + B \wedge b = A - B\}$ como poscondición y demostrar que el código es correcto.

En este caso, nos piden un código C que cumpla:

$$\{a = A \wedge b = B\}\ C\ \{a = A + B \wedge b = A - B\}$$

Sea $C =< a = a + b; b = a - 2b >$. Buscamnos entonces demostrar los siguientes triples:

$$\{a = A \wedge b = B\}\ a = a + b\ \{a = A + B \wedge b = B\}$$
$$\{a = A + B \wedge b = B\}\ b = a - 2b\ \{a = A + B \wedge b = A - B\}$$

Demostramos cada uno por separado:

1. Usando el axioma de asignación:

$$\begin{aligned}\{a = A + B \wedge b = B\}^a_{a+b} &\equiv \{a + b = A + B \wedge b = B\} \equiv \\ &\equiv \{a = A \wedge b = B\}\ a = a + b\ \{a = A + B \wedge b = B\}\end{aligned}$$

2. Usando el axioma de asignación:

$$\begin{aligned}\{a = A + B \wedge b = A - B\}^b_{a-2b} &\equiv \{a = A + B \wedge a - 2b = A - B\} \equiv \\ &\equiv \{a = A + B \wedge A + B - 2b = A - B\} \equiv \\ &\equiv \{a = A + B \wedge b = B\}\ b = a - 2b\ \{a = A + B \wedge b = A - B\}\end{aligned}$$

Usando la regla de la composición, tenemos que el código es correcto.

Ejercicio 3.1.28. Demostrar que la siguiente sentencia tiene la poscondición $\{x \geqslant 0, x^2 \geqslant a^2\}$. `if a > 0 then x = a else x = -a`. Es decir, probar el triple:

$$\{V\}\ \texttt{if a > 0 then x = a else x = -a}\ \{x \geqslant 0, x^2 \geqslant a^2\}$$

Para ello, tenemos que usar la regla del `if`:

$$\frac{\{P \wedge B\}S_1\{Q\}, \{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}}{\{P\}\ \texttt{if B then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ \{Q\}}$$

Luego bastará con probar los triples

$$\{a > 0\} \equiv \{V \wedge a > 0\}\ x = a\ \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}$$
$$\{a \leqslant 0\} \equiv \{V \wedge a \leqslant 0\}\ x = -a\ \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}$$

1. Usando el axioma de asignación:

$$\{a \geqslant 0\} \equiv \{a \geqslant 0 \wedge a^2 \geqslant a^2\} \equiv \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}_a^x \; x = a \; \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}$$

   Como $\{a > 0\} \rightarrow \{a \geqslant 0\}$, usamos la segunda regla de la consecuencia y tenemos el primer triple demostrado.

2. Usando el axioma de asignación:

$$\{a \leqslant 0\} \equiv \{-a \geqslant 0 \wedge a^2 \geqslant a^2\} \equiv \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}_{-a}^x \; x = -a \; \{x \geqslant 0 \wedge x^2 \geqslant a^2\}$$

Y acabamos de probar el triple que nos pedía el ejercicio.

Ejercicio 3.1.29. El siguiente fragmento de código tiene $\{P\} \equiv \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$ como precondición y poscondición. Demostrar que es verdadero:

$$\{P\} \; sum = sum + j; \; j = j + 1; \; \{P\}$$

Queremos demostrar el triple:

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\} \; sum = sum + j; \; j = j + 1; \; \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

Para ello, será suficiente con demostrar los triples

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\} \; sum = sum + j; \; \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}$$
$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\} \; j = j + 1; \; \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

y aplicar la regla de composición.

1. Para demostrar el primer triple, usamos el axioma de asignación:

$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}_{sum+j}^{sum} \; sum = sum + j; \; \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}$$

   Usando la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}_{sum+j}^{sum} \equiv \left\{sum + j = \frac{(j+1)j}{2}\right\} \equiv$$
$$\equiv \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} - j\right\} \equiv \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

2. Para el segundo, usamos también el axioma de asignación:

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}_{j+1}^{j} \; j = j + 1; \; \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

   Usando de nuevo la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}_{j+1}^{j} \equiv \left\{sum = \frac{(j+1)(j+1-1)}{2}\right\} \equiv \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}$$

Por lo que el triple del enunciado es cierto.

Ejercicio 3.1.30. Demostrar que

$$\{i * j + 2 * j + 3 * i = 0\}\ j = j + 3;\ i = i + 2;\ \{i * j = 6\}$$

Vamos buscando aplicar la regla de la composición. Para ello, y como desconocemos el estado intermedio por el que debemos pasar, usamos directamente la Sustitución Textual al final, para así obtener la precondición del segundo triple.

$$\{i * j = 6\}^{i}_{i+2} \equiv \{(i + 2) * j = 6\} \equiv \{i * j + 2 * j = 6\} \equiv \{j * (i + 2) = 6\}$$

Usando esa precondición, el segundo libre se demuestra directamente con el axioma de asignación. Demostramos ahora el primer triple:

$$\{i * j + 2 * j + 3 * i = 0\}\ j = j + 3;\ \{j * (i + 2) = 6\}$$

Usando la sustitución textual, tenemos que:

$$\{j * (i + 2) = 6\}^{j}_{j+3} \equiv \{(j + 3) * (i + 2) = 6\} \equiv \{j * (i + 2) + 3 * (i + 2) = 6\} \equiv$$
$$\equiv \{i * j + 2 * j + 3 * i = 0\}$$

Por lo que, tras usar la regla de la composición, vemos que el triple del enunciado es cierto.

Ejercicio 3.1.31. ¿Por qué en la regla del `while B`, la condición `B` debe ser verdadera al comienzo del bucle?

Ejercicio 3.1.32. Considerar una función con dos argumentos que se usa en un programa. Explicar por qué el uso de alias puede ser un problema en este caso.

Ejercicio 3.1.33. Demostrar la corrección parcial del siguiente fragmento de programa:

```
1 sum:= 0; j:= 1;
  while j <> c do begin {<> es !=}
      sum:= sum+j;
      j:= j+1;
5 end
  {sum = c*(c-1)/2}
```

Para ello, tenemos que hacer uso de la regla de la iteración:

$$\frac{\{I \wedge B\}S\{I\}}{\{I\}\ \texttt{while B do}\ S\ \texttt{end do}\ \{I \wedge \neg B\}}$$

Identificando términos, sean:

$$I \equiv sum = \frac{j(j-1)}{2}$$
$$B \equiv j \neq c$$
$$S = sum = sum + j;\ j = j + 1$$

Luego tendremos que probar que se cumple el triple

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2} \wedge j \neq c\right\}\ sum = sum + j; j = j + 1;\ \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

Para ello, será suficiente con demostrar los triples

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2} \wedge j \neq c\right\}\ sum = sum + j;\ \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\}$$
$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\}\ j = j + 1;\ \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

y aplicar la regla de composición.

