Métodos Numéricos I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Métodos Numéricos I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Índice general

1. Relaciones de ejercicios

1.1. Introducción a los Problemas del Análisis Numérico

Ejercicio 1.1.1. En aritmética de tres dígitos por redondeo, calcula el valor de $\sqrt{543} - \sqrt{540}$.

$$\sqrt{543} - \sqrt{540} \approx 23{,}3 - 23{,}2 = 0{,}1$$

Ejercicio 1.1.2. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que en el algoritmo de Horner para evaluar $p(x)$ en el punto $x = c$, el polinomio $q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$ es el cociente de la división de $p(x)$ entre el polinomio $x - c$, y que $p(c)$ es el resto.

Ejercicio 1.1.3. Demuestra que al aplicar el método de Horner dos veces consecutivas se obtiene el valor del polinomio y el de su derivada.

Demostración. Usando el resultado del ejercicio 1.1.2, al aplicar por primera vez el Algoritmo de Horner, se obtiene $p(c)$, demostrando así el primer resultado.

$$p(x) = q(x)(x - c) + p(c)$$

Al aplicar por primera vez el Algoritmo de Horner, se obtiene $q(c)$.

$$q(x) = t(x)(x - c) + q(c)$$

Como se pide demostrar que al aplicarlo la segunda vez se obtiene $p'(c)$, comprobemos que $q(c) = p'(c)$:

$$p'(x) = q'(x)(x - c) + q(x) \Longrightarrow p'(c) = q'(c) \cdot 0 + q(c) \Longrightarrow p'(c) = q(c)$$

Por tanto, se comprueba que al aplicar Horner por segunda vez se obtiene el valor de la derivada evaluada en el punto. $\square$

Ejercicio 1.1.4. Calcula $p(1{,}1)$ para el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ utilizando la expresión explícita y el algoritmo de Horner en aritmética de redondeo a dos dígitos. ¿Cambian los resultados? ¿Qué valor es más exacto? ¿Por qué?

- Exp. explícita

$$p(1{,}1) = (1{,}1)^3 - 3(1{,}1)^2 + 3(1{,}1) = 1{,}3 - 3{,}6 + 3{,}3 = 1$$

- <u>Algoritmo de Horner</u>

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1{,}1 & & 1{,}1 & -2{,}1 & 0{,}99 \\ \hline & 1 & -1{,}9 & 0{,}9 & 0{,}99 \end{array} \Longrightarrow p(1{,}1) = 0{,}99$$

Ejercicio 1.1.5. Calcule $p(1{,}1)$ para el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ utilizando la expresión explícita y el algoritmo de Horner en aritmética de redondeo a dos dígitos. ¿Cambian los resultados? ¿Qué valor es más exacto? ¿Porqué?

En el caso de el algoritmo de Horner, el valor es $p(1{,}1) = 0{,}99$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1{,}1 & & 1{,}1 & -2{,}1 & 0{,}99 \\ \hline & 1 & -1{,}9 & 0{,}9 & 0{,}99 \end{array}$$

Evaluando en la expresión analítica:

$$p(1{,}1) = (1{,}1)^3 - 3(1{,}1)^2 + 3(1{,}1) = 1{,}3 - 3(1{,}2) + 3(1{,}1) = 1{,}3 - 3{,}6 + 3{,}3 = 1$$

El valor exacto es $p(1{,}1) = 1{,}001$. Aunque por norma general es más exacto el algoritmo de Horner, en este caso es más exacto evaular en la expresión analítica. Esto se debe a que al evaluar al cubo se produce un error por defecto, mientras que al evaluar en el monomio de grado dos se produce un error por exceso. Por tanto, los errores, aunque son mayores, se compensan.

Ejercicio 1.1.6. Determina el número de operaciones necesario para evaluar un polinomios de grado n mediante los siguientes métodos:

1. Evaluación directa de las potencias.

   En cada monomio de grado n se realizan $n-1$ multiplicaciones para calcular la potencia, y una última multiplicación de la potencia por el coeficiente. Por tanto, en cada monomio de grado n se realizan n multipicaciones. Por ello, en un polinomio de grado n el número de multiplicaciones será:

   $$\sum_{i=0}^{n} n - i = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Respecto a las sumas, como hay $n+1$ monomios, se realizan n sumas.

2. El esquema de Horner.

   En este caso, un polinomio de grado n, al representarlo en la forma de Ruffini-Horner, tendrá $n+1$ coeficientes y por tanto $n+1$ columnas.

   Exceptuando la primera, en cada columna se realiza una suma, por lo que se realizarán n sumas.

   Respecto a las multiplicaciones, se multiplica el valor en el que se evalúa por cada b_i exceptuando el último, b_0. Por tanto, se realizarán n multiplicaciones.

   Por tanto, en total se realizan $2n$ operaciones.

1.2. Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio 1.2.1. Determina el número de operaciones necesario para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas mediante los siguientes métodos:

1. La regla de Cramer

2. El método de Gauss (sin elección de pivotes).

Ejercicio 1.2.2. Sea pretende resolver el sistema $Ax = b$ donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & -3 \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

y $b = (a, 3, 1)^T$, donde $A \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

1. Determina para qué valores del parámetro a se puede resolver el sistema usando el método de Gauss sin intercambio de filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a & -3 & a \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[m_{2,1}=-\frac{-4}{-3}]{F_2'=m_{2,1}F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a & -3 & a \\ 0 & -\frac{4a}{3}+3 & 0 & -\frac{4a}{3}+3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[m_{3,1}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}]{F_3'=m_{3,1}F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a & -3 & a \\ 0 & -\frac{4a}{3}+3 & 0 & -\frac{4a}{3}+3 \\ 0 & \frac{2a}{3}+7 & -6 & \frac{2a}{3}+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[m_{3,2}=-\frac{\frac{2a}{3}+7}{-\frac{4a}{3}+3}=\frac{2a+21}{4a-9}]{F_3'=m_{3,2}F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a & -3 & a \\ 0 & -\frac{4a}{3}+3 & 0 & -\frac{4a}{3}+3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema se puede resolver con Gauss sin intercambiar filas si y solo si:

$$-\frac{4a}{3}+3 \neq 0 \Longleftrightarrow 4a \neq 9 \Longrightarrow a \neq \frac{9}{4}$$

2. Resuelve el sistema para cualquier valor del parámetro a:

- Para $a = \frac{9}{4}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & \frac{9}{4} & -3 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & -6 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución es $x = (-\frac{8\lambda+9}{17}, \frac{5+12\lambda}{17}, \lambda)^T$:

$$x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \qquad x_2 = \frac{\frac{5}{2}+6\lambda}{\frac{17}{2}} = \frac{5+12\lambda}{17} \qquad x_1 = \frac{\frac{9}{4}+3\lambda-\frac{9}{4}\frac{5+12\lambda}{17}}{-3} = -\frac{8\lambda+9}{17}$$

- Para $a \neq \frac{9}{4}$: La solución es $x = (-1, 1, 1)^T$:

$$x_3 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_1 = \frac{a + 3 - a}{-3} = -1$$

3. Para $a = 0$ resuelve el sistema utilizando el método de Gauss con pivote parcial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \Longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3'=\frac{1}{2}F_1+F_3]{F_2'=-\frac{3}{4}F_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{17}{2} & -6 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \Longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{17}{2} & -6 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3'=\frac{9}{34}F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{17}{2} & -6 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{17} & -\frac{27}{17} \end{array}\right)$$

La solución es $x = (-1, 1, 1)^T$:

$$x_3 = 1 \qquad x_2 = \frac{\frac{5}{2} + 6}{\frac{17}{2}} = \frac{5 + 12}{17} = 1 \qquad x_1 = \frac{3 + 4 - 3}{-4} = -1$$

4. Para $a = 0$ resuelve el sistema utilizando el método de Gauss con pivote total.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \Longleftrightarrow C_1]{F_1 \Longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2'=-\frac{3}{7}F_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -\frac{34}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{18}{7} \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3'=-\frac{21}{34}F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -\frac{34}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{27}{17} & -\frac{27}{17} \end{array}\right)$$

La solución, recordando que se han intercambiado la primera y segunda variable, es $x = (-1, 1, 1)^T$:

$$x_3 = 1 \qquad x_1 = \frac{\frac{18+16}{7}}{\frac{-34}{7}} = -1 \qquad x_2 = \frac{1 + 4 + 2}{7} = 1$$

Ejercicio 1.2.3. Usa el método de Gauss (sin intercambio de filas), sustitución hacia atrás y aritmética exacta para resolver, si es posible, los sistemas lineales siguientes:

1. $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3'=-F_1+F_3]{F_2'=-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, como $a_{22}^{(2)} = 0$, no es posible resolverlo sin intercambio de filas.

2. $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3'=-F_1+F_3 \\ F_4'=-F_1+F_4}]{F_2'=-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, como $a_{22}^{(2)} = 0$, no es posible resolverlo sin intercambio de filas.

Ejercicio 1.2.4. ¿Es posible aplicar el método de Gauss (sin intercambio de filas) al siguiente sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2'=-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Por tanto, como $a_{22}^{(2)} = 0$, no es posible resolverlo sin intercambio de filas.

Ejercicio 1.2.5. Sea la matrz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Determina la factorización LU en su forma de Crout de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} \\ l_{41} & l_{41}u_{12} + l_{42} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44} \end{pmatrix}$$

Igualando componentes:

$$\begin{cases} l_{11} = 2 \\ l_{21} = -1 \\ l_{31} = -2 \\ l_{41} = 1 \\ l_{11}u_{12} = -2 \longrightarrow u_{12} = -1 \\ l_{21}u_{12} + l_{22} = 3 \longrightarrow l_{22} = 2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = 1 \longrightarrow l_{32} = -1 \\ l_{41}u_{12} + l_{42} = -3 \longrightarrow l_{42} = -2 \\ l_{11}u_{13} = -4 \longrightarrow u_{13} = -2 \\ l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 0 \longrightarrow u_{23} = -1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 7 \longrightarrow l_{33} = 2 \\ l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43} = -1 \longrightarrow l_{43} = -1 \\ l_{11}u_{14} = 2 \longrightarrow u_{14} = 1 \\ l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = -5 \longrightarrow u_{24} = -2 \\ l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} = -2 \longrightarrow u_{34} = -1 \\ l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44} = 8 \longrightarrow l_{44} = 2 \end{cases}$$

Por tanto, y tras igualar componentes,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

2. Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos independientes $(0, 2, -1, -2)^T$.

   Sea la solución $x \in \mathbb{R}^4$.

   $$Ax = (0, 2, -1, -2)^T \Longrightarrow LUx = (0, 2, -1, -2)^T$$

   Sea $Ux = y \in \mathbb{R}^4$. Resuelvo en primer lugar el sistema $Ly = (0, 2, -1, -2)^T$

   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = (0, 1, 0, 0)^T$$

   Resuelvo ahora el sistema $Ux = y$

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = (1, 1, 0, 0)^T$$

   Por tanto, la solución del sistema es $x = (1, 1, 0, 0)^T$.

Ejercicio 1.2.6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & -6 \\ 4 & -2 & -8 & -10 \\ 2 & 2 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

y los vectores

$$b_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

resuelve los cuatro sistemas lineales $Ax = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método que considere más eficiente. ¿Puede usarse esa misma técnica para calcular la inversa de una matriz?

El método más eficiente es la factorización LU, ya que al tener la matriz A factorizada, este resultado se puede emplear para los 4 valores de b_i. En el caso en el que hubiésemos elegido Gauss, habríamos tenido que obtener la matriz triangular en 4 casos distintos.

Calculo por tanto la factorización LU de la matriz A mediante el método de Doolittle.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & -6 \\ 4 & -2 & -8 & -10 \\ 2 & 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando componente a componente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & -6 \\ 4 & -2 & -8 & -10 \\ 2 & 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

1. Resuelvo en primer lugar $Ax_1 = b_1$.
   Como solución del sistema $Ly_1 = b_1$, obtenemos $y_1 = (-8, -4, 0, 2)^T$.

   Por tanto, la solución del sistema $Ax_1 = b_1$ equivale a $Ux_1 = y_1$. Por tanto, $x_1 = (0, 1, 1, 1)^T$.

2. Resuelvo en primer lugar $Ax_2 = b_2$.
   Como solución del sistema $Ly_2 = b_2$, obtenemos $y_2 = (-4, -6, 0, 2)^T$.

   Por tanto, la solución del sistema $Ax_2 = b_2$ equivale a $Ux_2 = y_2$. Por tanto, $x_2 = (1, 0, 1, 1)^T$.

3. Resuelvo en primer lugar $Ax_3 = b_3$.
   Como solución del sistema $Ly_3 = b_3$, obtenemos $y_3 = (-2, -2, -2, 2)^T$.

   Por tanto, la solución del sistema $Ax_3 = b_3$ equivale a $Ux_3 = y_3$. Por tanto, $x_3 = (1, 1, 0, 1)^T$.

4. Resuelvo en primer lugar $Ax_4 = b_4$.
   Como solución del sistema $Ly_4 = b_4$, obtenemos $y_4 = (-4, 0, 2, 0)^T$.

   Por tanto, la solución del sistema $Ax_4 = b_4$ equivale a $Ux_4 = y_4$. Por tanto, $x_4 = (1, 1, 1, 0)^T$.

Para calcular A^{-1}, se puede calcular la columna i-ésima de A^{-1} resolviendo el sistema igualando a e_i en cada caso. Por tanto, resolviendo 4 sistemas LU se puede calcular la inversa de A.

Ejercicio 1.2.7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular y tridiagonal.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Supongamos que A admite una factorización LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes matrices triangulares adoptan la forma

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

con $d_1 = a_1$ y para $i = 2, \dots, n$ se verifica $l_i = \frac{b_i}{d_{i-1}}$, $d_i = a_i - l_i c_{i-1}$.

Ejercicio 1.2.8. Decide razonadamente si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es o no definida positiva y utiliza tu razonamiento para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ donde $b = (-1, 5, 1, 9)^T$.

Para que sea definida positiva, es necesario que todos sus menores principales sean positivos.

$$|1| = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot -8 = 16$$

Por tanto, como sus 4 menores principales son positivos, es definida positiva. Además, como es simétrica, admite factorización de tipo *Cholesky*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} & l_{11}l_{41} \\ 1_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42}l_{33}l_{43} \\ l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} & l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando componentes y quedándome con los valores positivos de las potencias,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

Por tanto, el sistema $Ax = b$ se queda como $LUx = b$. Sea $Ux = y \in \mathbb{R}^4$. Resuelvo en primer lugar el sistema $Ly = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = (-1, 3, 0, 2)^T$$

Resuelvo ahora $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = (-1, 1, -1, 1)^T$$

Por tanto, la solución es $x = (-1, 1, -1, 1)^T$.

Ejercicio 1.2.9. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 6x & + & 11y & = & 3 \\ 13x & + & 22y & = & 71 \end{array} \right.$$

1. Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Gauss, utilizando aritmética finita de cuatro dígitos por redondeo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 11 & 3 \\ 13 & 22 & 71 \end{array}\right) \xrightarrow[m_{2,1}=-\frac{13}{6}\approx -2{,}167]{F_2'=m_{2,1}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 11 & 3 \\ 0 & -1{,}84 & 64{,}50 \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$y = \frac{64{,}50}{-1{,}84} \approx -35{,}05$$

$$x = \frac{3-11y}{6} \approx \frac{3+385{,}6}{6} = \frac{388{,}6}{6} = 64{,}77$$

2. Resuelve de nuevo el sistema por el método de Gauss con pivote parcial, utilizando aritmética finita de cuatro dígitos por redondeo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 11 & 3 \\ 13 & 22 & 71 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \Longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 22 & 71 \\ 6 & 11 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[m_{2,1}=-\frac{6}{13}\approx -0{,}4615]{F_2'=m_{2,1}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 22 & 71 \\ 0 & 0{,}85 & -29{,}77 \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$y = \frac{-29{,}77}{0{,}85} \approx -35{,}02$$

$$x = \frac{71-22y}{13} \approx \frac{71+770{,}4}{13} = \frac{841{,}4}{13} = 64{,}72$$

3. Comenta los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

   Como podemos ver, al usar el pivote parcial los resultados son más precisos.

4. Resuelve el sistema utilizando la factorización LU de Crout.

$$\begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 13 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} \end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando componentes:

$$\begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 13 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 13 & -\frac{11}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Para resolver el sistema $Ar = (3,71)^T = LUr$, resuelvo en primer lugar $Ls = (3,71)^T$.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 13 & -\frac{11}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 71 \end{pmatrix} \Longrightarrow s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{387}{11}\right)^T$$

Resuelvo ahora el sistema $Ur = s$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -\frac{387}{11} \end{pmatrix} \Longrightarrow r = \left(65, -\frac{387}{11}\right)^T$$

Por tanto, $x = 65$ e $y = -\frac{387}{11}$.

