

# Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025



# Índice general

<b>1. Relaciones de Problemas</b>	<b>5</b>
1.1. Sistemas Lineales . . . . .	6



# 1. Relaciones de Problemas

## 1.1. Sistemas Lineales

**Ejercicio 1.1.1.** Calcula la solución general del sistema lineal homogéneo  $x' = Ax$  para las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.  $A_1$ .

Calculamos el polinomio característico de  $A_1$ :

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sigma(A_1) = \{1, 0, 2\}.$$

Calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

$$V_1 = \ker(A_1 - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_0 = \ker(A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_2 = \ker(A_1 - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por tanto, tres soluciones del sistema son:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, estas son linealmente independientes, ya que:

$$\det(x_1 \mid x_0 \mid x_2) = e^{1+0+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donde el segundo determinante no es nulo porque vectores asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. Por tanto, tenemos que la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$



2.  $A_2$ .

Calculamos el polinomio característico de  $A_2$ :

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\lambda) &= \det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 - \lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) ((1 - \lambda)^2 - 1) + 2(0 + (1 - \lambda)) = \\ &= (1 - \lambda)(-\lambda)(2 - \lambda) + 2(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(-\lambda(2 - \lambda) + 2) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sigma(A_2) = \{1, 1 + i, 1 - i\}.$$

Calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker(A_2 - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ V_{1+i} &= \ker(A_2 - (1 + i)I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -i & -1 & 2 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que dos soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_{1+i}(t) &= e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ -\cos t - i \sin t \\ -\cos t - i \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, como  $Re(x_{1+i}), Im(x_{1+i})$  son dos soluciones de  $x' = Ax$ , tenemos que tres soluciones reales son:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora si son linealmente independientes:

$$\det(x_1 \mid x_2 \mid x_3) = e^{3t} \det \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & \cos t \\ 2 & -\cos t & -\sin t \\ 1 & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \neq 0$$

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 1.1.2.** Se considera el problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} x'' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = v_0, \end{cases}$$

con  $A \in C(I, \mathbb{R}^{N \times N})$ ,  $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$ ,  $I$  intervalo abierto,  $t_0 \in I$ ,  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^N$ . Demuestra que la sucesión de iterantes

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t (t-s)[A(s)x_n(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0)$$

con inicialización  $x_0(t) = x_0$  converge uniformemente en compactos de  $I$  a una solución del problema. Demuestra que esta solución es única.

**Ejercicio 1.1.3.** Construye un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo que tenga como soluciones linealmente independientes

$$x_1 = (1, \sin t)^t, \quad x_2 = (\sin t, 1)^t.$$

Justifica razonadamente si los coeficientes de tal sistema pueden estar o no definidos en toda la recta real.

Sea la matriz  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , de forma que:

$$x' = A(t)x$$

Calculemos  $x'$  para cada una de las soluciones dadas:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} = A(t)x_1 = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + a_{12}(t) \sin t \\ a_{21}(t) + a_{22}(t) \sin t \end{pmatrix}, \\ x'_2 &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)x_2 = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \sin t + a_{12}(t) \\ a_{21}(t) \sin t + a_{22}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}(t) + a_{12}(t) \sin t = 0, \\ a_{11}(t) \sin t + a_{12}(t) = \cos t, \\ a_{21}(t) + a_{22}(t) \sin t = \cos t, \\ a_{21}(t) \sin t + a_{22}(t) = 0. \end{cases}$$

Despuejando  $a_{11}(t)$  y  $a_{22}(t)$ , tenemos que el sistema queda:

$$\begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t) \sin t, \\ -a_{12}(t) \sin^2 t + a_{12}(t) = \cos t, \\ a_{21}(t) - a_{21}(t) \sin^2 t = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t) \sin t. \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t) \sin t, \\ a_{12}(t)(1 - \sin^2 t) = \cos t, \\ a_{21}(t)(1 - \sin^2 t) = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t) \sin t. \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t) \sin t, \\ a_{12}(t) \cos^2 t = \cos t, \\ a_{21}(t) \cos^2 t = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t) \sin t. \end{cases}$$

Por tanto, en los puntos de  $t$  en los que el coseno se anula, el sistema es compatible indeterminado, ya que cualquier valor de  $a_{12}(t)$  y  $a_{21}(t)$  satisface el sistema. Por tanto, en los valores que no se anula el coseno, tenemos:

$$\begin{cases} a_{11}(t) = -\operatorname{tg} t, \\ a_{12}(t) = \frac{1}{\cos t}, \\ a_{21}(t) = \frac{1}{\cos t}, \\ a_{22}(t) = -\operatorname{tg} t. \end{cases} \implies A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{tg} t & \frac{1}{\cos t} \\ \frac{1}{\cos t} & -\operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Como vemos, dichos coeficientes no están definidos en toda la recta real, ya que el coseno se anula en ciertos puntos. Por tanto, tan solo es posible definirlo en los intervalos de la forma:

$$I_k = \left] \left( \frac{1}{2} + k \right) \pi, \left( \frac{3}{2} + k \right) \pi \right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Ejercicio 1.1.4.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t), \end{cases}$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $N$  y  $b(t) = e^{\mu t}v$ , con  $v \in \mathbb{R}^N$ . Si  $\mu$  no es valor propio de  $A$ , prueba que existe una solución particular de la forma  $x(t) = e^{\mu t}w$ . Usa esta idea y el principio de superposición para encontrar una solución particular del sistema

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2 + 3e^{2t}, \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 - 8e^{-3t}. \end{cases}$$

Para encontrar una solución particular de la forma  $x(t) = e^{\mu t}w$ , derivamos  $x$ :

$$x'(t) = \mu e^{\mu t}w = Ae^{\mu t}w + e^{\mu t}v \implies -e^{\mu t}v = (A - \mu I)e^{\mu t}w \implies w = -(A - \mu I)^{-1}v.$$

donde  $\exists (A - \mu I)^{-1}$  porque  $\mu$  no es valor propio de  $A$ , por lo que  $|A - \mu I| \neq 0$ . Por tanto, una solución particular del sistema es:

$$x(t) = -e^{\mu t}(A - \mu I)^{-1}v.$$

**Ejercicio 1.1.5.** Se considera el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas. Demuestra que este sistema se puede reformular como una ecuación escalar compleja del tipo  $z' = \alpha(t)z$  donde la incógnita  $z = z(t)$  puede tomar valores complejos y la función  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$  se determina a partir de  $a(t)$  y  $b(t)$ . Utiliza este hecho para resolver el sistema original.

**Ejercicio 1.1.6.** Dadas las funciones

$$x(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \operatorname{sen}(t\sigma) d\sigma, \quad y(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \cos(t\sigma) d\sigma,$$

demuestra que  $(x, y)$  es solución de un sistema lineal homogéneo. Resuelve el sistema con las condiciones iniciales adecuadas para calcular las integrales.

*Observación.* Tenga en cuenta que  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Ejercicio 1.1.7.** Dada una matriz fundamental  $\Phi(t)$  del sistema  $x' = A(t)x$ , con  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  continua y una función  $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  de clase  $C^1$ , demuestra que:

$\Psi(t)$  es matriz fundamental  $\iff \exists C \in \mathbb{R}^{N \times N}$  constante, con  $|C| \neq 0$ , tal que  $\Psi(t) = \Phi(t)C$ .

**Ejercicio 1.1.8.** Dos tanques del mismo volumen  $V$  contienen inicialmente agua salada con concentración  $C_1, C_2$  respectivamente. Se produce un transvase de agua entre los dos tanques a una velocidad fija de  $k^{1/\min}$  y en ambas direcciones, de manera que el volumen  $V$  de cada tanque se mantiene constante. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que rige la cantidad de sal  $Q_1, Q_2$  en cada tanque. Explica el comportamiento a largo plazo.

**Ejercicio 1.1.9.** Dada  $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N \times N})$ , demuestra que si la matriz  $A(t)$  conmuta con  $B(t) = \int_0^t A(s) ds$ , entonces  $\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right)$  es matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ .

**Ejercicio 1.1.10.** Por el método de variación de constantes, encuentra la solución general del sistema completo  $x' = Ax + b(t)$  en los siguientes casos

1.  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, b \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, b \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.1.11.** En este ejercicio probaremos un resultado sobre independencia lineal para funciones que son productos de polinomios y exponenciales. Lo haremos en tres pasos:

1. Demuestra que si  $p(t)$  es un polinomio no nulo,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  y  $m = 1, 2, \dots$ , entonces

$$\frac{d^m}{dt^m} [p(t)e^{\alpha t}] = q(t)e^{\alpha t},$$

donde  $q(t)$  es otro polinomio no nulo.

2. Se supone que  $p_1, \dots, p_r$  son polinomios y  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  números distintos entre sí ( $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$ ). Entonces si la identidad

$$p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \dots + p_r(t)e^{\alpha_r t} = 0$$

es válida en algún intervalo  $I$  se cumplirá

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \dots \equiv p_r \equiv 0.$$

3. Dados números naturales  $n_1, \dots, n_r$  las funciones

$$e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \dots, t^{n_1} e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_r t}, te^{\alpha_r t}, \dots, t^{n_r} e^{\alpha_r t}$$

son linealmente independientes en  $I$ .

**Ejercicio 1.1.12.** Se considera el operador diferencial

$$L[y] = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  son números reales.

1. Demuestra, para cada  $m \geq 0$ , la identidad

$$L[t^m e^{\lambda t}] = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} t^{m-h} p^{(h)}(\lambda) e^{\lambda t}$$

donde  $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ .

2. Utiliza esta identidad y el ejercicio anterior para obtener un sistema fundamental de la ecuación  $L[y] = 0$ . Se distinguirá el caso de raíces complejas.
3. Resuelve la ecuación

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

4. Se pasa la ecuación del apartado anterior a un sistema  $x' = Ax$ , con  $x \in \mathbb{R}^5$ , por el cambio  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $x_3 = y''$ ,  $x_4 = y'''$ ,  $x_5 = y^{(4)}$ . Diseña dos posibles estrategias para calcular  $e^{At}$ . ¿Cuál sería más conveniente?

**Ejercicio 1.1.13.** ¿Es cierta la identidad  $e^A e^B = e^{A+B}$  para matrices arbitrarias  $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ?

**Ejercicio 1.1.14.** Calcula  $e^A$  para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.1.15.** Dada  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  se considera el sistema  $x' = Ax$

1. Prueba que  $e^{(t-t_0)A}$  es matriz fundamental principal en  $t = t_0$ .
2.  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .
3. Se considera ahora el problema de valores iniciales  $x' = Ax + b(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  donde  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función continua. Prueba que la solución está dada por la fórmula

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds.$$

**Ejercicio 1.1.16.** Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  define  $\sin(A)$  y  $\cos(A)$ . Calcula:

$$\cos \left( \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right)$$