Geometría I

Examen II

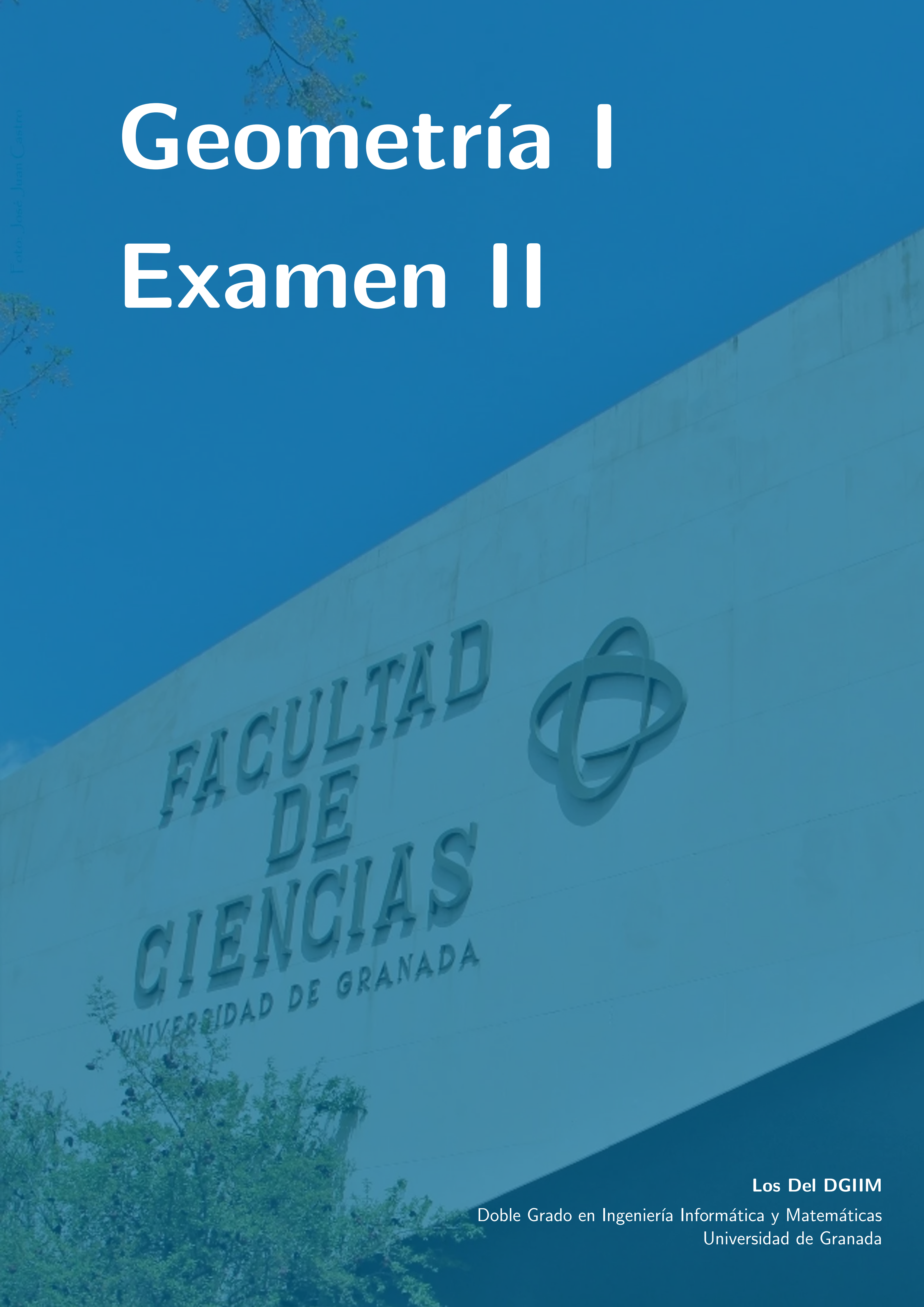

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen II

Los Del DGIIM

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 1ª Prueba. Temas 1 y 2.