Ejercicio 1.2.10. Demuestra que toda matriz simétrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ cuyos menores principales son no nulos admite una factorización en la forma $A = LDL^t$, donde D es una matriz diagonal regular y L es una matriz triangular inferior unitaria, es decir, con unos en la diagonal principal.

Demostración. Al ser sus menores principales no nulos, admite una factorización LU sin intercambio de filas.

$$A = LU$$

Como A es simétrica,

$$A = A^t \Longrightarrow LU = (LU)^t = U^t L^t$$

Despejando, $U = L^{-1}U^tL^t$. Por tanto,

$$A = LU = LL^{-1}U^tL^t$$

Veamos ahora que $L^{-1}U^t = D$ es un matriz diagonal regular.
Es fácil ver que $D^{-1} = (U^t)^{-1}L$, por lo que D es regular.

Veamos ahora que D es diagonal. En primer lugar, sabemos que la inversa de una triangular inferior es triangular inferior. Por tanto, L^{-1} es triangular inferior. Además, U es triangular superior, por lo que U^t es triangular inferior. Como el producto de triangulares inferiores es triangular inferior, sabemos que D es triangular inferior.

Veamos ahora que D es diagonal. Para ver que es diagonal, y sabiendo que es diagonal inferior, veamos si es simétrica.

$$D = L^{-1}U^t = L^{-1}(L^{-1}U^tL^t)^t = L^{-1}LU(L^{-1})^t = U(L^{-1})^t = D^t$$

Por tanto, como $D = D^t$, D es simétrica y, por tanto, es diagonal. □

Ejercicio 1.2.11. Demuestra que la función definida en $\mathbb{R}^n$ por

$$||x||_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

realmente es una norma vectorial.

Demostración. Ha de cumplir las tres propiedades:

- $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \geq 0$, ya que es la suma de elementos positivos.

  Además, es necesario ver que $||x||_1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

  $$\begin{aligned} ||x||_1 = 0 \Longleftrightarrow |x_1| + \cdots + |x_n| = 0 \Longleftrightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \\ \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

- Veamos si $||cx||_1 = |c|||x||_1$

  $$||cx||_1 = |cx_1| + \cdots + |cx_n| = |c|(|x_1| + \cdots + |x_n|) = |c|||x||_1$$

- Veamos la desigualdad triangular.

$$||x+y||_1 = |x_1+y_1|+\cdots+|x_n+y_n| \leq |x_1|+|y_1|+\cdots+|x_n|+|y_n| = ||x||_1+||y||_1$$

□

Ejercicio 1.2.12. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

1. $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$ y que las igualdades pueden darse, incluso para vectores no nulos.

   Demostración. Demuestro en primer lugar la primera desigualdad.

   $$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

   Supongamos que el máximo se alcanza en $i = k$, es decir, $||x||_\infty = |x_k|$

   $$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |x_k| = \sqrt{|x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = ||x||_2$$

   Demuestro ahora la segunda desigualdad.

   $$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \overset{(*)}{\leq} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = \left|\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right| \overset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1$$

   donde en $(*)$ se da la desigualdad ya que la suma de cuadrados es menor que el cuadrado de la suma, y en $(**)$ se da ya que, al ser $|x_i \geq 0$, la suma también es ≥ 0.

   Además, se puede dar la igualdad oara vectores no nulos. por ejemplo, es el caso de e_k.

   $$||e_k||_\infty = ||e_k||_2 = ||e_k||_1 = 1$$

   □

2. $||x||_1 \leq n||x||_\infty$

   Demostración. Sea $||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Supongamos que el máximo se alcanza en $i = k$, es decir, $||x||_\infty = |x_k|$.

   $$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_k| = n|x_k| = n||x||_\infty$$

   donde la desigualdad se da ya que, por la definición de $|x_k|$, $|x_k| \geq |x_i| \ \forall i$ □

3. $||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$

Demostración. Sea $||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Supongamos que el máximo se alcanza en $i = k$, es decir, $||x||_\infty = |x_k|$.

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{n|x_k|^2} = \sqrt{n}|x_k| = \sqrt{n}||x||_\infty$$

donde la desigualdad se da ya que, por la definición de $|x_k|$, $|x_k| \geq |x_i|\ \forall i$ □

Ejercicio 1.2.13. Demuestra que el número de condición, $\kappa(A)$, para toda matriz A verifica:

1. $\kappa(A) \geq 1$

   Demostración.
   $$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}|| \geq ||AA^{-1}|| = ||I||$$
   Por tanto, para ver que $\kappa(A) \geq 1$, es necesario ver que $||I|| \geq 1$. Hay dos opciones:

   a) Opción 1
   Sabemos que $||I||_1 = 1$, pero podría ser que existiese otra norma matricial en la que su norma fuese menor que 1. Sin embargo, esto no es posible, ya que como $\rho(I) = 1 \not< 1 \Longrightarrow \nexists || \cdot ||_M$ t.q. $||I||_M < 1$.

   b) Opción 2
   $$\forall\ || \cdot || \qquad ||A|| = ||AI|| \leq ||A|| \cdot ||I|| \Longrightarrow ||I|| \geq \frac{||A||}{||A||} = 1$$

   Por tanto, $||I|| \geq 1$, por lo que:
   $$\kappa(A) \geq ||I|| \geq 1$$
   □

2. $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$ para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   Demostración.
   $$\kappa(\alpha A) = ||\alpha A||||(\alpha A)^{-1}|| = ||\alpha A||||\alpha^{-1}A^{-1}|| = |\alpha|||A|| \cdot |\alpha^{-1}|||A^{-1}|| = \\ = ||A||||A^{-1}|| = \kappa(A)$$
   □

Ejercicio 1.2.14. El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 0{,}999999y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

tiene como solución exacta $x = 10^6$, $y = -10^6$. Encuentra la solución exacta del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + 1{,}000001y = 1 \end{array}\right\}$$

Comenta los resultados.

Resuelvo haciendo uso de que $-x = y$:

$$x - 1{,}000001x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{-0{,}000001} = -10^6$$

Por tanto, $x = -10^6$, $y = 10^6$. Estos resultados totalmente contrarios se deben a que es una matriz mal condicionada. Calculemos el número de condición de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}999999 \end{pmatrix}$:

$$\kappa(A) = \left|\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}999999 \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}999999 \end{pmatrix}^{-1}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}999999 \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} -10^6 & 10^6 \\ 10^6 & -10^6 \end{pmatrix}\right|\right|$$

Haciendo uso de la norma 1, $\kappa_1(A) = 2 \cdot 2 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^6 \ggg 1$. Por tanto, se han perdido aproximadamente 6 cifras significantes.

Ejercicio 1.2.15. La matriz de Hilbert $H_n = (h_{ij})_{n \times n}$ definida por $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $1 \leq i, j \leq n$ es un importante ejemplo en el álgebra lineal numérica. Encuentra la matriz H_4, demuestra que

$$H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}$$

y calcula $\kappa_\infty(H_4)$. ¿Qué puede esperarse al resolver una ecuación en la forma $H_4 x = b$?

En primer lugar, obtengo H_4:

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & \frac{1}{3} & 0{,}25 \\ 0{,}5 & \frac{1}{3} & 0{,}25 & 0{,}2 \\ \frac{1}{3} & 0{,}25 & 0{,}2 & \frac{1}{6} \\ 0{,}25 & 0{,}2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la matriz dada es H_4^{-1}, ya que $H_4^{-1} H = I_4$.

$$||H_4||_\infty = \frac{25}{12} \qquad ||H_4^{-1}||_\infty = \max\{516, 5700, 13620, 8820\} = 13620$$

Por tanto, $\kappa_\infty(H_4) = ||H_4||_\infty ||H_4^{-1}||_\infty = \frac{25}{12} 13620 = 28375 > 10^4 \ggg 1$.

Por tanto, es una matriz mal condicionada y al resolverse un sistema lineal será poco fiable, ya que frente a pequeñas variaciones variará en grandes medidas.

Ejercicio 1.2.16. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la matriz A no es estrictamente diagonal dominante (por filas), pero que los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen, para resolver cualquier sistema $Ax = b$.

Como $|2| \not> |3|$, no es E.D.D.

Veamos si el método de Jacobi es convergente. En este método, se toma como matriz de descomposición $Q = D$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Jacobi queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b = Bx^{(k)} + D^{-1}b \quad \text{con } B = I - D^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $P_B(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{8} \Longrightarrow \rho(B) = \sqrt{\frac{3}{8}} < 1$. Como $\rho(B) < 1$, el método iterativo de Jacobi converge.

Veamos si el método de Gauss-Seidel es convergente. En este método, se toma como matriz de descomposición $Q = D + L$.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Gauss-Seidel queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + Q^{-1}b \quad \text{con } B = I - Q^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $P_B(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{8}\lambda \Longrightarrow \rho(B) = \frac{3}{8} < 1$. Como $\rho(B) < 1$, el método iterativo de Gauss-Seidel converge.

Ejercicio 1.2.17. Demuestre que para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

las iteraciones del método de Jacobi convergen y las del método de Gauss-Seidel no lo hacen.

Trabajemos primero con el método de Jacobi.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Jacobi queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + Q^{-1}b \quad \text{con } B = I - Q^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\lambda$$

Las soluciones son:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 0{,}75 \\ &\lambda_1 = 0{,}37 \pm 0{,}87i \Longrightarrow |\lambda_1| = 0{,}89 \end{aligned}$$

Por tanto, $\rho(B) < 1$, por lo que el método iterativo de Jacobi converge.
Veamos ahora para el método de Gauss-Seidel.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Gauss-Seidel queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + Q^{-1}b \quad \text{con } B = I - Q^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = -\lambda^2(\lambda+1) \Longrightarrow \rho(B) = 1$$

Como $\rho(B) \not< 1 \Longrightarrow$ el método de Gauss-Seidel, en este caso, no converge para cualquier valor de $x^{(0)}$.

Ejercicio 1.2.18. Considera el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{cases}$$

1. Comprueba que la matriz de coeficientes del sistema no es estrictamente diagonal dominante (por filas).
   En la primera fila, $2 \not> 2$, por lo que no es $E.D.D.$ (por filas).

2. Partiendo de $x^{(0)} = (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T$, muestra que las iteraciones del método de Jacobi oscilan entre los valores $(1{,}2, 1{,}2, 1{,}2)^T$ y $(0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T$.

$$Q = 2I \qquad\qquad Q^{-1} = \frac{1}{2}I$$

Por tanto, el método iterativo de Jacobi queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + c$$

con $B = I - Q^{-1}A = I - \frac{1}{2}A$ y $c = Q^{-1}b = \frac{1}{2}b = (2, 2, 2)^T$

$$B = I - \frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T \\
x^{(1)} &= Bx^{(0)} + c = -\frac{2 \cdot (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T}{2} + (2, 2, 2)^T = (1{,}2, 1{,}2, 1{,}2)^T \\
x^{(2)} &= Bx^{(1)} + c = -\frac{2 \cdot (1{,}2, 1{,}2, 1{,}2)^T}{2} + (2, 2, 2)^T = (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T
\end{aligned}$$

Por tanto, es fácil ver que:

$$\begin{array}{rl} x^{(2n)} & = (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T \\ x^{(2n-1)} & = (1{,}2, 1{,}2, 1{,}2)^T \end{array} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

3. Muestra que las iteraciones del método de Gauss-Seidel convergen a la solución $x = (1, 1, 1)^T$, calculando iteraciones hasta que $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 10^{-3}$.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Gauss-Seidel queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + c$$

con $B = I - Q^{-1}A$ y $c = Q^{-1}b$

$$B = I - Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \qquad\qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las iteraciones son:

k	$x^{(k)}$
0	$(0,0,0)^T$
1	$\left(2,1,\frac{1}{2}\right)^T$
2	$\left(\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{13}{16}\right)^T$
3	$\left(\frac{33}{32},\frac{69}{64},\frac{121}{128}\right)^T$
4	$\left(\frac{253}{256},\frac{529}{512},\frac{1013}{1024}\right)^T$
5	$\left(\frac{2025}{2048},\frac{4141}{4096},\frac{8193}{8192}\right)^T$
6	$\left(\frac{16293}{16384},\frac{32857}{32768},\frac{65629}{65536}\right)^T$
7	$\left(\frac{130801}{131072},\frac{262229}{262144},\frac{524745}{524288}\right)^T \approx (0{,}9979, 1{,}0003, 1{,}0009)^T$
8	$\left(\frac{1047949}{1048576},\frac{2096865}{2097152},\frac{4195845}{4194304}\right)^T \approx (0{,}9994, 0{,}9999, 1{,}0004)^T$
9	$\left(\frac{8387641}{8388608},\frac{16775101}{16777216},\frac{33558481}{33884432}\right)^T \approx (0{,}9999, 0{,}9999, 1{,}0001)^T$

Observación. Como A es simétrica y definida positivamente, podemos confirmar que el método de Gauss-Seidel converge. Sea $\left\{x^{(k)}\right\} \longrightarrow L = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$. Como $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, como toda parcial de una sucesión convergente converge al mismo límite, y usando también la unicidad del límite,

$$L = BL + c \Longrightarrow (I-B)L = c \Longrightarrow L = (I-B)^{-1}c = \mathbf{(1,1,1)^T} = \mathbf{(x,y,z)^T}$$

4. ¿Se mantienen los resultados de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel si intercambiamos las ecuaciones segunda y tercera?

No tiene por qué, ya que sus valores propios son distintos y, por tanto, su radio espectral también lo es. Veámoslo.

Trabajemos primero con el método de Jacobi.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Jacobi queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + Q^{-1}b \quad \text{con } B = I - Q^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\lambda & -2+\lambda \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)q(\lambda) \Longrightarrow \rho(B) \geq 2$$

Por tanto, como $\rho(B) \geq 2$, el método de Jacobi tampoco converge en este caso independientemente del valor de $x^{(0)}$.

Trabajemos ahora con el método de Gauss-Seidel.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el método iterativo de Gauss-Seidel queda como:

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b = Bx^{(k)} + Q^{-1}b \quad \text{con } B = I - Q^{-1}A$$

$$B = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right) = -\lambda(\lambda-2-\sqrt{3})(\lambda-2+\sqrt{3})$$

Por tanto, como $\rho(B) = 2+\sqrt{3} \geq 1$, el método de Gauss-Seidel no converge en este caso.

Ejercicio 1.2.19. Determina el número de operaciones necesario para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas mediante los siguientes métodos:

1. La factorización LU en la forma de Doolittle.
2. La factorización de Choslesky (suponiendo que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva).

Ejercicio 1.2.20. Ejercicio Examen 21/22
Se considera una norma vectorial $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$ y la correspondiente norma matricial inducida $||\cdot||$. Dada una matriz cuadrada regular S de orden n, se define la norma vectorial $||\cdot||_S$ por:

$$||x||_S = ||Sx||$$

1. Prueba que así definida es una norma en $\mathbb{R}^n$

    - $||x||_S = ||Sx|| \geq 0$ por ser $||\cdot||$ una norma vectorial. Además, se comprueba que $||x||_S = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

    $$||x||_S = 0 \Longleftrightarrow ||Sx|| = 0 \Longleftrightarrow Sx = 0 \Longleftrightarrow x = S^{-1}\cdot 0 = 0$$

    - $||cx||_S = ||S(cx)|| = ||c(Sx)|| = |c|\cdot||Sx|| = |c|\cdot||x||_S$

- $||x+y||_S = ||S(x+y)|| = ||Sx+Sy|| \leq ||Sx|| + ||Sy|| = ||x||_S + ||y||_S$

2. Prueba que la norma matricial inducida es

$$||A||_S = ||SAS^{-1}||$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ||A||_S = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_S}{||x||_S} = \max_{x\neq 0} \frac{||SAx||}{||Sx||} = \max_{x\neq 0} \frac{||SAS^{-1}Sx||}{||Sx||} = \\ \overset{(*)}{=} \max_{Sx\neq 0} \frac{||SAS^{-1}Sx||}{||Sx||} = ||SAS^{-1}|| \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ he usado que, por ser S regular,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Sx \neq 0\}$$

Como ambos conjuntos son los mismos, el máximo se alcanzará en el mismo valor. □

3. Si denotamos por $\kappa(A)$ y $\kappa_S(A)$ el número de condición de la matriz A respecto de las normas $||\cdot||$ y $||\cdot||_S$ respectivamente, prueba que:

$$\kappa_S(A) \leq \kappa(S)^2\kappa(A)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \kappa_S(A) = ||A||_S||A^{-1}||_S = ||SAS^{-1}|| \cdot ||SA^{-1}S^{-1}|| \leq \\ \leq ||S||^2||S^{-1}||^2||A||||A^{-1}|| = \kappa(S)^2\kappa(A) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.2.21. Ejercicio Examen 21/22
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \end{pmatrix}$$

se pretende resolver el sistema $Ax = b$.

1. ¿Se puede garantizar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel? Justifica la respuesta.

