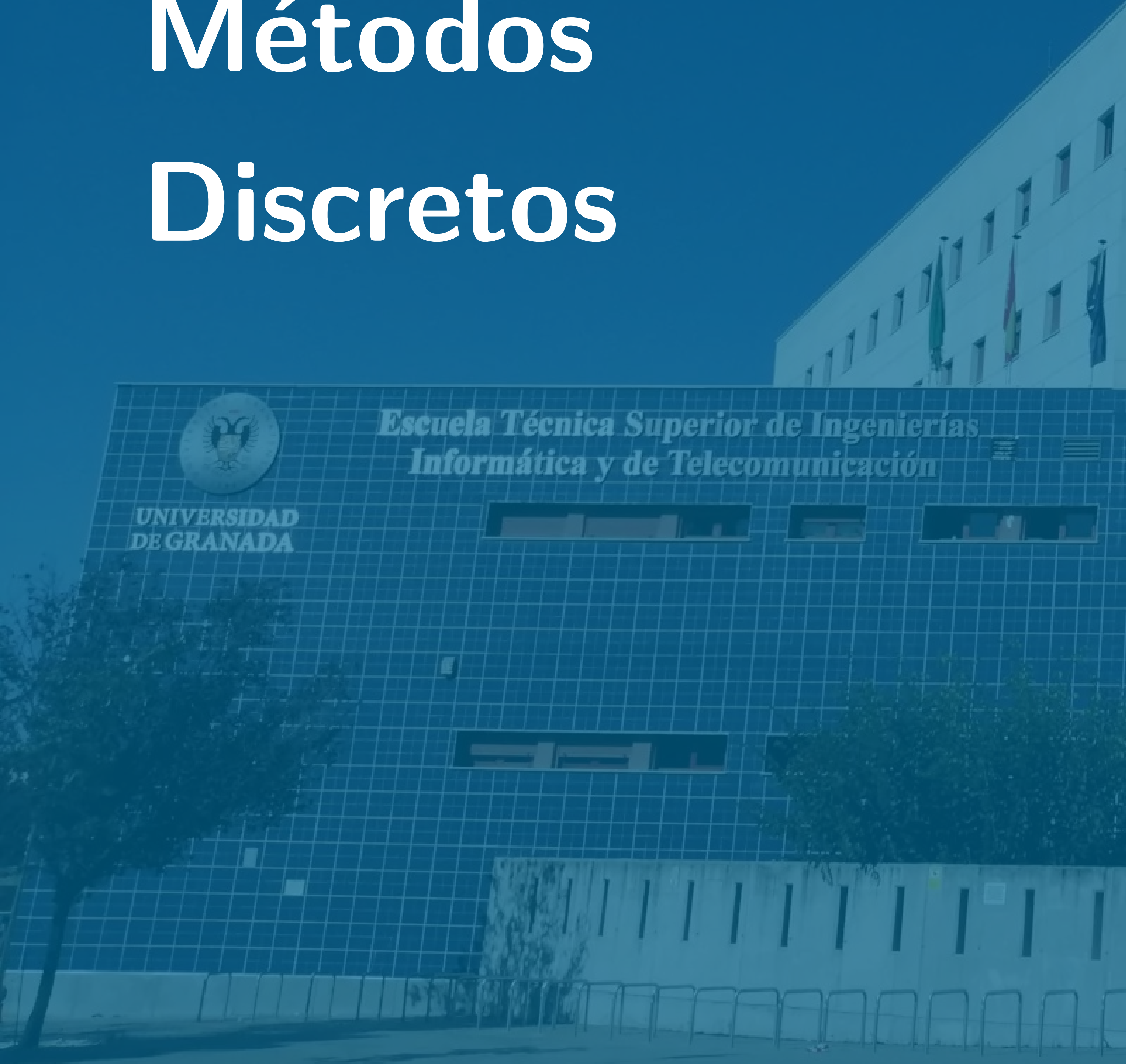
Lógica y Métodos Discretos



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Inducción

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- <u>Para $n = 0$</u>:

  $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

  Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

  $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) &\overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. □

Ejercicio 1.1.2. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

- <u>$n = 0$:</u>
$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

- <u>$n = 1$:</u>
$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

- <u>$n > 1$:</u>
$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) n \stackrel{(*)}{=}$$
$$\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

- <u>En el caso base $n = 0$</u>:
$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2$$

  Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ se tiene, como se pedía. □

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, a la hora de demostrar que un predicado vale para $n+1$, se usa que es cierto para todo $n \in \{0, \dots, n\}$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

"n tiene un factor primo"

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.
En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

  En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en estey caso, por lo que se tiene el caso base).

- n no es primo:

  Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p. Así pues, $p \mid u$ y por tanto:
$$p \mid n$$
  Luego $P(n)$ vale.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$. □

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso)**.** Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0,$$
$$p(a,b) = \begin{cases} p\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \dfrac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a, b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

"Para todo número natural m, $p(m, n) = mn$."

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$, (sea cual sea m):
$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$
  Luego $P(0)$ vale.
- En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale:
  Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:
  1. $n \equiv 0 \mod 2$ (es par):
  $$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \overset{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$
     Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n}{2} < n$.
  2. $n \equiv 1 \mod 2$ (es impar):
  $$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \overset{(*)}{=} \left(\cancel{2}m \cdot \frac{n-1}{\cancel{2}}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$
     donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n, vale $P(n)$. □

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$
Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$, se tiene que:
$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$
Esto se debe a que:
$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$
Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:
$$\begin{aligned}\left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}\right) - \left(5^n + 3^{n-1}\right) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 5^n + 3^{n-1}\right)\end{aligned}$$
Como $2 \mid \left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1})\right)$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. □

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$
Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) = \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + \cancel{1} - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - \cancel{1} = \\ &= 5^n(5-1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4\left(5^n + 3^{n-1}\right) \overset{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid \left[\left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)\right]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.8. Demouestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 2 \geqslant \sqrt{2}$$

Como $2 \geqslant \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Longleftrightarrow \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \Longleftrightarrow \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (2n+1)^2(n+2) \leqslant (2n+2)^2(n+1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (n+2)(4n^2+4n+1) \leqslant (n+1)(4n^2+8n+4) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cancel{4n^3} + \cancel{4n^2} + n + \cancel{8n^2} + \cancel{8n} + 2 \leqslant \cancel{4n^3} + \cancel{8n^2} + 4n + \cancel{4n^2} + \cancel{8n} + 4 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2+n \leqslant 4+4n \Longleftrightarrow 0 \leqslant 2+3n$$

Como $0 \leqslant 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ es cierto, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } (n+1)^2 < n^3 \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1+1)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} n^3 + 2n + 1 \leqslant n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } n^3 < n! \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 6$:

$$6^3 \leqslant 6! \iff 6^2 \leqslant 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leqslant 4 \cdot 5$$

  Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \overset{(*)}{<} n^3(n+1) \overset{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 5 \mid 8^n - 3^n \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

  Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$5 \mid 8^n - 3^n$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:
$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8-1) - 3^n \cdot (3-1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. □

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales. Para ello, emplearemos el mínimo común múltiplo, cuya definición vamos a recordar:

Definición 1.1 (Mínimo común múltiplo)**.** Sea A un Dominio de Integridad y $a, b \in A$. Un elemento $m \in A$ diremos que es un **mínimo común múltiplo** (abreviado como mcm) y notado $m = \text{mcm}(a, b)$ si verifica:

1. $a|m \land b|m$,
2. $\forall c \in A$ tal que $a|c \land b|c \Longrightarrow m|c$.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b, existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b:

- $\underline{a = 0 \text{ o } b = 0}$:

  Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b. Además, es el mínimo múltiplo común de a y b, ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $\underline{a, b > 0}$:

  Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b. Es claro que se tiene que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b. Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:
$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$
  Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Veamos que $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b.

1. Como $m_{a,b} \in M_{a,b}$, se tiene que $a|m_{a,b}$ y $b|m_{a,b}$.
2. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $a|m$ y $b|m$. Buscamos demostrar que $m_{a,b}|m$. Como $m_{a,b} \neq 0$, por el Teorema de la División de Euclides, existen únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $m = qm_{a,b} + r$ con $0 \leqslant r < m_{a,b}$. Por tanto, $r = m - qm_{a,b}$, por lo que r es un múltiplo común de a y de b, $r \in M_{a,b}$. Como $r < m_{a,b}$, se tiene que $r \notin v_{a,b}$, por lo que:

$$r \in M_{a,b} \setminus v_{a,b} = M_{a,b} \setminus (M_{a,b} \setminus \{0\}) = \{0\}$$

Por tanto, $r = 0$, por lo que $m = qm_{a,b}$, es decir, $m_{a,b}|m$, teniendo lo buscado.

Por tanto, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b, como se pedía.

Observación. Notemos que la definición del mínimo común múltiplo no es el mínimo de los múltiplos comunes de a y de b, algo en lo que el lector podría caer fácilmente.

□

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de $n \in \mathbb{N}$ para el que

$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden)**.** Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (es decir, S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea el conjunto de los mayorantes de S, $M(S)$, dado por:

$$M(S) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \leqslant m \text{ para todo } x \in S\}$$

Se tiene entonces que $n \in M(S)$, por lo que $M(S) \neq \emptyset$. Por el principio del buen orden, $M(S)$ tiene mínimo, al que llamaremos m_0. Veamos que m_0 es el máximo de S. Para ello, es necesario demostrar que $m_0 \in S$ y que $m_0 \geqslant x$ para todo $x \in S$.

- Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x \leqslant m_0$ para todo $x \in S$, por lo que efectivamente m_0 es un mayorante de S.
- Veamos ahora que $m_0 \in S$.

  Observación. A continuación, restaremos 1 a m_0, considerando $m_0 - 1$. Para poder trabajar en $\mathbb{N}$, es necesario que $m_0 \neq 0$. Como $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$, sea $x_0 \in S \setminus \{0\}$, por lo que $x_0 \neq 0$ y $x_0 \in \mathbb{N}$. Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x_0 \leqslant m_0$, por lo que $0 < x_0 \leqslant m_0$.

Supongamos que que $x < m_0$ para todo $x \in S$. Por tanto:

$$x \leqslant m_0 - 1 \text{ para todo } x \in S \Longrightarrow m_0 - 1 \in M(S)$$

Además, $m_0 - 1 < m_0$, lo que contradice que m_0 sea el mínimo de $M(S)$, por lo que la hipótesis era falsa y $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 \geqslant m_0$. Como además $m_0 \geqslant x_0$ por ser $x_0 \in S$, tenemos que $m_0 = x_0$, por lo que $m_0 \in S$. Por tanto, como $m_0 \in S \cap M(S)$, se tiene que m_0 es el máximo de S. □

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leqslant n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Caso base: $n = 2$.