Fecha 3 de diciembre de 2021.

Duración 90 minutos.

Ejercicio 1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran los subconjuntos

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0\right\},$$
$$W = \mathcal{L}\left(\{(1,0,1,1),(0,1,2,3)\}\right).$$

1. [**1 punto**] Demuestra que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   Obtengo unas ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \middle| \ \begin{array}{c} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_i = x_i \quad i = 2,3,4 \end{array} \right\} \\ &= \left\{(2x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\right\} \end{aligned}$$

   Sea $u, u' \in U$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Para ver que es un subespacio vectorial, comprobemos que $au + au' \in U$.

$$\begin{aligned} au + bu' &= a(2(x_3 - x_4), x_2, x_3, x_4) + b(2(x_3' - x_4'), x_2', x_3', x_4') = \\ &= (2(ax_3 + bx_3') - 2(ax_4 + bx_4'), ax_2 + bx_2', ax_3 + bx_3', ax_4 + bx_4') \qquad \in U \end{aligned}$$

   Como $au + au' \in U$, tenemos que U es cerrado para sumas y producto por escalares, por lo que es un subespacio vectorial.

2. [**1 punto**] Calcula una base $\mathcal{B}_U$ de U.

   Sea $(0,0,1,1), (4,3,1,-1), (2,0,2,1) \in U$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3$$

   Por tanto, esos tres vectores son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$. Además, como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \dim_{\mathbb{R}}(U) =$nº de ec. implícitas, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \text{nº de ec. implícitas} = 4 - 1 = 3$$

   Como $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ y esos tres vectores son linealmente independientes, tenemos que forman una base.

$$\mathcal{B}_U = \{(0,0,1,1), (4,3,1,-1), (2,0,2,1)\}$$

3. [**1 punto**] Amplía la base $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

   Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$, tenemos que la base $\mathcal{B}$ ha de tener 4 vectores:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

   Por tanto, los 4 vectores son linealmente independientes. Como la dimensión es 4, tenemos que forman base.

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1,1), (4,3,1,-1), (2,0,2,1), (0,0,0,1)\}$$

4. **[1 punto]** Calcula las coordenadas del vector $w = (3, -1, 1, 1)$ respecto de $\mathcal{B}$.

Tomando la base usual,

$$\mathcal{B}_u = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} w &= (3, -1, 1, 1)_{\mathcal{B}_u} \\ &= 3(1, 0, 0, 0) - 1(0, 1, 0, 0) + 1(0, 0, 1, 0) + 1(0, 0, 0, 1) \\ &= a(0, 0, 1, 1) + b(4, 3, 1, -1) + c(2, 0, 2, 1) + d(0, 0, 0, 1) \\ &= (4b + 2c, 3b, a + b + 2c, a - b + c + d)_{\mathcal{B}_u} \\ &= (a, b, c, d)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Por la unicidad de expresión respecto a una base:

$$\begin{cases} 3 = 4b + 2c \longrightarrow c = \frac{3-4b}{2} = \frac{3+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{13}{3}}{2} = \frac{13}{6} \\ -1 = 3b \longrightarrow b = -\frac{1}{3} \\ 1 = a + b + 2c \longrightarrow a = 1 - b - 2c = 1 + \frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -3 \\ 1 = a - b + c + d \longrightarrow d = 1 - a + b - c = 1 + 3 - \frac{1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto,

$$w = (3, -1, 1, 1)_{\mathcal{B}_u} = \left(-3, -\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, \frac{13}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

5. **[1 punto]** Calcula la dimensión de $U + W$. Comprueba si dicha suma es directa.

$\mathcal{B}_U = \{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1)\}$ base de U. Calculamos ahora $\mathcal{B}_W$ una base de W.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2, \qquad \text{ya que } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, ambos vectores son linealmente independientes. Como además son sistema generador, forman base.

