

Ecuaciones Diferenciales I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Ecuación Lineal de Orden Superior	5
--------------------------------------	---

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal <https://www.ugr.es/~rortega/>. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Ecuación Lineal de Orden Superior

Lo que queda de curso se limita a estudiar las ecuaciones diferenciales lineales. Es decir, las que son de la forma:

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad m \geq 1 \quad (1.1)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo I abierto.

Definición 1.1. Una ecuación diferencial lineal se dice:

- homogénea si $b(t) = 0 \forall t \in I$.
- completa si $b(t) \neq 0$ para algún $t \in I$.

Ejemplo. El caso $m = 1$ ha sido ya estudiado, se trata de la ecuación lineal de primer orden:

$$x' + a_0(t)x = b(t)$$

Por tanto, esta sección estará dedicada a las ecuaciones lineal de orden 2 o mayor. En especial, las de orden 2, por $F = ma$.

Ejemplo. La ecuación del oscilador armónico representa un objeto que está atado a una pared con un muelle.

$$mx'' + kx =$$

Para $x = 0$, decimos que hemos estirado el muelle. Sin embargo, si lo estiramos, el muelle tira hacia dentro, tira hacia la izquierda. Si lo comprimimos, tiraría en la otra dirección, con lo que tenemos $mx'' = F(x)$ (masa por aceleración (x'')), conocida como la Ley de Hooke (la ley de Hooke es $F(x) = -kx$).

Se trata de una fuerza recuperadora. k es la constante de elasticidad, que cuantifica qué tan duro está un muelle (si el muelle es muy duro, k es muy grande).

Que podemos escribirla como:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

con:

$$a_1(t) = 0 \quad a_0(t) = \frac{k}{m} \quad b(t) = 0$$

Ejemplo. Las vibraciones de los puentes se manejan en ecuaciones de 4o orden. Un ejemplo de esta es:

$$x^{(iv)} + e^t x^{(iii)} - x = \sin t$$

Con $m = 4$, y:

$$b(t) = \sin t \quad a_3(t) = e^t \quad a_2(t) = a_1(t) = 0 \quad a_0(t) = -1$$

con $I = \mathbb{R}$

Esta sección va a estar basada en un Teorema que no se demostrará en este Capítulo, sino en el siguiente. Se trata de un Teorema de existencia y unicidad.

Definición 1.2 (Condición inicial). Una condición inicial para una ecuación lineal de orden m es tomar $t_0 \in I$ y dar los valores:

$$x(t_0) = \alpha_0 \quad x'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = \alpha_{m-1}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$.

De esta forma, para dar una condición inicial para una ecuación de orden m , habrá que dar m condiciones: el valor de la función en un punto y el valor de sus sucesivas derivadas hasta $m - 1$ en dicho punto.

Notemos la importancia de dar los valores en el mismo punto $t_0 \in I$, ya que si no, no se trata de una condición inicial, sino una condición de contorno.

Ejemplo. En el oscilador armónico:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

una condición inicial es:

$$x(t_0) = 0 \quad x'(t_0) = 1$$

Donde:

- El muelle parte del origen (posición 0).
- El muelle comienza con velocidad 1 (por lo que le hemos dado un impulso al muelle).

De forma intuitiva, vemos que con estas condiciones iniciales tenemos una única solución de la ecuación que cumple estas mismas.

Por otra parte, la condición

$$x(t_0) = 1 \quad x'(t_0) = 0$$

Significa que:

- El muelle parte de una unidad (posición 1, el muelle está estirado).
- El muelle no tiene velocidad inicial.

En este caso, podemos pensar en la condición de que para dar una condición inicial la ordenada sea la misma intuitivamente como que tenemos que describir el movimiento (estamos en ecuaciones diferenciales) completo en un mismo instante.

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de las soluciones). *Dada una ecuación de la forma (1.1) siendo los coeficientes funciones continuas en un intervalo abierto I . Dada una condición inicial $t_0 \in I$ y números $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$.*

Entonces, existe una única solución x de (1.1), definida en todo el intervalo I que cumple las condiciones iniciales, es decir:

$$x(t_0) = \alpha_0 \quad x'(t_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = \alpha_{m-1}$$

Notemos que $x \in C^m(I)$.

Notemos que este teorema es global, nos garantiza que dada una ecuación diferencial definida en un conjunto $D = I \times J$, entonces las soluciones estarán siempre definidas en todo el intervalo I .