   Sí, ya que la matriz A es E.D.D., ya que $2 > 1/2$ y $2 > 1/2$.

   Alternativamente, y solo para el caso del método de Jacobi, se demuestra de manera general.

La matriz de descomposición del método de Jacobi es:

$$Q = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$$

Por tanto, el sistema de punto fijo de Jacobi $x = B_J x + c$ tiene como B_J a la matriz:

$$B_J = I - Q^{-1}A = I + \frac{1}{2}A = I + \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $||B_J||_1 < 1 \Longrightarrow$ este método iterativo converge.

2. Escribe las ecuaciones de los métodos y realiza dos iteraciones del método de Gauss-Seidel partiendo de $x^{(0)} = (0, 0)$.

Las ecuaciones del método de Jacobi son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_2^{(k)} + 8\right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1^{(k)} + 32\right) = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - 16 \end{cases}$$

Las ecuaciones del método de Gauss-Seidel son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - 16 \end{cases}$$

Realizamos ahora dos iteraciones del método de Gauss-Seidel:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	-4	-15
2	$-\frac{31}{4}$	$-\frac{225}{16}$

3. Se propone el método iterativo

$$x^{k+1} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b$$

Prueba que para $\omega = -\frac{1}{2}$ el método converge a la solución del sistema para cualquier valor inicial $x^{(0)}$. ¿Que debe cumplir ω para que el método sea convergente? Indica algún otro valor para el que así sea.

$$I - \omega A = \begin{pmatrix} 1 + 2\omega & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1 + 2\omega \end{pmatrix}$$

$$P_{I-\omega A}(\lambda) = \lambda^2 - (2 + 4\omega)\lambda + (1 + 2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4}$$

Los valores propios de dicha matriz son:

$$\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 - (2 + 4\omega)\lambda + (1 + 2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2+4\omega \pm \sqrt{(2+4\omega)^2 - 4(1+2\omega)^2 - \omega^2}}{2} \\
&= \frac{2+4\omega \pm \sqrt{\cancel{2^2(1+2\omega)^2} \cancel{-4(1+2\omega)^2} - \omega^2}}{2} \\
&= 1+2\omega \pm \frac{|\omega|}{2} i = 1+2\omega \pm \frac{\omega}{2} i
\end{aligned}
$$

Por tanto, los valores propios son: $\left\{1+2\omega \pm \frac{\omega}{2}i\right\}$. Para que el método iterativo converga, necesitamos que

$$
\text{máx}\left\{\left|1+2\omega+\frac{\omega}{2}i\right|, \left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right|\right\} < 1
$$

Como $\left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right| = \left|1+2\omega+\frac{\omega}{2}i\right|$, la inecuación a resolver es:

$$
\left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right| < 1 \Longleftrightarrow \sqrt{(1+2\omega)^2+\frac{\omega^2}{4}} < 1 \Longleftrightarrow 1+4\omega+4\omega^2+\frac{\omega^2}{4} < 1 \Longleftrightarrow
$$
$$
\Longleftrightarrow \omega\left(4+4\omega+\frac{\omega}{4}\right) < 0
$$

Esta última desigualdad se cumple solo si uno de los dos términos es negativos.

$$
\omega < 0 \qquad\qquad 4+4\omega+\frac{\omega}{4} = 4+\frac{17}{4}\omega < 0 \Longleftrightarrow \omega < \frac{-16}{17}
$$

Por tanto, el método iterativo converge si:

$$
\omega \in \left]-\frac{16}{17}, 0\right[
$$

1.3. Interpolación polinómica

Ejercicio 1.3.1. Utilice el método más adecuado para calcular el polinomio $p(x)$ de grado mínimo que interpola los datos de la tabla

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
f_i & 2 & 1 & 2 & -7
\end{array}
$$

1. Utilice el algoritmo de Newton–Horner para calcular $p(3)$.

   Calculo en primer lugar el polinomio de interpolación mediante el método de Newton. La tabla de diferencias dividas es:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
 & & & & \\
-1 & \mathbf{2} & & & \\
 & & \mathbf{-1} & & \\
0 & 1 & & \mathbf{1} & \\
 & & 1 & & \mathbf{-2} \\
1 & 2 & & -5 & \\
 & & -9 & & \\
2 & -7 & & &
\end{array}
$$

   Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$p_3(x) = 2 - (x+1) + (x+1)x - 2(x+1)x(x-1)$$

   Para evaluar, usamos el método de Newton-Horner:

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= 2 - (x+1) + (x+1)x - 2(x+1)x(x-1) \\
&= 2 + (x+1)[-1 + x[1 - 2(x-1)]]
\end{aligned}
$$

   Por tanto, evaluando, $p_3(3) = -38$.

2. ¿Qué término habrá que añadir al polinomio $p(x)$ para que el nuevo polinomio interpole también el dato $(3, 10)$?

   Ampliamos la tabla de diferencias divididas con una diagonal más:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f[x_i] & & & & \\
 & & & & & \\
-1 & \mathbf{2} & & & & \\
 & & \mathbf{-1} & & & \\
0 & 1 & & \mathbf{1} & & \\
 & & 1 & & \mathbf{-2} & \\
1 & 2 & & -5 & & \mathbf{2} \\
 & & -9 & & 6 & \\
2 & -7 & & 13 & & \\
 & & 17 & & & \\
3 & 10 & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$p_4(x) = 2 - (x+1) + (x+1)x - 2(x+1)x(x-1) + 2(x+1)x(x-1)(x-2)$$

Podemos ver que el último término será:

$$f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) = 2(x+1)x(x-1)(x-2)$$

Ejercicio 1.3.2. Dados los puntos:

x_i	-1	0	4	-2
f_i	0	1	305	-31

1. Construya, usando el método de los coeficientes indeterminados, la fórmula de Lagrange y la fórmula de Newton, el polinomio que interpola a dichos puntos.

Como hay cuatro puntos, el grado del polinomio de interpolación es 3.

- Método de Coeficientes Indeterminados
  El polinomio quedará como $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.
  Las condiciones de interpolación son:

$$\left.\begin{array}{l} p_3(-1) = 0 \\ p_3(0) = 1 \\ p_3(4) = 305 \\ p_3(-2) = -31 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rrrrrr} a_0 & -a_1 & +a_2 & -a_3 & = & 0 \\ a_0 & & & & = & 1 \\ a_0 & +4a_1 & +16a_2 & +64a_3 & = & 305 \\ a_0 & -2a_1 & +4a_2 & -8a_3 & = & -31 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & -4 \\ a_2 & = & 0 \\ a_3 & = & 5 \end{array}$$

  Por tanto, el polinomio queda: $p_3(x) = 1 - 4x + 5x^3$

- Método de Lagrange
  Calculo los polinomios básicos de Lagrange ℓ_i

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

  Por tanto,

$$\ell_0(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x-0)(x-4)(x-(-2))}{(-1-0)(-1-4)(-1-(-2))} = \frac{x(x-4)(x+2)}{5}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)(x+2)}{-8} \qquad \ell_2(x) = \frac{(x+1)x(x+2)}{120} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x+1)x(x-4)}{-12}$$

  Por tanto, el polinomio de interpolación queda:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) + f_3\ell_3(x) \\ &= 0 \cdot \frac{x(x-4)(x+2)}{5} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-4)(x+2)}{-8} + \\ &\quad + 305 \cdot \frac{(x+1)x(x+2)}{120} - 31 \cdot \frac{(x+1)x(x-4)}{-12} \end{aligned}$$

- <u>Método de Newton</u>

  Calculo en primer lugar la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$			
-1	$\mathbf{0}$			
		$\mathbf{1}$		
0	1		$\mathbf{15}$	
		76		$\mathbf{5}$
4	305		10	
		56		
-2	-31			

  Por tanto, el polinomio de interpolación es

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0 + 1(x-(-1)) + 15(x-(-1))(x-0) + 5(x-(-1))(x-0)(x-4) \\ &= 0 + (x+1) + 15(x+1)x + 5(x+1)x(x-4) \\ &= 0 + (x+1)[1 + x[15 + 5(x-4)]] \end{aligned}$$

2. ¿Sigue siendo válido el mismo polinomio si agregamos el punto $(1, 2)$? ¿Y si fuera el punto $(3, 0)$?

   Evaluando en cualquiera de los polinomios del apartado anterior,

$$p_3(1) = 2$$

   Por tanto, sí es válido el mismo polinomio para el punto $(1, 2)$, ya que lo interpola.

   Sin enbargo,

$$p_3(3) = 124$$

   Por tanto, no es válido el mismo polinomio para el punto $(3, 0)$, ya que no lo interpola.

Ejercicio 1.3.3. Sean $\ell_i(t), i = 1, \dots, n$ los polinomios básicos de Lagrange. Demuestre que:

1. $\{\ell_0(t), \ell_1(t), \dots, \ell_n(t)\}$ constituyen una base de $\mathbb{P}_n$,

   Sabemos que $\ell_k(x_j) = \delta_{k,j}$.

   Supongamos que son linealmente dependientes, es decir, que $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que:

$$0 = a_0\ell_0(t) + \cdots + a_j\ell_j(t) + \cdots + a_n\ell_n(t)$$

   Evaluando en cada x_j, obtenemos que $a_j = 0 \quad \forall j$. Por tanto, son nulos, por lo que llegamos a una contradicción.

   Como tenemos $n+1$ vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión $n+1$, tenemos que forman base.

2. $\sum_{i=0}^{n} \ell_i(t) = 1$.

   Sean los puntos (x_i, f_i), con $f_i = 1 \quad \forall i$. Es decir, un conjunto de puntos alineados sobre la recta $y = 1$. Por tanto, sabemos que el polinomio de interpolación es $p_n(x) = 1$.

   El polinomio de interpolación de Lagrange es:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)$$

   Por la unicidad del polinomio de interpolación:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1$$

Ejercicio 1.3.4. Estudie para que valores de $a \in \mathbb{R}$ es unisolvente el siguiente problema de interpolación:
Encontrar $p \in \mathbb{P}_2$ tal que:

$$\left.\begin{array}{rcl} p(-1) & = & \omega_0 \\ p'(a) & = & \omega_1 \\ p(1) & = & \omega_2 \end{array}\right\}$$

Procedemos al cálculo del polinomio mediante el método de coeficientes indeterminados. Sea $p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

$$\left.\begin{array}{rcl} p(-1) & = & \omega_0 \\ p'(a) & = & \omega_1 \\ p(1) & = & \omega_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} b_0 & - & b_1 & + & b_2 & = & \omega_0 \\ & & b_1 & + & 2b_2a & = & \omega_1 \\ b_0 & + & b_1 & + & b_2 & = & \omega_2 \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que la solución será única si el determinante de la matriz de coeficientes no es nulo. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow 1 - 2a - 1 - 2a = -4a \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0$$

Por tanto, el problema tendrá solución única si $a \neq 0$. Para $a = 0$, tendrá infinitas soluciones si $\omega_1 = 0$; mientras que no existirá solución en caso contrario.

Ejercicio 1.3.5. Demuestre que el determinante de Vandermonde

$$V(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

verifica

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$$

y que por tanto $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0 \Longleftrightarrow x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Demostramos por inducción sobre n.

- Para $n = 1$:

$$V(x_0, x_1) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 = \prod_{1 \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$$

- Supuesto cierto para $n - 1$, demostramos para n:

$$V(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \overset{C_j' = C_j - x_0 C_{j-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} x_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} x_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \dots & x_1^n - x_1^{n-1} x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) = \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$$

Demostrándolo así para n. Por tanto,

$$V(x_0, \dots, x_n) \neq 0 \iff \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j) \neq 0 \iff x_i \neq x_j \qquad \forall i, j$$

Ejercicio 1.3.6. Al medir f en una serie de puntos x_i, se han obtenido los siguientes valores:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	0	1	8	26	64	125	216

1. Calcule la tabla de diferencias divididas.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f[x_i] & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
0 & \mathbf{0} & & & & & & \\
 & & \mathbf{1} & & & & & \\
1 & 1 & & \mathbf{3} & & & & \\
 & & 7 & & \mathbf{\frac{5}{6}} & & & \\
2 & 8 & & \frac{11}{2} & & \mathbf{\frac{1}{6}} & & \\
 & & 18 & & \frac{3}{2} & & -\mathbf{\frac{1}{12}} & \\
3 & 26 & & 10 & & -\frac{1}{4} & & \mathbf{\frac{1}{36}} \\
 & & 38 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{12} & \\
4 & 64 & & \frac{23}{2} & & \frac{1}{6} & & \\
 & & 61 & & \frac{7}{6} & & & \\
5 & 125 & & 15 & & & & \\
 & & 91 & & & & & \\
6 & 216 & & & & & &
\end{array}$$

2. Al medir f en el punto $x = 3$ se cometió un error, ya que el valor exacto era $f(3) = 27$ y se obtuvo 26. Estudie la propagación de dicho error en la tabla de diferencias divididas.

x_i	$f[x_i]$						
0	0						
		1					
1	1		3				
		7		**1**			
2	8		**6**		**0**		
		19		**1**		**0**	
3	**27**		**9**		**0**		**0**
		37		**1**		**0**	
4	64		**12**		**0**		
		61		**1**			
5	125		15				
		91					
6	216						

Como podemos ver, el error se propaga a lo largo de la tabla de diferencias, afectando a gran cantidad de diferencias divididas. Además, los errores son significativos, ya que se obtendría un polinomio de grado 3, mientras que el anterior sería de grado 6.

3. Supongamos que los valores f_i no son todos exactos sino que unos son más fiables que otros. Si se desea que los menos fiables intervengan en la obtención del menor número posible de coeficientes en la fórmula de Newton, ¿cómo hay que ordenar los cálculos?

   Hay que situar los datos (x_i, f_i) más fiables en la zona intermedia de la tabla de diferencias divididas, mientras que los menos fiables se debe situar en la parte superior o en la parte inferior, para afectar así al menor número posible de diferencias divididas.

Ejercicio 1.3.7. Utilice las propiedades de las diferencias divididas para determinar de qué grado es el polinomio p del que se conocen los siguientes valores:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
f_i	-5	1	1	1	7	25

Calculo la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$					
-2	**-5**					
		6				
-1	1		**-3**			
		0		**1**		
0	1		0		0	
		0		1		0
1	1		3		0	
		6		1		
2	7		6			
		18				
3	25					

Sabemos que el coeficiente líder de $p_n(x)$ es $f[x_0, \dots, x_n]$. Como tenemos que:

$$f[x_0, \dots, x_5] = f[x_0, \dots, x_4] = 0$$

Entonces, el coeficiente líder de $p_5(x)$ y el de $p_4(x)$ es el 0. Por tanto, el polinomio que interpola esos 6 puntos es de grado 3.

Ejercicio 1.3.8. Sea el polinomio de interpolación en forma de Newton

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x - (x+3)(x+2)(x+1) - 3(x+3)(x+2) + 17(x+3) - 26$$

Se desea obtener la tabla de valores que generó el polinomio anterior.

1. ¿Cuántos datos de interpolación tenía el problema?

   Como $p(x) \in \mathbb{P}_4(x)$, como mínimo había 5 datos. Podría haber más datos, pero todos ellos referidos al mismo polinomio, es decir, redundantes.

2. Recupere la tabla completa de diferencias divididas teniendo en cuenta que los nodos son equidistantes, esto es, $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, es constante.

   El término líder sabemos que es:

   $$f[x_0, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = (x+3)(x+2)(x+1)x$$

   Por tanto, tenemos que las abcisas de los cuatro primeros datos: $\{0, -1, -2, -3\}$.

   Para calcular la quinta abcisa, nos fijamos en cómo se ha dado el polinomio. Este tiene la forma de:

   $$p(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

   Nos fijamos por tanto monomio por monomio.