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$U + W = \mathcal{L}\left(\{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}\right)$$

Veamos cuáles de ellos son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, tenemos que los primeros 4 vectores son linealmente dependientes. Como pertenecen a $\mathbb{R}^4$, no puede haber 5 vectores linealmente independientes, por lo que el 5º vector será linealmente dependiente.

$$U + W = \mathcal{L}\left(\{(0,0,1,1),(4,3,1,-1),(2,0,2,1),(1,0,1,1)\}\right)$$

Como son linealmente independientes y forman sistema generador, forman base. Por tanto,

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 4 \Longrightarrow U+W = \mathbb{R}^4$$

Para ver si es directa o no, necesito calcular $U \cap W$.

$$\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3+2-4 = 1$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W) = 1 \neq 0 \Longrightarrow U\cap W \neq \{0\}$. Por tanto, la suma no es directa.

6. [**1 punto**] Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U+W$ y de $U \cup W$.

   Como $U+W = \mathbb{R}^4$, tenemos que no tiene ecuaciones cartesianas. Para calcular las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$, calculo primero las de W.

   Sea $(x,y,z,t) \in W$. Este debe ser linealmente dependiente de los elementos de su base, luego:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} = 2$$

   Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 2 & z \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = z - 2y - x = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & t \end{vmatrix} = t - 2y - x = 0$$

   Por tanto,

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ x+2y-t=0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y=z \\ z=t \end{array} \right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que las ecuaciones cartesianas de la intersección son:

$$\begin{aligned} U\cap W &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x-2z+2t=0 \\ x+2y=z \\ z=t \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x=0 \\ x+2y=z \\ z=t \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. [4 puntos] Discute y resuelve, cuando sea posible, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + y + z + t + u &=& 1 \\ x + y + az + t + u &=& -1 \\ x + y + z + t + au &=& 1 \end{array}\right.$$

Sea A la matriz de coeficientes del sistema, y $A|C$ la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A|C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$:
$$rg(A) = 1 \qquad rg(A|C) = 2$$
Como $rg(A) \neq rg(A|C)$, por el Teorema de Rouché-Frobenious, tenemos que se trata de un **Sistema Incompatible (SI)**.

- Si $a \neq 1$:
$$rg(A) = 3 \qquad rg(A|C) = 3$$
Como $rg(A) = rg(A|C) <$nº de incógnitas, por el Teorema de Rouché-Frobenious, tenemos que se trata de un **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**.

$$\text{nº parámetros} = \text{nº incógnitas} - rg(A) = 5 - 3 = 2$$

Resuelvo por tanto para $a \neq 1$ con el método de Cramer. Sea $t, u \in \mathbb{R}$ los dos parámetros libres. El sistema de Cramer queda:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + y + z &=& 1 - t - u \\ x + y + az &=& -1 - t - u \\ x + y + z &=& 1 - t - au \end{array}\right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + 1 - 1 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2$$

Por tanto, por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t-u & 1 & 1 \\ -1-t-u & 1 & a \\ 1-t-au & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} u(a-1) & 0 & 0 \\ -1-t-u & 1 & a \\ 1-t-au & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \frac{u(a-1)(1-a)}{-(a-1)^2} = \frac{u(a-1)^2}{(a-1)^2} = u$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1-t-u & 1 \\ 1 & -1-t-u & a \\ 1 & 1-t-au & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \cdots = \frac{-a^2u - at - au + a + t + 2u + 1}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1-t-u \\ 1 & 1 & -1-t-u \\ 1 & 1 & 1-t-au \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1-t-u \\ 1 & 1 & -1-t-u \\ 0 & 0 & 2+u(1-a) \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = -\frac{(a-1)(2+u(1-a))}{(a-1)^2} =$$

$$= -\frac{2+u(1-a)}{a-1} = \frac{2+u(1-a)}{1-a} = \frac{1}{1-a} + u$$