# Cálculo II
# Examen VI

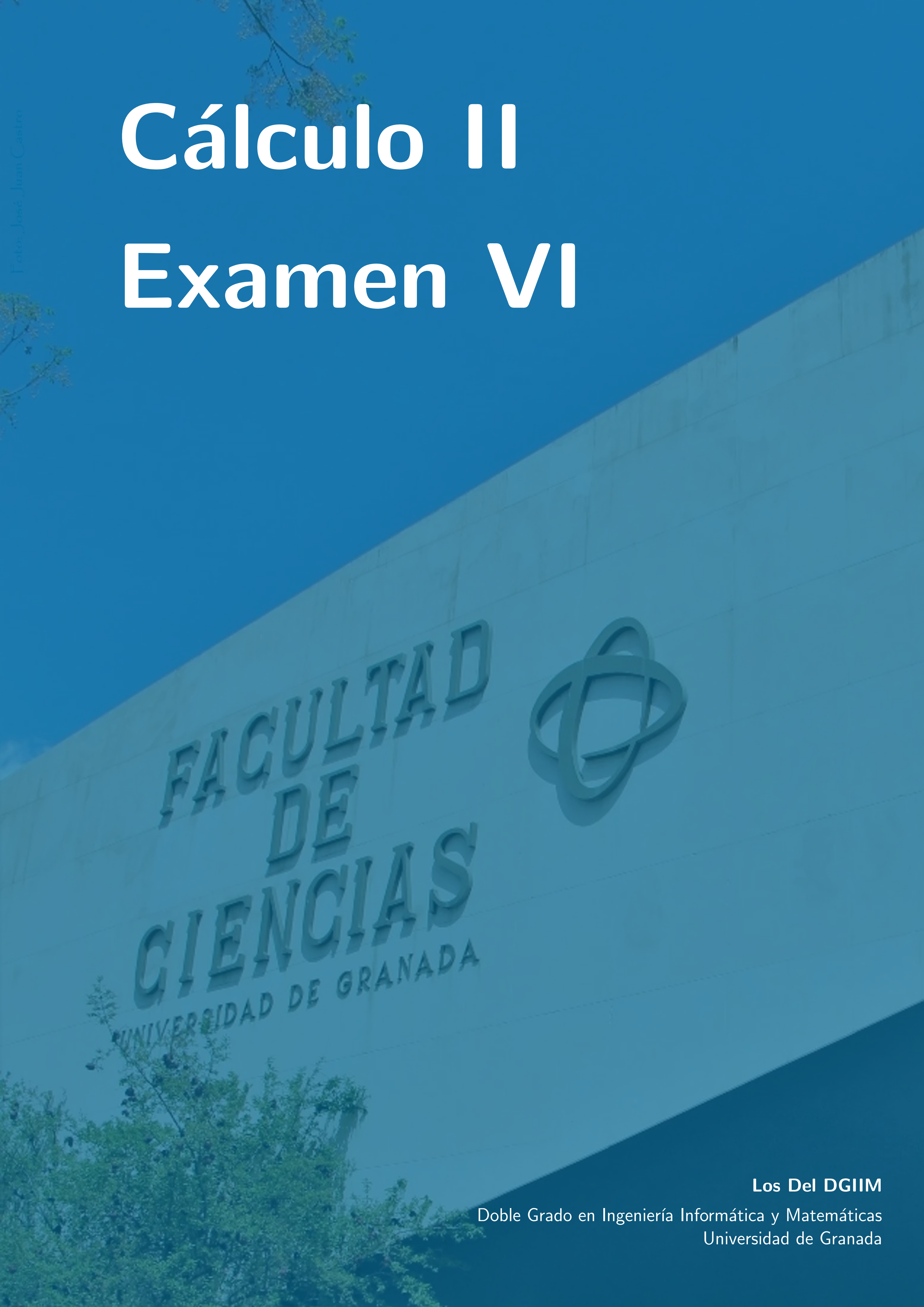



Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Cálculo II
# Examen VI

Los Del DGIIM

Granada, 2023

**Asignatura** Cálculo II.

**Curso Académico** 2020-21.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** María Victoria Velasco Collado.

**Descripción** Segundo Parcial. Integración. Temas 5-7.

**Ejercicio 1. [2 puntos]** Justificar de forma razonada si las siguientes funciones son o no uniformemente continuas y/o lipschitzianas.

1. $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x \ln x$, para cada $x \in ]0,1[$.

   Tenemos que es derivable en $]0,1[$, con:

   $$f'(x) = \ln x + 1 \qquad Im(f') = ]-\infty, 1[$$

   Por tanto, como la derivada de $f$ no está acotada en $]0,1[$, tenemos que no es lipschitziana. Veamos si es uniformemente continua.

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'Hôpital}{=} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

   Por tanto, definiendo $f(0) = f(1) = 0$, tenemos una ampliación continua del dominio de $f$, por lo que $f$ sí es uniformemente continua.

2. $F : [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x g(t)\, dt$, donde $g : [1,3] \to \mathbb{R}$ es una función monótona.

   Demostramos en primer lugar que $g$ está acotada. Como $g$ es monótona, supongamos $g$ creciente (no es restrictivo). Entonces:

   $$g(1) \leq g(x) \leq g(3) \qquad \forall x \in [1,3]$$

   Por tanto, tenemos que está acotada.

   Por ser $g$ monótona y acotada, tenemos que es Riemman Integrable. Además, por ser acotada, tenemos que $|g(x)| \leq M \in \mathbb{R}$. Entonces:

   $$|F(y) - F(x)| = \left| \int_1^y g(t)\, dt - \int_1^x g(t)\, dt \right| = \left| \int_x^y g(t)\, dt \right| \leq M|y - x|$$

   Por tanto, tenemos que $F(x)$ es uniformemente continua y, por tanto, lipschitziana y continua.

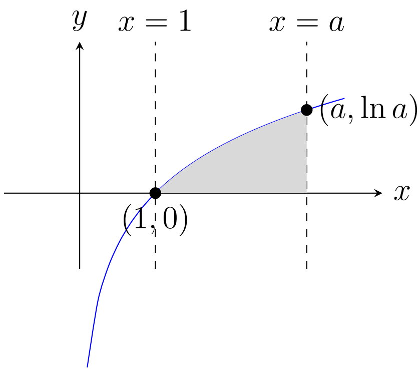
**Ejercicio 2. [1 punto]** Calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n+n}{n}\right)^2 \right)$$

Definimos $f(x) = (1+x)^2$. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 + 2x + 1\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

**Ejercicio 3.** **[2 puntos]** Determina para qué valores de $a > 0$, el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje de abcisas y las rectas $x = 1, x = a$ es igual a 1.




- Supongamos $a > 1$:

  Tenemos que el área delimitada es:

$$A = \int_1^a \ln x\, dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = \ln & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array}\right] = [x \ln x]_1^a - \int_1^a x \cdot \frac{1}{x}\, dx = [x \ln x - x]_1^a =$$
$$= a \ln a - a - \ln(1) + 1 = 1\ u^2 \iff a \ln a - a = 0 \iff \ln a = 1 \iff a = e$$

  Por tanto, tenemos que el valor buscado es $a = e$.

- Supongamos $0 < a \leq 1$:

$$A = \int_a^1 -\ln x\, dx = -\int_a^1 \ln x\, dx = \int_1^a \ln x\, dx = 1 \iff a = e$$

  donde he usado el resultado del apartado anterior. Pero $a \leq 1$, por lo que no es posible.

