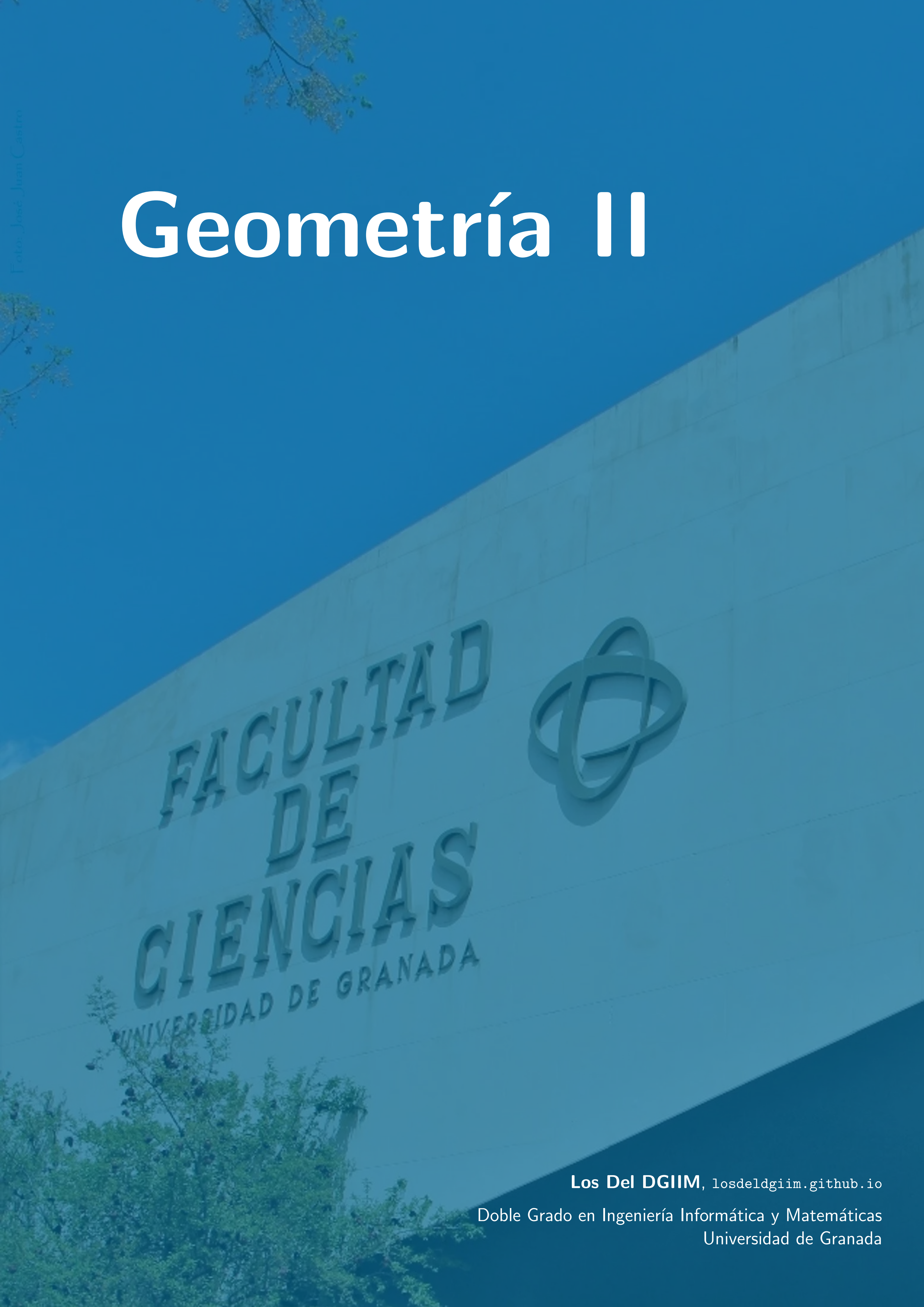


Foto: José Juan Castro

Geometría II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Índice general

1. Diagonalización de Endomorfismos

1.1. Introducción

1.1.1. Espacios Vectoriales

Notación. $V^n(\mathbb{K})$ representa el espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Ejemplo. Ejemplos de espacios vectoriales.

1. $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n\}$

2. $\mathbb{K}_n[x] = \{$polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y grado $\leqslant n\}$

3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) =$ Matrices cuadradas de orden n y coeficientes en $\mathbb{K}$.

Definición 1.1 (Bases)**.** La base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto "ordenado" t.q. $\forall v \in V,\ v$ es una combinación lineal de los e_i.

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

donde los escalares x_i son únicos. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$.

Ejemplo. Ejemplos de bases.

1. $\mathcal{B}$. $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots$

2. Para $n = 2$, $P(x) = a + bx + cx^2$. $\quad \mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$
   Coordenadas de $P \equiv (a, b, c)$

3. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

   $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 1.1 (Cambio de base)**.** *Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}\}$ otra base. Sean $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix}$ otras coordenadas.*

$$x = P\bar{x} \qquad \bar{x} = P^{-1}x$$

siendo P la matriz de cambio de base. Sus columna son las coordenadas de $\bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}$ respecto de $\mathcal{B}$. P es regular y tiene n filas y n columnas.

Ejemplo. Ejemplo de cálculo de matriz de cambio de base en el e.v. $\mathbb{K}_2[x]$.
Sea $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ una base. Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{1, x-2, (x-2)^2\}$ otra base.

$$P_1(x) = 1 \quad P_2(x) = x - 2 \quad P_3(x) = 4 - 4x + x^2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.2. Sea $f : V^n(\mathbb{K}) \to W^m(\mathbb{K})$. f es una aplicación lineal si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(du) = df(u)$

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ aplicación dada por $f(P) = P(1)x + P(-1)(x-1)^2$.

1. Estudiar si f es lineal.
2. Calcular $A = M(f; \mathcal{B}_u, \mathcal{B}_u)$[1]

1.2. Valores y vectores propios

Definición 1.3 (Endomorfismo)**.** Sea $V^n(\mathbb{K})$ y sea $\mathcal{B}$ una base. Un endomorfismo es una aplicación lineal $f : V \to V$.

Definición 1.4 (Núcleo de un endomorfismo)**.**

$$Ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$$

Definición 1.5 (Imagen de un endomorfismo)**.**

$$Im(f) = \{f(v) | v \in V\}$$

Teorema 1.2.

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(Ker(f)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

Definición 1.6. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son semejantes ($A \sim B$) si A y B representan el mismo endomorfismo pero en bases distintas. Equivalentemente,

$$A \sim B \iff \exists P \text{ regular t.q. } B = P^{-1}AP$$

[1]La primera base es referida al espacio de salida, y la segunda al espacio de llegada.

Observación. $\sim$ es una relación de equivalencia

Lema 1.3.

$$A \sim B \Longrightarrow \begin{cases} rg(A) = rg(B) \\ det(A) = det(B) \\ tr(A) = tr(B) \end{cases}$$

Ejemplo. Ejemplos de matrices semejantes.

1. La aplicación identidad

$$\begin{aligned} Id:\ V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

   Si $a \in \mathbb{K} \Longrightarrow aI$ solo es semejante a ella misma.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Son semejantes?

   - $AA = A \Longrightarrow f \circ f = f$
   - $BB = B \Longrightarrow f \circ f = f_0$

   Por tanto, $f = f_0$. Pero $Im(f_0) = 0$, y $rg(A) = rg(B) = 1 = Dim(f)$. Por tanto, llegamos a una contradicción y vemos que $A \nsim B$.

Definición 1.7 (Polinomio característico)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y sea $P_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ definido como:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

$P_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ es un polinomio en la indeterminada λ, con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado n.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \dots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}[a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}]\lambda^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \dots + det(A) \end{aligned}$$

Definición 1.8 (Valores propios)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Los valores propios de A son las raíces de $P_A(\lambda)$ y hay como máximo n raíces.

Observación. Si la matriz es triangular, los valores propios son los elementos de la diagonal principal.

Proposición 1.4. *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \sim B \Longrightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= det(B - \lambda I) = det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= det(P^{-1}[A - \lambda I]P) = det(A - \lambda I) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

□

Ejercicio. Demostrar lo siguiente:

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \not\Rightarrow A \sim B$$

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Calculamos en primer lugar el polinomio caracterísico de A.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \end{aligned}$$

Para demostrar lo pedido, se busca un contraejemplo. Sean Las matrices $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de ambas es:

$$P_B(\lambda) = P_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

No obstante, B y C no son semejantes, ya que la primera representa la aplicación Identidad mientras que la segunda no. Por tanto, representan distintos endomorfismos. □

Teorema 1.5. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f \in End(V)$. Tenemos que la aplicación*

$$\begin{aligned} End(V) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M(f, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Proposición 1.6. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$$A \sim B \Longleftrightarrow \textit{Representan el mismo } f$$

Definición 1.9. El polinomio característico de un endomorfismo $f \in End(V)$ que tiene como matriz asociada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se define como:

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= P_A(\lambda) \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(f)\lambda^{n-1} + \cdots + det(f) \end{aligned}$$

Observación. Como recuerdo, $|f| = 0 \iff \ker(f) \neq \{0\} \iff \nexists f^{-1}$

Ejemplo. Sean $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Son semejantes?

- Opción 1 $PB = AP$, buscar el valor de P y comprobar que es regular.
- Opción 2 Usando las propiedades de las matrices semejantes.

	A_1	A_2	A_3			
$tr(A)$	2	2	7	$A_1 \nsim A_3$	$\wedge$	$A_2 \nsim A_3$
$det(A)$	0	-6	$\times$	$A_1 \nsim A_2$		
$P_A(\lambda)$	$\times$	$\times$	$\times$			

Tabla 1.1: Resolución del ejemplo usando la opción 2

Definición 1.10 (Multiplicidad algebraica)**.** Sea el polinomio $P(\lambda)$ y sea λ_0 una raíz de $P(\lambda)$. Se define la multiplicidad algebraica de λ_0 como:

$$\text{máx}\{k \in \mathbb{N} \mid (\lambda - \lambda_0)^k \text{ divide a } P(\lambda)\}$$

Teorema 1.7 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio $P(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y de grado n tiene exactamente n raíces complejas contadas con multiplicidad algebraica.*

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ las raíces complejas y sean $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sus multiplicidades. Entonces, el polinomio factoriza como:

$$P(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

siendo $a \in \mathbb{C}$ el coeficiente líder del polinomio. Además,

$$grd(P) = n = m_1 + \dots + m_k$$

Teorema 1.8. *Sea $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ un polinomio real con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado n. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ las raíces reales y sean $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sus multiplicidades algebraicas. Entonces, el polinomio factoriza como:*

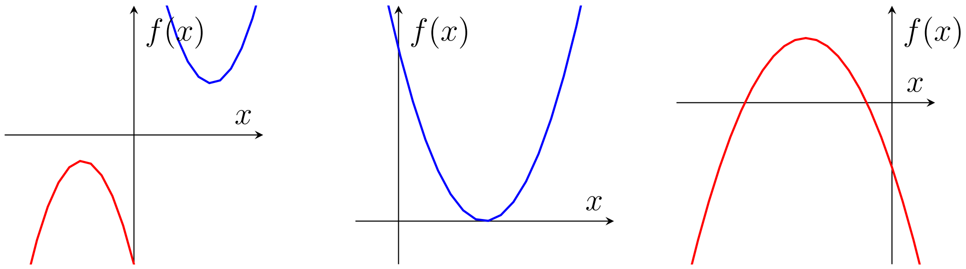
$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \cdot Q(\lambda)$$

siendo $Q(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ un polinomio real sin raíces reales. Además,

$$grd(P) = n \geqslant m_1 + \dots + m_k$$

Ejemplo. Ejemplos de polinomios reales con distinto número de raíces.

- $\underline{grd(P(\lambda) = 2)}$ $\quad P(\lambda) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$



(a) Sin raíces (b) Una raíz (c) Dos raíces

Figura 1.1: Ejemplos de las raíces de un polinomio de grado 2

- $\underline{grd(P(\lambda)\ \text{par})}$ $\quad$ Puede tener o no raíces reales.

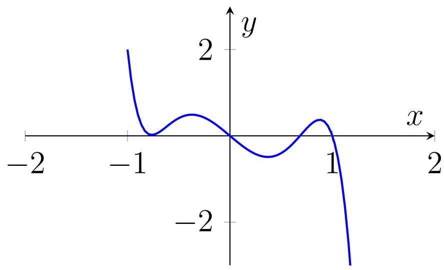


Figura 1.2: Ejemplos de las raíces de un polinomio de grado par.

- $\underline{grd(P(\lambda)\ \text{impar})}$ $\quad P(\lambda)$ tiene, al menos, una raíz real[2]. Dependerá del polinomio.

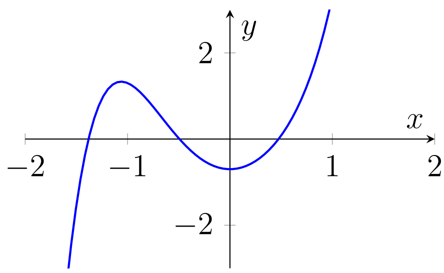


Figura 1.3: Ejemplos de las raíces de un polinomio de grado impar.

Ejercicio. Sean $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \sim B \quad \wedge \quad C \sim D$. Demostrar la falsedad de:

1. $\not\Rightarrow (A + C) \sim (B + D)$
2. $\not\Rightarrow AC \sim BD$

[2]Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$, y sus límites en $\pm\infty$ tienen valores consignos opuestos. Por tanto, por el Teorema de Bolzano, tendrá al menos una raíz real.

Sean los valores de A, B, C, D las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \sim B$, ya que $PB = AP$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$C \sim D$, ya que $QD = CQ$, con $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Los valores de $A + c$ y $B + D$ son:

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B + D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como se ve, $(A + c) \nsim (B + D)$, pues $-7 = |A + C| \neq |B + D| = 5$. □

2. Los valores de Ac y BD son:

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad BD = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, $AC \nsim BD$, ya que $4 = tr(AC) \neq tr(BD) = -8$. □

Definición 1.11. Sea $f \in End(V)$. Los valores propios de un endomorfismo f son las raíces de su polinomio característico.

Proposición 1.9. *Todo endormorfismo $f \in End(V)$ con dimensión de V impar tendrá al menos un valor propio real.*

Demostración. Tenemos que su polinomio de característico es de grado 3, y por el Teorema Fundamental del Álgebra tiene al menos una raíz real. □

Definición 1.12. Sea $\lambda_0 \in \mathbb{K} - \{0\}$. EL subespacio propio asociado a λ_0 se define como:

$$V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda_0 v\}$$

Los elementos $v \in V_{\lambda_0}$ se denominan *vectores propios*.

Proposición 1.10. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ *es un valor propio* $\Longleftrightarrow \exists v \in V - \{0\} \mid f(v) = \lambda_0 v$

Demostración. Sea $\lambda_0 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\exists v \in V - \{0\} \mid f(v) = \lambda_0 v &\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n - \{0\} \mid Ax = \lambda_0 x \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n - \{0\} \mid (A - \lambda_0 I)x = 0 \\
&\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} |A - \lambda_0 I| = 0 \\
&\Longleftrightarrow P_A(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow P_f(\lambda_0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda_0 \text{ es una raíz del polinomio característico de } f \text{ o } A \\
&\Longleftrightarrow \lambda_0 \text{ es un valor propio.}
\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ se ha aplicado que si fuese $|A - \lambda_0 I| \neq 0$, entonces el endomorfismo con matriz asociada $A - \lambda_0 I$ sería biyectivo, por lo que x sería 0.

□

Observación. 0 es un valor propio $\iff \ker(f) \neq \{0\}$

Definición 1.13 (Multiplicidad geométrica)**.** Se define la multiplicidad geométrica de λ_0 como la dimensión de V_{λ_0}.

Como consecuencia de dichas definiciones, se cumplen las siguientes propiedades:

- λ_0, λ_1 valores propios distintos $\Longrightarrow V_{\lambda_0} \cap V_{\lambda_1} = \{0\}$
- Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ son bases de $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n} \Longrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ es lin. independiente.
- Sea λ_0 un valor propio y se considera su multiplicidad algebraica m y su multiplicidad geométrica $dimV_{\lambda_0}$. Se cumple:

$$1 \leqslant m,\ dimV_{\lambda_0} \leqslant n$$

Lema 1.11. *Sea λ_0 un valor propio del endomorfismo f. Se cumple:*

$$\textit{Multiplicidad geométrica} \ \leqslant\ \textit{Multiplicidad algebraica}$$

Demostración. Sea $n_0 = dimV_{\lambda_0}$ la multiplicidad geométrica. Sea m_0 la multiplicidad algebraica. Se pide demostrar que $n_0 \leqslant m_0$.

Sea $\mathcal{B}_{\lambda_0} = \{e_1, \dots, e_{n_0}\}$ base de V_{λ_0}. Ampliamos dicha base a $\mathcal{B}$ base de V, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n_0}, e_{n_0+1}, \dots, e_n\}$. Debido a la elección de las bases, obtenemos que

$$A = M(f; \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 I_{n_0} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

El polinomio característico de f es, por tanto, el siguiente:

$$P_f(\lambda) = \left|\begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda) I_{n_0} & B \\ \hline 0 & C - \lambda I \end{array}\right| = (\lambda_0 - \lambda)^{n_0} Q(\lambda)$$

donde se han empleado propiedades de los determinantes de matrices por cajas[3]. Queda demostrado así que λ_0 divide al polinomio P_f al menos n_0 veces, aunque podría dividirlo más veces.

Se demuestra así que $n_0 \leqslant m_0$. □

1.3. Suma Directa

Definición 1.14. Sean $V_1^{n_1}, \dots, V_k^{n_k} \subset V^n$ subespacios vectoriales. Se define la suma de subespacios como:

$$V_1 + \dots + V_k = \{v_1 + \dots v_k \in V \mid v_i \in V_i\} \supset V_i$$

En el cao de que $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ sean bases de V_i,

$$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k \text{ es un sistema de generadores de la suma.}$$

[3] `http://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/determinante-por-cajas.pdf`
Propiedad de las matrices por cajas donde uno de los miembros es 0.

Proposición 1.12. *Sean* $V_1^{n_1}, \dots, V_k^{n_k} \subset V^n$ *subespacios vectoriales.*
$V_1 + \cdots + V_k$ *es el menor subespacio que contiene a los* V_i.

Proposición 1.13. *Sean* $V_1^{n_1}, \dots, V_k^{n_k} \subset V^n$ *subespacios vectoriales.*

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) \leqslant \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$$

Definición 1.15. Sean $V_1^{n_1}, \dots, V_k^{n_k} \subset V^n$ subespacios vectoriales. Decimos que $V_1 + \cdots + V_k$ es suma directa, y lo notamos como

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

si y solo si:

- $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ es base de la suma.
- $\dim(V_1 + \cdots + V_k) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$
- Si $v_i \in V_i \quad i = 1, \dots, n \mid v_1 + \cdots + v_k = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2 = \cdots = 0$

Teorema 1.14. *Si* $f \in End(V^n(\mathbb{K}))$ *con* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *valores propios distintos, entonces* $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ *es suma directa.*

Demostración. Se demuestra por inducción sobre k.

- Para $k = 1$ Es trivial.
- Para $k = 2$
  Sabemos que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\} \Longrightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ es suma directa de V_{λ_1} y V_{λ_1}.
- Supuesto cierto para $k-1$, comprobemos para k
  Sean $v_i \in V_{\lambda_i} \quad i = 1, \dots, k$ t.q.

  $$v_1 + \cdots + v_k = 0 \tag{1.1}$$

  Aplico f y obtengo

  $$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \tag{1.2}$$

  Multiplico la ecuación 1.1 por λ_1 y obtengo

  $$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_1 v_k = 0 \tag{1.3}$$

  Restando las ecuaciones 1.2 y 1.3,

  $$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_1) = 0$$

  Como los valores propios son distintos, $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0 \quad i = 2, \dots, k$. Usando la hipótesis de inducción, $v_2 = \cdots = v_k = 0 \Longrightarrow v_1 = 0$, quedando así también demostrado para k.

□

1.4. Diagonalización

Definición 1.16. Decimos que $f \in End(V)$ es diagonalizable si tiene una base de vectores propios.

Definición 1.17. Decimos que la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal.

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalizable} &\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \sim D \\ &\Longleftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ regular} \mid P^{-1}AP = D, \text{ con D diagonal.} \end{aligned}$$

Teorema 1.15 (Teorema fundamental de la diagonalización)**.** *Sea $f \in End(V(\mathbb{K}))$ un endomorfismo. Entonces son equivalentes:*

1. *f es diagonalizable*

2. *$P_f(\lambda)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contadas con multiplicidad algebraica y, además, la multiplicidad algebraica m_i coincide con la multiplicidad geométrica n_i $\forall i = 1, \dots, k$*

   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
   - $n_i = m_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

Demostración. Se hace mediante doble implicación:

1) $\Longrightarrow$ **2)** Como f es diagonalizable, $\exists \mathcal{B}$ base de V formada por vectores propios. Es decir, se obtiene $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$. Por tanto, $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, y por tanto,

$$\dim V = \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}) \Longrightarrow n = n_1 + \dots + n_k$$

Además, como $m_i \leqslant n_i \ \ \forall i \Longrightarrow n = n_1 + \dots + n_k \leqslant m_1 + \dots + m_k \leqslant n$. Por tanto, forzosamente:

$$n_i = m_i \ \ \forall i = 1, \dots, k \qquad m_1 + \dots + m_k = n$$

verificando por tanto las condiciones del enunciado.

2) $\Longrightarrow$ **1)** Queremos ver que hay una base $\mathcal{B}$ de V de vectores propios.

Tomamos $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ bases en $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$. Veamos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$.

Sabemos que $\mathcal{B}$ es una base de $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.

Usando las condiciones del teorema, $|\mathcal{B}| = n_1 + \dots + n_k = m_1 + \dots + m_k = n$. Por tanto, $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$, por lo que hay una base de vectores propios y f es diagonalizable.

□

Corolario 1.15.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $P_A(\lambda)$ tiene n raíces distintas ($m_i = 1 \ \forall i$) $\Longrightarrow$ A es diagonalizable.*

Ejemplo. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Estudiar si es o no diagonalizable y diagonalizarla cuando lo sea.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Obtenemos su polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) \\ &= \lambda^2 - \lambda + 2 \end{aligned}$$

   Como $\Delta = 1 - 8 < 0 \Longrightarrow$ No tiene raíces en $\mathbb{R}$. Por tanto, no hay valores propios ni vectores propios, por lo que NO es diagonalizable.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   Su polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, y sus valores propios son $\{1, 2\}$. Por el corolario del teorema fundamental de diagonalización, SÍ es diagonalizable.

   Para diagonalizarla, es necesario encontrar $D, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con P regular y D diagonal, t.q. $P^{-1}AP = D$.

   Calculamos en primer lugar los subespacios propios:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

   Por tanto, una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   Por tanto,

$$D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

[4] En la diagonal se colocan los valores propios.

[5] En las columnas se colocan los vectores de la base de vectores propios.

Su polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, y su valor propios es $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$.

Calculamos el subespacio propio:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, $n_1 = dimV_1 = 1$. Como $n_1 = 1 \neq 2 = m_1$, por el Teorema Fundamental de la Diagonalización, A NO es diagonalizable.

Ejemplo. Ejemlos de matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalizables o no con valor propio $a \in \mathbb{K}$ y multiplicidad algebráica $m_a = 2$.

- <u>Sí es diagonalizable</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- <u>No es diagonalizable</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$.

El subespacio propio es $V_a = \{x \in \mathbb{K}^2 \mid x_2 = 0\}$, por lo que la multiplicidad geométrica es $n_a = 1$, por lo que no es diagonalizable.

1.5. Teorema de Cayley-Hamilton

Es fácil ver que, al igual que trabajamos con $x \in \mathbb{R}$, se pueden evaluar polinomios en matrices, sabiendo que $A^0 = I$.

$$P(A) = a_m A^m + \ldots a_1 A + a_0 I$$

Al igual que, para $x \in \mathbb{R}$, tenemos los binomios notables, también se dan para matrices. Al igual que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$,

$$A^2 - I = (A + I)(A - I)$$

Lema 1.16. *Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ regular y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dada $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \sim B$,*

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

Demostración. Se demuestra por inducción.
Para $k = 2$,

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$$

□

Corolario 1.16.1.
$$p(P^{-1}AP) = P^{-1}p(A)P$$

Lema 1.17. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dada por:*
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$
con A_1, A_2 cuadradas. Se comprueba que:
$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} A_1^k & B_k \\ \hline 0 & A_2^k \end{array}\right)$$

Demostración. Se demuestra por inducción.
Para $k = 2$,
$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1^2 & B \\ \hline 0 & A_2^2 \end{array}\right)$$
□

Corolario 1.17.1.
$$p(A) = \left(\begin{array}{c|c} p(A_1) & C \\ \hline 0 & p(A_2) \end{array}\right)$$

Teorema 1.18 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
$$P_A(A) = 0$$

Demostración. Puedo suponer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ya que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Demostramos el teorema por inducción sobre n.

- Para $n = 1$:
  Sea $A = (a)$.Además, $I_1 = (1)$.
  $$P_A(A) = |A - AI| = det((a) - (a)) = det(0) = 0$$
- Supuesto cierto para $n - 1$, lo comprobamos para n:
  $\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}$ valor propio de A. Sea e_1 un vector propio. Amplío $\{e_1\}$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$. $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_k\}$.
  A es semejante a $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$. En adelante, denotamos $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, ya que demostrarlo para una matriz semejante es equivalente.
  $$P_A(\lambda) = det\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - \lambda & A_3 \\ \hline 0 & A_2 - \lambda I \end{array}\right) = (\lambda_1 - \lambda)det(A_2 - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)P_{A_2}(\lambda)$$
  Por tanto, evaluando en $\lambda = A$,
  $$P_A(A) = (\lambda_1 I - A)P_{A_2}(A) = \left[\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 I \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)\right] \cdot \left(\begin{array}{c|c} P_{A_2}(\lambda_1) & D \\ \hline 0 & P_{A_2}(A_2) \end{array}\right) =$$
  $$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A_3 \\ \hline 0 & \lambda_1 I - A_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_{A_2}(\lambda_1) & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = 0$$
  donde se ha aplicado la hipótesis de inducción para saber que $P_{A_2}(A_2) = 0$. □

Proposición 1.19. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces,*

$$A \text{ diagonalizable} \Longrightarrow p(A) \text{ diagonalizable.}$$

Observación. Para comprobar que $A \sim B$, a las muy malas y como último recurso, se puede utilizar que:

$$A \sim B \Longrightarrow A - I \sim B - I$$

1.6. Ejercicios

Los ejercicios resueltos del presente tema están disponibles en la sección 4.1.

2. Formas bilineales simétricas y formas cuadráticas.

2.1. Formas Bilineales

Definición 2.1 (Forma bilineal)**.** Sea $V^n(\mathbb{K})$ un espacio vectorial. La aplicación

$$T : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

es una forma bilineal si es lineal en cada variable. Es decir, para la primera variable se ha de cumplir:

- $T(u_1 + u_2, v) = T(u_1, v) + T(u_2, v)$
- $T(\lambda u, v) = \lambda T(u, v)$

Análogamente para la segunda variable.

Ejemplo. Ejemplos de formas bilineales son:

1. $T : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $T(x, y) = xy$
2. El producto escalar
   $<,>: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
3. $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $T(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$

Definición 2.2. Una forma bilineal $T : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es simétrica si:

$$T(u, v) = T(v, u) \qquad \forall u, v \in \mathbb{K}$$

También son denominadas métricas o tensores.

Definición 2.3 (EVM)**.** Un espacio vectorial métrico (EVM) es un par (V, g), donde g es una métrica sobre V.

Teorema 2.1. *Sea T una forma bilineal simétrica sobre $V^n(\mathbb{K})$ y sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V.*

Entonces, la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donde $a_{ij} = T(e_i, e_j)$ determina de forma biunívoca[1] *la forma bilineal T.*

Dicha matriz se denota por $A = M(T; \mathcal{B})$.

[1] de forma biyectiva

Demostración. Sea $u, v \in V^n$ dados por:

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

$$v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \equiv (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$$

Entonces,

$$T(u,v) = T\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{ij} x_i y_j T(e_i, e_j) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

□

Lema 2.2. *Sea T una forma bilineal y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ su matriz asociada.*

$$T \textit{ es simétrica} \iff A = A^T$$

Demostración.

$$T \text{ es simétrica} \iff T(e_i, e_j) = T(e_j, e_i) \iff a_{ij} = a_{ji} \iff A = A^T$$

□

2.1.1. Congruencia de matrices

Teorema 2.3. *Sea T una forma bilineal simétrica sobre $V^n(\mathbb{K})$ y sean $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\bar{\mathcal{B}}$ bases de $V^n(\mathbb{K})$. Sea P la matriz de cambio de base $P = M(\bar{\mathcal{B}}; \mathcal{B})$. Sean también $A = M(T, \mathcal{B})$ y $\bar{A} = M(T, \bar{\mathcal{B}})$. Entonces:*

$$\bar{A} = P^t A P$$

Demostración. Sea $u, v \in V$, y sea $u = x_{\mathcal{B}} = \bar{x}_{\bar{\mathcal{B}}}$, $v = y_{\mathcal{B}} = \bar{y}_{\bar{\mathcal{B}}}$. Tengo que:

$$P\bar{x} = x \qquad P\bar{y} = y$$

Entonces:

$$g(u,v) = x^t A y = \bar{x}^t P^t A P \bar{y} = \bar{x}^t \bar{A} \bar{y} \Longrightarrow \bar{A} = P^t A P$$

□

Definición 2.4 (Congruencia de matrices)**.** Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen congruentes si $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **regular** t.q.:

$$A = P^t B P$$

Lema 2.4. *Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ congruentes. Entonces:*

$$A, B \textit{ congruentes} \Longrightarrow rg(A) = rg(B)$$

Ejemplo. La matriz asociada al producto escalar es:

$$M(<,>,\mathcal{B}_u) = Id$$

Observación. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Supongamos A_1 congruente a A_2.

Veamos qué ocurre con la traza:

$$tr(A_2) = tr(P^t A_1 P) = tr(A_1 P^t P)$$

Por tanto, no tienen la misma traza.

Veamos qué ocurre con el determinante:

$$|A_2| = |P||P^t||A_1| = |P|^2|A_1|$$

Por tanto, podemos ver que el signo del determinante es un invariante, es decir, no cambia.

También es un invariante el número de 1 en la matriz asociada a la base de Sylvester.

$$k = \max\{\dim U \mid U \subset V \text{ sub. vectorial} \quad \wedge \quad g_{|U} \text{ def. positiva}\}$$

Proposición 2.5. *$\sim_c$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Demostración. Demostramos las tres condiciones:

- $A \sim_c A$, ya que $A = I^t A I$
- $A \sim_c B \Longrightarrow A = P^t B P \Longrightarrow B = (P^{-1})^t A P^{-1} \Longrightarrow B \sim_c A$
- Supongamos $A \sim_c B$ y $B \sim_c C$:

$$\left\{\begin{array}{c} A \sim_c B \\ B \sim_c C \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = P^t B P \\ B = Q^t C Q \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A = P^t Q^t C Q P = (QP)^t C (QP) \Longrightarrow A \sim_c C$$

□

2.1.2. Tipos de Métricas

Definición 2.5. El núcleo de T se define como:

$$Ker(T) = \{u \in V \mid T(u,v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

El núcleo de T es un subespacio vectorial de V, y su nulidad se define como:

$$Nul(T) = \dim Ker(T)$$

Análogamente, el núcleo se define como:

$$\begin{aligned}
Ker(T) &= \{u \in V \mid T(u,v) = 0 \quad \forall v \in V\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in V \mid (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V \right\} \\
&= \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid (x_1, \dots, x_n) A = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Proposición 2.6. *Sea T una métrica y sea A la matriz asociada a T en determinada base. Entonces,*

$$Nul(T) = n - rg(A)$$

Demostración. Tenemos que:

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es decir,

$$\dim Ker(T) = Nul(T) = n - \text{num. ecuaciones lin. indep.} = n - rg(A)$$

□

Definición 2.6. La forma bilineal T se dice que no es degenerada si

$$Ker(T) = \{0\} \iff A \text{ es regular}$$

Análogamente,

$$T \text{ es degenerada} \iff Ker(T) \neq \{0\} \iff A \text{ es singular}$$

Definición 2.7. Sea $u \in V$. Se define el subespacio conjugado (o ortogonal) como:

$$< u >^{\perp} = \{v \in V \mid T(u,v) = 0\}$$

Hay dos posibilidades:

- $< u >^{\perp}$ es un hiperplano
- $< u >^{\perp} = V \iff u \in Ker(T)$

Definición 2.8. Sea (V, g) e.v. métrico. Decimos que g es definida positiva si:

$$g(v,v) > 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Definición 2.9. Sea (V, g) e.v. métrico. Decimos que g es definida negativa si:

$$g(v,v) < 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Definición 2.10. Sea (V, g) e.v. métrico. Decimos que g es semidefinida positiva si:

$$g(v, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Definición 2.11. Sea (V, g) e.v. métrico. Decimos que g es semidefinida negativa si:

$$g(v, v) \leqslant 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Definición 2.12. Sea (V, g) e.v. métrico. Decimos que g es indefinida si:

$$\exists v, w \in V \mid g(v, v) > 0 \quad \wedge \quad g(w, w) < 0$$

Definición 2.13. Sea $u, v \in V$. Decimos que u, v son conjugados (ortogonales) si:

$$T(u, v) = 0$$

Observación. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico real. Si se tiene $v \in V \mid g(v, v) = 0$, entonces tenemos:

- g definida positiva/negativa $\Longrightarrow v = 0$.
- g semidefinida positiva/negativa $\Longrightarrow v \in Ker(g)$.
- g no degenerada e indefinida $\Longrightarrow$ No se sabe.

  Ejemplo de esto último es la métrica cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, donde, para $v = (1, 1)^t$, tenemos que $g(v, v) = 0$.

2.2. Teorema de Sylvester

Lema 2.7. *Dado T forma bilineal con $k = Nul(T)$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V t.q.*

$$A = M(T; \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{n-k \times k} \\ \hline 0_{n \times n-k} & 0_k \end{array}\right)$$

con A_1 regular.

Demostración. Sea $\{e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$ base de $Ker(T)$. Ampliamos dicha base a $\mathcal{B}$ base de V, con $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n-k}, e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$ base de V.

$$a_{ij} = T(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \in Ker(T) \\ a_{ij} & \text{si } e_i \notin Ker(T) \Longrightarrow A_1 \end{cases}$$

A_1 es regular porque

$$rg(A) = n - k$$

□

Proposición 2.8. *Sea T una forma bilineal simétrica.*

$$T(u, u) = 0 \; \forall u \Longrightarrow T = 0$$

Demostración. Sea $u, v \in V$

$$T(u+v, u+v) = 0 = \cancel{T(u,u)} + 2T(u,v) + \cancel{T(v,v)} = 0 \Longrightarrow T(u,v) = 0 \Longrightarrow T = 0$$

□

Teorema 2.9. *Sea V un espacio vectorial y T una forma bilineal simétrica no degenerada. Entonces, existe una base $\mathcal{B}$ de V t.q.*

$$M(T;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_i \neq 0 \ \forall i$$

Demostración. Demostramos por inducción sobre n.

- Para $n = 1$
  Se cumple, ya que toda matriz de dimensión 1 es diagonal.
- Supuesto cierto para $n-1$, lo demuestro para n

  Tomo $e_1 \neq 0$ t.q. $T(e_1, e_1) \neq 0$[2] Tomo $< e_1 >^{\perp} = U$ hiperplano, ya que $e_1 \notin Ker(T)$.

  Tomamos ahora la forma bilineal simétrica $T_{|U}$ sobre U. Esta es no degenerada, y veámoslo mediante reducción al aburdo.

  Supongamos que es degenerada, es decir, $Ker(T_{|U}) \neq \{0\}$. Entonces existiría $v \in U - \{0\} \mid T(v,w) \ \forall w \in U$. Además, como $v \in U$, sabemos que $T(v, e_1) = 0$. Por tanto, v es ortogonal a todos los vectores de V, por lo que $v \in Ker(T)$. Pero T es no degenerada, por lo que llegamos a una contradicción.

  Por tanto, $T_{|U}$ es una forma bilineal simétrica no degenerada, y U tiene dimensión $n-1$. Por hipótesis de inducción, existe una base $\mathcal{B}'$ de U t.q.

  $$M(T_{|U};\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n-1$$

  Sea $\mathcal{B}$ base de V de la forma $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{e_1\}$.

  $$M(T;\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_n \end{array}\right) \qquad \text{con } a_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$$

  donde $a_n \neq 0$ por elección de e_1 y el resto de los coeficientes de la columna y fila últimos son nulos porque $\mathcal{B}'$ son ortogonales a e_1.

□

[2] Este existe $\forall T \neq 0$. Para $T = 0$, se sabe que es cierto.

Proposición 2.10. *Sea (V, g) espacio vectorial métrico. Si g es no degenerada, entonces:*

- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$*:*

$$\exists \mathcal{B} \text{ base de } V \mid M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Cambiamos los vectores de la proposición anterior (supongamos $\mathcal{B}' = \{e_1, \ldots, e_n\}$) por $\mathcal{B} = \left\{ e_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{g(e_1,e_1)}}, \ldots, e_n \cdot \frac{1}{\sqrt{g(e_n,e_n)}} \right\}$ y obtenemos la matriz pedida. □

- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$*:*

$$\exists \mathcal{B} \text{ base de } V \mid M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Cambiamos los vectores de la proposición anterior (supongamos $\mathcal{B}' = \{e_1, \ldots, e_n\}$) por:

- $e_i \cdot \frac{1}{\sqrt{g(e_1,e_1)}}$ si $g(e_i, e_1) > 0$
- $e_i \cdot \frac{1}{\sqrt{|g(e_1,e_1)|}}$ si $g(e_i, e_1) < 0$

y obtenemos la matriz buscada. □

Proposición 2.11. *Sea $(V^n(\mathbb{K}), g)$ e.v. métrico. Sea $U \subset V$ subespacio vectorial t.q. $V = U \oplus Ker(g)$. Entonces $g_{|U}$ es no degenerada.*

Demostración. Denotamos por $k = \dim Ker(g) = Nul(g) = n - rg(A)$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base de $Ker(g)$ y $\mathcal{B}_U = \{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ base de U. Entonces $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ es una base de V. Debido a la suma directa, tenemos que:

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k,k} & 0 \\ \hline 0 & B_{n-k,n-k} \end{array} \right)$$

Sabemos que $rg(B) = rg(A) = n - k \Longrightarrow B$ es regular.

Como $M(g_{|U}; \mathcal{B}_U) = B$ y B es regular, entonces $g_{|U}$ es no degenerada. □

Definición 2.14 (Índice)**.** Sea (V, g) espacio vectorial métrico. Definimos el índice de g como la cantidad de negativos en la diagonal de la matriz asociada a g al diagonalizar la métrica.

Se denota como $Ind(g)$.

