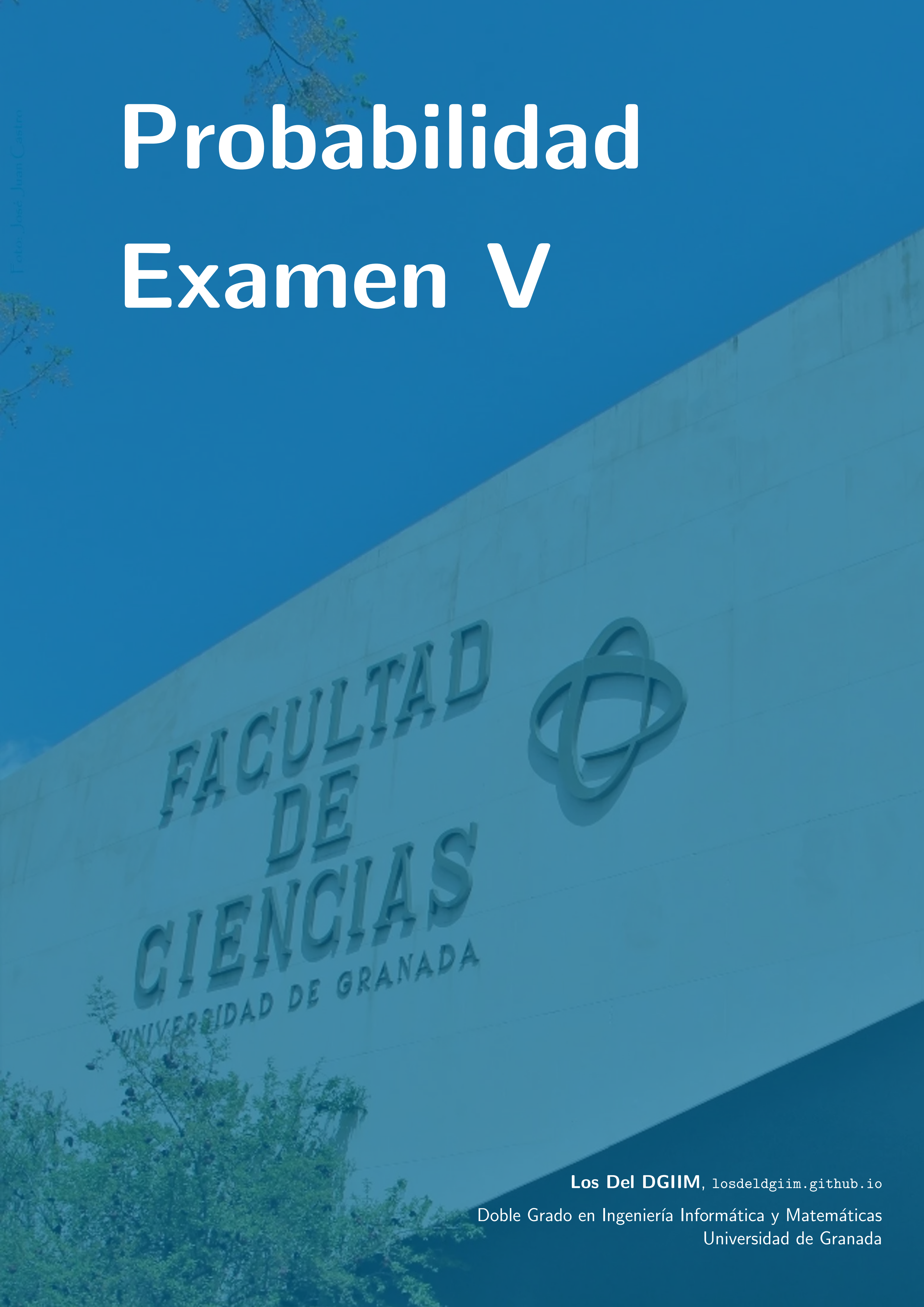
# Probabilidad
# Examen V






**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Probabilidad
# Examen V


Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán


Granada, 2024-2025

**Asignatura** Probabilidad.

**Curso Académico** 2021-22.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Descripción** Examen Ordinario

**Fecha** 21 de enero de 2022.

## PARTE 1 (2.5 puntos)

**Ejercicio 1** (0.25 puntos)**.** Sean $X_1$, $X_2$, $X_3$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, 1/2)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \frac{9}{2^9}$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2, X_3 \sim B(3, 1/2)$$

Por la reproductividad de la distribución binomial, como son independientes, tenemos que:

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim B(9, 1/2)$$

Por tanto, usando la función masa de probabilidad de la distribución binomial, tenemos que:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \binom{9}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{9}{2^9}$$

**Ejercicio 2** (0.25 puntos)**.** Sean $X_1$ y $X_2$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Poisson, $\mathcal{P}(3)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 > 0] = \frac{e^6 - 1}{e^6}$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(3)$$

Por la reproductividad de la distribución de Poisson, por ser independientes tenemos que:

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(6)$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X_1 + X_2 > 0] = 1 - P[X_1 + X_2 = 0] = 1 - \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 1 - e^{-6} = \frac{e^6 - 1}{e^6}$$

**Ejercicio 3.** Para predecir los valores de una variable aleatoria $X$ a partir de los de otra variable aleatoria $Y$ se considera un modelo lineal:

1. **(0.50 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal considerado.

   Se busca aproximar $X$ como $\widehat{X} = aY + b$. Para ello, se minimiza el error cuadrático medio:

$$\begin{aligned}
\text{E.C.M.}(X \mid Y) &= E[(X - \widehat{X})^2] = E\left[(X - aY - b)^2\right] = \\
&= E\left[X^2 - 2aXY - 2bX + a^2Y^2 + 2abY + b^2\right] = \\
&= E[X^2] - 2aE[XY] - 2bE[X] + a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2
\end{aligned}$$

   Para ello, se busca minizar la siguiente función:

$$L(a, b) = E.C.M.(X \mid Y) = E[X^2] - 2aE[XY] - 2bE[X] + a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2$$

Se tiene demostrado en Teoría que llegamos a la siguiente expresión (donde además, demostramos que se trata de un mínimo):

$$\begin{cases} a = \dfrac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[Y]} \\ b = E[X] - aE[Y] \end{cases}$$

2. **(0.75 puntos)** Si $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$ son las dos rectas de regresión para el vector $(X, Y)$, se pide: identificar la recta de regresión del apartado anterior; obtener una medida de la bondad del ajuste y calcular la esperanza del vector $(X, Y)$.

   Suponemos que las rectas de regresión de $X$ sobre $Y$ y de $Y$ sobre $X$ son $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$, respectivamente. Por tanto, tenemos que:

$$x = y + 1 = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[Y]} \cdot y + E[X] - \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[Y]} \cdot E[Y]$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[X]} \cdot x + E[Y] - \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[X]} \cdot E[X]$$

   Identificando términos, obtenemos que:

$$\frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[X]} \cdot \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\text{Var}[Y]} = \rho_{X,Y}^2 = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1$$

   Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que la suposición es incorrecta. La recta de regresión de $Y$ sobre $X$ es $y = x - 1$ y la de $X$ sobre $Y$ es $x = {}^2/_3 y + {}^1/_3$.

   La proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal es el coeficiente de determinación, que en este caso es:

$$\rho_{X,Y}^2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \approx 0{,}667\,\%$$

   Por último, por identificación de términos, tenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E[X] - E[Y] & = & 1 \\ E[Y] - \dfrac{3}{2}E[X] & = & -\dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} E[X] = -1 \\ E[Y] = -2 \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$E[(X,Y)] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4** (0.75 puntos)**.** Las componentes de un vector aleatorio continuo son variables aleatorias continuas. Sin embargo, en general, un conjunto de variables aleatorias continuas no da lugar a un vector aleatorio continuo. Justificar que este recíproco sí es cierto si consideramos un conjunto $X_1$, $X_2$, $\dots$, $X_n$ de variables aleatorias continuas independientes.

Definimos la siguiente función continua en $\mathbb{R}^n$:

$$f_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}: \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \longmapsto & \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \end{array}$$

y probaremos que es la función de densidad de $(X_1,X_2,\dots,X_n)$. En primer lugar, está bien definida por estarlo cada una de las funciones de densidad de las variables aleatorias. Veamos que:

$$F_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)\,dt_1\cdots dt_n$$

Para ello, como son independientes, tenemos que:

$$P[X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \dots, X_n \leqslant x_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leqslant x_i]$$

Por ser $f_{X_i}$ la función de densidad de $X_i$, tenemos que:

$$F_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\,dt_i$$

Por tanto, tenemos que la función que hemos definido efectivamente es la función de densidad de $(X_1,X_2,\dots,X_n)$.

Aunque no sería necesario, veamos que cumple las condiciones de toda función de densidad. En primer lugar, es no negativa, ya que cada término es mayor o igual que 0. Veamos ahora que integra 1:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,dx_1\cdots dx_n = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_{X_i}(x_i)\,dx_i = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1\end{aligned}$$

## PARTE 2 (7.5 puntos)

**Ejercicio 1** (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio continuo $(X,Y)$ distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \ \land \ x,y < 0\}$$

*Observación.* A tener en cuenta:

- En el **apartado 1.2** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \operatorname{sen}(t)$.

- $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

1. **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

En primer lugar, y debido a que lo usaremos con mucha frecuencia, resolveremos la siguiente integral de forma genérica. Dados $a, b \in [0,1], a < b$, resolveremos la siguiente integral:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(t)\cos(t)\,dt = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(t)\,dt = \qquad (1)\\
&= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} 1+\cos(2t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\arcsin(b) - \arcsin(a) + \frac{\operatorname{sen}(2\arcsin(b))}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\arcsin(a))}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\arcsin(b) - \arcsin(a) + \frac{2b\sqrt{1-b^2}}{2} - \frac{2a\sqrt{1-a^2}}{2}\right] \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[\arcsin(b) - \arcsin(a) + b\sqrt{1-b^2} - a\sqrt{1-a^2}\right]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado, en primer lugar, el seno del ángulo doble, por lo que:

$$\operatorname{sen}(2\arcsin(x)) = 2\operatorname{sen}(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

y ahí hemos empleado el valor de $\cos(\arcsin(x))$. Como $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, su coseno es positivo. Por tanto:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

Una vez hecha esta integral (que usaremos en varios casos), procedemos con el ejercicio. Veamos en primer lugar la forma de $C$, que se muestra en la Figura 1.

La función de densidad conjunta es constante, por lo que:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in C \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para que $f$ sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

Hay dos opciones:

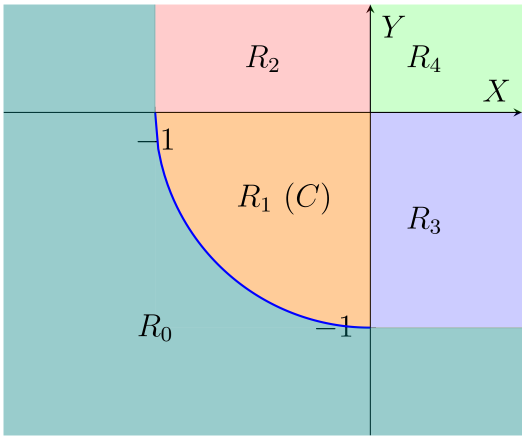



Figura 1: Recinto $C$.

**Integrando de la forma usual:** Es necesario que:

$$1 = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} k\, dy\, dx = k \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{(1)}{=} \frac{k}{2}\left[0 + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{k\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

**Razonando la forma de $C$:** Sabemos que $C$ es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x,y) = k \int_C 1 = k \cdot \lambda(C) = k \cdot \frac{\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

2. **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribuición de probabilidad conjunta.

Distinguimos en función de los valores de $(x,y)$:

- Si $(x,y) \in R_0$: $(x < -1$ o $y < -1$ o $-1 < x, y < 0, x^2 + y^2 \geqslant 1)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dv\, du = 0$$

- Si $(x,y) \in R_1$: $(-1 < x, y < 0$ y $x^2 + y^2 < 1)$

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y} \frac{4}{\pi}\, dv\, du = \frac{4}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} y + \sqrt{1-u^2}\, du \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{4}{\pi}\left[ [yu]_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} + \frac{1}{2}\left[ \operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-1+y^2} \right]\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[ yx + y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\left[ \operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} \right]\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[ yx + \frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \frac{1}{2}\left[ \operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + x\sqrt{1-x^2} \right]\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[ 2xy + y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right) + x\sqrt{1-x^2} \right]
\end{aligned}$$