  *Observación.*

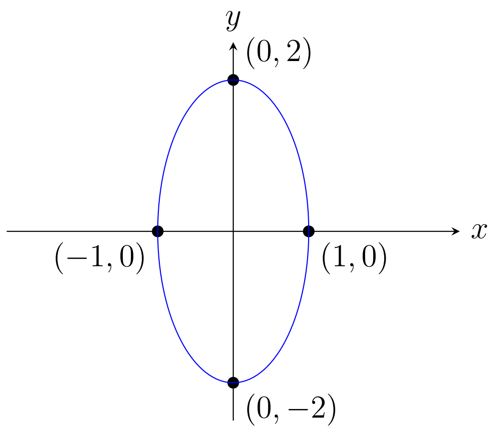
$$A = \int_0^1 -\ln x\, dx = -\lim_{c \to 0} \int_c^1 \ln x = -\lim_{c \to 0} [x \ln x - x]_c^1 = 1 + \lim_{c \to 0} c \ln c - c = 1$$

  donde he usado que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.

  Por tanto, tenemos que el valor pedido sería $a = 0$, pero tenemos que $a > 0$.

**Ejercicio 4.** **[2 puntos]** Calcular la longitud de la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

Tenemos que se trata de la elipse centrada en el punto $P(0, 0)$ con los ejes paralelos a los ejes cartesianos. El semieje horizontal mide 1, y el semieje vertical mide 2 unidades. Por tanto, la representación es esta:




Al ser simétrica la figura, calculo solo la longitud contenida en el primer cuadrante, que es $\frac{1}{4}$ de la longitud total.

En el primer cuadrante, tengo que $x, y > 0$. Por tanto, la función queda:

$$y^2 = 4(1 - x^2) \Longrightarrow y = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Por tanto, la longitud de la elipse en el primer cuadrante es:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Calculo la derivada:

$$y'(x) = 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} \Longrightarrow [y'(x)]^2 = \frac{4x^2}{1 - x^2}$$

Por tanto,

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x^2 + 4x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + 3x^2}{1 - x^2}}\, dx$$

*Observación.* Este ejercicio se impugnó ya que con los conocimientos de la asignatura no es posible calcular dicha integral.

**Ejercicio 5. [2 puntos]** Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) := \int_0^x e^{t^2}\, dt$. Estudiar su monotonía, y determinar su imagen. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)^2 + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} te^{2t^4}\, dt}$$

Tenemos que el integrando es una función continua, por lo que es localmente integrable. Por tanto, por el TFC, tenemos que $F(x)$ es continua, con $F'(x) = e^{x^2}$. Como $F'(x) > 0$, tenemos que $F(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$. Para calcular la imagen, antes veamos su si el límite en $+\infty$ converge. Tenemos que $e^x < e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, por lo que:

$$\int_0^\infty e^{t^2}\, dt \text{ convergente} \Longrightarrow \int_0^\infty e^t\, dt \text{ convergente}$$

Como la integral de $e^x$ no converge, tenemos que la integral que buscamos tampoco. Por tanto, tenemos que diverge positivamente.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

Además, tenemos que $F(0) = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$Im(F) = \mathbb{R}_0^+$$

Para resolver el límite, tenemos que el numerador diverge positivamente. Veamos el comportamiento del denominador en $+\infty$. Como el integrando diverge positivamente, tenemos que la integral también. Además, como el integrando es positivo, puedo aplicar el TFC para calcular la derivada. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2 + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} te^{2t^4}\,dt} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2F(x)F'(x)+F'(x)}{\sqrt{x}e^{2x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2F(x)\cancel{e^{x^2}} + \cancel{e^{x^2}}}{\dfrac{e^{x^2}\cdot\cancel{e^{x^2}}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4F(x)+2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

**Ejercicio 6.** Demostrar que $0 \leq \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx \leq \frac{1}{2}$

Definimos $f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Veamos en primer lugar el valor de la siguiente integral:

$$\int_2^\infty g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b == \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

Para razonar la desigualdad, vemos la siguiente desigualdad:

$$f(x) \leq g(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow 1+e^x > 1 \Longleftrightarrow e^x > 0$$

Por tanto, tenemos que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Como son Riemman Integrables y la integral conserva el orden, tenemos que:

$$\int_2^\infty 0\,dx \leq \int_2^\infty f(x)\,dx \leq \int_2^\infty g(x)\,dx$$

Usando el valor calculado de la integral de $g(x)$, tenemos que:

$$0 \leq \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx \leq \frac{1}{2}$$