  Tenemos que:

  $$1 < 2 \Longleftrightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \Longleftrightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Longleftrightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1$$
  $$\Longleftrightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

  Veamos ahora que $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}}$:

  $$\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

  Por tanto, $P(2)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que vale $P(n)$, es decir

  $$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n + 1)$ es cierto. En primer lugar, veamos que:

  $$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n + 1}$$

Supongando 1 a cada lado de la desigualdad, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \Longrightarrow (\sqrt{n+1})^2 < \sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \\
< \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad se ha usado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \leqslant 2$, $P(n)$ vale. □

Ejercicio 1.1.16. Demostrar **no inductivamente** que para todo número natural n se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k)\right) = \\
= \sum_{k=0}^{n} k + (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)
\end{aligned}
$$

Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicio 1.1.17. Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos solo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de superior a 13.

El razonamiento es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

"Es posible franquear una carta de n céntimos con sellos de 3 y 8 céntimos."

Como hipótesis de inducción, supongamos que $14 \leqslant n$ y que $P(k)$ es cierto para todo $14 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- Caso base: $n = 14$.

  Tenemos que $14 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 8$, por lo que $P(14)$ es cierto.

- Caso base: $n = 15$.

  Tenemos que $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$, por lo que $P(15)$ es cierto.

- Caso base: $n = 16$.

  Tenemos que $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$, por lo que $P(16)$ es cierto.

- Supongamos que $n \geqslant 17$, por lo que $14 \leqslant n-3 < n$, y por la hipótesis de inducción, se tiene que $P(n-3)$ es cierto. Es decir, existirán $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $n-3 = 3a+8b$. En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ es cierto. Tenemos que:

$$n = (n-3)+3 = 3a+8b+3 = 3(a+1)+8b$$

  Por tanto, $P(n)$ es cierto.

Por tanto, por el segundo principio de inducción, se tiene que para todo número natural n superior a 13, $P(n)$ es cierto, como se pedía.

Ejercicio 1.1.18. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$2|(n+1)(n+2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“ } 2|(n+1)(n+2) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$2|1 \cdot 2$$

  Como $2|2$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2|(n+1)(n+2)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)(n+1+2)-(n+1)(n+2) &= (n+2)(n+3)-(n+1)(n+2) = \\ &= (n+2)(n+3-n-1) = 2(n+2)\end{aligned}$$

  Por tanto, como $2|(n+2)(n+3)-(n+1)(n+2)$ y, por hipótesis de inducción, $2|(n+1)(n+2)$, se tiene que $2|(n+1+1)(n+1+2)$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, se tiene que $2|(n+1)(n+2)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.19. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

- En el caso base, $n = 0$:
$$6 \mid 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$
Como $6 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:
$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) &= (n+1)(n+2)[n+3-n] = \\ &= 3(n+1)(n+2) \overset{(*)}{=} 3 \cdot 2k = 6k\end{aligned}$$
donde en $(*)$ hemos empleado el Ejercicio 1.1.18. Por tanto, como se tiene que $6|(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)$ y, por hipótesis de inducción, $6|n(n+1)(n+2)$, se tiene que $6|(n+1)(n+2)(n+3)$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, se tiene que $6 \mid n(n+1)(n+2)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.20 (Parcial DGIIM 23/24)**.** Demuestre por inducción que para todo número natural $n \in \omega$ existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:
$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$
Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

Notación. De aquí en adelante, para cualquier número natural $n \in \omega$, $f_n(x, y)$ denotará un polinomio.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:
$$\text{“ } x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:
$$\begin{aligned}x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0\end{aligned}$$
Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(k)$ es cierto para $k \in \omega,\ 0 \leqslant k \leqslant n$, es decir, que:

$$x^k - y^k = (x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - y^{n+1} + x^n y - x^n y + xy^n - xy^n \\
&= (x+y)(x^n - y^n) - xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\
&\overset{(*)}{=} (x+y)(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy(x-y)\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \\
&= (x-y)\left[(x+y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k\right] \\
&= (x-y)\left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^{k+1}\right] \\
&= (x-y)\left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^0 y^n\right] \\
&= (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción, puesto que $n, n-1 \leqslant n$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Así pues, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x,y)$ dado por:

$$f_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

tal que cumple:

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot f_n(x,y)$$

□

Veamos ahora para cada valor de $n \in 4 = \{0,1,2,3\}$ el valor de $f_n(x,y)$:

- Para $n = 0$:

$$f_0(x,y) = \sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = (x-y) \cdot 0$$

- Para $n = 1$:

$$f_1(x, y) = \sum_{k=0}^{0} x^{0-k} y^k = 1$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \cdot 1$$

- Para $n = 2$:

$$f_2(x, y) = \sum_{k=0}^{1} x^{1-k} y^k = x + y$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

- Para $n = 3$:

$$f_3(x, y) = \sum_{k=0}^{2} x^{2-k} y^k = x^2 + xy + y^2$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Observación. Proponemos ahora una demostración alternativa para la existencia de $f_n(x, y)$.

Demostración. La demostración es mediante el segundo principio de inducción matemática según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$\text{“ } x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y) \text{ ”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

  Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $Q(0)$ es cierto.

- Supongamos como hipótesis de inducción que n es un número natural y que $Q(k)$ es cierto para todo $k \in \omega,\ 0 \leqslant k < n$. Es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot f_k(x, y)$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $Q(n)$ es cierto. Distinguimos dos casos:

  - Para n par:
    Tenemos que $n = 2m$ para algún $m \in \omega$, $m < n$. Por tanto:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m} - y^{2m} \\ &= (x^m)^2 - (y^m)^2 \\ &= (x^m - y^m)(x^m + y^m) \\ &\stackrel{(*)}{=} (x - y)f_m(x, y)(x^m + y^m) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

  - Para n impar:
    Tenemos que $n = 2m + 1$ para algún $m \in \omega$, $2m < n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m+1} - y^{2m+1} = x \cdot x^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x \cdot x^{2m} - x \cdot y^{2m} + x \cdot y^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x - y) \\ &\stackrel{(*)}{=} x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= (x - y)(x \cdot f_m(x, y) + y^{2m}) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

    donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $2m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

Así pues, por el segundo principio de inducción matemática, para todo número natural n, existe un polinomio $f_n(x, y)$ tal que $x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$. □

1.2. Recurrencia

Ejercicio 1.2.1. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geqslant 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geqslant 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz $r = 2$ de multiplicidad $m = 2$. La solución general de la recurrencia por tanto es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Y ahora buscar los valores de c_1 y c_2 usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 3$, entonces:

$$\begin{aligned}
&1 = (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\
&3 = (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) 2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right) 2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Observación. Notemos que distinguimos muy bien la reucrrencia en sí, notada por u_n, de la solución particular de la recurrencia, notada por x_n.

Ejercicio 1.2.2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0$$

El orden k de la recurrencia es 2 ($k = 2$). La ecución característica es:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Usando la notación del Teorema visto en Teoría, donde r_i son las raíces de la ecuación característica y m_i son las multiplicidades de las raíces, se tiene:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_1 = 1 \\
r_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_2 = 1
\end{aligned}$$

En efecto, se tiene $m_1+m_2 = 1+1 = 2 = k$, por lo que estamos en las condiciones del Teorema. Si $\{x_n\}$ es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los valores de c_1 y c_2 se obtendrán a partir de las condiciones iniciales, que no se nos han proporcionado.

Ejercicio 1.2.3. Reuelva el problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 0$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 0 = x_0 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = -c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = x_1 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1\sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema por tanto es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Fibonacci.*

Ejercicio 1.2.4. Calcular la solución del problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema, entonces $x_0 = u_0 = 2$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 2 - c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (2 - c_1) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \cancel{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right) \\ &= c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \Longrightarrow 1 = c_1\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \Longrightarrow 0 = c_1\sqrt{5} - \sqrt{5} \\ &\Longrightarrow c_1\sqrt{5} = \sqrt{5} \Longrightarrow c_1 = 1 \Longrightarrow c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución por tanto es:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Lucas*.

Ejercicio 1.2.5. Solucionar la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \qquad n \geqslant 0$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 3^n = c_0 + c_1 3^n$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$3 \cdot 3^n \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_3 = 3 \\ m_3 = 1 \\ q_3(n) = 3 \\ \deg(q_3(n)) = 0 \end{array}\right\} \qquad 3 \cdot 1^n \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 1 \\ q_1(n) = 3 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array}\right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n \cdot 1^n = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_2 y c_3. Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$3^{n+1} + 3 = x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)}$$

Calculemos dichos valores:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= c_2 n \cdot 3^n + c_3 n = n(c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_2(n+1) \cdot 3^{n+1} + c_3(n+1) = (n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= c_2(n+2) \cdot 3^{n+2} + c_3(n+2) = (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = \\ &= (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) - 4(n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) + 3n(c_2 \cdot 3^n + c_3) = \\ &= c_2 3^n[3^2(n+2) - 4 \cdot 3(n+1) + 3n] + c_3[(n+2) - 4(n+1) + 3n] = \\ &= c_2 3^n[9n + 18 - 12n - 12 + 3n] + c_3[n + 2 - 4n - 4 + 3n] = \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 = 6c_2 3^n - 2c_3$$

Igualando los coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} 6c_2 = 3 \Longrightarrow c_2 = {}^1\!/_2 \\ -2c_3 = 3 \Longrightarrow c_3 = {}^{-3}\!/_2 \end{gathered}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n \cdot 3^n - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}\left(3^n - 3\right)$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \left\{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\right\}$ y entonces:

$$x_n = c_0 + c_1 3^n + \frac{n}{2}\left(3^n - 3\right) = \left(\frac{n}{2} + c_1\right)3^n + c_0 - \frac{3n}{2}$$

Ejercicio 1.2.6. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0 \qquad n \geqslant 0$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -4$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la ecuación característica son:

$$z_1 = 2i \qquad z_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot (2i)^n + c_2 \cdot (-2i)^n$$

Buscamos ahora expresar la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos. Para ello, tenemos que:

$$|z_1| = |z_2| = 2 \qquad \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión de z_1 y z_2 en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Usando que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Elevando a n, por el Teorema de Moivre, tenemos que:

$$\begin{aligned} (z_1)^n &= 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\ (z_2)^n &= 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + c_2 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\ &= 2^n \left[(c_1 + c_2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\ &= 2^n \left[d_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad n \geqslant 0$$

Ejercicio 1.2.8. Calcular el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como "Torres de Hanoi", en función del número de discos n con los que cuente.

Para $n \geqslant 0$ sea u_n el número de movimientos necesarios para pasar los n discos del poste A al poste C. Si el puzzle tuviese $n+1$ discos entonces hacemos lo siguiente:

- Pasamos los n discos superiores del poste A al poste B. Esto nos cuesta u_n movimientos.
- Pasamos el disco base del poste A al poste C. Esto nos cuesta 1 movimiento.
- Pasamos los n discos superiores del poste B al poste C. Esto nos cuesta u_n movimientos.

Por tanto, lo dicho sugiere la siguiente recurrencia:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 2 = 0$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n \qquad c_1 \in \mathbb{C}$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 1 = 1 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$1 \cdot 1^n \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ q_1(n) = 1 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array}\right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{C}$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener el valor de c_2. Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$1 = x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} = c_2 - 2c_2 = -c_2 \Longrightarrow c_2 = -1$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = -1$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \left\{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\right\}$ y entonces:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Como sabemos que $x_0 = u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_1 \cdot 2^0 - 1 = c_1 - 1 \Longrightarrow c_1 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = 2^n - 1$$

Notemos que esta es la solución al problema de las Torres de Hanoi. Veamos como ilustración los primeros valores de la sucesión:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2^0 - 1 = 0 \\
x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\
x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\
x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\
x_4 &= 2^4 - 1 = 15
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.9. Sea la sucesión $\{u_n\}$ definida por:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n.

   Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ se tiene:

   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n = u_{n-1} + n2^n$$

   Además, para $n = 0$ se tiene que:

   $$u_0 = \sum_{k=0}^{0} k2^k = 0 \cdot 2^0 = 0$$

   Por tanto, la expresión recurrente para u_n es:

   $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n2^n & n \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n.

   Encontrar una fórmula explícita para u_n es equivalente a resolver la recurrencia. Para ello, su polinomio característico es:

$$x - 1 = 0$$

   Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$u_n^{(h)} = c_0 \qquad c_0 \in \mathbb{C}$$

   La función de ajuste es:

$$f(n) = n2^n$$

   Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$n2^n \Longrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ m = 0 \\ q(n) = n \\ \deg(q(n)) = 1 \end{cases}$$

   Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n$$

   Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_1 y c_2. Para ello, como sabemos que $u_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} n2^n &= u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2(c_1 + c_2 n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2^{n-1}[2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2 n + c_2] = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \end{aligned}$$

   Por tanto, deducimos que:

$$n2^n = 2^{n-1} \cdot 2n = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{array} \right.$$

   Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n = (n-1)2^{n+1}$$

   Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{u_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{u_n\} = \left\{u_n^{(h)} + u_n^{(p)}\right\}$ y entonces:

$$u_n = c_0 + (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que $u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_0 + (0-1)2^{0+1} = c_0 - 2 \Longrightarrow c_0 = 2$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$u_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Ejercicio 1.2.10. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe hacer al final de cada plazo?

Sea u_n es la cantidad de p̃restamo que todavía debe el ciudadano al final del $n-$ésimo plazo, es decir, a continuación del $n-$ésimo pago. Entonces, para todo $0 \leqslant n \leqslant T-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1+I)u_n - P \end{aligned}$$

El problema entonces se reduce a resolver la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1+I)u_n - P \qquad 0 \leqslant n \leqslant T-1 \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - (1+I) = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n \qquad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es $f(n) = -P = -Pn^0 \cdot 1^n$. Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$-P \Longrightarrow \begin{cases} s = -P \\ q(n) = 1 \\ \deg(q(n)) = 0 \end{cases}$$

Para obtener la multiplicidad del 1 como raíz del polinomio característico, depende del valor de I. Como la única raíz del polinomio característico es $1+I$, realizamos la siguiente distinción de casos:

- $\underline{I = 0}$: En este caso, la raíz del polinomio característico es 1 y por tanto, $m = 1$. Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n = c_0(1)^n = c_0 x_n^{(p)} \qquad = c_1 n \cdot 1^n = c_1 n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned}-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} &= c_1(n+1) - (1+I)c_1 n = \\ &= c_1[n+1-n(1+I)] = c_1(1-I) = c_1\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0 - Pn$$

Para hallar c_0 y P, usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}S = x_0 = c_0 - P \cdot 0 = c_0 \Longrightarrow c_0 = S \\ 0 = x_T = c_0 - P \cdot T = S - PT \Longrightarrow P = \frac{S}{T}\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = S - \frac{S}{T}n = S\left(1 - \frac{n}{T}\right)$$

La cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo es:

$$P = \frac{S}{T}$$

- $\underline{I \neq 0}$: En este caso, la raíz del polinomio característico es $1+I$ y por tanto, $m = 0$. Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n x_n^{(p)} \qquad\qquad = c_1 n^0 \cdot 1^n = c_1$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1 - (1+I)c_1 = -Ic_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{P}{I}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Para hallar c_0 y P, usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}S = x_0 = c_0(1+I)^0 + \frac{P}{I} = c_0 + \frac{P}{I} \Longrightarrow c_0 = S - \frac{P}{I} \\ 0 = x_T = c_0(1+I)^T + \frac{P}{I}\end{aligned}$$

Por tanto, para hallar la cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo, necesitamos despejar P de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}&0 = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P = (P - SI)(1+I)^T = P(1+I)^T - SI(1+I)^T \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P = \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - I}\end{aligned}$$

La solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Ejercicio 1.2.11. Encuentre la solución la solución general para la siguiente recurrencia:

$$u_n = u_{n-2} + 2^n + (-1)^n \qquad n \geqslant 2$$

y luego soluciona el problema que surge de ella junto a los valores iniciales:

$$u_0 = u_1 = 2.$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

La función de ajuste es $f(n) = 2^n + (-1)^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned}
2^n + (-1)^n = x_n^{(p)} - x_{n-2}^{(p)} &= c_3 2^n + c_4 n(-1)^n - c_3 2^{n-2} - c_4(n-2)(-1)^{n-2} = \\
&= 2^{n-2}(2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n(c_4 n - c_4(n-2)) = \\
&= 2^{n-2} \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$\left\{\begin{array}{l} 3c_3 = 4 \Longrightarrow c_3 = 4/3 \\ 2c_4 = 1 \Longrightarrow c_4 = 1/2 \end{array}\right.$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

Usando los valores iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned}
2 = x_0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 &\Longrightarrow c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\
2 = x_1 = -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} &\Longrightarrow -c_1 + c_2 = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2/3 \\ c_1 - c_2 = 1/6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 5/12 \\ c_2 = 1/4 \end{array}\right.$$

Por tanto, la solución de la recurrencia para los valores iniciales dados es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2}\cdot(-1)^n = \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n\left(\frac{5}{12} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.12. Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3\cdot 2^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \\ r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i \end{array}\right.$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-2 + 2\sqrt{3}i)^n + c_2(-2 - 2\sqrt{3}i)^n$$

Para expresar la solución en términos de senos y cosenos, calculamos el módulo y el argumento de las raíces. El módulo de las raíces es:

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{2^2 + 2^2\cdot 3} = \sqrt{2^4} = 4$$

Respecto al argumento de las raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1) &= \frac{\Im(r_1)}{\Re(r_1)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{tg}(\theta_2) &= \frac{\Im(r_2)}{\Re(r_2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Moivre, es:

$$x_n^{(h)} = 4^n\left(c_1\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + 4^n\left(c_3\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + c_4\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi n}{3}\right)\right)$$

Usando que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, podemos reescribir la solución anterior como:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= 4^n\left(c_1\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + 4^n\left(c_3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - c_4\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) = \\ &= 4^n\left((c_1 + c_3)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (c_2 - c_4)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) = \\ &= 4^n\left(d_1\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

Como solución particular de la recurrencia, partimos de:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Calculamos $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2}\left[c_5 \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[c_5 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\pi - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\pi\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\pi + c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\pi\right] = \\
&= 4^{n+2}\left[-c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n}\left[-16c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(p)} &= 4^{n+1}\left[c_5 \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[c_5 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[c_5 \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + c_6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right] = \\
&= 4^{n+1}\left[-c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^{n}\left[-4c_5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4c_6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
&4^n\left[16\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 64\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] = \\
&\quad = 4^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \\
&\quad = x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 16x_n^{(p)} = \\
&\quad = 4^n\left[-16c_5\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_6\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\
&\qquad + 4^n\left[-16c_5\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 16c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \\
&\qquad + 4^n\left[16c_5\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 16c_6\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&\quad = 4^n\left[16c_6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 16c_5\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{aligned}
16c_6 = 16 &\Longrightarrow c_6 = 1 \\
-16c_5 = -64 &\Longrightarrow c_5 = 4
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\
&= 4^n\left(d_1\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + 4^n\left[4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \\
&= 4^n\left(d_1\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.13 (Función Gamma)**.** Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{ll} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}\right]$$

Por tanto, tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \overset{(*)}{=} n\Gamma(n)$$

donde en $(*)$ hemos usado la Regla de Barrow, junto a:

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^t} = 0 \qquad\qquad \lim_{t\to 0} t^n e^{-t} = 0^n\cdot e^0 = 0$$

Por tanto, mediante una fácil inducción, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\cdot\Gamma(1) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Veamos el valor de $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Ejercicio 1.2.14. Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = 3u_{n-1} + 3^n - 2 \quad n\geqslant 1 \\ u_0 = 2 \end{array}\right.$$

y redúzcalo a un problema de recurrencia homogénea.

Por variación de índices, tenemos que:

$$u_{n-1} = 3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2$$

Por tanto, multiplicando por 3 llegamos a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + 3^n - 2 \\ 3u_{n-1} & = & 9u_{n-2} + 3^n - 6 \\ \hline u_n - 3u_{n-1} & = & 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4 \end{array}$$

donde hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4$$

Repitiendo el proceso, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} & = & 4 \\ u_{n-1} - 6u_{n-2} + 9u_{n-3} & = & 4 \\ \hline u_n - 7u_{n-1} + 15u_{n-2} - 9u_{n-3} & = & 0 \end{array}$$

donde de nuevo hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que la recurrencia homogénea equivalente es:

$$u_n = 7u_{n-1} - 15u_{n-2} + 9u_{n-3}$$

Resolvamos ahora dicha recurrencia homogénea. El orden de la recurrencia es $k = 3$. La ecuación característica es:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

Veamos mediante Ruffini que $x = 1$ es raíz de la ecuación característica:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 15 & -9 \\ 1 & & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x^2 - 6x + 9) = (x-1)(x-3)^2$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n + c_3 n \cdot 3^n$$

Las condiciones iniciales de contorno que debemos imponer son:

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 = 2 \\ x_1 &= u_1 = 6 + 3 - 2 = 7 \\ x_2 &= u_2 = 21 + 9 - 2 = 28 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 7 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 28 \end{array}\right.\right\} \Longrightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia dada es:

$$x_n = 1 + 3^n + n \cdot 3^n = 1 + (n+1)3^n$$

Observación. Notemos que este "método" tiene varios inconvenientes: oculta que algunos de los coeficientes son independientes de los valores de contorno, no evita encontrar las raíces de un un polinomio mientras que eleva el grado del polinomio a estudiar, no es algorítmico, el cálculo de los coeficientes indeterminados es efectuado mediante un sitema de mayor orden, etc.; no obstante el método es algebraicamente bello.

Ejercicio 1.2.15. Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} & n \geqslant 2 \\ t_n = s_{n-1} + t_{n-1} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

Solucione y resuelva la primera recurrencia.

