Álgebra I
Examen I

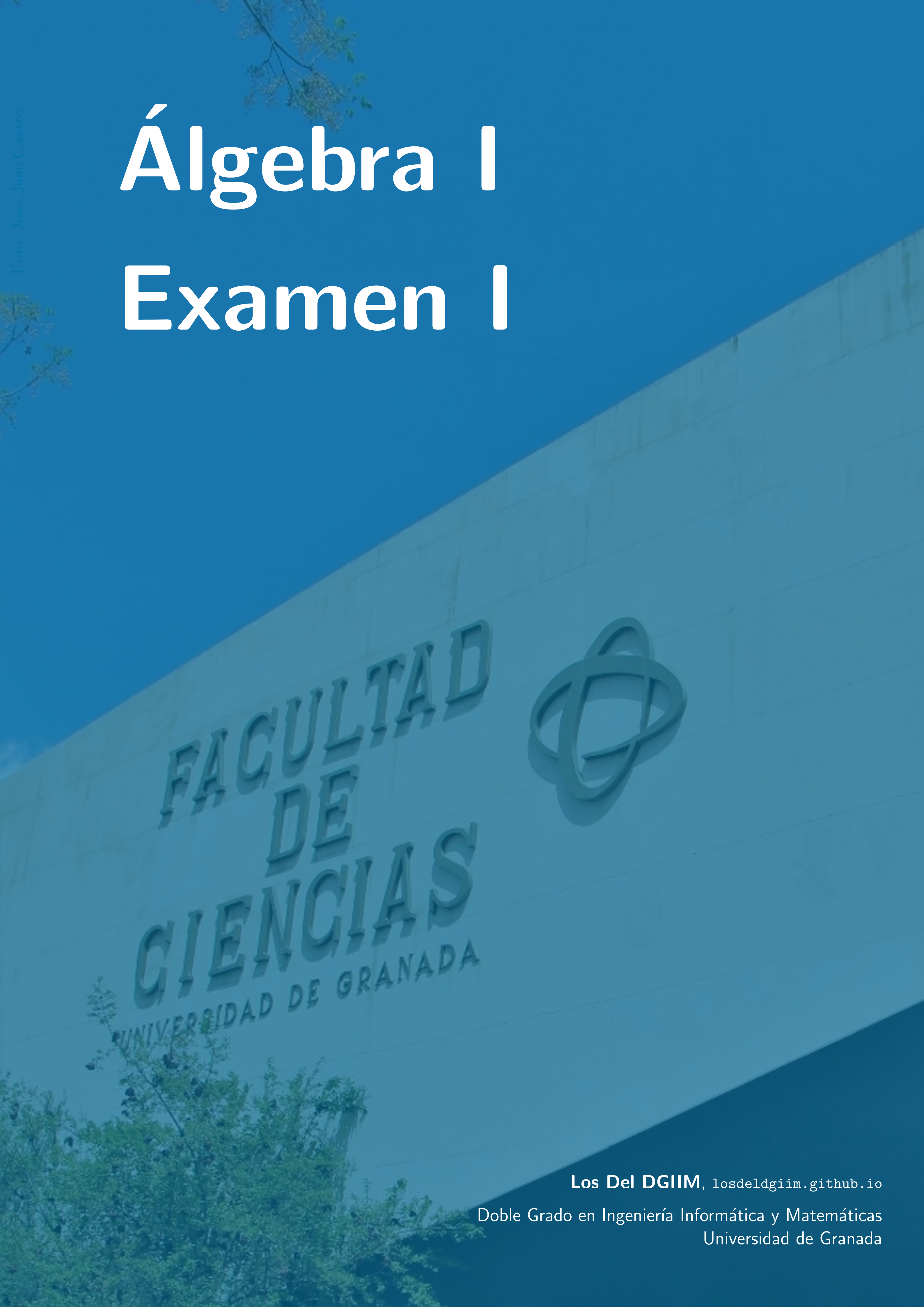

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra I
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Álgebra I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Pilar Carrasco Carrasco.

Descripción Parcial de temas 1 y 2.

Fecha 7 de noviembre de 2022.

Duración 2 horas.

La puntuación de cada ejercicio es de 1 punto.
Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 1. El polinomio $f = x + x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ tiene:

- Dos raíces en $\mathbb{Z}_5[x]$.
- Una raíz en $\mathbb{Z}_5[x]$.
- No tiene raíces en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 2. El anillo producto cartesiano $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$ tiene:

- 13 Unidades.
- 18 Unidades.
- 8 Unidades.

Ejercicio 3. Sean $a_1 = 2120$, $a_2 = 4825$, $b = 19$. El resto de dividir $-a_1a_2$ entre b es:

- 11.
- 8.
- 18.

Ejercicio 4. Sea A un subanillo no trivial de un cuerpo K ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A es siempre un cuerpo.
- A es nunca un cuerpo.
- A es un cuerpo si, y sólamente si, es cerrado para inversos.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto con n elementos y R la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$ARB \Leftrightarrow |A| = |B|$$

Selecciona la afirmación verdadera:

- $|\mathcal{P}(X)/R| = n$.
- $|\mathcal{P}(X)/R| = n + 1$.
- $|\mathcal{P}(X)/R| = n - 1$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Selecciona la afirmación verdadera:

- f es inyectiva no sobreyectiva.
- f es sobreyectiva no inyectiva.

- f tiene inversa.

Ejercicio 7. Sea $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2\}$. Selecciona la afirmación verdadera:

- No existe ninguna aplicación biyectiva de X de Y pero existe al menos una inyectiva.
- Hay exactamente 6 aplicaciones de X en Y que son sobreyectivas.
- Hay exactamente 3 aplicaciones de X en Y que no son sobreyectivas.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto no vacío y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Selecciona la afirmación verdadera:

- $(A - C) \cup (B - C) = (A \cap B) - C$
- $(A - C) \cap (B - C) = (A \cup B) - C$
- $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

Ejercicio 9. Para $a \in \mathbb{Z}$ un número entero, denotemos por $[a]$ a su clase en el anillo $\mathbb{Z}_5$. Selecciona la respuesta correcta:

- Si $[a] \neq [0] \Rightarrow [a^4 + 4] = [0]$.
- Si $[a] \neq [0] \Rightarrow [a^4 + 4] \neq [0]$.
- Si $[a] = [0] \Rightarrow [a^4 + 4] = [0]$.

Ejercicio 10. Sea X un conjunto finito no vacío e Y un subconjunto de X. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap Y = B \cap Y$$

La afirmación "$|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$" es:

- Siempre cierta.
- Siempre falsa.
- A veces verdad y a veces falsa, dependiendo de Y.

Ejercicio 1. El polinomio $f = x + x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ tiene:

- Dos raíces en $\mathbb{Z}_5[x]$.
- Una raíz en $\mathbb{Z}_5[x]$.
- No tiene raíces en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Justificación:
Evaluando f en cada uno de los elementos de $\mathbb{Z}_5$ obtenemos:

$$f(0) = 4 \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 0 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 4$$

Sólo una raíz (un 0).

Ejercicio 2. El anillo producto cartesiano $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$ tiene:

- 13 Unidades.
- 18 Unidades.
- 8 Unidades.

Justificación:
Sabemos que $U(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3) = U(\mathbb{Z}_{10}) \times U(\mathbb{Z}_3)$.
Como: $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$ (siendo $1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 7$, $7^{-1} = 3$ y $9^{-1} = 9$).
$U(\mathbb{Z}_3) = \{1, 2\}$ (siendo $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$).
Entonces, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$ tiene $4 \cdot 2 = 8$ unidades.

Ejercicio 3. Sean $a_1 = 2120$, $a_2 = 4825$, $b = 19$. El resto de dividir $-a_1a_2$ entre b es:

- 11.
- 8.
- 18.

Justificación:
Al dividir a_1a_2 entre 19 obtenemos: $a_1a_2 = 19 \cdot q + r$ con $q = 538368$ y $r = 8$.
Entonces, $-a_1a_2 = 19(-q - 1) + 19 - r$ y entonces el resto es $19 - r = 19 - 8 = 11$.

Ejercicio 4. Sea A un subanillo no trivial de un cuerpo K ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A es siempre un cuerpo.
- A es nunca un cuerpo.
- A es un cuerpo si, y sólamente si, es cerrado para inversos.

Justificación:
Supongamos que A es un cuerpo y sea $u \in A \setminus \{0\}$ un elemento no nulo de A.
Si $u' \in A$ denota el inverso de u en A, será $u \cdot u' = 1$ en el cuerpo K.
Como el inverso es único, entonces $u' = u^{-1}$ y A es cerrado para opuestos.

Recíprocamente, si A es cerrado para inversos, entonces todo elemento no nulo de A tiene inverso en A (el mismo que en K).
Es decir, $U(A) = A \setminus \{0\}$. Consecuentemente, A es un cuerpo.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto con n elementos y R la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$ARB \Leftrightarrow |A| = |B|$$

Selecciona la afirmación verdadera:

- $|\mathcal{P}(X)/R| = n$.
- <u>$|\mathcal{P}(X)/R| = n + 1$.</u>
- $|\mathcal{P}(X)/R| = n - 1$.

Justificación:
Para cada $0 \leqslant k \leqslant n$, sea $A \in \mathcal{P}(X)$ con $|A| = k$.
Entonces, $[A] = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid |B| = |A|\} = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid |B| = k\}$.
Consecuentemente, si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, las clases de equivalencia son:

$$[\emptyset], \quad [\{x_1\}], \quad [\{x_1, x_2\}], \quad \ldots, \quad [X]$$

Es decir, $|\mathcal{P}(X)/R| = n + 1$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Selecciona la afirmación verdadera:

- f es inyectiva no sobreyectiva.
- f es sobreyectiva no inyectiva.
- <u>f tiene inversa.</u>

Justificación:
Es fácil ver (hágase) que la aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \frac{x + 2}{5} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es la inversa de f.

Ejercicio 7. Sea $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2\}$. Selecciona la afirmación verdadera:

- No existe ninguna aplicación biyectiva de X de Y pero existe al menos una inyectiva.
- <u>Hay exactamente 6 aplicaciones de X en Y que son sobreyectivas.</u>

- Hay exactamente 3 aplicaciones de X en Y que no son sobreyectivas.

Justificación:
Son las siguientes:

$$f_1 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 1 \\ \text{b} & \mapsto & 1 \\ \text{c} & \mapsto & 2 \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 1 \\ \text{b} & \mapsto & 2 \\ \text{c} & \mapsto & 1 \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 1 \\ \text{b} & \mapsto & 2 \\ \text{c} & \mapsto & 2 \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 2 \\ \text{b} & \mapsto & 1 \\ \text{c} & \mapsto & 1 \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 2 \\ \text{b} & \mapsto & 1 \\ \text{c} & \mapsto & 2 \end{cases} \qquad f_6 : \begin{cases} \text{a} & \mapsto & 2 \\ \text{b} & \mapsto & 2 \\ \text{c} & \mapsto & 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que son sobreyectivas, ya que $f_i(X) = Y$ para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto no vacío y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Selecciona la afirmación verdadera:

- $(A - C) \cup (B - C) = (A \cap B) - C$
- $(A - C) \cap (B - C) = (A \cup B) - C$
- $\underline{(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C}$

Justificación:

$$(A - C) \cup (B - C) = (A \cap c(C)) \cup (B \cap c(C)) = (A \cup B) \cap c(C) = (A \cup B) - C$$

Ejercicio 9. Para $a \in \mathbb{Z}$ un número entero, denotemos por $[a]$ a su clase en el anillo $\mathbb{Z}_5$. Selecciona la respuesta correcta:

- $\underline{\text{Si } [a] \neq [0] \Rightarrow [a^4 + 4] = [0].}$
- Si $[a] \neq [0] \Rightarrow [a^4 + 4] \neq [0]$.
- Si $[a] = [0] \Rightarrow [a^4 + 4] = [0]$.

Justificación:
Si $[a] \neq 0$, entonces $[a] = [r]$ con $1 \leqslant r \leqslant 4$.
Y entonces: $[a^4 + 1] = [a]^4 + [1] = [r]^4 + [1] = [r^4 + 1]$, con lo que:

$$\begin{array}{ll} \text{Para r=1,} & [\text{a}^4 + 4] = [1 + 4] = [5] = [0] \\ \text{Para r=2,} & [\text{a}^4 + 4] = [16 + 4] = [20] = [0] \\ \text{Para r=3,} & [\text{a}^4 + 4] = [81 + 4] = [85] = [0] \\ \text{Para r=4,} & [\text{a}^4 + 4] = [256 + 4] = [260] = [0] \end{array}$$

Ejercicio 10. Sea X un conjunto finito no vacío e Y un subconjunto de X. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap Y = B \cap Y$$

La afirmación "$|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$" es:

- Siempre cierta.

- Siempre falsa.
- A veces verdad y a veces falsa, dependiendo de Y.

Justificación:
Para $Y = \emptyset$, la relación $\sim$ es:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cup \emptyset = B \cup \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

Y entonces, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$, su clase es $[A] = \{A\}$, con lo que:

$$|\mathcal{P}(X)/\sim| = |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} \geqslant 2$$

Pues $|X| \geqslant 1$. Así que la afirmación es falsa en este caso.

Por otro lado, para $Y = X$, la relación $\sim$ es:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cup X = B \cup X \Leftrightarrow X = X$$

Y entonces, todos los elemtos de $\mathcal{P}(X)$ están relacionados, con lo que hay únicamente una clase de equivalencia. Luego:

$$|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$$

Así que la afirmación es verdadera en este caso.