Definición 2.15 (Índice Estrella)**.** Sea (V, g) espacio vectorial métrico. Definimos el índice estrella de g como:

$$Ind^*(g) = \max\{\dim U \mid U \subset V \text{ sub. vectorial} \quad \wedge \quad g_{|U} \text{ def. negativa}\}$$

Proposición 2.12. *Sea (V, g) e.v. métrico.*

$$Ind^*(g) = Ind(g)$$

Corolario 2.12.1. *Sea (V, g) espacio vectorial métrico. Sea k la cantidad de negativos en la diagonal de la matriz asociada a g al diagonalizar la métrica. Entonces:*

$$k = \max\{\dim U \mid U \subset V \text{ sub. vectorial} \quad \wedge \quad g_{|U} \text{ def. positiva}\}$$

Demostración. Se puede demostrar a partir del la proposición anterior haciendo uso de $-g$. □

Teorema 2.13 (Teorema de Sylvester)**.** *Sea T una forma bilineal simétrica sobre $V^n(\mathbb{K})$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que:*

- *Caso complejo:*

$$M(T, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ & \overset{k}{\ddots} & & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \overset{r}{\ddots} & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \qquad \text{donde } \begin{cases} k = Nul(T) \\ r = rg(T) \end{cases}$$

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base de $Ker(T)$. Amplío dicha base a una base de V. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$.

Sea $U = \mathcal{L}(\{e_{k+1}, e_n\})$. Como $U \oplus Ker(g) = V$, entonces $g_{|U}$ es no degenerada.

Como $g_{|U}$ es no degenerada, entonces $\exists \mathcal{B}' = \{e'_{k+1}, \ldots, e'_n\}$ base de U t.q. $M(g_{|U}; \mathcal{B}') = I$.

Por tanto, sea $\bar{\mathcal{B}} = \{e_1, \ldots, e_k, e'_{k+1}, \ldots, e'_n\}$. Tenemos que

$$M(g; \bar{\mathcal{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ & \overset{k}{\ddots} & & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \overset{r}{\ddots} & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \qquad \text{donde } \begin{cases} k = Nul(T) \\ r = rg(T) \end{cases}$$

□

- *Caso real:*

$$M(T,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & & & & & & & & \\ & \overset{r}{\ddots} & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & & \\ & & & & \overset{s}{\ddots} & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \overset{t}{\ddots} & \\ & & & & & & & & -1 \end{array}\right) \qquad donde \left\{\begin{array}{l} r = Nul(T) \\ (s,t) \ signatura \\ t = índice \\ r+s+t = n \end{array}\right.$$

Corolario 2.13.1. *Sea $A \in \mathcal{S}(\mathbb{K}) \Longrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ regular tal que:*

- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$*:*

$$P^tAP = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)$$

- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$*:*

$$P^tAP = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Definición 2.16 (Signatura)**.** Sea (V,g) espacio vectorial métrico. Se define la signatura de g como (t,s), donde:

$$t = \text{número de 1 en la matriz de Sylvester}$$
$$s = Ind(g)$$

Ejemplo. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea el espacio vectorial métrico $(\mathbb{C}^2, g)$ Encontrar la base de Sylvester de la métrica g, sabiendo que

$$A = M(g;\mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{B}$ la base de Sylvester. Como $rg(A) = 1$,

$$M(g;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo en primer lugar una base del núcleo.

$$Ker(f) = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$$

Obtenemos una base de $\mathbb{C}^2$. $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$

$$M(g;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea el espacio vectorial métrico $(\mathbb{C}^3, g)$ Encontrar la base de Sylvester de la métrica g, sabiendo que

$$A = M(g;\mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{B}$ la base de Sylvester. Como $rg(A) = 3$,

$$M(g;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

Busco $\bar{e_1} \in \mathbb{C}^2$ de cuadrado no nulo.

$$\bar{e_1} = (1,1,0) \Longrightarrow g(\bar{e_1},\bar{e_1}) = 2 \neq 0$$

$$< \bar{e_1} >^T = \left\{x \in \mathbb{C}^3 \mid \bar{e_1}Ax = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}$$

Busco $\bar{e_2} \in < \bar{e_1} >^T$ de cuadrado no nulo.

$$\bar{e_2} = (1,-1,0) \Longrightarrow g(\bar{e_2},\bar{e_2}) = -2 \neq 0$$

$$< \bar{e_2} >^T = \left\{x \in \mathbb{C}^3 \mid \bar{e_2}Ax = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{C}^3 \mid -x_1 + x_2 = 0\right\}$$

Busco $\bar{e_3} \in < \bar{e_1} >^T \cap < \bar{e_2} >^T$.

$$\bar{e_3} = (1,1,-1) \Longrightarrow g(\bar{e_3},\bar{e_3}) = -2 \neq 0$$

Por tanto, sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1},\bar{e_2},\bar{e_3}\}$

$$M(g;\bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

La base de Sylvester es:

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{\bar{e_1}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e_2}}{\sqrt{-2}}, \frac{\bar{e_3}}{\sqrt{-2}}\right\}$$

Teorema 2.14. *Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

$$A \text{ es def. positiva} \Longleftrightarrow \text{Todos sus menores principales son positivos}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$] Suponemos A definida positiva.

Sea g una métrica tal que $A = M(g, \mathcal{B})$ para $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V.

Sabemos que, dado $U \subset V$ subespacio vectorial $\Longrightarrow g_{|U}$ definida positiva.

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ fijo. $U = \mathcal{L}\{e_1, \dots, e_k\}$. Tenemos que

$$M(g_{|U}; \{e_1, \dots, e_k\}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Como $g_{|U}$ es definida positiva, entonces $|M(g_{|U}; \{e_1, \dots, e_k\})|$ es positivo. Como esto es cierto $\forall k = 1, \dots, n$, entonces todos los menores principales son positivos.

$\Longleftarrow$] Suponemos que todos los menores principales son positivos.

Demostramos por inducción sobre n.

- <u>Para $n = 1$:</u>
  Se da, ya que el cuadrado de e_1 es positivo, por lo que es definida positiva.
- <u>Supuesto cierto para $n - 1$, compruebo para n:</u>
  $U = \mathcal{L}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Tenemos que

  $$M(g_{|U}; \{e_1, \dots, e_{n-1}\}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  Por tanto, $g_{|U}$ es definida positiva, ya que sé que todos sus menores principales son positivos (hipótesis de inducción).
  Tomando $\mathcal{B}'_{n-1} = \{e'_1, \dots, e'_{n-1}\}$ la base de Sylvester de U, tenemos que:

  $$M(g_{|U}; \mathcal{B}'_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

  Ampliando $\mathcal{B}'_{n-1}$ a una base de V, tengo que $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_{n-1}, e'_n\}$.
  Veamos si $\exists e'_n \in V \left| \begin{array}{l} g(e'_n, e'_1) = 0 \\ \vdots \\ g(e'_n, e'_{n-1}) = 0 \end{array} \right\}$. Por tanto, busco un vector e'_n verificando $n - 1$ ecuaciones homogéneas. Por tanto, como será un SCI, existe solución. Por tanto, existe ese vector e'_n buscado.
  Por tanto, e'_n es ortogonal a todos los de $\mathcal{B}'_{n-1}$. Además, $e'_n \notin U$[3]. Por tanto, $\mathcal{B}'$ es una base.

  $$M(g, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & a \end{array}\right)$$

[3] Si e'_n perteneciese a U, sería el vector nulo.

Para ver que es definida positiva, es necesario ver que $a > 0$. Como todos los menores principales son no nulos, $|M(g,\mathcal{B}')| = a > 0$. Por tanto, A es definida positiva, ya que ambas matrices son congruentes.

$\square$

Observación. Cambiando filas y columnas con cuidado, podemos reordenar la base escogida y, por tanto, facilitarnos los cálculos.

Corolario 2.14.1. *Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

$$A \text{ es def. negativa} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Todos sus menores principales de orden par son positivos} \\ \text{Todos sus menores principales de orden impar son negativos} \end{cases}$$

Demostración. Se demuestra haciendo uso de que g definida negativa $\Longleftrightarrow -g$ definida positiva. $\square$

2.3. Isometría

Definición 2.17 (Isometría)**.** Sean $(V_1^n(\mathbb{K}), g_1)$ y $(V_2^n(\mathbb{K}), g_2)$ espacios vectoriales métricos. Dado $f : V_1 \to V_2$ isomorfismo, decimos que es una isometría si:

$$g_2(f(u), f(v)) = g_1(u, v) \qquad \forall u, v \in V_1$$

Luego una isometría es un isomorfismo en EVM que conserva las métricas.

Definición 2.18. Dos EVM $(V_1^n(\mathbb{K}), g_1)$ y $(V_2^n(\mathbb{K}), g_2)$ se dicen isométricos si $\exists f : V_1 \to V_2$ isometría.

Proposición 2.15. *Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ base de V_1 y V_2 respectivamente; y sean*

$$A_1 = M(g_1, \mathcal{B}_1) \qquad A_2 = M(g_2, \mathcal{B}_2)$$

Entonces:

$$A_1 \text{ congruente a } A_2 \Longleftrightarrow (V_1, g_1), (V_2, g_2) \text{ son isométricos.}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Suponemos $A_1 \sim_c A_2$, es decir, $A_1 = P^t A_2 P$.

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Sea $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = P$. Es un isomorfismo, ya que P es regular.

Las imágenes de u, v son:

$$f(u) = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad f(v) = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$g_2(f(u), f(v)) = f(u)^t A_2 f(v) = (x_1, \dots, x_n) P^t \cdot A_2 \cdot P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$\overset{A_1 = P^t A_2 P}{=} (x_1, \dots, x_n) A_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g_1(u, v) = u^t A_1 v = (x_1, \dots, x_n) \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que $g_2(f(u), f(v)) = g_1(u, v)$, por lo que f es una isometría. Por tanto, $(V_1, g_1), (V_2, g_2)$ son isométricos.

$\Longleftarrow$) Suponemos $(V_1, g_1), (V_2, g_2)$ isométricos.
Sea $P = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ matriz regular, ya que es un isomorfismo.
Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Calculamos en primer lugar $f(u), f(v)$:

$$f(u) = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow [f(u)]^t = (x_1, \dots, x_n) P^t \qquad f(v) = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$g_1(u, v) = (x_1, \dots, x_n) A_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g_2(f(u), f(v)) = [f(u)]^t A_2 f(v) = (x_1, \dots, x_n) P^t A_2 P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Debido a la isometría, sabemos que $g_2(f(u), f(v)) = g_1(u, v)$. Por tanto, tenemos que $A_1 = P^t A_2 P \Longrightarrow A_1$ es congruente a A_2.

$\square$

2.4. Formas Cuadráticas

Definición 2.19 (Forma Cuadrática)**.** Sea $V^n(\mathbb{K})$ espacio vectorial, y sea $F : V^n \to \mathbb{K}$. Decimos que F es una forma cuadrática si, al verla en coordenadas:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \text{ para cierto } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Proposición 2.16. *Las formas cuadráticas son un tipo de métrica.*

Demostración.

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^tAx$$

Como podemos ver, A es simétrica. □

Teorema 2.17 (Expresión reducida)**.** *Sea $V^n(\mathbb{K})$ y F una forma cuadrática. Entonces, $\exists\mathcal{B}$ en la que F se calcula de la siguiente forma:*

$$F(x_1,\dots,x_n)=x_1^2+\dots+x_r^2-x_{r+1}^2-x_{r+s}^2$$

donde r es la cantidad de 1 del teorema de Sylvester y s es el índice.

A esta forma se le denomina la expresión reducia de F.

2.5. Ejercicios

Los ejercicios resueltos del presente tema están disponibles en la sección 4.2.

3. Espacios Vectoriales Euclídeos.

3.1. Espacio Vectorial Euclídeo

Definición 3.1. Un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial real con una métrica g definida positiva, denominada métrica euclídea.

$$(V^n(\mathbb{R}), g)$$

Ejemplo. $(\mathbb{R}^n, <,>)$ con $< x, y > = \ x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ es un espacio vectorial euclídeo.

Proposición 3.1. *Todos los espacios métricos de dimensión n son isométricos.*

3.1.1. Ortogonalidad

Definición 3.2 (Vector Unitario)**.** Dado (V, g) EVME, decimos que $v \in V$ es unitario si $g(v, v) = 1$.

Definición 3.3. Dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales si $g(u, v) = 0$

$$u \perp v \iff g(u, v) = 0$$

Definición 3.4 (Base Ortogonal)**.** Decimos que $\mathcal{B}$ es una base ortogonal si todos los vectores son ortogonales dos a dos. Es decir,

$$g(x_i, x_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

Definición 3.5 (Base Ortonormal)**.** Decimos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si es una base ortogonal formada por vectores unitarios. Como consecuencia se tiene que:

$$M(g, \mathcal{B}) = I$$

Observación. Como corolario del Teorema de Sylvester, en un EVME, existen siempre bases ortonormales.

Definición 3.6. Dos subespacios vectoriales $U, W \subset V$ son ortogonales si:

$$U \perp W \iff g(u, w) = 0 \qquad \forall u \in U \ \forall w \in W$$

Proposición 3.2. *Sean dos subespacios vectoriales $U, W \subset V$ ortogonales:*

$$U \perp W \Longrightarrow U \cap W = \{0\}$$

Definición 3.7. Sea $U \subset V$ subespacio vectorial.

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(u,v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

Proposición 3.3. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. Sea $\mathcal{B}_U = \{e_1, \dots, e_k\}$ base de U. Entonces:*

$$\dim U^\perp = n - k = n - \dim U$$

Demostración.

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(v, e_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$$

Por tanto, $\dim U^\perp = n -$ nº ecuaciones l.ind $= n - k$ □

Proposición 3.4. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. Entonces:*

$$V = U \oplus U^\perp$$

Demostración. Tenemos que $U \cap U^\perp = \{0\}$. Además, tenemos que $n = \dim U + \dim U^\perp \Longrightarrow U + U^\perp = V$.

Por tanto, tenemos que:

$$V = U \oplus U^\perp$$

□

Proposición 3.5. *Sea (V^n, g) EVME. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal. Entonces, dado $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, tenemos que:*

$$x_i = g(e_i, v) \qquad i = 1, \dots, n$$

Demostración. Tenemos que, dado $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$$g(e_i, v) = x_1 g(e_i, e_1) + \dots + x_i g(e_i, e_i) + \dots x_n g(e_i, e_n)$$

Como es una base ortogonal, tenemos que:

$$g(e_i, v) = x_i g(e_i, e_i)$$

Como además es ortonormal, tenemos que $g(e_i, v) = x_i$. □

Proposición 3.6. *Sea (V^n, g) EVME. Sean $u, v \in V - \{0\} \mid u \perp v$. Entonces, u, v son linealmente independientes.*

Demostración. Establecemos una combinación lineal $au + bv = 0$.

Como son perpendiculares, $g(u,v) = 0$. Entonces,

$$0 = g(au + bv, v) = a\cancelto{0}{g(u,v)} + bg(v,v) = bg(v,v) \Longrightarrow b = 0$$
$$0 = g(au + bv, u) = ag(u,u) + b\cancelto{0}{g(v,u)} = ag(u,u) \Longrightarrow a = 0$$

Entonces, tenemos que $a = b = 0$, por lo que tenemos que u, v son linelmente independientes. □

3.2. Endomorfismos autoadjuntos

Definición 3.8 (End. Autoadjuntos)**.** Dado $f \in End(V)$, tenemos que f es un endomorfismo autoadjunto si:

$$g(f(u), v) = g(u, f(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

Proposición 3.7. *Sea f un endomorfismo autoadjunto. Dada $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V, entonces tenemos que*

$$A = M(f; \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Demostración. Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, $M(g, \mathcal{B}) = I_n$.

Tenemos que:

$$g(f(u), v) = f(u)^t I_n v = (x_1, \dots, x_n) A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g(u, f(v)) = u^t I_n f(v) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Como f es un endomorfismo autoadjunto, $g(f(u), v) = g(u, f(v))$. Por tanto, $A = A^t$. □

Lema 3.8. *La suma de endomorfismos autoadjuntos es un endomorfismo autoadjunto.*

Lema 3.9. *La combinación lineal de endomorfismos autoadjuntos es un endomorfismo autoadjunto.*

Observación. La composición de endomorfismos autoadjuntos **NO** tiene por qué ser un endomorfismo autoadjunto.

Proposición 3.10. *Sea f un endomorfismo autoadjunto. Dado $U \subset V$ subespacio vectorial tal que $f(U) \subset U$, entonces:*

$$f(U^\perp) \subset U^\perp$$

Demostración. Sea $v \in U^\perp$, y sea $w \in U$.

Tenemos que $g(f(v), w) = g(v, f(w))$ por ser f endomorfismo autoadjunto. Además, tenemos que $g(v, f(w)) = 0$, ya que $f(w) \in U$ y $v \in U^\perp$.

Por tanto, tenemos que $g(f(v), w) = 0$, por lo que $f(v) \in U^\perp$. Por tanto,

$$f(U^\perp) \subset U^\perp$$

□

Corolario 3.10.1. *Si λ_1, λ_2 son valores propios distintos de f, entonces tenemos que, para todo $u \in U_{\lambda_1}$, $v \in V_{\lambda_2}$*

$$(\lambda_2 - \lambda_1)g(u, v) = 0$$

Lema 3.11. *Dado (V^2, g) un plano vectorial euclídeo y $f \in End(V)$ endomorfismo autoadjunto, entonces tenemos que f es diagonalizable.*

Demostración. Al ser autoadjunto, su matriz es simétrica. Además, como es un EVME, el cuerpo es $\mathbb{R}$, por lo que

$$A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

Ya se vio que todas las matrices simétricas de orden 2 reales son diagonalizables. □

Lema 3.12. *Dado (V^n, g) espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$ endomorfismo autoadjunto. Entonces, f tiene algún valor propio (real).*

Demostración. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, tenemos que f tiene n valores propios complejos. Supongamos que f no tiene ningún valor propio real, y llegaremos a alguna contradicción.

Tomamos $\mathcal{B}$ base ortonormal, y sea $A = M(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Como no tiene valores propios reales, tendrá valores propios complejos. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ el valor propio complejo de A, es decir:

$$\exists z \in \mathbb{C} \mid Az = \lambda z$$

donde $z \in \mathbb{C}$ para que haya parte compleja en ambas partes de la igualdad, ya que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Sea $\lambda = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$ y $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}^n$. Por tanto,

$$A(x + iy) = (a + ib)(x + iy)$$

Igualando la parte real con parte real y parte compleja con parte compleja:

$$\left\{\begin{array}{l} Ax = ax - by \\ Ay = bx + ay \end{array}\right.$$

Por tanto, dado $U = \mathcal{L}\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$ tenemos que $Ax, Ay \in U$.

Por tanto, como $f(U) \subset U \Longrightarrow f_{|U} : U \to U$ autoadjunto, ya que la restricción de un endomorfismo autadjunto es autoadjunto.

Por tanto, $1 \leqslant \dim U \leqslant 2$. Por ser $A_U \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ o $A_U \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$, tenemos que $f_{|U}$ es diagonalizable. Es decir, f_U tiene valores propios que, como $U \subset \mathbb{R}^n$, son reales.

No obstante, f no tiene valores propios reales, por lo que llegamos a una contradicción.

Por tanto, f tiene algún valor propio real. □

Teorema 3.13. *Todo $f \in End(V^n)$ endomorfismo autoadjunto admite una base ortonormal de vectores propios; es decir, es diagonalizable.*

Demostración. Demuestro por inducción sobre la dimensión del espacio, n.

- Para $n = 1$:

  Sabemos que todo endomorfismo autoadjunto tiene algún valor propio real, por lo que sea la base algún vector propio asociado a ese vector propio.

- Supuesto cierto para $n-1$, lo demuestro para n.

  Sabemos que f tiene algún valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Sea $e_1 \in V_{\lambda_1}(f)$ tal que $g(e_1, e_1) = 1$. Este existe, ya que siempre podremos normalizarlo.

  Además, $f(\mathcal{L}\{e_1\}) \subset \mathcal{L}\{e_1\} \Longrightarrow U = \mathcal{L}\{e_1\}^\perp$ también es un invariante. Sabemos que $f_{|U} : U \to U$ es autoadjunto con dimensión $n-1$.

  Por hipótesis de inducción, tenemos que $\exists\{e_2, \dots, e_n\} \subset U$ base ortonormal de vectores propios de U que diagonalizan a $f_{|U}$.

  Por tanto, como $\mathcal{L}\{e_1\} \oplus U = V$, tenemos que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de V de vectores propios.

□

3.2.1. Proyecciones y reflexiones ortogonales

Dado $u \in V$, descomponemos $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U,\ u_2 \in U^\perp$. Esta descomposición es única al ser $V = U \oplus U^\perp$.

Proyecciones

Definición 3.9. Sea $U \subset V$ subespacio vectorial, definimos la proyección sobre U como:

$$p_U : V \to V \qquad p_U(v) = u_1$$

De la definición se deduce que:

$$Ker(p_U) = U^\perp \qquad Im(p_U) = U$$

Proposición 3.14. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. La proyección sobre U, p_U es un endomorfismo autoadjunto.*

Proposición 3.15. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. Los únicos valores propios de p_U son $\{1, 0\}$.*

Demostración. Tenemos que $V_1(p_U) = U$ y $V_0(p_U) = U^\perp$.
Como $V_1(p_U) \oplus V_0(p_U) = V$, tenemos que no hay más subespacios propios. □

Lema 3.16. *Dado $U \subset V$ subespacio vectorial,*

$$p_U + p_{U^\perp} = Id$$

Demostración. Dado $u \in V$, descomponemos $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U,\ u_2 \in U^\perp$. Esta descomposición es única al ser $V = U \oplus U^\perp$. Por tanto, tenemos:

$$(p_U + p_{U^\perp})(u) = u_1 + u_2 = u = Id(u)$$

□

Proposición 3.17. *Sea $p \in End(V, g)$ endomorfismo autoadjunto. Tenemos que:*

$$p \text{ es una proyección ortogonal} \Longleftrightarrow p \circ p = p \text{ (idempotente)}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación

$\Longrightarrow$) Sea p la proyección sobre el subespacio vectorial U.

Para todo $u \in V$, tenemos que:

$$(p \circ p)(u) = p(p(u)) = p(u_1) = u_1 = p(u)$$

$\Longleftarrow$) Sea $U = Im(p)$.

En primer lugar, veamos que, dado $v \in V$, tenemos que $p(v) \perp v - p(v)$:

$$\begin{aligned} g(p(v), v - p(v)) = g(p(v), v) - g(p(v), p(v)) = g(p(v), v) - g(p(p(v)), v) = \\ = g(p(v), v) - g(p(v), v) = 0 \end{aligned}$$

donde he empleado que, por ser p un endomorfismo autoadjunto, tenemos que $g(p(v), p(v)) = g(p(p(v)), v)$.

Tenemos que $Im(p) \oplus [Im(p)]^\perp = V$. Sea $v \in V$, y sabemos que $v = p(v) + v - p(v)$. Además, $p(v) \in Im(p)$, $v - p(v) \in [Im(p)]^\perp$. Entonces:

$$p(v) = p(p(v) + v - p(v)) = p(v) + p(v) - p(v) = p(v)$$

Tengo por tanto que $p_{Im(p)}$ es una proyección ortogonal.

□

Reflexiones o Simtrías

Definición 3.10 (Reflexión o Simetría)**.** Sea $U \subset V$ subespacio vectorial, definimos la reflexión o simetría sobre U como:

$$s_U : V \to V \qquad s_U(v) = u_1 - u_2$$

De la definición se deduce lo siguiente:

$$s_U = p_U - p_{U^\perp} \qquad s_U = 2p_U - Id \qquad s_{U^\perp} = -s_U$$

Proposición 3.18. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. Se tiene que s_U es un endomorfismo autoadjunto.*

Proposición 3.19. *Sea $U \subset V$ subespacio vectorial. Los únicos valores propios de s_U son $\{1, -1\}$.*

Demostración. Tenemos que $V_1(s_U) = U$ y $V_{-1}(s_U) = U^\perp$.

Como $V_1(s_U) \oplus V_{-1}(s_U) = V$, tenemos que no hay más subespacios propios. □

Proposición 3.20. *Sea $s \in End(V)$ endomorfismo autoadjunto. Tenemos que:*

$$s \text{ es una simetría} \Longleftrightarrow s \circ s = Id \text{ (involución)}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación

$\Longrightarrow$) Sea s la simetría sobre el subespacio vectorial U.

Para todo $u \in V$, tenemos que:

$$(s \circ s)(u) = s(s(u)) = s(u_1 - u_2) = u_1 + u_2 = u = Id(u)$$

$\Longleftarrow$) Por ser autoadjunto, tenemos que es diagonalizable. Veamos los posibles valores propios. Sea $v \in V$:

$$Av = \lambda v \Longrightarrow Iv = \lambda^2 v \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$

Sea $U = V_1$. Veamos que es una simetría.

$$s(v) = s(u_1 + u_{-1}) = s(u_1) + s(u_{-1}) = u_1 - u_{-2}$$

Por tanto, tenemos que s_{V_1} es una reflexión.

□

3.2.2. Matrices Ortogonales

Sea $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases ortonormales de (V, g) EVME, y sea P la matriz de cambio de base.

Por ser ambas bases ortonormales, tenemos que:

$$M(g; \mathcal{B}) = I = M(g; \mathcal{B}')$$

Por representar ambas bases la misma métrica respecto de bases distintas, tenemos que:

$$M(g; \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}'; \mathcal{B})M(g; \mathcal{B}')M(\mathcal{B}; \mathcal{B}')$$

Sabiendo que P es la matriz de cambio de base, tenemos que

$$M(g; \mathcal{B}) = P^t M(g; \mathcal{B}')P \Longrightarrow I = P^t IP \Longrightarrow P^t P = I \Longrightarrow P^t = P^{-1}$$

Definición 3.11 (Grupo Ortogonal)**.** Definimos el grupo ortogonal como:

$$O(n) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^t P = I\} = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^t = P^{-1}\}$$

Observación. Para $A \in O(n)$, tenemos que ser congruente y ser semejante es lo mismo, ya que $P^t = P^{-1}$.

Por tanto, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.21. *Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son equivalentes:*

1. *P matriz de cambio de base de base ortonormal a base ortonormal*
2. *$P \in O(n)$*

3. $P^{-1} = P^t$

4. Las columnas o filas de P *son base ortonormal de* $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$.

Corolario 3.21.1. *Sean el espacio euclídeo* (V, g) *con el endomorfismo autoadjunto* $f \in End(V)$. *Entonces* f *se puede diagonalizar con una base ortonormal.*

Demostración. Dadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases ortonormales de V. Sean $A = M(f; \mathcal{B})$, y $D = M(f; \mathcal{B}')$ diagonal. Sea P es la matriz de cambio de base, se tiene que:

$$D = P^{-1}AP = P^tAP$$

□

Corolario 3.21.2. *Son equivalentes:*

1. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Entonces,* $\exists P \in O(n) \mid P^tAP = D$, *con* D *diagonal.*

2. Una matriz simétrica se puede diagonalizar usando una matriz ortogonal.

Proposición 3.22. *Dado* $A \in O(n)$, *se tiene que su determinante es* ± 1, *es decir,*

$$A \in O(n) \Longrightarrow |A| = \pm 1$$

Demostración. Como $A \in O(n)$, se tiene que $AA^t = I$. Por tanto,

$$1 = |I| = |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 = 1 \Longrightarrow |A| = \pm 1$$

□

3.3. Norma y ángulos

3.3.1. Norma

Definición 3.12 (Norma)**.** Dado $(V^n(\mathbb{R}), g)$ EVME, tenemos que la norma de $v \in V$ se define como:

$$||v|| = \sqrt{g(v, v)}$$

Algunas propiedades son:

1. $||kv|| = k||v||$, para $k \in \mathbb{R}$
2. $||v|| \geqslant 0$. Además, $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
3. Dada $\mathcal{B}$ base ortonormal, tenemos que si $v = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, entonces:

$$||v|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Proposición 3.23 (Desigualdad de Schwarz)**.** *Dados* $u, v \in V$, *tenemos que:*

$$|g(u, v)| \leqslant ||u|| \cdot ||v||$$

Además,

$$|g(u, v)| = ||u|| \cdot ||v|| \Longleftrightarrow u, v \text{ son lin. dep.}$$

Demostración. Supuesto $u = 0$, tenemos que:

$$|g(0, v)| = 0 \leqslant 0 = ||u|| \cdot ||v|| = 0 \cdot ||v||$$

Supongo $u, v \neq 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$0 \leqslant g(tu + v, tu + v) = t^2||u||^2 + 2tg(u, v) + ||v||^2$$

Por tanto, viéndolo como una parábola en la variable t, como siempre es $\geqslant 0$ tenemos que su discriminante es no-positivo, ya que como mucho cortaría al eje horizontal solo una vez. Por tanto,

$$\Delta \leqslant 0 \Longrightarrow 4g(u, v)^2 - 4||u||^2||u||^2 \leqslant 0 \Longrightarrow g(u, v)^2 \leqslant ||u||^2||v||^2 \Longrightarrow |g(u, v)| \leqslant ||u|| \cdot ||v||$$

Demostramos ahora cuándo se da la igualdad.

$\Longrightarrow$) Supongamos que se da la igualdad. Entonces, tenemos que $\Delta = 0$, por lo que:

$$\exists t \in \mathbb{R}^* \mid g(tu + v, tu + v) = 0 \Longrightarrow tu + v = 0 \Longrightarrow \text{ son lin. dependientes.}$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que u, v son linealmente dependientes. Entonces, $u = \lambda v$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Entonces:

$$|g(u, v)| = |g(u, \lambda u)| = |\lambda||g(u, u)| = |\lambda|||u||^2 = ||u|| \cdot ||v||$$

□

Proposición 3.24 (Desigualdad Triangular)**.** *Dados $u, v \in V$, tenemos que:*

$$||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$$

Además, tenemos que la igualdad se da solo si son proporcionales, con k constante de proporcionalidad positiva.

Demostración.

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2+2g(u, v) \leqslant ||u||^2+||v||^2+2|g(u, v)| \leqslant ||u||^2+||v||^2+2||u||\cdot||v|| = \\ = (||u|| + ||v||)^2 \Longrightarrow ||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v|| \end{aligned}$$

Además, tenemos que la igualdad se da si:

$$\begin{aligned} ||u + v|| = ||u|| + ||v|| \Longleftrightarrow ||u||^2 + ||v||^2 + 2g(u, v) = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\ ||u||\ ||v|| \\ \Longleftrightarrow g(u, v) = ||u||\ ||v|| \Longleftrightarrow \cos\theta = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se da si son proporcionales, con k constante de proporcionalidad positiva. □

3.3.2. Ángulos

Definición 3.13 (Ángulo no orientado)**.** Dados $u, v \in V - \{0\}$, definimos el ángulo θ que forman u, v como:

$$\theta \in [0, \pi] \mid \cos\theta = \frac{g(u, v)}{||u|| \cdot ||v||}$$

Esta definición es válida, ya que por la desigualdad de Schwarz tenemos que:

$$\frac{|g(u, v)|}{||u|| \cdot ||v||} \leqslant 1$$

Esta definición, además, es posible, ya que el coseno restringido a $[0, \pi]$ es una función biyectiva.

Algunas propiedades que se deducen son:

- $\theta = 0 \Longrightarrow \cos\theta = 1 \Longrightarrow$ Se da la igualdad en la desigualdad de Schwarz. Por tanto, son linealmente dependientes. Además, como $g(u, v) = g(u, \lambda u) = \lambda g(u, u) > 0$, tenemos que el factor de proporcionalidad λ es positivo.
- $\theta = \pi \Longrightarrow \cos\theta = -1 \Longrightarrow$ Se da la igualdad en la desigualdad de Schwarz. Por tanto, son linealmente dependientes. Además, como $g(u, v) = g(u, \lambda u) = \lambda g(u, u) < 0$, tenemos que el factor de proporcionalidad λ es negativo.
- $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Longrightarrow g(u, v) = 0 \Longrightarrow u \perp v$

3.4. Isometría Lineal

Definición 3.14 (Isometría lineal)**.** Decimos que $f \in End(V)$ es una isometría lineal si:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v) \qquad \forall u, v \in V$$

Es decir, conserva la métrica.

Proposición 3.25. *$f \in End(V)$ isometría $\Longrightarrow f \in Aut(V)$*

Demostración. Si $v \in Ker(f) \Longrightarrow ||f(v)|| = ||v^2|| \Longrightarrow u = 0$. Por tanto, tenemos que $Ker(f) = \{0\}$, por lo que es un monomorfismo. Además, como es un epimorfismo, tenemos que f es biyectiva. Por tanto, tenemos que $f \in Aut(V)$. □

Definición 3.15. Se define $Iso(V, g)$ como el conjunto de todas las isometrías del EVME (V, g).

Proposición 3.26. *$Iso(V, g)$ es un grupo para la composición.*

Proposición 3.27. *Sea $f \in End(V^n, g)$. Si f conserva la norma $\Longrightarrow f$ es una isometría.*

Proposición 3.28. *Si una isometría f deja invariante el subespacio $U \subset V$, $f(U) = U$, entonces también deja invariante al subespacio ortogonal $U^\perp$; es decir,*

$$f(U) = U \Longrightarrow f(U^\perp) = U^\perp$$

Proposición 3.29. *Sea $f \in End(V^2, g)$. Si λ es un valor propio de $f \Longrightarrow \lambda = \pm 1$.*

Demostración. Supuesto λ un valor propio de f, tenemos que:

$$f(u) = \lambda u \Longrightarrow ||f(u)|| = |\lambda| \cdot ||u||$$

Como es una isometría y conserva las métricas, $||u|| = ||f(u)||$. Por tanto,

$$||u|| = |\lambda| \cdot ||u|| \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

□

Teorema 3.30. *Sea $f \in End(V)$. Tenemos que:*

$$f \text{ es una isometría y autoadjunto} \Longleftrightarrow f \text{ es una reflexión}$$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación.

$\Longleftarrow$) Supongamos $U \subset V$ subespacio vectorial. Entonces, tenemos que $V = U \oplus U^\perp$. Para todo $v \in V$, lo descomponemos de forma única como $v = u + w$.

Supuesto que f es una reflexión, tenemos que $f(v) = u - w$.

$$g(v, v') = g(u + w, u' + w') = g(u, u') + g(w, w')$$

$$g(f(v), f(v')) = g(u - w, u' - w') = g(u, u) + g(w, w')$$

Por tanto, tenemos que es una isometría y un autoadjunto.

$\Longrightarrow$) Como los únicos valores propios de las isometrías son ± 1 y sabemos que f es diagonalizable, tenemos que $V = V_1 \oplus V_{-1}$. Por tanto, descomponiento todo $v \in V$ como $v = u + w$, tenemos que $f(v) = f(u + w) = u - w$. Por tanto, tenemos que f es una reflexión.

□

Proposición 3.31. *Si un endomorfismo es una isometría y es diagonalizable, entonces es una reflexión.*

Demostración. Por ser una isometría, tenemos que sus únicos valores propios pueden ser ± 1.

Como es diagonalizable, tenemos que $V = V_1 \oplus V_{-1}$, con al menos uno de los dos subespacios propios no nulos.

Por tanto, es una reflexión sobre alguno de los dos, ya que $V_{-1} = V_1^\perp$. □

Teorema 3.32. *Dado $\mathcal{B}$ una base ortonormal, y sea $f \in End(V)$ con $A = M(f, \mathcal{B})$, tenemos que:*

$$f \text{ es isometría} \Longleftrightarrow A \in O(n)$$

Demostración. f es una isometría si y solo si:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v) \qquad \forall u, v$$

Escribiendo en coordenadas,

$$g(u,v) = (x_1,\ldots,x_n)I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g(f(u),f(v)) = (x_1,\ldots,x_n)A^t \cdot I_n \cdot A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que $I = A^tA \Longrightarrow A \in O(n)$. □

Proposición 3.33.

$$f \in Iso(V,g) \Longrightarrow |f| = \pm 1$$

En el caso de que sea $|f| = 1$, tenemos que es una isometría directa.
En el caso de que sea $|f| = -1$, tenemos que es una isometría inversa.

Demostración. Supuesto $f \in Iso(V,g)$, tenemos que $A \in O(n)$. Por tanto,

$$|f| = |A| = \pm 1$$

□

3.4.1. Isometrías de un plano vectorial euclídeo

Tomamos como base una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, y sea $A = M(f;\mathcal{B})$.

Reflexiones

Por ser endomorfismos, sabemos que son diagonalizables. Además, por ser una isometría, tenemos que sus valores propios posibles son ± 1. Por tanto, hay las siguientes posibilidades:

- Reflexión axial

  Es respecto de la recta $U = \mathcal{L}\{e_1\}$.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

  Tenemos que $|f| = |A| = -1$.

- Reflexión central

  Es respecto del origen, es decir, $U = \{0\}$. Tenemos que $V = \{0\} \oplus V$. Por tanto, descomponemos $v = 0 + v$. Por tanto, $f(v) = -v$, es decir $f = -Id$. Por tanto,

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

- Reflexión respecto de V

  Es respecto del espacio vectorial, $U = V$. Tenemos que $V = V \oplus \{0\}$. Por tanto, descomponemos $v = v + 0$. Por tanto, $f(v) = v$, es decir $f = Id$. Por tanto,

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Giros de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$

Tenemos que son isometrías pero no reflexiones, por lo que no pueden ser diagonalizables.

Su matriz asociada en cierta base es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Se cumple que $|A| = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Al ser una isometría, también se ha de dar que $A \in O(n)$.

No tiene valores propios.

Ejercicio 3.4.1. Demostrar que, para toda A matriz asociada a un giro en una base ortonormal, se cumple que $A^{-1} = A^t$

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $A^t = A^{-1}$

Teorema 3.34. *Toda isometría lineal en un plano vectorial euclídeo es un giro o una reflexión axial.*

Demostración. Dado $\mathcal{B}$ base ortonormal, sea $A = M(f;\mathcal{B}) \in O(2)$. Esto implica que, dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tiene que $AA^t = I$:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = I$$

Como $A \in O(2)$, tenemos que sus filas constituyen una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle\ \rangle)$, por lo que sea su base ortonormal la siguiente:

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\}$$

Definimos $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$, y tenemos que $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\}$.

Entonces, los dos únicos vectores $v \in L^\perp$ tal que $||v|| = 1$ son: $\left\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}\right\}$, ya que cualquier otro $v \in L^\perp$ no será unitario Por tanto, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \qquad \vee \qquad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Por tanto, sea $f \in Iso(V^2, g)$ y sea $A = M(f;\mathcal{B}) \in O(2)$ se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

En el segundo caso por ser $A \in \mathcal{S}_2$, estamos ante una reflexión axial. En el primer caso, tenemos $a^2 + b^2 = 1$. Como $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $a^2, b^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |a|, |b| \leqslant 1$. Por tanto, tenemos que $\exists \theta \mid a = \cos\theta \wedge b = \operatorname{sen}\theta$. Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto, en el primer caso estamos ante un giro de ángulo $-\theta$. $\square$

En resumen, tenemos que:

- <u>Isometrías Directas</u>: Giros $\begin{cases} \theta = 0 \Longrightarrow f = Id \\ \theta = \pi \Longrightarrow f = -Id \\ \theta \neq \{0, \pi\} \end{cases}$

- <u>Isometrías Inversas</u>: Reflexión axial. $L = V_1, \quad L^\perp = V_{-1}$

Ejercicio 3.4.2. En $(\mathbb{R}^2, \ \langle,\rangle)$ Sea f tal que su matriz asociada en cierta base es:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar la isometría f.

En primer lugar, veo si $A \in O(2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^t A = I \Longrightarrow A \in O(2)$$

Por tanto, f es una isometría. Además,

$$|A| = |f| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, se trata de una isometría **directa** en el plano, es decir, de un giro. Además, como $A \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, tenemos que no es una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, se trata de un giro de $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianes.

Teorema 3.35. *Toda isometría $f \in Iso(V^2, g)$ es composición de, a lo más, dos reflexiones axiales.*

Demostración. Sea $f \in Iso(V^2, g)$.

- <u>Supogamos f isometría inversa</u>: Tenemos que f es una simetría axial, por lo que es trivialmente cierto.

- Supogamos f isometría directa:

  Sea una reflexión axial cualquiera s_L, y consideramos $g = f \circ s_L$. Tenemos que $|g| = -1$, por lo que es una reflexión axial.

  $$f \circ s_L = s_{L_2} \Longrightarrow f = s_{L_2} \circ s_L$$

  Es decir, tenemos que es f es una composición de dos reflexiones axiales, la primera arbitraria y la segunda determinada por la primera.

  Mostramos además los siguientes casos concretos:

  $$Id = s_L \circ s_L \qquad -Id = s_L \circ s_{L^\perp}$$

□

3.4.2. Isometrías de un espacio vectorial euclídeo

Tenemos que $\dim V = 3$. Tomamos como base una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, y sea $A = M(f; \mathcal{B})$.

Reflexiones

- Reflexión axial

  Es respecto de la recta $U = \mathcal{L}\{e_1\}$. Es un giro sin simetría de $\theta = \pi$.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

- Reflexión especular

  Es respecto del plano $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$. Es un giro con simetría de $\theta = 0$.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

- Reflexión central

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

  Tenemos que $f = -Id$. Es un giro con simetría de $\theta = \pi$.

- Reflexión respecto de V

  Tenemos que $f = Id$. Es un giro sin simetría de $\theta = 0$.

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Giros

- Giro de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ respecto al eje L ($\theta \neq \{0, \pi\}$)
  Se denota por $G_{L,\theta}$. $V_1 = L \quad V_{-1} = \{0\}$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$$

- Giro con simetría de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ respecto al eje L ($\alpha \neq \{0, \pi\}$)
  Se denota por $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$. $V_1 = 0 \quad V_{-1} = L$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \\ \hline & & -1 \end{array}\right)$$

  En primer lugar, se realiza el giro y luego la reflexión respecto de $L^\perp$.

En resumen, tenemos que:

- Isometrías Directas:

$$\text{Giros sin simetría, } G_{L,\theta}\text{, con: } \begin{cases} \theta = 0 \Longrightarrow f = Id \\ \theta = \pi \Longrightarrow \text{Reflexión axial.} \quad V_1 = L \quad V_{-1} = L^\perp \\ \theta \neq \{0, \pi\} \quad V_1 = L \quad V_{-1} = 0 \end{cases}$$

- Isometrías Inversas:

$$\text{Giros con simetría, } S_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}\text{, con: } \begin{cases} \theta = 0 \Longrightarrow \text{Reflexión especular. } V_1 = U \quad V_{-1} = U^\perp \\ \theta = \pi \Longrightarrow \text{Reflexión central. } f = -Id \\ \theta \neq \{0, \pi\} \quad V_1 = 0 \quad V_{-1} = L \end{cases}$$

Ejercicio 3.4.3. En $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ Sea f tal que su matriz asociada en cierta base es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiar la isometría f.

Como las columnas de f forman base ortonormal, tenemos que $A \in O(3)$, por lo que f es una isometría. Además, $|A| = |f| = 1$. Por tanto, se trata de una isometría **directa**, es decir, de un giro sin simetría.

Además, como la matriz no es simétrica, tenemos que f no es autoadjunto, por lo que f no es una reflexión ($\theta \neq 0, \pi$). Por tanto, se trata de un giro sin simetría de θ *rad* $\quad \theta \in]0, \pi[$ sobre un eje L.

Teorema 3.36. *Toda isometría $f \in Iso(V^3, g)$ es composición de, a lo más, tres reflexiones especulares.*

Demostración. Sea $f \in Iso(V^3, g)$.

- Supogamos f giro sin simetría de ángulo $\theta = 0$.

  Entonces $f = Id$.

  Dado un plano U, por la involución de las simetrías tengo que:

  $$f = Id = s_U \circ s_U$$

- Supogamos f giro sin simetría de ángulo $\theta \neq 0$.

  Sea $L = \mathcal{L}\{w\}$ el eje de giro, y tomamos $u \perp L$.

  Sea U plano ortogonal a $f(u) - u$. Es fácil ver que $L \subset U$. Sea s_U la primera reflexión especular.

  Consideramos ahora $g = s_U \circ f$.

  $$|g| = |s_U|\,|f| = -1 \cdot 1 = -1$$

  Por tanto g es una isometría inversa (por lo que tiene valor propio -1). Además, 1 también es un valor propio, ya que:

  $$w \xmapsto{f} w \xmapsto{s_U} w$$

  Por tanto, como tiene como valores propios ± 1, tenemos que es una reflexión respecto de plano (U_1). Sea $s_U \circ f = \ s_{U_1}$. Por tanto,

  $$f = s_U \circ s_{U_1}$$

  Por tanto, toda isometría directa es la composición de dos reflexiones respecto del plano.

- Supogamos f isometría inversa.

  Tenemos que $f = s_U \circ G_{L,\theta}$. Como $G_{L,\theta}$ es un giro, estamos ante el caso anterior. Por tanto, tenemos que el giro es la composición de dos reflexiones especulares, $s_{U_1} \circ s_{U_2} = G_{L,\theta}$. Por tanto,

  $$s_U \circ s_{U_1} \circ s_{U_2} = f$$

□

3.4.3. Isometrías en dimensión n

Proposición 3.37. *Si $h \in End(W(\mathbb{R}))$ sin valores propios reales, entonces $\exists W_0 \subset W$ plano vectorial invariante $(h(W_0) \subset W_0)$.*

Demostración. Sea $A = M(h, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sin valores propios. Por tanto, como por el Teorema fundamental de Álgebra existe $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A. Por lo cual, dado $z \in \mathbb{C}^n$ vector propio asiciado a λ, tenemos que:

$$\lambda = \alpha + i\beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = x + iy = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ (x_i, y_i \in \mathbb{R})$$

$$Az = \lambda z$$

$$Az = Ax + iAy = (\alpha + i\beta)[x + iy] = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

Tenemos que el plano $\mathcal{L}\{x, y\}$ es invariante. $\square$

Teorema 3.38. *Sea (V^n, g) EVME, y consideramos $f \in Iso(V^n, g)$. Entonces, en cierta base ortonormal $\mathcal{B}_o$, la matriz $A = M(f; \mathcal{B}_0)$ viene dada por:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} I_r & & & & & \\ \hline & -I_s & & & & \\ \hline & & A_{\theta_1} & & & \\ \hline & & & A_{\theta_2} & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & A_{\theta_t} \end{array}\right)$$

con $r + s + 2t = n$.

Demostración. Sea $f \in Iso(V, g)$, con $A = M(f; \mathcal{B}) \in O(n)$. Sea $\dim V_1 = r,\ \dim V_{-1} = s$.

Consideramos entonces el subespacio vectorial $U = (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$. Tenemos que:

$$\dim U = n - \dim(V_1 \cup V_{-1}) = n - r - s$$

Al ser una isometría, sus únicos valores propios posibles son ± 1. Por tanto, al no tener valores propios, tenemos que su dimensión es par. Sea por tanto:

$$\dim U = n - \dim(V_1 \cup V_{-1}) = n - r - s := 2t$$

Tenemos además que $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus U$ suma directa y ortogonal. Sea $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_U$ bases ortonormales de V_1, V_{-1}, U respectivamente.

Como tenemos que $f(V_1 \oplus V_{-1}) \subset V_1 \oplus V_{-1}$, por ser suma directa tenemos que $f(U) \subset U$. Además, por ser isometría tenemos que mantiene las dimensiones, por lo que $f(U) = U$. Por tanto, $f_{\big|U} : U \to U$ es una isometría sin valores propios. Definiendo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1} \cup \mathcal{B}_U$, tenemos que:

$$A = M(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_r & & \\ \hline & -I_s & \\ \hline & & A_0 \end{array}\right)$$

con $A_0 \in O(2t)$ sin valores propios.

Por el teorema anterior, existe un plano $U_1 \subset U$ invariante por f ($f(U_1) \subset U_1$) que, por no tener U valores propios, tampoco tiene valores propios. Por tanto, tenemos que $f_{\big|U_1} : U_1 \to U_1$, al no tener valores propios, es un giro de ángulo θ_1. Por tanto,

$$M(f_{\big|U_1}; \mathcal{B}) = A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en cierta base ortonormal,

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_r & & & \\ \hline & -I_s & & \\ \hline & & A_{\theta_1} & \\ \hline & & & A_1 \end{array}\right)$$

con $A_1 \in O(2(t-1))$ matriz ortogonal sin valores propios.

Este proceso se reiterará de forma sucesiva, reduciendo en cada paso la dimensión de la matriz A_i en dos unidades. Por tanto, tenemos que en total habrá t giros. □

Corolario 3.38.1. *Toda isometría $f \in Iso(V^n, g)$ se expresa como composición de x reflexiones respecto de hiperplanos, donde $x = n - \dim V_1 \leqslant n$.*

Demostración. En primer lugar, cabe destacar que la reflexión respecto de un hiperplano tiene $\dim V_1 = n-1$. Por tanto, tenemos que su matriz asociada en cierta base es diagonal con un -1 y $n-1$ unos.

Además, cabe destacar que todo giro en el plano se descompone como 2 reflexiones axiales. Por tanto, cada G_{θ_i} se descompone como $G_{\theta_i} = s_{L_1} \circ S_{L_2}$. Notemos $R_1 = L_1^\perp, R_2 = L_2^\perp$ los subespacios propios V_{-1} en el plano.

Por tanto, considerando la isometría de dimensión n, tenemos que la matriz $-I_s$ se representa con s reflexiones respecto de hiperplanos, cada una con el -1 en una fila correspondiente.

Cada caja correspondiente a un giro se descompone en dos simetrías, cada una respecto de $V - R_i$, para $i = 1, 2$. □

3.5. Espacios Vectoriales Euclídeos Orientados

Definición 3.16. Sea V^n espacio vectorial real. Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases ordenadas, con P matriz de cambio de base.

Decimos que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ definen la misma orientación si $|P| > 0$. En caso contrario ($|P| < 0$), decimos que definen orientación contraria.

Definición 3.17. Sea V^n espacio vectorial real. Sea $\mathcal{B}_1$ base ortonormal. Sean $v_1, \dots, v_n \in V^n$.

Definimos $det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \dots, v_n)$ como el determinante cuyas columnas son las coordenadas de $v_1, \dots, v_n$ en la base $\mathcal{B}_1$.

Proposición 3.39. *Sea V^n espacio vectorial real. Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases ortonormales. Sean $v_1, \dots, v_n \in V^n$. Entonces,*

$$det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \dots, v_n) \cdot det_{\mathcal{B}_2}(v_1, \dots, v_n) > 0 \iff \textit{Tienen la misma orientación.}$$

Demostración. Sea P la matriz de cambio de base.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \qquad det_{\mathcal{B}_2}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \dots & \bar{x}_{1n} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \dots & \bar{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{n1} & \bar{x}_{n2} & \dots & \bar{x}_{nn} \end{vmatrix}$$

Por tanto,

$$det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \det \left[P \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \dots & \bar{x}_{1n} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \dots & \bar{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{n1} & \bar{x}_{n2} & \dots & \bar{x}_{nn} \end{pmatrix} \right] =$$
$$= |P| \cdot det_{\mathcal{B}_2}(v_1, \dots, v_n)$$

□

Lema 3.40. *Sea $u, v \in (V^2, g)$ EVME, y consideramos $\mathcal{B}$ base ortonormal. Tenemos que:*

$$g(u,v)^2 + det_{\mathcal{B}}(u,v)^2 = ||u||^2 \cdot ||v||^2 \qquad \forall u, v \in V^2$$

Demostración. En el caso de que u, v linealmente dependientes, tenemos que $det_{\mathcal{B}}(u,v) = 0$. Además, la expresión es cierta por la Desigualdad de Schwarz.

Suponemos u, v linealmente independientes, y sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ base ortonormal orientada positiva. Consideramos $u = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Esto no es restrictivo ya que se puede modificar la elección de $\mathcal{B}$. Entonces:

$$g(u,v) = (\lambda, 0) I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x \qquad det_{\mathcal{B}}(u,v) = \lambda y$$

Por tanto, tenemos que:

$$g(u,v)^2 + det_{\mathcal{B}}(u,v)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = ||u||^2 \cdot ||v||^2$$

□

Definición 3.18 (Ángulo orientado)**.** Sean $u, v \in V^2$ linealmente independientes. Tenemos que el ángulo orientado se define como $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{det_{\mathcal{B}}(u,v)}{||u|| \cdot ||v||} \qquad \wedge \qquad \cos \theta = \frac{g(u,v)}{||u|| \cdot ||v||}$$

Esta definición tiene sentido ya que, por la igualdad anterior, se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

3.5.1. Producto Vectorial

Definición 3.19 (EMVE Orientado)**.** Sea (V^n, g) un EVME. Decimos que es orientado cuando se fija cierta base $\mathcal{B}$ en él, estableciéndose dicha base como orientada positiva por convenio.

En el caso de $\mathbb{R}^n$, la base orientada positiva por convenio en la usual $\mathcal{B}_u$.

Definición 3.20 (Base orientada)**.** Sea (V^n, g) un EVME orientado. Decimos que una base $\mathcal{B}'$ es orientada positiva si define la misma orientación que la base fijada por convenio.

En caso contrario, se dirá que es orientada negativa.

Definición 3.21 (Producto Vectorial)**.** Sea (V^3, g) espacio vectorial euclídeo orientado. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal orientada, y consideramos $u, v \in V$.

El producto vectorial $u \times v$ es un una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \times : & V & \longrightarrow & V \\ & (u, v) & \longmapsto & u \times v \in V \end{array}$$

que cumple que:

$$g(u \times v, w) = det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \qquad \forall w \in V$$

Proposición 3.41. *Sea (V^3, g) espacio vectorial euclídeo orientado. Sea $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormal orientada, y consideramos $u, v \in V$.*

Tenemos que:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Demostración. En coordenadas, tenemos que:

$$w \longmapsto g(u \times v, w) \text{ es lineal}$$
$$w \longmapsto det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \text{ es lineal}$$

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal orientada. Sea

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3) \qquad u \times v = (a_1, a_2, a_3)$$

Buscamos calcular los valores de a_i.

Tenemos que:

$$g(u \times v, w) = det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \qquad \forall w \in V$$

Equivalentemente,

$$g(u \times v, w) = det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \qquad \forall w = i, j, k$$

Por tanto,

$$g(u \times v, i) + g(u \times v, j) + g(u \times v, j) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

Por tanto,

$$det_{\mathcal{B}}(u,v,i) = a_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$det_{\mathcal{B}}(u,v,j) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow a_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$det_{\mathcal{B}}(u,v,k) = a_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

□

Algunas propiedades del producto vectorial son:

- Es una aplicación bilineal.
- Es antisimétrico, es decir $u \times v = -v \times u \qquad \forall u, v \in V^3$.
- Supuesto $u = kv$ $k \in \mathbb{R} \Longrightarrow u \times v = 0 \qquad \forall u, v \in V^3$
- $u \times v$ es perpendicular a u y a v.

  Demostración. Tenemos que $g(u \times v, w) = det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \qquad \forall w \in V$. Por tanto, tenemos que:

  $$g(u \times v, v) = det_{\mathcal{B}}(u, v, v) = 0 \Longrightarrow u \times v \perp v$$
  $$g(u \times v, u) = det_{\mathcal{B}}(u, v, u) = 0 \Longrightarrow u \times v \perp u$$

  □

Corolario 3.41.1. *Sea el EVME (V^3, g) orientado. Sea $\times$ el producto vectorial asociado a una base ortonormal orientada positiva; y sea $\bar{\times}$ producto vectorial asociado a una base ortonormal orientada negativa. Entonces:*

$$u \bar{\times} v = v \times u$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ base ortonormal orientada positiva, y $\bar{\mathcal{B}}$ base ortonormal orientada negativa. Como son ortonormales, P matriz de cambio base es ortogonal, por lo que $|P| = \pm 1$. Como además definen orientaciones distintas, tenemos que $|P| = -1$.

Entonces,

$$g(u \bar{\times} v, w) = det_{\bar{\mathcal{B}}}(u, v, w) = -det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = -g(u \times v, w) = g(v \times u, w) \qquad \forall w \in V^3$$

Por tanto, tenemos que $g(u \bar{\times} v, w) = g(v \times u, w)$, luego $u \bar{\times} v = v \times u$. □

Proposición 3.42. *Sea el EVME (V^3, g) orientado. Entonces, dada una base orientada positiva $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ tenemos que:*

$$e_1 \times e_2 = e_3$$
$$e_2 \times e_3 = e_1$$
$$e_3 \times e_1 = e_2$$

$$\begin{tikzcd} & e_1 \arrow[dr, bend left] & \\ e_3 \arrow[ur, bend left] & & e_2 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos que:

$$e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e_3$$

$$e_2 \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 & e_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e_2$$

□

Proposición 3.43. *Sea el EVME (V^3, g). Consideramos $u, v, w \in V^3$. Entonces:*

$$u \times (v \times w) = g(u, w)v - g(u, v)w$$

Proposición 3.44. *Sea el EVME (V^3, g). Consideramos $u, u', v, v' \in V^3$. Entonces:*

$$g(u \times u', v \times v') = g(u, v)g(u', v') - g(u, v')g(u', v)$$

Corolario 3.44.1. *Sea el EVME (V^3, g). Consideramos $u, u' \in V^3 - \{0\}$. Entonces:*

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{||u \times u'||^2}{(||u||\ ||u'||)^2}$$

donde $\theta = \measuredangle\{u, u'\}$.

Demostración. De la proposición anterior, tomamos $v = u, v' = u'$. Entonces:

$$||u \times u'||^2 = ||u||^2||u'||^2 - g(u, u')^2$$

Como tenemos que $g(u, u') = ||u||\ ||u'||\ \cos\theta$, se tiene lo siguiente:

$$||u \times u'||^2 = ||u||^2||u'||^2 - ||u||^2||u'||^2 \cos^2\theta = ||u||^2||u'||^2(1 - \cos^2\theta)$$

Usando la relación trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se tiene que:

$$||u \times u'||^2 = ||u||^2||u'||^2 \operatorname{sen}^2\theta \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{||u \times u'||^2}{(||u||\ ||u'||)^2}$$

donde hemos usado que $u, u' \neq 0$.

□

3.6. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea (V^n, g) un EVME y consideramos $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base. Vamos a construir, a partir de $\mathcal{B}$, una base ortogonal $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}\}$ de V.

Partimos desde $\bar{e_1} = e_1$. Consideramos $\bar{e_2} = e_2 - a\bar{e_1}$, y calculamos $a \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{e_1} \perp \bar{e_2}$.

$$0 = g(\bar{e_2}, \bar{e_1}) = g(e_2 - a\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g(e_2, \bar{e_1}) - a||\bar{e_1}||^2 \Longrightarrow a = \frac{g(e_2, \bar{e_1})}{||\bar{e_1}||^2}$$

Posteriormente, consideramos $\bar{e_3} = e_3 - b\bar{e_1} - c\bar{e_2}$, y ajustamos $b, c \mid \bar{e_3} \perp \bar{e_1}, \bar{e_2}$.

Así sucesivamente se obtiene cada vector $\bar{e_i}$, y luego se puede normalizar dicha base para obtener una base ortonormal.

Ejemplo. Sea el EVME $(\mathbb{R}^4, \langle,\rangle)$ y consideramos el subespacio vectorial

$$V \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Sea $\mathcal{B}$ base de V la siguiente:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicamos ahora el algoritmo de Gram-Schmidt para conseguir una base ortogonal $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_3}, \bar{e_3}\}$ de V.

Definimos $\bar{e_1} = e_1$, y sea $\bar{e_2} = e_2 - a\bar{e_1}$

$$0 = \langle e_2, \bar{e_1} \rangle - a||\bar{e_1}||^2 = 1 - 2a \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\bar{e_2} = e_2 - \frac{1}{2}\bar{e_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea ahora $\bar{e_3} = e_3 - a\bar{e_1} - b\bar{e_2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e_3} \perp \bar{e_1} \Longrightarrow 0 = \langle e_3, \bar{e_1} \rangle - a||\bar{e_1}||^2 \\ \bar{e_3} \perp \bar{e_2} \Longrightarrow 0 = \langle e_3, \bar{e_2} \rangle - b||\bar{e_2}||^2 \end{array} \right.$$

Resolviendo ese sistema hallamos $\bar{e_3}$, y ya tenemos una base ortogonal.

3.7. Ejercicios

Los ejercicios resueltos del presente tema están disponibles en la sección 4.3.

4. Ejercicios

4.1. Diagonalización de Endomorfismos

Ejercicio 4.1.1. Dadas las siguientes matrices $A_i \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Estudiar si A_i son diagonalizables. En caso de serlo, encontrar una matriz diagonal D_i y una matriz regular P_i tal que $D_i = P_i^{-1} A_i P_i$.

    a) Veamos si es diagonalizable A_1.

$$P_{A_1}(\lambda) = |A_1 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_0 & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda_0 & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda_0 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda_0 & 2 \\ \lambda_0 & 2 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_0 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda_0 & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix} = \lambda_0 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-\lambda_0 \\ 0 & -\lambda_0 & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_0(8 + \lambda_0(2-\lambda_0)) = \lambda_0(-\lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 8) = -\lambda_0(\lambda+2)(\lambda-4)$$

Por tanto, los valores propios son: $\{0, -2, 4\}$. Como los tres son distintos, sí es diagonalizable.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	1	1
-2	1	1
4	1	1

Tabla 4.1: Valores propios con sus multiplicidades

Calculemos las matrices P_1 y D_1.

$$V_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$V_{-2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$V_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Por tanto, las matrices P_1 y D_1 son:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Veamos si es diagonalizable A_2.

$$P_{A_2}(\lambda) = |A_2 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_0 & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$
$$= -(1-\lambda_0)(1+\lambda_0)(2-\lambda_0) + 1 - (2-\lambda_0) - 3(1-\lambda_0) =$$
$$= -(1-\lambda_0^2)(2-\lambda_0) - 4 + 4\lambda_0 = -\lambda_0^3 + 2\lambda_0^2 + 5\lambda_0 - 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & -1 & 1 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & -1 & 1 & 6 \\ -2 & & 2 & -6 \\ \hline & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $P_{A_2} = (\lambda_0 - 1)(\lambda_0 + 2)(-\lambda_0 + 3)$. Por ende, los valores propios son: $\{1, -2, 3\}$. Como los tres son distintos, sí es diagonalizable.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	1	1
-2	1	1
3	1	1

Tabla 4.2: Valores propios con sus multiplicidades

Calculemos las matrices P_2 y D_2.

$$V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$V_{-2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$V_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto, las matrices P_2 y D_2 son:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Veamos si es diagonalizable A_3.

$$P_{A_3}(\lambda) = |A_3 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda_0 & -6 & 6 \\ 0 & 1-\lambda_0 & 2 \\ 2 & -6 & 3-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda_0)^2(1-\lambda_0) - 24 - 12(1-\lambda_0) + 12(3-\lambda_0) =$$
$$= 9 + \lambda_0^2 - 6\lambda_0 - 9\lambda_0 - \lambda_0^3 + 6\lambda_0^2 - 24 - 12 + 12\lambda_0 + 36 - 12\lambda_0 =$$
$$= -\lambda_0^3 + 7\lambda_0^2 - 15\lambda_0 + 9$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 7 & -15 & 9 \\ 1 & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & -1 & 6 & -9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $P_{A_3} = -(\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 3)^2$. Los valores propios son: $\{1, 3\}$. Calculemos la multiplicidad geométrica de 3.

$$V_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	1	1
3	2	1

Tabla 4.3: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, la multiplicidad geométrica de 3 es $n_3 = 1 \neq 2 = m_3$. Por tanto, A_3 no es diagonalizable.

d) Veamos si es diagonalizable A_4.

$$P_{A_4}(\lambda) = |A_4 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda_0 & -18 & 0 \\ 2 & -3-\lambda_0 & 0 \\ 2 & -6 & 3-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda_0)\left(-(9-\lambda_0)(3+\lambda_0) + 36\right) = (3-\lambda_0)(\lambda_0^2 - 6\lambda_0 + 9)$$
$$= (3-\lambda_0)(\lambda_0 - 3)^2 = -(\lambda_0 - 3)^3$$

Por tanto, el único valor propio es $\{3\}$. Calculemos su multiplicidad geométrica.

$$V_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{array} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
3	3	2

Tabla 4.4: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, la multiplicidad geométrica de 3 es $n_3 = 2 \neq 3 = m_3$. Por tanto, A_4 no es diagonalizable.

e) Veamos si es diagonalizable A_5.

$$P_{A_5}(\lambda) = |A_5 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda_0 & -9 & 3 \\ 1 & -\lambda_0 & 1 \\ 2 & -6 & 3-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda_0(3-\lambda_0)(6-\lambda_0) - 18 - 18 + 6\lambda_0 + 9(3-\lambda_0) + 6(6-\lambda_0) =$$
$$= -18\lambda_0 + 3\lambda_0^2 + 6\lambda_0^2 - \lambda_0^3 - 36 + 6\lambda_0 + 27 - 9\lambda_0 + 36 - 6\lambda_0 =$$
$$= -\lambda_0^3 + 9\lambda_0^2 - 27\lambda_0 + 27 = -(\lambda_0 - 3)(\lambda_0 - 3)^2 = -(\lambda_0 - 3)^3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 9 & -27 & 27 \\ 3 & & -3 & 18 & -27 \\ \hline & -1 & 6 & -9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, el único valor propio es $\{3\}$. Calculemos su multiplicidad geométrica.

$$V_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
3	3	1

Tabla 4.5: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, la multiplicidad geométrica de 3 es $n_3 = 1 \neq 3 = m_3$. Por tanto, A_5 no es diagonalizable.

f) Veamos si es diagonalizable A_6.

$$P_{A_6}(\lambda) = |A_6 - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda_0 & 18 & 3 \\ -2 & 9-\lambda_0 & 1 \\ -1 & 3 & 3-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$
$$= -(9-\lambda_0^2)(9-\lambda_0) - 18 - 18 + 3(9-\lambda_0) + 3(3+\lambda_0) + 36(3-\lambda_0) =$$
$$= -81 + 9\lambda_0 + 9\lambda_0^2 - \lambda_0^3 - 36 + 27 - 3\lambda_0 + 9 + 3\lambda_0 + 108 - 36\lambda_0 =$$
$$= -\lambda_0^3 + 9\lambda_0^2 - 27\lambda_0 + 27 = -(\lambda_0 - 3)^3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 9 & -27 & 27 \\ 3 & & -3 & 18 & -27 \\ \hline & -1 & 6 & -9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, el único valor propio es $\{3\}$. Calculemos su multiplicidad geométrica.

$$V_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -6x_1 + 18x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
3	3	1

Tabla 4.6: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, la multiplicidad geométrica de 3 es $n_3 = 1 \neq 3 = m_3$. Por tanto, A_6 no es diagonalizable.

2. Estudiar cuáles de las matrices de la primera fila son semejantes entre sí.

	A_1	A_2	A_3	
$tr(A)$	2	2	7	$A_1 \nsim A_3 \quad \wedge \quad A_2 \nsim A_3$
$det(A)$	0	-6	$\times$	$A_1 \nsim A_2$
$P_A(\lambda)$	$\times$	$\times$	$\times$	

Tabla 4.7: Resolución usando propiedades de las matrices semejantes

Además, como los tres polinomios característicos son distintos, no son semejantes.

3. Estudiar si A_4 y A_5 son semejantes.

Tienen el mismo rango, traza y polinomio característico. Por tanto, no podemos descartar que sean semejantes.

Matriz	Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
A_4	3	3	2
A_5	3	3	1

Tabla 4.8: Valores propios con sus multiplicidades para cada matriz

Como tienen multiplicidades geométricas distintas para el mismo valor propio, entonces no representan el mismo endomorfismo. Por tanto, no son semejantes.

$$A_4 \nsim A_5$$

Ejercicio 4.1.2. Tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Para todo a real consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1+a & 1 & -1+a \\ 1-a & -a & 1-a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Estudiar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es diagonalizable.

Obtengo en primer lugar su polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1+a-\lambda & 1 & -1+a \\ 1-a & -a-\lambda & 1-a \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-C_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1+a \\ 0 & -a-\lambda & 1-a \\ \lambda & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1+a \\ 0 & -a-\lambda & 1-a \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1'=F_1+F_3}{=}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2+a-\lambda \\ 0 & -a-\lambda & 1-a \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(a-2-\lambda)(-a-\lambda)$$

Los valores propios son: $\{0, a-2, -a\}$. Los casos a tener en cuenta son:

- Dos valores propios son iguales.

$$\begin{array}{ll} a-2=0 & \longrightarrow a=2 \\ -a=0 & \longrightarrow a=0 \\ a-2=-a & \longrightarrow a=1 \end{array}$$

  Por tanto, si $a \neq 0, 1, 2$, entonces los tres valores propios son distintos y, por tanto, A es diagonalizable.

- Caso $a = 1$.

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	1	1
-1	2	2

Tabla 4.9: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 1$ la matriz es diagonalizable.

- Caso $a = 0$.

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	1
-2	1	1

Tabla 4.10: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 0$ la matriz no es diagonalizable.

- Caso $a = 2$.

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	1
-2	1	1

Tabla 4.11: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 2$ la matriz no es diagonalizable.

Por tanto, A es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

2. Diagonalizar la matriz para $a = 0$, $a = 1$ y $a = -1$ (si ello es posible).

- Para $a = 0$
  A no es diagonalizable.
- Para $a = 1$
  Los valores propios son: $\{0, -1\}$.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$V_{-1} = \cdots = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto, las matrices P_1 y D_1 son:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para $a = -1$
  Los valores propios son: $\{0, -3, 1\}$.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{-3} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+3I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Por tanto, las matrices P_{-1} y D_{-1} son:

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad P_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Razonar si las matrices obtenidas para $a = -2$ y para $a = 4$ son semejantes.

   Para $a = -2$, los valores propios son: $\{0, 2, -4\}$.

   Para $a = 4$, los valores propios son: $\{0, 2, -4\}$.

   Por tanto, como tienen los mismos valores propios, saldrá la misma D al diagonalizarla. Por tanto, $A_{-2} \sim D \wedge D \sim A_4$. Al ser $\sim$ una relación de equivalencia, $A_4 \sim A_{-2}$

Ejercicio 4.1.3. Estudiar los valores de a para los que la siguiente matriz es diagonalizable. Estudiar el caso real y el caso complejo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & a & 8 \\ 2 & 8 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & a-\lambda & 8 \\ 2 & 8 & a-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda & 8-a+\lambda \\ 2 & 8 & -8+a-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 8+a-\lambda & 0 \\ 2 & 8 & -8+a-\lambda \end{vmatrix} = (-8+a-\lambda)(8+a-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios son: $\{-8+a, 8+a, 1\}$. Los casos a tener en cuenta son:

- Dos valores propios son iguales.

$$\begin{array}{ll}
-8+a = 1 & \longrightarrow a = 9 \\
8+a = 1 & \longrightarrow a = -7 \\
8+a = -8+a & \longrightarrow \nexists sol
\end{array}$$

  Por tanto, si $a \neq -7, 9$, entonces los tres valores propios son distintos y, por tanto, A es diagonalizable.

- Caso $a = -7$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & 8 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right| \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	1
-15	1	1

Tabla 4.12: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = -7$ la matriz no es diagonalizable.

- Caso $a = 9$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	1
17	1	1

Tabla 4.13: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 9$ la matriz no es diagonalizable.

Por tanto, A es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{-7, 9\}$.

Ejercicio 4.1.4. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Estudiar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & a \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & a \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ a-\lambda & 0 & a \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)((a-\lambda)(1-\lambda)-a^2) = -\lambda(2-\lambda)(\lambda^2-(a+1)\lambda-a^2+a)$$

Veo el número de soluciones de la ecuación $\lambda^2-(a+1)\lambda-a^2+a=0$

$$\Delta = (a+1)^2+4a^2-4a = (a-1)^2+4a^2 > 0$$

Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones. Para ver los casos en los que los valores propios se repiten, veamos si

$$\exists a \in \mathbb{R} \mid \lambda^2-(a+1)\lambda-a^2+a=0, \text{ con } \lambda = 0, 2$$

- $\underline{\lambda = 0}$: $\Longrightarrow -a^2+a = a(-a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0, 1$
- $\underline{\lambda = 2}$: $\Longrightarrow 4-2a-2-a^2+a = -a^2-a+2 = 0 \Longrightarrow a = 1, -2$

Por tanto,

- $\underline{\text{Si } a \neq \{-2, 0, 1\}}$:
  Hay 4 valores propios distintos, por lo que A es diagonalizable.
- $\underline{\text{Si } a = 0}$:
  Hay dos valores propios con $m_i = 1$, pero la multiplicidad algebraica del valor propio 0 es doble ($m_0 = 2$). Veamos su multiplicidad geométrica:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1+x_3 = 0 \\ x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
2	1	1
0	2	1
-	1	1

Tabla 4.14: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 0$, A no es diagonalizable.

- Si $a = 1$:
  Hay dos valores propios con $m_i = 2$. Veamos su multiplicidad geométrica:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	1
2	2	-

Tabla 4.15: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 1$, A no es diagonalizable.

- Si $a = -2$:
  Hay dos valores propios con $m_i = 1$, pero la multiplicidad algebraica del valor propio 2 es doble ($m_2 = 2$). Veamos su multiplicidad geométrica:

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid (A - 2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{c} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
2	2	1
0	1	1
-	1	1

Tabla 4.16: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = -2$, A no es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalizable. Demostrar que su matriz transpuesta también lo es. Razonar que, en ese caso, $A \sim A^t$.

$$A \text{ diagonalizable } \Longrightarrow D = P^{-1}AP \Longrightarrow D^t = (P^{-1}AP)^t = P^tA^t(P^{-1})^t = P^tA^t(P^t)^{-1}$$

Además, como D es diagonal, $D^t = D$. Por tanto,

$$D = P^tA^t((P^t)^{-1}$$

Por tanto, como D es diagonal y P^t es regular, A^t es diagonalizable.
Como $A \sim D \wedge D \sim A^t$, al ser $\sim$ una relación de equivalencia, $A \sim A^t$. □

Ejercicio 4.1.6. Demostrar que toda $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
Calculamos su polinomio característico.

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$$

Su discriminante es $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac + b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$.

- Si $\Delta > 0 \Longrightarrow A$ tiene 2 soluciones $\Longrightarrow A$ es diagonalizable.
- Si $\Delta = 0 \Longrightarrow a = c, \quad b = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

□

Observación. En el caso de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto no es cierto. Como contraejemplo, ver el ejercicio 4.1.7.1.

Ejercicio 4.1.7. Sean $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Estudiar cuáles son diagonalizables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

1. Veamos si A_1 es diagonalizable.

$$P_{A_1}(\lambda) = |A_1 - \lambda I| = \lambda^2 - tr(A_1)\lambda + det(A_1) = \lambda^2$$

Por tanto, el único valor propio es el $\{0\}$. Calculemos su multiplicidad geométrica.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 + ix_2 = 0 \\ ix_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, x_1 + ix_2 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	1

Tabla 4.17: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A_1 no es diagonalizable.

2. Veamos si A_2 es diagonalizable.

$$P_{A_2}(\lambda) = |A_2 - \lambda I| = \lambda^2 - tr(A_2)\lambda + det(A_2) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

Por tanto, los valores propios son $\{0, 2\}$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	1	1
2	1	1

Tabla 4.18: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A_2 sí es diagonalizable.

3. Veamos si A_3 es diagonalizable.

$$P_{A_3}(\lambda) = |A_3 - \lambda I| = \lambda^2 - tr(A_3)\lambda + det(A_3) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

Por tanto, los valores propios son $\{1 - i, 1 + i\}$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
$1 - i$	1	1
$1 + i$	1	1

Tabla 4.19: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A_3 sí es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.8. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Consideramos la matriz traspuesta A^t, la matriz conjugada $\bar{A}$ y la matriz traspuesta conjugada $\bar{A}^t$,

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a+ib & e+if \\ c+id & g+ih \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ e-if & g-ih \end{pmatrix} \qquad \bar{A}^t = \begin{pmatrix} a-ib & e-if \\ c-id & g-ih \end{pmatrix}$$

Decimos que A es *simétrica* si $A = A^t$ y que es *hermítica* si $A = \bar{A}^t$.

1. Demostrar que una matriz simétrica compleja no es necesariamente diagonalizable.

   Como contraejemplo, ver el ejercicio 4.1.7.1.

2. Demostrar que toda matriz hermítica es diagonalizable y que sus valores propios son reales.

$$A = \bar{A}^t \Longrightarrow \begin{cases} a+ib = a-ib & \longrightarrow b=0 \\ c+id = e-if & \longrightarrow c = e-if-id \\ e+if = c-id & \\ g+ih = g-ih & \longrightarrow h=0 \end{cases}$$

   Por tanto, $e+if = e-if-id-id \Longrightarrow 2if = -2id \Longrightarrow f=-d \Longrightarrow c=e.$

   Por tanto, dado $a.b.c.d \in \mathbb{R}$, una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ hermítica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix}$$

   Calculamos su polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 - d^2$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab-c^2-d^2) = a^2+b^2+2ab-4ab+4c^2+4d^2 = (a-b)^2+4(c^2+d^2) \geqslant 0$$

   - Si $\Delta > 0 \Longrightarrow$ Hay dos soluciones distintas y, por tanto, A es diagonalizable.
   - Si $\Delta = 0 \Longrightarrow a=b, \quad c=d=0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.9. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que A diagonalizable $\Longrightarrow A^2-2A+I$ diagonalizable.

   A diagonalizable $\Longrightarrow D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1}$. Por tanto,

$$A^2-2A+I = PD^2P^{-1} - 2PDP^{-1} + PIP^{-1} = P[D^2-2D+I]P^{-1}$$

   Por tanto, como D^2-2D+I es diagonal y P es regular, A^2-2A+I es semejante a una matriz diagonal, por lo que es diagonalizable.

2. Razonar que $A^2 - 2A + I$ diagonalizable $\not\Rightarrow$ A diagonalizable.

   Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   $A^2 - 2A + I = (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Esta matriz es diagonalizable ya que $D = P^{-1}0P$, con $D = 0$ y $P = I$.

   Sin embargo, el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

   $$rg(A - I) = 1 \Longrightarrow \dim V_1 = 2 - 1 = 1$$

   Como $n_1 = 1 \neq 2 = m_1$, A no es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.10. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no diagonalizable y con un valor propio $a \in \mathbb{R}$ de multiplicidad algebraica $m_a = 2$. Demostrar que $A \sim B$, con

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $f \in End(\mathbb{R}^2)$ con $A = M(f, \mathcal{B})$.

Como A no es diagonalizable, $n_a \neq 2$, por lo que $n_a = \dim V_a = 1$.

Busco una base de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ $v_2 \in V_a - \{0\}$. Como $\dim V_a = 1, \{v_2\}$ base de V_a. Por tanto,

$$\begin{aligned} v_1 &\longrightarrow bv_1 + cv_2 \\ v_2 &\longrightarrow av_2 \end{aligned} \qquad M(f, \mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$$

Como la multiplicidad algebraica de a es 2,

$$P_f(\lambda) = (a - \lambda)^2 = \begin{vmatrix} b - \lambda & 0 \\ c & a - \lambda \end{vmatrix} = (b - \lambda)(a - \lambda) \Longrightarrow a = b$$

Además, si fuese $c = 0$ sería diagonalizable, por lo que $c \neq 0$.