1. Para demostrar el primer triple, usamos el axioma de asignación:

$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\}^{sum}_{sum+j}\ sum = sum+j;\ \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\}$$

$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\}^{sum}_{sum+j} \equiv \left\{sum + j = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\} \equiv$$
$$\equiv \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} - j \wedge j \neq c\right\} \equiv \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2} \wedge j \neq c\right\}$$

2. Para el segundo, usamos también el axioma de asignación:

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}^{j}_{j+1}\ j = j + 1;\ \left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}$$

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}^{j}_{j+1} \equiv \left\{sum = \frac{(j+1)(j+1-1)}{2}\right\} \equiv \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}$$

   Además, tenemos que se tiene:

$$\left\{sum = \frac{(j+1)j}{2} \wedge j \neq c\right\} \rightarrow \left\{sum = \frac{(j+1)j}{2}\right\}$$

   Por tanto, usando la segunda regla de la consecuencia, tenemos que el segundo triple es cierto.

Por tanto, mediante la regla de la iteración, tenemos que:

$$\left\{sum = \frac{j(j-1)}{2}\right\}\ \texttt{while j <>c do begin sum:= sum+j; j:= j+1 end}\ \left\{sum = \frac{c(c-1)}{2}\right\}$$

Como inicialmente $j = 1$ y $sum = 0$, tenemos que este triple coincide con el enunciado del ejercicio.

Ejercicio 3.1.34. Demostrar la corrección del siguiente triple:

$$\{a[i] \geqslant 0\}\ a[i] = a[i] + a[j];\ \{a[i] \geqslant a[j]\}$$

Para ello, basta aplicar el axioma de la asignación:

$$\{a[i] \geqslant a[j]\}^{a[i]}_{a[i]+a[j]}\ a[i] = a[i] + a[j];\ \{a[i] \geqslant a[j]\}$$

$$\{a[i] \geqslant a[j]\}^{a[i]}_{a[i]+a[j]}\ \equiv \{a[i] + a[j] \geqslant a[j]\} \equiv \{a[i] \geqslant 0\}$$

Ejercicio 3.1.35. Verificar el siguiente segmento de programa:

$$\begin{gathered}\{n \geqslant 0\}\\ i = 1;\\ \texttt{while } i \leqslant n \texttt{ do begin}\\ a[i] = b[i];\\ i = i + 1;\\ \texttt{end}\\ \left\{\bigwedge_{i=1}^{n}(a[i] = b[i])\right\}\end{gathered}$$

Para ello, como tenemos que demostrar la corrección de un bucle, hemos de buscar un invariante global que nos lleve a la poscondición indicada. Queremos demostrar que el programa copia el vector `b` en el `a`, por lo que un invariante que puede servirnos es

$$\{I\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j])\right\}$$

Primero, comprobamos que el invariante es cierto antes de entrar al bucle, es decir:

$$\{n \geqslant 0\}\ i = 1;\ \{I\}$$

- Usando el axioma de asignación, tenemos que:

$$\{n \geqslant 0\}\ i = 1;\ \{n \geqslant 0 \wedge i = 1\}$$

- Usando la regla de la consecuencia tenemos que es cierto, ya que:

$$\{n \geqslant 0 \wedge i = 1\} \rightarrow \{i = 1\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j]) \wedge i = 1\right\} \rightarrow \{I\}$$

Posteriormente, hemos de demostrar que $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ con $\{B\} \equiv \{i \leqslant n\}$ y S el cuerpo del bucle para poder aplicar la regla de la iteración. Esto lo hacemos

empleando la regla de la composición y la regla de la consecuencia:

$$\{I \wedge B\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j]) \wedge i \leqslant n\right\}$$
$$a[i] = b[i];$$
$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i}(a[j] = b[j]) \wedge i \leqslant n\right\}$$
$$i = i + 1;$$
$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j]) \wedge i \leqslant n + 1\right\} \rightarrow \{I\}$$

Habiendo demostrado que dicho triple es cierto, podemos aplicar la regla de iteración. Usando esta y la regla de la consecuencia, tenemos que:

$$\{I\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j])\right\}$$
$$\texttt{while } i \leqslant n \texttt{ do begin}$$
$$a[i] = b[i];$$
$$i = i + 1;$$
$$\texttt{end}$$
$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j]) \wedge i > n\right\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(a[j] = b[j]) \wedge i - 1 \geqslant n\right\} \rightarrow \left\{\bigwedge_{j=1}^{n}(a[j] = b[j])\right\}$$

Uniendo por tanto los triples, mediante la regla de la composición tenemos que:

$$\{n \geqslant 0\}$$
$$i = 1;$$
$$\{I\}$$
$$\texttt{while } i \leqslant n \texttt{ do begin}$$
$$a[i] = b[i];$$
$$i = i + 1;$$
$$\texttt{end}$$
$$\left\{\bigwedge_{i=1}^{n}(a[i] = b[i])\right\}$$

Esto es por tanto cierto, y hemos demostrado la corrección del programa.

Ejercicio 3.1.36. El siguiente fragmento de programa calcula $\sum_{i=1}^{n} i!$. Demostrar que es correcto.

```
i = 1; sum = 0; f = 1;
while i <> n+1 do begin     {<> es !=}
  sum = sum + f;
  i = i + 1;
  f = f * i;
end
```

Para ello, usaremos la regla de iteración:

$$\frac{\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}}{\{I\}\ \texttt{while}\ B\ \texttt{do begin}\ S\ \texttt{end do}\ \{I \wedge \neg B\}}$$

Por lo que tenemos que buscar un invariante global I que nos permita concluir al final que el programa calcula $\sum_{i=1}^{n} i!$.

