

Geometría III

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III

Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor José María Espinar García.

Descripción Parcial de los Temas 2 y 3.

Fecha 11 de diciembre de 2023.

Ejercicio 1 (3 puntos). Clasificar afínmente las cónicas que se obtienen al cortar el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con un plano arbitrario $ax + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Sea $H \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0$ el cono, y $\pi \equiv ax + bz + c = 0$ el plano. Tenemos que:

$$H \cap \pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, ax + bz + c = 0\}$$

Distinguiamos en función de los siguientes casos:

■ $b = 0$:

En este caso, $\pi \equiv ax + c = 0$, y por tanto, $x = -c/a$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

$$\left(-\frac{c}{a}\right)^2 + y^2 = z^2 \implies y^2 - z^2 = -\frac{c^2}{a^2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - z^2 = -\frac{c^2}{a^2}, x = -\frac{c}{a} \right\}$$

- $a = b = c = 0$: Tenemos que el plano no tiene ecuación, por lo que $\pi = \mathbb{R}^3$ y, por tanto, la intersección con H es H .
- $a = b = 0, c \neq 0$: La ecuación del plano es $0 = -c \neq 0$, por lo que $\pi = \emptyset$ y, por tanto, $H \cap \pi = \emptyset$.
- $b = c = 0, a \neq 0$: En este caso, vemos que $H \cap \pi \equiv y^2 - z^2 = 0$, por lo que se trata de un par de rectas secantes y perpendiculares en el plano $x = 0$.
- $b = 0, a, c \neq 0$: En este caso, vemos que se trata de una hipérbola en el plano $x = -c/a$.

■ $b \neq 0, a = 0$:

En este caso, $\pi \equiv bz + c = 0$, y por tanto, $z = -c/b$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{c}{b}\right)^2 = 0 \implies x^2 + y^2 = \frac{c^2}{b^2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \frac{c^2}{b^2}, z = -\frac{c}{b} \right\}$$

- $a = c = 0, b \neq 0$: En este caso, vemos que $H \cap \pi \equiv x^2 + y^2 = 0$, por lo que se trata de un punto en el plano $z = 0$, es decir, el origen.
- $a = 0, b, c \neq 0$: En este caso, vemos que se trata de una circunferencia en el plano $z = -c/b$.

■ $a, b \neq 0$:

En este caso, $\pi \equiv ax + bz + c = 0$, y por tanto, $z = -c+ax/b$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \left(-\frac{c+ax}{b}\right)^2 &= \frac{a^2x^2 + c^2 + 2axc}{b^2} \implies b^2x^2 + b^2y^2 = a^2x^2 + c^2 + 2axc \implies \\ &\implies (b^2 - a^2)x^2 + b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0 \end{aligned}$$

Distinguimos en función de los valores de c :

● $a, b \neq 0, c = 0$:

En este caso, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (b^2 - a^2)x^2 + b^2y^2 = 0, z = -\frac{ax}{b} \right\}$$

Distinguimos en función de los valores de a y b :

○ $0 < |a| < |b|, c = 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 > 0$, por lo que $H \cap \pi$ es un punto, el origen.

○ $0 < |b| < |a|, c = 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 < 0$, por lo que $H \cap \pi$ es un par de rectas secantes.

○ $0 < |a| = |b|, c = 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 = 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una recta dada por $y = 0, z = -ax/b$.

● $a, b, c \neq 0$:

En este caso, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (b^2 - a^2)x^2 + b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0, z = -\frac{c+ax}{b} \right\}$$

○ $0 < |a| = |b|, c \neq 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 = 0$, por lo que $H \cap \pi \equiv b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0$. Por tanto, se trata de una parábola.

○ $0 < |a| \neq |b|, c \neq 0$:

En este caso, podemos dividir entre $b^2 - a^2$ y completar cuadrados para obtener:

$$\begin{aligned} (b^2 - a^2) \left[x^2 - 2zx \cdot \frac{a}{b^2 - a^2} \right] + b^2y^2 - c^2 &= 0 \\ (b^2 - a^2) \left(x - \frac{za}{b^2 - a^2} \right)^2 - \frac{z^2a^2}{(b^2 - a^2)^2} + b^2y^2 - c^2 &= 0 \\ (b^2 - a^2) \left(x - \frac{za}{b^2 - a^2} \right)^2 + b^2y^2 &= c^2 + \frac{z^2a^2}{(b^2 - a^2)^2} \end{aligned}$$

El término independiente de la ecuación siempre es positivo, por lo que distinguimos en función de los valores de a, b :

◇ $0 < |a| < |b|$, $c \neq 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 > 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una elipse.

◇ $0 < |b| < |a|$, $c \neq 0$:

Tenemos que $b^2 - a^2 < 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una hipérbola.