Sea ahora $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, con $\bar{v}_1 = v_1$ y $\bar{v}_2 = cv_2$. Forman base ya que $c \neq 0$ y $\mathcal{B}$ es una base. Sabemos que

$$f(\bar{v}_2) = f(cv_2) = cf(v_2) = cav_2 = a\bar{v}_2$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &\longrightarrow a\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \\ \bar{v}_2 &\longrightarrow a\bar{v}_2 \end{aligned} \qquad M(f, \bar{\mathcal{B}}) = B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Por tanto, como la matriz A y la matriz B representan el mismo endormorfismo en dos bases distintas ($\mathcal{B}$ y $\bar{\mathcal{B}}$ respectivamente), las matrices son semejantes ($A \sim B$). □

Ejercicio 4.1.11. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Estudiar si A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 1 \Longrightarrow \dim Im(f) = 1 \Longrightarrow \dim Ker(f) = 3.$
Por tanto, como $Ker(f) \neq \{0\} \Longrightarrow 0$ es un valor propio. $V_0(f) = Ker(f)$
Los valores propios de A son $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid |A - \lambda_0 I| = 0\}$.

$$|A - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0$$

Como podemos ver, efectivamente $\lambda_0 = 0$ es un valor propio. Para $\lambda_0 = 4$, los vectores columna cumplen que la suma de sus componentes es nula, es decir, pertenecen al hiperplano de $\mathbb{R}$ con ecuación implícita $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Como la dimensión de ese hiperplano es 3, uno de los vectores será linealmente dependiente y por tanto el determinante es nulo.

Como $Ker(f) = V_0$, $\dim V_0 = 3$. Por tanto, la multiplicidad algebraica de 0 m_0 cumple que $3 \leqslant m_0 \leqslant 4$. Pero $m_0 \neq 4$ porque sino sería el único valor propio. Por tanto, $m_0 = 3$ y $m_4 = 1$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	3	3
4	1	1

Tabla 4.20: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, es diagonalizable. Busquemos las matrices P y D. Calculamos en primer lugar cada subespacio propio.

$$V_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$V_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{ll} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ \dots & = 0 \\ \dots & = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Por tanto, la base de vectores propios es:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, las matrices P y D son:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.1.12. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Estudiar si A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda - 12$$

Sus posibles raíces en $\mathbb{Q}$ son: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 13 & -12 \\ 1 & & -1 & -1 & 12 \\ \hline & -1 & -1 & 12 & 0 \end{array}$$

Las raíces de $-\lambda^2 - \lambda + 12 = 0$ son $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 3$.
Por tanto, $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 4)(\lambda - 3)$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	1	1
-4	1	1
3	1	1

Tabla 4.21: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.13. Sea $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con todos sus coeficientes 1. ¿Es diagonalizable?

$$A = (1)_{i,j} \qquad \forall i, j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

$rg(A) = 1 \Longrightarrow \dim Im(f) = 1 \Longrightarrow \dim Ker(f) = n - 1$.
Por tanto, como $Ker(f) \neq \{0\} \Longrightarrow 0$ es un valor propio. $V_0(f) = Ker(f)$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	$n - 1 \leqslant m_0 \leqslant n$	$n - 1$
-	-	-

Tabla 4.22: Valores propios con lo que sabemos hasta el momento.

Para completar las multiplicidades, es necesario saber si hay más valores propios.

$$(A - \lambda_0 I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda_0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1-\lambda_0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Los valores propios de A son $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid |A - \lambda_0 I| = 0\}$.

$$|A - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_0 = n$ es un valor propio, ya que los vectores columna formarían parte del hiperplano con ecuación implícita $x_1 + \dots + x_n = 0$ y, por tanto, el determinante sería nulo.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	$n-1$	$n-1$
n	1	1

Tabla 4.23: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.14. Sea $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiar si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$. Es decir, estudiar si $\exists\sqrt{A}$.

En primer lugar, vemos si A es diagonalizable y, en su caso, se diagonaliza.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda)-2) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) = (4-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Por tanto, los valores propios son $\{1, 4\}$. Calculamos los subespacios propios.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big| \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	1	1
4	2	2

Tabla 4.24: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A es diagonalizable de la forma $D = P^{-1}AP$, con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos $\sqrt{D}$ como:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular B, despejamos A. $A = PDP^{-1}$

$$P\sqrt{D}P^{-1} \cdot P\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A \Longrightarrow B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

Por tanto, $\exists B = \sqrt{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$, y se define como

$$B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

Ejercicio 4.1.15. Prueba 2022

1. Estudiar $a \in \mathbb{R}$ para los que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se diagonaliza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo en primer lugar su polinomio característico.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a & 1 \\ -a & 1-\lambda & -1 \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a & 1 \\ -a & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a & \lambda \\ -a & 1-\lambda & -1+a \\ 1-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -a & \lambda \\ 1-\lambda & -1+a \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -a+\lambda & \lambda \\ a-\lambda & -1+a \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -a+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1+a \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-a)(\lambda-1+a)$$

Por tanto, los valores propios son: $\{1, a, 1-a\}$. Hay que tener en cuenta el caso en que dos valores propios sean iguales.

$$\begin{array}{ll} a = 1 & \longrightarrow a = 1 \\ 1-a = 1 & \longrightarrow a = 0 \\ a = 1-a & \longrightarrow a = \frac{1}{2} \end{array}$$

Para $a \neq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, los tres valores propios son distintos, por lo que sí es diagonalizable.

- Para $a = 0$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	2
0	1	1

Tabla 4.25: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 0$, A sí es diagonalizable.

- Para $a = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2}} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(A - \frac{1}{2} I\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	1	1
$\frac{1}{2}$	2	1

Tabla 4.26: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = \frac{1}{2}$, A no es diagonalizable.

- Para $a = 1$:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	1
0	1	1

Tabla 4.27: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, para $a = 1$, A no es diagonalizable.

- **Ver si, para $a = 0$ y $a = -1$, las matrices resultantes son semejantes.**

  Para $a = 0$, los valores propios son $\{0, 1, 1\}$.
  Para $a = -1$, los valores propios son $\{1, -1, 2\}$.

  Por tanto, como tienen valores distintos, tienen polinomio característico distinto y, por tanto, no son semejantes.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid |A| = -1$. Demostrar que A es diagonalizable.

   Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $|A| = ad - bc = -1$.

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - (a + d)\lambda - 1$$

$$\Delta = (a + d)^2 + 4 \geqslant 4 > 0 \qquad \forall a, d \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, como el discriminante es positivo, tendrá dos valores propios distintos. Por tanto, A sí es diagonalizable.

- **Encontrar $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid |A| = -1$ t.q. A no sea diagonalizable.**
  En primer lugar, es necesario que solo tenga un valor propio, por lo que

  $$\Delta = 0 \Longrightarrow (a+d)^2 = -4 \Longrightarrow a+d = 2i$$

  Además, como $|A| = -1 \Longrightarrow ad - bc = -1$. Por tanto, una posible $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ es:

  $$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

  $$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = (\lambda - i)^2$$

  Por tanto, el único valor propio es $\{i\}$.

  $$\begin{aligned} V_i &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid (A - iI) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
i	2	1

  Tabla 4.28: Valores propios con sus multiplicidades

  Por tanto, A no es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.16. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $A^2 = I_n$. Demostrar que A es diagonalizable.

Demostración. Haciendo uso del isomorfismo natural entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $End(V)$ con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, consideramos A como la matriz a asociada a $f \in End(V^n)$ el cual cumple que $f \circ f = Id_{\mathbb{K}}$.

$$f \circ f = Id_{\mathbb{K}} \qquad\qquad f(f(x)) = x \quad \forall x \in V$$

Notemos ahora que, dado un $v \in V$ cualquiera, este se puede expresar como:

$$v \in V \quad v = \underbrace{\frac{1}{2}(v + f(v))}_{t_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(v - f(v))}_{t_2}$$

Sea $t_1 = \frac{1}{2}(v + f(v))$ y $t_2 = \frac{1}{2}(v - f(v))$. Nótese también que, como $f \circ f = Id_{\mathbb{K}}$,

$$\begin{aligned} f(t_1) &= \frac{1}{2}(v + f(v)) = t_1 \xrightarrow{(*)} t_1 \text{ es un vector propio.} \quad t_1 \in V_1 \\ f(t_2) &= -\frac{1}{2}(v - f(v)) = -t_2 \xrightarrow{(*)} t_2 \text{ es un vector propio.} \quad t_2 \in V_{-1} \end{aligned} \qquad (*)$$

Como todo $v \in V$ se expresa como la suma de un vector de V_1 y otro de $V_{-1} \Longrightarrow V = V_1 + V_{-1}$. Además, como los subespacios propios de valores propios distintos son disjuntos, $V_1 \cap V_{-1} = \{0\}$. Por tanto, $V_1 \oplus V_{-1} = V$.

Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_{-1}$ bases de V_1 y V_{-1} respectivamente. Como $V = V_1 \oplus V_{-1} \Longrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ forman una base $\mathcal{B}$ de V. Así, V tendrá una base de vectores propios y, por tanto, f es diagonalizable, por lo que A también lo es.

$(*)$ Este razonamiento es válido $\forall f \neq \{Id, -Id\}$, ya que en su caso t_1 o t_2 serían nulos. En el caso en el que sea $f = Id \vee f = -Id$, su matriz asociada A es diagonal y por tanto será diagonalizable.

□

Observación. La aplicación transposición,

$$\begin{array}{rccc} ^t: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & A & \to & A^t \end{array}$$

Tiene como matriz asociada $M(^t, \mathcal{B}) \sim D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.1.17. Dadas $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A_1 \sim A_2$ y $B_1 \sim B_2$. Demostrar que:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \sim A_2 \\ B_1 \sim B_2 \end{array}\right\} \not\Rightarrow A_1 + B_1 \sim A_2 + B_2$$

Se demuestra buscando un contraejemplo. Sean:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $A_1 \sim A_2$. Veamos ahora que $B_1 \sim B_2$.

Sea $f \in End(\mathbb{R}^2)$ y sean $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $B_1 = M(f; \mathcal{B})$ y $B_2 = M(f; \bar{\mathcal{B}})$.

$$f: \left| \begin{array}{l} e_1 \longmapsto e_2 \\ e_2 \longmapsto 0 \end{array} \right. \qquad f: \left| \begin{array}{l} \bar{e_1} \longmapsto 0 \\ \bar{e_2} \longmapsto \bar{e_1} \end{array} \right.$$

Son semejantes, ya que si $\bar{e_1} = e_2$ y $\bar{e_2} = e_1$, las dos matrices representan el mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

Por tanto, sabiendo que se dan las hipótesis,

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $A_1 + B_1 \nsim A_2 + B_2$, ya que tienen rango distinto.[1]

[1]También se puede ver que tienen determinante distinto, o que la segunda es diagonalizable (por ser simétrica) y la primera no.

Ejercicio 4.1.18. Sea $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Demostrar que no son semejantes ($A \nsim B$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ambos casos, tienen el mismo polinomio característico

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

Por tanto, ambas matrices tienen como valor propio $\{1\}$. Veamos ahora la dimensión del subespacio propio V_1 en cada caso.

$$rg(A-I) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad rg(B-I) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto,

Valores Propios	Matriz	Mult. Alg.	Mult. Geom.
A	1	3	$3-1=2$
B	1	3	$3-2=1$

Tabla 4.29: Valores propios con sus multiplicidades para cada matriz

Como tienen multiplicidades geométricas distintas para el mismo valor propio, entonces no representan el mismo endomorfismo. Por tanto, no son semejantes.

Ejercicio 4.1.19. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Estudiar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & a \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1'=F_1-F_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & a \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_2'=F_2-F_4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3'=C_3+C_1}{=}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_4'=C_4+C_2}{=} \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & 2a-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda)(2a-\lambda)$$

Por tanto, los valores propios son $\{0, 2, 2a\}$.

- Si $a \neq \{0, 1\}$:

$$rg(A) = rg(A - 0 \cdot I) = 2 \Longrightarrow \dim V_0 = 4 - 2 = 2$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	2
2	1	1
$2a$	1	1

Tabla 4.30: Valores propios con sus multiplicidades para $a \neq \{0, 1\}$

Por tanto, para $a \neq \{0, 1\}$, A sí es diagonalizable.

- Si $a = 0$:

$$rg(A) = rg(A - 0 \cdot I) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \dim V_0 = 4 - 1 = 3$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	3	3
2	1	1

Tabla 4.31: Valores propios con sus multiplicidades para $a = 0$

Por tanto, para $a = 0$, A sí es diagonalizable.

- Si $a = 1$:

$$rg(A - 2I) = rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \dim V_2 = 4 - 2 = 2$$

$$rg(A) = rg(A - 0 \cdot I) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \dim V_0 = 4 - 2 = 2$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
0	2	2
2	2	2

Tabla 4.32: Valores propios con sus multiplicidades para $a = 1$

Por tanto, para $a = 1$, A sí es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.20. Determinar los valores y vectores propios de las siguientes matrices reales. ¿Son diagonalizables?

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_1'=F_1-F_3}{=}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2+\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)\begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (2+\lambda)(2-\lambda(1+\lambda)) =$$
$$= (2+\lambda)(-\lambda^2-\lambda+2) = (2+\lambda)^2(1-\lambda)$$

Por tanto, A tiene dos valores propios: $\{-2, 1\}$. Veamos sus multiplicidades geométricas:

$$rg(A+2I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \dim V_{-2} = 3-1 = 2$$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
-2	2	2
1	1	1

Tabla 4.33: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, A sí es diagonalizable. Los vectores propios son:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

$$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3 + 1 =$$
$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 + 1 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 3)$$

$$\Delta = 9 - 12 < 0 \Longrightarrow \nexists \ sol \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el único valor propio es $\{0\}$ con multiplicidad simple. Por tanto, B no es diagonalizable.

Los vectores propios son:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Ejercicio 4.1.21. Encontrar, si es posible, pares de endomorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, uno diagonalizable y otro no, que tengan los siguientes polinomios característicos:

1. $P_f(\lambda) = (1-\lambda)^3$
   El endomorfismo diagonalizable tiene por matriz asociada:

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, es diagonalizable, ya que $\dim V_1 = 3 - 0 = 3$.

El endomorfismo no diagonalizable tiene por matriz asociada:

$$M(f', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, no es diagonalizable ya que $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 \neq 3$.

2. $P_f(\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$
   El endomorfismo diagonalizable tiene por matriz asociada:

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   En este caso, es diagonalizable, ya que $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$.

   El endomorfismo no diagonalizable tiene por matriz asociada:

$$M(f', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   En este caso, f' no es diagonalizable ya que $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 \neq 2$.

3. $P_f(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$
   En este caso, solo hay un valor propio real, el $\{1\}$, ya que el término $\lambda^2 + 1$ no tiene raíces reales. Por tanto, como además tiene multiplicidad simple, el endomorfismo solo tendrá un valor propio contado con multiplicidad, por lo que no podrá ser diagonalizable. Por tanto, no es posible encontrar un endomorfismo diagonalizable con ese polinomio característico.

   El endomorfismo no diagonalizable tiene por matriz asociada:

$$M(f', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.1.22. Probar que todo $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \mid det(f) < 0$ es diagonalizable.

Su polinomio característico será:

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - tr(f)\lambda + det(f)$$

$$\Delta = tr^2(f) - 4det(f) > 0 \Longleftrightarrow tr^2(f) > 4det(f) \Longleftrightarrow \frac{tr^2(f)}{4} > det(f)$$

lo cual es cierto ya que $\frac{tr^2(f)}{4} \geqslant 0 > det(f)$. Por tanto, el polinomio característico tiene dos raíces distintas, por lo que hay dos valores propios distintos. Como la multiplicidad geométrica es menor o igual que la algebraica, el endomorfismo es diagonalizable.

Ejercicio 4.1.23. Estudiar si las siguientes matrices son semejantes entre si.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

	A_1	A_2	A_3	
$tr(A)$	2	2	2	
$det(A)$	0	-6	0	$A_1 \nsim A_2 \wedge A_2 \nsim A_3$

Tabla 4.34: Resolución usando propiedades de las matrices semejantes

Calculamos el polinomio característico de A_1:

$$P_{A_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda(8+\lambda(2-\lambda)) = \lambda(-\lambda^2+2\lambda+8) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda+2)$$

Calculamos el polinomio característico de A_3:

$$P_{A_3}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda(8+\lambda(2-\lambda)) = \lambda(-\lambda^2+2\lambda+8) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda+2)$$

Por tanto, ambas matrices tienen como valores propios: $\{-2, 0, 4\}$, por lo que son diagonalizables y semejantes a

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A_1 \sim D \wedge D \sim A_3$, por ser $\sim$ una relación de equivalencia, $A_1 \sim A_3$.

Ejercicio 4.1.24. Calcular A^{12} y A^{-7} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿$\exists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$?

En primer lugar, vemos si A es diagonalizable.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2+\lambda) - (1-\lambda) - 9(1-\lambda) =$$
$$= -(1-\lambda)((1-\lambda)(2+\lambda)+1+9) = -(1-\lambda)(-\lambda^2-\lambda+12) = (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-3)$$

Por tanto, como tiene tres valores propios distintos $\{1, 3, -4\}$, es diagonalizable. Calculamos los suespacios propios.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 3I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{-4} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A + 4I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, A es diagonalizable de la forma $D = P^{-1}AP$, con:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, despejando A, $A = PDP^{-1}$. Por tanto,

$$A^{12} = PD^{12}P^{-1}, \text{ con } D^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{12} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{12} \end{pmatrix}$$

$$A^{-7} = PD^{-7}P^{-1}, \text{ con } D^{-7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4^7} \end{pmatrix}$$

$$B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}, \text{ con } \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-4} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

Por tanto, $\nexists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$, ya que $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.1.25. Dada la ecuación $A^2 = 9I$:

1. Resolver en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Transformamos la ecuación a $I = \left(\frac{1}{3}A\right)^2$. Por tanto, buscamos $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid B^2 = I$.

   $$B = I_2 \quad \text{ó} \quad B = -I_2 \quad \text{ó} \quad B \sim {}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, las solcuiones de $A^2 = 9I$ son $A = 3B$, para las B indicadas previamente.

2. Resolver en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Transformamos la ecuación a $I = \left(\frac{1}{3}A\right)^2$. Por tanto, buscamos $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = I$.

   $$B = I_3 \quad \text{ó} \quad B = -I_3 \quad \text{ó} \quad B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, las soluciones de $A^2 = 9I$ son $A = 3B$, para las B indicadas previamente.

Ejercicio 4.1.26. Sea la ecuación $A^2 = 0$:

1. Resolver en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   Sea $A = M(f; \mathcal{B})$, con $f \in End(\mathbb{R}^3)$ t.q. $f \circ f = 0$.

   Calculemos los valores propios. Si λ_0 es un valor propio de A,

   $$\exists v \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid f(v) = \lambda_0 v \Longrightarrow f(f(v)) = 0 = f(\lambda_0 v) = \lambda_0 f(v) = \lambda_0^2 v \Longrightarrow \Longrightarrow 0 = \lambda_0^2 v \Longrightarrow \lambda_0 = 0 \text{ es el único valor propio posible.}$$

   Por tanto, $\lambda_0 = 0$ será una raíz del polinomio característico de f con multiplicidad algebraica $m_0 \geqslant 1$. Por tanto, la multiplicidad geométrica debe ser $n_0 \geqslant 1$.

   $$n_0 = \dim Ker(f) \geqslant 1 \tag{4.1}$$

   Además, como $f \circ f = 0 \Longrightarrow Im(f) \subset Ker(f)$, ya que $\forall f(v) \in Im(f),\ f(f(v)) = 0 \Longrightarrow f(v) \in Ker(f)$.

   $$Im(f) \subset Ker(f) \Longrightarrow \dim Im(f) \leqslant \dim Ker(f) = n_0 \tag{4.2}$$

   Además, sabemos que

   $$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = 3 \tag{4.3}$$

[2] En los dos primeros casos, no hay más matrices semejantes a ellas, ya que $B = \pm I$

- Supongamos $n_0 = 3$:
  Como $\dim Ker(f) = 3 \Longrightarrow Ker(f) = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow f = 0 \Longrightarrow A = 0$
- Supongamos $n_0 = 1$:
  Por la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 2$, pero por la Ec. 4.2, $2 \leqslant 1$, lo que es una contradicción.
- Supongamos $n_0 = 2$:
  Por la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 1$. Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Sea $\{e_2\}$ la base de $Im(f)$. Ampliamos a una base $\{e_2, e_3\}$ de $Ker(f)$. Además, definimos $f(e_1) = \ e_2$. Por tanto,

$$\bar{A} = M(f; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $A^2 = 0$ son[3]:

$$A = 0 \qquad \text{ó} \qquad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolver en $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:
   Seguimos un razonamiento análogo al apartado anterior.

- Supongamos $n_0 = 4$:
  Como $\dim Ker(f) = 4 \Longrightarrow Ker(f) = \mathbb{R}^4 \Longrightarrow f = 0 \Longrightarrow A = 0$
- Supongamos $n_0 = 1$:
  Por la análoga a la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 3$, pero por la Ec. 4.2, $3 \leqslant 1$, lo que es una contradicción.
- Supongamos $n_0 = 3$:
  Por la análoga a la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 1$. Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$. Sea $\{e_2\}$ la base de $Im(f)$. Ampliamos a una base $\{e_2, e_3, e_4\}$ de $Ker(f)$. Además, definimos $f(e_1) = \ e_2$. Por tanto,

$$\bar{A} = M(f; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Supongamos $n_0 = 2$:
  Por la análoga a la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 2$. Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$. Sea $\{e_3, e_4\}$ la base de $Im(f)$ y de $Ker(f)$. Además, definimos $f(e_1) = \ e_3, \ f(e_2) = \ e_4$. Por tanto,

$$\bar{A} = M(f; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] En este caso se dice que solo hay una clase de semejanza

Por tanto, las soluciones de la ecuación $A^2 = 0$ son, con 2 clases de semejanza,

$$A = 0 \qquad ó \qquad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ó \qquad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Resolver en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   Seguimos un razonamiento análogo al apartado anterior.

   - Supongamos $n_0 = 2$:
     Como $\dim Ker(f) = 2 \Longrightarrow Ker(f) = \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f = 0 \Longrightarrow A = 0$
   - Supongamos $n_0 = 1$:
     Por la análoga a la Ec. 4.3, $\dim Im(f) = 1$. Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Sea $\{e_2\}$ la base de $Im(f)$ y $Ker(f)$. Además, definimos $f(e_1) = e_2$. Por tanto,
     $$\bar{A} = M(f; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, las soluciones de la ecuación $A^2 = 0$, con 1 clase de semejanza, son:

   $$A = 0 \qquad ó \qquad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.1.27. Resolver la ecuación $f^3 = f \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$.

Calculemos los posibles valores propios. Si λ_0 es un valor propio de f,

$$\exists v \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid f(v) = \lambda_0 v \Longrightarrow f^3(v) = \lambda_0^3 v \Longrightarrow \lambda_0^3 v = \lambda_0 v \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda_0^3 = \lambda_0 \Longrightarrow \lambda_0 = \{-1, 0, 1\} \text{ son los posibles valores propios.}$$

- Caso 1: $f \in Aut(\mathbb{R}^n)$
  Como $f^3 = f \Longrightarrow f(f^2 - Id) = 0$. Además, como f es biyectiva, $\exists f^{-1}$. Por tanto, las soluciones son $f^2 = Id$.

  Por tanto, las soluciones tomando $A = M(f, \mathcal{B})$ son:

  $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{r\ veces}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \overset{s\ veces}{\ddots} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } r \text{ y } s \text{ tal que } r + s = n$$

- Caso 2: f no biyectiva. Es decir, $ker(f) \neq \{0\}$
  Sea $v \in Ker(f) \cap Im(f) - \{0\}$

  - $\exists w \in V \mid f(w) = v$

- $f(v) = 0$

Por tanto, $f^2(w) = 0 \Longrightarrow f^3(w) = f(0) = 0 \Longrightarrow f^3(w) = f(w) = 0$. Por tanto, como $f(w) = v = 0 \Longrightarrow v = 0$. Pero $v \neq 0$, por lo que llegamos a una contradicción. Por tanto, $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. En conclusión,

$$Ker(f) \oplus Im(f) = V$$

La restricción $h := f|_{Im(f)} : Im(f) \to Im(f)$ tiene núcleo trivial.

$$Ker(h) = \{0\}$$

Por tanto, nos referimos al apartado anterior, ya que la restricción h es un automorfismo.

Por tanto, existe una base de $Im(f)$ $\{e_1, \dots, e_r\}$ t.q. $f(e_i) = \pm e_i \quad \forall i$.

Sea $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ base de $Ker(f)$. Por tanto, $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ es una base de V. Por tanto, f es diagonalizable.

Por tanto, las soluciones tomando $A = M(f, \mathcal{B})$ son:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots^{x\ veces} &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots^{y\ veces} &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots^{t\ veces} & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } x, y, t \mid x + y + t = n$$

Ejercicio 4.1.28. Sea $f \in End(\mathbb{R}^3)$ que respecto a la base usual $\mathcal{B}_u$ tiene la matriz asociada

$$M(f, \mathcal{B}_u) = A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Estudiar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriz es diagonalizable.

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha-\lambda & \alpha-1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -\alpha & 0 \\ 2+\alpha & -\alpha-\lambda & -1-\lambda \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -\alpha & 0 \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\left[(1-\lambda+\alpha)(1-\lambda-\alpha)+\alpha^2\right] = -(1+\lambda)\left[(1-\lambda)^2-\alpha^2+\alpha^2\right] =$$
$$= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

Por tanto, independientemente del valor de α, los valores propios son: $\{1, -1\}$. Veamos la multiplicidad geométrica del 1:

$$rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha-1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango mediante determinantes.

$$det(A-I) = \begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha-1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2+\alpha & -\alpha-1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2+\alpha & -\alpha-1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha + 2\alpha = \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$$

- Para $a \neq 0$:
  Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow rg(A - I) = 2 \Longrightarrow \dim V_1 = 3 - 2 = 1$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	1
-1	1	1

Tabla 4.35: Valores propios con sus multiplicidades para $\alpha \neq 0$

  Por tanto, para $\alpha \neq 0$, f no es diagonalizable.

- Para $\alpha = 0$:

$$rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

  Como $rg(A - I) = 1 \Longrightarrow \dim V_1 = 3 - 1 = 2$.

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
1	2	2
-1	1	1

Tabla 4.36: Valores propios con sus multiplicidades para $\alpha = 0$

  Por tanto, para $\alpha = 0$, f sí es diagonalizable.

2. Diagonalizar f dando la matriz de cambio de base.
   Diagonalizamos para para $\alpha = 0$, ya que es el único valor para el cual f es diagonalizable.

$$M(f, \mathcal{B}_u) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Por tanto, $D = P^{-1}AP$, con:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $D = M(f, \mathcal{B}')$ la matriz asociada a f y $P = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}_u)$ la matriz de cambio de base.

Ejercicio 4.1.29. Sea $f \in End(V)$. Probar:

1. $f(V_\lambda) = V_\lambda$, para todo valor propio $\lambda \neq 0$.

   Demostración. Veamos en primer lugar que $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$:

   $$\forall f(v) \in f(V_\lambda), f(v) = \lambda v \in V_\lambda \Longrightarrow f(V_\lambda) \subset V_\lambda \tag{4.4}$$

   donde hemos usado que λ es un escalar y que V_λ es un subespacio vectorial, por lo que es cerrado para el producto por escalares.

   Veamos ahora que tienen la misma dimensión.

   $$Ker(V_\lambda) = \{v \in V_\lambda \mid \lambda v = 0\} = \{0\}, \text{ ya que } \lambda \neq 0$$

   $$\dim Im(V_\lambda) = \dim V_\lambda - \dim Ker(V_\lambda) = \dim V_\lambda \tag{4.5}$$

   Por tanto, por las ecuaciones 4.4 y 4.5,

   $$f(V_\lambda) = V_\lambda \qquad \forall \lambda \neq 0$$

   □

2. $f \in Aut(V) \iff 0$ no es un valor propio de f.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Suponemos f automorfismo.
Por tanto, f es homomorfismo, por lo que $Ker(f) = \{0\}$. Por tanto,

$$\nexists v \in V - \{0\} \mid f(v) = 0v = 0$$

Por tanto, el 0 no es un valor propio de f.

$\Longleftarrow$) Suponemos que el 0 no es un valor propio de f.
Entonces, $Ker(f) = \{0\}$, por lo que f es un homomorfismo.
Además, como $\dim Im(f) = \dim V - \dim Ker(f) = \dim V$, también es un epimorfismo.
Por tanto, f es un isomorfismo, por lo que es un automorfismo.

□

3. Sea $f \in Aut(V)$. λ es un valor propio de $f \iff \lambda^{-1}$ es un valor propio de f^{-1}.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Suponemos λ valor propio de f.
En primer lugar, hay que destacar que como f es un automorfismo, y por lo demostrado en el apartado anterior, $\lambda \neq 0$.
Como λ es un valor propio, $\exists v \in V - \{0\} \mid f(v) = \lambda v$.

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(v) = v \Longrightarrow f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v) = v \Longrightarrow \\ \Longrightarrow f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v \Longrightarrow \lambda^{-1} \text{ es un valor propio de } f^{-1}\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Suponemos λ^{-1} valor propio de f^{-1}.
En primer lugar, hay que destacar que como f es un automorfismo, f^{-1} también lo es y, por lo demostrado en el apartado anterior, $\lambda^{-1} \neq 0$.
Como λ^{-1} es un valor propio, $\exists v \in V - \{0\} \mid f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$.

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(v) = v \Longrightarrow f(f^{-1}(v)) = f(\lambda^{-1} v) = \lambda^{-1} f(v) = v \Longrightarrow \\ \Longrightarrow f(v) = \lambda v \Longrightarrow \lambda \text{ es un valor propio de } f\end{aligned}$$

□

Ejercicio 4.1.30. Sea $f \in End(\mathbb{R}^2) \mid nul(f) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y solo si $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Suponemos f diagonalizable.

Como $nul(f) = \dim Ker(f) = 1$, sea $\{e_2\}$ base de $Ker(f)$.

$$f(e_2) = 0$$

Amplío a una base de $\mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$

$$f(e_1) = ae_1 + be_2$$

$$M(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es: $P_f(\lambda) = \lambda(\lambda - a)$, por lo que tiene como valores propios $\{0, a\}$.

Por el Teorema Fundamental de Diagonalización, como f es diagonalizable y $\dim V_0 = \dim Ker(f) = 1$, la multiplicidad algebraica del 0 $m_0 = 1$. Por tanto,

$$a \neq 0$$

Veamos ahora el valor de $Ker(f) \cap Im(f)$. Supongamos $x \in Ker(f) \cap Im(f)$:

$$x \in Ker(f) \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ax_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$$

$$x \in Im(f) \Longrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^2 \mid f(y) = x \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 \\ by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} ay_1 = 0 \Longrightarrow y_1 = 0 \\ by_1 = x_2 \Longrightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, como $x_1 = x_2 = 0$, $x = 0$ y por tanto $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

$\Longleftarrow$) Suponemos $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. Veamos que f es diagonalizable.

Veamos que $V = Ker(f) \oplus Im(f)$:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim Im(f) + \dim Ker(f) = \dim(Im(f) + Ker(f)) + \dim(Im(f) \cap Ker(f)) =$$
$$= \dim(Im(f) + Ker(f))$$

Como $Im(f) \subset \mathbb{R}^2$ y $Ker(f) \subset \mathbb{R}^2 \Longrightarrow Im(f) + Ker(f) \subset \mathbb{R}^2$. Como además, tienen la misma dimensión, se da la igualdad, $Im(f) + Ker(f) = \mathbb{R}^2$. Por último, como $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$, la suma es directa.

$$Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{R}^2$$

Como $\dim Ker(f) = 1$, $\dim Im(f) = 1$. Sea $\{e_2\}$ base de $Ker(f)$ y $\{e_1\}$ base de $Im(f)$. Como es suma directa, la unión de las bases también es una base. Por tanto, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

$$f(e_1) = ae_1,\ a \neq 0 \qquad f(e_2) = 0 \qquad M(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los valores propios del endomorfismo son $\{0, a\}$. Como $a \neq 0$, tiene dos valores propios distinos. Por tanto, f es diagonalizable. $\square$

Ejercicio 4.1.31. Sea $f \in End(V) \mid f^2 = f$. Probar que

$$V = Ker(f) \oplus Ker(f - 1_V).$$

Deducir que f es diagonalizable.

Demostración. Demostramos en primer lugar que $Ker(f) \cap Ker(f - 1_V) = \{0\}$. Sea $v \in Ker(f) \cap Ker(f - 1_V)$.

$$v \in Ker(f) \Longrightarrow f(v) = 0$$
$$v \in Ker(f - 1_V) \Longrightarrow (f - 1_V)(v) = 0 = f(v) - v \Longrightarrow f(v) = v$$

Por tanto, $v = f(v) = 0 \Longrightarrow Ker(f) \cap Ker(f - 1_V) = \{0\}$.

Veamos ahora que $V = Ker(f) + Ker(f - 1_V)$. Sea $v \in V$:

$$v = \underbrace{v - f(v)}_{t_1} + \underbrace{f(v)}_{t_2}$$

Veamos que $t_1 = v - f(v) \in Ker(f)$:

$$f(t_1) = f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0 \Longrightarrow t_1 \in Ker(f)$$

Veamos que $t_2 = f(v) \in Ker(f - 1_V)$:

$$(f - 1_V)(t_2) = (f - 1_V)(f(v)) = f(v) - f(v) = 0 \Longrightarrow t_2 \in Ker(f - 1_V)$$

Por tanto, como $V = Ker(f) + Ker(f - 1_V)$ y, además, son conjuntos disjuntos,

$$V = Ker(f) \oplus Ker(f - 1_V)$$

Veamos ahora que f es diagonalizable:

$$\begin{aligned} f(t_1) = 0 &\xrightarrow{(**)} t_1 \text{ es un vector propio.} \quad t_1 \in V_0 \\ f(t_2) = f(f(v)) = f(v) = t_2 &\xrightarrow{(**)} t_2 \text{ es un vector propio.} \quad t_2 \in V_1 \end{aligned} \qquad (**)$$

Es fácil ver que $V_0 = Ker(f)$ y $V_1 = Ker(f - 1_V)$. Por tanto, sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ base de $V_0 = Ker(f)$ y sea $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_t\}$ base de $V_1 = Ker(f - 1_V)$. $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ será base de V por ser suma directa, y además todos sus elementos serán vectores propios, por lo que será diagonalizable.

$(**)$ Este razonamiento es válido siempre que $f \neq \{Id, 0\}$, ya que t_1 o t_2 serían vectores nulos. Sin embargo, tanto $f = Id$ como $f = 0$ son diagonalizables. □

Ejercicio 4.1.32. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $|A| < 0$. Estudiar si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^2 = A$.

Supongamos que sí existe. Tomando determinantes,

$$|B^2| = |A| \Longrightarrow |B|^2 = |A| \Longrightarrow |B|^2 < 0$$

Por tanto, llegamos a una contradicción, ya que no podemos encontrar $|B| \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\nexists B \mid B^2 = A$.

Ejercicio 4.1.33. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sea el espacio vectorial $\upsilon \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dado por:

$$\upsilon = \{p(A) \mid p \in \mathbb{K}[\lambda]\}$$

Demostrar que $\dim \upsilon \leqslant n$.

Demostración. Como $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \Longrightarrow \dim \upsilon \leqslant n^2$.

Aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton,

$$P_A(A) = 0 = \pm A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 \cdot I$$

Por tanto, A^n es combinación lineal de $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$.

Divido $p(\lambda)$ un polinomio cualquiera entre $P_A(\lambda)$:

$$p(\lambda) = P_A(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda) \qquad grd(r) < n$$

Por tanto, $p(A) = \cancelto{0}{P_A(A)q(A)} + r(A)$.

Por tanto, el subespacio υ tiene como sistema de generadores $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \dim \upsilon \leqslant n$ □

Ejercicio 4.1.34. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. ¿Puede ser que sea diagonalizable en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$?
   No, ya que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. ¿Puede ser que sea diagonalizable en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{R}$?
   Sí, y como ejemplo tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con polinomio característico $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

3. ¿Puede ser que sea no sea diagonalizable en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{C}$?
   Sí, y como ejemplo tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con polinomio característico $P_A(\lambda) = \lambda^2$

Ejercicio 4.1.35. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cuyos valores propios son $\{-1, 1, 2, -2\}$ con multiplicidad algebraica cualquiera. Calcular

$$rg(A + 3I).$$

λ_0 valor propio $\Longrightarrow |A - \lambda_0 I| = 0 \Longrightarrow (A - \lambda_0 I)$ no es regular.

Como el -3 no es un valor propio, entonces la matriz $(A + 3I)$ es regular y, por tanto,

$$rg(A + 3I) = n$$

Ejercicio 4.1.36. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1+a \end{pmatrix}$$

Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable.

Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, sea $p(x) = x + a$. Como $A = B + aI = p(B)$, y B es diagonalizable (ver Ej. 4.1.13) $\Longrightarrow A$ es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.1.37. Sea $f \in End(\mathbb{V}^3(\mathbb{R}))$ que en cierta base tiene como matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & 1 \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo f es diagonalizable.

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ a & a-1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ a & a-1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -a & -\lambda & -1 \\ a & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

Por tanto, los valores propios de f son: $\{1, -1\}$.

$$rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} a & 1+a & 1 \\ -a & -a-1 & -1 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} a & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, $\dim V_1 = 3 - rg(A - I) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{array} \right.$

Valores Propios	Mult. Alg.	Mult. Geom.
-1	1	1
1	2	$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{array} \right.$

Tabla 4.37: Valores propios con sus multiplicidades

Por tanto, se puede ver que f solo es diagonalizable si $a = 0$.

Ejercicio 4.1.38. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demostrar que $\exists p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda] \mid p(A) = A^{-1}$.

Demostración. Usando el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$P_A(A) = 0 = (-1)^n A^n + (-1)^{n-1} tr(A) A^{n-1} + \dots + c_1 A + det(A) I$$

Como A es regular, $\exists A^{-1}$. Multiplicando por A^{-1},

$$A^{-1} P_A(A) = 0 = (-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1} tr(A) A^{n-2} + \dots + c_2 A + c_1 I + det(A) A^{-1}$$

Despejando A^{-1},

$$-\,det(A)A^{-1} = (-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1}tr(A)A^{n-2} + \cdots + c_2A + c_1I \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A^{-1} = -\frac{(-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1}tr(A)A^{n-2} + \cdots + c_2A + c_1I}{det(A)}$$

donde he podido despejarla ya que $det(A) \neq 0$ por ser regular. Por tanto, he despejado el polinomio A^{-1} en función de A, teniendo así el polinomio buscado. □

Ejercicio 4.1.39. Encontrar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, siendo n par, tal que no tenga ningún valor propio.

La matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene valores propios reales.

La matriz $A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ tampoco tiene valores propios reales, ya que su polinomio característico es $P_{A_2}(\lambda) = P_{A_1}(\lambda)P_{A_1}(\lambda)$, que tampoco tiene raíces reales. Por tanto, la solución es:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_1 \end{array}\right)$$

ya que $P_A(\lambda) = P_{A_1}(\lambda) \dots P_{A_1}(\lambda)$.

Ejercicio 4.1.40. Sea $A, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tal que $A = AC - CA$. Demostrar que $A^2 = 0_2$.

Veamos en primer lugar que $tr(A) = 0$:

$$tr(A) = tr(AC - CA) = tr(AC) - tr(CA) = 0$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$P_A(A) = 0 = A^2 - \cancel{tr(A)A} + det(A)I = A^2 + det(A)I \Longrightarrow A^2 = -det(A)I$$

Además, tenemos:

$$A^2 = A(AC - CA) = A^2C - ACA \tag{4.6}$$
$$A^2 = (AC - CA)A = ACA - CA^2 \tag{4.7}$$

Sumando las ecuaciones 4.6 y 4.7,

$$2A^2 = A^2C - CA^2 = -det(A)IC + Cdet(A)I = 0 \Longrightarrow A^2 = 0_2$$

Ejercicio 4.1.41. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^3 = 0_2$. Demostrar que $A^2 = 0$.

Por el Teorema de Cayley-Hamilton,

$$P_A(A) = 0 = A^2 - tr(A)A + det(A)I \Longrightarrow \cancel{A^3} - tr(A)A^2 + det(A)A = 0 \Longrightarrow A^2 = A\frac{det(A)}{tr(A)}$$

Veamos el valor de $det(A)$:

$$0 = |A^3| = |A|^3 \Longrightarrow |A| = 0$$

Por tanto, $A^2 = A \cdot 0 = 0$.

Ejercicio 4.1.42. Sean $A, P, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}AP = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Demostrar que entonces las columnas de P son proporcionales a las columnas de Q.

4.2. Formas bilineales simétricas y formas cuadráticas.

Ejercicio 4.2.1. Sea g una métrica en un espacio vectorial $V^2(\mathbb{R})$ que respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ viene dada por la matriz $M(g_i, \mathcal{B}) = A_i$. Clasificar la métrica en cada caso (= calcular nulidad e índice).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_1) = 2 \Longrightarrow Nul(g_1) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

   $$A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_1 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_1| = -1$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

   $$A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_1) = 0$ y $Ind(g_1) = 1$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_2) = 2 \Longrightarrow Nul(g_2) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

   $$A_2 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_2 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_2 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_2| = -1$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

   $$A_2 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_2) = 0$ y $Ind(g_2) = 1$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_3) = 1 \Longrightarrow Nul(g_3) = 1$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

   $$A_3 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_3 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando $U = \mathcal{L}\{e_1\}$, tenemos que $g_{|U}$ es definida positiva. Por tanto, como $\dim U = 1$, tenemos que $k \geqslant 1$, siendo k el número de 1 de la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto,

$$A_3 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que $Nul(g_3) = 1$ y $Ind(g_3) = 0$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_4) = 2 \Longrightarrow Nul(g_4) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_4 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_4| = -2$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

$$A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_4) = 0$ y $Ind(g_4) = 1$.

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_5) = 2 \Longrightarrow Nul(g_5) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_5 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_5| = -1$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

$$A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_5) = 0$ y $Ind(g_5) = 1$.

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_6) = 2 \Longrightarrow Nul(g_6) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_6 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_6| = -1$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

$$A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_6) = 0$ y $Ind(g_6) = 1$.

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_7) = 2 \Longrightarrow Nul(g_7) = 0$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_7 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_7 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_7 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos también que $|A_7| = -7$. Como el signo del determinante es un invariante, concluimos que:

$$A_7 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_7) = 0$ y $Ind(g_7) = 1$.

Por tanto, tenemos que:

$A_i = M(g_i; \mathcal{B})$	$Nul(g_i)$	$Ind(g_i)$
g_1	0	1
g_2	0	1
g_3	1	0
g_4	0	1
g_5	0	1
g_6	0	1
g_7	0	1

(4.8)

Ejercicio 4.2.2. Referidas a las matrices del ejercicio anterior,

1. Estudiar cuáles de estas matrices son congruentes.

   Haciendo uso de que $\sim_c$ es una relación de equivalencia, tenemos que:

$$A_i \sim_c A_j \ \forall i, j \neq 3 \qquad\qquad A_3 \nsim_c A_i \ \forall i$$

2. Estudiar cuáles de las métricas anteriores son isométricas.

   Como dos matrices isométricas equivale a que sean congruentes, tenemos el mismo resultado que en el apartado anterior.

Ejercicio 4.2.3. Para cada una de las métricas anteriores construir, a partir de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, una base de Sylvester $\mathcal{B}_i^S$.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que:

$$A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_1, \mathcal{B}_1^S)$$

   Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,1)^t_{\mathcal{B}} = e_1 + e_2$.

$$g_1(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_1(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) + 2g(e_1, e_2) = 2 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp &= \{v \in V \mid g_1(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (-1,1)^t_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2$.

$g_1(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g_1(-e_1+e_2, -e_1+e_2) = g(e_1,e_1) + g(e_2,e_2) - 2g(e_1,e_2) = -2 \neq 0$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1+e_2, -e_1+e_2\}$,

$$M(g_1, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_1^S = \left\{ \frac{\bar{e_1}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e_2}}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \frac{-e_1+e_2}{\sqrt{2}} \right\}$$

Calculamos sus imágenes:

$$g_1\left(\frac{\bar{e_1}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e_1}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}^2} \cdot g_1(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$g_1\left(\frac{\bar{e_2}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e_2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}^2} \cdot g_1(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

Efectivamente, tenemos que:

$$M(g_1, \mathcal{B}_1^S) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que:

$$A_2 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_2, \mathcal{B}_2^S)$$

   Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (0,1)^t_{\mathcal{B}} = e_2$.

$$g_2(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_2(e_2, e_2) = 1 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp = \{v \in V \mid g_2(\bar{e_1}, v) = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (0,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (-1,1)^t_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2$.

$$g_2(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g_2(-e_1+e_2, -e_1+e_2) = g_2(e_1,e_1)+g_2(e_2,e_2)-2g_2(e_1,e_2) = 0+1-2 = -1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_2, -e_1 + e_2\}$,

$$M(g_2, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_2^S = \bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_2, -e_1 + e_2\}$$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que:

$$A_3 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} = M(g_3, \mathcal{B}_3^S)$$

Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,0)^t_{\mathcal{B}} = e_1$.

$$g_3(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_3(e_1, e_1) = 1 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \in Ker(g_3)$.

$$\begin{aligned}
Ker(g_3) = \{v \in V \mid g_3(u,v) = 0 \qquad \forall u \in V\} &= \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (-1,1)^t_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2$.

$$g_3(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = 0$$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, -e_1 + e_2\}$,

$$M(g_3, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_3^S = \bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, -e_1 + e_2\}$$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que:

$$A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_4, \mathcal{B}_4^S)$$

   Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,0)^t_{\mathcal{B}} = e_1$.

$$g_4(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_4(e_1, e_1) = 1 \neq 0$$

   Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned} < \bar{e_1} >^\perp = \{v \in V \mid g_4(\bar{e_1}, v) = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, $\bar{e_2} = (-1,1)^t_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2$.

$$g_4(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g_4(-e_1+e_2, -e_1+e_2) = g_4(e_1, e_1)+g_4(e_2, e_2)-2g_4(e_1, e_2) = 1-1-2 = -2 \neq 0$$

   Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, -e_1 + e_2\}$,

$$M(g_4, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_4^S = \left\{ \bar{e_1}, \frac{\bar{e_2}}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ e_1, \frac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \right\}$$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Tenemos que:

$$A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_5, \mathcal{B}_5^S)$$

Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,0)^t_{\mathcal{B}} = e_1$.

$$g_5(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_5(e_1, e_1) = 1 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned} < \bar{e_1} >^\perp &= \{v \in V \mid g_5(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (2,-1)^t_{\mathcal{B}} = 2e_1 - e_2$.

$$\begin{aligned} g_5(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g_5(2e_1 - e_2, 2e_1 - e_2) = g_5(2e_1, 2e_1) + g_5(e_2, e_2) - 2g_5(2e_1, e_2) = \\ = 2^2 g_5(e_1, e_1) + g_5(e_2, e_2) - 2^2 g_5(e_1, e_2) = 2^2 + 3 - 2^3 = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, 2e_1 - e_2\}$,

$$M(g_5, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_5^S = \bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, 2e_1 - e_2\}$$

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Tenemos que:

$$A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_6, \mathcal{B}_6^S)$$

Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,0)^t_{\mathcal{B}} = e_1$.

$$g_6(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_6(e_1, e_1) = 1 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned} < \bar{e_1} >^\perp &= \{v \in V \mid g_6(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (2,1)^t_{\mathcal{B}} = 2e_1 + e_2$.

$$\begin{aligned} g_6(\bar{e_2}, \bar{e_2}) &= g_6(2e_1 + e_2, 2e_1 + e_2) = g_6(2e_1, 2e_1) + g_6(e_2, e_2) + 2g_6(2e_1, e_2) = \\ &= 2^2 g_6(e_1, e_1) + g_6(e_2, e_2) + 2^2 g_6(e_1, e_2) = 2^2 + 3 + (-2)^3 = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, 2e_1 + e_2\}$,

$$M(g_6, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_6^S = \bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, 2e_1 + e_2\}$$

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Tenemos que:

$$A_7 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = M(g_7, \mathcal{B}_7^S)$$

Busco ahora un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = (1,0)^t_{\mathcal{B}} = e_1$.

$$g_7(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g_7(e_1, e_1) = 1 \neq 0$$

Busco ahora $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$.

$$\begin{aligned} <\bar{e_1}>^\perp &= \{v \in V \mid g_7(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid (1,-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = (2,1)^t_{\mathcal{B}} = 2e_1 + e_2$.

$$\begin{aligned} g_7(\bar{e_2}, \bar{e_2}) &= g_7(2e_1 + e_2, 2e_1 + e_2) = g_7(2e_1, 2e_1) + g_7(e_2, e_2) + 2g_7(2e_1, e_2) = \\ &= 2^2 g_7(e_1, e_1) + g_7(e_2, e_2) + 2^2 g_7(e_1, e_2) = 2^2 - 3 - 2^3 = -7 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\} = \{e_1, 2e_1 + e_2\}$,

$$M(g_7, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -7 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_7^S = \left\{ \bar{e_1}, \frac{\bar{e_2}}{\sqrt{7}} \right\} = \left\{ e_1, \frac{2e_1 + e_2}{\sqrt{7}} \right\}$$

Ejercicio 4.2.4. Sea g una métrica en un espacio vectorial $V^3(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, que respecto de la base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ viene dada por la matriz $M(g_i;\mathcal{B})=A_i$.

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\qquad A_5=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad A_6=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1. Clasificar la métrica en cada caso.

   a) $A_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_1)=3\Longrightarrow Nul(g_1)=0$. Además, tenemos que $|A_1|=-1$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

   $$A_1\sim_c\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\qquad \text{o}\qquad A_1\sim_c\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

   Si fuese el segundo caso, tendríamos que g_1 sería definida negativa. No obstante, vemos que $g(e_2,e_2)=1>0$. Por tanto, no puede ser definida negativa, por lo que nos encontramos en el primer caso.

   $$A_1\sim_c\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_1)=0$ y $Ind(g_1)=1$.

   b) $A_2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

   Tenemos que $rg(A_2)=3\Longrightarrow Nul(g_2)=0$. Además, tenemos que $|A_2|=1$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

   $$A_2\sim_c\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\qquad \text{o}\qquad A_2\sim_c\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

   Si fuese el primer caso, tendríamos que g_2 sería definida positiva. No obstante, vemos que $g(e_1,e_1)=0\not>0$. Por tanto, no puede ser definida positiva, por lo que nos encontramos en el segundo caso.

   $$A_2\sim_c\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

   Por tanto, concluimos que $Nul(g_2)=0$ y $Ind(g_2)=2$.

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $rg(A_3) = 3 \Longrightarrow Nul(g_3) = 0$. Además, tenemos que $|A_3| = -1$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_3 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_3 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Si fuese el segundo caso, tendríamos que g_3 sería definida negativa. No obstante, vemos que $g(e_1, e_1) = 1 \not< 0$. Por tanto, no puede ser definida negativa, por lo que nos encontramos en el primer caso.

$$A_3 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que $Nul(g_3) = 0$ y $Ind(g_3) = 1$.

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $rg(A_4) = 3 \Longrightarrow Nul(g_4) = 0$. Además, tenemos que $|A_4| = 2$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Si fuese el segundo caso, tendríamos que g_4 sería definida positiva. No obstante, vemos que $g(e_2, e_2) = 0 \not> 0$. Por tanto, no puede ser definida positiva, por lo que nos encontramos en el primer caso.

$$A_4 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que $Nul(g_4) = 0$ y $Ind(g_4) = 2$.

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos que $rg(A_5) = 1 \Longrightarrow Nul(g_5) = 2$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_5 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $U = \mathcal{L}\{e_1\}$. Como $g_{5|U}$ es definida positiva, entonces tenemos que $k \geqslant 1$, con k el número de 1 en la matriz asociada a la Base de Sylvester. Por tanto, nos encontramos en el primer caso.

$$A_5 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que $Nul(g_5) = 2$ y $Ind(g_5) = 0$.

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos que $rg(A_6) = 2 \Longrightarrow Nul(g_6) = 1$. Por tanto, por el Teorema de Sylvester,

$$A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_6 \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$. Como $g_{6|U}$ es definida positiva, entonces tenemos que $k \geqslant 2$, con k el número de 1 en la matriz asociada a la Base de Sylvester. Por tanto, nos encontramos en el primer caso.

$$A_6 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que $Nul(g_6) = 1$ y $Ind(g_6) = 0$.

Por tanto, tenemos que:

g_i	$Nul(g_i)$	$Ind(g_i)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$Ind(g_i)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
g_1	0	1	0
g_2	0	2	0
g_3	0	1	0
g_4	0	2	0
g_5	2	0	0
g_6	1	0	0

(4.9)

2. Estudiar cuales de las métricas son congruentes entre sí.

   Haciendo uso de que $\sim_c$ es una relación de equivalencia, tenemos que:

   - Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $g_1 \sim_c g_3 \qquad g_2 \sim_c g_4$
   - Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $g_i \sim_c g_j \qquad \forall i, j = 1, \dots, 4$

3. Construir, a partir de la base $\mathcal{B}$, una base de Sylvester en cada caso.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_1) = 0$. Buscamos $\bar{e_1} \in V^3 \mid g_1(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = 1$. Sea $\bar{e_1} = (0,1,0)^t = e_2$.

$$\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp = \{v \in V \mid g_1(\bar{e_1}, v) = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (0,1,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_2 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Como necesito cuadrado no nulo, sea ahora $\bar{e_2} = (1,0,1)^t = e_1 + e_3$.

$$g_1(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) + 2g(e_1, e_3) = 2$$

$$\begin{aligned}
< \bar{e_2} >^\perp = \{v \in V \mid g_1(\bar{e_2}, v) = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_2}^t A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Como necesito cuadrado no nulo, sea ahora $\bar{e_3} = (1,0,-1)^t = e_1 - e_3$.

$$g_1(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) - 2g(e_1, e_3) = -2$$

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_2, e_1 + e_3, e_1 - e_3\}$, tenemos:

$$M(g_1, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{B}_S = \left\{ e_2, \frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}, \frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}} \right\}$.

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{B}_S = \left\{e_2, \frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}, \frac{e_1-e_3}{\sqrt{-2}}\right\}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_2) = 0$. Buscamos $\bar{e_1} \in V^3 \mid g_2(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = 1$. Sea $\bar{e_1} = (0,1,0)^t = e_2$.

$$\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp = \{v \in V \mid g_2(\bar{e_1}, v) = 0\} &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Como necesito cuadrado no nulo, sea ahora $\bar{e_2} = (1,0,-1)^t = e_1 - e_3$.

$$g_2(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) - 2g(e_1, e_3) = -2$$

$$\begin{aligned}
< \bar{e_2} >^\perp = \{v \in V \mid g_2(\bar{e_2}, v) = 0\} &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_2}^t A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (-1,0,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid -x_1 + x_3 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, necesito que $\bar{e_3} \in (< \bar{e_1} >^\perp \cap < \bar{e_2} >^\perp)$. Sea $\bar{e_3} = (1,-2,1)^t = e_1 - 2e_2 + e_3$.

$$g_2(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = (1,-2,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1,0,-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_2, e_1 - e_3, e_1 - 2e_2 + e_3\}$, tenemos:

$$M(g_2, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{B}_S = \left\{e_2, \frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}, \frac{e_1-2e_2+e_3}{\sqrt{2}}\right\}$.
- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{B}_S = \left\{e_2, \frac{e_1-e_3}{\sqrt{-2}}, \frac{e_1-2e_2+e_3}{\sqrt{-2}}\right\}$.

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_3) = 0$. Buscamos $\bar{e_1} \in V^3 \mid g_3(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = 1$. Sea $\bar{e_1} = (1,0,0)^t = e_1$.

$$< \bar{e_1} >^\perp = \{v \in V \mid g_3(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como necesito cuadrado no nulo, sea ahora $\bar{e_2} = (1,0,-1)^t = e_1 - e_3$.

$$g_3(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) - 2g(e_1, e_3) = 1 + 0 - 2 = -1$$

$$< \bar{e_2} >^\perp = \{v \in V \mid g_3(\bar{e_2}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_2}^t A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (0,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, necesito que $\bar{e_3} \in (< \bar{e_1} >^\perp \cap < \bar{e_2} >^\perp)$. Sea $\bar{e_3} = (0,1,-1)^t = e_2 - e_3$.

$$g_3(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = g(e_2, e_2) + g(e_3, e_3) - 2g(e_2, e_3) = 1 + 0 - 0 = 1$$

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_1, e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$, tenemos:

$$M(g_3, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{B}_S = \{e_1, e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$.
- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{B}_S = \left\{e_1, e_2 - e_3, \frac{e_1 - e_3}{i}\right\}$.

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_4) = 0$. Buscamos $\bar{e_1} \in V^3 \mid g_4(\bar{e_1}, \bar{e_1}) \neq 0$. Sea $\bar{e_1} = (1, 1, 0)^t = e_1 + e_2$.

$$g_4(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) + 2g(e_1, e_2) = 2$$

$$\begin{aligned}
< \bar{e_1} >^\perp &= \{v \in V \mid g_4(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1,2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Como necesito cuadrado no nulo, sea ahora $\bar{e_2} = (0, 2, -1)^t = 2e_2 - e_3$.

$$g_3(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = 2^2 g(e_2, e_2) + g(e_3, e_3) - 4g(e_2, e_3) = -4$$

$$\begin{aligned}
< \bar{e_2} >^\perp &= \{v \in V \mid g_4(\bar{e_2}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_2}^t A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (0,2,-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid (1,-1,2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, necesito que $\bar{e_3} \in (< \bar{e_1} >^\perp \cap < \bar{e_2} >^\perp)$. Sea $\bar{e_3} = (2, 0, -1)^t = 2e_1 - e_3$.

$$g_4(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = 2^2 g(e_1, e_1) + g(e_3, e_3) - 4g(e_1, e_3) = -4$$

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_1 + e_2, 2e_2 - e_3, 2e_1 - e_3\}$, tenemos:

$$M(g_4, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

- Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{B}_S = \left\{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \frac{2e_2-e_3}{2}, \frac{2e_1-e_3}{2}\right\}$.
- Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{B}_S = \left\{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \frac{2e_2-e_3}{2i}, \frac{2e_1-e_3}{2i}\right\}$.

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_5) = 2$. Calculamos por tanto $Ker(g_5)$:

$$\begin{aligned}
Ker(g_5) = \{v \in V \mid g_5(v, u) = 0 \quad \forall u \in V\} &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid A_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, sean $\bar{e_2} = (1, 0, -1)^t$ y $\bar{e_3} = (0, 1, -1)^t$. Como pertenecen al núcleo, son ortogonales a todos los demás vectores. Considero también $\bar{e_1} = e_1$, teniendo que $g(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = 1$.

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_1, e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$, tenemos:

$$M(g_5, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ es la Base de Sylvester para $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos que $Nul(A_6) = 1$. Calculamos por tanto $Ker(g_6)$:

$$\begin{aligned}
Ker(g_6) = \{v \in V \mid g_6(v, u) = 0 \quad \forall u \in V\} &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid A_6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, sea $\bar{e_3} = (1, 0, -1)^t$. Como pertenece al núcleo, es ortogonales a todos los demás vectores.
Considero también $\bar{e_1} = e_1$,$\bar{e_2} = e_2$, teniendo que $g(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = 1 = g(\bar{e_2}, \bar{e_2})$.
Además, podemos ver por la matriz A_6 que $e_1 \perp e_2$.
Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_1, e_2, e_1 - e_3\}$, tenemos:

$$M(g_6, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ es la Base de Sylvester para $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.2.5. Dado $a \in \mathbb{R}$, consideramos la matriz simétrica real

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Clasificar la clase de congruencia de la matriz en función de los valores de a.

   Tomamos $A_a = M(g, \mathcal{B})$, para determinado $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$$

   a) <u>Para $a > 1$</u>:
   Tengo que $|A_a| < 0$. Por tanto,

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

   No obstante, dado $U = \mathcal{L}\{e_3, e_4\}$, la restricción de g a U es definida positiva, por lo que en la diagonal de la matriz asociada a la base de Sylvester habrá, como mínimo, 2 unos. Por tanto, nos encontramos en el primer caso.

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

   b) <u>Para $a = 1$</u>:
   Tengo que $|A_a| = 0$. Además,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$$

Por tanto, tengo $rg(A_1) = 3$, es decir, $Nul(A_1) = 1$.
Además, dado $U = \mathcal{L}\{e_2, e_4\}$, tenemos que:

$$M(g_{|U}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $g_{|U}$ es definida positiva, por lo que en la diagonal principal de la matriz asociada a la base de Sylvester habrá, como mínimo dos 1.
Por tanto,

$$A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

No obstante, tenemos lo siguiente:

$$g(e_1 - e_4, e_1 - e_4) = 0 + 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

Por tanto, vemos que g no es semifidefinida positiva, por lo que A_1 tampoco. Por tanto, tenemos que:

$$A_1 \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $-1 < a < 1$:
Tengo que $|A_a| > 0$. Por tanto,

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_a \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o}$$

$$\text{o} \quad A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Como $g(e_1, e_1 = 0)$, g no es definida positiva ni negativa. Por tanto, estamos en la tercera opción:

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

d) Para $a = -1$: Tenemos que:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tengo que $|A_{-1}| = 0$. Además,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1$$

Por tanto, tengo $rg(A_{-1}) = 3$, es decir, $Nul(A_{-1}) = 1$.
Como $g(e_4, e_4) = 1$, tenemos que al menos hay un 1 en la matriz asociada a la base de Sylvester. Consideramos ahora $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3, e_4\}$.

$$A_U = M(g_{|U}; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A_U| = 1$, y sabemos que g es no degenerada e indefinida, tenemos que:

$$A_U \sim_C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $Ind(A_U) = 2$, por lo que existe un plano $W \subset U$ subespacio de $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3, e_4\}$ tal que la restricción a ese plano es definida negativa.
Por tanto, como $U \subset V$, tenemos que existe un plano $W \subset V$ subespacio de V tal que la restricción a ese plano es definida negativa.
Por tanto, tenemos que $Ind(g) = 2$ y:

$$A_{-1} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

e) <u>Para $a < -1$</u>:
Tengo que $|A_a| < 0$. Como el determinante es un invariante, tenemos que:

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Además, sea $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3\}$.

$$|a| = a < 0 \qquad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow a^2 > 1 \Longleftrightarrow |a| > 1$$

Por tanto, tenemos que la restricción de g a U es definida negativa, por lo que $Ind(g) \geqslant 2$. Por tanto,

$$A_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

Valor de a	$Ind(g)$	$Nul(g)$
$a>1$	1	0
$a=1$	1	1
$-1<a<1$	2	0
$a=-1$	2	1
$a<-1$	3	0

(4.10)

2. Para cada a encontrar una matriz regular P tal que P^tAP sea diagonal.

   Nos están pidiendo $M(\mathcal{B}_D;\mathcal{B})$, con $\mathcal{B}_D=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$ base tal que $M(g;\mathcal{B}_D)$ es diagonal; es decir, $\bar{e}_i\perp\bar{e}_j\quad\forall i,j$.

   - Para $a\neq 0$:[4]

     Sea $\bar{e}_1=e_2$, $\bar{e}_2=e_4$. Tenemos que $\bar{e}_1\perp\bar{e}_2$.

     Necesitamos calcular ahora $\bar{e}_3\in V\mid \bar{e}_3\perp\bar{e}_1\wedge\bar{e}_3\perp\bar{e}_2$.

$$\begin{aligned}
<\bar{e}_1>^\perp &= \{v\in V\mid g(\bar{e}_1,v)=0\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid (0,1,0,0)\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&a&1&0\\0&1&a&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid (0,a,1,0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid ax_2+x_3=0\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\bar{e}_2>^\perp &= \{v\in V\mid g(\bar{e}_2,v)=0\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid (0,0,0,1)\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&a&1&0\\0&1&a&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid (1,0,1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\mid x_1+x_3+x_4=0\right\}
\end{aligned}$$

[4] Empecé haciendo el razonamiento en función del apartado anterior, con $a>1$. No obstante, vi que este razonamiento es válido $\forall a\neq 0$.

Por tanto, sea $\bar{e_3} = (1,0,0,-1)^t = e_1 - e_4$.

Necesitamos calcular ahora $\bar{e}_4$ tal que $\bar{e}_4 \perp \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_4 \perp \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_4 \perp \bar{e}_3$.

$$\begin{aligned}
< \bar{e_3} >^\perp = \{v \in V \mid g(\bar{e_3}, v) = 0\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_3}^t A_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,0,-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (-1,0,-1,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_3 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple que: $\left\{ \begin{array}{l} ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right.$

Por tanto, sea $\bar{e_4} = (a, 1, -a, 0)^t$. Comprobamos que $\mathcal{B}_D$ forma base:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a \neq 0$$

$$P = M(\mathcal{B}_D; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para $a = 0$: Tenemos que:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{e}_1 = e_4$. Buscamos $\bar{e}_2 \in V \mid \bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$.

$$< \bar{e_1} >^{\perp} = \{v \in V \mid g(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_1}^t A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (0,0,0,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

Sea $\bar{e}_2 = (1, 1, -1, 0)^t$.

Necesitamos calcular ahora $\bar{e}_3 \in V \mid \bar{e}_3 \perp \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_3 \perp \bar{e}_2$.

$$< \bar{e_2} >^{\perp} = \{v \in V \mid g(\bar{e_2}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_2}^t A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (1,1,-1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (0,-1,1,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid -x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Sea $\bar{e}_3 = (1, 0, 0, -1)^t$.

Necesitamos calcular ahora $\bar{e}_4$ tal que $\bar{e}_4 \perp \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_4 \perp \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_4 \perp \bar{e}_3$.

$$< \bar{e_3} >^\perp = \{v \in V \mid g(\bar{e_3}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid \bar{e_3}^t A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (1,0,0,-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid (-1,0,-1,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \mid x_1 + x_3 = 0 \right\}$$

Por tanto, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple que: $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

Por tanto, sea $\bar{e}_4 = (-1, 1, 1, 0)^t$. Comprobamos que $\mathcal{B}_D$ forma base:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$P = M(\mathcal{B}_D; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación. También sería válido obtener la base de Sylvester en cada uno de los 5 casos, ya que su matriz asociada es la del teorema del Sylvester, que es diagonal. No obstante, esto no es necesario; ya que el valor de los cuadrados en este caso no nos es relevante.

Ejercicio 4.2.6. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. ¿Es bilineal la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g((x, y), (x', y')) = xy$?

   Veamos si cumple la propiedad del producto por escalares. Sean $k, k' \in \mathbb{R}$.

   $$g(k(x, y), k'(x', y')) = g((kx, ky), (k'x', k'y')) = k(x, y)$$

   Por tanto, no es lineal en la segunda variable, por lo que no es bilineal.

2. Toda forma bilineal $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de la forma $g(x, y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$.

   Sabemos que toda forma bilineal $T : V^n(\mathbb{K}) \times V^n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \mathbb{K}$ es de la forma:

$$g(x, y) = x^t A y \qquad x, y \in V^n(\mathbb{K}) \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

   Por tanto, en el caso que estamos tratando, como sabemos que $x^t = x$ por ser $x \in \mathbb{R}$, y sabiendo que una matriz de orden 1 cuadrada real es un escalar, tenemos que:

$$g(x, y) = xay = axy \qquad a, x, y \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, el enunciado es **verdadero**.

3. Si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces tienen la misma traza. ¿Deben tener el mismo determinante?

   No, tan solo debe mantenerse el signo del determinante.

   En el ejercicio 4.2.1, vimos que $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ era congruente a $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Sin embargo,

$$|A_5| = 3 - 4 = -1 \qquad |A_7| = -3 - 4 = -7$$

$$tr(A_5) = 5 \qquad tr(A_7) = -2$$

   Por tanto, vemos que no tienen el mismo determinante ni la misma traza, por lo que es **falso**.

   El determinante, no obstante, debe mantener el signo, ya que si $A_1 \sim_c A_2$, es decir, $A_2 = P^t A_1 P$,

$$|A_2| = |P^t A_1 P| = |P||P^t||A_1| = |P|^2 |A_1|$$

4. En $\mathbb{R}^2$ existe una métrica tal que $(\mathcal{L}(\{(2, 1)^t\}))^\perp = \mathcal{L}(\{(2, 1)^t\})$.

   Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ base $\mathbb{R}^2$. Supuesto que existe esa métrica, tendrá la forma de:

$$M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

   Como $(2, 1)^t \in (\mathcal{L}(\{(2, 1)^t\}))^\perp$, tenemos que:

$$g\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

   Por tanto,

$$0 = g\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (2, 1)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b & 2b + c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 4a + 2b + 2b + c = 4a + 4b + c = 0$$

Supongamos $b = 0$ y $a = 1$, $c = -4$:

$$M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos este resultado:

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (2,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (2,-4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \; x_1 - 2x_2 = 0 \; \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos visto que esa métrica existe, por lo que es **cierto**.

5. Sea V un espacio vectorial real y g una métrica en V. Supongamos que en la diagonal de $M(g, \mathcal{B})$ respecto de una cierta base $\mathcal{B}$ existen dos números a y b con $ab < 0$. Entonces g es indefinida.

   Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Si en la diagonal de la matriz asociada a dicha base se encuentran los números $a.b \in \mathbb{R}$, implica que:

   $$g(e_i, e_i) = a \qquad g(e_j, e_j) = b$$

   Para algún $i, j \mid 1 \leqslant i, j, \leqslant n, \; i \neq j$.

   Además, como $a, b \in \mathbb{R}$, $ab < 0$ implica que tienen signo distinto; es decir:

   $$a > 0 \wedge b < 0 \qquad \vee \qquad a < 0 \wedge b > 0$$

   Por tanto, $\exists i, j$ tal que:

   $$g(e_i, e_i) > 0 \wedge g(e_j, e_j) < 0 \qquad \vee \qquad g(e_i, e_i) < 0 \wedge g(e_j, e_j) > 0$$

   Por tanto, efectivamente, la métrica es indefinida. Por tanto es **cierto**.

6. Si una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ está representada en una cierta base por una matriz con determinante negativo entonces se trata de una métrica definida negativa.

   Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$, y sea la matriz asociada a una métrica g en dicha base:

   $$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que su determinante es $|A| = -1 < 0$, pero no es definida negativa, ya que $g(e_1, e_1) = 1 \not< 0$.

   Por tanto, es **falso**.

7. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y g una métrica. Supongamos que existen vectores $u, v \in V$ linealmente independientes, ortogonales entre sí y tales que $g(u,u), g(v,v) < 0$. Entonces, g es degenerada.

   Sea $\mathcal{B} = \{u, v, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y sea la matriz asociada a una métrica g en dicha base:
$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Podemos ver que u, v son linealmente independientes por formar base, y además son ortogonales ya que $g(u,v) = g(v,0) = 0$. Además también tenemos que:
$$g(u,u) = g(v,v) = -1 < 0$$

   Por tanto, nos encontramos en la situación del enunciado. No obstante, $|A| = -1 \neq 0$, por lo que tenemos que $Ker(g) = \{0\}$, por lo que es no degenerada.

   Por tanto, es **falso**.

8. Sea V un espacio vectorial real y g una métrica. Si todos los elementos diagonales de la matriz de g en una cierta base $\mathcal{B}$ son negativos, entonces g es definida negativa.

   Es falso, y ponemos un contraejemplo para $V = \mathbb{R}^2$.

   Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$, y sea la matriz asociada a una métrica g en dicha base:
$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Vemos que todos los elementos de la diagonal de A son negativos. No obstante, tenemos que:
$$g(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) - 2g(e_1, e_2) = -1 - 1 - 2(-1) = 0 \not< 0$$

   Por tanto, tenemos que g no es definida negativa. Es decir, es **falso**.

   En el caso de que se hubiese dicho que A es una matriz diagonal, entonces sí sería cierto.

9. Toda métrica indefinida sobre un espacio vectorial real tiene vectores no nulos u tales que $g(u,u) < 0$.

   Sí, ya que esa es la definición. Decimos que g es indefinida si:
$$\exists v, w \in V \mid g(v,v) < 0 \quad \wedge \quad g(w,w) > 0$$

   Por tanto, es **cierto** por definición.

10. Dos vectores perpendiculares y no nulos de una métrica g son linealmente independientes. ¿Y si alguno de los dos vectores u verifica $g(u,u) > 0$?

    Supongamos que es falso; es decir, $\exists u, v \in V - \{0\} \mid g(u,v) = 0$ con $\{u, v\}$ linealmente dependientes; y busquemos el contraejemplo.

Trabajamos en $\mathbb{R}^2$ con la base usual $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2\}$.

$$M(g, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Sea $u = xe_1 + ye_2$. Como son linealmente dependientes, sea $v = ku$ para algún $k \in \mathbb{R}^*$. Forzamos ahora que $g(u, v) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = g(u, v) = g(u, ku) = kg(u, u) = kg(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) = \\ = k[g(xe_1, xe_1) + g(ye_2, ye_2) + 2g(xe_1, ye_2)] = k[x^2a + y^2c + 2xyb] \end{aligned}$$

Por tanto, para el contraejemplo, ponemos $k = 2$, $a = y = 1$, $x = c = b = 0$, es decir,

$$u = ye_2 = e_2 \qquad v = 2u = 2e_2$$
$$M(g, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $g(u, v) = g(e_2, 2e_2) = 2 \cdot 0 = 0$, por lo que son perpendiculares. No obstante, son linealmente dependientes, por lo que el enunciado es **falso**.

Respecto al caso de $g(u, u) > 0$, es **cierto** y demostramos mediante reducción al absurdo. Supongamos que $\exists u, v \in V - \{0\} \mid g(u, v) = 0$ y $g(u, u) > 0 \ \vee$ $g(v, v) > 0$; con $\{u, v\}$ linealmente dependientes.

Como son linealmente dependientes, sea $v = ku$ para algún $k \in \mathbb{R}^*$.

Como $g(u, u) > 0 \ \vee g(v, v) > 0$, tenemos que:

$$\begin{gathered} g(u, u) > 0 \\ \vee \\ g(v, v) = g(ku, ku) = k^2 g(u, u) > 0 \Longleftrightarrow g(u, u) > 0 \end{gathered}$$

Por tanto, tenemos que $g(u, u) > 0$. Como son ortogonales, tenemos que:

$$0 = g(u, v) = g(u, ku) = kg(u, u) = 0 \Longleftrightarrow g(u, u) = 0$$

Por tanto, tenemos simultáneamente $g(u, u) = 0$ y $g(u, u) > 0$, por lo que llegamos a una contradicción y nuestra hipótesis era falsa. Los vectores son linealmente independientes y, si $g(u, u) > 0$, es **cierto**.

11. Si g es una métrica semidefinida negativa, entonces un vector $v \in V$ verifica $g(v, v) = 0$ si y sólo si está en el núcleo de g. ¿Y si g es no degenerada pero no semidefinida?

Supongamos g semidefinida negativa. Queremos demostrar que:

$$g(v, v) = 0 \Longleftrightarrow v \in Ker(g)$$

$\Longleftarrow$) Como $v \in Ker(g)$, tenemos que $g(v, u) = 0 \ \forall u \in V$, por lo que, en concreto, también se da para v. Por tanto, $g(v, v) = 0$.

$\Longrightarrow$) Supongemos $g(v,v)=0$. Como g es semidefinida negativa, dada la base de Sylvester $\mathcal{B}_S=\{e_1,\dots,e_s,e_{s+1},\dots,e_n\}$, donde $\{e_{s+1},\dots,e_n\}\subseteq Ker(g)$, tenemos:

$$M(g;\mathcal{B}_S)=\left(\begin{array}{c|c} -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0_r \end{array}\right)$$

donde $s=Ind(g)$ y $r=Nul(g)$.

Como $\mathcal{B}_S$ es una base, sea $v=a_1e_1+\cdots+a_se_s+a_{s+1}e_{s+1}+\cdots+a_ne_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0=g(v,v)&=(a_1,\dots,a_n)\left(\begin{array}{c|c} -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0_r \end{array}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}= \\ &=(-a_1,\dots,-a_s,0\dots0)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=-a_1^2-\cdots-a_s^2 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $0=-a_1^2-\cdots-a_s^2$, por lo que $a_1=\cdots=a_s=0$; es decir, v es una combinación lineal de los elementos $\{e_{s+1},\dots,e_n\}\subseteq Ker(g)$, por lo que $v\in Ker(g)$.

Por tanto, tenemos que si g es semidefinida negativa, el resultado es **cierto**. En el caso de que g fuese no degenerada, es **falso**. Como contraejemplo, dada una base $\mathcal{B}$, sea la métrica no degenerada

$$M(g;\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomemos $v=(1,1)^t=e_1+e_2$.

$g(v,v)=g(e_1+e_2,e_1+e_2)=g(e_1,e_1)+g(e_2,e_2)+2g(e_1,e_2)=1-1+0=0$

No obstante, $v\notin Ker(g)=\{0\}$ por ser la matriz asociada regular.

12. Existe una métrica no degenerada g sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $g_{|U}=0$ para cierta recta vectorial $U\subset\mathbb{R}^3$. ¿Y si U es un plano vectorial?

Sea la métrica representada por la matriz asociada a la base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ de la siguiente forma:

$$A=M(g;\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{e}=(1,0,1)^t=e_1+e_3$. Tenemos que:

$$g(\bar{e},\bar{e})=g(e_1+e_3,e_1+e_3)=1-1+0=0$$

Consideremos ahora la recta $U=\mathcal{L}\{\bar{e}\}=\{k\bar{e}\}$. Por ser g una forma bilineal:

$$g(k\bar{e},k'\bar{e})=kk'\cdot g(\bar{e},\bar{e})=kk'\cdot 0=0$$

Es decir, sí existe dicha recta U, ya que este es un ejemplo de una métrica no degenerada que anula a toda una recta.

No obstante, si U fuese un plano vectorial, no existiría una métrica no degenerada que cumpliese esas condiciones. Demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que sí existe. Sea el plano $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$. Ampliamos a $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de V. Por tanto, como g anula a todos los elementos de $U \times U$,

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_1, e_2) = 0$$

Por tanto,

$$M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

No obstante, $|M(g; \mathcal{B})| = 0 \Longrightarrow g$ es degenerada. Por lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, para un plano es **falso**.

13. Existe en $\mathbb{R}^4$ una métrica no degenerada tal que $g_{|U} = 0$ y $g_{|V} = 0$ donde:

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, \quad z + t = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, \quad z - t = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

veamos que $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0$$

Por tanto, 4 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ forman base. Por tanto, sea la base

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Supongamos ahora que sí existe esa métrica g. Entonces,

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos falta comprobar que g es no degenerada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (ad-bc)(ad-bc) = (ad-bc)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow ad \neq bc$$

Sea, por ejemplo, $a = d = 0$, $b = c = 1$.

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que g es no degenerada, y que, dados $\mathcal{L}\{e_1, e_2\} = U$ y $\mathcal{L}\{e_3, e_4\} = V$ se cumple que $g_{|U} = 0$ y $g_{|V} = 0$. Por tanto, es **cierto**.