- Si $(x,y) \in R_2$: $(-1 < x < 0$ y $0 < y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{0} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{x}\sqrt{1-u^2}\,du \overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{\pi}{2} + x\sqrt{1-x^2}\right]$$

- Si $(x,y) \in R_3$: $(0 < x$ y $-1 < y < 0)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} y + \sqrt{1-u^2}\,du \overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} \frac{4}{\pi}\left[[yu]_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(0) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\sqrt{1-y^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ 0\sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-1+y^2}\right]\right] =$$
$$= \frac{4}{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right) - y\sqrt{1-y^2}\right]\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\right]$$

- Si $(x,y) \in R_4$: $(0 < x$ y $0 < y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1$$

Por tanto, la función de distribución conjunta es:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in R_0 \\ {}^2/_\pi\left[2xy + y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right) + x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y)\in R_1 \\ {}^2/_\pi\left[\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{\pi}{2} + x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y)\in R_2 \\ {}^2/_\pi\left[y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\right], & (x,y)\in R_3 \\ 1, & (x,y)\in R_4 \end{cases}$$

3. **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

Para ello, calculamos en primer lugar las marginales. Tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{4}{\pi}\,dy = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2} \qquad \forall x\in[-1,0]$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2} \qquad \forall y\in[-1,0]$$

Por tanto, dado $y^*\in[-1,0]$, tenemos que:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{{}^4/_\pi}{{}^4/_\pi\cdot\sqrt{1-y^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^{*2}}} \qquad \forall x\in\left[-\sqrt{1-y^{*2}},0\right]$$

De forma análoga, dado $x^*\in[-1,0]$, tenemos que:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{X,Y}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{{}^4/_\pi}{{}^4/_\pi\cdot\sqrt{1-x^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^{*2}}} \qquad \forall y\in\left[-\sqrt{1-x^{*2}},0\right]$$

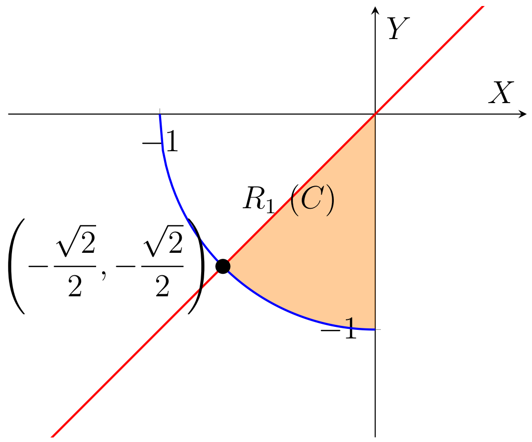



Figura 2: Conjunto en el que se insersecan $C$ y $X-Y>0$.

4. **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X-Y>0$.

   Veamos gráficamente este conjunto en la Figura 2, en el que el punto de corte es:

$$-\sqrt{1-x^2}=x \Longrightarrow 1-x^2=x^2 \Longrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X-Y>0] &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x}\frac{4}{\pi}\,dy\,dx=\frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{2}/2}^{0}x+\sqrt{1-x^2}\,dx= \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{2}/2}^{0}+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}(0)-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+0\sqrt{1-0^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-{}^2\!/\!_4}\right]\right]= \\
&= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-{}^2\!/\!_4}\right]\right]=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]\right]= \\
&= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{\pi}}+\frac{1}{2}+\frac{\cancel{1}}{\cancel{\pi}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5. **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable aleatoria $Y$ conocidos los valores de la variable $X$ y el error cuadrático medio de esta aproximación.

   La mejor aproximación por mínimos cuadrados es la curva de regresión de $Y$ sobre $X$:

$$\begin{aligned}
E[Y\mid X=x] &= \int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{Y|X=x}(y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}= \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[0-\frac{1-x^2}{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[-\frac{1-x^2}{2}\right]=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\qquad \forall x\in[-1,0]
\end{aligned}$$

   Por tanto, la mejor aproximación por mínimos cuadrados es:

$$E[Y\mid X]=-\frac{\sqrt{1-X^2}}{2}$$

El error cuadrático medio de esta aproximación es:

$$\text{E.C.M.}(E[Y \mid X]) = E[\text{Var}[Y \mid X]] = E[Y^2] - E\left[E^2[Y \mid X]\right]$$