Observando el código, podemos ver que en `sum` va almacenando dicho número, mientras incrementa `i` en cada iteración y va calculando en `f` el factorial de `i`. Planteamos por tanto el siguiente invariante I:

$$\{I\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i! \right\}$$

En primer lugar, demostramos el triple para comprobar que el invariante es cierto al inicio del programa:

$$\{V\}\ i = 1;\ sum = 0;\ f = 1;\ \{I\}$$

Este es directamente cierto usando el axioma de asignación:

$$\{V\}\ i = 1;\ sum = 0;\ f = 1;\ \{i = 1 \wedge sum = 0 \wedge f = 1\} \equiv \left\{ i = 1 \wedge f = 1! \wedge sum = \sum_{j=1}^{0} j! = 0 \right\}$$

A continuación, trataremos de probar el triple $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$, para $B \equiv \{i \neq n+1\}$ y S el cuerpo del bucle:

$$\{I \wedge B\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i! \wedge i \neq n+1 \right\}$$

$$sum = sum + f;$$

$$\left\{ sum = \left(\sum_{j=1}^{i-1} j! \right) + i! \wedge f = i! \wedge i \neq n+1 \right\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i} j! \wedge f = i! \wedge i \neq n+1 \right\}$$

$$i = i + 1;$$

$$\left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = (i-1)! \wedge i \neq n+2 \right\}$$

$$f = f * i;$$

$$\left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i \cdot (i-1)! \wedge i \neq n+2 \right\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i! \wedge i \neq n+2 \right\} \rightarrow \{I\}$$

Luego podemos aplicar la regla de iteración, para obtener finalmente que:

$$\{I\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i! \right\}$$
$$\texttt{while } i \neq n+1 \texttt{ do begin}$$
$$sum = sum + f;$$
$$i = i + 1;$$
$$f = f * i;$$
$$\texttt{end}$$
$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \left\{ sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i! \wedge i = n+1 \right\} \rightarrow \left\{ sum = \sum_{j=1}^{n} j! \wedge f = (n+1)! \right\}$$

Si tomamos `sum` como la salida del programa, tenemos probado lo que queríamos.

Ejercicio 3.1.37. Hallar la precondición $\{P\}$ que hace que el siguiente triple sea correcto:

$$\{P\}\ a[i] = 2 * b;\ \{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ a[i] + a[j-1] + a[k] > b\}$$

Para ello, basta aplicar el axioma de asignación:

$$\{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ a[i] + a[j-1] + a[k] > b\}^{a[i]}_{2 \cdot b} a[i] = 2 * b;$$
$$\{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ a[i] + a[j-1] + a[k] > b\}$$

Usando la definición de Sustitución Textual, tenemos que:

$$\{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ a[i] + a[j-1] + a[k] > b\}^{a[i]}_{2 \cdot b} \equiv$$
$$\equiv \{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ 2 \cdot b + a[j-1] + a[k] > b\}\ \equiv$$
$$\equiv \{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ b + a[j-1] + a[k] > 0\}$$

Luego estamos buscando la precondición:

$$\{P\} \equiv \{j \leqslant i\ \wedge\ k < i\ \wedge\ b + a[j-1] + a[k] > 0\}$$

Ejercicio 3.1.38. Demostrar que para $n > 0$ el siguiente fragmento de programa termina.

```
1 i = 1; f = 1;
  while i <> n do begin
    i = i + 1;
    f = f * i;
5 end
```

La condición del bucle es $B = \{i \neq n\}$, y en esa condición, la única variable "variante" es `i`. El vector variante de dicha condición está formado por los valores de `i`, es decir, es:

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

Por tanto, nada impide que se llegue a $i = n$, y por tanto el bucle termina.

Ejercicio 3.1.39. Hallar la precondición de la terna:

$$\{P\}\ a[i] = b;\ \{a[j] = 2 * a[i]\}$$

Para ello, simplemente aplicamos el axioma de asignación:

$$\{a[j] = 2 * b\} \equiv \{a[j] = 2 * a[i]\}_b^{a[i]}\ a[i] = b;\ \{a[j] = 2 * a[i]\}$$

Ejercicio 3.1.40. Para cada uno de los siguientes fragmentos de código, obtener la poscondición apropiada:

1. $\{i < 10\}\ i = 2 * i + 1;$.
   La poscondición es $\{i < 21\}$:

   $$\{i < 10\}\ i = 2 * i + 1; \{i < 21\}$$

   que puede demostrarse aplicando el axioma de asignación.

2. $\{i > 0\}\ i = i - 1;$.
   La poscondición es $\{i > -1\}$:

   $$\{i > 0\}\ i = i - 1; \{i > -1\}$$

   que puede demostrarse aplicando el axioma de asignación.

3. $\{i > j\}\ i = i + 1;\ j = j + 1;$.
   La poscondición es $\{i > j\}$:

   $$\{i > j\}\ i = i + 1;\ \{i > j + 1\}$$
   $$\{i > j + 1\}\ j = j + 1;\ \{i > j\}$$

   Ambos pueden demostrarse aplicando el axioma de asignación y finalmente tenemos que:

   $$\{i > j\}\ i = i + 1;\ j = j + 1;\ \{i > j\}$$

   aplicando la regla de composición.

4. $\{V\}\ i = 3;\ j = 2 * i.$
   La poscondición es $\{i = 3 \wedge j = 6\}$:

   $$\{V\}\ i = 3;\ \{i = 3\}$$
   $$\{i = 3\}\ j = 2 * i;\ \{i = 3 \wedge j = 6\}$$

Ejercicio 3.1.41. Para cada uno de los siguientes fragmentos de código, obtener las precondiciones apropiadas.

1. $i = 3 * k;\ \{i > 6\}.$
   Aplicando el axioma de asignación:

   $$\{k > 2\} \equiv \{3 \cdot k > 6\} \equiv \{i > 6\}_{3 \cdot k}^{i}\ i = 3 * k;\ \{i > 6\}$$

   obtenemos que la precondición es $\{k > 2\}$.

2. $a = b * c;\ \{a = 1\}$.
   Aplicando el axioma de asignación:

$$\{b = c^{-1}\} \equiv \{b \cdot c = 1\} \equiv \{a = 1\}^{a}_{b \cdot c}\ a = b * c;\ \{a = 1\}$$

   La precondición es $\{b = c^{-1}\}$.