Mediante una simple variación de índices, tenemos que:

$$s_{n-1} = 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} - 2s_{n-2} - s_{n-3} - 4t_{n-2} = \\ &= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \end{aligned}$$

Luego:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

Haciendo uso de que $t_n - t_{n-1} = s_{n-1}$, tenemos que:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}$$

La ecuación característica de la recurrencia homogénea obtenida es:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Veamos que $x = -1$ es raíz de la ecuación característica:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & & -1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2(2+\sqrt{3})^n + c_3(2-\sqrt{3})^n$$

Ejercicio 1.2.16. Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

De forma general, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, y consideramos la recurrencia dada por:

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + n\alpha^{n+1} \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1$$

La función de ajuste es $f(n) = n\alpha^{n+1}$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = (c_2 + c_3 n)\alpha^n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^2 n\alpha^{n-1} &= n\alpha^{n+1} = x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} = (c_2 + c_3 n)\alpha^n - (c_2 + c_3(n-1))\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^n + c_3 n\alpha^n - c_2\alpha^{n-1} - c_3 n\alpha^{n-1} + c_3\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^{n-1}(\alpha - 1) + c_3\alpha^{n-1} + c_3 n\alpha^{n-1}(\alpha - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_3(\alpha - 1) = \alpha^2 \Longrightarrow c_3 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha - 1} \\ c_2(\alpha - 1) + c_3 = 0 \Longrightarrow c_2 = \dfrac{-c_3}{\alpha - 1} = \dfrac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \left(\frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^2}{\alpha - 1} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{-\alpha^2 + n\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que una solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= c_1 + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n \end{aligned}$$

Para hallar el valor de c_1, como sabemos que $x_0 = s_0 = 0$, tenemos que:

$$0 = x_0 = c_1 + \frac{-\alpha^2}{(\alpha-1)^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}$$

Por tanto, la solución a la recurrencia dada es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right)\alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2} - \alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} \end{aligned}$$

Tomando límite con $n \to \infty$, suponiendo $\alpha \in [0, 1[$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha-1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora por tanto el ejercicio. Tomando $\alpha = 10^{-3}$, se tiene que:

$$s_n = x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

Tomando límite por tanto con $n \to \infty$, como $\alpha \in [0, 1[$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}} = \lim_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}\right)^2 = \left(110^3 - 1\right)^2 = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{998001}$$

Ejercicio 1.2.17. Demuestre mediante la teoría de recurrencias que $0.\overline{9} = 1$.

Observación. Observe que, sin mucho rigor, se podría tener lo siguiente:

$$0.\overline{9} = 3 \cdot 0.\overline{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Ejercicio 1.2.18 (Parcial DGIIM 23/24)**.** Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \qquad n \geqslant 0$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple con las condiciones iniciales $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow (x-3)^2 = 0$$

La única raíz de la ecuación característica es $x = 3$ con multiplicidad doble. Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

La función de ajuste es $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Calculamos primero $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+2} + c_4(n+2)^2 \cdot 3^{n+2} = 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n \\
x_{n+1}^{(p)} &= c_3 \cdot 2^{n+1} + c_4(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} = 2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n
\end{aligned}$$

Usando que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= x_{n+2}^{(p)} - 6x_{n+1}^{(p)} + 9x_n^{(p)} \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n - \\
&\quad - 6(2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n) + \\
&\quad + 9(c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n) \\
&= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2+4n+4) \cdot 3^n - \\
&\quad - 12c_3 \cdot 2^n - 18c_4(n^2+2n+1) \cdot 3^n + \\
&\quad + 9c_3 \cdot 2^n + 9c_4 n^2 \cdot 3^n \\
&= 2^n(4c_3 - 12c_3 + 9c_3) + 3^n(9c_4(n^2+4n+4) - 18c_4(n^2+2n+1) + 9c_4 n^2) \\
&= c_3 2^n + c_4 3^n(\cancel{9n^2} + \cancel{36n} + 36 - \cancel{18n^2} - \cancel{36n} - 18 + \cancel{9n^2}) \\
&= c_3 2^n + 18 \cdot c_4 3^n
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} c_3 = 3 \\ 18c_4 = 7 \Longrightarrow c_4 = 7/18 \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n = \\
&= 3^n \left(c_1 + c_2 n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n
\end{aligned}$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales, sabiendo que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 4$:

$$\begin{aligned}
x_0 = 1 &\Longrightarrow 1 = 3^0 \left(c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot 0^2 \right) + 3 \cdot 2^0 = c_1 + 3 \Longrightarrow c_1 = -2 \\
x_1 = 4 &\Longrightarrow 4 = 3^1 \left(-2 + c_2 \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot 1^2 \right) + 3 \cdot 2^1 = \cancel{-6} + 3c_2 + \frac{7}{6} + \cancel{6} \Longrightarrow c_2 = \frac{4 - 7/6}{3} = \frac{17}{18}
\end{aligned}$$

Por tanto, para el caso particular dado tenemos que la solución de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= 3^n \left(-2 + \frac{17}{18} n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \\ &= 3^n \left(-2 + \frac{17n + 7n^2}{18} \right) + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

1.3. Lógica Proposicional

Ejemplo. La fórmula proposicional $(a \to b)$ (siempre que $b \not\equiv a$) es refutable.

Basta tomar una valoración v tal que $v(a) = 1$ y $v(b) = 0$.
De hecho, $a \to b$ es satisfacible, luego es una fórmula contingente.

Ejemplo. Las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías:

1. $(a \to a)$

$$\begin{aligned} v(a \to a) &= v(a)v(a) + v(a) + 1 \\ &= v(a) + v(a) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Observación. Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}_2$, se tiene que $a^2 = a$ y $2a = 0$. Esto será usado constantemente, aunque en un principio el lector no esté acostumbrado a trabajar a trabajar en este anillo.

2. $(\alpha \vee \neg\alpha)$. Esta tautología se conoce como el principio del tercio excluso.

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + v(\neg\alpha) \\ &= v(\alpha)(v(\alpha) + 1) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)^2 + v(\alpha) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo. Dada una valoración v y dadas α, β fórmulas proposicionales, se tiene que:

$$v\left((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)\right) = v(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} v\left((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)\right) &= v(\alpha \to \beta)v(\beta \to \alpha) \\ &= \left(v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1\right)\left(v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1\right) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta)v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \\ &= 6 \cdot v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.1. Dadas α, β fórmulas proposicionales, clasifique las siguientes fórmulas en función de si son tautologías, contradicciones o contingentes:

1. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

En lo que sigue, sea v una valoración fija pero arbitraria. Para facilitar el desarrollo, notaremos que dada γ fórmula proposicional, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\gamma)v(\neg\gamma) &= v(\gamma)(v(\gamma) + 1) \\ &= v(\gamma)^2 + v(\gamma) \\ &= v(\gamma) + v(\gamma) = 0 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&v((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) = v(\alpha \to \beta)v(\neg\beta \to \neg\alpha) + v(\alpha \to \beta) + 1\\
&\quad = (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\neg\beta) + 1) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1}\\
&\quad = (v(\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\beta)) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha)\\
&\quad = \cancelto{0}{v(\alpha)v(\beta)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)} + \cancel{v(\alpha)v(\beta)^2} + v(\neg\alpha)^2 v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) +\\
&\qquad + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + v(\alpha)\\
&\quad = v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha)\\
&\quad = v(\neg\alpha)(v(\neg\beta) + v(\beta)) + v(\alpha)\\
&\quad = v(\neg\alpha)(2v(\beta) + 1) + v(\alpha)\\
&\quad = v(\neg\alpha) + v(\alpha)\\
&\quad = 2v(\alpha) + 1 = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto, se trata de una tautología.

2. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$

   Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&v((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha))\\
&\quad = v(\alpha \to \beta)v((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) + v(\alpha \to \beta) + 1\\
&\quad = v(\alpha \to \beta)(v(\alpha \to \beta)v(\neg\alpha) + v(\alpha \to \beta) + 1) + v(\alpha \to \beta) + 1\\
&\quad = v(\alpha \to \beta)^2 v(\neg\alpha) + v(\alpha \to \beta)^2 + \cancel{v(\alpha \to \beta)} + \cancel{v(\alpha \to \beta)} + 1\\
&\quad = v(\alpha \to \beta)[v(\neg\alpha) + 1] + 1\\
&\quad = v(\alpha \to \beta)v(\alpha) + 1\\
&\quad = [v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1]v(\alpha) + 1\\
&\quad = v(\alpha)^2 v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2} + \cancel{v(\alpha)} + 1\\
&\quad = v(\alpha)v(\beta) + 1\\
&\quad = v(\neg(\alpha \wedge \beta))
\end{aligned}
$$

   Por tanto, depende de la valoración.

   - Si $v(\alpha) = 1 = v(\beta)$, entonces:

$$v((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)) = 0$$

   - Si $v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 0$, entonces:

$$v((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)) = 1$$

   En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una una fórmula contingente.

3. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$

   Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
v((\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \to \beta)) &= v(\alpha \to \neg\beta)v(\neg\alpha \to \beta) + v(\alpha \to \neg\beta) + 1 \\
&= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1} \\
&= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha)) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) \\
&= \cancelto{0}{v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)v(\beta)} + v(\neg\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2v(\neg\beta)} + \cancelto{0}{v(\neg\alpha)v(\alpha)} + \\
&\quad + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)} + v(\alpha) \\
&= v(\alpha + 1)v(\beta) + v(\alpha) \\
&= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\
&= v(\alpha \vee \beta)
\end{aligned}
$$

   Por tanto, depende de la valoración.

   - Si $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$, entonces:

$$v((\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \to \beta)) = 0$$

   - Si $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$, entonces:

$$v((\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \to \beta)) = 1$$

   En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una una fórmula contingente.

Ejercicio. Para cualesquiera fórmulas proposicionales α, β, γ, demuestre que las siguientes reglas son correctas:

1. $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$. Esta regla se conoce como *modus ponens.*

   Tenemos que es equivalente a:

$$
\begin{array}{c}
\alpha \\
\alpha \to \beta \\
\hline
\beta
\end{array}
$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \to \beta)$$

   Entonces, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
1 &= v(\alpha \to \beta) \\
&= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\
&= 1 \cdot v(\beta) + 1 + 1 \\
&= v(\beta)
\end{aligned}
$$

   Por tanto, como $v(\beta) = 1$, la regla es correcta.

2. $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \wedge \beta \models \gamma$

   Tenemos que es quivalente a:

$$\begin{array}{c} \alpha \to (\beta \to \gamma) \\ \alpha \wedge \beta \\ \hline \gamma \end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1 = v(\alpha \wedge \beta)$$

   Debemos demostrar que $v(\gamma) = 1$.

   Como $v(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta \to \gamma) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que $v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) = v(\alpha)v(\beta)$. Como por hipótesis también tenemos que $v(\alpha \wedge \beta) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \wedge \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) \end{aligned}$$

   Uniendo ambos resultados, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) &= v(\alpha)v(\beta) \\ 1 \cdot v(\gamma) &= 1 \\ v(\gamma) &= 1 \end{aligned}$$

   Por tanto, $v(\gamma) = 1$, y la regla es correcta.