Ejercicio 2 (4 puntos). Sea la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 3, y + 4, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - 1 \right)$$

1. Demostrar que es una isometría.

Obtenemos su matriz respecto de la base canónica:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 15 & -4 & 0 & 3 \\ 20 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Comprobemos que es una isometría. Como \mathcal{B}_u es una base ortonormal, bastará con probar que las matrices son ortogonales:

$$\frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = Id_3$$

Por tanto, $M(f, \mathcal{B}_u)$ es una matriz ortogonal, y por tanto, f es una isometría.

2. Clasifícala.

Tenemos que:

$$\left| M(\vec{f}, \mathcal{B}_u) \right| = \frac{1}{5^3} \cdot 5 \cdot (-16 - 9) = -1$$

Por tanto, como $\left| M(\vec{f}, \mathcal{B}_u) \right| = -1$, tenemos que se trata de una isometría inversa.

3. Calcular el conjunto de puntos fijos.

Tenemos que los puntos fijos cumplen el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, dicho sistema no tiene solución, por lo que:

$$\mathcal{P}_f = \emptyset$$

Por tanto, como es un movimiento inverso en el espacio sin puntos fijos, tenemos que se trata de reflexión especular con deslizamiento.

4. Calcular las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia \mathcal{R} (en el dominio) y \mathcal{R}' (en el codominio); siendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1), (2, -2, 1)\} \\ \mathcal{R}' &:= \{(0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 0), (-2, 0, 1)\}\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{R} = \{(1, -1, 0), \{v_1, v_2, v_3\}\}$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}f(1, -1, 0) &= \frac{1}{5}(11, 15, -2) \\ \overrightarrow{f}(v_1) &= \overrightarrow{f(1, -1, 0)f(0, 0, 1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11, 15, -2) (18, 20, -1)} = \frac{1}{5}(7, 5, 1) \\ \overrightarrow{f}(v_2) &= \overrightarrow{f(1, -1, 0)f(1, 0, -1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11, 15, -2) (8, 20, -6)} = \frac{1}{5}(-3, 5, -4) \\ \overrightarrow{f}(v_3) &= \overrightarrow{f(1, -1, 0)f(2, -2, 1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11, 15, -2) (10, 10, 5)} = \frac{1}{5}(-1, -5, 7)\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 7 & -3 & -1 \\ 15 & 5 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & -4 & 7 \end{array} \right)$$

Haciendo uso de las matrices de cambio de base, tenemos que:

$$\begin{aligned}M(f, \mathcal{R}_0) &= M(Id_4, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}') \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \\ &= M(Id_4, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0)^{-1} \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 7 & -3 & -1 \\ 15 & 5 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & -4 & 7 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -20 & 0 & -5 & 0 \\ 30 & -3 & 5 & -4 \\ -35/2 & 2 & -5/2 & -3/2 \end{array} \right)\end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos). En \mathbb{R}^2 , para todo $a, b \in \mathbb{R}^*$, demostrar que toda hipérbola $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 - (y/b)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ admite dos rectas $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}^2$, con $(R_1 \cup R_2) \cap H = \emptyset$, verificando que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists p \in H$ tal que:

$$\text{dist}(p, R_1 \cup R_2) \leq \varepsilon$$

Sean dichas rectas el par de rectas $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 0$. Es decir, sea:

$$R_1 \equiv \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \equiv y = \frac{b}{a}x \quad R_2 \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \equiv y = -\frac{b}{a}x$$

Veamos en primer lugar que la intersección de H con R_1 es vacía:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}{b^2} = 1 \implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \implies 0 = 1$$

Por tanto, $H \cap R_1 = \emptyset$. Análogamente, se ve que $H \cap R_2 = \emptyset$, por lo que la intersección de ambas es vacía, es decir, $(R_1 \cup R_2) \cap H = \emptyset$. Veamos ahora la última parte. Por simetría, consideraremos tan solo los puntos del primer cuadrante, es decir, la recta R_1 y el primer cuadrante de H . Un punto cualquiera de la asíntota en dicho cuadrante cumple que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \implies y = |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Calculamos ahora la distancia entre un punto de la recta y un punto de la hipérbola que tengan la misma coordenada x :

$$d(p, p_{R_1}) = \left| \frac{b}{a}x - |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right|$$

Tomando límite cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} d(p, p_{R_1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}x - |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}x - |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \cdot \frac{\frac{b}{a}x + |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{\frac{b}{a}x + |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)}{\frac{b}{a}x + |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^2}{\frac{b}{a}x + |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x > M$, entonces si $p = \left(x, \frac{b}{a}x\right) \in R_1$, $p_{R_1} = \left(x, |b| \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) \in H$, entonces $d(p, p_{R_1}) < \varepsilon$. Como $d(p, R_1) = \inf\{d(p, q) \mid q \in R_1\}$, tenemos que $d(p, R_1) \leq d(p, p_{R_1}) < \varepsilon$.