

Geometría I

Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 2ª Prueba. Temas 1-4.

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + b & a + b - c \\ a + b - c & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1. [5 puntos] Encontrar, si es posible, bases \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\bar{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$M(f, \bar{\mathcal{B}} \longleftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos las bases usuales de ambos espacios vectoriales. Sea $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$, y sea $\bar{\mathcal{B}}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Calculamos ahora $\text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \left| \begin{array}{l} a + b = 0 \\ c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \left| \begin{array}{l} a = -b \\ c = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathcal{L}(\{1 - x\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0}\}) \end{aligned}$$

Fijamos en primer lugar la base \mathcal{B} , sabiendo que el vector que genera el núcleo pertenece a la base:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \implies \mathcal{B} = \{x, x^2, 1 - x\}$$

Una vez fijada dicha base, obtenemos la imagen de dichos vectores:

$$f((1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad f((0, 1, 0)_{\mathcal{B}_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)_{\bar{\mathcal{B}}_0}$$

$$f((0, 0, 1)_{\mathcal{B}_0}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (0, -1, 1)_{\bar{\mathcal{B}}_0}$$

Comprobamos que las dos matrices no nulas, junto con una tercera escogida, forman base:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \implies \bar{\mathcal{B}} = \{(1, 1, 0)_{\bar{\mathcal{B}}_0}, (0, -1, 1)_{\bar{\mathcal{B}}_0}, (0, 0, 1)_{\bar{\mathcal{B}}_0}\}$$

Por tanto, tenemos que las dos bases pedidas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{x, x^2, 1 - x\} \\ \bar{\mathcal{B}} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. [5 puntos] Dar bases de $Ker(f^t)$ e $Im(f^t)$.

Sea $f^t : (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \rightarrow (\mathbb{R}_2[x])^*$, y consideramos ahora las bases usuales de ambos espacios vectoriales y sus bases duales. Esto es, del espacio vectorial de las matrices simétricas $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ consideramos su base usual $\overline{\mathcal{B}}_0$ y su dual $(\overline{\mathcal{B}}_0)^*$:

$$\overline{\mathcal{B}}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\overline{\mathcal{B}}_0)^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \quad \varphi_i \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Del espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos su base usual \mathcal{B}_0 y su dual $(\mathcal{B}_0)^*$:

$$\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$$

$$(\mathcal{B}_0)^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} \quad \psi_i(a_1 + a_2x + a_3x^2) = a_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Del apartado anterior, tenemos que:

$$Ker(f) = \mathcal{L}(\{(1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0}\})$$

$$Im(f) = \mathcal{L}(\{(1, 1, 0)_{\overline{\mathcal{B}}_0}, (0, -1, 1)_{\overline{\mathcal{B}}_0}\})$$

Por tanto, calculando ambos anuladores, tenemos lo pedido:

$$\begin{aligned} Ker(f^t) &= an(Im(f)) = an(\mathcal{L}(\{(1, 1, 0)_{\overline{\mathcal{B}}_0}, (0, -1, 1)_{\overline{\mathcal{B}}_0}\})) \\ &= an(\{(1, 1, 0)_{\overline{\mathcal{B}}_0}, (0, -1, 1)_{\overline{\mathcal{B}}_0}\}) \\ &= \left\{ \varphi = (a_1, a_2, a_3)_{(\overline{\mathcal{B}}_0)^*} \in (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \mid \begin{array}{l} \varphi(1, 1, 0)_{\overline{\mathcal{B}}_0} = 0 \\ \varphi(0, -1, 1)_{\overline{\mathcal{B}}_0} = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (a_1, a_2, a_3)_{(\overline{\mathcal{B}}_0)^*} \in (\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))^* \mid \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ -a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{L}(\{(-1, 1, 1)_{(\overline{\mathcal{B}}_0)^*}\}) = \mathcal{L}(\{-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(f^t) &= an(Ker(f)) = an(\mathcal{L}(\{(1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0}\})) \\ &= an(\{(1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0}\}) \\ &= \left\{ \psi = (a_1, a_2, a_3)_{(\mathcal{B}_0)^*} \in (\mathbb{R}_2[x])^* \mid \psi(1, -1, 0)_{\mathcal{B}_0} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (a_1, a_2, a_3)_{(\mathcal{B}_0)^*} \in (\mathbb{R}_2[x])^* \mid a_1 - a_2 = 0 \right\} \\ &= \mathcal{L}(\{(1, 1, 0)_{(\mathcal{B}_0)^*}, (0, 0, 1)_{(\mathcal{B}_0)^*}\}) = \mathcal{L}(\{\psi_1 + \psi_2, \psi_3\}) \end{aligned}$$