3. $\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \models \alpha \vee \beta$

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{c} \alpha \to \gamma \\ \beta \to \gamma \\ \hline \alpha \vee \beta \to \gamma \end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \to \gamma) = 1 = v(\beta \to \gamma)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \\ 1 &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} v(\alpha)v(\gamma) &= v(\alpha) \\ v(\beta)v(\gamma) &= v(\beta) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \beta \to \gamma) &= v(\alpha \vee \beta)v(\gamma) + v(\alpha \vee \beta) + 1 \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta))v(\gamma) + (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Aplicando las igualdades anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \beta \to \gamma) &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= 2v(\alpha)v(\beta) + 2v(\alpha) + 2v(\beta) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta.

4. $\gamma \to \alpha, \gamma \to \beta \models \gamma \to \alpha \wedge \beta$

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{l} \gamma \to \alpha \\ \gamma \to \beta \\ \hline \gamma \to \alpha \wedge \beta \end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\gamma \to \alpha) = 1 = v(\gamma \to \beta)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\gamma)v(\alpha) + v(\gamma) + 1 \\ 1 &= v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$v(\gamma)v(\alpha) = v(\gamma) = v(\gamma)v(\beta)$$

   Comprobemos que la regla es cierta:

$$\begin{aligned} v(\gamma \to \alpha \wedge \beta) &= v(\gamma)v(\alpha \wedge \beta) + v(\gamma) + 1 \\ &= v(\gamma)(v(\alpha)v(\beta)) + v(\gamma) + 1 \\ &= v(\gamma)v(\alpha)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\ &\overset{(*)}{=} v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\ &= v(\gamma) + v(\gamma) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   donde en $(*)$ hemos usado las hipótesis. Por tanto, la regla es correcta.

5. $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \models \gamma$

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{c} (\alpha \wedge \beta) \to \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \hline \gamma \end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) = 1 = v(\alpha) = v(\beta)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \\ &= v(\alpha \wedge \beta)v(\gamma) + v(\alpha \wedge \beta) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

   Usando que $v(\alpha) = v(\beta) = 1$, tenemos que:

$$1 = v(\gamma) + 1 + 1 \Longrightarrow v(\gamma) = 1$$

   Por tanto, la regla es correcta.

6. $\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha \vee \gamma \models \beta \vee \gamma$. Esta regla se conoce como la regla de resolución.

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \vee \gamma \\ \hline \beta \vee \gamma \end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 = v(\neg\alpha \vee \gamma)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \vee \gamma) \\ &= v(\neg\alpha)v(\gamma) + v(\neg\alpha) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha) &= v(\alpha)v(\gamma) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la regla es correcta:

$$\begin{aligned} v(\beta \vee \gamma) &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + \cancel{v(\gamma)} + v(\beta) + \cancel{v(\gamma)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta. Hagamos ahora otro razonamiento distinto:

- Si $v(\alpha \vee \beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$.
- Si $v(\neg\alpha \vee \gamma) = 1$, entonces $v(\alpha) = 0$ ó $v(\gamma) = 1$.

Si $v(\beta) = 1$, entonces $v(\beta \vee \gamma) = 1$. Supongamos por tanto que $v(\beta) = 0$, y demostremos que $v(\gamma) = 1$. Como $v(\beta) = 0$, entonces $v(\alpha) = 1$, por lo que $v(\alpha) \neq 0$ y por tanto, $v(\gamma) = 1$, de donde $v(\beta \vee \gamma) = 1$. Queda demostrado por tanto que la regla es correcta.

7. $\neg\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \neg\beta \models \alpha$. Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo clásica.

   Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\alpha \to \beta \\ \neg\alpha \to \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\neg\alpha \to \beta) = 1 = v(\neg\alpha \to \neg\beta)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \to \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \to \neg\beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + v(\beta) + 1 + \cancel{v(\alpha)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)\\ v(\alpha)v(\beta) &= v(\beta)\end{aligned}$$

De forma directa, tenemos que $v(\alpha) = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

8. $\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta \models \neg\alpha$. Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo intuicionista.

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{c}\alpha \to \beta\\ \alpha \to \neg\beta\\ \hline \neg\alpha\end{array}$$

   Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \to \beta) = 1 = v(\alpha \to \neg\beta)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned}1 &= v(\alpha \to \beta)\\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= v(\alpha \to \neg\beta)\\ &= v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1\\ &= v(\alpha)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1\\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\alpha)} + 1\\ &= v(\alpha)v(\beta) + 1\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}v(\alpha) &= v(\alpha)v(\beta)\\ v(\alpha)v(\beta) &= 0\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que $v(\alpha) = 0$, por lo que $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1 = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

9. $\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \beta \models \beta$. Esta regla se conoce como la regla de demostración por casos.

   Tenemos que es equivalente a:

$$\begin{array}{c}\alpha \to \beta\\ \neg\alpha \to \beta\\ \hline \beta\end{array}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \to \beta) = 1 = v(\neg\alpha \to \beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \to \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \to \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha)+1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \end{aligned}$$

De la primera hipótesis deducimos que $v(\alpha)v(\beta) = v(\alpha)$, y por tanto de la segunda hipótesis deducimos que $v(\beta) = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

Observación. Sean A, B dos conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función. Entonces, definimos la aplicación f_* por:

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathcal{A} & \longrightarrow & B \\ & C & \longmapsto & \{f(x) \mid x \in C\} \end{array}$$

Notemos que, dado $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales, se tiene que $\Gamma \vDash \alpha$ si y sólo si, para toda valoración v, se tiene que $v(\alpha) = 1$ siempre que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$.

Proposición 1.1. *Dada una fórmula α, demostrar que α es una tautología si y sólo si $\vDash \alpha$.*

Demostración. Tenemos que notar $\vDash \alpha$ es equivalente a notar $\emptyset \vDash \alpha$. Dada una valoración v, tenemos que $v_*(\emptyset) = \emptyset \subset \{1\}$.

Por tanto, sabemos que que $\vDash \alpha$ si y sólo si para toda asignación se tiene que $v(\alpha) = 1$ y esto se da si y sólo si α es una tautología. □

Proposición 1.2. *Veamos algunos resultados sobre conjuntos satisfacibles.*

1. *El conjunto $\emptyset$ es satisfacible.*

2. *Existen conjuntos insatisfacibles.*

3. *Si Δ es insatisfacible y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces Γ es insatisfacible.*

4. *$\{\alpha, \alpha \to \neg\alpha\}$ es insatisfacible.*

Demostración.

1. Razonamos por vacuidad. Dado una fórmula a_0, sea $v = \chi_{\{a_0\}}$.

   Si $\emptyset$ fuese insatisfacible, existería $\varphi_v \in \emptyset$ tal que $v(\varphi_v) = 0$, lo cual es absurdo.

2. Sea el conjunto $\{a, \neg a\}$. Sea v tal que $v(a) = 1$. Entonces $v(\neg a) = v(a)+1 = 0$, por lo que dicho junto no es satisfacible.

3. Como Δ es insatisfacible, entonces para toda valoraicón v se tiene que existe $\varphi_v \in \Delta \subset \Gamma$ tal que $v(\varphi_v) = 0$, por lo que Γ es insatisfacible.

4. Sea v tal que $v(\alpha) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} v(\alpha \to \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 1 \cdot 0 + 1 + 1 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Si $\{\alpha, \alpha \to \neg\alpha\}$ fuera satisfacible, debería ser $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha \to \neg\alpha) = 1$, pero si $v(\alpha) = 1$, entonces $v(\alpha \to \neg\alpha) = 0$.

□

Proposición 1.3. *Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces,*

$$\text{Con}(\Gamma) = \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$$

Demostración. Demostramos por doble inclusión:

$\subset$) Como $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma)$, entonces $\text{Con}(\Gamma) \subset \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$.

$\supset$) Dado $\alpha \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$, entonces por definición $\text{Con}(\Gamma) \vDash \alpha$.

Para ver que $\alpha \in \text{Con}(\Gamma)$, basta ver que $\Gamma \vDash \alpha$. Sea v una valoración con $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Por tanto, $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$, y por tanto $v(\alpha) = 1$, por lo que $\Gamma \vDash \alpha$.

□

Ejercicio 1.3.2. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demostrar que si $\Gamma \vDash \alpha$ y $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$, entonces $\Gamma \vDash \beta$. Es decir, si $\alpha, \alpha \to \beta \in \text{Con}(\Gamma)$, entonces $\beta \in \text{Con}(\Gamma)$.

Demostración. Demostremos en primer lugar que $\text{Con}(\Gamma) \vDash \beta$. Sea v una valoración tal que $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$. Entonces, tendremos que:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \to \beta)$$

Por la regla de *modus ponens*, como $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$, entonces $v(\beta) = 1$. Por tanto, $\text{Con}(\Gamma) \vDash \beta$. Deducimos entonces que $\beta \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma)) = \text{Con}(\Gamma)$, por lo que $\Gamma \vDash \beta$.

Este resultado se resume diciendo que Con(Γ) es cerrado por *modus ponens*. □

Proposición 1.4. *Para toda α, β fórmulas proposicionales, $\beta \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg\alpha\})$.*

Demostración. Sabemos que $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha,\ (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha$ son tautologías, por lo que:

$$(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha,\ (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha \in \mathrm{Con}(\emptyset)$$

Además, $\alpha \wedge \neg\alpha \ \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Como $\emptyset \subset \{\alpha \wedge \neg\alpha\}$, tenemos que:

$$\alpha \wedge \neg\alpha,\ (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha,\ (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Por la Regla de *modus ponens*, tenemos que $\alpha,\ \neg\alpha \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Además, tenemos que otra tautología es:

$$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta) \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Aplicando la Regla de *modus ponens* dos veces de forma consecutiva, primero llegamos a que $\not\alpha \to \beta \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$, y posteriormente llegamos a que se tiene que $\beta \in \mathrm{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$, que es lo que buscábamos demostrar.

□

Ejercicio 1.3.3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, se cumple

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) = \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$$

Demostración. La demostración es por doble inclusión.

$\subseteq$) Veamos en primer lugar que $\alpha, \alpha \to \alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Sabemos que $\alpha \to \alpha \vee \beta$ es una tautología, luego $\alpha \to \alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\emptyset)$. Como $\emptyset \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$, entonces $\mathrm{Con}(\emptyset) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$, y por tanto $\alpha \to \alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Por otro lado, $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$, y por tanto $\alpha \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Por tanto, como $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$ es cerrado por *modus ponens*, entonces tenemos que $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$. Como además $\Gamma \subset \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$, entonces:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)) = \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$$

Razonando de igual forma, tenemos que $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$, por lo que:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$$

$\supseteq$) Sea $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$, es decir:

$$\begin{gathered}\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma \\ \gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \beta) \Longrightarrow \Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma\end{gathered}$$

Tenemos que demostrar que $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$, es decir, que $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \models \gamma$. Demostremos antes el siguiente resultdado.

Sea v una asignación fija. Veamos que si $v(\alpha \vee \beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$. Por reducción al absurdo, supongamos que no, es decir, que $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$. Entonces:

$$1 = v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) = 0$$

Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$.

Sabiendo esto, veamos si $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$. Sea v una valoración tal que $v(\theta) = 1$ para todo $\theta \in \Gamma$ y $v(\alpha \vee \beta) = 1$. Por lo que acabamos de ver, $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$, supongamos $v(\alpha) = 1$ (el otro caso es idéntico). Entonces, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \gamma$, entonces $v(\gamma) = 1$, por lo que:

$$\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$$

Por tanto, $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$

□

Ejercicio. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, si $\Gamma \vDash \neg\alpha \to \beta$ y $\Gamma \vDash \alpha \to \psi$, entonces $\Gamma \vDash \neg\beta \to \psi$ y $\Gamma \vDash \neg\psi \to \beta$.

Demostración. Sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Entonces, por hipótesis, tenemos que:

$$v(\neg\alpha \to \beta) = 1 = v(\alpha \to \psi)$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \to \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \to \psi) \\ &= v(\alpha)v(\psi) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Veamos que es cierto lo dicho. Tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\neg\beta \to \psi) &= v(\neg\beta)v(\psi) + v(\neg\beta) + 1 \\ &= (v(\beta) + 1)v(\psi) + v(\beta) + 1 + 1 \\ &= v(\beta)v(\psi) + v(\psi) + v(\beta) \\ &= v(\beta \vee \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\neg\psi \to \beta) &= v(\neg\psi)v(\beta) + v(\neg\psi) + 1 \\ &= (v(\psi) + 1)v(\beta) + v(\psi) + 1 + 1 \\ &= v(\psi)v(\beta) + v(\beta) + v(\psi) \\ &= v(\psi \vee \beta) \end{aligned}$$

Por tanto, nuestro problema se reduce a demostrar que $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

- Si $v(\beta) = 1$, entonces $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

- Si $v(\beta) = 0$, entonces por la primera hipótesis tenemos que $v(\alpha) = 1$, y por la segunda hipótesis tenemos que $v(\psi) = 1$, por lo que $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

En cualquier caso, tenemos que $v(\alpha \vee \beta) = 1$, por lo que $\Gamma \vDash \neg\beta \to \psi$ y $\Gamma \vDash \neg\psi \to \beta$. □

Teorema 1.5 (de la Reducción)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *un conjunto de fórmulas proposicionales. Equivalen:*

1. $\Gamma, \alpha \vDash \beta$

2. $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$

Demostración. La demostración es mediante doble implicación.

$1 \Longrightarrow 2)$ Supongamos que $\Gamma, \alpha \vDash \beta$. Entonces, sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Caben dos posibilidades:

- $v(\alpha) = 0$. Entonces, $v(\alpha \to \beta) = 1$, por lo que $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$.
- $v(\alpha) = 1$. Entonces, por hipótesis tenemos que $v(\beta) = 1$, por lo que $v(\alpha \to \beta) = 1$, y por tanto $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$.

$2 \Longrightarrow 1)$ Tenemis que $\alpha \to \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma) \subset \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$. Como $\alpha \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$, entonces por la regla de *modus ponens* tenemos que $\beta \in \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$, es decir, $\Gamma, \alpha \vDash \beta$, que es lo que queríamos demostrar.

□

Teorema 1.6. *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, equivalen:*

1. $\Gamma \vDash \alpha$

2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es insatisfacible.*

Demostración. La demostración es mediante doble implicación.

$1 \Longrightarrow 2)$ Supongamos que $\Gamma \vDash \alpha$, y sea v una valoración fija pero arbitraria. Si $\exists \varphi \in \Gamma$ tal que $v(\varphi) = 0$, entonces ya tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible. En caso contrario, tenemos que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$, por lo que $v(\alpha) = 1$, y por tanto $v(\neg\alpha) = 0$, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

$2 \Longrightarrow 1)$ Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, y sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, entonces $v(\neg\alpha) = 0$, por lo que $v(\alpha) = 0$.

□

Observación. En numerosas ocasiones, estudiar la insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas es más sencillo que estudiar la validez de una fórmula (es decir, es más fácil estudiar el punto 2 que el punto 1 en el teorema anterior). Usaremos por tanto dicho resultado para demostrar la validez de una fórmula.

Ejemplo (Regla de la Cláusula Unit)**.** Veamos algunos ejemplos de la Regla 2 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea $\Sigma = \{a, a \vee b, \neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$ un conjunto de cláusulas.

   Tan solo cuenta con una cláusula unitaria, $\lambda = a$. Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

   $$\Sigma' = \{\neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$$

   Como $\Sigma' \neq \emptyset$, eliminamos ahora de cada cláusula de Σ' todas las ocurrencias de la cláusula unitaria $\lambda^c = \neg a$:

   $$\Sigma'' = \{b, b \vee c\}$$

   Por la regla 2, sabemos que Σ'' es insatisfacible si y solo si lo es Σ.

2. Sea $\Sigma = \{a, a \vee b, a \vee \neg c\}$ un conjunto de cláusulas.

   Tan solo cuenta con una cláusula unitaria, $\lambda = a$. Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

   $$\Sigma' = \emptyset$$

   Por tanto, por la regla 2, sabemos que Σ es satisfacible.

Ejemplo (Regla del Literal Puro)**.** Veamos algunos ejemplos de la Regla 3 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, b \vee \neg d\}$ un conjunto de cláusulas.

   Tenemos que $\lambda = \neg a$ es un literal puro en Σ, puesto que $\lambda^c = a$ no aparece en ninguna otra cláusula. Eliminamos todas las ampliaciones de λ, y obtenemos:

   $$\Sigma' = \{\neg b \vee c, b \vee \neg d\}$$

   Por la regla 3, sabemos que Σ' es insatisfacible si y solo si lo es Σ.

2. Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b, a \vee \vee b\}$ un conjunto de cláusulas.

   En este caso, no hay literales puros, por lo que no podemos aplicar la regla 3.

Ejemplo (Regla de Descomposición)**.** Veamos un ejemplo de la Regla 4 del Algoritmo de Davis y Putnam. Sea el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee d, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg d\}$$

Apliquemos las reglas vistas:

1. Σ no tiene cláusulas tautológicas.

2. Σ no tiene cláusulas unitarias.

3. Σ no tiene literales puros.

4. Considerando $\lambda = a$, podemos dividir las cláusulas como sigue:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{b \vee d, b \vee \neg d\} \\
\Sigma_1 &= \{\neg b \vee \neg c\} \cup \Omega = \{\neg b \vee \neg c, b \vee d, b \vee \neg d\} \\
\Sigma_2 &= \{b \vee c\} \cup \Omega = \{b \vee c, b \vee d, b \vee \neg d\}
\end{aligned}$$

Por la regla 4, sabemos que Σ es insatisfacible si y solo si lo son Σ_1 y Σ_2.

Ejercicio 1.3.4. Sean las siguientes fórmulas proposicionales:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (a \vee b) \to (c \vee d) \\
\gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg c \wedge (c \vee e)) \\
\gamma_3 &= a \to (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\
\varphi &= (d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg(a \vee \neg b))
\end{aligned}$$

Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$; y en caso de no serlo dé una asignación que lo evidencie.

Estudiaremos la satisfacibilidad del conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}$ mediante el Algoritmo de Davis y Putnam. Para hello, en primer lugar hemos de transformar las fórmulas a su forma normal conjuntiva.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (a \vee b) \to (c \vee d) \\
&= \neg(a \vee b) \vee (c \vee d) \\
&= (\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee d) \\
&= (\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg c \wedge (c \vee e)) \\
&= \neg(\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\
&= (\neg\neg a \vee \neg\neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\
&= (a \vee d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\
&= (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= a \to (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\
&= \neg a \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\
&= (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg\varphi &= \neg\left[(d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg(a \vee \neg b))\right] \\
&= \neg\left[\neg(d \to (b \vee a)) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))\right] \\
&= \neg\left[\neg(\neg d \vee b \vee a) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))\right] \\
&= (a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg(d \wedge \neg a \wedge b) \\
&= (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)
\end{aligned}$$

Queremos por tanto estudiar la satisfacibilidad del conjunto Σ_0:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}\\ &= \{(\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d),\\ &\qquad (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e),\\ &\qquad (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b),\\ &\qquad (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)\}\end{aligned}$$

Estudiar la satisfacibilidad de Σ_0 equivale a estudiar la satisfacibilidad de Σ:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&(\neg a \vee c \vee d), \quad (\neg b \vee c \vee d),\\ &(a \vee d \vee \neg c), \quad (a \vee d \vee c \vee e),\\ &(\neg a \vee \neg c), \quad (\neg a \vee \neg b), \quad (\neg a \vee \neg d \vee b),\\ &(a \vee b \vee \neg d), \quad (a \vee \neg b \vee \neg d)\}\\ = \{&\neg a \vee c \vee d,\\ &\neg b \vee c \vee d,\\ &a \vee d \vee \neg c,\\ &a \vee d \vee c \vee e,\\ &\neg a \vee \neg c,\\ &\neg a \vee \neg b,\\ &\neg a \vee \neg d \vee b,\\ &a \vee b \vee \neg d,\\ &a \vee \neg b \vee \neg d\}\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Algoritmo de Davis y Putnam para estudiar la satisfacibilidad de Σ, representado en la Figura 1.1. De ahí, deducimos que Σ es satisfacible, por lo que $\Sigma_0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}$ es satisfacible, y por tanto $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \not\models \varphi$. Deducimos que existe al menos una valoración v tal que $v(\gamma_1) = v(\gamma_2) = v(\gamma_3) = 1$ y; sin embargo, $v(\varphi) = 0$.