Notemos que de esta forma, las condiciones iniciales nos etiquetan las soluciones.

Ejemplo.

$$x' = x^2 \quad x(0) = 1$$

$D = \mathbb{R}^2$ sus soluciones son:

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad t \in]-\infty, 1[$$

Que no están definidas en el mismo intervalo D .

Notemos que en (1.1) no consideramos un coeficiente $a_m(t)$, ya que queremos poder dicha ecuación en forma normal.

Ejemplo. Consideremos

$$tx' - x = 0 \quad x(0) = 0$$

que no es una ecuación de la forma (1.1). Notemos que no podemos aplicar el Teorema y que, de hecho, esta ecuación tiene infinitas soluciones, por representar todas las rectas que pasan por el origen:

No tenemos unicidad

Si ahora consideramos como condición inicial $x(0) = 1$, no tenemos existencia.

Por tanto, lo de considerar $a_m(t) = 1$ tiene su importancia.

Sin embargo, si dividimos entre $a_m(t)$ podemos aplicar el Teorema, pero debemos restringir el dominio y tener cuidado con las condiciones iniciales, ya que quizás no se cumpla la condición inicial.

$$x' - \frac{1}{t}x = 0$$

A pesar de esto, si en este caso tenemos $t_0 \neq 0$, podemos dividir entre $a_m(t)$ y considerar la ecuación resultado, que sí es una ecuación lineal de orden superior.

El Teorema será difícil de demostrar para orden mayor o igual que 2. Sin embargo, no lo estanto para $m = 1$.

Proposición 1.2 (Teorema debilitado). *Dada una ecuación de la forma*

$$x' + a_0(t)x = b(t)$$

con $a_0, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, sea una condición ...

Dada una ecuación de la forma (1.1) de orden 1 siendo los coeficientes funciones continuas en un intervalo abierto I . Dada una condición inicial $t_0 \in I$ y número $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Entonces, existe una única solución x de (1.1), definida en todo el intervalo I que cumple las condiciones iniciales, es decir:

$$x(t_0) = \alpha_0$$

Demostración. Probemos pues existencia y unicidad:

Existencia.

Tenemos una ecuación de la forma

$$x' + a_0(t)x = b(t) \quad x(t_0) = \alpha_0$$

Sea:

$$x(t) = e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)]$$

donde:

$$A_0(t) = \int_{t_0}^t a_0(s) \, ds$$

está bien definida porque a_0 es continua, luego TFC, tenemos que $A_0 \in C^1(I)$.

$$F(t) = \int_{t_0}^t e^{A_0(s)} b(s) \, ds$$

por otra parte, b es continua, producto de dos funciones continuas más TFC, tenemos que $F \in C^1(I)$.

Por tanto, tenemos que $x \in C^1(I)$.

Veamos que cumple la condición inicial (para esto, hemos tomado unas primitivas específicas y no cualquiera, las centradas en t_0):

$$x(t_0) = e^0(\alpha_0 + 0) = \alpha_0$$

Finalmente, demostremos que cumple la ecuación diferencial. Aplicando la derivada del producto:

$$x'(t) = -a_0(t)e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)] + e^{-A_0(t)}e^{A_0(t)}b(t) \stackrel{(*)}{=} -a_0(t)x(t) + b(t)$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que:

$$x(t) = e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)]$$

Unicidad.

La unicidad se basa en usar que la lineal de orden 1 tiene un factor integrante. Supongamos, pues que tenemos dos soluciones, $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación lineal de orden 1 y buscamos probar que $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in I$.

Para ello, definimos:

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

función de clase $C^1(I)$ que cumple:

$$y'(t) = x_1'(t) - x_2'(t)$$

luego:

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

Y además, la función y cumple una condición inicial:

$$y(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = \alpha_0 - \alpha_0 = 0$$

Para ver que y es constantemente igual a 0, multiplicaremos por el factor integrante de y (como y cumple la misma ecuación, en el capítulo anterior vimos el factor integrante):

$$e^{A_0(t)}y'(t) + a_0(t)e^{A_0(t)}y(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (e^{A_0(t)}y(t)) = 0$$

Como consecuencia, tenemos que:

$$e^{A_0(t)}y(t) = c \quad c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I$$

como $y(t_0) = 0$, deducimos que $c = 0$, es decir, que:

$$y(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

con lo que $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in I$.

□