14. Dadas M y N dos matrices simétricas de orden 20 y de rango 1 se tiene que M y N son congruentes si y sólo si $tr(M) \cdot tr(N) > 0$.

    Como el rango es 1, sabemos que:

$$M \sim_c \begin{pmatrix} a & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad N \sim_c \begin{pmatrix} b & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b \neq 0$$

donde $a, b \neq 0$. Por tanto, tenemos que M, N son semidefinidas positivas o negativas.

Tenemos que $A = (a_{ij})_{i,j}$ matriz asociada a la métrica g_a sea semidefinida positiva implica que $a_{ii} \geqslant 0$ $\forall i, j$ y $a_{ii} = 0 = g_a(e_i, e_i) \Longleftrightarrow e_i \in Ker(g_a)$. Como el rango es 1, tenemos al menos uno de los elementos de la diagonal es no nulo, por lo que$tr(A) \neq 0$. Por tanto,

$$A \text{ semidefinida positiva} \Longrightarrow tr(A) > 0$$
$$B \text{ semidefinida negativa} \Longrightarrow tr(B) < 0$$

Considerando el recíproco de cada una, tenemos que la implicación va en ambos sentidos, no en uno solo. Por tanto,

$$A \text{ semidefinida positiva} \Longleftrightarrow tr(A) > 0$$
$$B \text{ semidefinida negativa} \Longleftrightarrow tr(B) < 0$$

Además,

$$\begin{array}{rr} M \text{ semidefinida positiva} \Longleftrightarrow a > 0 & M \text{ semidefinida negativa} \Longleftrightarrow a < 0 \\ N \text{ semidefinida positiva} \Longleftrightarrow b > 0 & N \text{ semidefinida negativa} \Longleftrightarrow b < 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$) Supongamos $M \sim_c N$. Como ser congruente es una relación de equivalencia, tenemos que $ab > 0$.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{gathered} a, b > 0 \Longrightarrow M, N \text{ semidef. positivas} \Longrightarrow tr(M), tr(N) > 0 \Longrightarrow tr(M)tr(N) > 0 \\ \vee \\ a, b < 0 \Longrightarrow M, N \text{ semidef. negativas} \Longrightarrow tr(M), tr(N) < 0 \Longrightarrow tr(M)tr(N) > 0 \end{gathered}$$

En ambos casos, tenemos que $tr(M)tr(N) > 0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos $tr(M)tr(N) > 0$. Entonces, tenemos dos opciones:

- $\underline{tr(M), tr(N) > 0}$: Entonces tenemos que M, N semidefinidas positivas, por lo que $a, b > 0$.
- $\underline{tr(M), tr(N) < 0}$: Entonces tenemos que M, N semidefinidas negativas, por lo que $a, b < 0$

Por tanto, tenemos que a, b tienn el mismo signo. Como la congruencia es una relación de equivalencia, tenemos que $M \sim_c N$.

15. Dado (V, g) un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V se tiene $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$ entonces g es no degenerada.

Por la condición del enunciado, tenemos que:

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp) \qquad \forall U \subseteq V \text{ subesp. vectorial.} \tag{4.11}$$

El núcleo de g está definido como;

$$Ker(g) = \{v \in V \mid g(u, v) = 0 \qquad \forall u \in V\}$$

Además, dado el subespacio U, su ortogonal se define como:

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(u, v) = 0 \qquad \forall u \in U\}$$

De las respectivas definiciones, se tiene fácilmente que:

$$Ker(g) \subseteq U^\perp \qquad \forall U \subseteq V \text{ subesp. vectorial.} \tag{4.12}$$

Como se tiene que es válido $\forall U \subseteq V$ subespacio vectorial, consideramos $U = V$. Por la ecuación 4.11, tenemos que $\dim U^\perp = 0$, por lo que $U^t = \{0\}$. Por la ecuación 4.12, tenemos que $Ker(g) \subseteq U^\perp = \{0\}$, por lo que $Ker(g) = \{0\}$, teniendo así que g es no degenerada. Por tanto, es **cierto**.

16. Una matriz simétrica A es semidefinida positiva si y sólo si existe una matriz cuadrada Q tal que $A = Q^t \cdot Q$.

$\Longrightarrow$) Realizamos distinción de casos:

- Supongamos A es la matriz dada por el Teorema de Sylvester.
Definimos $Q = A$. Por ser g semidefinida positiva, tenemos que:

$$Q = A = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$QQ^t = AA^t = A^2 = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = A$$

Por tanto, si A es la matriz dada por el Teorema de Sylvester, se cumple.

- Supongamos ahora que A no es la matriz dada por el Teorema de Sylvester.
Por el Teorema de Sylvester, tenemos que:

$$A \sim_c \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = S \Longrightarrow \exists P \mid A = P^t S P$$

Por lo anterior demostrado, tenemos que $S = (Q')^t Q'$. Por tanto,

$$A = P^t (Q')^t Q' P$$

Definiendo $Q = Q'P$, tenemos que $A = Q^t Q$, por lo que se cumple.

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\exists Q \mid A = Q^t Q$.
Sea $v \in V$ cuyas coordenadas en cierta base son $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{K}^n$

$$g(v, v) = x^t A x = x^t Q^t Q x = (Qx)^t (Qx)$$

Como $x \in \mathbb{K}^n$, tengo que $Qx \in \mathbb{K}^n$. Por tanto, tengo que:

$$g(v, v) = (Qx)^t (Qx) = \langle Qx, Qx \rangle \geqslant 0$$

donde he usado que $<;>$ es definida positiva y que $M(<;>;\mathcal{B}_u) = I$.

Por tanto, tengo que $g(v, v) \geqslant 0 \ \forall v \in V$, por lo que g es semidefinida positiva. No podemos asegurar que sea definida positiva, ya que al no ser Q regular cabe la posibilidad de que $Qx = 0$.

17. Si (V, g) es un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V de dimensión mayor o igual que 1 se tiene $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$, entonces g es no degenerada.

    Se ha demostrado **cierto** en el apartado ñ.

18. Existe una métrica degenerada en $\mathbb{R}^4$ tal que el ortogonal a la recta generada por el vector $v = (1, 1, 1, 1)$ es la propia recta.

Supongamos que sí existe. Dada $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^4$, tenemos que:

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Calculamos por tanto el espacio ortogonal a la recta.

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (1,1,1,1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (b_1, b_2, b_3, b_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos ver que, de existir la métrica, el ortogonal a la recta es un hiperplano o el mismo $\mathbb{R}^4$, en contradicción con que el ortogonal a la recta sea una recta. Por tanto, no existe dicha métrica.

Es, por tanto, **falso**.

Ejercicio 4.2.7. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ espacio vectorial y g una aplicación definida como:

$$g(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}_2[x]$$

1. ¿Es g una métrica?
   Veamos en primer lugar que es bilineal.

   En primer lugar, verifico que cumple la condición del producto por escalares en las dos variables.

   $$g(kp, k'q) = kk'p(0)q(0) + kk'p(1)q(1) = kk'g(p, q)$$

   Ahora verificamos la suma de vectores en cada una de las variables.

   $$g(p + p', q) = (p(0) + p'(0))q(0) + (p(1) + p'(1))q(1) = g(p, q) + g(p', q)$$

   $$g(p, q + q') = p(0)(q(0) + q'(0)) + p(1)(q(1) + q'(1)) = g(p, q) + g(p, q')$$

   Veamos ahora que es simétrica. Para ello, sea $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$:

   $$\begin{array}{lll} g(1,1) = 1 + 1 = 2 & g(x,1) = 1 & g(x^2,1) = 1 \\ g(1,x) = 1 & g(x,x) = 1 & g(x^2,x) = 1 \\ g(1,x^2) = 1 & g(x,x^2) = 1 & g(x^2,x^2) = 1 \end{array}$$

Por tanto, como podemos ver, la matriz asociada a g sí es simétrica.

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, g sí es una métrica.

Alternativamente, para razonar que es simétrica, se podría haber hecho lo siguiente:

$$g(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) = q(0)p(0) + q(1)p(1) = g(q, p)$$

donde he aplicado la conmutatividad del producto en $\mathbb{R}$. No obstante, he optado por la primera opción ya que es necesario para el apartado siguiente.

2. Calcular la base de sylvester.

Habiendo definido $A = M(g, \mathcal{B})$, vemos que $rg(A) = 2 \Longrightarrow Nul(g) = 1$. Por tanto, busco $e_1 \in Ker(g)$.

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \left\{ x \in \mathbb{R}_2[x] \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}_2[x] \middle| \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Sea $e_1 = (0, 1, -1)^T = x - x^2$.

Elijo ahora $e_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ de cuadrado no nulo. Sea $e_2 = x = (0, 1, 0)^t$.

Busco ahora $e_3 \in < e_2 >^\perp$ de cuadrado no nulo:

$$\begin{aligned} < e_2 >^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}_2[x] \middle| (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}_2[x] \middle| (1, 1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}_2[x] \middle| \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Tomo $e_3 = (-1, 1, 0)^T = -1 + x$.

$$g(e_3, e_3) = g(-1 + x, -1 + x) = g(1, 1) + g(x, x) - 2g(1, x) = 2 + 1 - 2 = 1$$

Por tanto, dado $\mathcal{B}_S = \{e_1, e_2, e_3\} = \{x - x^2, x, -1 + x\}$ base de Sylvester, tenemos:

$$M(g, \mathcal{B}_S) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Supongamos $g(p,q) = ap(0)q(0) + p(1)q(1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcular la nulidad y el índice en función de a.

   Calculamos en primer lugar $M(g;\mathbb{B})$, con $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\begin{array}{lll} g(1,1) = a+1 & g(x,1) = 1 & g(x^2,1) = 1 \\ g(1,x) = 1 & g(x,x) = 1 & g(x^2,x) = 1 \\ g(1,x^2) = 1 & g(x,x^2) = 1 & g(x^2,x^2) = 1 \end{array}$$

   Por tanto,

$$A = M(g,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calculamos, en primer lugar, el rango de A:

$$rg(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ 2 & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

   - Para $a = 0$:
     Tenemos que $Nul(g) = 2$. Por tanto,

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

     Sea ahora $U = \mathcal{L}\{e_3\}$. Tenemos que $g_{|U}$ es definida positiva, por lo que $k \geqslant 1$, con k el número de 1 de la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto, estamos en el primer caso.

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

     Por tanto, para $a = 0$, tenemos $Nul(g) = 2$, $Ind(g) = 0$.

   - Para $a \neq 0$:
     Tenemos que $Nul(g) = 1$. Además, dado ea $U = \mathcal{L}\{e_3\}$, tenemos que $g_{|U}$ es definida positiva, por lo que $k \geqslant 1$, con k el número de 1 de la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto,

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

     - Para $a > 0$: Sea $U' = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$. Veamos que $M(g_{|U}, \mathcal{B})$ es definida positiva:

$$M(g_{|U}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|a+1| = a+1 > 0 \qquad \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a+1-1 = a > 0$$

Por tanto, $g_{|U}$ es definida positiva, por lo que $k \geqslant 2$, siendo k el número de 1 en la matriz asociada a la Base de Sylvester. Por tanto, estamos en el primer caso.

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, para $a > 0$, tenemos $Nul(g) = 1$, $Ind(g) = 0$.

- Para $a < 0$:
Tenemos que:

$$g(e_1-e_2, e_1-e_2) = g(e_1, e_1)+g(e_2, e_2)-2g(e_1, e_2) = a+1+1-2 = a < 0$$

Por tanto, g no está definida positiva para $a < 0$. Por tanto, estamos en el caso de la derecha:

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

Caso	$Ind(g)$	$Nul(g)$
$a < 0$	1	1
$a = 0$	0	2
$a > 0$	0	1

Ejercicio 4.2.8. Sea $V^2(\mathbb{K})$ e.v. y sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ base de V. Sea T una forma bilineal simétrica donde

$$A = M(T; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{K}$$

Obtener la base de Sylvester.

En primer lugar, estudio la nulidad de la forma bilineal:

$$det(A) = 1 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$$

- Caso complejo:

  - $a \neq \pm 1 \Longrightarrow Nul(T) = 0$
  Buscamos $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$. Tomamos $\bar{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ y $\bar{e_2} \in <\bar{e_1}>^\perp$.

  $$<\bar{e_1}>^\perp = \left\{x \in V^2 \mid (1,0) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{x \in V^2 \mid x_1 + ax_2 = 0\right\}$$

  Por tanto, $\bar{e_2} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = ae_1 - e_2$.

Como $\bar{e_2} \in < \bar{e_1} >^\perp \Longrightarrow T(\bar{e_1}, \bar{e_2}) = T(\bar{e_2}, \bar{e_1}) = 0$. Veamos ahora el valor de los cuadrados.

$$T(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$T(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = (a,-1)\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = (0, a^2-1)\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$$

$$M(T; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Considero ahora $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Sea $\bar{\bar{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{\bar{e_2}}\}$, con $\bar{\bar{e_2}} = \lambda \bar{e_2}$.

$$T(\bar{\bar{e_2}}, \bar{\bar{e_2}}) = T(\lambda\bar{e_2}, \lambda\bar{e_2}) = \lambda^2 T(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = \lambda^2(1-a^2) = 1$$

$$M(T; \bar{\bar{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}} \end{pmatrix}$$

- $a = \pm 1 \Longrightarrow Nul(T) = 1$

  Tomamos $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$, con $\bar{e_1} = (1,0)^T$ y $\bar{e_2} = (a,-1)^T$.

$$M(T; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- <u>Caso real:</u>

  - $a \neq \pm 1 \Longrightarrow Nul(T) = 0$

    Buscamos $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$. Tomamos $\bar{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\bar{e_2} \in < \bar{e_1} >^\perp$.

$$< \bar{e_1} >^\perp = \left\{x \in V^2 \mid (1,0)\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{x \in V^2 \mid x_1 + ax_2 = 0\right\}$$

Por tanto, $\bar{e_2} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como $\bar{e_2} \in < \bar{e_1} >^\perp \Longrightarrow T(\bar{e_1}, \bar{e_2}) = T(\bar{e_2}, \bar{e_1}) = 0$. Veamos ahora el valor de los cuadrados.

$$T(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$T(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = (a,-1)\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = (0, a^2-1)\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$$

$$M(T; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

- $a^2 < 1$
  Considero ahora $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Sea $\bar{\bar{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{\bar{e_2}}\}$, con $\bar{\bar{e_2}} = \lambda\bar{e_2}$.

$$T(\bar{\bar{e_2}}, \bar{\bar{e_2}}) = T(\lambda\bar{e_2}, \lambda\bar{e_2}) = \lambda^2 T(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = \lambda^2(1-a^2) = 1$$

$$M(T; \bar{\bar{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}} \end{pmatrix}$$

- $a^2 > 1$
  Considero en este caso $\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$. Sea $\bar{\bar{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{\bar{e_2}}\}$, con $\bar{\bar{e_2}} = \lambda\bar{e_2}$.

$$T(\bar{\bar{e_2}}, \bar{\bar{e_2}}) = T(\lambda\bar{e_2}, \lambda\bar{e_2}) = \lambda^2 T(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = \lambda^2(1-a^2) = -1$$

$$M(T; \bar{\bar{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix}$$

- $a = \pm 1 \Longrightarrow Nul(T) = 1$

Tomamos $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$, con $\bar{e_1} = (1,0)^T$ y $\bar{e_2} = (a,-1)^T$.

$$M(T; \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.2.9. Sea $(V^n(\mathbb{K}), g)$ e.v. métrico indefinido. Demostrar que, dado $v \in V$,

$$g(v,v) = 0 \not\Rightarrow v \in Ker(g)$$

Dada una base $\mathcal{B}$, sea la métrica indefinida

$$M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomemos $v = (1,1)^t = e_1 + e_2$.

$$g(v,v) = g(e_1+e_2, e_1+e_2) = g(e_1,e_1) + g(e_2,e_2) + 2g(e_1,e_2) = 1 - 1 + 0 = 0$$

No obstante, $v \notin Ker(g) = \{0\}$ por ser la matriz asociada regular.

Ejercicio 4.2.10. En $\mathbb{R}^4$, y dado $a \in \mathbb{R}$, estudiar la métrica:

$$M(g, \mathcal{B}_u) = A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calculo su determinante:

$$|A| = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} a(2a - 1 - a) = a(a-1)$$

Por tanto, ya que el signo del determinante es un invariante, trabajo con los intervalos:

$$a \in]-\infty, 0[\Longrightarrow |A| > 0 \qquad a \in]0,1[\Longrightarrow |A| < 0 \qquad a \in]1, +\infty[\Longrightarrow |A| > 0$$

- Para $a > 1$:

  Veamos los menores principales:

  $$|a| = a \qquad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1 \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \qquad |A| = a(a-1)$$

  g es definida positiva si $a > 1$, por lo que:

  $$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Para $0 < a < 1$:

  Sabemos que $|A| < 0$. Por tanto, $Nul(g) = 0$ y:

  $$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad o \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

  Como la restricción a $U = \mathcal{L}\{e_3, e_4\}$ es definida positiva, entonces hay un plano que es definido positivo. Como en el segundo caso no puede haber un plano definido positivo, entonces estamos en el primer caso.

  $$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Para $a < 0$:

  Sabemos que $|A| > 0$. Por tanto, $Nul(g) = 0$ y:

  $$A \sim_c I_4 \qquad o \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad o \qquad A \sim_c -I_4$$

  Como la restricción a $U = \mathcal{L}\{e_3, e_4\}$ es definida positiva, entonces $k \geqslant 2$, con k el número de unos en la matriz asociada a la Base de Sylvester. Como la restricción a $U' = \mathcal{L}\{e_1\}$ es definida negativa, entonces $Ind(g) \geqslant 1$.

  Por tanto, la única opción que reúne ambas condiciones es la central.

  $$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Para $a = 1$:

  En este caso, $Ker(g) \neq 0$. Veamos el valor del rango de A. Como

$$|A| = a(a-1) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(2-1) = a \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3$$

  Por tanto, $Nul(g) = 1$. Sea $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3, e_4\}$. Como la restricción a U es definida positiva, al menos hay tres unos en la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto,

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

- Para $a = 0$: En este caso, $Ker(g) \neq 0$. Veamos el valor del rango de A. Como

$$|A| = a(a-1) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 = -1 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3$$

  Por tanto, $Nul(g) = 1$. Sea $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3\}$. Como la restricción a U es definida positiva, al menos hay 2 unos en la matriz asociada a la base de Sylvester.

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

  No obstante, tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} g(3e_1 - e_2, 3e_1 - e_2) &= 3^2 g(e_1, e_1) + g(e_2, e_2) - 2g(3e_1, e_2) = \\ &= 0 + 2 - 2 \cdot 3g(e_1, e_2) = 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 = -4 \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que g no puede ser definida positiva. Por tanto, estamos en el segundo caso:

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

Caso	$Ind(g)$	$Nul(g)$
$a < 0$	2	0
$a = 0$	1	1
$0 < a < 1$	1	0
$a = 1$	0	1
$a > 1$	0	0

(4.13)

Ejercicio 4.2.11. Sea la forma cuadrática $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ expresada en las coordenadas de la base usual como:

$$F(x_1, \dots, x_4) = ax_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + ax_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Encontrar la expresión reducida de F.

   Buscamos en primer lugar su matriz asociada a la base $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_4\}$:

$$A = M(F; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   Necesito clasificar la matriz para poder hallar la forma de F simplificada. Esto se ha hecho en el ejercicio anterior, donde se pueden ver los resultados en la Ecuación 4.13. Por tanto,

Caso	$Ind(g)$	$Nul(g)$	F reducida
$a < 0$	2	0	$F(x_1, \dots, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$
$a = 0$	1	1	$F(x_1, \dots, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$0 < a < 1$	1	0	$F(x_1, \dots, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$
$a = 1$	0	1	$F(x_1, \dots, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$a > 1$	0	0	$F(x_1, \dots, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

2. Dar la expresión reducida de la forma cuadrática para $a = 1$.

   En este caso, se pide dar la matriz que proporciona el Teorema de Sylvester, ya que será la de la forma reducida.

   Busco en primer un vector $\bar{e_1}$ de cuadrado no nulo. Sea $\bar{e_1} = e_3$, ya que $g(e_3, e_3) = 1$.

   Busco ahora $\bar{e_2} \in < e_1 >^\perp$.

$$\begin{aligned}
< e_1 >^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (0,0,1,0) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (0,1,1,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Sea $\bar{e_2} = e_1$. Busco ahora $\bar{e_3} \in \langle \bar{e_1}, \bar{e_2} \rangle^\perp$.

$$< e_2 >^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (1,0,0,0) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (a,1,0,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \; ax_1 + x_2 = 0 \; \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto:

$$\langle \bar{e_1}, \bar{e_2} \rangle^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto, sea $\bar{e_3} = e_4$. Por último, busco $\bar{e_4} \in Ker(g)$:

$$Ker(g) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Por tanto, $\bar{e_4} = (1, -1, 1, 0)^t$. Por tanto, calculo sus imágenes:

$$g(\bar{e_1}, \bar{e_1}) = g(e_3, e_3) = 1 \qquad g(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = g(e_1, e_1) = a = 1$$
$$g(\bar{e_3}, \bar{e_3}) = g(e_4, e_4) = a = 1 \qquad g(\bar{e_4}, \bar{e_4}) = 0$$

Por tanto, dado $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}, \bar{e_4}\} = \{e_3, e_1, e_4, e_1 - a_2 + a_3\}$ base de Sylvester,

$$A = M(F; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.2.12. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y la forma cuadrática $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que, en la base usual, $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 - 2x_3x_4$. Calcular su expresión reducida.

Necesito calcular, en primer lugar, su matriz asociada.

$$A = M(\phi, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Clasifico ahora la métrica.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Sabiendo que el sigo del determinante es un invariante y que la nulidad es 0, tenemos que:

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$. Como g restringido a U es definida positiva, tenemos que al menos hay dos 1 en la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto, estamos en el primer caso. Es decir, $Ind(\phi) = 1$.

Por tanto, la forma reducida de ϕ, para la base de Sylvester, es de la forma:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

Ejercicio 4.2.13. Estudiar, en $\mathbb{R}^4$, la métrica dada por:

$$A = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos en primer lugar su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -11 & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-11 \cdot 16 + 80 + 80) = 16$$

Por el signo del determinante, y sabiendo que $g(e_1, e_1) = -4 < 0$, tenemos que:

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad o \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos si la matriz es definida negativa:

$$|-4| = -4 \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11 \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 \qquad |A| = 16$$

Por tanto, como los menores principales de orden par son positivos y los de orden impar son negativos, tenemos que la métrica es definida negativa. Por tanto,

$$A \sim_c \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

4.3. Espacios Vectoriales Euclídeos.

Ejercicio 4.3.1. Encontrar la matriz respecto de la base usual de la proyección p y de la reflexión s respecto de los siguientes subespacios:

1. En el EVME $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$

$$L_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \qquad L_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \qquad L_3 \equiv x+3y=0 \qquad L_4 = (L_1)^\perp$$

a) $L_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Tengo que $(L_1)^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Por tanto, $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de vectores ortogonales, y $\bar{\mathcal{B}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal.

Sea $v = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2)_{\bar{\mathcal{B}}} \in \mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2x_2)$$

Por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{L_1}(v) = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1+2x_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{L_1}, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Además, como tenemos que:

$$p_L + P_{L^\perp} = Id \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$$
$$s_L = p_L - P_{L^\perp} = 2p_L - Id$$

Por tanto,

$$M(s_{L_1}, \mathcal{B}_u) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $L_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

Tengo que $(L_2)^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Por tanto, $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de vectores ortogonales, y $\bar{\mathcal{B}} = \left\{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal.

Sea $v = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2)_{\bar{\mathcal{B}}} \in \mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \left\langle \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, v \right\rangle = \frac{1}{5}(-3x_1 + 4x_2)$$

Por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{L_2}(v) = a_1 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-3x_1 + 4x_2) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^2}\begin{pmatrix} 9x_1 - 12x_2 \\ -12x_1 + 16x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5^2}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{L_2}, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

Además, como tenemos que:

$$p_L + P_{L^\perp} = Id \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$$
$$s_L = p_L - P_{L^\perp} = 2p_L - Id$$

Por tanto,

$$M(s_{L_2}, \mathcal{B}_u) = \frac{2}{25}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$$

c) $L_3 \equiv x + 3y = 0 \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Tengo que $(L_3)^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Por tanto, $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de vectores ortogonales, y $\bar{\mathcal{B}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal.

Sea $v = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2)_{\bar{\mathcal{B}}} \in \mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x_1 + x_2)$$

Por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{L_3}(v) = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x_1+x_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{L_3}, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, como tenemos que:

$$p_L + P_{L^\perp} = Id \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$$
$$s_L = p_L - P_{L^\perp} = 2p_L - Id$$

Por tanto,

$$M(s_{L_3}, \mathcal{B}_u) = \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

d) $L_4 = (L_1)^\perp$

Como se ha visto, tenemos que:

$$M(p_{L_1}, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $p_L + P_{L^\perp} = Id \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$, entonces:

$$M(p_{L_4}, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, como tenemos que:

$$p_L + P_{L^\perp} = Id \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$$
$$s_L = p_L - P_{L^\perp} = 2p_L - Id$$

Por tanto,

$$M(s_{L_4}, \mathcal{B}_u) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. En el EVME $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$

$$L_1 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \Pi_2 \equiv -x+y = 0 \qquad \Pi_3 \equiv x+2y-z = 0 \qquad \Pi_4 = (L_1)^\perp$$

a) $L_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2, e_3\right\}$ base ortogonal de V, que existe por el Teorema de Sylvester.

Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}e_1, \bar{e_2}, \bar{e_3}\right\}$ base ortonormal de V.

Sea $v = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2, a_3)_{\bar{\mathcal{B}}} \in V$. Como $\bar{\mathcal{B}}$ es una base ortonormal, tengo que $a_1 = \langle v, \bar{e_1}\rangle$. Por tanto:

$$a_1 = \langle v, \bar{e_1}\rangle = (x_1, x_2, x_3)\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3)$$

Además, por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{L_1}(v) = a_1\bar{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3)\bar{e_1} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)e_1$$

Por tanto, buscando la matriz que represente p_L, tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{L_1}(v) = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)e_1 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{L_1}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, como $s_L = 2p_L - Id$, tenemos que:

$$M(s_{L_1}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\Pi_2 \equiv -x + y = 0 \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3\right\}$ base ortogonal de V, que existe por el Teorema de Sylvester.

Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \bar{e_3}\right\}$ base ortonormal de V.

Sea $v = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2, a_3)_{\bar{\mathcal{B}}} \in V$. Como $\bar{\mathcal{B}}$ es una base ortonormal, tengo que $a_i = \langle v, \bar{e_i} \rangle$. Por tanto:

$$a_1 = \langle v, \bar{e_1} \rangle = (x_1, x_2, x_3)e_1 = x_3$$

$$a_2 = \langle v, \bar{e_2} \rangle = (x_1, x_2, x_3)\frac{1}{\sqrt{2}}e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

Además, por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{\Pi_2}(v) = a_1\bar{e_1} + a_2\bar{e_2} = x_3e_1 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)e_2$$

Por tanto, buscando la matriz que represente p_{Π_2}, tenemos que:

$$p_{\Pi_2}(v) = x_3e_1 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)e_2 = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{\Pi_2}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Además, como $s_U = 2p_U - Id$, tenemos que:

$$M(s_{\Pi_2}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\Pi_3 \equiv x + 2y - z = 0 \equiv \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

He obtenido esa base de Π_3 ya que es ortogonal.

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 \right\}$ base ortogonal de V, que existe por el Teorema de Sylvester.

Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}e_1, \frac{1}{\sqrt{30}}e_2, \bar{e_3} \right\}$ base ortonormal de V.

Sea $v = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}_u} = (a_1, a_2, a_3)_{\bar{\mathcal{B}}} \in V$. Como $\bar{\mathcal{B}}$ es una base ortonormal, tengo que $a_i = \langle v, \bar{e_i} \rangle$. Por tanto:

$$a_1 = \langle v, \bar{e_1} \rangle = (x_1, x_2, x_3)\frac{1}{\sqrt{5}}e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2 + 2x_3)$$

$$a_2 = \langle v, \bar{e_2} \rangle = (x_1, x_2, x_3)\frac{1}{\sqrt{30}}e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Además, por la elección de la base ortonormal, tenemos que:

$$p_{\Pi_2}(v) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 = \frac{1}{5}(x_2 + 2x_3)e_1 + \frac{1}{30}(5x_1 - 2x_2 + x_3)e_2$$

Por tanto, buscando la matriz que represente p_{Π_3}, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p_{\Pi_3}(v) &= \frac{1}{5}(x_2 + 2x_3)e_1 + \frac{1}{30}(5x_1 - 2x_2 + x_3)e_2 = \\
&= \frac{1}{5}(x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{30}(5x_1 - 2x_2 + x_3)\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25x_1 - 10x_2 + 5x_3 \\ -10x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25x_1 - 10x_2 + 5x_3 \\ -10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \\ 5x_1 + 10x_2 + 25x_3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{\Pi_3}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Además, como $s_U = 2p_U - Id$, tenemos que:

$$M(s_{\Pi_3}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\Pi_4 = (L_1)^\perp$:
Sabemos que:

$$M(p_{L_1}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $p_U + p_{U^\perp} = Id$, tengo que:

$$M(p_{\Pi_4}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $s_U = p_U - p_{U^\perp}$ y también $(U^\perp)^\perp = U$, tengo que:

$$M(s_{\Pi_4}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.3.2. Sea $(\mathbb{R}^3, <,>)$. Estudiar si existe $f \in End(\mathbb{R}^3)$ autoadjunto t.q.:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En caso de que exista, dar su matriz respecto de la base usual.

Sea $A = M(f; \mathcal{B}_u)$. Como $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tengo que:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ d & 0 & e \\ f & 0 & c \end{pmatrix}$$

Además, como f es un endomorfismo autoadjunto y $\mathcal{B}_u$ es una base ortonormal en $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, tengo que $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$$

Como $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tengo que:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+1+b=1 \\ 1=1 \\ b+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-b \\ c=-b \end{array}\right.$$

Por tanto, como no ha habido absurdos, ese endomorfismo autoadjunto existe y viene dado por:

$$A = M(f; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} -b & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b \end{pmatrix} \qquad \forall b \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4.3.3. Sea (V^2, g) un plano vectorial euclídeo y $L_1, L_2 \subset V$ dos rectas vectoriales. Demostrar que las reflexiones s_{L_1} y s_{L_2} conmutan si y solo si $L_2 = L_1^\perp \vee L_2 = L_1$.

Es decir, se pide demostrar que:

$$s_{L_1} \circ s_{L_2} = s_{L_2} \circ s_{L_1} \Longleftrightarrow L_2 \perp L_1 \vee L_2 = L_1$$

Procedemos mediante doble implicación:

$\Longleftarrow)$ En el caso de $L_2 = L_1$, la igualdad es evidente. Supongamos $L_2 = L_1^\perp$.
Como $s_{U^\perp} = -s_U$, la igualdad queda:

$$s_{L_1} \circ (-s_{L_1}) = (-s_{L_1}) \circ s_{L_1} \Longleftrightarrow -(s_{L_1} \circ s_{L_1}) = -(s_{L_1} \circ s_{L_1})$$

Lo cual es trivialmente cierto.

$\Longrightarrow$) Supongamos que las dos reflexiones conmutan.

Elegimos $v \in L_1$, es decir, $L_1 = \mathcal{L}\{v\}$. Entonces:

$$(s_{L_1} \circ s_{L_2})(v) = (s_{L_2} \circ s_{L_1})(v) \Longrightarrow s_{L_1}(s_{L_2}(v)) = s_{L_2}(v) \Longrightarrow s_{L_2}(v) \in V_1(s_{L_1}) = L_1$$

Por tanto, como $s_{L_2}(v) \in L_1$ y $L_1 = \mathcal{L}\{v\}$, tenemos que:

$$s_{L_2}(v) = \lambda v$$

Por tanto, $v \in V_\lambda(s_{L_2})$, es decir, v es un vector propio para s_{L_2}. Como los dos únicos valores propios de las simetrías son $\lambda = \pm 1$, tenemos la siguiente distinción de casos:

- $\underline{v \in V_1(s_{L_2})}$: Tenemos que $v \in L_2$. Por tanto,

  $$\forall v \in L_1 \Longrightarrow v \in L_2$$

  Por tanto, $L_1 \subset L_2$. Como la dimensión de ambos subespacios vectoriales es 1, tenemos que $L_1 = L_2$.
- $\underline{v \in V_{-1}(s_{L_2})}$: Como $V_{-1}(s_{L_2}) = L_2^\perp$, tenemos que $v \in L_2^\perp$. Por tanto,

  $$\forall v \in L_1 \Longrightarrow v \in L_2^\perp$$

  Por tanto, $L_1 \subset L_2^\perp$. Además, tenemos que:

  $$\dim L_2^\perp = n - \dim L_2 = 2 - 1 = 1$$

  Por tanto, como la dimensión de ambos subespacios vectoriales es 1, tenemos que $L_1 = L_2^\perp$.

Por tanto, hemos llegado a demostrar lo pedido.

Ejercicio 4.3.4. Responde a las siguientes cuestiones:

1. Demostrar que la composición de endomorfismos autoadjuntos no es necesariamente autoadjunto.

   Esto equivale a que las matrices simétricas no son cerradas para el producto. Sean las matrices:

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

   Veamos que el producto puede no ser una matriz simétrica.

   $$AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + bc' \\ a'b + b'c & bb' + cc' \end{pmatrix}$$

   Por tanto, para encontrar el contaejemplo basta con imponer que:

   $$a'b + b'c \neq ab' + bc'$$

Una opción es $a = c' = 0$, $a' = b = b' = c = 1$.

Por tanto, sean los endomorfismos autoadjuntos f, g dados por:

$$F = M(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \qquad G = M(g; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

Tengo que:

$$M(f \circ g; \mathcal{B}) = FG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

2. Si $f : (V, g) \to (V, g)$ es un isomorfismo autoadjunto, demostrar que su inversa f^{-1} también lo es.

   Como f es un isomorfismo, tenemos que $\exists f^{-1}$. Definimos entonces:

$$A = M(f; \mathcal{B}) \qquad A^{-1} = M(f^{-1}; \mathcal{B})$$

   Definimos $G = M(g; \mathcal{B})$. Sean $u, v \in V$ con coordenadas x, y respectivamente en la base $\mathcal{B}$. Como f es un endomorfismo autoadjunto, por el ejercicio 4.3.16 tenemos que:

$$f \text{ es un endomorfismo autoadjunto} \Longrightarrow A^t G = GA$$

   Demostremos por tanto que $(A^{-1})^t G = GA^{-1}$:

   Como G es definida positiva, tenemos que $\exists G^{-1}$. Por tanto,

$$A^t G = GA \Longrightarrow G^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}G^{-1} \Longrightarrow \left(A^{-1}\right)^t = GA^{-1}G^{-1} \Longrightarrow \left(A^{-1}\right) G = GA^{-1}$$

   Por tanto, se ha demostrado que f^{-1} es un isomorfismo autoadjunto.

Ejercicio 4.3.5. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V, g). Demostrar que:

$$Ker(f) \perp Im(f)$$

Sea $u \in Ker(f), v \in V$. Por ser f el endomorfismo autoadjunto, tenemos que:

$$g(u, f(v)) = g(f(u), v) = g(0, v) = 0$$

Por tanto, tenemos que $g(u, f(v)) = 0\ \forall u \in Ker(f),\ f(v) \in Im(f)$. Por tanto, tenemos que $Ker(f) \perp Im(f)$.

Ejercicio 4.3.6. Dadas las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizarlas mediante una matriz ortogonal P, es decir, encontrar una matriz ortogonal P tal que $P^t AP$ sea diagonal.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En los tres casos voy a establecer que $A_i = M(f_i, \mathcal{B}_u)$, con f_i endomorfismo autoadjunto de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$.

Busco los valores propios de A_1:

$$p_{A_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(4-\lambda)^2(\lambda - 1)$$

Por tanto, tenemos que los valores propios son: $\{1, 4\}$. Calculo ahora los subespacios propios:

$$V_4 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 - 4I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$V_1 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 - I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$
$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Buscamos ahora una base de V_4 ortonormal. Sea:

$$V_4 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, dada la base $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, tenemos que:

$$D_1 = M(f_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 = M(\mathcal{B}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

donde se cumple que $P_1^t A_1 P_1 = D_1$ diagonal.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Busco los valores propios de A_2:

$$p_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2+\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2+\lambda)\begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4) = -(\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

Por tanto, tenemos que los valores propios son: $\{-2, 1, 4\}$. Calculo ahora los subespacios propios:

$$V_4 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_2 - 4I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_2 - I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-2} = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_2 + 2I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, dada la base $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, tenemos que:

$$D_2 = M(f_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \qquad P_2 = M(\mathcal{B}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

donde se cumple que $P_2^t A_2 P_2 = D_2$ diagonal.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Busco los valores propios de A_3:

$$p_{A_3}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 \\ -\lambda & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(2+\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Por tanto, tenemos que los valores propios son: $\{-1, \pm 2\}$. Calculo ahora los subespacios propios:

$$V_{-1} = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_3 + I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{2} = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_3 - 2I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-2} = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A_2 + 2I)x = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, dada la base $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, tenemos que:

$$D_3 = M(f_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad P_3 = M(\mathcal{B}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

donde se cumple que $P_3^t A_3 P_3 = D_3$ diagonal.

Ejercicio 4.3.7. Sea f, h dos endomorfismos autoadjuntos de un EVME (V, g) que conmutan; es decir, $f \circ h = h \circ f$. Demostrar que existe una base ortonormal de V que diagonaliza a f y h simultáneamente.

Veamos en primer lugar que, como f y h conmutan, entonces conservan los subespacios propios. Esto es, si $V_\lambda(g)$ es un subespacio propio, entonces:

$$f[V_\lambda(g)] \subset V_\lambda(g)$$

Para ver esto, sea $v \in V_\lambda(g)$. Entonces, como $f \circ g = g \circ f$:

$$g(f(v)) = f(g(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \Longrightarrow f(v) \in V_\lambda(g)$$

Por tanto, tenemos que $f[V_\lambda(g)] \subset V_\lambda(g)$, y podemos considerar $f_{\big|V_\lambda(g)}$ endomorfismo autoadjunto.

Tenemos que, $\forall v \in V_\lambda \Longrightarrow g(v) = \lambda v$. Además, al ser $f_{\big|V_\lambda(g)}$ endomorfismo autoadjunto, tenemos que es diagonalizable con una base ortonormal de vectores propios. Sea por tanto $V_\lambda(g) = \mathcal{L}\{e_1, \dots, e_r\}$ de forma que $f(e_i) = \mu_i e_i$. Por ser $e_i \in V_\lambda$, tenemos que $g(e_i) = \lambda e_i$

Repitiendo este proceso para cada valor propio λ_i de g, hallamos en cada caso una base de vectores propios de g y f que diagonaliza a $V_{\lambda_i}(g)$. Cabe destacar que los vectores propios si son los mismos, pero los valores propios no.

Como tenemos que $V_{\lambda_i}(g) \cap V_{\lambda_j}(g) = \{0\}$ para $i \neq j$ y g es diagonalizable, tenemos que $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Por tanto, la unión de todas esas bases es base de V, y tenemos lo buscado.

Ejercicio 4.3.8. Sea A una matriz simétrica real de orden n que verifica $A^3 = I$. Demostrar que $A = I$.

