

# Ecuaciones Diferenciales I Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Primer parcial.

**Fecha** 31 de octubre de 2023.

**Ejercicio 1.** Pruebe que la siguiente ecuación define una única función implícita  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto x(t)$ :

$$e^x + x^3 + t = 0$$

Pruebe además que la función  $x(t)$  es decreciente.

Para que la ecuación anterior defina una única función implícita, hemos de ver que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la ecuación  $e^x + x^3 + t = 0$  tiene una única solución. Demostremos por tanto la existencia y unicidad de la solución de la ecuación anterior.

**Existencia** Definimos:

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x + x^3 + t \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_t(x) = +\infty$$

Como  $f_t$  es continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que existe  $x_t \in \mathbb{R}$  tal que  $f_t(x_t) = 0$ . Por tanto, la ecuación  $e^x + x^3 + t = 0$  tiene solución para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

**Unicidad** Como  $f_t$  es derivable, tenemos que:

$$f'_t(x) = e^x + 3x^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto,  $f_t$  es estrictamente creciente, por lo que es inyectiva. Por tanto, la ecuación  $e^x + x^3 + t = 0$  tiene una única solución  $x_t$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Sea entonces la función implícita la siguiente:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x_t \end{aligned}$$

Para probar que  $x(t)$  es decreciente, podemos hacerlo de dos formas:

**Opción 1** Sea  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_1 < t_2$ . Hemos de probar que  $x(t_1) > x(t_2)$ .

Como  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  son las soluciones de las ecuaciones  $e^x + x^3 + t_1 = 0$  y  $e^x + x^3 + t_2 = 0$ , respectivamente, tenemos que:

$$e^{x(t_1)} + (x(t_1))^3 + t_1 = 0, \quad e^{x(t_2)} + (x(t_2))^3 + t_2 = 0$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$e^{x(t_1)} + (x(t_1))^3 - e^{x(t_2)} - (x(t_2))^3 + t_1 - t_2 = 0$$

Como  $t_1 - t_2 < 0$ , tenemos que:

$$e^{x(t_1)} + (x(t_1))^3 - e^{x(t_2)} - (x(t_2))^3 > 0 \implies e^{x(t_1)} + (x(t_1))^3 > e^{x(t_2)} + (x(t_2))^3$$

Definimos ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x + x^3 \end{aligned}$$

Como  $g$  es suma de una función estrictamente creciente y otra función creciente, tenemos que  $g$  es estrictamente creciente. Por tanto, usando  $g$ , tenemos que:

$$g(x(t_1)) > g(x(t_2))$$

Como  $g$  es estrictamente creciente, esto solo será posible si  $x(t_1) > x(t_2)$ , por lo que hemos probado que  $x(t)$  es decreciente.

**Opción 2** Aplicar el Teorema de la Función Implícita. Para ello, definimos:

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto e^x + x^3 + t \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = e^x + 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto,  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Además, tenemos que  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) > 0$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  (en particular, no se anula). Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita en cualquier punto  $(t_0, x_0)$  tal que  $F(t_0, x_0) = 0$ , obteniendo así que la función implícita  $x(t)$  es derivable. Calculamos su derivada mediante derivación implícita:

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

Despejando, tenemos que:

$$x'(t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t))}{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))} = -\frac{1}{e^{x(t)} + 3(x(t))^2} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, hemos probado que  $x(t)$  es decreciente.

**Ejercicio 2.** Se considera la siguiente función:

$$\begin{aligned} F : \quad ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2} ds \end{aligned}$$

¿Es  $F$  de clase  $C^1$ ? En caso afirmativo, calcula la derivada.

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \sqrt{t} \\ \psi : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^x e^{s^2} ds \end{aligned}$$

Tenemos que  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$  de forma directa, y  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^+)$  por el Teorema Fundamental del Cálculo. Sus respectivas derivadas son:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \psi'(x) &= e^{x^2}\end{aligned}$$

Por tanto, como  $F = \psi \circ \varphi$ , tenemos que  $F \in C^1(\mathbb{R}^+)$ . Para calcular su derivada, aplicamos la regla de la cadena:

$$F'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = e^{(\sqrt{t})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$$

**Ejercicio 3.** Encuentra la solución del problema de valores iniciales siguiente:

$$\dot{x} = \left(\frac{x}{t}\right)^3 + \frac{x}{t} - 1, \quad x(1) = 1$$

¿En qué intervalo está definida?

**Ejercicio 4.** Demuestra que las fórmulas

$$s = -e^t, \quad y = (t^2 + 1)x$$

definen un difeomorfismo que va de  $D = \mathbb{R}^2$  a un dominio  $\hat{D}$  que se especificará. Prueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación  $x' = x + t$  y encuentra la ecuación transformada.

**Ejercicio 5.** Se considera la transformación en el plano

$$\psi(\theta, r) = (t, x), \quad t = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta, \quad (\theta, r) \in \Omega = ]-\pi/2, \pi/2[ \times ]0, +\infty[$$

Determina  $\Omega = \psi(\Omega)$  y prueba que  $\psi$  es un difeomorfismo de  $\Omega$  a  $\Omega$ . Dada una ecuación  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que el difeomorfismo  $\varphi = \psi^{-1}$  es admisible?