Variable Compleja

Examen II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 7 de Mayo de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(\pi,1)} g(z)\, dz$:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} \end{array}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & ze^{\overline{z}} \end{array}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.**

1. [**1.5 puntos**] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3}\, dz$$

2. [**1.5 puntos**] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. [**1.5 puntos Extra**] Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(\pi,1)} g(z)\,dz$:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{array}$$

Sea $z \in \Omega$, por lo que $\operatorname{Re} z > 1$, tenemos que:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{|e^{z\log n}|} = \frac{1}{e^{\operatorname{Re}(z\log n)}} = \frac{1}{e^{\ln n\cdot\operatorname{Re} z}} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$$

Por tratarse de una serie de Riemman con $\alpha = \operatorname{Re} z > 1$, la serie de término general $\dfrac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ es convergente, y por el criterio de comparación, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & ze^{\overline{z}} \end{array}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.**

1. [**1.5 puntos**] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3}\,dz$$

2. [**1.5 puntos**] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. [**1.5 puntos Extra**] Probar que, de hecho, $f = g$.