Calculamos en primer lugar sus valores propios. Sea $x \in \mathbb{R}^3$, tenemos que λ es un valor propio si:

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow A^3 x^3 = \lambda^2 x^3 \Longrightarrow Ix^3 = \lambda^3 x^3 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, tenemos que su único valor propio posible es $\lambda = 1$. Además, por ser simétrica y real tenemos que es diagonalizable. Por tanto, tenemos que la multiplicidad algebraica del 1 ha de ser 3, es decir,

$$A \sim I$$

No obstante, tenemos que la única matriz semejante a la identidad es ella misma, por lo que $A = I$.

Ejercicio 4.3.9. Demostrar los endomorfismos autoadjuntos $f \in End(V, g)$ que verifican $f^4 = Id$ son las reflexiones.

Calculamos en primer lugar sus valores propios. Sea $A = M(f; \mathcal{B})$. Sea $x \in V$, tenemos que λ es un valor propio si:

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow A^4 x^4 = \lambda^4 x^4 \Longrightarrow Ix^4 = \lambda^4 x^4 \Longrightarrow \lambda^4 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Por tanto, tenemos que sus único valores propios posibles son $\lambda = \pm 1$.

Ejercicio 4.3.10. Sea (V, g) un EVME. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Todo endomorfismo diagonalizable es autoadjunto.

   Esto es **falso**, y ponemos un contraejemplo con un endomorfismo representado por una matriz de orden 2 no simétrica:

$$A = M(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Tenemos que su polinomio característico es:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Establecemos la condición de $\Delta > 0 \iff (a+d)^2 - 4(ad-bc) \geqslant 0$. Un posible contraejemplo es:

$$A = M(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema Fundamental de la Diagonalización, como tiene dos valores propios distintos por ser su discriminante positivo, tenemos que es diagonalizable. No obstante, como $A \notin \mathcal{S}(2)$, tenemos que no es autoadjunto.

2. Todo endomorfismo diagonalizable con valores propios 1 y -1 es una reflexión.

   SI f es una isometría, sabemos que es cierto, ya que sus únicos valores propios posibles son esos. Por tanto, tomemos f que no sea una isometría. Por ejemplo, sea $f \in End(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ tal que:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que $P_f(\lambda) = \lambda^2 - 1$, por lo que sus dos valores propios son ± 1. Por el Teorema Fundamental de la Diagonalización, tenemos que es diagonalizable, pero como su matriz asociada en $\mathcal{B}_u$ (base ortonormal) no es simétrica, f no es una reflexión.

3. La composición de dos reflexiones siempre es otra reflexión.

   Tenemos que $f \in End(V^n)$ es una reflexión si y solo si es una isometría y es autoadjunto. En una base ortonormal, tenemos que esto equivale a que f es una reflexión si y solo si su matriz asociada en dicha base es simétrica y ortogonal.

   Sean las matrices asociadas a dos reflexiones en $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ las siguientes:

$$A_1 = M(s_1, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = M(s_2, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que ambas son reflexiones, ya que al ser sus matrices simétricas son endomorfismos autoadjuntos, y al ser sus columnas base ortonormal de $\mathcal{R}^2$, son ortogonales.

   No obstante, tenemos que:

$$A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = M(s_1 \circ s_2, \mathcal{B})$$

   Como $M(s_1 \circ s_2, \mathcal{B}_u)$ no es simétrica y $\mathcal{B}_u$ es ortonormal, tenemos que no es un endomorfismo autoadjunto, por lo que la composición de estas dos simetrías no es una simetría.

4. Si $u, v \in V$ son dos vectores con $g(u,u) = g(v,v)$, entonces existe una reflexión s respecto de una recta tal que $s(u) = v$.

   Sea la recta $L = \mathcal{L}\{u+v\}$. Consideramos los siguientes vectores:

$$w_1 = u + v \qquad w_2 = v - u$$

$$g(w_1, w_2) = g(u+v, v-u) = g(u, v) - g(u, u) + g(v, v) - g(v, u) = -g(u, u) + g(v, v) = 0$$

Por tanto, tenemos que $w_1 \perp w_2$. Como $w_1 \in L = \mathcal{L}\{w_1\} \Longrightarrow w_2 \in L^\perp$.

$$w_1 - w_2 = 2u \Longrightarrow u = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$
$$w_1 + w_2 = 2v \Longrightarrow v = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

Por tanto, tenemos que $s_L(u) = v$. Es decir, existe esa reflexión axial, con eje de giro $L = \mathcal{L}\{w_1\}$.

5. Si $u, v \in V$ son dos vectores con $g(u, u) = g(v, v)$, entonces existe una reflexión s respecto de un hiperplano tal que $s(u) = v$.

   Sea la recta $L = \mathcal{L}\{v - u\}$. Consideramos los siguientes vectores:

   $$w_1 = u + v \qquad w_2 = v - u$$

   $$g(w_1, w_2) = g(u+v, v-u) = g(u, v) - g(u, u) + g(v, v) - g(v, u) = -g(u, u) + g(v, v) = 0$$

   Por tanto, tenemos que $w_1 \perp w_2$. Como $w_2 \in L = \mathcal{L}\{w_2\} \Longrightarrow w_1 \in L^\perp$.

   $$w_1 - w_2 = 2u \Longrightarrow u = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$
   $$w_1 + w_2 = 2v \Longrightarrow v = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

   Por tanto, tenemos que $s_{L^\perp}(u) = v$. Es decir, existe esa reflexión especular, con plano de simetría $\pi = L^\perp = \mathcal{L}\{v - u\}^\perp$.

6. Si f es un endomorfismo autoadjunto, entonces f^2 y $f^5 - 3f^2 + f - 2Id$ también son autoadjuntos.

   Sabemos que, dado $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, tenemos que $A^n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   Además, dado $k \in \mathbb{R}$, tenemos que $kA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   Por último, tenemos que dados $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, se tiene que $A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   Por tanto, sea $A = M(f; \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en cierta base $\mathcal{B}$ ortonormal, tenemos que:

   $$A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow f^2 \text{ autoadjunto}$$
   $$A^5 - 3A^2 + A - 2Id \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow f^5 - 2f^2 + f - 2Id \text{ autoadjunto}$$

7. Si $u, v, w \in V$ son tres vectores linealmente independientes, entonces no existe ningún endomorfismo autodjunto $f \in End(V)$ tal que $f(u) = v$, $f(v) = w$ y $f(w) = u$.

   Demostramos mediante reducción a absurdo. Supongamos que sí, y llegaremos a una contradicción.

   Como son linealmente independientes, forman parte de la base. Por tanto, sea $\mathcal{B} = \{u, v, w, e_4, \dots, e_n\}$ la base de V. Consideramos la restricción de f a

$U = \mathcal{L}\{u, v, w\}$. Al ser f un endomorfismo adutoadjunto, entonces $f_{|_U}$ también lo es.

$$A = M\left(f_{|_U}; \{u, v, w\}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{f_{|_U}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

Por tanto, tenemos que el único valor propio de $f_{|_U}$ es $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 1. Por tanto, como la suma de las multiplicidades algebraicas no es 3, tenemos que no es diagonalizable. No obstante, todo endomorfismo autoadjunto es diagonalizable, por lo que llegamos a una contradicción.

Ejercicio 4.3.11. En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g cuya matriz respecto a la base usual es igual a

$$G = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que g es una métrica euclídea. Si $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la proyección ortogonal (respecto de g) sobre la recta $y = 0$, calcular $M(p; \mathcal{B}_u)$

   Veamos en primer lugar que G es definida positiva.

   $$|1| = 1 > 0 \qquad |G| = 2 - 1 = 1 > 0$$

   Por tanto, G es definida positiva, por lo que g también lo es. Por tanto, $(\mathbb{R}^2, g)$ es un EVME, con g como métrica euclídea.

   Pasamos ahora a calcular $M(p; \mathcal{B}_u)$.

   Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2\}$. Tenemos que $L = \mathcal{L}\{e_1\}$. Por tanto, tenemos que:

   $$p(e_1) = e_1$$

   Necesitamos ahora calcular $p(e_2)$. Para ello, es necesario descomponerlo en un vector de L y otro de $L^\perp$.

   $$\begin{aligned} V_0 = L^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 0 \right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que la descomposición, para cierto $a, b \in \mathbb{R}$, es:

   $$e_2 = ae_1 + b(e_1 - e_2) = ae_1 + be_1 - be_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = -1 \\ a = 1 \end{array} \right.$$

Es decir, $e_2 = e_1 - (e_1 - e_2)$, con $e_1 \in L \wedge (e_1 - e_2) \in L^\perp$. Por tanto,

$$p(e_2) = p(e_1 - (e_1 - e_2)) = e_1$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(p; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar un endomorfismo $f_1 \in End(\mathbb{R}^2)$ que no sea autoadjunto ni para $\langle , \rangle$ ni para la métrica g.

   Sea f_1 el endomorfismo dado por:

$$A = M(f_1; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como sabemos que la base usual es una base ortonormal para $\langle ; \rangle$, al no ser A simétrica, tenemos que f no es autoadjunto para $\langle ; \rangle$.

   Comprobemos que tampoco lo es para g.

$$g(e_1, f_1(e_2)) = g(e_1, 0) = 0 \qquad g(f_1(e_1), e_2) = g(e_2, e_2) = 2$$

   Como $2 \neq 0 \Longrightarrow g(e_1, f_1(e_2)) \neq g(f_1(e_1), e_2)$, por lo que f_1 no es autoadjunto para g.

3. Encontrar un endomorfismo $f_2 \in End(\mathbb{R}^2)$ que sea diagonalizable y sea autoadjunto respecto de una de las métricas pero no de la otra.

   Sea f_2 el endomorfismo dado por:

$$A = M(f_2; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$$

   Como $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, tenemos que f es diagonalizable, ya que su matriz asociada es simétrica de orden dos.

   Como sabemos que la base usual es una base ortonormal para $\langle ; \rangle$, al ser A simétrica, tenemos que f_2 es autoadjunto para $\langle ; \rangle$.

   Por tanto, tenemos que f_2 es diagonalizable y es autoadjunto respecto del producto escalar. Comprobemos que no lo es para g.

$$g(e_1, f_2(e_2)) = g(e_1, e_1) = 1 \qquad g(f_2(e_1), e_2) = g(e_2, e_2) = 2$$

   Como $2 \neq 1 \Longrightarrow g(e_1, f_2(e_2)) \neq g(f_2(e_1), e_2)$, por lo que f_2 no es autoadjunto para g.

Ejercicio 4.3.12. En $(\mathbb{R}^3, <,>)$, y dado $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, encontrar la matriz respecto de la base usual de:

$$p_L \qquad p_{L^\perp} \qquad s_L \qquad s_{L^\perp}$$

1. p_L:

   Por lo visto en el ejercicio 4.3.1.2a, tenemos que:

$$M(p_L; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $p_{L^\perp}$

   Como tenemos que:

$$Id = p_L + p_{L^\perp} \Longrightarrow p_{L^\perp} = Id - p_L$$

   Por tanto, dado $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, tengo que:

$$p_{L^\perp}(v) = Id\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - p_L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$M(p_{L^\perp}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. s_L:

   Como tenemos que $s_L = p_L - p_{L^\perp}$:

$$M(s_L, \mathcal{B}_u) = M(p_L; \mathcal{B}_u) - M(p_{L^\perp}; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $s_{L^\perp}$:

   Como tenemos que $s_{L^\perp} = -s_L$:

$$M(s_{L^\perp}, \mathcal{B}_u) = -M(s_L, \mathcal{B}_u) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.3.13. En $(\mathbb{R}^3, <,>)$, y dado $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, diagonalizar s_L y p_L.

1. s_L:

   Tengo que sus valores propios son ± 1 por ser una simetría. Además, tengo que:
   $$V_1 = L \qquad V_{-1} = L^\perp$$
   Por tanto, $D = P^t M(s_L; \mathcal{B}_u)P$, con:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$
   Para calcular la matriz de cambio de base P, calculamos una base de $L^\perp$.
   $$\begin{aligned} V_{-1} = L^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \\ &= \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$
   Por tanto, sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de vectores propios de s_L

   Sea $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \{e_1, e_2, \bar{e_3}\}$ base de ortogonal de vectores propios de s_L. Para calcular $\bar{e_3}$, impongo que $\bar{e_3} \in V_{-1} \wedge \bar{e_3} \perp \bar{e_2} = e_2$:
   $$\bar{e_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \langle \bar{e_3}, e_2 \rangle = 0 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$
   Por tanto, sea $\bar{e_3} = (1, 1, -2)^t$. Sea por tanto la base de vectores propios ortogonal la siguiente:
   $$\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$
   Por último, sea la base de vectores propios ortonormal la siguiente:
   $$\bar{\bar{\mathcal{B}}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$
   Por tanto, tenemos que:
   $$P = M(\bar{\bar{\mathcal{B}}}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

2. p_L:

   Tengo que sus valores propios son $\{1, 0\}$ por ser una proyección. Además, tengo que:
   $$V_1 = L \qquad V_0 = L^\perp$$

   Por tanto, $D = P^t M(p_L; \mathcal{B}_u)P$, con:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

   Como los subespacios propios no cambian, la base de vectores propios ortonormal es la siguiente:
   $$\bar{\bar{\mathcal{B}}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

   Por tanto, tenemos que:
   $$P = M(\bar{\bar{\mathcal{B}}}; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

Ejercicio 4.3.14. Sea $f \in Iso(V^n, g)$. Supuesto $f \circ f = -Id$, demostrar que n es par y f no tiene valores propios.

Empezamos demostrando que f no tiene valores propios. Por reducción al absurdo, supongamos que sí los tiene. Sea $v \in V - \{0\}$ vector propio asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio tal que $f(v) = \lambda v$. Aplicando f,
$$(f \circ f)(v) = \lambda f(v) \Longrightarrow -v = \lambda^2 v \Longrightarrow \lambda^2 = -1$$

Contradicción. Por tanto, tenemos que f no tiene valores propios. Como un polinomio de grado impar siempre tiene al menos una raíz real, tenemos que el grado del polinomio característico es par. Por tanto, n es par.

Ejercicio 4.3.15. Sea $f \in Iso(V^n, g)$. Supuesto $f \circ f = -Id$, demostrar que $\exists \mathcal{B}_o$ base ortonormal tal que:
$$A = M(f; \mathcal{B}_o) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_{n/2} \\ \hline I_{n/2} & 0 \end{array}\right)$$

Por el ejercicio anterior, tenemos que $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, ya que la dimensión es par. Por tanto, demostramos por inducción sobre k:

- <u>Para $k = 1$</u>:

  Tomo $e \in V \mid ||e|| = 1$. Consideramos ahora $f(e)$, que por ser f isometría tenemos que $||f(e)|| = 1$. Consideramos $\mathcal{B} = \{e, f(e)\}$

Veamos que son ortononales:

$$g(e, f(e)) = g(f(e), -e) = -g(f(e), e) \Longrightarrow g(e, f(e)) = 0$$

Además, como son unitarios y perpendiculares, forman base. Tenemos que

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene para $k = 1$.

- Supuesto cierto para k, demuestro para $k + 1$

  Tomamos $e \in V$ unitario. Consideramos $U = \mathcal{L}\{e, f(e)\}$.

  Tenemos que $f(U) \subset U$, pero como además f es una isometría tenemos que $f(U) = U$.

  Por ser f una isometría, como U es invariante tenemos que $U^\perp$ es invariante. La dimensión de $U^\perp = \dim V - \dim U = 2k - 2 = 2(k - 1)$.

  Tenemos que $\{e, f(e)\}$ es una base ortonormal de U, como hemos demostrado para $k = 1$. Además, por hipótesis de inducción, tenemos que $\exists \mathcal{B}_1$ base ortonormal de $U^\perp$ tal que, por hipótesis de inducción:

$$M(f_{|_{U^\perp}}; \mathcal{B}_1) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_{k-1} \\ \hline I_{k-1} & 0 \end{array}\right)$$

  Sea dicha base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, \dots, e_{2k-2}\}$. No obstante, por la forma de la matriz tenemos que:

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_{k-1}, f(e_1), \dots, f(e_{k-1})\}$$

  Por tanto, ya que $U \oplus U^\perp = V$, tenemos que una base ortonormal de V es:

$$\mathcal{B}_o = \{e, f(e)\} \cup \mathcal{B}_1 = \{e, e_1, \dots, e_{k-1}, f(e), f(e_1), \dots, f(e_{k-1})\}$$

Ejercicio 4.3.16. Sea (V^n, g) EVME, considerando una base $\mathcal{B}$ de V. Sea $f \in End(V)$. Definimos:

$$G = M(g; \mathcal{B}) \qquad\qquad A = M(f; \mathcal{B})$$

Demostrar que:

$$f \text{ es autoadjunto} \Longleftrightarrow A^t G = GA$$

Demostración. Sean $u, v \in V^n$ tal que, en la base $\mathcal{B}$ tenemos las siguientes coordenadas:

$$u \equiv x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad\qquad v \equiv y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g(f(u),v) = f(u)^t G v = (Ax)^t\ G\ y = x^t\ A^t G\ y$$
$$g(u,f(v)) = x^t\ GA\ y$$

Por tanto, tenemos que:

$$f \text{ endomorfismo autoadjunto} \iff g(f(u),v) = g(u,f(v)) \iff A^t G = GA$$

Además, en el caso de que la base sea ortonormal, tenemos que $G = I$, por lo que se cumple lo ya visto de que la matriz A sea simétrica. □

Ejercicio 4.3.17. Diagonalizar la siguiente matriz mediante una matriz ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

Busco los valores propios de A_3:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -1-\lambda & -2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda) = \lambda(\lambda+3)^2$$

Por tanto, tenemos que los valores propios son: $\{0,-3\}$. Calculo ahora los subespacios propios:

$$V_0 = \{x \equiv (x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid A_3 x = 0\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{-3} = \{x \equiv (x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (A+3I)x = 0\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} =$$
$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, dada la base $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$, tenemos que:

$$D = M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \qquad P = M(\mathcal{B};\mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

donde se cumple que $P^t A P = D$ diagonal.

Ejercicio 4.3.18. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A \wedge tr(A) = 1$. Entonces, probar que:

$$\exists P \in O(n) \mid A = P^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P$$

Por ser A simétrica, sabemos que es diagonalizable. Por tanto,

$$1 = tr(A) = tr(QDQ^{-1}) = tr(QQ^{-1}D) = tr(D)$$

Sabiendo que $A^2 = A$, tenemos que los posibles valores propios de A son:

$$\lambda v^2 = Av^2 = A^2v^2 = \lambda^2 v^2 \Longrightarrow \lambda = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda = \{0, 1\}$$

Por tanto, tenemos que D es diagonal con traza 1, por lo que es la matriz dada.

Ejercicio 4.3.19. Consideramos $(\mathbb{R}^3, \ \langle,\rangle)$ y tres reflexiones axiales dadas por s_1, s_2, s_3. Demostrar que:

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = Id \Longleftrightarrow \text{ Los ejes son ortogonales entre sí.}$$

Procedemos mediante doble implicación:

$\Longleftarrow$) Para $i = 1, 2, 3$, sea s_i la simetría respecto de la recta L_i, con $L_i = \mathcal{L}\{e_i\}$ tal que $||e_i|| = 1$.

Como los ejes son ortogonales, tenemos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ son ortogonales. Como además no son nulos, tenemos que son linealmente independientes y forman base. Sea, por tanto,

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

Además, tenemos que:

$$M(s_1 \circ s_2 \circ s_3, \mathcal{B}) = M(s_1, \mathcal{B})M(s_2, \mathcal{B})M(s_3, \mathcal{B})$$

Teniendo en cuenta que los tres vectores son perpendiculares entre sí, tenemos que para la simetría s_i, $e_i \in V_1$, $e_j \in V_{-1}$ para $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Por tanto:

$$M(s_1 \circ s_2 \circ s_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Por tanto, como en cierta base dicha composición es la identidad, tenemos que:

$$s_1 \circ s_2 \circ s_3 = Id$$

$\Longrightarrow$) Demostramos en primer lugar que las tres rectas son distintas mediante reducción al absurdo.

Supongamos que dos son iguales. Entonces, $s_i \circ s_j = Id$ para ciertos i, j.

- Supuesto $s_1 = s_2$: Tenemos que $s_3 = Id$, que no es una reflexión axial.
- Supuesto $s_2 = s_3$: Tenemos que $s_1 = Id$, que no es una reflexión axial.
- Supuesto $s_1 = s_3$: Aplicamos s_3 por la derecha y tenemos $s_2 \circ s_3 = s_3$. Aplicamos s_1 por la izquierda y tenemos $s_2 = Id$, que no es una reflexión axial.

Por tanto, si dos rectas son iguales tenemos que la tercera es la identidad, que no es una reflexión axial. Por tanto, llegamos a una contradicción y sabemos que las rectas son distintas.

Para $i = 1, 2, 3$, sea s_i la simetría respecto de la recta L_i, con $L_i = \mathcal{L}\{e_i\}$ tal que $||e_i|| = 1$.

Como $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = Id$, tenemos que $s_2 \circ s_3 = s_1$.

Consideramos ahora la recta $L = L_2^\perp \cap L_3^\perp$. Es una recta, ya que es la intersección de dos planos. Estos son distintos al ser $L_2 \neq L_3$, por lo que su intersección es una recta. Por tanto, dado $v \in L$ tenemos que:

$$s_2(v) = s_3(v) = -v$$

Entonces, como las simetrías son endomorfismos, tenemos que:

$$s_1(v) = (s_2 \circ s_3)(v) = s_2(-v) = -s_2(v) = v \Longrightarrow s_1(v) = v \Longrightarrow v \in L_1$$

Por tanto, $\forall v \in L_2^\perp \cap L_3^\perp \Longrightarrow v \in L_1$, por lo que $L_1 \subset L_2^\perp \cap L_3^\perp$. Por tanto, tenemos que $L_1 \subset L_2^\perp, L_3^\perp$, por lo que $L_1 \perp L_2, L_3$.

Veamos ahora de manera análoga que $L_2 \perp L_3$. Tenemos que $s_1 \circ s_2 = s_3$.

Consideramos ahora la recta $L = L_1^\perp \cap L_2^\perp$. Es una recta, ya que es la intersección de dos planos. Estos son distintos al ser $L_2 \neq L_1$, por lo que su intersección es una recta. Por tanto, dado $v \in L$ tenemos que:

$$s_1(v) = s_2(v) = -v$$

Entonces, como las simetrías son endomorfismos, tenemos que:

$$s_3(v) = (s_1 \circ s_2)(v) = s_1(-v) = -s_1(v) = v \Longrightarrow s_3(v) = v \Longrightarrow v \in L_3$$

Por tanto, $\forall v \in L_1^\perp \cap L_2^\perp \Longrightarrow v \in L_3$, por lo que $L_3 \perp L_1, L_2$. Es decir,

$$e_3 \perp e_1, e_2 \Longrightarrow L_3 \perp L_1, L_2$$

Por tanto, tenemos que los tres ejes son ortogonales.

Ejercicio 4.3.20. Sea $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}^3$ 3 planos vectoriales. Demostrar que:

$s_{U_1} \circ s_{U_2} \circ s_{U_3} = -Id \Longleftrightarrow$ Los vectores normales a U_1, U_2, U_3 son ortogonales entre sí.

Demostramos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Demostramos en primer lugar que los tres planos son distintos, o equivalentemente que las tres simetrías especulares son distintas. Supongamos que dos simetrías son iguales. Entonces, usando la involución de las simetrías, tendrías que la tercera es $-Id$. No obstante, esto no es una reflexión especular, por lo que llegaríamos a una contradicción. Por tanto, tenemos que los tres planos son distintos entre sí.

Sea e_i el vector normal a U_i para $i = 1, 2, 3$. Como tenemos que la composición es $-Id$, consideremos:

$$s_{U_2} \circ s_{U_3} = -s_{U_1}$$

Consideramos ahora el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por $L = U_2 \cap U_3$. Como los planos son distintos, su intersección es una recta, y sea $v \in L$.

$$(s_{U_2} \circ s_{U_3})(v) = s_{U_2}(v) = v = -s_{U_1}(v) \Longrightarrow v \in U_1^\perp$$

Por tanto, $\forall v \in U_2 \cap U_3 \Longrightarrow v \in U_1^\perp$. De esto, concluimos que $e_1 \perp e_2, e_3$. Vemos ahora que $e_2 \perp e_3$. Para ello partimos de $s_{U_1} \circ s_{U_2} = -s_{U_3}$, y consideramos la recta $L = U_1 \cap U_2$. Entonces, tomando $v \in L$,

$$(s_{U_1} \circ s_{U_2})(v) = s_{U_1}(v) = v = -s_{U_3}(v) \Longrightarrow v \in U_3^\perp$$

Por tanto, $\forall v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v \in U_3^\perp$. De esto, concluimos que $e_3 \perp e_1, e_2$.

$\Longleftarrow$) Como no son nulos y son ortogonales, tenemos que los vectores normales son independientes. Además, al trabajar en $\mathbb{R}^3$ forman base. Por tanto, sea e_i el vector normal a U_i para $i = 1, 2, 3$. Entonces, sea la base:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

Además, tenemos que:

$$M(s_{U_1} \circ s_{U_2} \circ s_{U_3}, \mathcal{B}) = M(s_{U_1}, \mathcal{B}) M(s_{U_2}, \mathcal{B}) M(s_{U_3}, \mathcal{B})$$

Teniendo en cuenta que se han tomado los vectores normales como base y que los tres vectores son ortogonales, tenemos que para la simetría s_{U_i}, $e_i \in V_{-1}$, $e_j \in V_1$ para $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Por tanto:

$$M(s_{U_1} \circ s_{U_2} \circ s_{U_3}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

Por tanto, como en cierta base dicha composición es $-Id$, tenemos que:

$$s_{U_1} \circ s_{U_2} \circ s_{U_3} = -Id$$

Ejercicio 4.3.21. Estudiar las isometrías de $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ que respecto de la base usual tienen una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_1| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Además, $A_1 \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, por lo que no se trata de una reflexión.

   Por tanto, se trata de un giro de ángulo de $\theta \neq \{0, \pi\}$. Es decir,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Por tanto, por analogía de términos,

$$\left.\begin{array}{r} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

   Es decir, se trata de un giro de ángulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_2| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa, es decir, una simetría axial.

   El eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (A_2 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una reflexión axial sobre $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

3. $A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_3| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Además, $A_3 \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, por lo que no se trata de una reflexión.

   Por tanto, se trata de un giro de ángulo de $\theta \neq \{0, \pi\}$. Es decir,

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Por tanto, por analogía de términos,

$$\left.\begin{array}{r} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

   Es decir, se trata de un giro de ángulo $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

4. $A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_4| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa, es decir, una simetría axial.

   El eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (A_4 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (-1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, se trata de una reflexión axial sobre $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$.

5. $A_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_5| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Además, $A_5 \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, por lo que no se trata de una reflexión.

   Por tanto, se trata de un giro de ángulo de $\theta \neq \{0, \pi\}$. Es decir,

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Por tanto, por analogía de términos,

$$\left.\begin{array}{r} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

   Es decir, se trata de un giro de ángulo $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

6. $A_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_6| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa. Además, $A_6 \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, por lo que no se trata de una reflexión.

   Por tanto, se trata de un giro de ángulo de $\theta \neq \{0, \pi\}$. Es decir,

$$A_6 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Por tanto, por analogía de términos,

$$\left.\begin{array}{r} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

   Es decir, se trata de un giro de ángulo $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 4.3.22. Estudiar las isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ que respecto de la base usual tienen una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_1| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_1 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

   Su eje de giro es $L = V_1$:

   $$\begin{aligned} V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

   Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1, -1, 0)^t$.

   $$f(e) = (0, 1, -1)^t$$

   El ángulo de giro cumple esta relación:

   $$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

   Por tanto, tenemos que se trata de un giro sin simetría $G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de un tercio de vuelta, es decir, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_2| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa en el espacio; es decir, un giro con simetría. Además, como $A_2 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

   $$f = s_{L^T} \circ G_{L,\theta}$$

   Su eje de giro es $L = V_{-1}$:

   $$\begin{aligned} V_{-1} = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_2 + I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Calculamos su plano de simetría:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1,0,1)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = (1,-1,0)^t$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro con simetría $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ y con plano de simetría $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos que $|A_3| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa en el espacio; es decir, un giro con simetría. Además, como $A_3 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0,\pi\}$.

$$f = s_{L^T} \circ G_{L,\theta}$$

Su eje de giro es $L = V_{-1}$:

$$\begin{aligned} V_{-1} = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_3 + I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Calculamos su plano de simetría:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1,0,1)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = (0,1,1)^t$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro con simetría $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ y con plano de simetría $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_4| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_1 \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que se trata de una reflexión ($\theta \in \{0, \pi\}$). Como $A_4 \neq I_3$, tenemos que $f \neq I$. Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión axial.

   Su eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión axial s_L sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_5| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa en el espacio; es decir, un giro con simetría. Además, como $A_5 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

$$f = s_{L^T} \circ G_{L,\theta}$$

   Su eje de giro es $L = V_{-1}$. En este caso, vemos claro que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-1}$, por lo que $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

   Calculamos su plano de simetría:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1,0,0)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = (0,0,1)^t$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro con simetría $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ y con plano de simetría $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 4.3.23. Estudiar las isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ que respecto de la base usual tienen una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   Calculamos en primer lugar $|A_1|$:

   $$|A_1| = -(-1)\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} = -1$$

   Tenemos que $|A_1| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa en el espacio; es decir, un giro con simetría. Además, como $A_1 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

   $$f = s_{L^T} \circ G_{L,\theta}$$

   Su eje de giro es $L = V_{-1}$:

   $$\begin{aligned} V_{-1} = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 + I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Calculamos su plano de simetría:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1, -1, 0)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro con simetría $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de ángulo $\theta = \arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ y con plano de simetría $L^\perp = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Calculamos en primer lugar $|A_2|$:

$$|A_2| = -(-1)\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Tenemos que $|A_2| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_2 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

$$f = G_{L,\theta}$$

Su eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1, 1, 0)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{2} \Longrightarrow \theta = \arccos\frac{\sqrt{2} - 2}{4}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro sin simetría $G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}-2}{4}$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Calculamos en primer lugar $|A_3|$:

$$|A_3| = (-1)\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Tenemos que $|A_3| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_3 \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que se trata de una reflexión, por lo que $\theta \in \{0, \pi\}$. Como $A_3 \neq I_3$, tenemos que se trata de una reflexión axial.

Su eje de simetría es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_3 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión axial s_L sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4. $A_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tenemos que $|A_4| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_4 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

$$f = G_{L,\theta}$$

Su eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned}
V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_4 - I)x = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1, -1, 0)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro sin simetría $G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5. $A_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tenemos que $|A_5| = 1$, por lo que se trata de una isometría directa en el espacio; es decir, un giro sin simetría. Además, como $A_5 \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que no se trata de una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

$$f = G_{L,\theta}$$

Su eje de giro es $L = V_1$:

$$\begin{aligned}
V_1 = L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_5 - I)x = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Para calcular el ángulo de giro, tomo un vector perpendicular al eje de giro, es decir, $e = (1, -1, 0)^t \in L^\perp$. Por tanto, como $e \in L^\perp$, tenemos que $G_{L,\theta}(e) \in L^\perp$, por lo que $f(e) = s_{L^\perp}(G_{L,\theta}(e)) = G_{L,\theta}(e)$

$$f(e) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El ángulo de giro cumple esta relación:

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, tenemos que se trata de un giro sin simetría $G_{L,\theta}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

6. $A_6 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Tenemos que $|A_6| = -1$, por lo que se trata de una isometría inversa en el espacio; es decir, un giro con simetría. Además, como $A_6 \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que se trata de una reflexión, por lo que $\theta \in \{0, \pi\}$. Como $A_6 \neq -I_3$, tenemos que se trata de una reflexión especular.

$$f = s_U$$

   Su plano de simetría es $L = V_1$:

$$\begin{aligned} V_1 = U &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A_5 - I)x = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión especular s_U sobre el plano $U = V_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 4.3.24. Encontrar las matrices de las siguientes isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$:

1. La simetría respecto del plano $\Pi \equiv 4y - 3z = 0$

   Tenemos que el plano de simetría es:

$$\Pi = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Ampliando a una base de $\mathbb{R}^3$, tenemos que una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(s_\Pi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz asociada a la base usual, sea $v \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \langle v, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1$$

$$a_2 = \langle v, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}(3x_2 + 4x_3)$$

$$a_3 = \langle v, e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}(-4x_2 + 3x_3)$$

Por tanto, por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, tenemos que:

$$s_\Pi(v) = a_1e_1 + a_2e_2 - a_3e_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(3x_2+4x_3)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}(-4x_2+3x_3)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{25}(3x_2 + 4x_3) + \frac{4}{25}(-4x_2 + 3x_3) \\ \frac{4}{25}(3x_2 + 4x_3) + \frac{3}{25}(4x_2 - 3x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(s_\Pi, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$$

2. La simetría respecto de la recta $L \equiv x + 2y + 2z = 0, 2x + y + 2z = 0$

Tenemos que la recta es:

$$L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

Ampliando a una base de $\mathbb{R}^3$, tenemos que una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(s_L, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz asociada a la base usual, sea $v \in \mathbb{R}^3$, con coordenadas

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \langle v, e_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}(2x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$a_2 = \langle v, e_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

$$a_3 = \langle v, e_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{34}}(3x_1 + 3x_2 + 4x_3)$$

Por tanto, por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, tenemos que:

$s_L(v) = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 =$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}(2x_1 + 2x_2 - 3x_3)\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{34}}(3x_1 + 3x_2 + 4x_3)\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{17}(2x_1 + 2x_2 - 3x_3) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{3}{34}(3x_1 + 3x_2 + 4x_3) \\ \frac{2}{17}(2x_1 + 2x_2 - 3x_3) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{3}{34}(3x_1 + 3x_2 + 4x_3) \\ -\frac{3}{17}(2x_1 + 2x_2 - 3x_3) - \frac{4}{34}(3x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-9}{17} & \frac{8}{17} & -\frac{12}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{-9}{17} & -\frac{12}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{12}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow M(s_L, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -9 & 8 & -12 \\ 8 & -9 & -12 \\ -12 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

3. El giro de eje $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

   Sea $G_{L,\theta}$ el giro. Calculamos en primer lugar el subespacio ortogonal:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Por tanto, consideramos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Tenemos que:

$$M(G_{L,\theta}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. El giro con simetría de eje $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

   Sea $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ el giro. Calculamos en primer lugar el subespacio ortogonal:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Por tanto, consideramos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Tenemos que:

$$M(s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. El giro de eje $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   Sea $G_{L,\theta}$ el giro. Calculamos en primer lugar el subespacio ortogonal:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, consideramos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Tenemos que:

$$M(G_{L,\theta}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. El giro con simetría de eje $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   Sea $s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$ el giro. Calculamos en primer lugar el subespacio ortogonal:

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Por tanto, consideramos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   Tenemos que:

$$M(s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.3.25. Sean f, h dos isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$. Si f es la simetría respecto del plano vectorial Π, demostrar que $g = h \circ f \circ h^{-1}$ es la simetría respecto de $h(\Pi)$.

En primer lugar, tenemos que g es una isometría, ya que estas forman un grupo para la composición.

Tomando determinante, tenemos que:

$$|g| = |h \circ f \circ h^{-1}| = |h|\ |f|\ |h^{-1}| = |f| = -1$$

Por tanto, como g es una isometría inversa, tenemos que se trata de un giro con simetría.

Como h es una isometría, tenemos que podemos considerar la inversa de la matriz asociada a h en una base ortogonal. Por tanto, tenemos que se trata de un isomorfismo. Por tanto, notamos para cada $v \in \Pi$ el valor $h_v = h(v) \in \mathbb{R} \mid h(v) = h_v$. Es decir, h_v es la imagen asociada a un único $v \in \Pi$.

Por tanto, dado $v \in \Pi$, tenemos:

$$g(h_v) = (h \circ f \circ h^{-1})(h_v) = (h \circ f)(v) = h(v) = h_v \Longrightarrow h_v \in V_1(g)$$

donde he empleado que $h_v = h(v) \Longrightarrow h^{-1}(h_v) = v$ y que $h_v \in V_1(f)$.

Por tanto, tenemos que $V_1(g) \neq \{0\}$, y g es una isometría inversa. Por tanto, ha de ser una simetría especular respecto al plano $V_1(g)$.

Además, tenemos que $h(\Pi) \subset V_1(g)$. Como Π es un plano, tenemos que $h(\Pi)$ también, ya que un isomorfismo conserva las dimensiones. Por tanto, tenemos que $h(\Pi) = V_1(g)$.

Por tanto, efectivamente se trata de una reflexión especular respecto de $h(\Pi)$.

Ejercicio 4.3.26. Sean f, h dos isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$. Si f es un giro de eje L y ángulo θ, demostrar que $g = h \circ f \circ h^{-1}$ es un giro de eje $h(L)$ y ángulo θ.

En primer lugar, tenemos que g es una isometría, ya que estas forman un grupo para la composición.

Tomando determinante, tenemos que:

$$|g| = |h \circ f \circ h^{-1}| = |h|\,|f|\,|h^{-1}| = |f| = 1$$

Por tanto, como g es una isometría directa, tenemos que se trata de un giro sin simetría. Veamos que no es una reflexión:

$$\begin{aligned} g \circ g = h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} = Id \Longleftrightarrow h \circ f \circ f \circ h^{-1} = Id \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow h \circ f \circ f = h \Longleftrightarrow f \circ f = Id \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que g es una reflexión si y solo si f también lo es. No obstante, tenemos que no lo es, por lo que g tampoco. Por tanto, tenemos que g es un giro de ángulo $\theta' \neq \{0, \pi\}$ y eje L'.

Como h es una isometría, tenemos que podemos considerar la inversa de la matriz asociada a h en una base ortogonal. Por tanto, tenemos que se trata de un isomorfismo. Por tanto, notamos para cada $v \in L$ el valor $h_v = h(v) \in \mathbb{R} \mid h(v) = h_v$. Es decir, h_v es la imagen asociada a un único $v \in L$.

Por tanto, dado $v \in L$, tenemos:

$$g(h_v) = (h \circ f \circ h^{-1})(h_v) = (h \circ f)(v) = h(v) = h_v \Longrightarrow h_v \in V_1(g) = L'$$

donde he empleado que $h_v = h(v) \Longrightarrow h^{-1}(h_v) = v$ y que $h_v \in V_1(f)$.

Además, tenemos que $h(L) \subset V_1(g) = L'$. Como L es una recta, tenemos que $h(L)$ también, ya que un isomorfismo conserva las dimensiones. Por tanto, tenemos que $h(L) = V_1(g) = L'$.

Por tanto, efectivamente se trata de giro sin reflexión de eje $h(L)$. Calculamos ahora el ángulo θ' de giro. Consideramos para ello $e \perp L$, y veamos que $h(e) \perp h(L)$:

$$0 = \langle e, \ell \rangle = \langle h(e), h(\ell) \rangle \qquad \forall \ell \in L$$

donde he usado que h es una isometría. Por tanto,

$$g(h(e)) = (h \circ f \circ h^{-1})(h(e)) = (h \circ f)(e)$$

Por tanto, tenemos:

$$\langle h(e), g(h(e)) \rangle = \langle h(e), h(f(e)) \rangle$$

Como h es una isometría, tenemos que:

$$\cos\theta' = \frac{\langle h(e), g(h(e)) \rangle}{||h(e)||^2} = \frac{\langle h(e), h(f(e)) \rangle}{||h(e)||^2} = \frac{\langle e, f(e) \rangle}{||e||^2} = \cos\theta$$

Por tanto, como además el coseno es una función inyectiva entre $[0, \pi]$, tenemos que $\theta = \theta'$.

Por tanto, tenemos que se trata de un giro respecto del eje $h(L)$ de un ángulo θ, como buscábamos demostrar.

