Geometría III

Examen XIII

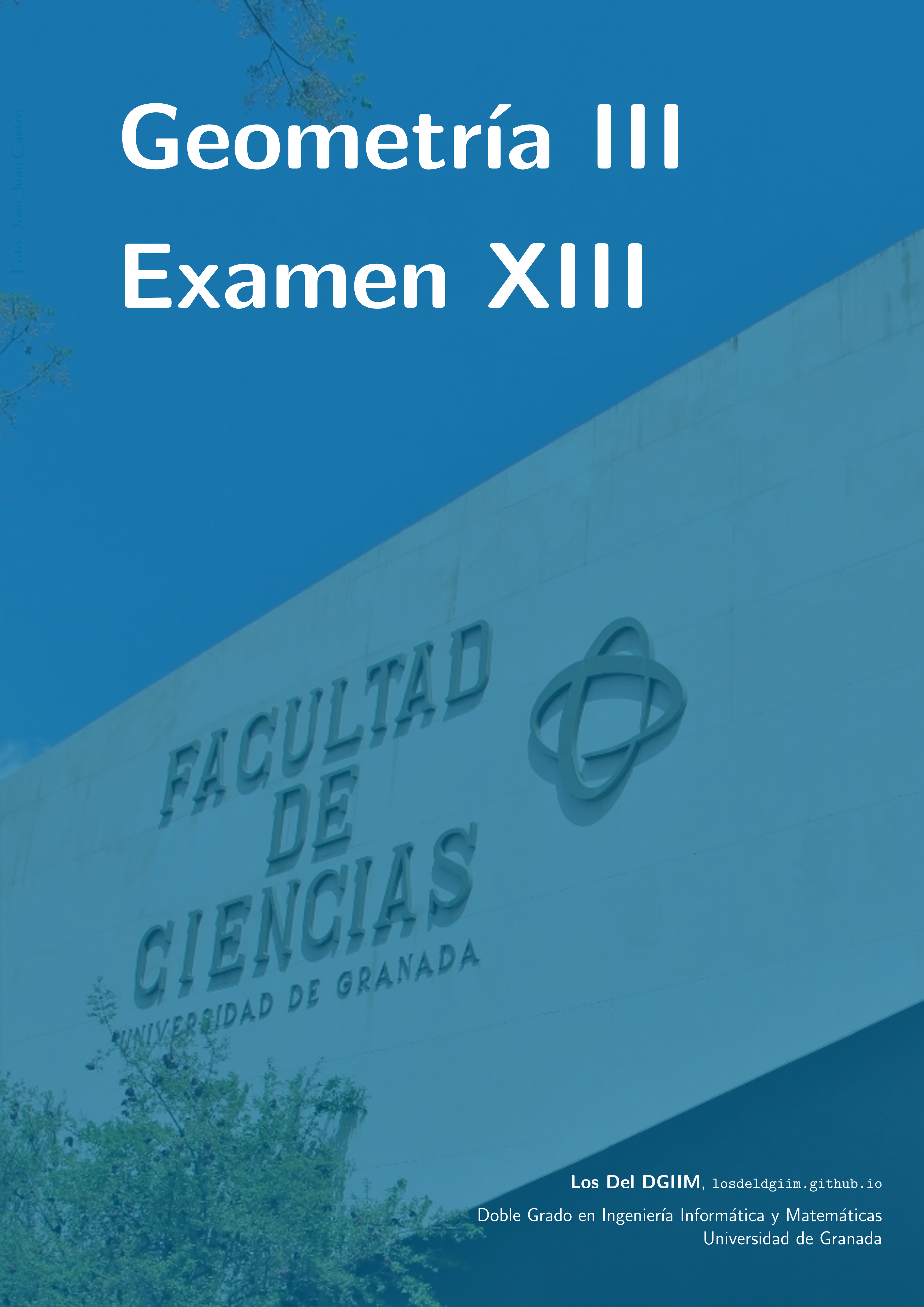

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 17 de febrero de 2024.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (2,5 puntos)**.** Consideramos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 2\}, \qquad T = (0, -1, 0) + \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Comprobar que S y T son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula $\pi_{S,T}$ y $\sigma_{S,T}$ sobre S en la dirección de T, dando sus ecuaciones matriciales respecto de $\mathcal{R}_0 \equiv \{(0, 0, 0), \mathcal{B}_0\}$