3. $b = c - 2;\ a = a/b$;[1]

Ejercicio 3.1.42. Verificar el siguiente código. Indicar todas las reglas usadas.

$$\{y > 0\}\ xa = x + y;\ xb = x - y;$$

Ejercicio 3.1.43. Verificar el siguiente código, indicando todas las reglas usadas.

$$\{V\}\ if\ x < 0\ then\ x = -x\ \{x \geqslant 0\}$$

Para comenzar, probamos que $\{x < 0\}\ x = -x;\ \{x \geqslant 0\}$ usando el axioma de asignación:

$$\{x < 0\} \equiv \{-x \geqslant 0\} \equiv \{x \geqslant 0\}^{x}_{-x}\ x = -x;\ \{x \geqslant 0\}$$

Posteriormente, como sabemos que $\{V \wedge (x < 0)\} \equiv \{x < 0\}$ y que $\{x \geqslant 0\}\ null\ \{x \geqslant 0\}$ por el axioma de la sentencia nula, podemos aplicar la regla del `if`:

$$\frac{\{V \wedge (x < 0)\}\ x = -x;\ \{x \geqslant 0\}, \{V \wedge x \geqslant 0\}\ null\ \{x \geqslant 0\}}{\{V\}\ \texttt{if}\ x < 0\ \texttt{then}\ x = -x\ \texttt{else null}\ \{x \geqslant 0\}}$$

Ejercicio 3.1.44. Verificar el siguiente segmento de programa:

$$max = a[1]; i = 1;$$
$$\texttt{while}\ i <> n + 1\ \texttt{do begin}$$
$$\texttt{if}\ a[i] \geqslant max\ \texttt{then}\ max = a[i];$$
$$i = i + 1;$$
$$\texttt{end}$$
$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} (max \geqslant a[i]) \right\}$$

Es decir, tenemos que probar que el código anterior calcula el máximo del vector `a` de longitud `n` (suponiendo que las posiciones van desde `1` hasta `n`), que se almacena en `max`. Al tratarse de un bucle, hemos de buscar un invariante global para poder aplicar la regla de iteración. El invariante global que usamos[2] es el siguiente:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \right\}$$

Para comenzar, hemos de ver que el invariante es cierto al inicio del programa, es decir, que:

$$\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{I\}$$

[1] Esto es lo que pone en la relación, falta la poscondición para poder hacerse.

[2] Para buscarlo, hemos de pensar en una regla que se mantenga iteración tras iteración.

Lo cual es cierto, ya que:

$$\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{max = a[1] \wedge i = 1\}$$

$$\{max = a[1] \wedge i = 1\} \rightarrow \{max \geqslant a[1] \wedge i = 1\} \rightarrow \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i = 1\right\} \rightarrow \{I\}$$

Posteriormente, pasaremos a demostrar el triple $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ con $\{B\} \equiv \{i \neq n+1\}$ y S el cuerpo del bucle para poder aplicar la regla de iteración:

$$\{I \wedge B\} \equiv \left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

$$\texttt{if}\ \ a[i] \geqslant max\ \ \texttt{then}\ \ max = a[i];$$

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

$$i = i + 1;$$

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+2\right\} \rightarrow \{I\}$$

Donde hemos usando que el siguiente triple es cierto:

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

$$\texttt{if}\ \ a[i] \geqslant max\ \ \texttt{then}\ \ max = a[i];$$

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

Para comprobar su veracidad, hemos de ver que:

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1 \wedge a[i] \geqslant max\right\}\ max = a[i];\ \left\{\bigwedge_{j=1}^{i}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

$$\left\{\bigwedge_{j=1}^{i-1}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1 \wedge max > a[i]\right\}\ null;\ \left\{\bigwedge_{j=1}^{i}(max \geqslant a[j]) \wedge i \neq n+1\right\}$$

Como ambos se verifican, por la regla del `if` el triple anterior es cierto, por lo que (usando la regla de la composición), tenemos que $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ es cierto. Por

tanto, podemos aplicar la regla de la iteración, y obtener que:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \right\}$$

$$\texttt{while } i <> n+1 \texttt{ do begin}$$

$$\texttt{if } a[i] \geqslant max \texttt{ then } max = a[i];$$

$$i = i + 1;$$

$$\texttt{end}$$

$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \wedge i = n+1 \right\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{n} (max \geqslant a[j]) \right\}$$

Como hemos probado inicialmente que $\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{I\}$, por la regla de la composición, hemos demostrado la corrección del programa.

Ejercicio 3.1.45. Demostrar la corrección parcial del siguiente código:

$$max = a[1]; i = 1;$$

$$\texttt{while } i < n \texttt{ do begin}$$

$$i = i + 1;$$

$$\texttt{if } a[i] \geqslant max \texttt{ then } max = a[i];$$

$$\texttt{end}$$

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} (max \geqslant a[i]), \bigvee_{j=1}^{n} (max = a[i]) \right\}$$

Para demostrar la corrección del programa, hemos de buscar un invariante global que nos permita llegar a la poscondición. Observando el código, vemos que lo que hace es almacenar en `max` el máximo del vector `a` de longitud `n` (de nuevo, suponiendo que las posiciones van desde `1` hasta `n`). Por tanto, un invariante que nos puede servir es:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \right\}$$

En primer lugar, hemos de ver que el invariante es cierto al inicio del programa:

$$\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{I\}$$

Esto sabemos que es cierto, ya que:

$$\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{max = a[1] \wedge i = 1\}$$
$$\{max = a[1] \wedge i = 1\} \rightarrow \{max \geqslant a[1] \wedge max = a[1] \wedge i = 1\} \rightarrow \{I\}$$

Posteriormente, hemos de demostrar el triple $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ con $\{B\} \equiv \{i < n\}$

y S el cuerpo del bucle para poder aplicar la regla de iteración:

$$\{I \wedge B\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i < n \right\}$$

$$i = i + 1;$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i-1} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\}$$

$$\texttt{if } a[i] \geqslant max \texttt{ then } max = a[i];$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\} \rightarrow \{I\}$$

Donde hemos usado que el siguiente triple es cierto:

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i-1} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\}$$

$$\texttt{if } a[i] \geqslant max \texttt{ then } max = a[i];$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\}$$

Para comprobar su veracidad, hemos de ver que:

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i-1} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \wedge a[i] \geqslant max \right\} \; max = a[i];$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\}$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i-1} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i-1} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \wedge max > a[i] \right\} \; null;$$

$$\left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i < n + 1 \right\}$$

Como ambos se verifican, por la regla del `if` el triple anterior es cierto, por lo que (usando la regla de la composición), tenemos que $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ es cierto. Por

tanto, podemos aplicar la regla de la iteración, y obtener que:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \right\}$$

$$\texttt{while } i < n \texttt{ do begin}$$

$$i = i + 1;$$

$$\texttt{if } a[i] \geqslant max \texttt{ then } max = a[i];$$

$$\texttt{end}$$

$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i \geqslant n \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \bigwedge_{j=1}^{i} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} (max = a[j]) \wedge i = n \right\} \rightarrow \left\{ \bigwedge_{j=1}^{n} (max \geqslant a[j]) \wedge \bigvee_{j=1}^{n} (max = a[j]) \right\}$$

Como hemos probado inicialmente que $\{V\}\ max = a[1];\ i = 1;\ \{I\}$, por la regla de la composición, hemos demostrado la corrección del programa.

Ejercicio 3.1.46. Demostrar la corrección parcial del siguiente código:

$$i = 0; j = n;$$

$$\texttt{while } i < n \texttt{ do begin}$$

$$i = i + 1;$$

$$j = j - 1;$$

$$a[i] = b[j]$$

$$\texttt{end}$$

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} (a[i] = b[n - i]) \right\}$$

Como se trata de un bucle, hemos de usar la regla de iteración, por lo que buscamos un invariante globl que nos sirva. Observando el código, vemos que lo que hace es almacenar en el vector `a` el vector simétrico a `b` (es decir, invertir el vector `b`). A partir de esta premisa, pensamos que el invariante que nos sirve puede ser:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i} (a[k] = b[n - k]) \wedge j = n - i \right\}$$

En primer lugar, hemos de ver que el invariante se verifica al inicio del programa:

$$\{V\}\ i = 0;\ j = n;\ \{I\}$$

Lo cual es cierto, ya que

$$\{V\}\ i = 0;\ j = n;\ \{i = 0 \wedge j = n\} \rightarrow \{I\}$$

Posteriormente, y con vistas a aplicar la regla de iteración, hemos de ver que se cumple el triple $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$, con $\{B\} \equiv \{i < n\}$ y S el cuerpo del bucle:

$$\{I \wedge B\} \equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i} (a[k] = b[n-k]) \wedge j = n - i \wedge i < n \right\}$$

$$i = i + 1;$$

$$\left\{ \bigwedge_{k=1}^{i-1} (a[k] = b[n-k]) \wedge j = n - i + 1 \wedge i < n + 1 \right\}$$

$$j = j - 1;$$

$$\left\{ \bigwedge_{k=1}^{i-1} (a[k] = b[n-k]) \wedge j = n - i \wedge i < n + 1 \right\}$$

$$a[i] = b[j];$$

$$\left\{ \bigwedge_{k=1}^{i-1} (a[k] = b[n-k]) \wedge a[i] = b[n-i] \wedge j = n - i \wedge i < n + 1 \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i} (a[k] = b[n-k]) \wedge j = n - i \wedge i < n + 1 \right\} \rightarrow \{I\}$$

donde hemos usado que

$$\{j = n - i\}\ i = i + 1;\ j = j - 1;\ \{j = n - i\}$$

que puede probarse mediante composición de los triples

$$\{j = n - i\}\ i = i + 1;\ \{j = n - i + 1\}$$
$$\{j = n - i + 1\}\ j = j - 1;\ \{j = n - i\}$$

que sabemos que son ciertos por el axioma de asignación.

Podemos finalmente aplicar la regla de iteración, llegando a que:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i} (a[k] = b[n-k]) \wedge j = n - i \right\}$$

`while` $i < n$ `do begin`

$$i = i + 1;$$

$$j = j - 1;$$

$$a[i] = b[j]$$

`end`

$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i} (a[k] = b[n-k]) \wedge i \geqslant n \right\} \rightarrow \left\{ \bigwedge_{k=1}^{n} (a[k] = b[n-k]) \right\}$$

Como hemos probado inicialmente que $\{V\}\ i = 0;\ j = n;\ \{I\}$, por la regla de la composición, hemos demostrado la corrección del programa.

Ejercicio 3.1.47. Demostrar la corrección parcial del siguiente código suponiendo el invariante:

$$\{I\} \equiv \left\{ \bigwedge_{k=1}^{i-1} (a[k] = s) \wedge s = \sum_{k=1}^{i-1} A[k] \right\}$$

```
1  i = 0;
   s = 0;
   while i <= n do begin
     s = s + a[i];
5    a[i] = s;
     i = i + 1;
   end
```

Ejercicio 3.1.48. Dados $i, n \geqslant 0$, $i \leqslant n$, demostrar que el siguiente segmento de progama evalúa

$$\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

```
1  k = 0; fact = 1;
   while k <> n do begin
     k = k + 1;
     fact = fact * k;
5    if k <= i then afact = fact;
     if k <= n-i then bfact = fact;
   end
   bcof = fact/(afact*bfact);
```

Para demostrar que el código evalúa $\frac{n!}{i!(n-i)!}$, hemos de buscar un invariante global que nos permita llegar a la poscondición. Observando el código, vemos que lo que hace es calcular el factorial de `n` y almacenar en `afact` el factorial de `i` y en `bfact` el factorial de `n-i`. Por tanto, un invariante que nos puede servir es:

$$\{I\} \equiv \{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n-i, k\})!\}$$

En primer lugar, hemos de ver que el invariante es cierto al inicio del programa:

$$\{V\}\ k = 0;\ fact = 1;\ \{I\}$$

Lo cual es directamente cierto[3]. Posteriormente, hemos de demostrar el triple dado por $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$ con $\{B\} \equiv \{k \neq n\}$ y S el cuerpo del bucle para poder aplicar

[3]Notemos que, para demostrar esto, hemos de suponer valores iniciales de `afact` y `bfact`, algo que no supone problema alguno.

la regla de iteración:

$$\{I \wedge B\} \equiv \{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k\})! \wedge k \neq n\}$$
$$k = k + 1;$$
$$\{fact = (k-1)! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$
$$fact = fact * k;$$
$$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$
$$\texttt{if } k \leqslant i \texttt{ then } afact = fact;$$
$$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$
$$\texttt{if } k \leqslant n - i \texttt{ then } bfact = fact;$$
$$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k\})! \wedge k \neq n + 1\} \rightarrow \{I\}$$

donde hemos empleado dos veces la regla del `if`, veámoslo:

- En primer lugar, hemos de demostrar el siguiente triple:

  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$
  $$\texttt{if } k \leqslant i \texttt{ then } afact = fact;$$
  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$

  Para demostrarlo, hemos de demostrar los dos siguientes triples:

  - En primer lugar, hemos de demostrar que:

  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1 \wedge k \leqslant i\}$$
  $$afact = fact;$$
  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$

  Usando la segunda regla de la consecuencia, la sustitución textual y el axioma de asignación, tenemos que:

  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1 \wedge k \leqslant i\} \rightarrow$$
  $$\rightarrow \{fact = k! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1 \wedge k \leqslant i\} \equiv$$
  $$\equiv \{fact = k! \wedge k! = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\} \equiv$$
  $$\equiv \{fact = k! \wedge fact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\} \equiv$$
  $$\equiv \{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}^{afact}_{fact}$$
  $$afact = fact;$$
  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$

  - En segundo lugar, hemos de demostrar que:

  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k-1\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1 \wedge k > i\}$$
  $$null$$
  $$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i, k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n - i, k-1\})! \wedge k \neq n + 1\}$$

  Teniendo en cuenta que $k > i \Longrightarrow k - 1 \geqslant i$, luego $\text{mín}\{i, k-1\} = i = \text{mín}\{i, k\}$, este sale directo usando el axioma de la sentencia nula y la regla de la consecuencia.

- En segundo lugar, hemos de demostrar el siguiente triple:

$$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i,k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n-i,k-1\})! \wedge k \neq n+1\}$$
$$\texttt{if } k \leqslant n-i \texttt{ then } bfact = fact;$$
$$\{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i,k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n-i,k\})! \wedge k \neq n+1\}$$

  Esta demostración es análoga a la anterior, por lo que no la repetiremos.

Habiendo demostrado que $\{I \wedge B\}\ S\ \{I\}$, podemos aplicar la regla de iteración, llegando a que:

$$\{I\} \equiv \{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i,k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n-i,k\})!\}$$
$$\texttt{while } k <> n \texttt{ do begin}$$
$$k = k+1;$$
$$fact = fact * k;$$
$$\texttt{if } k \leqslant i \texttt{ then } afact = fact;$$
$$\texttt{if } k \leqslant n-i \texttt{ then } bfact = fact;$$
$$\texttt{end}$$
$$\{I \wedge \neg B\} \equiv \{fact = k! \wedge afact = (\text{mín}\{i,k\})! \wedge bfact = (\text{mín}\{n-i,k\})! \wedge k = n\}$$

Usando la regla de la composición (ya que hemos probado que $\{V\}\ k = 0;\ fact = 1;\ \{I\}$), y usando que $i \leqslant n$, tenemos que:

$$\{V\}$$
$$k = 0;\ fact = 1; \texttt{while } k <> n \texttt{ do begin}$$
$$k = k+1;$$
$$fact = fact * k;$$
$$\texttt{if } k \leqslant i \texttt{ then } afact = fact;$$
$$\texttt{if } k \leqslant n-i \texttt{ then } bfact = fact;$$
$$\texttt{end}$$
$$\{fact = k! \wedge afact = i! \wedge bfact = (n-i)!\}$$
$$bcof = fact/(afact * bfact);$$
$$\left\{bcof = \frac{n!}{i!(n-i)!}\right\}$$

donde para demostrar el último triple hemos empleado la segunda regla de la consecuencia, la sustitución textual y el axioma de asignación.

Ejercicio 3.1.49. Demostrar la terminación del fragmento de programa dado en el problema 3.1.44 ¿Qué condición se debe imponer para realizar la demostración?

En este caso, la condición del bucle es $B = \{i \neq n+1\}$. El vector variante de dicha iteración es:

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

Por tanto, para demostrar que llega al caso $i = n+1$ (llegando así a terminar), es necesario que $n \geqslant 0$,.

3.2. Sincronización en Memoria Compartida

Ejercicio 3.2.1. Sean los procesos P1, P2, y P3, cuyas secuencias de instrucciones son las que se muestran en el cuadro siguiente:

```
{variables globales}
Process P1;
begin
  while true do
  begin
    a;
    b;
    c;
  end
end
```

```
Process P2;
begin
  while true do
  begin
    d;
    e;
    f;
  end
end
```

```
Process P3;
begin
  while true do
  begin
    g;
    h;
    i;
  end
end
```

Se pide resolver los siguientes problemas de sincronización, considerando que son independientes unos de otros, con semáforos. Las casuísticas son las siguientes:

1. P2 podrá pasar a ejecutar `e` sólo si P1 ha ejecutado `a` o P3 ha ejecutado `g`.
2. P2 podrá pasar a ejecutar `e` sólo si P1 ha ejecutado `a` y P3 ha ejecutado `g`.
3. Sólo cuando P1 haya ejecutado `b`, podrá pasar P2 a ejecutar `e` y P3 a ejecutar `h`.
4. Sincroniza los procesos de forma que las sentencias `b` en P1, `f` en P2, y `h` en P3, sean ejecutadas como mucho por 2 procesos simultáneamente.

Ejercicio 3.2.2. El cuadro que sigue nos muestra dos procesos concurrentes, P1 y P2, que comparten una variable global `x` y las restantes variables son locales a los procesos.

```
{variables globales}
Process P1;
var m: integer;
begin
  while true do
  begin
    m:= 2*x - n;
    print(m);
  end
end
```

```
Process P2;
var d: integer;
begin
  while true do
  begin
    d:= leer_teclado();
    x:= d - c*5;
  end
end
```

Se pide:

1. Sincronizar los procesos para que P1 use todos los valores `x` suministrados por P2.
2. Sincronizar los procesos para que P1 utilice un valor sí y otro no de la variable `x`, es decir, utilice los valores primero, tercero, quinto, etc. que vaya alcanzando dicha variable.

Ejercicio 3.2.3. Supongamos que estamos en una discoteca y resulta que está estropeado el servicio de chicas y todos tienen que compartir el de chicos. Se pretende establecer un protocolo de entrada al servicio usando semáforos que asegure siempre el cumplimiento de las siguientes restricciones:

- Chicas: sólo puede estar 1 dentro del servicio.
- Chicos: pueden entrar más de 1, pero como máximo se admitirán a 5 dentro del servicio.
- Versión machista del protocolo: los chicos tienen preferencia sobre las chicas. Esto quiere decir que si una chica está esperando entrar al servicio y llega un chico, este puede pasar y ella sigue esperando. Incluso si el chico que ha llegado no pudiera entrar inmediatamente porque ya hay 5 chicos dentro del servicio, sin embargo, pasará antes que la chica cuando salga algún chico del servicio.
- Versión feminista del protocolo: las chicas tienen preferencia sobre los chicos. Esto quiere decir que si un chico está esperando y llega una chica, ésta debe pasar antes. Incluso si la chica que ha llegado no puede entrar inmediatamente al servicio porque ya hay una chica dentro, pasará antes que el chico cuando salga la chica que está dentro.

Se pide implementar las 2 versiones del protocolo anterior utilizando semáforos POSIX. Las cabeceras que estos han de tener los semáforos no nombrados de POSIX 1003 son las siguientes:

```
// Inicialización
int sem_init(sem_t* semaforo, int pcompartido, unsigned int contador);

// Destrucción
int sem_destroy(sem_t* semaforo);

// Sincronización-espera
int sem_wait(sem_t* semaforo);

// Sincronización-señala
int sem_post(sem_t* semaforo);
```

Observación. Se han de tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. El valor inicial del semáforo se le asigna a `contador`. Si `pcompartido` es distinto de cero, entonces el semáforo puede ser utilizado por hilos que residen en procesos diferentes; si no, sólo puede ser utilizado por hilos dentro del espacio de direcciones de un único proceso.
2. Para que se pueda destruir, el semáforo ha debido ser explícitamente inicializado mediante la operación `sem_init(...)`. La operación anterior no debe ser utilizada con semáforos nombrados.
3. Los hilos llamarán a la función `int sem_wait(sem_t* semaforo)`, pasándole un identificador de semáforo inicializado con el valor '0', para sincronizarse con una condición. Si el valor del semáforo fuera distinto de '0', entonces el valor de s se decrementa en una unidad y no bloquea.