Ejercicio 4.3.27. Clasificar las isometrías $f \in Iso(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ que verifican cada una de las siguientes condiciones:

1. $f \circ f = Id$

   Veamos que es una reflexión. Supongamos f giro respecto de L de ángulo θ, y consideramos $v \in L^\perp$ con $||v|| = 1$. Al considerar $v \in L^\perp$, no afecta que sea con simetría o sin simtría. Por tanto,

   $$(f \circ f)(v) = f(f(v)) = v = (G_{L,\theta} \circ G_{L,\theta})(v) = G_{L,2\theta}(v)$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\cos 2\theta = \langle v, G_{L,2\theta}(v) \rangle = \langle v, v \rangle = 1 \Longrightarrow \theta = \{0, \pi\}$$

   Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión.

2. $f \circ f = -Id$

   Tomando determinante, tenemos que:

   $$|f \circ f| = |f|^2 = |-Id| = -1$$

   Por tanto, tenemos que es imposible, ya que $|f| \in \mathbb{R}$. Por tanto, este caso no se puede considerar.

3. $f \circ f = s_U \mid \dim U = 2$.

   Tomando determinante, tenemos que:

   $$|f \circ f| = |f|^2 = |s_U| = -1$$

   De nuevo, tenemos que es imposible, ya que $|f| \in \mathbb{R}$. Por tanto, este caso tampoco se puede considerar.

Ejercicio 4.3.28. Sea $f \in Iso(\mathbb{R}^2, \ \langle, \rangle)$. Demostrar que son equivalentes:

1. f es un giro de ángulo $\theta \leqslant \frac{\pi}{3}$,

2. $||f(v) - v|| \leqslant ||v|| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

Demostramos mediante doble implicación:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Suponemos que f es un giro de ángulo $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Como el coseno es decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que $1 \geqslant \cos\theta \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Por definición de ángulo, tenemos que:

$$1 \geqslant \cos\theta := \frac{\langle v, f(v)\rangle}{||v||^2} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Entonces, considerando que f es una métrica que conserva las normas, tenemos que:

$$2\langle v, f(v)\rangle \geqslant ||v||^2 \Longleftrightarrow ||v||^2 - 2\langle v, f(v)\rangle \leqslant 0 \Longleftrightarrow ||v||^2 - ||v||^2 + ||v||^2 - 2\langle v, f(v)\rangle \leqslant 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ||f(v)||^2 + ||v||^2 - 2\langle v, f(v)\rangle \leqslant ||v||^2 \Longleftrightarrow ||f(v) - v||^2 \leqslant ||v||^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ||f(v) - v|| \leqslant ||v|| \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Además, para $v = 0$ se da la igualdad trivialmente.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Demostramos en primer lugar que se trata de un giro en el plano. Supongamos que no lo es, y al estar en el plano tenemos que f es una reflexión axial. Entonces, dado $v \in V_{-1}$,

$$||f(v) - v|| = ||-2v|| = 2||v|| \leqslant ||v|| \Longrightarrow 2 \leqslant 1$$

Llegando a una contradicción, demostrando así que se trata de un giro.

Veamos ahora que $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$. Partimos de $||f(v) - v|| \leqslant ||v|| \; \forall v \in \mathbb{R}^2$ y, por lo visto en la otra implicación, tenemos que:

$$||f(v) - v|| \leqslant ||v|| \Longleftrightarrow ||v||^2 \leqslant 2\langle v, f(v)\rangle$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\langle v, f(v)\rangle}{||v||^2} =: \cos\theta$$

Por tanto, tenemos que el ángulo θ de giro cumple la siguiente desigualdad:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$$

demostrando así lo pedido.

Ejercicio 4.3.29. Sea $f \in Iso(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$. Demostrar que son equivalentes:

1. f es un giro de ángulo $\theta < \frac{\pi}{2}$,
2. $||f(v) - v|| < \sqrt{2}||v|| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Demostramos mediante doble implicación:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Suponemos que f es un giro de ángulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Como el coseno es decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que $1 > \cos\theta > \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Por definición de ángulo, tenemos que:

$$1 > \cos\theta := \frac{\langle v, f(v)\rangle}{||v||^2} > 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

Entonces, considerando que f es una métrica que conserva las normas, tenemos que:

$$\langle v, f(v)\rangle > 0 \Longleftrightarrow -2\langle v, f(v)\rangle < 0 \Longleftrightarrow ||v||^2 + ||v||^2 - 2\langle v, f(v)\rangle < 2||v||^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ||f(v)||^2 + ||v||^2 - 2\langle v, f(v)\rangle < 2||v||^2 \Longleftrightarrow ||f(v) - v||^2 < 2||v||^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ||f(v) - v|| < \sqrt{2}||v|| \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Demostramos en primer lugar que se trata de un giro sin simetría en el espacio. Supongamos que no lo es, por lo que $V_{-1} \neq \{0\}$. Entonces, dado $v \in V_{-1}$,

$$||f(v) - v|| = || - 2v|| = 2||v|| < \sqrt{2}||v|| \Longrightarrow 2 < \sqrt{2}$$

Llegando a una contradicción, demostrando así a que $V_{-1} = \{0\}$, por lo que no hay simetría y se trata de un giro.

Veamos ahora que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Partimos de $||f(v) - v|| < \sqrt{2}||v||\ \forall v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y, por lo visto en la otra implicación, tenemos que:

$$||f(v) - v|| < \sqrt{2}||v|| \Longleftrightarrow \langle v, f(v)\rangle > 0$$

Por tanto,

$$0 < \frac{\langle v, f(v)\rangle}{||v||^2} =: \cos\theta$$

Por tanto, tenemos que el ángulo θ de giro cumple la siguiente desigualdad:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

demostrando así lo pedido.

Ejercicio 4.3.30. Consideramos $f \in Iso(\mathbb{R}^3,\ <,>)$ dada por:

$$A = M(f; \mathcal{B}_U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasificar la isometría y encontrar sus elementos notables.

En primer lugar, hemos de ver que es una isometría.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow A \in O(3)$$

Como $A \in O(3)$, vemos que efectivamente f es una isometría.

Además, como $|f| = 1$, tenemos que es una isomtería directa. Al estar en $\mathbb{R}^3$, es un giro sin simetría. Además, como $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que f es una reflexión axial.

Tenemos que $L = V_1$. Calculamos dicho subespacio propio de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata de una reflexión axial sobre la recta $L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 4.3.31. Consideramos $f \in Iso(\mathbb{R}^3, <,>)$ dada por:

$$A = M(f; \mathcal{B}_U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasificar la isometría y encontrar sus elementos notables.

En primer lugar, hemos de ver que es una isometría.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow A \in O(3)$$

Como $A \in O(3)$, vemos que efectivamente f es una isometría.

Además, como $|f| = -1$, tenemos que es una isometría inversa. Al estar en $\mathbb{R}^3$, es un giro con simetría, $f = s_{L^\perp} \circ G_{L,\theta}$. Como $A \notin \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, tenemos que f no es una reflexión, por lo que $\theta \neq \{0, \pi\}$.

El eje es $L = V_{-1}$. En este caso concreto, es fácil ver que $L = V_{-1} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Para calcular el ángulo, es necesario trabajar con vectores perpendiculares al eje, ya que:

$$v \perp L \Longleftrightarrow \measuredangle\{v, f(v)\} = \theta \text{ es constante}$$

Por ello, tomo un vector ortogonal al eje. Sea $e = (1, 0, 0)^t$ ortogonal al eje.

$$f(e) = (0, 0, 1)^t$$

Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{\langle f(e), e\rangle}{||e||^2} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, vemos que se trata de un giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto a la recta $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ con simetría respecto del plano $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, es decir, del plano $L^\perp$ de ecuación $y = 0$.

Ejercicio 4.3.32. Sea (V^n, g) EVME, considerando una base $\mathcal{B}$ de V. Sea $f \in End(V)$. Definimos:

$$G = M(g; \mathcal{B}) \qquad\qquad A = M(f; \mathcal{B})$$

Demostrar que:

$$f \text{ es isometría} \Longleftrightarrow A^tGA = G$$

Demostración. Sean $u, v \in V^n$ tal que, en la base $\mathcal{B}$ tenemos las siguientes coordenadas:

$$u \equiv x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad\qquad v \equiv y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g(f(u), f(v)) = f(u)^t G f(v) = (Ax)^t\ G\ Ay = x^t\ A^tGA\ y$$
$$g(u, v) = x^t\ G\ y$$

Por tanto, tenemos que:

$$f \text{ isometría} \Longleftrightarrow g(f(u), f(v)) = g(u, v) \Longleftrightarrow A^tGA = G$$

Además, en el caso de que la base sea ortonormal, tenemos que $G = I$, por lo que se cumple lo ya visto de que la matriz A sea ortogonal. □

Ejercicio 4.3.33. Consideramos el EVME $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, y sean $f, s \in Iso(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ tal que:

- f es un giro de eje L y ángulo $\theta \neq 0$,
- s es una reflexión respecto del plano $U \supset L$.

Estudiar $h = s \circ f$.

Como las isometrías forman un grupo para la composición, tenemos que h es una isometría. Calculamos ahora su determinante:

$$|h| = |s||f| = -1 \cdot 1 = -1$$

Por tanto, se trata de un giro con simetría. Además, $\forall u \in L$ tenemos que:

$$h(u) = (s \circ f)(u) = s(u) = u \Longrightarrow L \subset V_1(h)$$

Por tanto, como $V_1 \neq \{0\}$, tenemos que se trata de una reflexión especular respecto de $W \supset L$.

Ejercicio 4.3.34. Sea $f \neq Id$ un giro sin simetría en el EVME $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$. Consideramos $U \subset \mathbb{R}^3$ un plano vectorial invariante por el giro, $f(U) = U$. Demostrar que se cumple alguna de estas condiciones:

1. f es una reflexión axial de eje L y U es ortogonal al eje, $U = L^\perp$, o el eje está contenido en $U, L \subset U$.

2. f no es una reflexión y U es ortogonal al eje L del giro f.

Tenemos que el eje $L = V_1$ es una recta. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un plano invariante, y consideramos la recta $U^\perp$. Por ser una isometría, tenemos que:

$$f(U) = U \Longrightarrow f(U^\perp) = U^\perp$$

Sea $e \in U^\perp$, es decir, $U^\perp = \mathcal{L}\{e\}$. Como $f(e) \in U^\perp$, tenemos que $f(e) = \lambda e$, por lo que $e \in V_\lambda$, para cierto valor propio λ. Como f es una isometría, tenemos que $\lambda = \pm 1$:

- Supuesto $e \in V_1$:

  Tenemos que $\forall\ e \in U^\perp \Longrightarrow e \in V_1$. Como además $\dim L = \dim U^\perp = 1$, tenemos que $L = U^\perp$.

- Supuesto $e \in V_{-1}$:

  Como $V_{-1} \neq \{0\}$, tenemos que se trata de una reflexión axial. Por tanto, sabemos que $f(A) = A$ para $A = L, U, U^\perp$. Sabiendo que $V = U \oplus U^\perp$, tenemos que:

  $$L \subset U \quad \vee \quad L \subset U^\perp$$

  Además, razonando según las dimensiones, tenemos que:

  $$L \subset U \quad \vee \quad L = U^\perp$$

Ejercicio 4.3.35. Sean f, h dos giros sin simetría, distintos de identidad, en el EVME $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$. Razonar que f y h conmutan, $f \circ h = h \circ f$, si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. f y h son reflexiones axiales con el mismo eje o con ejes ortogonales.

2. Alguno de los dos giros no es una reflexión y los dos tienen el mismo eje.

Como f, g son giros sin simetría distintos de la identidad, tenemos que son reflexiones axiales o giros de ángulo $\theta \neq \{0, \pi\}$. Por tanto, sea L_f eje de f, y sea L_h el eje de h.

Tomamos $v \in L_f$. Entonces:

$$(f \circ h)(v) = (h \circ f)(v) \Longrightarrow f(h(v)) = h(v) \Longrightarrow h(v) \in V_1(f)$$

Como $h(v) \in V_1(f) = L_f$ y tenemos que $L_f = \mathcal{L}\{v\}$, tenemos que $h(v) = \lambda v$, por lo que $v \in V_\lambda(h)$ para cierto valor propio λ.

- Suponemos h simetría axial.

  Tenemos que los únicos valores propios de h son ± 1. Entonces:

  - Supuesto $v \in V_1(h)$:
    Tenemos que $v \in L_h$. Es decir,

    $$\forall v \in L_f \Longrightarrow v \in L_h$$

    Por tanto, tenemos que $L_f = L_h$.
  - Supuesto $v \in V_{-1}(h)$:
    Como $V_{-1} \neq \{0\}$, tenemos que h es una reflexión axial.
    Por tanto, tenemos que $v \in L_h^\perp$. Es decir,

    $$\forall v \in L_f \Longrightarrow v \in L_h^\perp$$

    Es decir, tenemos que $L_f \subset L_h^\perp$. Por tanto, $L_f \perp L_h$.

- Suponemos h giro de ángulo $\theta \neq \{0, \pi\}$

  El único valor propio de un giro sin simetría de $\theta \neq \{0, \pi\}$ es el 1, sabiendo que $V_1(h) = L_h$. Por tanto, tenemos que $v \in L_h$. Es decir,

  $$\forall v \in L_f \Longrightarrow v \in L_h$$

  Por tanto, tenemos que $L_f = L_h$.

Por tanto, queda demostrado.

Ejercicio 4.3.36. Sea (V^3, g) EVME. Sea $f \neq Id$ una isometría directa. Demostrar que f es composición de dos reflexiones axiales de ejes ortogonales al eje de giro $L = \mathcal{L}\{e\}$ de la isometría.

Sea f un giro de eje $L = \mathcal{L}\{e\}$y ángulo $\theta \neq 0$, y consideramos $e_1 \in L^\perp$. Definimos la recta vectorial $L_1 = \mathcal{L}\{e_1\} \perp L$. Sea s_1 la reflexión respecto de L_1.

Consideramos ahora $g = s_1 \circ f$. Entonces, como $|g| = 1$, tenemos que es una isometría directa. Consideramos $e \in L$:

$$g(e) = (s_1 \circ f)(e) = s_1(e) = -e \Longrightarrow e \in V_{-1}(g)$$

Como $V_{-1}(g) \neq \{0\}$, tenemos que g es una reflexión. Sea $g = s_2$ reflexión sobre la recta L_2.

Hemos visto que $\forall e \in L$, se tiene que $e \in V_{-1}(s_2) = L_2^\perp$, por lo que $L \perp L_2$.

Ejercicio 4.3.37. Sean L_1, L_2 dos rectas vectoriales de $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ que forman un ángulo $\theta \in [0, \pi/2]$ entre sí. Sean s_1, s_2 las simetrías axiales respecto de L_1, L_2 respectivamente. Demostrar que $s_2 \circ s_1$ es un giro de ángulo 2θ.

En primer lugar, tenemos que $|s_2 \circ s_1| = 1$, por lo que se trata de un giro de ángulo α.

Consideramos $L_1 = \mathcal{L}\{e_1\}$, con $||e_1|| = 1$, y sea $L_1^\perp = \mathcal{L}\{e_p\}$, con $||e_p|| = 1$. Consideramos base $\mathcal{B} = \{e_1, e_p\}$, por lo que tenemos:

$$M(s_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además, considerando $\theta = \measuredangle\{e_1, e_2\}$, por el ejercicio 4.3.42, tenemos que:

$$M(s_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(s_2 \circ s_1, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Por tanto, $s_2 \circ s_1$ es un giro respecto del ángulo $\alpha = 2\theta \in [0, \pi]$.

Ejercicio 4.3.38. Dados dos vectores cualesquiera u, v de un EMVE (V, g), demuestra que se cumplen estas propiedades:

1. Identidad del paralelogramo: $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.

   $$||u+v||^2+||u-v||^2 = ||u||^2+||v||^2+\cancel{2g(u,v)}+||u||^2+||v||^2-\cancel{2g(u,v)} = 2(||u||^2+||v||^2)$$

2. Teorema del coseno: $||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\ ||v|| \cos\measuredangle\{u,v\}$.

   En primer lugar, tenemos que $\forall u, v \in V - \{0\}$:

   $$\cos\measuredangle\{u,v\} = \frac{g(u,v)}{||u||\ ||v||} \Longrightarrow g(u,v) = ||u||\ ||v|| \cos\measuredangle\{u,v\}$$

   Por tanto, $\forall u, v \in V - \{0\}$ se tiene que:

   $$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2g(u,v) = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\ ||v|| \cos\measuredangle(u,v)$$

   En el caso de que al menos uno de los dos vectores sea nulo, se da la igualdad trivialmente, ya que $||0|| = 0$.

3. Teorema de Pitágoras: $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \Longleftrightarrow u \perp v$.

   Procedemos mediante doble implicación:

   $\Longrightarrow)$ Supongamos que $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$. Entonces:

   $$||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2+2g(u,v) = ||u||^2+||v||^2 \Longrightarrow g(u,v) = 0 \Longrightarrow u \perp v$$

   $\Longleftarrow)$ Como $u \perp v$, tenemos que $g(u,v) = 0$. Entonces:

   $$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\cancelto{0}{g(u,v)} = ||u||^2 + ||v||^2$$

4. $||u|| = ||v|| \Longleftrightarrow u+v \perp u-v$

   Procedemos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que $||u|| = ||v||$, y consideramos $w = (u+v) + (u-v)$. Entonces:
$$||w||^2 = ||2u||^2 = 4||u||^2$$

$$\begin{aligned}||w||^2 = ||(u+v)+(u-v)||^2 = ||u+v||^2 + ||v-v||^2 + 2g(u+v,u-v) = \\ = 2||u||^2 + 2||v||^2 + 2g(u+v,u-v)\end{aligned}$$

Además, como $||u|| = ||v||$, tenemos que:

$$||w||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 + 2g(u+v,u-v) = 4||u||^2 + 2g(u+v,u-v)$$

Por tanto, igualando ambos valores obtenidos de $||w||^2$,

$$4||u||^2 = 4||u||^2 + 2g(u+v,u-v) \Longrightarrow g(u+v,u-v) = 0 \Longrightarrow u+v \perp u-v$$

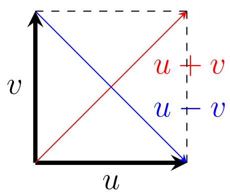
$\Longleftarrow$) Como $u+v \perp u-v$, tenemos que $g(u+v,u-v) = 0$. Considerando $w = (u+v) + (u-v)$, tenemos:

$$||w||^2 = ||(u+v)-(u-v)||^2 = ||u+v||^2 + ||u-v||^2 + 2\cancelto{0}{g(u+v,u-v)} = 2||u||^2 + 2||v||^2$$
$$||w||^2 = ||2u||^2 = 4||u||^2$$

Por tanto, igualando ambos valores obtenidos de $||w||^2$,

$$4||u||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 \Longrightarrow ||u||^2 = ||v||^2 \Longrightarrow ||u|| = ||v||$$

Geométricamente, tenemos que:



5. $\big|\, ||u|| - ||v|| \,\big| \leqslant ||u-v||$.

Como ambos términos son positivos, elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned}&\big|\, ||u|| - ||v|| \,\big| \leqslant ||u-v|| \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (||u|| - ||v||)^2 \leqslant ||u-v||^2 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\,||v|| \leqslant ||u||^2 + ||v||^2 - 2g(u,v) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow -2||u||\,||v|| \leqslant -2g(u,v) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow ||u||\,||v|| \geqslant g(u,v) \qquad \text{Cierto, por la desigualdad de Schwarz.}\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.39. Consideramos el EVME $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, y sean $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos rectas vectoriales distintas. Sea $s_1 = s_{L_1}, s_2 = s_{L_2}$. Demostrar que $f = s_1 \circ s_2$ es un giro de eje L, siendo L la única recta ortogonal a L_1, L_2. Calcular el ángulo del giro.

Sea $f = s_1 \circ s_2$. Como la composición de isometrías es una isometría, tenemos que f es una isometría.

Además, como s_1, s_2 son simetrías axiales, son simetrías directas. Por tanto, en cierta base se da que $|s_1| = |s_2| = 1$. Por tanto, $|f| = |s_1||s_2| = 1 \Longrightarrow f$ es una isometría directa, es decir, un giro sin simetría. Como $L_1 \neq L_2 \Longrightarrow f \neq Id$. Sea $L = \mathcal{L}\{e\}$ el eje de giro. Veamos que $L \perp L_1, L_2$.

Sea $U = L_1^\perp \cap L_2^\perp$, y consideramos $u \in U$:

$$f(u) = (s_1 \circ s_2)(u) = s_1(-u) = u \Longrightarrow u \in V_1(f) = L$$

Por tanto, tengo que $U = L$, por lo que $L \perp L_1, L_2$. Calculemos ahora el ángulo.

Para ello, es necesario tomar un vector perpendicular al eje, por lo que consideramos e_2 tal que $L_2 = \mathcal{L}\{e_2\}$ y $||e_2|| = 1$.

$$f(e_2) = s_1(s_2(e_2)) = s_1(e_2) = 2p_1(e_2) - e_2$$

Calculamos $p_1(e_2)$. Sea e_1 tal que $L_1 = \mathcal{L}\{e_1\}$ y $||e_1|| = 1$. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, w_1, w_2\}$ base ortonormal. Entonces:

$$p_1(e_2) = \langle e_1, e_2 \rangle \, e_1$$

Denominemos $\alpha = \measuredangle\{e_1, e_2\} = \measuredangle\{L_1, L_2\}$. Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{||e_1|| \; ||e_2||} = \langle e_1, e_2 \rangle$$

Por tanto, tenemos que:

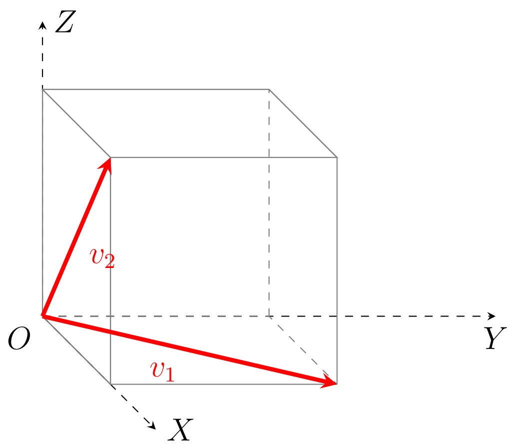
$$p_1(e_2) = \cos\alpha \cdot e_1 \Longrightarrow f(e_2) = 2\cos\alpha \cdot e_1 - e_2$$

Por tanto, definiendo θ como el ángulo de giro, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{\langle e_2, f(e_2) \rangle}{||e_2||^2} = \langle e_2, 2\cos\alpha \cdot e_1 - e_2 \rangle = 2\cos\alpha \langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle = 2\cos^2\alpha - 1$$

Por tanto, tenemos que $\theta = \arccos(2\cos^2\alpha - 1)$, siendo α el ángulo entre las dos rectas.

Ejercicio 4.3.40. Consideramos $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$. Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Definimos los subespacios $L_1 = \mathcal{L}\{v_1\}$, $L_2 = \mathcal{L}\{v_2\}$. Calcular $f = s_2 \circ s_1$.



Por el ejercicio anterior, sabemos que es un giro de eje L y ángulo θ. Como el eje de giro es la única recta perpendicular a L_1, L_2, tenemos que $L = \mathcal{L}\{v_1 \times v_2\}$, con:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - k - j = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde hemos hecho uso de que $\mathcal{B}_u = \{i, j, k\}$.

Para calcular el ángulo, tomamos un vector perpendicular al eje. Sea el vector v_1 (también podría haber escogido v_2). Entonces:

$$f(v_1) = (s_2 \circ s_1)(v_1) = s_2(v_1) = 2p_2(v_1) - v_1$$

Calculamos por tanto $p_2(v_1)$. Tomamos como base $\mathcal{B} = \{\frac{v_2}{||v_2||}, w_1, w_2\}$ base ortonormal. Entonces:

$$p_2(v_1) = \left\langle v_1, \frac{v_2}{||v_2||} \right\rangle \cdot \frac{v_2}{||v_2||} = \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \frac{v_2}{||v_2||^2} = 1 \cdot \frac{v_2}{2} = \frac{1}{2}v_2$$

Por tanto,

$$f(v_1) = 2 \cdot \frac{1}{2}v_2 - v_1 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, f(v_1) \rangle}{2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el ángulo no orientado es $\theta = \frac{2\pi}{3}$. De hecho, podemos observar que coincide con el resultado obtenido en el ejercicio anterior.

Ejercicio 4.3.41. Sean $u, v, w \in V^2$, con (V^2, g) EVME. Supongamos que:

$$||u|| = ||v|| = ||w|| = 1 \qquad \wedge \qquad u + v + w = 0$$

Demostrar que $\theta = \measuredangle\{u, v\} = \frac{2\pi}{3}$.

Tenemos que $u + v = -w$. Tomando norma, tenemos que:

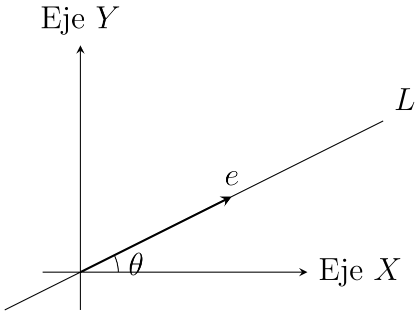
$$||w||^2 = 1 = ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2g(u, v) \Longrightarrow 1 = 2 + 2g(u, v) \Longrightarrow g(u, v) = -\frac{1}{2}$$

Por la definición del coseno entre dos ángulos, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{g(u, v)}{||u||\ ||v||} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Por tanto, queda demostrado que $\theta = \measuredangle\{u, v\} = \frac{2\pi}{3}$.

Ejercicio 4.3.42. Sea el EVME $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$, y consideramos la recta $L = \mathcal{L}\{e\}$ tal que el ángulo que forma la recta con el eje OX es θ.



Sea $e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vector unitario. Demostrar que:

$$M(s_L; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $L = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$, por lo que $L^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\}$

Por tanto, y teniendo en cuenta que $||e|| = 1$, tenemos que una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\}$$

Para obtener la matriz asociada a la base usual, sea $v \in \mathbb{R}^2$, con coordenadas

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Por ser $\mathcal{B}$ una base ortonormal, tenemos que:

$$a_1 = \langle v, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = (ax_1 + bx_2)$$

$$a_2 = \langle v, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = (-bx_1 + ax_2)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_L(v) &= s_L(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1e_1 - a_2e_2 = \\ &= (ax_1 + bx_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - (-bx_1 + ax_2)\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2x_1 + abx_2 \\ abx_1 + b^2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b^2x_1 + abx_2 \\ abx_1 - a^2x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a^2 - b^2)x_1 + 2abx_2 \\ 2abx_1 + (b^2 - a^2)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, como queríamos demostrar, tenemos que

$$M(s_L; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $||e|| = 1$ es unitario, tenemos que $a^2 + b^2 = 1$. Suponiendo que $\theta \in [0, \pi/2]$, tenemos que:

$$e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz respecto de la base usual en función del ángulo es:

$$M(s_L; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta & -\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.3.43. Sea $f \in Iso(V^n, g)$. Demostrar que $h = f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto.

Tenemos que comprobar que se tiene lo siguiente:

$$g(h(u), v) = g(u, h(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

Como g es una forma bilineal, tenemos que:

$$g(h(u), v) = g[f(u) + f^{-1}(u), v] = g[f(u), v] + g[f^{-1}(u), v]$$

Como f es una isometría, f^{-1} también lo es, ya que la inversa de una matriz ortogonal también es ortogonal. Por tanto, f^{-1} conserva las métricas. Aplicando f^{-1} a la primera métrica y f a la segunda, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(h(u), v) &= g[f^{-1}(f(u)), f^{-1}(v)] + g[f(f^{-1}(u)), f(v)] = \\ &= g(u, f^{-1}(v)) + g(u, f(v)) = g(u, f(v) + f^{-1}(v)) = g(u, h(v)) \end{aligned}$$

Como esto se cumple $\forall v \in V$, tenemos que h es un endomorfismo autoadjunto.

Ejercicio 4.3.44. Sea el EVME $(\mathbb{R}^2, g)$ con:

$$G = M(g; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontrar la matriz respecto de $\mathcal{B}_u$ de un giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Tenemos que:

$$\cos\theta = 0 = \frac{g(u, f(u))}{||u||^2} \Longrightarrow g(u, f(u)) = 0 \quad \forall u \in V$$

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2\}$. Consideramos $f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Entonces:

$$g(e_1, f(e_1)) = 0 = e_1 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3a + 3b \Longrightarrow a = -b$$

Por tanto, sea $f(e_1) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. Además, al ser f una isometría, tenemos que conserva las métricas. Por tanto,

$$||e_1|| = ||f(e_1)|| \Longrightarrow ||e_1||^2 = ||f(e_1)||^2 \Longrightarrow 1 = g(f(e_1), f(e_1)) =$$
$$= \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 \Longrightarrow \alpha = \pm 1$$

Por tanto, sea

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha = \pm 1$$

Consideramos ahora $f(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Entonces:

$$g(e_2, f(e_2)) = 0 = e_2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 3c + 4d \Longrightarrow 3c = -4d$$

Por tanto, sea $f(e_2) = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix}$. Además, al ser f una isometría, tenemos que conserva las métricas. Por tanto,

$$||e_2|| = ||f(e_2)|| \Longrightarrow ||e_2||^2 = ||f(e_2)||^2 \Longrightarrow 1 = g(f(e_2), f(e_2)) =$$
$$= \begin{pmatrix} -4\beta & 3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = 12\beta^2 \Longrightarrow \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Por tanto, sea

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} \qquad \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Por tanto, sea la matriz del giro de $\theta = \frac{\pi}{2}$ la siguiente:

$$M(G_\theta; \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} -\alpha & -4\beta \\ \alpha & 3\beta \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{12}} \qquad \alpha = \pm 1$$

La existencia de los dos valores de α se debe a que el ángulo dado es no orientado, por lo que hay dos posibles soluciones.

Ejercicio 4.3.45. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, y consideramos su base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

1. Demostrar que la métrica definida por

$$g(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

es, efectivamente, una métrica.

Tenemos que, claramente, es bilineal. Además,

$$g(p, p) = \int_0^1 p^2(x)\, dx$$

como el integrando es positivo, tenemos que $g(p, p) > 0 \qquad \forall p \in \mathbb{R}_2[x] - \{0\}$. Por tanto, tenemos que es una métrica.

2. Aplicar Gram-Schmidt con la métrica g para hallar una base ortogonal.

   Sea $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_3\}$ y partimos desde $e_1 = 1$. Entonces:

$$e_2 = x - \frac{g(1,x)}{g(1,1)} = x - \frac{1}{2}$$

   Además, tenemos que:

$$e_3 = x^2 - \frac{g(1,x^2)}{g(1,1)} - \frac{g\left(x-\frac{1}{2}, x^2\right)}{g\left(x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - x - \frac{1}{2} = x^2 - x - \frac{5}{6}$$

   Por tanto, tenemos que la base ortogonal es:

$$\mathcal{B}_o = \left\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x - \frac{5}{6}\right\}$$

Ejercicio 4.3.46. Sea la forma cuadrática $F \in End(\mathbb{R}^3)$ tal que, en la base usual,

$$F(x,y,z) = 2\left(x^2 - z^2 + xy + yz\right)$$

Estudiar la figura $\xi \equiv F(x,y,z) = 0$.

En primer lugar, tenemos que la matriz de la métrica asociada a dicha forma cuadrática es:

$$A = M(g, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, obtenemos la matriz asociada a la base de Sylvester. Para ello, tenemos que $|A| = 0$, por lo que $rg(A) = 2$. Además, tenemos que es indefinida, por lo que:

$$A_s = M(g, \mathcal{B}_s) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en la base de Sylvester tenemos que:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 0 \Longleftrightarrow \bar{x}^2 = \bar{y}^2 \Longrightarrow \bar{x} = \pm\bar{y}$$

Por tanto, tenemos que se trata de dos planos.

Para calcular qué planos son, calculamos la base de Sylvester. Sea $\mathcal{B} = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$. Definimos $\bar{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1$, y $\bar{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$. Por último, escogemos $\bar{e_3} \in Ker(g)$.

$$\bar{e_3} = v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto, sea la base de Sylvester:

$$\mathcal{B}_s = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$P = M(\mathcal{B}_s; \mathcal{B}_u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, usando que esa matriz es la matriz de cambio de base, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{x} - \bar{z} \\ 2\bar{z} \\ \bar{y} + \bar{z} \end{pmatrix}$$

Igualando cada componente, tenemos que:

$$\begin{cases} \bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} y \\ \bar{y} = \sqrt{2}z - \bar{z} = \sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2} y \\ \bar{x} = \sqrt{2}x + \bar{z} = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{cases}$$

Por tanto, como la ecuación de la figura estudiada es $\xi \equiv \bar{x} = \pm\bar{y}$, tenemos que:

$$\xi \equiv \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = \pm \left(\sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2} y \right)$$

Los dos planos son los que tienen por ecuación:

$$\Pi_1 \equiv \sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \equiv x - z = 0 \qquad \Pi_1 \equiv \sqrt{2}x - \sqrt{2}z + \sqrt{2}y = 0 \equiv x + y - z = 0$$

Ejercicio 4.3.47. Dado $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, demostrar que:

$$tr^2(A) \leqslant n\ tr(A^2) \qquad \forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

En primer lugar, definimos la siguiente aplicación bilineal en $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$g(A, B) = tr(AB)$$

Veamos que se trata de una métrica definida positiva. Calculamos en primer lugar A^2:

$$A^2 = (c_{ij})_{i,j} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

Por tanto,

$$g(A, A) = tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0$$

donde he empleado que, por ser A simétrica, $a_{ij} = aji$. Además, tenemos que:

$$g(A, A) = 0 \Longleftrightarrow a_{ik} = 0 \quad \forall i, k = 1, \dots, n \Longleftrightarrow A = 0$$

Por tanto, tenemos que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), g)$ es un EVME. Por tanto, se cumple la desigualdad de Schwarz. Entonces, amplicando dicha desigualdad a A, I_n tenemos que:

$$g^2(A, I) \leqslant ||A||^2 ||I||^2 \Longrightarrow tr^2(AI) \leqslant tr(A^2)\ tr(I_n^2) \Longrightarrow tr^2(A) \leqslant n\ tr(A^2)$$

Además, tenemos que la igualdad se da solo si $A = aI,\ a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.3.48. Sea $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ el espacio vectorial euclídeo dado por el producto escalar y $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos planos vectoriales distintos.

1. Demostrar que existe una simetría axial $s \in End(\mathbb{R}^3)$ verificando:

$$s(U_1) = U_1 \qquad\qquad s(U_2) = U_2$$

Consideramos el subespacio vectorial $L = U_1 \cap U_2$. Como los planos son distintos, se cortan en una recta. Sea la recta $L = \mathcal{L}\{e\}$. Como $L = U_1 \cap U_2$, tenemos que:

$$\begin{gathered} L \subset U_1 \Longrightarrow U_1 = \mathcal{L}\{e, e_1\} \\ L \subset U_2 \Longrightarrow U_2 = \mathcal{L}\{e, e_2\} \end{gathered}$$

Suponemos sin pérdida de generalidad que $e_1, e_2 \perp e$, por lo que $e_1, e_2 \in L^\perp$. Por tanto,

$$\begin{array}{ll} \forall u_1 = ae + be_1 \in U_1, & s(u_1) = ae - be_1 \in U_1 \Longrightarrow s(U_1) \subset U_1 \\ \forall u_2 = ae + be_2 \in U_2, & s(u_2) = ae - be_2 \in U_2 \Longrightarrow s(U_2) \subset U_2 \end{array}$$

Por tanto, la simetría respecto de L cumple lo pedido.

2. Si consideramos los planos vectoriales

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \qquad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$$

encontrar la matriz de s respecto de la base usual.

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$. Tenemos que, en este caso, $U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{e_1 - e_2 + e_3\}$. Por tanto, tenemos que:

$$U^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_3\}$$

Por tanto, sabiendo que $U = V_1, U^\perp = V_{-1}$, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{rl} s_U(e_1 - e_2 + e_3) & = e_1 - e_2 + e_3 = s_U(e_1) - s_U(e_2) + s_U(e_3) \\ s_U(e_1 + e_2) & = -e_1 - e_2 = s_U(e_1) + s_U(e_2) \Longrightarrow s_U(e_2) = -s_U(e_1) - e_1 - e_2 \\ s_U(e_1 - e_3) & = -e_1 + e_3 = s_U(e_1) - s_U(e_3) \Longrightarrow s_U(e_3) = s_U(e_1) + e_1 - e_3 \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$e_1 - e_2 + e_3 = s_U(e_1) + s_U(e_1) + e_1 + e_2 + s_U(e_1) + e_1 - e_3$$

Por tanto, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} 3s_U(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ 3s_U(e_2) = -3s_U(e_1) - 3e_1 - 3e_2 = e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 3e_1 - 3e_2 = -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ 3s_U(e_3) = 3s_U(e_1) + 3e_1 - 3e_3 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 + 3e_1 - 3e_3 = 2e_1 - 2e_2 - e_3 \end{array}\right.$$

Por tanto, la matriz buscada es:

$$M(s_U, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.3.49. Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la forma cuadrática $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + 2(1-a)x_1x_3 + ax_3^2$$

Sea g_a su métrica asociada:

1. Calcular el núcleo de g_a.

   En primer lugar, calculamos la matriz asociada a g_a:

   $$G_a = M(g_a, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}$$

   Calculamos el determinante para calcular el rango:

   $$|G_a| = a^2 - (1-a)^2 = a^2 - a^2 - 1 + 2a = 2a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

   Por tanto,

   - Para $a \neq \frac{1}{2}$:
     Tenemos que g_a es no degenerada, por lo que $Ker(g_a) = \{0\}$.
   - Para $a = \frac{1}{2}$:
     Tenemos que $rg(G_a) = 2$, por lo que $\dim Ker(g_a) = 1$.

   $$Ker(g_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
   $$= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Clasificar la métrica en función del parámetro a:

   - Para $a = \frac{1}{2}$: Tenemos que $Nul(g_a) = 1$. Además, para $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3\}$, tenemos que la restricción es definida positiva. Por tanto, tenemos que:

     $$Nul(g_a) = 1 \qquad Ind(g_a) = 0$$

     En este caso g_a es semidefinida positiva.
   - Para $a > \frac{1}{2}$: Tenemos que $|G_a| > 0$. Además, tenemos G_a es definida positiva al ser todos sus menores principales positivos, por lo que g_a también es definida positiva.

- Para $a < \frac{1}{2}$: Tenemos que $|G_a| < 0$. Además, $g_a(e_2, e_2) = 1 > 0$, tenemos que g_a tiene al menos un 1 en la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto, como $Nul(g_a) = 0$ y $|G_a| < 0$, es necesario que:

$$G_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, g_a es indefinida y $Nul(g_a) = 0$, $Ind(g_a) = 1$.

3. Resolver $F_a(x_1, x_2, x_3) = 0$ para $a = 3$ y $a = \frac{1}{2}$.

   Tenemos que:

$$F_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} G_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

   Por tanto,

$$F_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \equiv \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid g_a(v, v) = 0 \right\}$$

   - Para $a = 3$:

     Tenemos que g_a es definida positiva. Por tanto, el único vector con cuadrado nulo es $v = 0$. Por tanto, la solución es un punto, el origen.

   - Para $a = \frac{1}{2}$:

     Tenemos que g_a es semidefinida positiva. Por tanto, los vectores con cuadrado 0 son los del núcleo. En apartados anteriores hemos demostrado que, en este caso,

$$Ker(g_a) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

     Por tanto, la solución es esa recta.