# Geometría I

# Examen V

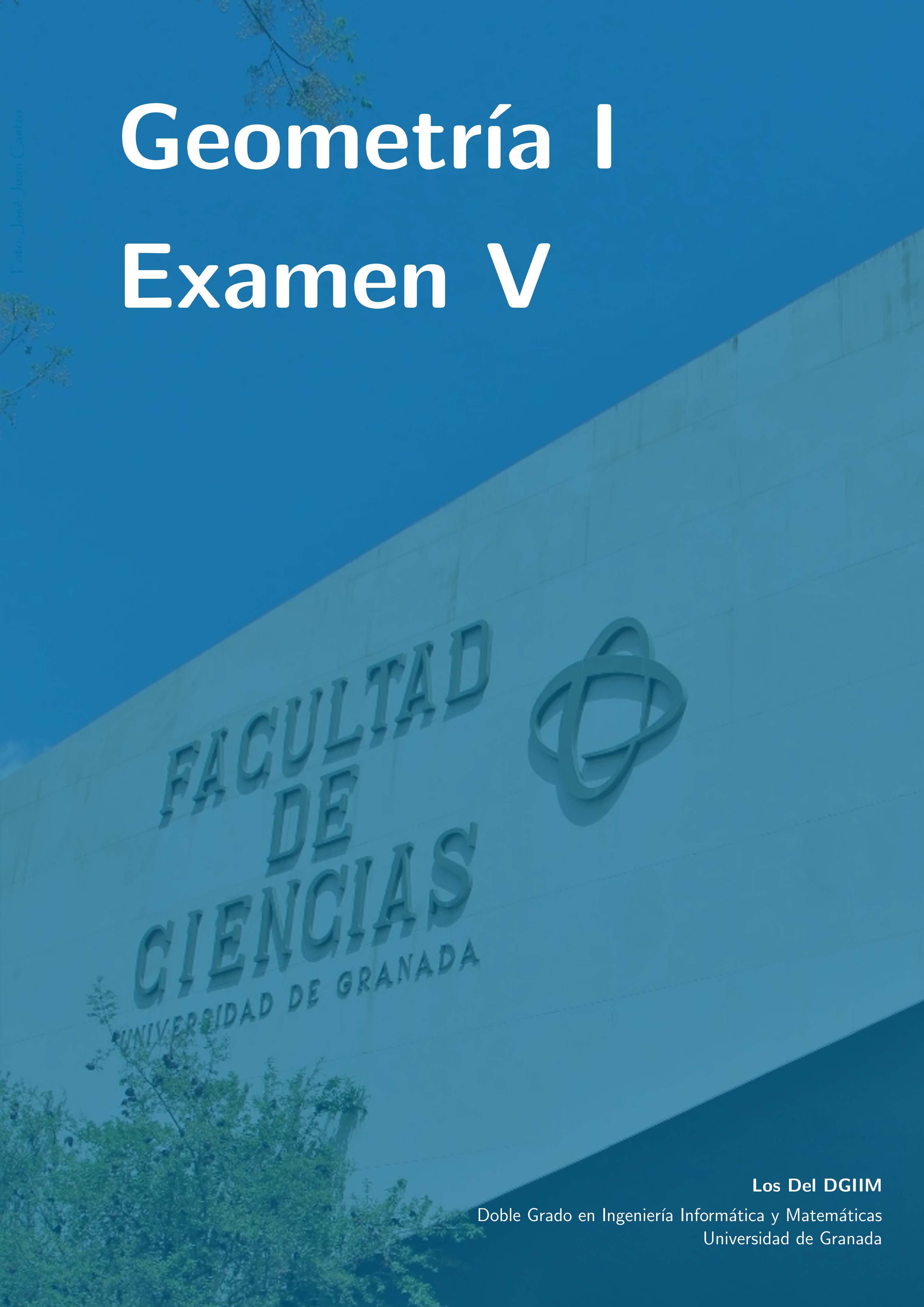


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

# Geometría I
# Examen V

Los Del DGIIM

Granada, 2023

**Asignatura** Geometría I.

**Curso Académico** 2021-22.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Juan de Dios Pérez Jiménez[1].

**Descripción** Convocatoria Extraordinaria.

**Fecha** 15 de febrero de 2022.

[1] El examen lo pone el departamento.

1. **[4 puntos]** Sean $V$ y $V'$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $K$. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   *a*) Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal y $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      1) $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente.
      2) $\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k) \cap ker(f) = \{0\}$

   *b*) Si $V$ y $V'$ son finitamente generados y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      1) $f$ y $f^t$ son ambas inyectivas.
      2) $f$ es biyectiva.

   *c*) Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial y $\{w_1+U, \ldots, w_k+U\}$ es un conjunto linealmente independiente en $V/U$, entonces $\{w_1, \ldots, w_k\}$ es linealmente independiente en $V$.

2. **[2 puntos]** Sean $V$ y $V'$ espacios vectoriales finitamente generados sobre un mismo cuerpo $K$. Demostrar que la aplicación transposición

$$\begin{array}{rcl} {}^t : Hom_K(V, V') & \longrightarrow & Hom_K((V')^*, V^*) \\ f & \longmapsto & f^t \end{array}$$

   es un isomorfismo de espacios vectoriales.

3. **[4 puntos]** Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\begin{array}{rcl} U_k & = & \mathcal{L}\left(\{(1,2,k,1), (k+1,4,2,2), (2,2,2-k,1)\}\right), \\ V & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y - x = 0, t - x = 0\}. \end{array}$$

   *a*) Obtener una base y la dimensión de $U_k$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

   *b*) Calcular una base de $U_k + V$ y de $U_k \cap V$. ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus V$?

   *c*) Para $k = 1$, encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $ker(f) = U_1$, $Im(f) = V$ y $f \circ f = f$. Calcular $M(f, B_u)$, donde $B_u$ representa la base usual de $\mathbb{R}^4$.

   *d*) Para la aplicación $f$ calculada en el apartado anterior, hallar $Im(f^t)$ y $ker(f^t)$.