4. La operación `int sem_post(sem_t* semaforo)` sirve para señalar a los hilos bloqueadas en un semáforo y hacer que uno pase a estar preparado para ejecutarse. Si no hay hilos bloqueados en este semáforo, entonces la ejecución de esta operación simplemente incrementa el valor de la variable protegida (s) del semáforo. Hay que tener en cuenta que no existe ningún orden de desbloqueo definido si hay varios hilos esperando en la cola asociada a un semáforo, ya que la implementación a nivel de sistema de la operación anterior supone que el planificador puede escoger para desbloquear a cualquiera de los hilos que esperan. En particular, podría darse el siguiente escenario, otro hilo ejecutándose puede decrementar el valor del semáforo antes que cualquier hilo que vaya a ser desbloqueado como resultado de `sem_post(...)` lo pueda hacer y, posteriormente, se volvería a bloquear el hilo despertado.

Ejercicio 3.2.4. Aunque un monitor garantiza la exclusión mutua, los procedimientos tienen que ser reentrantes. Explicar por qué.

Ejercicio 3.2.5. Se consideran dos tipos de recursos accesibles por varios procesos concurrentes (denominamos a los recursos como recursos de tipo 1 y de tipo 2). Existen N_1 ejemplares de recursos de tipo 1 y N_2 ejemplares de recursos de tipo 2. Para la gestión de estos ejemplares, queremos diseñar un monitor (con semántica SU) que exporta un procedimiento (`pedir_recurso`), para pedir un ejemplar de uno de los dos tipos de recursos. Este procedimiento incluye un parámetro entero (`tipo`), que valdrá 1 ó 2 indicando el tipo del ejemplar que se desea usar, así mismo, el monitor incorpora otro procedimiento (`liberar_recurso`) para indicar que se deja de usar un ejemplar de un recurso previamente solicitado (este procedimiento también admite un entero que puede valer 1 ó 2, según el tipo de ejemplar que se quiera liberar). En ningún momento puede haber un ejemplar de un tipo de recurso en uso por más de un proceso.

En este contexto, responde a estas cuestiones:

1. Implementa el monitor con los dos procedimientos citados, suponiendo que N_1 y N_2 son dos constantes arbitrarias, mayores que cero.

2. El uso de este monitor puede dar lugar a interbloqueo. Esto ocurre cuando más de un proceso, en algún punto en su código, tiene la necesidad de usar dos ejemplares de recursos de distinto tipo a la vez. Describe la secuencia de peticiones (llamadas al procedimiento correspondiente del monitor) que da lugar a interbloqueo.

3. Una posible solución al problema anterior es obligar a que si un proceso necesita dos recursos de distinto tipo a la vez, deba de llamar a `pedir_recurso`, dando un parámetro con valor 0, para indicar que necesita los dos ejemplares. En esta solución, cuando un ejemplar quede libre, se dará prioridad a los posibles procesos esperando usar dos ejemplares, frente a los que esperan usar solo uno de ellos.

Ejercicio 3.2.6. Escribir una solución al problema de lectores-escritores con monitores:

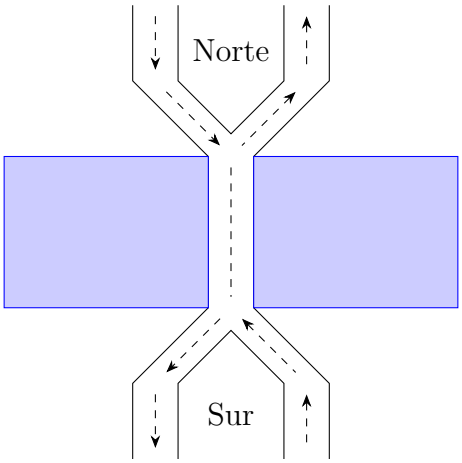


Figura 3.9: Problema de exclusión mutua en el acceso de coches desde 2 sentidos opuestos a un puente de un solo carril.

1. Con prioridad a los lectores: quiere decir que, si en un momento puede acceder al recurso, tanto un lector como un escritor, se da paso preferentemente al lector.

2. Con prioridad a los escritores: quiere decir que, si en un momento puede acceder tanto un lector como un escritor, se da paso preferentemente al escritor.

3. Con prioridades iguales: en este caso, los procesos acceden al recurso estrictamente en orden de llegada, lo cual implica, en particular, que si hay lectores leyendo y un escritor esperando, los lectores que intenten acceder después del escritor no podrán hacerlo hasta que no lo haga dicho escritor.

Ejercicio 3.2.7. Varios coches que vienen del norte y del sur pretenden cruzar un puente sobre un río (ver Figura 3.9). Sólo existe un carril sobre dicho puente. Por lo tanto, en un momento dado, el puente solo puede ser cruzado por uno o más coches en la misma dirección (pero no en direcciones opuestas).

1. Completar el código del siguiente monitor que resuelve el problema del acceso al puente suponiendo que llega un coche del norte (sur) y cruza el puente si no hay otro coche del sur (norte) cruzando el puente en ese momento.

```
1  Monitor Puente
   var ... ;
   procedure EntrarCocheDelNorte()
   begin
5  ...
   end
   procedure SalirCocheDelNorte()
   begin
   ....
10 end
   procedure EntrarCocheDelSur()
   begin
   ....
   end
```

```
procedure SalirCocheDelSur()
begin
...
end
{ Inicializacion }
begin
....
end
```

2. Mejorar el monitor anterior, de forma que la dirección del tráfico a través del puente cambie cada vez que lo hayan cruzado 10 coches en una dirección, mientras 1 ó más coches estuviesen esperando cruzar el puente en dirección opuesta.

Ejercicio 3.2.8. Una tribu de antropófagos comparte una olla en la que caben M misioneros. Cuando algún salvaje quiere comer, se sirve directamente de la olla, a no ser que ésta esté vacía. Si la olla está vacía, el salvaje despertará al cocinero y esperará a que éste haya rellenado la olla con otros M misioneros. Para solucionar la sincronización usamos un monitor llamado `Olla`, que se puede usar así:

```
monitor Olla ;
....
begin
....
end;
proceso ProcSalvaje[ i:1..N ] ;
begin
while true do begin
        Olla.Servirse_1_misionero();
        Comer(); { es un retraso aleatorio }
    end
end;
proceso ProcCocinero ;
begin
while true do begin
        Olla.Dormir();
        Olla.Rellenar_Olla();
    end
end;
```

Se pide diseñar el código del monitor `Olla` para que se satisfaga la sincronización requerida en el enunciado del problema, teniendo en cuenta que:

- La solución propuesta no debe producir interbloqueos.
- Los salvajes podrán comer siempre que haya comida en la olla.
- Sólo se ha de despertar al proceso cocinero cuando la olla esté vacía.

Ejercicio 3.2.9. Una cuenta de ahorros es compartida por varias personas (procesos). Cada persona puede depositar o retirar fondos de la cuenta. El saldo actual

de la cuenta es la suma de todos los depósitos menos la suma de todos los reintegros. El saldo nunca puede ser negativo. Queremos usar un monitor para resolver el problema.

El monitor debe tener 2 procedimientos: `depositar(c)` y `retirar(c)`. Suponer que los argumentos de las 2 operaciones son siempre positivos, e indican las cantidades a depositar o retirar. El monitor usará la semántica señalar y espera urgente (SU). Se deben de escribir varias versiones de la solución, según las variaciones de los requerimientos que se describen a continuación:

1. Todo proceso puede retirar fondos mientras la cantidad solicitada `c` sea menor o igual que el saldo disponible en la cuenta en ese momento. Si un proceso intenta retirar una cantidad `c` mayor que el saldo, debe quedar bloqueado hasta que el saldo se incremente lo suficiente (como consecuencia de que otros procesos depositen fondos en la cuenta) para que se pueda atender la petición. Hacer dos versiones del monitor:

   a) Colas normales FIFO sin prioridad.

   b) Con colas de prioridad.

2. El reintegro de fondos a los clientes se hace únicamente según el orden de llegada, si hay más de un cliente esperando, sólo el primero que llegó puede optar a retirar la cantidad que desea, mientras esto no sea posible, esperarán todos los clientes, independientemente de cuanto quieran retirar los demás. Por ejemplo, suponer que el saldo es 200 unidades y un cliente está esperando un reintegro de 300 unidades, entonces si llega otro cliente debe esperarse, incluso si quiere retirar 200 unidades. De nuevo, resolverlo utilizando dos versiones:

   a) Colas normales FIFO sin prioridad.

   b) Con colas de prioridad.

Ejercicio 3.2.10. Los procesos P1, P2, ..., Pn comparten un único recurso R, pero sólo un proceso puede utilizarlo cada vez. Un proceso Pi puede comenzar a utilizar R si está libre; en caso contrario, el proceso debe esperar a que el recurso sea liberado por otro proceso. Si hay varios procesos esperando a que quede libre R, se concederá al proceso que tenga mayor prioridad. La regla de prioridad de los procesos es la siguiente: el proceso Pi tiene prioridad i, (con $1 \leqslant i \leqslant n$), donde los números menores implican mayor prioridad (es decir, si $i < j$, entonces Pi pasa por delante de Pj). Implementar un monitor que implemente los procedimientos `Pedir(...)` y `Liberar()` con un monitor que garantice la exclusión mutua y el acceso prioritario del procesos al recurso R.

Ejercicio 3.2.11. El siguiente monitor (`Barrera2`) proporciona un único procedimiento de nombre `entrada()`, que provoca que el primer proceso que lo llama sea suspendido y el segundo que lo llama despierte al primero que lo llamó (a continuación ambos continúan), y así actúa cíclicamente. Obtener una implementación de este monitor usando semáforos.

```
Monitor Barrera2 ;
var n : integer; { num. de proc. que han llegado desde el signal }
s : condicion ; { cola donde espera el segundo }
procedure entrada() ;
    begin
        n := n+1 ; { ha llegado un proceso mas }
        if n < 2 then { si es el primero: }
            s.wait() { esperar al segundo }
            else begin { si es el segundo: }
                n := 0; { inicializa el contador }
                s.signal() { despertar al primero }
            end
    end

{ Inicializacion }
begin
    n := 0 ;
end
```

Ejercicio 3.2.12. Este es un ejemplo clásico que ilustra el problema del interbloqueo, y aparece en la literatura informática con el nombre de el problema de los filósofos-comensales. Se puede enunciar como se indica a continuación: sentados a una mesa están cinco filósofos, la actividad de cada filósofo es un ciclo sin fin de las operaciones de pensar y comer; entre cada dos filósofos hay un tenedor y para poder comer, un filósofo necesita obligatoriamente dos tenedores: el de su derecha y el de su izquierda. Se han definido cinco procesos concurrentes, cada uno de ellos describe la actividad de un filósofo. Los procesos usan un monitor, llamado `MonFilo`. Antes de comer cada filósofo debe disponer de su tenedor de la derecha y el de la izquierda, y cuando termina la actividad de comer, libera ambos tenedores. El filósofo i alude al tenedor de su derecha como el número i, y al de su izquierda como el número $i + 1 \mathrm{mod} 5$. El monitor `MonFilo` exportará dos procedimentos: `coge_tenedor(num_tenedor,num_proceso)` y `libera_tenedor(num_tenedor)` para indicar que un proceso filósofo desea coger un tenedor determinado. El código del programa (sin incluir la implementación del monitor) es el siguiente:

```
monitor MonFilo ;
....
procedure coge_tenedor( num_ten, num_proc : integer );
....
procedure libera_tenedor( num_ten : integer );
....
begin
....
end
proceso Filosofo[ i: 0..4 ] ;
    begin
        while true do begin
            MonFilo.coge_tenedor(i,i);          {argumento 1=codigo tenedor}
            MonFilo.coge_tenedor(i+1 mod 5,i);  {argumento 2=numero de proceso}
        comer();
        MonFilo.libera_tenedor(i);
        MonFilo.libera_tenedor(i+1 mod 5);
```

```
        pensar();
    end
end
```

Con este interfaz para el monitor, responde a las siguientes cuestiones:

1. Diseña una solución para el monitor `MonFilo`.
2. Describe la situación de interbloqueo que puede ocurrir con la solución que has escrito antes.
3. Diseña una nueva solución, en la cual se evite el interbloqueo descrito, para ello, esta solución no debe permitir que haya más de cuatro filósofos simultáneamente intentado coger su primer tenedor.