Como asignación que evidencie la satisfacibilidad de Σ, vale cualquier valoración v que cumpla las siguientes restricciones:

$$v(e) = v(\neg a) = v(\neg b) = v(\neg d) = v(\neg c) = 1$$

Ejercicio 1.3.5. Demuestre que la fórmula conocida como *Ley de Meredith* es una tautología:

$$[[((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha] \to \gamma] \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

Demostrar que es una tautología equivale a demostrar que:

$$\models [[((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha] \to \gamma] \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

Esto es equivalente, aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, a demostrar:

$$[((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha] \to \gamma,\ \gamma \to \varphi,\ \beta \models \varphi$$

Σ

$\boxed{\text{R3. } \lambda = e \text{ es un literal puro. } v(e) = 1}$

$\downarrow$

$\Sigma_1 = \{\neg a \vee c \vee d; \neg b \vee c \vee d; a \vee \neg c \vee d; \neg a \vee \neg c;$
$\neg a \vee \neg b; \neg a \vee b \vee \neg d; a \vee b \vee \neg d; a \vee \neg b \vee \neg d\}$

$\boxed{\text{R4. } \lambda = \neg a. \ v(\neg a) = 1}$

$\boxed{\lambda = \neg a}$

$\Sigma_{11} = \{c \vee d; \neg b \vee c \vee d; \neg c; \neg b; b \vee \neg d\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg c}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{11} = \{c \vee d; \neg b \vee c \vee d; \neg b; b \vee \neg d\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{111} = \{d; \neg b \vee d; \neg b; b \vee \neg d\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = d}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{111} = \{\neg b; b \vee \neg d\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{1111} = \{\neg b; b\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg b}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{1111} = \{b\} = \{b \vee \square\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{11111} = \{\square\}$

$\boxed{\lambda^c = a}$

$\Sigma_{12} = \{\neg b \vee c \vee d; \neg c \vee d; b \vee \neg d; \neg b \vee \neg d\}$

$\boxed{\text{R4. } \lambda = \neg b. \ v(\neg b) = 1}$

$\boxed{\lambda = \neg b}$

$\Sigma_{121} = \{c \vee d; \neg c \vee d; \neg d\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg d}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{121} = \{c \vee d; \neg c \vee d\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{1211} = \{c; \neg c\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = c}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{1211} = \{\neg c\} = \{\neg c \vee \square\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{12111} = \{\square\}$

$\boxed{\lambda^c = b}$

$\Sigma_{122} = \{\neg c \vee d; \neg d\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg d. \ v(\neg d) = 1}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{122} = \{\neg c \vee d\} \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\Sigma_{1222} = \{\neg c\}$

$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg c. \ v(\neg c) = 1}$

$\downarrow$

$\Sigma'_{1222} = \emptyset$

Figura 1.1: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.4.

Busquemos la forma normal conjuntiva de cada una de las fórmulas:

$$\begin{aligned}
[((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha] \to \gamma &= \neg\,[((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha] \vee \gamma \\
&= \neg\,[\neg\,((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
&= \neg\,[\neg\,(\neg(\varphi \to \psi) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
&= \neg\,[\neg\,(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
&= \neg\,[((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha] \vee \gamma \\
&= [\neg\,((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
&= [(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
&= [((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
&= [(\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vee \gamma \\
&= (\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)
\end{aligned}$$

$$\gamma \to \varphi = \neg\gamma \vee \varphi$$

Sean por tanto las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\
\varphi_1 &= \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\
\varphi_2 &= \neg\alpha \vee \gamma \\
\varphi_3 &= \neg\gamma \vee \varphi \\
\varphi_4 &= \beta
\end{aligned}$$

Notando $\Sigma_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, el problema equivale a demostrar que $\Sigma_0 \vDash \varphi$.

Opción 1. Usando la Regla de Resolución.

$$\begin{array}{ll}
\Sigma_0 \vDash \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma & \varphi_0 \in \Sigma_0 \\
\Sigma_0 \vDash \beta & \varphi_4 \in \Sigma_0 \\
\Sigma_0 \vDash \varphi \vee \alpha \vee \vee\gamma & \text{Regla de Resolución} \\
\Sigma_0 \vDash \neg\alpha \vee \gamma & \varphi_2 \in \Sigma_0 \\
\Sigma_0 \vDash \varphi \vee \gamma \vee \gamma & \text{Regla de Resolución} \\
\Sigma_0 \vDash \varphi \vee \gamma & \gamma \vee \gamma = \gamma \\
\Sigma_0 \vDash \neg\gamma \vee \varphi & \varphi_3 \in \Sigma_0 \\
\Sigma_0 \vDash \varphi \vee \varphi & \text{Regla de Resolución} \\
\Sigma_0 \vDash \varphi & \varphi \vee \varphi = \varphi
\end{array}$$

Además, φ_1 no se ha empleado en este proceso, por lo que $\Sigma_0 \setminus \{\varphi_1\} \vDash \varphi$.

Opción 2. Usando el Algoritmo de Davis y Putnam.

Buscamos demostrar la insatisfacibilidad de Σ, donde:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \neg\varphi\} \\
&= \{\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \neg\alpha \vee \gamma, \neg\gamma \vee \varphi, \beta, \neg\varphi\}
\end{aligned}$$

Por el Algoritmo de D&P de la Figura 1.2, tenemos $\square \in \Sigma_{1111}$, por lo que Σ_{1111} es insatisfacible y, por tanto Σ también, por lo que $\Sigma_0 \vDash \varphi$. Además, $\neg\psi \in \Sigma_{1111}$, lo que pone de nuevo de manifiesto que $\Sigma_0 \setminus \{\varphi_1\} \vDash \varphi$.

$$\Sigma = \{\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma; \neg\gamma \vee \varphi; \beta; \neg\varphi\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \beta}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma' = \{\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma; \neg\gamma \vee \varphi; \neg\varphi\} \neq \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_1 = \{\varphi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma; \neg\gamma \vee \varphi; \neg\varphi\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\varphi}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_1' = \{\varphi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma; \neg\gamma \vee \varphi\} \neq \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_{11} = \{\alpha \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma; \neg\gamma\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\gamma}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_{11}' = \{\alpha \vee \gamma; \neg\psi \vee \alpha \vee \gamma; \neg\alpha \vee \gamma\} \neq \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_{111} = \{\alpha; \neg\psi \vee \alpha; \neg\alpha\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = \neg\alpha}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_{111}' = \{\alpha; \neg\psi \vee \alpha\} \neq \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma_{1111} = \{\square; \neg\psi\}$$

Figura 1.2: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.5.

Ejercicio 1.3.6. Sean α, β, γ fórmulas proposicionales. Clasifique la siguiente fórmula en función del carácter de sus subfórmulas:

$$\varphi \equiv (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha))$$

Encontremos la forma normal conjuntiva de φ:

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha)) \\
&= \neg(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \lor ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha)) \\
&= \neg(\neg\alpha \lor (\beta \to \gamma)) \lor (\neg(\alpha \to \beta) \lor (\gamma \to \alpha)) \\
&= \neg(\neg\alpha \lor (\neg\beta \lor \gamma)) \lor (\neg(\neg\alpha \lor \beta) \lor (\neg\gamma \lor \alpha)) \\
&= (\alpha \land \beta \land \neg\gamma) \lor (\alpha \land \neg\beta) \lor (\neg\gamma \lor \alpha) \\
&= (\alpha \land \beta \land \neg\gamma) \lor ((\alpha \lor \neg\gamma) \land (\neg\beta \lor \neg\gamma \lor \alpha)) \\
&= ((\alpha \land \beta \land \neg\gamma) \lor (\alpha \lor \neg\gamma)) \land ((\alpha \land \beta \land \neg\gamma) \lor (\neg\beta \lor \neg\gamma \lor \alpha)) \\
&= (\alpha \lor \neg\gamma) \land (\beta \lor \alpha \lor \neg\gamma) \land \cancel{(\alpha \lor \neg\gamma)} \land \\
&\qquad \land (\neg\beta \lor \neg\gamma \lor \alpha) \land \cancel{(\beta \lor \neg\beta \lor \alpha \lor \neg\gamma)} \land \cancel{(\alpha \lor \neg\beta \lor \neg\gamma)} \\
&= (\alpha \lor \neg\gamma) \land (\beta \lor \alpha \lor \neg\gamma) \land (\neg\beta \lor \neg\gamma \lor \alpha) \\
&= (\alpha \lor \neg\gamma) \land [(\beta \land \neg\beta) \lor (\alpha \lor \neg\gamma)] \\
&= \alpha \lor \neg\gamma \\
&= \gamma \to \alpha
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

- $\models \varphi$ si y solo si $\models \gamma \to \alpha$, y esto es si y solo si $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible.
- $\models \neg\varphi$ si y solo si $\{\alpha \lor \neg\gamma\}$ es insatisfacible, y esto es si y solo si α es una contradicción y γ es una tautología.

Tenemos entonces la siguiente discusión de casos:

- γ es una tautología: En este caso $\varphi = \alpha$, por lo que:
  1. α es una contradicción $\Longrightarrow \varphi$ es una contradicción.
  2. α es una tautología $\Longrightarrow \varphi$ es una tautología.
  3. α es una contingencia $\Longrightarrow \varphi$ es una contingencia.
- γ es una contradicción:

  Entonces $\{\neg\gamma\}$ es insatisfacible, y por tanto $\models \varphi$. φ es una tautología.
- γ es una contingencia. Sea v una valoración fija pero arbitraria.
  1. Si $v(\gamma) = 0$, entonces $v(\varphi) = 1$, por lo que φ es satisfacible.
  2. Si $v(\gamma) = 1$, entonces $v(\varphi) = v(\alpha)$, por lo que se puede dar que $v(\varphi) = 0$ y φ es refutable.

  Por tanto, φ es una contingencia.

Ejercicio 1.3.7. Sean $\{a, b, c, d\}$ fórmulas proposicionales. Decida si:

$$(\neg a \to b) \wedge (c \to d), a \to c, (\neg b \wedge \neg c) \to d, b \to a, (d \wedge \neg c) \to a, a \to d \vDash a \wedge c \wedge d$$

En primer lugar, de la hipótesis $(\neg a \to b) \wedge (c \to d)$ consideraremos as hipótesis $\neg a \to b$ y $c \to d$; obteniendo un problema equivalente. Obtenemos la forma normal conjuntiva de cada una de las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\neg a \to b &= a \vee b \\
c \to d &= \neg c \vee d \\
a \to c &= \neg a \vee c \\
(\neg b \wedge \neg c) \to d &= b \vee c \vee d \\
b \to a &= \neg b \vee a \\
(d \wedge \neg c) \to a &= \neg d \vee c \vee a \\
a \to d &= \neg a \vee d \\
\neg(a \wedge c \wedge d) &= \neg a \vee \neg c \vee \neg d
\end{aligned}$$

Por tanto, sea Σ el conjunto de fórmulas:

$$\Sigma = \{a \vee b, \neg c \vee d, \neg a \vee c, b \vee c \vee d, \neg b \vee a, \neg d \vee c \vee a, \neg a \vee d, \neg a \vee \neg c \vee \neg d\}$$

Estudiar lo pedido equivale a estudiar la insatisfacibilidad de Σ, lo que haremos mediante el Algoritmo de Davis y Putnam. En la Figura 1.3 se muestra el proceso, donde se puede apreciar que Σ es insatisfacible, por lo que la implicación del enunciado es cierta.

Ejercicio 1.3.8. Llega un grupo de meteorólogos a la isla de los veraces y mentirosos, insteresados en saber si durante la jornada anterior estuvo lloviendo en la misma. Encuentran a tres indígenas que dicen llamarse Ana, Bruno y Carmen. Al ser preguntados por lo que interesa a los meteorólogos, las respuestas que dieron son las siguientes:

1. Ana: "Ayer no llovió aquí".
2. Bruno: "Ayer sí llovió aquí".
3. Carmen: "Si ayer llovió aquí, yo soy mentirosa".

Averigüe el carácter de cada uno de los indígenas y si llovió o no la jornada anterior en la isla. Constate que los meteorólogos habrían tenido éxito en su pesquisa hablando sólo con Carmen.