Para comprobar que son suplementarios, deberemos comprobar que tienen intersección no vacia y que $\mathbb{R}^3 = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$. Para ello calculamos en primer lugar unas ecuaciones cartesianas de T en $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y+1 \\ 1 & z \end{vmatrix}$$

Cuyo rango tiene que ser uno, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 1 = x \qquad \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = x$$

Como estamos trabajando en el mismo sistema de referencia $\mathcal{R}_0$, tenemos que:

$$R \cap S = \begin{cases} z = x \\ y + 1 = x \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Que es un SCD con solución $S \cap T = (1, 0, 1)$. Usando la fórmula de las dimensiones se obtiene además que su suma es $\mathbb{R}^3$. Vamos a calcular ahora la proyección afin de S paralela a T. Como se ha visto en teoria, dado $\{p_0\} = S \cap T$:

$$\pi_{S,T}(p) = p_0 + \pi_{\overrightarrow{S},\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{p_0p})$$

Como $\overrightarrow{p_0p} = (x - 1, y, z - 1)$,

Ejercicio 2 (2,5 puntos)**.** Razona en cada caso qué movimiento rígido resulta de las siguientes composiciones:

1. (1,25 Puntos) La composición en el espacio de un giro con una traslación.

   Sea $f = G_{\theta,L} \circ t_v$, donde L una recta, $\theta \in]0, \pi[$ y $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Entonces $|\overrightarrow{f}| = 1$ por lo que se trata de una isometría directa. Distinguimos en función del valor de v:

   - Si $v \in \overrightarrow{L}$, se trata de un giro con deslizamiento, es decir, un movimiento helicoidal
   - Si $v \notin \overrightarrow{L}$, veamos que se trata de un giro:

   $$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{G_{\theta,L}} \circ \overrightarrow{t_v} = G_{\theta,\overrightarrow{L}} \circ Id_{\mathbb{R}^3} = G_{\theta,\overrightarrow{L}}$$

2. (1,25 Puntos) La composición en el plano de un giro y una simetría con desplazamiento.

   Sea $f = G_{\theta,p} \circ \sigma_R \circ t_v$ con $p \in \mathbb{R}^2, \theta \in]0,\pi[$, R una recta y $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Entonces $|\overrightarrow{f}| = -1$ por lo que se trata de una isometría inversa. Como la composición de un giro con una simetría es una simetría axial, llamando a esta σ_S, tenemos que: f = $\sigma_S \circ t_v$. Por lo que se trata de una simetría con o sin desplazamiento.

Ejercicio 3 (2,5 puntos)**.** Enuncia y demuestra el teorema de Desargues en el espacio afín y en el proyectivo de dimensión 2.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)**.** Clasifica euclídeamente la siguiente cónica buscando el sistema de referencia en el que adopta su ecuación reducida. Calcula además sus elementos euclídeos:

$$-16 - 8x + x^2 + 8y + 2xy + y^2 = 0$$

Tenemos que la matriz asociada a dicha conica es la siguiente:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|cc} -16 & -4 & 4 \\ \hline -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z \\ \hline z^t & A \end{array}\right)$$

Diagonalizamos A, su polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Sus vectores propios asociados son:

$$V_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$$

$$V_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$$

Por lo que se trata de una parábola. El eje entonces de la parábola es:

$$e = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|(0,1,1)\hat{A}(1,x,y) = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -y\right\} = (0,0) + \mathcal{L}\left\{(1,-1)\right\}$$

Para calcular el vértice de la parábola, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ -16 - 8x + x^2 + 8y + 2xy + y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v = (-1,1)$$

Sea pues el sistema de referencia $\mathcal{R}^{'} = \{v, B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}\}$. En $\mathcal{R}^{'}$ su matriz asociada queda:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \lambda \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para calcular λ sabemos que el determinante es invariante por semejanzas por tanto:

$$|\hat{A}| = -64 = -2\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{32}$$

Por tanto su ecuación en dicho sistema es $2x^2 = -2\lambda y$. Como el coeficiente de x es positivo, se tiene la solución negativa de λ. Si la distancia del vertice al foco es c, entonces: