Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- <u>Para $n = 0$</u>:

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

  Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ ees cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. □

Ejercicio 1.1.2. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

- $n = 0$:

$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

- $n = 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

- $n > 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) n \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)n}{\cancel{2}} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

- En el caso base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática para todo número natural n, $P(n)$ se tiene, como se pedía. □

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n, se quiere usar una verdad sobre $n-k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n+1$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

"n tiene un factor primo"

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- <u>n es primo:</u>

  En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso).

- <u>n no es primo:</u> Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$.
  Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p. Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale y por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$.

□

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso)**.** Sea p la función dada por:

$$p(a,0) = 0,$$
$$p(a,b) = \begin{cases} p\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ \\ p\left(2a, \dfrac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a,b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado del tenor:

"Para todo número natural m, $p(m,n) = mn$."

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leqslant k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- $\underline{n = 0, \text{(sea cual sea } m)}$:
$$p(m,0) = 0 = m \cdot 0$$
  Luego $P(0)$ vale.
- En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale:
- Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:
  1. $\underline{n \equiv 0 \mod 2}$ (es par):
  $$p(m,n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \overset{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$
     Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n}{2} < n$.
  2. $\underline{n \equiv 1 \mod 2}$ (es impar):
  $$\begin{aligned} p(m,n) = p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m &\overset{(*)}{=} \left(\cancel{2}m \cdot \frac{n-1}{\cancel{2}}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$
     donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\dfrac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n, vale $P(n)$. □

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$
Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$2 \mid \left(5^n + 3^{n-1}\right)$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.
Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:
$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$
Esto se debe a que:
$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$
Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:
$$\begin{aligned}\left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}\right) - \left(5^n + 3^{n-1}\right) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 5^n + 3^{n-1}\right)\end{aligned}$$
Como $2 \mid \left(5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1})\right)$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. □

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:
$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$
Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$8 \mid \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} n \mid (a-b) \\ n \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \Longrightarrow a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \Longrightarrow n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - \left(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1\right) = \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + \cancel{1} - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - \cancel{1} = \\ &= 5^n(5-1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4\left(5^n + 3^{n-1}\right) \overset{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado que el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid \left[\left(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1\right) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)\right]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.8. Demouestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}\text{”}$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 2 \geqslant \sqrt{2}$$

Como $2 \geqslant \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff$$
$$\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \iff$$
$$\iff (2n+1)^2(n+2) \leqslant (2n+2)^2(n+1) \iff$$
$$\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leqslant (n+1)(4n^2+8n+4) \iff$$
$$\iff \cancel{4n^3} + \cancel{4n^2} + n + \cancel{8n^2} + \cancel{8n} + 2 \leqslant \cancel{4n^3} + \cancel{8n^2} + 4n + \cancel{4n^2} + \cancel{8n} + 4 \iff$$
$$\iff 2+n \leqslant 4+4n \iff 0 \leqslant 2+3n$$

Como $0 \leqslant 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $P(n)$ es cierto, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}(n+1)^2 < n^3\text{”}$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1+1)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} n^3 + 2n + 1 \leqslant n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}n^3 < n!\text{”}$$

- En el caso base, $n = 6$:

  $$6^3 \leqslant 6! \iff 6^2 \leqslant 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leqslant 4 \cdot 5$$

  Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

  $$n^3 < n!$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

  $$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \overset{(*)}{<} n^3(n+1) \overset{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

  donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. □

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{“}5 \mid 8^n - 3^n\text{”}$$

- En el caso base, $n = 0$:

  $$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

  Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:
$$5 \mid 8^n - 3^n$$
En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:
$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8-1) - 3^n \cdot (3-1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$
donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. □

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b, existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b:

- $\underline{a = 0 \text{ o } b = 0}$:

  Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b. Además, es el mínimo múltiplo común de a y b, ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $\underline{a, b > 0}$:

  Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b. Es claro que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b. Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:
$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$
  Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Así pues, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b.

□

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de n para el que
$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden)**.** Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (o que S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea

$$M(S) = \{m \in \omega \mid \text{ para todo } x \in S, x \leqslant m\}$$

   Se cumple lo siguiente:

   - $n \in M(S)$
   - $M(S) \neq \emptyset$
   - Por el principio del buen orden, existe el mínimo de $M(S)$, denotado como m_0.
   - $m_0 \neq 0$, porque m_0 es un mayorante de $S \setminus \{0\}$ que es no vacío.
   - Si para todo $x \in S$ se cumpliera que

$$x < m_0$$

     entonces, para todo $x \in S$ se cumpliría que

$$x \leqslant m_0 - 1$$

     y por tanto $m_0 - 1 \in M(S)$ y además

$$0 \leqslant m_0 - 1 < m_0$$

     de donde m_0 no sería el mínimo de $M(S)$, en contra de lo supuesto.
   - Existe $x_0 \in S$ tal que

$$m_0 \leqslant x_0$$

   - Como m_0 es un un mayorante de S se cumplirá que

$$x_0 \leqslant m_0$$

   - Por las dos desigualdados anteriores, $m_0 = x_0$
   - $m_0 \in S \cap M(S)$
   - El mínimo de $M(S)$ es un elemento de S, luego es el máximo de S.

□

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leqslant n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. A continuación, daremos las ideas de la demostración para que el lector termine el desarrollo de la misma.

El razonamiento es por el principio de inducción matemática

$$P(n) \text{ es “}2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\text{''}$$

- Caso base: $n = 2$

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\Rightarrow 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

  Luego $P(2)$ es cierto.

- Hipótesis de inducción: supongamos que $n \in \omega$ y que vale $P(n)$, es decir

$$2 \leqslant n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- paso de inducción:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

  Entonces:

$$\begin{aligned} n + 1 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ (\sqrt{n+1})^2 &< \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \\ \sqrt{n+1} &< \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &< \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Luego $P(n+1)$ vale.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \omega$ con $n \leqslant 2$, $P(n)$ vale.

$\square$