Abreviamos con:

- a: La frase "Ana es veraz".
- b: La frase "Bruno es veraz".
- c: La frase "Carmen es veraz".

$$\Sigma=\{a \vee b; \neg c \vee d; \neg a \vee c; b \vee c \vee d; \neg b \vee a; \neg d \vee c \vee a; \neg a \vee d; \neg a \vee \neg c \vee \neg d\}$$

$$\boxed{\text{R4. } \lambda = a}$$

$$\boxed{\lambda = a}$$

$$\Sigma_1=\{b; \neg c \vee d; b \vee c \vee d; \neg b; \neg d \vee c\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = b}$$

$$\Sigma_1'=\{\neg c \vee d; \neg b; \neg d \vee c\} \neq \emptyset$$

$$\Sigma_{11}=\{\neg c \vee d; \square; \neg d \vee c\}$$

$$\boxed{\lambda^c = \neg a}$$

$$\Sigma_2=\{\neg c \vee d; c; b \vee c \vee d; d; \neg c \vee \neg d\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = c}$$

$$.\Sigma_2'=\{\neg c \vee d; d; \neg c \vee \neg d\}$$

$$\Sigma_{21}=\{d; \neg d\}$$

$$\boxed{\text{R2. } \lambda = d}$$

$$\Sigma_{21}'=\{\neg d\} = \{\neg d \vee \square\} \neq \emptyset$$

$$\Sigma_{211}=\{\square\}$$

Figura 1.3: Algoritmo de Davis y Putman del Ejercicio 1.3.7.

- d: La frase "En la isla llovió el día anterior".

Sea v una valoración fija pero arbitraria. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= v(a) + v(\neg d) = v(a) + v(d) + 1 \\
0 &= v(b) + v(d) \\
0 &= v(c) + v(d \to \neg c) = v(c) + v(d)v(\neg c) + v(d) + 1 \\
&= v(c) + v(d)(v(c) + 1) + v(d) + 1 = v(c) + v(d)v(c) + 2v(d) + 1 \\
&= v(c) + v(d)v(c) + 1 = v(c)[v(d) + 1]
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} v(a) + v(d) = 1 \\ v(b) + v(d) = 0 \\ v(c)[v(d) + 1] = 1 \end{cases}$$

Como $v(c)[v(d)+1] = 1$, tenemos que $v(c) = 1$ y $v(d) = 0$. Por tanto, $v(a) = 1$ y $v(b) = 0$; es decir:

$$v(a) = v(c) = 1, \ v(b) = v(d) = 0$$

Por tanto, Ana y Carmen son veraces, y Bruno es mentiroso. Ayer no llovió en la isla.

Ejercicio 1.3.9. En otro extraño incidente, cuando Eloísa llegó a una isla buscando a Pedro, se encontró con cinco nativos: A, B, C, D y E, quienes adivinaron su propósito. Formularon los siguientes enunciados:

- A: Pedro está en esta isla.
- B: Pedro no está en esta isla.
- C: Pedro estuvo aquí ayer.
- D: Pedro no está aquí hoy y no estuvo aquí ayer.
- E: O D es un mentiroso o C es veraz.

Eloísa meditó durante un rato, pero no logró obtener una respuesta. "¿Podría alguno de ustedes añadir algo más, por favor?" suplicó Eloísa. En ese momento A dijo: "O E es mentiroso o C es veraz.". Ahora sí que Eloísa pudo saber si Pedro estaba o no en la isla. Y usted, ¿podría decir si está o no está?

Sean las abreviaturas siguientes:

- a: La frase "A es veraz".
- b: La frase "B es veraz".
- c: La frase "C es veraz".
- d: La frase "D es veraz".

- e: La frase "E es veraz".
- p: La frase "Pedro está en la isla".
- q: La frase "Pedro estuvo en la isla ayer".

Sea v una valoración fija pero arbitraria. Entonces, por los datos del enunciado, sabemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= v(a) + v(p)\\
0 &= v(b) + v(\neg p) = v(b) + v(p) + 1\\
0 &= v(c) + v(q)\\
0 &= v(d) + v(\neg p \wedge \neg q) = v(d) + v(\neg p)(\neg q) = v(d) + (v(p)+1)(v(q)+1) =\\
&\qquad = v(d) + v(p)v(q) + v(p) + v(q) + 1\\
0 &= v(e) + v(\neg d \vee c) = v(e) + v(\neg d)v(c) + v(\neg d) + v(c) =\\
&\qquad = v(e) + (v(d)+1)v(c) + v(d) + 1 + v(c) = v(e) + v(d)v(c) + v(d) + 1\\
0 &= v(a) + v(\neg e \vee c) = v(a) + v(\neg e)v(c) + v(\neg e) + v(c) =\\
&\qquad = v(a) + (v(e)+1)v(c) + v(e) + 1 + v(c) = v(a) + v(e)v(c) + v(e) + 1
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{aligned}
v(a) + v(p) &= 0\\
v(b) + v(p) &= 1\\
v(c) + v(q) &= 0\\
v(d) + v(p)v(q) + v(p) + v(q) &= 1\\
v(e) + v(d)v(c) + v(d) &= 1\\
v(a) + v(e)v(c) + v(e) &= 1
\end{aligned}\right.$$

Sabemos que $v(a) = v(p)$ y $v(c) = v(q)$. Por tanto, de la 4ª ecuación obtenemos que:

$$v(d) = v(p)v(q) + v(p) + v(q) + 1 = v(a)v(c) + v(a) + v(c) + 1$$

De la 5ª ecuación obtenemos que:

$$\begin{aligned}
v(e) + v(d) + 1 &= v(d)v(c)\\
&= (v(a)v(c) + v(a) + v(c) + 1)v(c)\\
&= \cancel{v(a)v(c)^2} + \cancel{v(a)v(c)} + \cancel{v(c)^2} + \cancel{v(c)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos:

$$v(d)v(c) = 0 \qquad v(d) = v(e) + 1$$

Usando la 5ª eacuación, tenemos que:

$$v(d) = v(e) + 1 = v(d)v(c) + v(d) = v(d)(v(c)+1)$$

Como $v(d)v(c) = 0$, entonces $v(d) = 0$ o $v(c) = 0$. Veamos que $v(d) = 0$ por reducción al absurdo:

- Si $v(d) = 1$, entonces por la última igualdad obtenida tendríamos $1 = v(c)+1$, por lo que $v(c) = 0 = v(q)$. De la 4ª ecuación, obtendríamos que $v(p) = 0 = v(a)$, lo que contradice la 1ª ecuación. Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned} 0 &= v(a) + v(e)v(c) \\ &\overset{6^{o}}{=} v(e) + 1 \\ &= v(d) \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Por tanto, llegamos a un absurdo, por lo que $v(d) = 0$.

Como $v(d) = 0$, entonces $v(e) = 1$. De la última ecuación, deducimos que $v(a) = v(c)$. De la 4ª ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + v(p)v(q) + v(p) + v(q) \\ &= v(a)v(c) + v(a) + v(c) \\ &= v(a)^2 + v(a) + v(a) \\ &= v(a) \end{aligned}$$

Por tanto, $v(a) = 1 = v(c) = v(p) = v(q)$, y entonces $v(b) = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$v(a) = v(c) = v(e) = v(p) = v(q) = 1, \qquad v(b) = v(d) = 0$$

Por tanto, tenemos que Pedro está en la isla y estuvo en la isla ayer. Todos excepto B y D son veraces.

1.4. Álgebra de Boole

Ejercicio 1.4.1. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Demuestra que, para todo $a, b, c \in B$ son equivalentes:

1. $a + b = a + c$ y $ab = ac$.
2. $b = c$.

Demostración. Demostramos mediante una doble implicación.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $a + b = a + c$ y $ab = ac$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} b &= b + 0 \\ &= b + (a\overline{a}) \\ &= (b + a) \cdot (b + \overline{a}) \\ &= (a + c) \cdot (\overline{a} + b) \\ &= (a + c)\overline{a} + (a + c)b \\ &= a\overline{a} + c\overline{a} + ab + cb \\ &= 0 + c\overline{a} + ac + cb \\ &= c\overline{a} + c(a + b) \\ &= c(\overline{a} + a + b) \\ &= c(1 + b) \\ &= c \cdot 1 \\ &= c. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Como $a = a$ y $b = c$, entonces $a + b = a + c$ y $ab = ac$.

□

Ejercicio 1.4.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{D}(m)$ y $\mathbf{D}(n)$ son álgebras de Boole. Demuestra que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $\mathbf{D}(m) \times \mathbf{D}(n)$ es isomorfa a $\mathbf{D}(mn)$.
2. $\text{mcd}(m, n) = 1$.

Demostración. Demostramos mediante una doble implicación.

$\Longrightarrow$) Como $m, n, mn \in \mathbb{N}$, tenemos que $D(m), D(n), D(mn)$ son conjuntos finitos. Supongamos que $\mathbf{D}(m) \times \mathbf{D}(n)$ es isomorfa a $\mathbf{D}(mn)$. Entonces, tenemos que:

$\Longleftarrow$)

□

Ejercicio 1.4.3. Calcule el número natural n sabiendo que $\mathbf{D}(n)$ es un álgebra de Boole, que 42 y 66 son elementos de $\mathbf{D}(n)$ y que 42 es un coátomo. Encuentre todos los elementos de $\mathbf{D}(n)$ tal que $42 \cdot \overline{x} = 6$.

Como 42 es un coátomo, se tiene que:

$$42 + x = \text{mcm}(42, x) = \begin{cases} n \\ \text{ó} \\ 42 \end{cases} \qquad \text{para todo } x \in D(n)$$

Usemos $x = 66 \in D(n)$ para calcular n:

$$\left.\begin{aligned} 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 66 &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{mcm}(42, 66) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$$

Por tanto, deducimos que $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$.

Buscamos ahora los elementos $x \in D(n)$ tales que cumplen:

$$6 = 42 \cdot \overline{x} = 42 \cdot \frac{n}{x} = \text{mcd}\left(42, \frac{n}{x}\right)$$

Busquemos en primer lugar los valores $y \in \mathbb{N}$ tales que:

$$6 = 3 \cdot 2 = \text{mcd}(42, y) = \text{mcd}(2 \cdot 3 \cdot 7, y) \Longrightarrow y = 3 \cdot 2 \cdot k$$

donde $k \in \mathbb{N}$ es 1 o un número primero distinto de 2, 3 y 7. Además, como $x \in D(n)$, sus factores primos tienen que ser factores primos también de n, por lo que $k = 1$ o $k = 11$. Es decir:

$$\begin{aligned} y = 3 \cdot 2 &\Longrightarrow x = \frac{n}{y} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 11 = 77 \\ y = 3 \cdot 2 \cdot 11 &\Longrightarrow x = \frac{n}{y} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 11} = 7 \end{aligned}$$

Por tanto, los elementos de $D(462)$ tales que $42 \cdot \overline{x} = 6$ son $x = 7$ y $x = 77$.