   - Del monomio de grado 0, -26 vemos que $f[x_0] = -26$

- Del monomio de grado 1, $17(x+3)$ vemos que $x_0 = -3$ y $f[x_0, x_1] = 17$
- Del monomio de grado 2, $-3(x+3)(x+2)$ vemos que $x_1 = -2$ y $f[x_0, x_1, x_2] = -3$
- Del monomio de grado 3, $-(x+3)(x+2)(x+1)$ vemos que $x_2 = -1$ y $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1$
- Del monomio de grado 4, $(x+3)(x+2)(x+1)x$ vemos que $x_3 = 0$ y $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$

Por tanto, como las abcisas son equidistantes,

$$1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_4 - 0 = x_4 \Longrightarrow x_4 = 1$$

Calculamos sus imágenes mediante el algoritmo de Newton-Horner:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+3)(x+2)(x+1)x - (x+3)(x+2)(x+1) - 3(x+3)(x+2) + 17(x+3) - 26 \\ &= -26 + (x+3)[17 + (x+2)[-3 + (x+1)[-1 + x]]] \end{aligned}$$

$$p(-3) = -26 \qquad p(-2) = -9 \qquad p(-1) = 2 \qquad p(0) = 1 \qquad p(1) = 6$$

Por tanto, sabemos:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f[x_i] & & & & \\
 & & & & & \\
-3 & \mathbf{-26} & & & & \\
 & & \mathbf{17} & & & \\
-2 & -9 & & \mathbf{-3} & & \\
 & & - & & \mathbf{-1} & \\
-1 & 2 & & - & & \mathbf{1} \\
 & & - & & - & \\
0 & 1 & & - & & \\
 & & - & & & \\
1 & 6 & & & &
\end{array}$$

Completamos, por tanto, la tabla de diferencias divididas.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f[x_i] & & & & \\
 & & & & & \\
-3 & \mathbf{-26} & & & & \\
 & & \mathbf{17} & & & \\
-2 & -9 & & \mathbf{-3} & & \\
 & & 11 & & \mathbf{-1} & \\
-1 & 2 & & -6 & & \mathbf{1} \\
 & & -1 & & 3 & \\
0 & 1 & & 3 & & \\
 & & 5 & & & \\
1 & 6 & & & &
\end{array}$$

Ejercicio 1.3.9. Usando aritmética de tres cifras por redondeo, calcule el polinomio de interpolación para los siguientes datos: $f(0{,}8) = 0{,}224$, $f'(0{,}8) = 2{,}17$, $f(1{,}0) = 0{,}658$, $f'(1{,}0) = 2{,}04$. Estime $f(0{,}9)$ en dicha aritmética, minimizando el error de redondeo.

x_i	0,8	1,0
f_i	0,224	0,658
f'_i	2,17	2,04

Calculo la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|cccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
& & & & \\
0{,}8 & \mathbf{0.224} & & & \\
& & \mathbf{2.17} & & \\
0{,}8 & 0{,}224 & & \mathbf{0} & \\
& & 2{,}17 & & \mathbf{-3{,}25} \\
1 & 0{,}658 & & -0{,}65 & \\
& & 2{,}04 & & \\
1 & 0{,}658 & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= 0{,}224 + 2{,}17(x-0{,}8) - 3{,}25(x-1)(x-0{,}8)^2 \\
&= 0{,}224 + (x-0{,}8)[2{,}17 - 3{,}25(x-1)(x-0{,}8)]
\end{aligned}$$

Para calcular $f(0{,}9)$ minimizando el error cometido, empleo el algoritmo de Newton-Horner.

$$\begin{aligned}
p_3(0{,}9) &= 0{,}224 + (0{,}9-0{,}8)[2{,}17 - 3{,}25(0{,}9-1)(0{,}9-0{,}8)] \\
&= 0{,}224 + (0{,}1)[2{,}17 - 3{,}25(-0{,}1)(0{,}1)] \\
&= 0{,}224 + (0{,}1)[2{,}17 - 3{,}25(-0{,}01)] \\
&= 0{,}224 + (0{,}1)[2{,}17 + 0{,}0325] \\
&= 0{,}224 + (0{,}1)[2{,}20] = 0{,}224 + 0{,}22 = 0{,}444
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.10. En este problema se trata de probar mediante interpolación la fórmula

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

que es válida para todo número natural $n \geq 0$.

1. Utilice las diferencias divididas para demostrar que la función $p(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ es un polinomio de grado 2 en la variable $n \geq 0$.

Calculo la tabla de diferencias divididas:

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & p(n) & & & \\
 & & & & \\
0 & \mathbf{0} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \\
1 & 1 & & \mathbf{\frac{1}{2}} & \\
 & & 2 & & \mathbf{0} \\
2 & 3 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 3 & & \\
3 & 6 & & & \\
 & & & & \\
\vdots & & & & \\
n-2 & \sum_{i=0}^{n-2} i & & & \\
 & & n-1 & & \\
n-1 & \sum_{i=0}^{n-1} i & & \frac{1}{2} & \\
 & & n & & \\
n & \sum_{i=0}^{n} i & & &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que $f[x_1, x_1, x_3, x_4] = 0 \ \forall x_i$ consecutivos.Por tanto, tan solo tres puntos son necesarios para interpolarlo, por lo que es de grado 2.

2. Utilizando la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación demuestre que

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Utilice un procedimiento análogo para calcular el valor de la suma

$$0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$$

Ejercicio 1.3.11. Consideremos la función $f(x) = \ln x$ y sea $p(x)$ el polinomio que la interpola en x_0 y x_1, con $0 < x_0 < x_1$.

1. Demuestre que el error cometido en cualquier punto del intervalo $[x_0, x_1]$ está acotado por:

$$|e(x)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2}$$

Sabemos que el error cometido en cualquier punto del intervalo $[x_0, x_1]$ viene dado por:

$$|e(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_1)(x - x_0) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} |(x - x_1)(x - x_0)| \qquad \xi \in [x_0.x_1]$$

Como $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, y $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+$ por pertenecer al dominio de f, entonces tenemos que:

$$Im\left(f''_{|[x_0,x_1]}\right) = [f''(x_0), f''(x_1)] = \left[-\frac{1}{x_0^2}, -\frac{1}{x_1^2} \right]$$

$$\Longrightarrow Im\left(\left|f''_{|[x_0,x_1]}\right|\right) = \left[\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_0^2} \right]$$

Calculamos también la imagen de $|h(x)| = |(x - x_1)(x - x_0)|$.

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_0) = x^2 - (x_1 + x_0)x + x_1x_0$$

$$h'(x) = 2x - (x_1 + x_0) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

Como $h''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow x = \frac{x_1+x_0}{2}$ es un mínimo relativo. Al ser una parábola, también es absoluto.

$$h(x_1) = 0 \qquad h(x_0) = 0$$

$$h\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right) = \frac{(x_1 + x_0)^2}{4} - \frac{(x_1 + x_0)^2}{2} + x_1x_0 = -\frac{(x_1 + x_0)^2}{4} + x_1x_0 =$$
$$= -\frac{x_1^2 + x_0^2 + 2x_1x_0 - 4x_1x_0}{4} = -\frac{x_1^2 + x_0^2 - 2x_1x_0}{4} = -\frac{(x_1 - x_0)^2}{4} < 0$$

Como la imagen del mínimo es negativa, tenemos,

$$Im\left(\left|h_{|[x_0,x_1]}\right|\right) = \left[0, \frac{(x_1 - x_0)^2}{4}\right]$$

Por tanto,

$$|e(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2!}\,|(x - x_1)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2x_0^2} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{4} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2}$$

2. Si tomamos $x_0 = 1$ ¿hasta donde podremos extender el intervalo asegurando un error menor que 10^{-4}? ¿Y si partimos de $x_0 = 100$?

   La acotación del error, siendo M la cota, es:

$$|e(x)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} = M$$

   Sabiendo el valor de x_0 y de la cota deseada, despejamos x_1:

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} = M \Longrightarrow \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{8}x_0} = \sqrt{M} \Longrightarrow x_1 = \sqrt{8M}x_0 + x_0$$

   Para $M = 10^{-4}$ y $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{50+\sqrt{2}}{50} \approx 1{,}02828$.
   Para $M = 10^{-4}$ y $x_0 = 100$, $x_1 \approx 102{,}8284$.

3. Se desea tabular $f(x) = \ln x$ para ser capaces de obtener (por interpolación lineal entre puntos adyacentes) cualquier valor de $f(x)$ con un error menor de 10^{-2}. Dar una expresión para los x_n a utilizar, indicando cuantos serán precisos para cubrir adecuadamente el intervalo $[1, 100]$.

   Sabiendo que, desde un extremo inferior del intervalo x_0, se puede extender con un error menor que M el intervalo hasta un extremo superior $x_1 = \sqrt{8M}x_0 + x_0$, definimos los siguientes valores:

$$M = 10^{-2} \qquad x_0 = 1$$

Por tanto, la expresión para los x_n es:

$$x_n = \sqrt{8M} x_{n-1} + x_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{5} x_{n-1} + x_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 1\right) x_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma, vamos construyendo intervalos adyacentes donde, en cada intervalo, el error relativo es menor que la cota establecida.

Además, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión geométrica. Por tanto, se tiene que:

$$x_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 1\right)^n x_0$$

Como se busca que x_n sea ≥ 100, tenemos:

$$x_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 1\right)^n x_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 1\right)^n \geq 100$$

Como $n \in \mathbb{N}$, probando obtenemos que el primer valor que lo cumple es $n = 19$, ya que:

$$x_{18} = 88{,}536 \qquad x_{19} = 113{,}578$$

Por tanto, se necesita un total de 20 puntos. De hecho, los puntos son:

n	x_n
0	1
1	1,282842712
2	1,645685425
3	2,111155554
4	2,708280518
5	3,474297926
6	4,456977775
7	5,717601458
8	7,334783364
9	9,409373386
10	12,07074608
11	15,48486864
12	19,86465089
13	25,48322263
14	32,69096644
15	41,93736806
16	53,79904699
17	69,01571537
18	88,53630751
19	113,5781569

Ejercicio 1.3.12. Estudie la unisolvencia del problema de interpolación consistente en hallar $P \in \mathbb{P}_3$ tal que verifica

$$\begin{aligned} p(x_1) &= y_1, \qquad & p''(x_1) &= z_1, \\ p(x_2) &= y_2, \qquad & p''(x_2) &= z_2, \end{aligned}$$

para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$, y cualesquiera valores $y_2, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Sea $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \qquad P''(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

Tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2 \\ 2a_2 + 6a_3x_1 = z_1 \\ 2a_2 + 6a_3x_2 = z_2 \end{array} \right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6x_1 \\ 2 & 6x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot 2 \cdot 6(x_2 - x_1) = 12(x_2 - x_1) \neq 0$$

Por tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenious, la solución es única.

Ejercicio 1.3.13. Aplique el algoritmo de Newton–Horner para aproximar $\sqrt{3}$ con los datos proporcionados por la función $f(x) = 3^x$ en los nodos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, yx_4 = 2$. Proporcione una cota del error cometido.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

La tabla de diferencias divididas queda:

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & f[x_i] & & & & \\
-2 & \mathbf{\frac{1}{9}} & & & & \\
 & & \mathbf{\frac{2}{9}} & & & \\
-1 & \frac{1}{3} & & \mathbf{\frac{2}{9}} & & \\
 & & \frac{2}{3} & & \mathbf{\frac{4}{27}} & \\
0 & 1 & & \frac{2}{3} & & \mathbf{\frac{2}{27}} \\
 & & 2 & & \frac{4}{9} & \\
1 & 3 & & 2 & & \\
 & & 6 & & & \\
2 & 9 & & & &
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9}(x+2) + \frac{2}{9}(x+2)(x+1) + \frac{4}{27}(x+2)(x+1)x + \frac{2}{27}(x+2)(x+1)x(x-1) \\ &= \frac{1}{9} + (x+2)\left[\frac{2}{9} + (x+1)\left[\frac{2}{9} + x\left[\frac{4}{27} + \frac{2}{27}(x-1)\right]\right]\right] \end{aligned}$$

Evaluando mediante el Algoritmo de Newton-Horner:

$$p_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{41}{24} \approx 1{,}708\overline{3} \approx \sqrt{3}$$

Para acotar el error cometido, sabemos que:

$$e(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Por tanto, como $n = 4$ y sustituyendo los nodos:

$$e(x) = \frac{3^\xi \ln^5(3)}{5!}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) \qquad \xi \in [-2, 2]$$

El error cometido por tanto, al aproximar en $x = \frac{1}{2}$ es:

$$e\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3^\xi \ln^5(3)}{5!} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = 3^\xi \ln^5(3) \cdot \frac{3}{2^8}$$

Además, como $\xi \in [-2, 2]$ y la exponencial es estrictamente creciente, tengo que $3^{-2} \leq 3^\xi \leq 3^2$. Por tanto,

$$e\left(\frac{1}{2}\right) = 3^\xi \ln^5(3) \cdot \frac{3}{2^8} \leq \ln^5(3) \cdot \frac{3^3}{2^8}$$

Ejercicio 1.3.14. Halle el polinomio $p \in \mathbb{P}_5$ que verifica

$$\begin{array}{ccc} p(-1) = 6, & p(0) = 2, & p(1) = 0, \\ p'(-1) = -13, & p'(0) = 0, & p'(1) = -5 \end{array}$$

Usamos el método de interpolación de Hermite:

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & p[x_i] & & & & & \\
 & & & & & & \\
-1 & \mathbf{6} & & & & & \\
 & & \mathbf{-13} & & & & \\
-1 & 6 & & \mathbf{9} & & & \\
 & & -4 & & \mathbf{-5} & & \\
0 & 2 & & 4 & & \mathbf{1} & \\
 & & 0 & & -3 & & \mathbf{0} \\
0 & 2 & & -2 & & 1 & \\
 & & -2 & & -1 & & \\
1 & 0 & & -3 & & & \\
 & & -5 & & & & \\
1 & 0 & & & & &
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio queda:

$$p(x) = 6 - 13(x+1) + 9(x+1)^2 - 5(x+1)^2 x + x^2(x+1)^2$$

Ejercicio 1.3.15. Se desea interpolar la función $f(x) = \ln x$ en los puntos de abcisas 1, 2 y 3 mediante un polinomio de grado adecuado.

x_i	1	2	3
f_i	$\ln 1 = 0$	$\ln 2$	$\ln 3$

1. Calcule el polinomio de interpolación utilizando las fórmulas de Lagrange y de Newton.

   Como se dan 3 nodos, $p_n(x) \in \mathbb{P}_2$.

   Empezamos por el método de Lagrange. Calculamos en primer lugar los polinomios básicos de Lagrange.

   $$\ell_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \qquad \ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \qquad \ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

   Por tanto, el polinomio de interpolación queda:

   $$p_n(x) = 0 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} + \ln 2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{-1} + \ln 3 \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

   Empleamos ahora el método de Newton. La tabla de diferencias divididas queda:

   $$\begin{array}{c|cccc}
x_i & f[x_i] & & \\
 & & & \\
1 & \mathbf{0} & & \\
 & & \ln \mathbf{2} & \\
2 & \ln 2 & & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ln\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) \\
 & & \ln\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) & \\
3 & \ln 3 & &
\end{array}$$

   Por tanto, el polinomio de interpolación queda:

   $$p_n(x) = 0 + \ln 2(x-1) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right)(x-1)(x-2)$$

2. Obtenga una cota lo más ajustada posible del error de interpolación en el intervalo $[1, 3]$

   Ya que $n = 2$, el error de interpolación viene dado por:

   $$|e(x)| = \frac{|f^{3)}(\xi)|}{(3)!} \left| \prod_{k=0}^{2} (x - x_k) \right| \qquad \xi \in [1, 3]$$

   Acoto en primer lugar la tercera derivada.

   $$f^{3)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad \forall x \in [1, 3]$$

   Como $f^{3)}(x)$ es continua y estrictamente decreciente en $[1, 3]$, tenemos que

   $$Im(f^{3)}_{|[1,3]}) = \left[\frac{2}{3^3}, 2\right] = Im(|f^{3)}_{|[1,3]}|)$$

Acoto ahora el producto $|h(x)| = |(x-1)(x-2)(x-3)| = |x^3-6x^2+11x-6|$.

$$h'(x) = \ 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Calculo las imágenes de los extremos del intervalo y de los extremo relativos.

$$h(1) = h(3) = 0$$

$$h\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \qquad h\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} = -h\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$$

Por tanto,

$$Im(|h|_{|[1,3]}) = \left[0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$$

Por tanto, tenemos que

$$|e(x)| = \frac{|f^{3)}(\xi)|}{(3)!}\left|\prod_{k=0}^{2}(x-x_k)\right| \leq \frac{2}{3!}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

siendo por tanto esa la cota.

Ejercicio 1.3.16. Dados los valores $f(1{,}00) = 0{,}1924$, $f(1{,}05) = 0{,}2414$, $f(1{,}10) = 0{,}2933$, $f(1{,}15) = 0{,}3492$

1. Calcule el polinomio de interpolación usando la fórmula de Newton utilizando aritmética de cuatro dígitos por redondeo.

   Calculo la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$			
1,00	**0.1924**			
		0.98		
1,05	0,2414		**0.58**	
		1,038		**1,467**
1,10	0,2933		0,8	
		1,118		
1,15	0,3492			

   Por tanto, el polinomio queda:

   $$p_3(x) = 0{,}1924 + (x-1{,}00)[0{,}98 + (x-1{,}05)[0{,}58 + 1{,}467(x-1{,}10)]]$$

2. Estime el valor de $f(1{,}09)$.

   Para minimizar los errores de redondeo, empleo el método de Newton-Horner:

   $$p_3(1{,}09) = 0{,}2827$$

3. Proporcione una acotación del error cometido en dicha estimación, sabiendo que los datos proceden de una función cuya derivada de orden 4, en valor absoluto, está acotada por 0,76. Explique todos los pasos a seguir.

   El error viene dado por:

$$|e(x)| = \frac{|f^{4)}(\xi)|}{4!}|(x-1)(x-1{,}05)(x-1{,}10)(x-1{,}15)| \leq$$
$$\leq \frac{0{,}76}{4!}|(x-1)(x-1{,}05)(x-1{,}10)(x-1{,}15)|$$

   Evaluando en $x = 1{,}09$ par calcular la cota del error cometido:

$$|e(1{,}09)| \leq \frac{0{,}76}{4!} \cdot 2{,}16 \cdot 10^{-6} = 6{,}84 \cdot 10^{-8}$$

   Como podemos ver, el error cometido ha sido muy bajo.

Ejercicio 1.3.17. Se consideran los datos de interpolación $f(0) = 0, f(\pi/2) = 1, f(\pi) = 0, f(3\pi/2) = -1, f(2\pi) = 0$.

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f_i	0	1	0	-1	0

1. Calcule el polinomio de interpolación usando la fórmula de Lagrange.

   Sabiendo que el polinomio de interpolación es:

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f_i\ell_i(x) = \ell_1(x) - \ell_3(x)$$

   Es decir, como $f_0 = f_2 = f_4 = 0$, no tenemos que calcular $\ell_0(x), \ell_2(x), \ell_4(x)$.

$$\ell_1(x) = \frac{x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)} = \frac{x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi)}{-\frac{3\pi^4}{8}}$$

$$\ell_3(x) = \frac{x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-2\pi)}{\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)} = \frac{x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-2\pi)}{-\frac{3\pi^4}{8}}$$

   Por tanto,

$$p_4(x) = \ell_1(x) - \ell_3(x) = \frac{x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi)}{-\frac{3\pi^4}{8}} - \frac{x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-2\pi)}{-\frac{3\pi^4}{8}} =$$
$$= \frac{-x(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi) + x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-2\pi)}{\frac{3\pi^4}{8}}$$

2. Usando el apartado anterior, estime el valor de $f(\pi/4)$.

$$p_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\pi)(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{2})(\frac{\pi}{4}-2\pi) + \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4}-\pi)(\frac{\pi}{4}-2\pi)}{\frac{3\pi^4}{8}} =$$
$$= \frac{-\frac{\pi}{4}(\frac{-3\pi}{4})(\frac{-5\pi}{4})(\frac{-7\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}(\frac{-\pi}{4})(\frac{-3\pi}{4})(\frac{-7\pi}{4})}{\frac{3\pi^4}{8}} = \frac{\frac{\pi^4}{4^4}(105-21)}{\frac{3\pi^4}{8}} = \frac{84 \cdot 8}{4^4 \cdot 3} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875$$

3. Sabiendo que el valor absoluto de la función y de sus derivadas sucesivas está acotado por 1, esto es, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, acote el error cometido en la estimación anterior, detallando todos los pasos que realice.

   Sabemos que:
$$|e(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_n) \right|$$

   Para $n = 4$, y sabiendo los nodos:
$$|e(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!} \left| x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)(x - 2\pi) \right|$$

   Como la derivada está acotada por 1,
$$|e(x)| \leq \frac{1}{5!} \left| x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)(x - 2\pi) \right|$$

   Evaluando en $x = \frac{\pi}{4}$, tenemos la cota del error cometido.
$$\left| e\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{4^5} \cdot 105 = \frac{7}{2^{13}}\pi^5 \approx 0{,}2615$$

Ejercicio 1.3.18. Aplique el algoritmo de Newton–Horner para aproximar $\sqrt{3}$ con los datos proporcionados por la función $f(x) = \sqrt{x}$ en los nodos $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$, y $x_3 = 5$. Proporcione una cota del error cometido.

x_i	1	2	4	5
f_i	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$

Calculo, en primer lugar, la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
1 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \sqrt{\mathbf{2}} - 1 & & \\
2 & \sqrt{2} & & \mathbf{\frac{4-3\sqrt{2}}{6}} & \\
 & & \frac{2-\sqrt{2}}{2} & & \mathbf{\frac{\sqrt{5}-5+2\sqrt{2}}{12}} \\
4 & 2 & & \frac{2\sqrt{5}-6+\sqrt{2}}{6} & \\
 & & \sqrt{5}-2 & & \\
5 & \sqrt{5} & & &
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$\begin{aligned}
p_4(x) &= 1 + (\sqrt{2} - 1)(x - 1) + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{6}(x - 1)(x - 2) + \frac{\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{2}}{12}(x - 1)(x - 2)(x - 4) \\
&= 1 + (x - 1)\left[\sqrt{2} - 1 + (x - 2)\left[\frac{4 - 3\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{2}}{12}(x - 4)\right]\right]
\end{aligned}$$

Evalúo en $x = 3$ mediante el algoritmo de Newton-Horner:

$$p_4(3) = 1{+}2\left[\sqrt{2}-1+\left[\frac{4-3\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{5}-5+2\sqrt{2}}{12}\right]\right] = 1{+}2\left[\sqrt{2}-1+\left[\frac{-\sqrt{5}+13-8\sqrt{2}}{12}\right]\right] =$$

$$= 1+2\left[\frac{-\sqrt{5}+1+4\sqrt{2}}{12}\right] = \frac{-\sqrt{5}+7+4\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}7368$$

Acotamos ahora el error cometido. Sabemos que:

$$|e(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_n)\right|$$

Para $n = 3$, y sabiendo los nodos:

$$|e(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\,|(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)| \qquad \xi \in [1,5]$$

Acotamos ahora la derivada de orden 4 de $\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \qquad f^{4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

Como $f^{4)}(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ pero $f^{4)}(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, tengo que $|f^{4)}(x)|$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$:

$$|f^{4)}(x)| \leq |f^{4)}(1)| = \frac{15}{16} \qquad \forall x \in [1,5]$$

Por tanto, tenemos que:

$$|e(x)| \leq \frac{\frac{15}{16}}{4!}\,|(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)| = \frac{5}{2^7}\,|(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)|$$

Evaluando en $x = 3$, tenemos la cota del error cometido.

$$|e\,(3)| \leq \frac{5}{2^7}\,|4| = \frac{5}{2^5} \approx 0{,}15625$$

Ejercicio 1.3.19. Se consideran los datos $f(-1) = f(1) = 0,\ f(0) = f(2) = 1.$

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	1	0	1

1. Estime el valor de $f(0{,}5)$ utilizando el algoritmo de Newton–Horner.

   Calculo, en primer lugar, la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
-1 & \mathbf{0} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \\
0 & 1 & & \mathbf{-1} & \\
 & & -1 & & \mathbf{\frac{2}{3}} \\
1 & 0 & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
2 & 1 & & &
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= (x+1) - x(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)x(x-1) \\ &= (x+1)\left[1 + x\left(-1 + \frac{2}{3}(x-1)\right)\right] \end{aligned}$$

Usando el algoritmo de Newton-Horner, tenemos:

$$p_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{3}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}$$

2. Estime el error cometido, sabiendo que $|f^{(k)}(x)| < 0{,}3$, para todo x, y para cualquier orden de derivación k.

   Acotamos ahora el error cometido. Sabemos que:

   $$|e(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_n) \right|$$

   Para $n = 3$, y sabiendo los nodos:

   $$|e(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \left|(x+1)x(x-1)(x-2)\right| \qquad \xi \in [-1, 2]$$

   Como tenemos que $|f^{(k)}(x)| < 0{,}3\ \forall x, k$, tenemos que:

   Por tanto, tenemos que:

   $$|e(x)| < \frac{0{,}3}{4!} \left|(x+1)x(x-1)(x-2)\right|$$

   Evaluando en $x = \frac{1}{2}$, tenemos la cota del error cometido.

   $$\left| e\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{0{,}3}{4!} \cdot \frac{3^2}{2^4} = \frac{3^2}{2^8 \cdot 5} \approx 0{,}00703$$

1.4. Interpolación mediante Funciones Splines

Ejercicio 1.4.1. Determine a, b y c para que la siguiente función sea un spline cúbico:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Hemos de comprobar que $s \in C^2[0,3]$.
Para que s sea continua, es necesario que:

$$\lim_{x\to 1^-} s(x) = \lim_{x\to 1^+} s(x) \Longrightarrow 1 = c$$

Para que $s \in \mathcal{C}^1[a,b]$, es necesario que $s'(x)$ sea continua:

$$s'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2a(x-1) + b & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} s'(x) = \lim_{x\to 1^+} s'(x) \Longrightarrow 3 = b$$

Para que $s \in \mathcal{C}^2[a,b]$, es necesario que $s''(x)$ sea continua:

$$s''(x) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3(x-1) + 2a & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} s'('x) = \lim_{x\to 1^+} s''(x) \Longrightarrow 6 = 2a \Longrightarrow a = 3$$

Por tanto, el spline cúbico es:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.2. Obtenga el spline lineal que interpola los siguientes datos:

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	0	2	3	2	4

El spline lineal es una función continua que une los puntos con rectas. Por tanto,

- $[-1,0]$: $p_0(x) = 2x$
- $[0,1]$: $p_1(x) = 2x$
- $[1,2]$: $p_2(x) = x + 1$
- $[2,3]$: $p_3(x) = -x + 5$
- $[3,4]$: $p_4(x) = 2x - 4$

Por tanto, tenemos que:

$$s(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 2x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ x+1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ -x+5 & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ 2x-4 & \text{si} \quad x \in [3,4] \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.3. Halle, si es posible, $s \in S_2(-1, 0, 3, 4)$ tal que:

$$-s(-1) = s(2) = s(4) = 1, \qquad s(0) = s(3) = 0$$

En primer lugar, interpolo mediante Newton en el intervalo $[0, 3]$, ya que también tengo el valor en $x = 2$. Por tanto,

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & [\mathbf{0}, \mathbf{3}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & \mathbf{0} & & & \\
 & & \mathbf{\frac{1}{2}} & & \\
2 & 1 & & -\mathbf{\frac{1}{2}} & \\
 & & -1 & & \\
3 & 0 & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que $p_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x(x-2)$. Por tanto,

$$p_1'(0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \qquad p_1'(3) = \frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{3}{2}$$

Interpolamos ahora los otros dos intervalos mediante el método de Hermite:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & [-\mathbf{1}, \mathbf{0}] & \\
x_i & f(x_i) & & \\
-1 & \mathbf{-1} & & \\
 & & \mathbf{1} & \\
0 & 0 & & \mathbf{\frac{1}{2}} \\
 & & \frac{3}{2} & \\
0 & 0 & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & [\mathbf{3}, \mathbf{4}] & \\
x_i & f(x_i) & & \\
3 & \mathbf{0} & & \\
 & & -\mathbf{\frac{3}{2}} & \\
3 & 0 & & \mathbf{\frac{5}{2}} \\
 & & 1 & \\
4 & 1 & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$s(x) = \begin{cases} -1 + (x+1) + \frac{1}{2}x(x+1) & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x(x-2) & \text{si} \quad x \in [0, 3] \\ -\frac{3}{2}(x-3) + \frac{5}{2}(x-3)^2 & \text{si} \quad x \in [3, 4] \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.4. Calcule el spline cuadrático que interpola los siguientes datos:

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-2	0	2	3	4

y tal que $s'(1) = 0$.

Sea el spline el siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [-1, 0[\\ p_1(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ p_2(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [1, 2[\\ p_3(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [2, 4] \end{cases}$$

Interpolo cada uno de los intervalos. Empiezo en los intervalos $[0,1[$ y $[1,2[$, ya que tengo el valor de $s'(1)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[0,1[} & \\
x_i & f(x_i) & & \\
0 & \mathbf{0} & & \\
 & & \mathbf{2} & \\
1 & 2 & & \mathbf{-2} \\
 & & 0 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
\qquad \Bigg\| \qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[1,2[} & \\
x_i & f(x_i) & & \\
1 & \mathbf{2} & & \\
 & & \mathbf{0} & \\
1 & 2 & & \mathbf{1} \\
 & & 1 & \\
2 & 3 & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$p_1(x) = 2x - 2x(x-1) \qquad p_2(x) = 2 + (x-1)^2$$

Como $s \in C^1[-1,4]$,

$$p_0'(0) = p_1'(0) = 2 - 2(0-1) - 0 = 4 \qquad p_2'(2) = p_3'(2) = 2(2-1) = 2$$

Sabiendo el valor de las derivadas, interpolo ahora mediante Hermite los dos polinomios que faltan.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[-1,0[} & \\
x_i & f(x_i) & & \\
-1 & \mathbf{-2} & & \\
 & & \mathbf{2} & \\
0 & 0 & & \mathbf{2} \\
 & & 4 & \\
0 & 0 & &
\end{array}
\qquad \Bigg\| \qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[2,4]} & \\
x_i & f(x_i) & & \\
2 & \mathbf{3} & & \\
 & & \mathbf{2} & \\
2 & 3 & & -\mathbf{\frac{3}{4}} \\
 & & \frac{1}{2} & \\
4 & 4 & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$p_0(x) = -2 + 2(x+1) + 2x(x+1) \qquad p_3(x) = 3 + 2(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2$$

En conclusión, tenemos que el spline pedido es:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = -2 + 2(x+1) + 2x(x+1) & \text{si} \quad x \in [-1,0[\\ p_1(x) = 2x - 2x(x-1) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ p_2(x) = 2 + (x-1)^2 & \text{si} \quad x \in [1,2[\\ p_3(x) = 3 + 2(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 & \text{si} \quad x \in [2,4] \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.5. Obtenga el spline cúbico $s(x)$ con nodos $-1, 0, 1$, que verifica:

$$s''(-1) = s''(1) = s(-1) = s(1) = 0, \qquad\qquad s(0) = 1$$

Tenemos que se trata de la interpolación de un spline cúbico natural. Resolvemos, por tanto, el sistema correspondiente.

$$h_0 = h_1 = 1 \qquad \Delta_0 = -\Delta_1 = 1$$

El sistema, por tanto, a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'(-1) \\ s'(0) \\ s'(1) \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} s'(-1) = -s'(1) = \frac{3}{2} \\ s'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & [\mathbf{-1,0}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-1 & \mathbf{0} & & & \\
 & & \mathbf{\frac{3}{2}} & & \\
-1 & 0 & & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \\
 & & 1 & & \mathbf{-\frac{1}{2}} \\
0 & 1 & & -1 & \\
 & & 0 & & \\
0 & 1 & & &
\end{array}
\qquad \Bigg\| \qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & [\mathbf{0,1}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{0} & & \\
0 & 1 & & \mathbf{-1} & \\
 & & -1 & & \mathbf{\frac{1}{2}} \\
1 & 0 & & -\frac{1}{2} & \\
 & & -\frac{3}{2} & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}$$

Por tanto, el spline queda:

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{3}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}x(x+1)^2 & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1 - x^2 + \frac{1}{2}(x-1)x^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \end{array} \right.$$

Ejercicio 1.4.6. Calcule el spline cúbico $s(x) \in S_3(1,2,3,4)$ natural que interpola los siguientes datos:

$$s(1) = 1, \qquad s(2) = 2, \qquad s(3) = -1, \qquad s(4) = 3.$$

Sea el spline el siguiente:

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{lll} p_0(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} & x \in [1,2] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} & x \in [2,3] \\ p_2(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} & x \in [3,4] \end{array} \right.$$

Aplicamos el sistema que se ha visto en clase para calcular los splines cúbicos. Tenemos que:

$$h_n = x_{n+1} - x_n \qquad h_0 = h_1 = h_2 = 1$$

$$\Delta_n = \frac{s(x_{n+1}) - s(x_n)}{h_n} \qquad \Delta_0 = 1 \quad \Delta_1 = -3 \quad \Delta_2 = 4$$

Sean las incógnitas del sistema $d_i = s'(x_i)$. El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_0 = s'(x_0) = \frac{38}{15} \\ d_1 = s'(x_1) = -\frac{31}{15} \\ d_2 = s'(x_2) = -\frac{4}{15} \\ d_3 = s'(x_3) = \frac{92}{15} \end{array} \right.$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[1,2]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
1 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \boldsymbol{\frac{38}{15}} & & \\
1 & 1 & & -\boldsymbol{\frac{23}{15}} & \\
 & & 1 & & -\boldsymbol{\frac{23}{15}} \\
2 & 2 & & -\frac{46}{15} & \\
 & & -\frac{31}{15} & & \\
2 & 2 & & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[2,3]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
2 & \mathbf{2} & & & \\
 & & -\boldsymbol{\frac{31}{15}} & & \\
2 & 2 & & -\boldsymbol{\frac{14}{15}} & \\
 & & -3 & & \boldsymbol{\frac{11}{3}} \\
3 & -1 & & \frac{41}{15} & \\
 & & -\frac{4}{15} & & \\
3 & -1 & & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[3,4]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
3 & \mathbf{-1} & & & \\
 & & -\boldsymbol{\frac{4}{15}} & & \\
3 & -1 & & \boldsymbol{\frac{64}{15}} & \\
 & & 4 & & -\boldsymbol{\frac{32}{15}} \\
4 & 3 & & \frac{32}{15} & \\
 & & \frac{92}{15} & & \\
4 & 3 & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el spline queda:

$$
s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{38}{15}(x-1) - \frac{23}{15}(x-1)^2 - \frac{23}{15}(x-1)^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 2 - \frac{31}{14}(x-2) - \frac{14}{15}(x-2)^2 + \frac{11}{3}(x-2)^2(x-3) & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ -1 - \frac{4}{15}(x-3) + \frac{64}{15}(x-3)^2 - \frac{32}{15}(x-3)^2(x-4) & \text{si} \quad x \in [3,4] \end{cases}
$$

Ejercicio 1.4.7. Calcule el spline cúbico $s(x) \in S_3(1,2,3,4)$ periódico que interpola los siguientes datos:

$$
s(1) = 1, \qquad s(2) = 2, \qquad s(3) = -1, \qquad s(4) = 1.
$$

Sea el spline el siguiente:

$$
s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ p_2(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [3,4] \end{cases}
$$

Aplicamos el sistema que se ha visto en clase para calcular los splines cúbicos. Tenemos que:

$$
h_n = x_{n+1} - x_n \qquad h_0 = h_1 = h_2 = 1
$$

$$
\Delta_n = \frac{s(x_{n+1}) - s(x_n)}{h_n} \qquad \Delta_0 = 1 \quad \Delta_1 = -3 \quad \Delta_2 = 2
$$

Sean las incógnitas del sistema $d_i = s'(x_i)$. El sistema a resolver, teniendo en cuenta que se trata de un spline periódico, es:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} d_0 = s'(x_0) = 3 \\ d_1 = s'(x_1) = -2 \\ d_2 = s'(x_2) = -1 \\ d_3 = s'(x_3) = 3 \end{cases}
$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & \mathbf{[1,2]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
1 & \mathbf{1} & & & & \\
 & & \mathbf{3} & & & \\
1 & 1 & & \mathbf{-2} & & \\
 & & 1 & & \mathbf{-1} & \\
2 & 2 & & -3 & & \\
 & & -2 & & & \\
2 & 2 & & & &
\end{array}
\Bigg\|
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & \mathbf{[2,3]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
2 & \mathbf{2} & & & & \\
 & & \mathbf{-2} & & & \\
2 & 2 & & \mathbf{-1} & & \\
 & & -3 & & \mathbf{3} & \\
3 & -1 & & 2 & & \\
 & & -1 & & & \\
3 & -1 & & & &
\end{array}
\Bigg\|
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & \mathbf{[3,4]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
3 & \mathbf{-1} & & & & \\
 & & \mathbf{-1} & & & \\
3 & -1 & & \mathbf{3} & & \\
 & & 2 & & \mathbf{-2} & \\
4 & 1 & & 1 & & \\
 & & 3 & & & \\
4 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el spline queda:

$$
s(x) = \begin{cases}
1 + 3(x-1) - 2(x-1)^2 - (x-1)^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [1,2] \\
2 - 2(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^2(x-3) & \text{si} \quad x \in [2,3] \\
-1 - (x-3) + 3(x-3)^2 - 2(x-3)^2(x-4) & \text{si} \quad x \in [3,4]
\end{cases}
$$

Ejercicio 1.4.8. Obtenga el spline $s(x) \in S_3^1(-1,0,2)$[1] que interpola:

$$
\begin{array}{ccc}
s(-1) = -6 & s(0) = -3 & s(2) = 33 \\
s'(-1) = 9 & s'(0) = 0 & s'(2) = 48
\end{array}
$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & \mathbf{[-1,0]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
-1 & \mathbf{-6} & & & & \\
 & & \mathbf{9} & & & \\
-1 & -6 & & \mathbf{-6} & & \\
 & & 3 & & \mathbf{3} & \\
0 & -3 & & -3 & & \\
 & & 0 & & & \\
0 & -3 & & & &
\end{array}
\Bigg\|
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & \mathbf{[0,2]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
0 & \mathbf{-3} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & \\
0 & -3 & & \mathbf{9} & & \\
 & & 18 & & \mathbf{3} & \\
2 & 33 & & 15 & & \\
 & & 48 & & & \\
2 & 33 & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el spline queda:

$$
s(x) = \begin{cases}
-6 + 9(x+1) - 6(x+1)^2 + 3(x+1)^2 x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\
-3 + 9x^2 + 3x^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [0,2]
\end{cases}
$$

Ejercicio 1.4.9. Deduzca el spline cúbico $s(x) \in S_3(-1,0,1,3)$ que interpola los siguientes datos:

$$
s(-1) = -2, \quad s'(-1) = 2, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \quad s(1) = 2, \quad s(3) = 30.
$$

[1] S_3^1 denota los spline cúbicos de clase 1.

Como el spline es cúbico y hay 4 nodos, sea el spline el siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [1, 3] \end{cases}$$

Como en este caso no dan información sobre el tipo del spline calculado, aplicamos el método general mediante Hermite. Ya que tenemos el valor de $s'(-1)$ y de $s'(0)$, trabajamos en el intervalo $[-1, 0]$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{-1, 0}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
-1 & \mathbf{-2} & & & & \\
 & & \mathbf{2} & & & \\
-1 & -2 & & \mathbf{0} & & \\
 & & 2 & & \mathbf{-2} & \\
0 & 0 & & -2 & & \\
 & & 0 & & & \\
0 & 0 & & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que $p_0(x) = -2 + 2(x + 1) - 2x(x + 1)^2$.

$$p_0'(x) = 2 - 2(x + 1)^2 - 4x(x + 1) \qquad p_0''(x) = -4(x + 1) - 4(x + 1) - 4x = -12x - 8$$

Para interpolar en el intervalo $[0, 1]$, hago uso del resultado teórico de que:

$$f[\overbrace{x_0, \dots, x_0}^{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Por tanto:

$$s[0, 0] = s'(0) = 0 \qquad s[0, 0, 0] = \frac{s''(0)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{0, 1}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
0 & \mathbf{0} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & \\
0 & 0 & & \mathbf{-4} & & \\
 & & 0 & & \mathbf{6} & \\
0 & 0 & & 2 & & \\
 & & 2 & & & \\
1 & 2 & & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que $p_1(x) = -4x^2 + 6x^3$.

$$p_1'(x) = -8x + 18x^2 \qquad p_1''(x) = -8 + 36x$$

Para interpolar en el intervalo $[1, 3]$, uso que:

$$s[1, 1] = s'(1) = 10 \qquad s[1, 1, 1] = \frac{s''(1)}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{1}, \mathbf{3}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
1 & \mathbf{2} & & & & \\
 & & \mathbf{10} & & & \\
1 & 2 & & \mathbf{14} & & \\
 & & 10 & & \mathbf{-6} & \\
1 & 2 & & 2 & & \\
 & & 14 & & & \\
3 & 30 & & & &
\end{array}$$

Por tanto, tengo que $p_2(x) = 2 + 10(x - 1) + 10(x - 1)^2 - 6(x - 1)^3$.

Por tanto, tenemos que el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = -2 + 2(x + 1) - 2x(x + 1)^2 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1(x) = -4x^2 + 6x^3 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2(x) = 2 + 10(x - 1) + 14(x - 1)^2 - 6(x - 1)^3 & \text{si} \quad x \in [1, 3] \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.10. Calcule la expresión del spline cúbico de clase uno que interpola los siguientes datos.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	0	1	1
f'_i	0	0	0	0

Dibuje su gráfica.

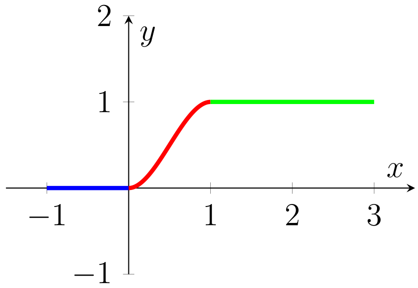
En primer lugar, interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{-1}, \mathbf{0}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
-1 & \mathbf{0} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & \\
-1 & 0 & & \mathbf{0} & & \\
 & & 0 & & \mathbf{0} & \\
0 & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & & & \\
0 & 0 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{0}, \mathbf{1}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
0 & \mathbf{0} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & \\
0 & 0 & & \mathbf{1} & & \\
 & & 1 & & \mathbf{-2} & \\
1 & 1 & & -1 & & \\
 & & 0 & & & \\
1 & 1 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
 & & & [\mathbf{1}, \mathbf{2}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & & \\
1 & \mathbf{1} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & \\
1 & 1 & & \mathbf{0} & & \\
 & & 0 & & \mathbf{0} & \\
2 & 1 & & 0 & & \\
 & & 0 & & & \\
2 & 1 & & & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 0 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1(x) = x^2 - 2x^2(x - 1) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2(x) = 1 & \text{si} \quad x \in [1, 3] \end{cases}$$

Dibujo ahora la función, donde el intervalo $[0, 1]$ es así ya que sé que el spline es de clase 1.



Ejercicio 1.4.11. Halla el spline cúbico $s(x)$ de extremo sujeto que interpola los datos $s(0) = 8$, $s(2) = 0$, $s(4) = 8$ y satisface las dos condiciones adicionales $s'(0) = -12$, $s'(4) = 12$.

Resolvemos empleando el sistema visto en clase.

$$h_0 = h_1 = 2 \qquad \Delta_0 = \frac{0-8}{2} = -4 \qquad \Delta_1 = \frac{8-0}{2} = 4$$

Teniendo en cuenta que se trata de un spline ligado, tenemos que el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'(0) \\ s'(2) \\ s'(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} s'(0) = -12 \\ s'(2) = 0 \\ s'(4) = 12 \end{cases}$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

[0, 2]

x_i	$f(x_i)$			
0	**8**			
		−12		
0	8		**4**	
		−4		**−1**
2	0		2	
		0		
2	0			

[2, 4]

x_i	$f(x_i)$			
2	**0**			
		0		
2	0		**2**	
		4		**1**
4	8		4	
		12		
4	8			

Por tanto, el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} 8 - 12x + 4x^2 - x^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 2(x-2)^2 + (x-2)^2(x-4) & \text{si} \quad x \in [2, 4] \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.12. Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Todo polinomio de grado menor o igual que tres es un spline cúbico natural para el conjunto de nodos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$".

Sea el polinomio $p(x) = x^3 \in \mathbb{P}_3[x]$. Tenemos que:

$$p'(x) = 3x^2 \qquad p''(x) = 6x$$

Por tanto, como $p''(x) = 0 \iff x = 0$, tenemos que no es posible que sea un spline natural ya que

$$p''(a) = p''(b) = 0 \iff a = b = 0$$

No obstante, tenemos que $a \neq b$, por lo que llegamos a una contradicción y tenemos que $p(x) = x^3$ no es un spline natural, por lo que el enunciado es **falso**.

No obstante, sí sabemos que todo $p \in \mathbb{P}_n$ es un spline de grado n.

Ejercicio 1.4.13. ¿Cuál es el spline cúbico que interpola los datos

x_i	-2	-1	1	2
f_i	2	1	5	10

y satisface las condiciones adicionales $s(0) = s'(0) = 2$? Justifique su respuesta.

Como el spline es cúbico y hay 4 nodos, sea el spline el siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ p_2(x) \in \mathbb{P}_3 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

Ya que las condiciones adicionales están en el intervalo $[-1, 1]$, interpolo en dicho intervalo en primer lugar.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[-1,1]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-1 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \\
0 & 2 & & \mathbf{1} & \\
 & & 2 & & \mathbf{0} \\
0 & 2 & & 1 & \\
 & & 3 & & \\
1 & 5 & & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$p_1(x) = 1 + (x + 1) + x(x + 1) = 2 + 2x + x^2$$

$$p_1'(x) = 2 + 2x \qquad p_1''(x) = 2$$

Por tanto, como $s \in \mathcal{C}^2[-2, 2]$, tengo que:

$$s'(-1) = 0 \qquad s'(1) = 4 \qquad s''(-1) = 2 \qquad s''(1) = 2$$

Tenemos el resultado teórico de que:

$$f[\overbrace{x_0, \dots, x_0}^{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Por tanto,

$$s[-1, -1, -1] = 1 \qquad s[1, 1, 1] = 1$$

interpolo mediante Hermite en los otros intervalos:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & [\mathbf{-2},\mathbf{-1}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-2 & \mathbf{2} & & & \\
 & & \mathbf{-1} & & \\
-1 & 1 & & \mathbf{1} & \\
 & & 0 & & \mathbf{0} \\
-1 & 1 & & 1 & \\
 & & 0 & & \\
-1 & 1 & & &
\end{array}
\qquad\Bigg\|\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & [\mathbf{1},\mathbf{2}] & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
1 & \mathbf{5} & & & \\
 & & \mathbf{4} & & \\
1 & 5 & & \mathbf{1} & \\
 & & 4 & & \mathbf{0} \\
1 & 5 & & 1 & \\
 & & 5 & & \\
2 & 10 & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el spline pedido es:

$$
s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 2 - (x+1) + (x+2)(x+1) & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ p_1(x) = 1 + 2x + x^2 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ p_2(x) = 5 + 4(x-1) + (x-1)^2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}
$$

De hecho, tenemos que $s(x) = (x+1)^2 + 1 \qquad \forall x \in [-2,2]$.

Ejercicio 1.4.14. Para cierta función $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ se obtiene la tabla de datos

x_i	-2	-1	1
f_i	4	3	5

1. Calcule el spline cuadrático $s(x)$ que interpola tales datos y, además, satisface la condición $s(0) = 3$.

   Sea el spline:
   $$
   s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \end{cases}
   $$

   Interpolamos en primer lugar en el intervalo $[-1,1]$, ya que se da la condición adicional de que $s(0) = 3$.

   $$
   \begin{array}{c|ccc}
    & & [\mathbf{-1},\mathbf{1}] & \\
   x_i & f(x_i) & & \\
   -1 & \mathbf{3} & & \\
    & & \mathbf{0} & \\
   0 & 3 & & \mathbf{1} \\
    & & 2 & \\
   1 & 5 & &
   \end{array}
   $$

   Por tanto, tenemos que $p_1(x) = 3 + x(x+1) = x^2 + x + 3$. Como $s \in C^1[-2,1]$, tenemos que $s'(-1) = -1$.

$$\begin{array}{c|cc}
 & & [\mathbf{-2}, \mathbf{-1}] & \\
x_i & f(x_i) & & \\
-2 & \mathbf{4} & & \\
 & & \mathbf{-1} & \\
-1 & 3 & & \mathbf{0} \\
 & & -1 & \\
-1 & 3 & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos $p_0(x) = 4 - (x+2) = -x + 2$. Por tanto,

$$s(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x \in [-2,-1] \\ x^2+x+3 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \end{cases}$$

2. A partir de lo obtenido en el apartado anterior, halle una aproximación de $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx \approx \int_{-2}^{-1} s(x)dx + \int_{-1}^{0} s(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} =$$
$$= -\frac{1}{2} - 2 + \frac{4}{2} + 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{19}{3}$$

Ejercicio 1.4.15. Se considera la función:

$$s(x) = \begin{cases} -3x^2+9x-7 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ p(x) & \text{si} \quad x \in [1,3] \\ -x^3+12x^2-42x+46 & \text{si} \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

1. Determine $p(x)$ para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.

   Por el carácter local de la derivabilidad, y sabiendo que al ser $s \in \mathcal{C}^2[-1,5]$, tengo:

$$s'(x) = \begin{cases} -6x+9 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ p'(x) & \text{si} \quad x \in [1,3] \\ -3x^2+24x-42 & \text{si} \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ p''(x) & \text{si} \quad x \in [1,3] \\ -6x+24 & \text{si} \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

   Por tanto, tengo que:

$$s(1) = -1 \qquad s(3) = 1 \qquad s'(1) = 3 \qquad s'(3) = 3 \qquad s''(1) = -6 \qquad s''(3) = 6$$

   Cabe destacar que para calcular p son solo necesarias 4 condiciones. Por tanto, elijo las 4 primeras.

Por tanto, interpolando mediante Hermite:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & [\mathbf{1},\mathbf{3}] & & & \\
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
1 & \mathbf{-1} & & & & & & \\
 & & \mathbf{3} & & & & & \\
1 & -1 & & \mathbf{-1} & & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{1} & & & \\
3 & 1 & & 1 & & & & \\
 & & 3 & & & & & \\
3 & 1 & & & & & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$p(x) = -1 + 3(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^2(x-3)$$

2. ¿Puede ser $s(x)$ un spline cúbico natural? Justifique tu respuesta.

   No, ya que si fuese natural tendría que cumplirse que $s''(-1) = s''(5) = 0$. No obstante, $s''(-1) = -6$.

3. ¿Cuánto valen $s'(0)$ y $s''(2)$?

   Tengo que $s'(0) = 9$. Calculamos ahora $s''(2) = p''(2)$:

   $p'(x) = 3-2(x-1)+2(x-1)(x-3)+(x-1)^2 \qquad p''(x) = -2+2(x-3)+2(x-1)+2(x-1)$

   Por tanto, $p''(2) = s''(2) = -2 + 2(-1) + 2 + 2 = 0$.

Ejercicio 1.4.16. Se considera la siguiente tabla de datos

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	1
f_i'	1	0	2	1

1. Calcule el spline cúbico de clase uno $s(x)$ que interpola los datos de la tabla anterior.

   Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & & [-\mathbf{1},\mathbf{0}] & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-1 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \\
-1 & 1 & & \mathbf{-1} & \\
 & & 0 & & \mathbf{1} \\
0 & 1 & & 0 & \\
 & & 0 & & \\
0 & 1 & & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & & & [\mathbf{0},\mathbf{1}] & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{0} & & \\
0 & 1 & & \mathbf{0} & \\
 & & 0 & & \mathbf{2} \\
1 & 1 & & 2 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 1 & & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{c|cccc}
 & & & [\mathbf{1},\mathbf{2}] & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
1 & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{2} & & \\
1 & 1 & & \mathbf{-2} & \\
 & & 0 & & \mathbf{3} \\
2 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
2 & 1 & & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = 1 + (x+1) - (x+1)^2 + x(x+1)^2 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1(x) = 1 + 2x^2(x-1) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2(x) = 1 + 2(x-1) - 2(x-1)^2 + 3(x-1)^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

2. ¿Es $s(x)$ un spline cúbico periódico? Justifique su respuesta.

   Tengo que $s(-1) = 1 = s(2)$. Veamos ahora el caso de la primera derivada. Por el carácter local de la derivabilidad,

$$s'(x) = \begin{cases} p_0'(x) = 1 - 2(x+1) + (x+1)^2 + 2x(x+1) & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1'(x) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2'(x) = 2 - 4(x-1) + 6(x-1)(x-2) + 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Tenemos que $s'(-1) = 1 = s'(2)$. Comprobemos ahora la segunda derivada. Por el carácter local de la derivabilidad,

$$s''(x) = \begin{cases} p_0''(x) = -2 + 2(x+1) + 2(x+1) + 2x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1''(x) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2''(x) = -4 + 6(x-2) + 6(x-1) + 6(x-1) & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Tenemos que $s''(-1) = -4$, pero $s''(2) = 8$. Por tanto, como $s''(-1) \neq s''(2)$, no se trata de un spline periódico.

Ejercicio 1.4.17. Se considera la siguiente tabla de valores de una cierta función f.

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	3	-1	4

1. Calcule un spline cuadrático $s(x)$ que interpole los datos de la tabla.

   Sea el spline:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ p_1(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ p_2(x) \in \mathbb{P}_2 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Como no se aportan condiciones adicionales, establezo p_1 como la recta que une los puntos de abcisas $x = 0, 1$. Es decir,

$$p_1(x) = -4x + 3$$

   Por tanto, como $s \in C^1[-1, 2]$, tengo que:

$$s'(0) = s'(1) = -4$$

   Por tanto, interpolo en los dos intervalos mediante Hermite:

$$\begin{array}{c|cccc||c|cccc} & & \mathbf{[-1,0]} & & & & & \mathbf{[1,2]} & & \\ x_i & f(x_i) & & & & x_i & f(x_i) & & & \\ -1 & \mathbf{2} & & & & 1 & \mathbf{-1} & & & \\ & & \mathbf{1} & & & & & \mathbf{-4} & & \\ 0 & 3 & & \mathbf{-5} & & 1 & -1 & & \mathbf{9} & \\ & & -4 & & & & & 5 & & \\ 0 & 3 & & & & 2 & 4 & & & \end{array}$$

Por tanto, tenemos:

$$p_0(x) = 2 + (x+1) - 5x(x+1) = -5x^2 - 4x + 3$$
$$p_1(x) = -1 - 4(x-1) + 9(x-1)^2 = 9x^2 - 22x + 12$$

Por tanto, el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} -5x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ -4x + 3 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ 9x^2 - 22x + 12 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

2. Utilice el spline obtenido para estimar los valores de $f(-0{,}5)$, $f'(0{,}5)$ y $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   Obtenemos que:

$$f(-0{,}5) \approx s(-0{,}5) = \frac{15}{4} \qquad f'(0{,}5) \approx s'(0{,}5) - 4$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx \approx \int_{-1}^{0} s(x) + \int_{0}^{1} s(x) + \int_{1}^{2} s(x) = \left[\frac{-5x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{0} + \left[-2x^2 + 3x\right]_0^1 + \\ + \left[3x^3 - 11x^2 + 12x\right]_1^2 = \frac{13}{3}$$

Ejercicio 1.4.18. Sea la función

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ x^3 - 3x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

Selecciona la opción correcta:

1. $s(x)$ es un spline cúbico de clase 1.
2. $s(x)$ es un spline cúbico de clase 2.
3. $s(x)$ es un spline cúbico natural.

   Por el carácter local de la derivabilidad:

$$s'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + 4 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 3x^2 - 6x + 4 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} 6x + 6 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 6x - 6 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

   Tenemos que s es continua en $x = 0$. Además, s' también es continua en $x = 0$, por lo que $s \in \mathcal{C}^1[-1, 1]$.

   No obstante, s'' no es continua en $x = 0$, por lo que $s \notin \mathcal{C}^2[-1, 1]$.

   Por último, tenemos que $s''(-1) = s''(1) = 0$, por lo que sí es un spline natural (de clase 1).

   Por tanto, las opciones correctas son la opción 1 y 3.

Ejercicio 1.4.19. Sea la función

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - 12x^2 + 20x & \text{si} \quad x \in [-2, 0] \\ 7x^3 - 12x^2 + 20x & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ -x^3 + 12x^2 - 4x + 8 & \text{si} \quad x \in [1, 4] \end{cases}$$

Selecciona la opción correcta:

1. $s(x)$ es un spline cúbico.
2. $s(x)$ es un spline cúbico natural.
3. $s(x)$ es un spline cúbico periódico.

Por el carácter local de la derivabilidad, tenemos que:

$$s'(x) = \begin{cases} -6x^2 - 24x + 20 & \text{si} \quad x \in [-2, 0] \\ 21x^2 - 24x + 20 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ -3x^2 + 24x - 4 & \text{si} \quad x \in [1, 4] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} -12x - 24 & \text{si} \quad x \in [-2, 0] \\ 42x - 24 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ -6x + 24 & \text{si} \quad x \in [1, 4] \end{cases}$$

Veamos en primer lugar si se trata de un spline cúbico. Por el caracter local de la continuidad, como $s(0^+) = s(0^-)$ y $s(1^+) = s(1^-)$, tenemos que s es continua en todo su dominio. Análogamente, tenemos que la primera derivada y la segunda derivada son también continuas, por lo que tenemos que $s \in C^2[-2, 4]$. Por tanto, sí se trata de un spline cúbico.

Como tenemos que $s''(-2) = 0 = s''(4)$, tenemos que es un spline cúbico natural.

Además, como $s'(-2) = 44 = s'(4)$, tenemos que también es un spline periódico. No obstante, no va a ser útil para interpolar funciones periódicas, ya que $s(-2) = \;-\; 72 \neq 120 = s(4)$.

Por tanto, tenemos que **las tres opciones son correctas**.

1.5. Aproximación

Ejercicio 1.5.1. Calcule la recta que mejor aproxima por mínimos cuadrados discretos los datos $(-1,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,2)$.

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	2

Tenemos que $\mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1,x\}$. Por tanto, sea la recta buscada $L \equiv a_0 + a_1 x = 0$. El producto escalar discreto empleado es:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)g(x_i)$$

Calculo los productos escalares:

$$\langle 1,1\rangle = 5 \qquad \langle 1,x\rangle = 5 \qquad \langle x,x\rangle = 15$$
$$\langle f,1\rangle = \frac{11}{2} \qquad \langle f,x\rangle = 11$$

Por tanto, el sistema a resolver, con la matriz de Gramm como matriz de coeficientes, es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 11 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{11}{20} = 0{,}55 \\ a_1 = \frac{11}{20} = 0{,}55 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que la recta buscada mejor aproximación por mínimos cuadrados discretos de dichos datos es:

$$L \equiv \frac{11}{20} + \frac{11}{20}x = 0$$

Ejercicio 1.5.2. El dueño de un negocio en expansión observa que en los cinco primeros meses del año las ventas han sido de 40, 44, 52, 64 y 80 miles de euros, respectivamente.

1. Calcular la parábola de mínimos cuadrados $v(x) = a + bx + cx^2$ ($x =$ meses, $v(x) =$ ventas), resolviendo el sistema por el método de Gauss.

x_i	1	2	3	4	5
$v(x_i)$	40	44	52	64	80

Buscamos la mejor aproximación de dichos datos en $\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\{1,x,x^2\}$

El producto escalar discreto empleado es:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)g(x_i)$$

Calculo los productos escalares:

$$\langle 1,1\rangle = 5 \qquad \langle 1,x\rangle = 15 \qquad \langle 1,x^2\rangle = 55$$
$$\langle x,x^2\rangle = 225 \qquad \langle x,x\rangle = 55 \qquad \langle x^2,x^2\rangle = 979$$
$$\langle f,1\rangle = 280 \qquad \langle f,x\rangle = 940 \qquad \langle f,x^2\rangle = 3708$$

Por tanto, el sistema a resolver, con la matriz de Gramm como matriz de coeficientes, es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 940 \\ 3708 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 40 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto, parábola v buscada es:

$$v(x) = 40 - 2x + 2x^2$$

2. Estime, según el modelo de ajuste anterior, las ventas que habrá a finales de año.

   Tenemos que las ventas en el último mes son de:

$$v(12) = 304 \text{ miles de euros.}$$

Ejercicio 1.5.3. Sea la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq c \\ 2 & x > c \end{array} \right.$$

Sabemos que la recta que mejor aproxima a $f(x)$ por mínimos cuadrados continuos en el intervalo $[0, 3]$ es $p(x) = \dfrac{8}{9}x$. Calcule c.

Al ser la aproximación por mínimos cuadrados continua en el intervalo $[0, 3]$, tomamos el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^3 f(x)g(x)\, dx$$

Buscamos la mejor aproximación en $\mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1, x\}$. Calculamos los productos escalares:

$$\langle 1, 1 \rangle = 3 \qquad \langle 1, x \rangle = \frac{9}{2} \qquad \langle x, x \rangle = 9$$

$$\langle f, 1 \rangle = \int_c^3 2\, dx = 2(3 - c) \qquad \langle f, x \rangle = \int_c^3 2x\, dx = 9 - c^2$$

Por tanto, la mejor aproximación es $p(x) = a_0 + a_1 x \in \mathbb{P}_1$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9/2 \\ 9/2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3 - c) \\ 9 - c^3 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que la mejor aproximación es $p(x) = \frac{8}{9}x$, tenemos que $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{8}{9}$. Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{8}{9} = 6 - 2c \Longrightarrow 4 = 6 - 2c \\ \\ 9 \cdot \dfrac{8}{9} = 9 - c^3 \Longrightarrow 8 = 9 - c^3 \end{array} \right.$$

Por tanto, de ambas ecuaciones deducimos que $c = 1$.

Ejercicio 1.5.4. Sea $\omega :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$\omega(x) = 1 - x^2$$

1. Demuestre que la función $\omega(x) = 1 - x^2$ es una función peso en el intervalo $]-1,1[$.

   Tenemos que es integrable, ya que es una función continua con un dominio cerrado y acotado, por lo que su imagen es cerrada y acotada.

   Además, veamos que se cumple lo siguiente:

$$\omega(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 1 \geq x^2 \Longleftrightarrow 1 \geq |x| \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

2. Utilizando el algoritmo de Gram–Schmidt, calcule una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$ asociada al producto escalar continuo correspondiente a la función peso ω en el intervalo $]-1,1[$.

   Tenemos que el producto escalar continuo es:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x) g(x)\, dx$$

   Tenemos que una base de $\mathbb{P}_2$ es $\mathcal{B}_u = \{1, x, x^2\}$ y sea la base ortogonal $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_3\}$. Partimos desde $e_1 = 1$.

$$e_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) x\, dx = 0 \Longrightarrow x \perp 1$$

   Por tanto, $e_2 = x$. Calculamos ahora e_3.

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) x^2\, dx = \frac{4}{15} \qquad \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \frac{4}{3}$$

$$\langle x^2, x\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) x^3 = 0$$

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} e_1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} e_2 = x^2 - \frac{3}{15}$$

   Por tanto, tenemos que la base ortogonal de Gram-Schmidt es:

$$\mathcal{B}_o = \left\{1, x, x^2 - \frac{3}{15}\right\}$$

3. Utilizando el apartado anterior, obtenga el polinomio de grado no mayor que 2 mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = |x|$, con el producto escalar continuo correspondiente a la función peso ω en el intervalo

$]-1,1[$.

Supongamos que la mejor aproximación es $p_2(x) \in \mathbb{P}_2$ de la forma $p_2(x) \equiv (a,b,c)_{\mathcal{B}_o} = a + bx + c\left(x^2 - \frac{3}{15}\right)$.
Calculamos, en primer lugar, los siguientes productos escalares:

$$\langle f, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)|x|\ dx = 2\cdot \int_0^1 x(1-x^2)\ dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)x|x|\ dx = 0$$

$$\left\langle f, x^2 - \frac{3}{15}\right\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left(x^2 - \frac{3}{15}\right)|x|\ dx = 2\cdot \int_0^1 x^3(1-x^2)\ dx = \frac{1}{15}$$

Calculo además el cuadrado de cada elemento de la base ortogonal:

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\ dx = \frac{4}{3} \qquad \langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\ dx = \frac{4}{15}$$

$$\left\langle x^2 - \frac{3}{15}, x^2 - \frac{3}{15}\right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{3}{15}\right)^2 (1-x^2)\ dx = \frac{32}{525}$$

Por tanto, al haber elegido una base ortogonal, tenemos que:

$$a = \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{1/2}{4/3} = \frac{3}{8} \qquad b = \frac{\langle f,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = 0 \qquad c = \frac{\left\langle f, x^2 - \frac{3}{15}\right\rangle}{\left\langle x^2 - \frac{3}{15}, x^2 - \frac{3}{15}\right\rangle} = \frac{1/15}{32/525} = \frac{35}{32}$$

Por tanto, tenemos que el polinomio buscado es:

$$p_2(x) = \frac{3}{8} + \frac{35}{32}\left(x^2 - \frac{3}{15}\right)$$

Ejercicio 1.5.5. Determinar la recta que más se aproxima a la curva $f(x) = e^x$ según:

1. El método de mínimos cuadrados discreto en los puntos:

$$-1 \qquad -0{,}5 \qquad 0 \qquad 0{,}5 \qquad 1$$

Tenemos los siguientes nodos con sus respectivas imágenes:

x_i	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
e^{x_i}	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	1	$\sqrt{e}$	e

Tomamos como base de $\mathbb{P}_1$ $\mathcal{B} = \{1\}$. Sea por tanto la recta $r(x) = a_1 + a_2 x$.
El producto escalar discreto empleado es:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)g(x_i)$$

Calculo los productos escalares:

$$\langle 1,1\rangle = 5 \qquad \langle 1,x\rangle = 0 \qquad \langle x,x\rangle = \frac{5}{2}$$
$$\langle f,1\rangle = \frac{e^2+(e+1)(\sqrt{e}+1)}{e} \qquad \langle f,x\rangle = \frac{2e^2+\sqrt{e}(e-1)-2}{2e}$$

Por tanto, como tenemos que la base usada es ortogonal con este producto escalar, tenemos que:

$$a_1 = \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{e^2+(e+1)(\sqrt{e}+1)}{5e} \qquad a_2 = \frac{\langle f,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{2e^2+\sqrt{e}(e-1)-2}{5e}$$

Por tanto, la recta mejor aproximación es:

$$r(x) = \frac{e^2+(e+1)(\sqrt{e}+1)}{5e} + \frac{2e^2+\sqrt{e}(e-1)-2}{5e}x$$

2. El método de mínimos cuadrados continuo en $[-1,1]$.

   Tomamos como base de $\mathbb{P}_1$ $\mathcal{B} = \{1\}$. Sea por tanto la recta $r(x) = a_1 + a_2x$.

   El producto escalar continuo empleado es:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Calculo los productos escalares:

$$\langle 1,1\rangle = 2 \qquad \langle 1,x\rangle = 0 \qquad \langle x,x\rangle = \frac{2}{3}$$
$$\langle f,1\rangle = \frac{e^2-1}{e} \qquad \langle f,x\rangle = \frac{2}{e}$$

Por tanto, como tenemos que la base usada es ortogonal con este producto escalar, tenemos que:

$$a_1 = \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{e^2-1}{2e} \qquad a_2 = \frac{\langle f,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{3}{e}$$

Por tanto, la recta mejor aproximación es:

$$r(x) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}x$$

Ejercicio 1.5.6. Responda a los siguientes apartados:

1. Utilizando el algoritmo de Gram–Schmidt, calcule una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$ utilizando el producto escalar discreto en los puntos $-1,\ 0,\ 1$, con pesos $1,\ 2,\ 1$, respectivamente.

x_i	-1	0	1
$\omega(x_i)$	1	2	1

Sea $\mathcal{B}_u = \{1, x, x^2\}$ base usual de $\mathbb{P}_2$, y buscamos una base ortogonal $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_2\}$. Partimos de $e_1 = 1$, y empleando el algoritmo de Gram-Scmidt obtenemos el resto:

$$e_2 = x - \frac{\langle x, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1$$

El producto escalar discreto empleado es:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{3} \omega(x_i) f(x_i) g(x_i)$$

Por tanto, el producto escalar necesario es:

$$\langle x, 1\rangle = -1 + 1 = 0$$

Por tanto, definimos $e_2 = x$. Calculamos ahora e_3:

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 - \frac{\langle x^2, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} \cdot e_2$$

Calculo los productos escalares necesarios:

$$\langle x^2, 1\rangle = 1 + 1 = 2 \qquad \langle 1, 1\rangle = 1 + 2 + 1 = 4 \qquad \langle x^2, x\rangle = -1 + 1 = 0$$

Por tanto,

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 - \cancelto{0}{\frac{\langle x^2, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle}} \cdot e_2 = x^2 - \frac{2}{4} = x^2 - \frac{1}{2}$$

Por tanto, la base ortogonal es:

$$\mathcal{B}_o = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{2}\right\}$$

2. Obtenga el polinomio de grado no mayor que 2 mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = x^{1/3}$ utilizando el apartado anterior.

   Sea el polinomio buscado $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$. Calculo los productos escalares necesarios para la matriz de Gram suponiendo el producto escalar del apartado anterior.

$$\langle 1, 1\rangle = 1 + 2 + 1 = 5 \qquad \langle x, x\rangle = 1 + 1 = 2$$

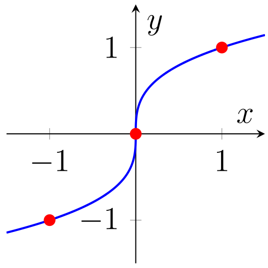
$$\langle 1, f\rangle = -1 + 0 + 1 = 0 \qquad \langle x, f\rangle = 1 + 0 + 1 = 2 \qquad \left\langle x^2 - \frac{1}{2}, f\right\rangle = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$$

   Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

$$a_i = \frac{\langle e_i, f\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

   Por tanto, $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 1$. Es decir, la mejor aproximación en $\mathbb{P}_2$ es $p(x) = x$.

Observación. Tenemos que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ es la siguiente:



Como podemos ver, los tres puntos están alineados en la recta $y = x$, por lo que dicha recta los interpola y, por tanto, es la mejor aproximación a esos puntos.

Ejercicio 1.5.7. Obtenga la mejor aproximación de la función $f(x) = x^3$ mediante polinomios de segundo grado, con respecto a la medida combinada de distancia

$$d(u,f)^2 = [u(0) - f(0)]^2 + \int_0^1 [u(x) - f(x)]^2\, dx$$

Calcule, además los tres primeros polinomios ortogonales asociados a este producto escalar.

Tenemos que:

$$d(u,f)^2 = \langle f-u, f-u\rangle = \langle u,u\rangle + \langle f,f\rangle - 2\langle u,f\rangle$$

$$\begin{aligned} d(u,f)^2 &= u^2(0) + f^2(0) - 2u(0)f(0) + \int_0^1 u^2(x) + f^2(x) - 2u(x)f(x)\, dx \\ &= \left[u^2(0) + \int_0^1 u^2(x)\, dx\right] + \left[f^2(0) + \int_0^1 f^2(x)\, dx\right] - 2\left[u(0)f(0) + \int_0^1 u(x)f(x)\, dx\right] \end{aligned}$$

Por tanto, por analogía de términos tenemos que el producto escalar empleado es:

$$\langle f,g\rangle = f(0)g(0) - \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

Ejercicio 1.5.8. Repita el ejercicio número 1.5.5 utilizando el producto escalar continuo en el intervalo $[-1,1]$, con peso $\omega(x) = x^2$. Es decir, determina la recta que más se aproxima a la curva $y = e^x$.

Ejercicio 1.5.9. Calcule los polinomios de grados 1 y 2 que mejor aproximen por mínimos cuadrados discretos los datos de la siguiente tabla.

x_i	4,0	4,2	4,5	4,7	5,1
y_i	102,56	113,18	130,11	142,05	167,53

Ejercicio 1.5.10. Se considera el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_{-2}^{-1} f(x)g(x)\, dx + f(0)g(0) + \int_1^2 f(x)g(x)\, dx.$$

1. Calcule los tres primeros polinomios ortogonales.

   Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{P}_n = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ y buscamos una base ortogonal $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$. Partimos de $e_1 = 1$, y usando el algoritmo de Gram-Schmidt, tenemos que:

$$e_2 = x - \frac{\langle x, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} x\,dx + 0 + \int_{1}^{2} x\,dx = 0$$

   Por tanto, definimos $e_2 = x$. Calculamos ahora e_3

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 - \frac{\langle x^2, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} \cdot e_2$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} x^2\,dx + 0 + \int_{1}^{2} x^2\,dx = \frac{14}{3} \qquad \langle x^2, x\rangle = \int_{-2}^{-1} x^3\,dx + 0 + \int_{1}^{2} x^3\,dx = 0$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-2}^{-1} 1\,dx + 1 + \int_{1}^{2} 1\,dx = 3$$

   Por tanto, $e_3 = x^2 - \frac{14}{9}$. Es decir, los tres primeros polinomios ortogonales son:

$$\left\{1, x, x^2 - \frac{14}{9}\right\}$$

2. Utilizando el apartado anterior, proporcione la parábola $u(x)$ mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = x^3$.

   Sea $\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\left\{1, x, x^2 - \frac{14}{9}\right\}$, y consideramos $u(x) = a_1 + a_2 x + a_3\left(x^2 - \frac{14}{9}\right)$.

   Calculamos productos escalares necesarios, sabiendo que se trata de una base ortogonal:

$$\langle 1, 1\rangle = 3 \qquad \langle x, x\rangle = \frac{14}{3} \qquad \langle x^2, x^2\rangle = \frac{62}{5}$$

$$\langle f, 1\rangle = 0 \qquad \langle f, x\rangle = \frac{62}{5} \qquad \langle f, x^2\rangle = 0$$

   Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

$$a_i = \frac{\langle e_i, f\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

   Por tanto, $a_1 = a_3 = 0$. Además,

$$a_2 = \frac{\langle x, f\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\frac{62}{5}}{\frac{14}{3}} = \frac{93}{35}$$

   Es decir, la mejor aproximación en $\mathbb{P}_2$ es

$$u(x) = \frac{93}{35}x$$

3. Compruebe que $f(x)-u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

   Por ser u la mejor aproximación de f, tenemos que:

   $$||f-u|| \leq ||f-p_2|| \Longrightarrow ||f-u||^2 \leq ||f-p_2||^2 \qquad \forall p_2 \in \mathbb{P}_2$$

   Tomamos $g \in \mathbb{P}_2$, y sea $p_2 = u + \lambda g \in \mathbb{P}_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, como $p_2 \in \mathbb{P}_2$, tenemos que:

   $$||f-u||^2 \leq ||f-u-\lambda g||^2 = \langle f-u-\lambda g, f-u-\lambda g\rangle = ||f-u||^2 - 2\lambda\langle f-u, g\rangle + \lambda^2||g||^2$$

   Por tanto,

   $$0 \leq -2\lambda\langle f-u, g\rangle + \lambda^2||g||^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in \mathbb{P}_2.$$

   Considerando la expresión anterior como una parábola en la incógnita λ, tenemos:

   $$\Delta = 4(\langle f-u, g\rangle)^2 \geq 0$$

   Por tanto, para que la parábola siempre sea positiva, no puede tener dos raíces. Por tanto, $\Delta = 0$, lo que implica que:

   $$\langle f-u, g\rangle = 0 \qquad \forall g \in \mathbb{P}_2$$

   Por tanto, hemos demostrado que $f(x)-u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

4. Interprete geométricamente la distancia que induce este producto escalar.

   Tenemos que:

   $$d(u,v) := ||u-v|| = \sqrt{\int_{-2}^{-1}(u-v)^2(x)\,dx + (u-v)^2(0) + \int_1^2 (u-v)^2(x)\,dx}$$

   Por tanto, la distancia es la raíz del área encerrada por ambas funciones entre $[-2,-1]$ y $[1,2]$ y el cuadrado de las imágenes de las dos funciones en $x=0$.

   Por tanto, al minimizar mediante mínimos cuadrados, lo que buscamos es minimizar el área entre dichas funciones en los intervalos mencionados y minimizar la distancia en el punto $x=0$.

Ejercicio 1.5.11. Se considera la tabla de datos

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	$-6{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$3{,}5$	$9{,}5$

1. Calcule la aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x)$ en el espacio vectorial $\mathcal{U} = \mathcal{L}\{x, x^2\}$

Sea la mejor aproximación $u(x) = ax + bx^2 \in \mathcal{U}$, y consideramos el producto escalar discreto siguiente:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i)$$

Calculamos los siguientes productos escalares:

$$\langle x, x\rangle = 10 \qquad \langle x^2, x^2\rangle = 34 \qquad \langle x, x^2\rangle = 0$$
$$\langle f, x\rangle = 37 \qquad\qquad \langle f, x^2\rangle = 14$$

Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

$$a_i = \frac{\langle e_i, f\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

Por tanto,

$$a_1 = \frac{37}{10} \qquad\qquad a_2 = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$$

Por tanto, la mejor aproximación de f en $\mathcal{U}$ es:

$$u(x) = \frac{37}{10}x + \frac{7}{17}x^2$$

2. Calcule las diferencias divididas de orden 1 (con dos argumentos) para los datos de la tabla y llámelas P_1, P_2, P_3 y P_4.

$$P_1 = f[-2,-1] = \frac{-1{,}5 + 6{,}5}{-1+2} = 5 \qquad P_2 = f[-1,0] = 1$$
$$P_3 = f[0,1] = 4 \qquad P_4 = f[1,2] = 6$$

3. Calcule el spline cúbico de clase 1 en los nodos -2, 0 y 2, $s(x) \in S_3^1(-2,0,2)$, tomando como derivadas en los nodos:

$$d_0 = P_1, \qquad d_1 = \frac{P_2 + P_3}{2}, \qquad d_2 = P_4.$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[-2,0]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-2 & \mathbf{-6{,}5} & & & \\
 & & \mathbf{d_0 = 5} & & \\
-2 & -6{,}5 & & \mathbf{-1} & \\
 & & 3 & & \mathbf{\frac{3}{8}} \\
0 & -0{,}5 & & -\frac{1}{4} & \\
 & & d_1 = \frac{5}{2} & & \\
0 & -0{,}5 & & &
\end{array}
\qquad\Bigg\|\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[0,2]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & \mathbf{-0{,}5} & & & \\
 & & \mathbf{d_1 = \frac{5}{2}} & & \\
0 & -0{,}5 & & \mathbf{\frac{5}{4}} & \\
 & & 5 & & \mathbf{-\frac{3}{8}} \\
2 & 9{,}5 & & \frac{1}{2} & \\
 & & d_2 = 6 & & \\
2 & 9{,}5 & & &
\end{array}$$

Por tanto, el spline queda:

$$s(x) = \begin{cases} -6{,}5 + 5(x+2) - (x+2)^2 + \frac{3}{8}x(x+2)^2 & \text{si} \quad x \in [-2,0] \\ -0{,}5 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [0,2] \end{cases}$$

4. Compare los valores que proporcionan el spline y la aproximación por mínimos cuadrados en los nodos -1 y 1. ¿Qué modelo elegiría?

   En $x = -1$, tenemos:

$$s(-1) = -2{,}875 \qquad\qquad u(-1) \approx -3{,}288$$

   En $x = 1$, tenemos:

$$s(1) = 3{,}625 \qquad\qquad u(1) \approx 4{,}112$$

   Por tanto, en ambos casos tenemos que el spline se aproxima más a los valores correctos de f.

Ejercicio 1.5.12. La longitud de una varilla L está ligada a la temperatura por el modelo lineal $L = a + bT$. Calcula a, b por mínimos cuadrados para los datos

T_i (°C)	20	40	50	60
L_i $(mm.)$	1000,22	1000,65	1000,9	1001,05

Se trata de una aproximación por mínimos cuadrados discreta en el espacio vectorial $\mathbb{P}_1[T] = \mathcal{L}\{1, T\}$.

Ejercicio 1.5.13. La observación de un determinado proceso químico genera la tabla de datos siguiente

x_i	1	1,2	1,5	1,7	2
y_i	5	5,8	6,5	7,5	8,4

1. Determine la curva exponencial $y = ae^{bx}$ que ajusta dichos datos por el método de los mínimos cuadrados.

   Aplicando $\ln x$, tenemos que:

$$\ln y = \ln(ae^{bx}) = \ln a + bx$$

   Realizamos el cambio de variable $\ln y = y'$, $\ln a = a'$. Entonces, el problema se reduce a calcular la mejor aproximación $y' = a' + bx$ en $\mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1, x\}$.

   Consideramos el producto escalar discreto dado por:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i)$$

   Calculamos los productos escalares necesarios:

$$\langle 1, 1 \rangle = 5 \qquad \langle x, x \rangle = 11{,}58 \qquad \langle 1, x \rangle = 7{,}4$$

$$\langle y', 1\rangle = \sum_{i=1}^{5} y_i' = \sum_{i=1}^{5} \ln y_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{5} y_i\right) \approx 9{,}3822$$
$$\langle y', x\rangle = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i' = \sum_{i=1}^{5} x_i \ln y_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{5} (y_i)^{x_i}\right) \approx 14{,}2084$$

Por tanto, para calcular a', b resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7{,}4 \\ 7{,}4 & 11{,}58 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}3822 \\ 14{,}2084 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a' \approx 1{,}1158 \\ b \approx 0{,}5139 \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que la mejor aproximación es:

$$y' = a' + bx \Longrightarrow e^{y'} = e^{a'+bx} \Longrightarrow y = e^{a'}e^{bx} \approx 3{,}0521e^{0{,}5139x}$$

2. ¿Cuál es el valor esperado para y cuando $x = 1{,}25$?

   Sustituyendo en la ecuación obtenida en el apartado anterior, tenemos que:

$$y(x = 1{,}25) = 5{,}802$$

Ejercicio 1.5.14. Sea $E = C([0, 1])$ dotado de su producto escalar usual y su norma asociada y sea S el subespacio vectorial de E tal que $S = \mathcal{L}\{1, x\}$. Dada $g \in E$, dada por $g(x) = x^2$ (con $0 \le x \le 1$), considera el problema de encontrar $h \in S$ de forma que $||g - h|| = \min_{w\in S} ||g - w||$. ¿Es unisolvente? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuélvelo.

Como las normas son no-negativas y x^2 es una función estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$, podemos elevar al cuadrado. Por tanto, buscamos $h \in S$ tal que:

$$||g - h||^2 = \min_{w\in S} ||g - w||^2$$

Por definición de distancia, tenemos que buscamos $h \in S$ tal que:

$$d^2(g, h) = \min_{w\in S} d^2(g, w)$$

Por tanto, tenemos que h es la mejor aproximación de g en $S = \mathbb{P}_1$. En este espacio vectorial, la mejor aproximación es única, por lo que nuestro problema es unisolvente.

Ejercicio 1.5.15. Considere los datos

$$(1, 3), \qquad (1, -1), \qquad (e, 2).$$

Determine razonadamente la curva de ecuación $y = \alpha \ln x + \beta$ que mejor los aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados.

Realizamos un cambio de variable $x' = \ln x$:

x_i	1	1	e
y_i	3	-1	2
$x' = \ln x$	0	0	1

Por tanto, el problema se reduce a ajustar $y = \alpha x' + \beta \in \mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1, x'\}$. Consideramos el producto escalar discreto dado por:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)g(x_i)$$

Como dos valores de las abscisas son iguales, tenemos que no es un producto escalar en $\mathbb{P}_3$ ni en $\mathbb{P}_2$. No obstante, sí lo es $\mathbb{P}_1$, que es el espacio vectorial que nos concierne.

Calculamos los productos escalares necesarios:

$$\langle 1, 1 \rangle = 3 \qquad \langle x', x' \rangle = 1 \qquad \langle 1, x' \rangle = 1$$

$$\langle y, 1 \rangle = 4 \quad \langle y, x' \rangle = 2$$

Por tanto, para calcular a', b resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que la mejor aproximación es:

$$y = x' + 1 \Longrightarrow y = \ln x + 1$$