Tenemos que:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{0} y^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{0} y^2 \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy$$

Aplicamos ahora el cambio de variable $y = \text{sen}(t)$, por lo que:

$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \text{sen}^2(t) \cdot \sqrt{1-\text{sen}^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \text{sen}^2(t) \cdot \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1-\cos(2t)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} 1-\cos^2(2t)\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} 1 - \frac{1+\cos(4t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(4t)}{8}\right]_{-\pi/2}^{0} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(4t)}{8}\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
E\left[E^2[Y \mid X]\right] &= E\left[\left(-\frac{\sqrt{1-X^2}}{2}\right)^2\right] = E\left[\frac{1-X^2}{4}\right] = \frac{1}{4}E[1-X^2] = \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - E[X^2]\right] \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado que, como las funciones de densidad de $X$ y $Y$ son iguales, $E[X^2] = E[Y^2]$. Por tanto, tenemos que:

$$\text{E.C.M.}(E[Y \mid X]) = E[Y^2] - E\left[E^2[Y \mid X]\right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4-3}{16} = \frac{1}{16}$$

6. **(0.50 puntos)** Obtener una media de la bondad del ajuste del apartado anterior.

La media de la bondad del ajuste es el valor de $\eta^2_{Y|X}$:

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\text{Var}[E[Y \mid X]]}{\text{Var}[Y]} = 1 - \frac{\text{E.C.M.}(E[Y \mid X])}{\text{Var}[Y]}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{0} y \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{0} y \cdot \sqrt{1-y^2}\,dy = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{1}{4} - \left(-\frac{4}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{\text{E.C.M.}(E[Y \mid X])}{\text{Var}[Y]} = 1 - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}} = 1 - \frac{9\pi^2}{4(9\pi^2-64)} = \frac{36\pi^2 - 256 - 9\pi^2}{4(9\pi^2-64)} =$$
$$= \frac{27\pi^2 - 256}{4(9\pi^2-64)} \approx 0{,}10553$$

Por tanto, vemos que el ajuste no es adecuado.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio $(X, Y)$ con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{2t_1 + 4t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$

1. **(0.75 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables $(X, Y)$.

   La función generatriz de momentos de una normal bivariante es:

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2}{2}\right)$$

   Vemos por tanto que $(X, Y)$ sigue una distribución normal bivariante con parámetros:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = 0 \\ \sigma_1^2 = 4 \\ \sigma_2^2 = 9 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 = 3 \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, el coeficiente de correlación lineal es:

$$\rho_{X,Y} = \rho = \frac{3}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

   Por otro lado, sabemos que las curvas de regresión coinciden con las rectas de regresión, luego la razón de correlación es:

$$\eta^2_{Y/X} = \eta^2_{X/Y} = \rho^2_{X,Y} = \frac{1}{4}$$

2. **(0.75 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y \mid X = 1$ y $X \mid Y = 0$.

Sabemos que, dados $x^*, y^* \in \mathbb{R}$, las distribuciones condicionadas son:

$$Y \mid X = x^* \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x^* - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$
$$X \mid Y = y^* \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y^* - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$Y \mid X = 1 \sim \mathcal{N}\left(0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-1), 9\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) = \mathcal{N}\left(0, {}^{27}/_{4}\right)$$
$$X \mid Y = 0 \sim \mathcal{N}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(0-0), 4\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) = \mathcal{N}\left(1, 3\right)$$

3. **(1 punto)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y-X)$. Justificar que las variabes aleatorias $2X$ y $Y-X$ tienen cierta asociación lineal en sentido negativo.

Tenemos que:

$$(2X, Y-X) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} A, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, notando $X' = 2X$ y $Y' = Y-X$, tenemos que $(X', Y') \sim \mathcal{N}(\mu A, A^t\Sigma A)$, donde:

$$\mu A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^t\Sigma A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\rho_{X',Y'} = \frac{-2}{\sqrt{16}\sqrt{7}} \approx -0{,}18$$
$$\rho^2_{X',Y'} = \frac{2^2}{16\cdot 7} = \frac{1}{28} = 0{,}03$$

Por tanto, como $\rho^2_{X',Y'}$ es muy cercano a 0, no tienen apenas asociación. No obstante, de tenerla, como $\rho_{X',Y'}$ es negativo, es en sentido negativo.