

Modelos de Computación



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Introducción a la Computación	5
1.1.1. Cálculo de gramáticas	8

1. Relaciones de Problemas

1.1. Introducción a la Computación

Ejercicio 1.1.1. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X, Y\}$$

$$T = \{a, b\}$$

$$S = S$$

1. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow XYX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

$$Y \rightarrow bbb$$

2. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow aX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

3. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow XaXaX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

4. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$S \rightarrow SS \mid XaXaX \mid \varepsilon$$

$$X \rightarrow bX \mid \varepsilon$$

Ejercicio 1.1.2. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$. Determinar en cada caso el lenguaje generado por la gramática.

1. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 V &= \{S, A\} \\
 T &= \{a, b\} \\
 S &= S \\
 P &= \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow abAS \\ abA & \rightarrow baab \\ S & \rightarrow a \\ A & \rightarrow b \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

2. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 V &= \{\langle \text{número} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle\} \\
 T &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 S &= \langle \text{número} \rangle \\
 P &= \left\{ \begin{array}{ll} \langle \text{número} \rangle & \rightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{número} \rangle & \rightarrow \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{dígito} \rangle & \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

3. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 V &= \{A, S\} \\
 T &= \{a, b\} \\
 S &= S \\
 P &= \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow aS \\ S & \rightarrow aA \\ A & \rightarrow bA \\ A & \rightarrow b \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras en las que el número de b no es tres.
2. Palabras que tienen 2 ó 3 b .

Ejercicio 1.1.4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras que no contienen la subcadena ab .
2. Palabras que no contienen la subcadena baa .

Ejercicio 1.1.5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

Ejercicio 1.1.6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.
2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

Ejercicio 1.1.7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a .
2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b .

Ejercicio 1.1.8. Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que:

1. Genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.
2. Genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

Ejercicio 1.1.9. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow SS \\ S & \rightarrow XXX \\ X & \rightarrow aX \mid Xa \mid b \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Determinar si el lenguaje generado por la gramática es regular. Justificar la respuesta.

Ejercicio 1.1.10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A , ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

Ejercicio 1.1.11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A , caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

Ejercicio 1.1.12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \rightarrow B^*$, $g : A^* \rightarrow B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Ejercicio 1.1.13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i , para todo $i \geq 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

1. ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2 ? Justifica la respuesta.

2. Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L .

Observación. Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que, para todo alfabeto A , el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

1.1.1. Cálculo de gramáticas

Ejercicio 1.1.15 (Complejidad: Sencilla). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{u \in \{0, 1\}^* \mid |u| \leq 4\}$
2. Palabras con 0's y 1's que no contengan dos 1's consecutivos y que empiecen por un 1 y que terminen por dos 0's.
3. El conjunto vacío.
4. El lenguaje formado por los números naturales.
5. $\{a^n \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^n \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\}$
6. $\{a^n b^{2n} c^m \in \{a, b, c\}^* \mid n, m > 0\}$
7. $\{a^n b^m a^n \in \{a, b\}^* \mid m, n \geq 0\}$
8. Palabras con 0's y 1's que contengan la subcadena 00 y 11.
9. Palíndromos formados con las letras a y b .

Ejercicio 1.1.16 (Complejidad: Media). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{uv \in \{0, 1\}^* \mid u^{-1} \text{ es un prefijo de } v\}$
2. $\{ucv \in \{a, b, c\}^* \mid |u| = |v|\}$
3. $\{u1^n \in \{0, 1\}^* \mid |u| = n\}$
4. $\{a^n b^{n+1} \in \{a, b\}^* \mid n \geq 0\}$ (observar transparencias de teoría)

Ejercicio 1.1.17 (Complejidad: Difícil). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m c^k \in \{a, b, c\}^* \mid k = m + n\}$
2. Palabras que son múltiplos de 7 en binario.

Ejercicio 1.1.18 (Complejidad: Extrema (no son libres de contexto)). Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
2. $\{a^{n^2} \in \{a\}^* \mid n \geq 0\}$
3. $\{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es primo}\}$
4. $\{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n \leq m^2\}$