Ejercicios Probabilidad

Arturo Olivares Martos

22 de noviembre de 2024

Ejercicio 1. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).

   Para que f sea función de densidad de probabilidad, necesitamos que:

   $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = k \int_0^1 \int_0^1 dy\,dx = k \int_0^1 1\,dx = k\,[x]_0^1 = k.$$

2. Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta del vector bidimensional $(Z,T) = (X+Y, X-Y)$.

   Definimos la transformación:

   $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (X,Y) & \longmapsto & (Z,T) = (X+Y, X-Y) \end{array}$$

   Para obtener g^{-1}, buscamos obtener X,Y en función de Z,T:

   $$\left.\begin{cases} Z = X+Y, \\ T = X-Y. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{Z+T}{2}, \\ Y = \dfrac{Z-T}{2}. \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (Z,T) & \longmapsto & (X,Y) = \left(\dfrac{Z+T}{2}, \dfrac{Z-T}{2}\right) \end{array}$$

   Tenemos que todas las componentes de g^{-1} son derivables:

   $$\frac{\partial X}{\partial Z}(Z,T) = 1/2, \qquad \frac{\partial X}{\partial T}(Z,T) = 1/2,$$
   $$\frac{\partial Y}{\partial Z}(Z,T) = 1/2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial T}(Z,T) = -1/2.$$

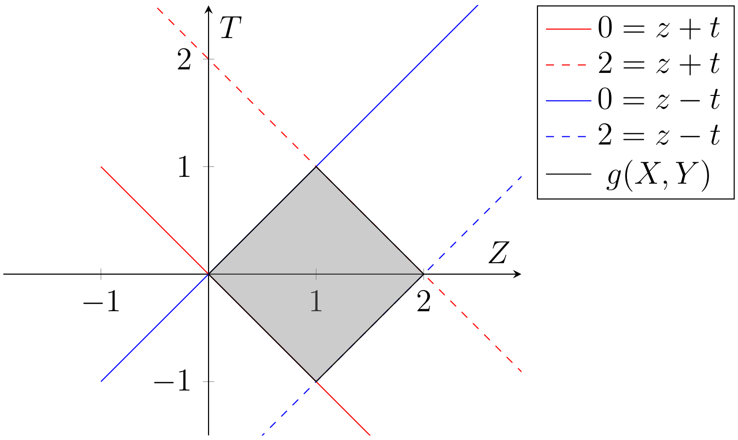
Además, tenemos que:

$$\det Jg^{-1}(z,t) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}(-1-1) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2} \neq 0 \qquad \forall (z,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, $(Z,T) = g(X,Y)$ es un vector aleatorio continuo. Veamos el valor de $g(X,Y)$ para $X,Y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \left\{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \frac{z+t}{2} < 1,\ 0 < \frac{z-t}{2} < 1\right\} = \\ &= \left\{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < z+t < 2,\ 0 < z-t < 2\right\} \end{aligned}$$

Veámoslo gráficamente:



Buscamos ahora la función de densidad de probabilidad de (Z,T):

$$\begin{aligned} f_{(Z,T)}(z,t) &= f_{(X,Y)}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \cdot \left|\det Jg^{-1}(z,t)\right| = \\ &= \begin{cases} k \cdot \dfrac{1}{2} & (z,t) \in g(X,Y), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de (Z,T) es:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < z+t < 2,\ 0 < z-t < 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).

   Para $z \in [0,2]$, tenemos que:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,T)}(z,t)\, dt$$

   Los límites de integración los vemos claros en la gráfica anterior. Distinguimos en función del valor de z:

- Si $z \in [0,1]$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_{-z}^{z} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\,[t]_{-z}^{z} = \frac{1}{2}(z-(-z)) = z.$$

- Si $z \in [1,2]$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^{2-z} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\,[t]_{z-2}^{2-z} = \frac{1}{2}(2-z-(z-2)) = \frac{1}{2}(4-2z) = 2-z.$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de Z es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0<z<1, \\ 2-z & 1<z<2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $t \in [-1,1]$, tenemos que:

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,T)}(z,t)\,dz$$

Los límites de integración los vemos claros en la gráfica anterior. Distinguimos en función del valor de t:

- Si $t \in [-1,0]$, entonces:

$$f_T(t) = \int_{-t}^{2+t} \frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\,[z]_{-t}^{2+t} = \frac{1}{2}(2+t-(-t)) = 1+t.$$

- Si $t \in [0,1]$, entonces:

$$f_T(t) = \int_{t}^{2-t} \frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\,[z]_{t}^{2-t} = \frac{1}{2}(2-t-t) = 1-t.$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de T es:

$$f_T(t) = \begin{cases} 1+t & -1<t<0, \\ 1-t & 0<t<1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Determinar la función de distribución de probabilidad de ${}^{X}\!/_{Y}$ y XY.

   Definimos la transformación:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (X,Y) & \longmapsto & (Z,T) = ({}^{X}\!/_{Y}, XY) \end{array}$$

   Para obtener g^{-1}, buscamos obtener X,Y en función de Z,T:

$$\left\{\begin{array}{l} Z = {}^{X}\!/_{Y}, \\ T = XY. \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = ZY = \sqrt{ZT}, \\ Y = \sqrt{{}^{T}\!/_{Z}}. \end{array}\right.$$

Como $X, Y > 0$, entonces $Z, T > 0$, por lo que la inversa está bien definida.

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (Z,T) & \longmapsto & (X,Y) = (\sqrt{ZT}, \sqrt{T/Z}) \end{array}$$

Tenemos que todas las componentes de g^{-1} son derivables:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial X}{\partial Z}(Z,T) = \dfrac{T}{2\sqrt{ZT}} = \dfrac{\sqrt{T}}{2\sqrt{Z}}, & \dfrac{\partial X}{\partial T}(Z,T) = \dfrac{\sqrt{Z}}{2\sqrt{T}}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial Z}(Z,T) = \dfrac{-\frac{T}{Z^2}}{2\sqrt{T/Z}} = -\dfrac{\sqrt{T}}{2Z\sqrt{Z}}, & \dfrac{\partial Y}{\partial T}(Z,T) = \dfrac{1}{2Z\sqrt{T/Z}} = \dfrac{1}{2\sqrt{TZ}}. \end{array}$$

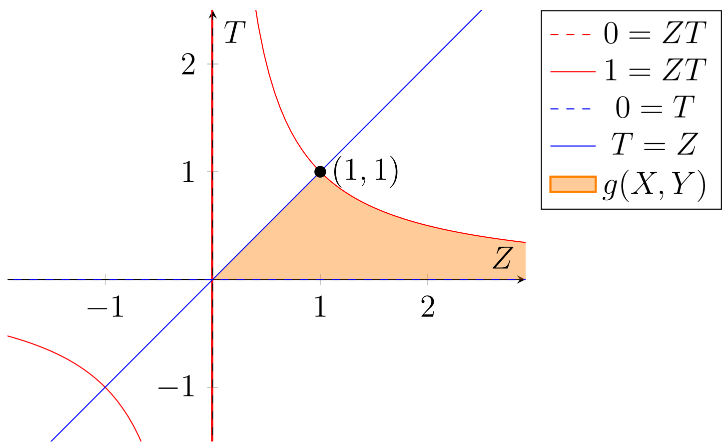
Además, tenemos que:

$$\det Jg^{-1}(z,t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{T}}{2\sqrt{Z}} & \dfrac{\sqrt{Z}}{2\sqrt{T}} \\ -\dfrac{\sqrt{T}}{2Z\sqrt{Z}} & \dfrac{1}{2\sqrt{TZ}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4Z} + \frac{1}{4Z} = \frac{1}{2Z} > 0 \qquad \forall (z,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Por tanto, $(Z,T) = g(X,Y)$ es un vector aleatorio continuo. Estudiamos ahora el conjunto $g(X,Y)$:

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \left\{ (z,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 0 < \sqrt{ZT} < 1,\ 0 < \sqrt{T/Z} < 1 \right\} = \\ &= \left\{ (z,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 0 < ZT < 1,\ 0 < T < Z \right\} \end{aligned}$$

Veamos el conjunto $g(X,Y)$ gráficamente:



Buscamos ahora la función de densidad de probabilidad de (Z,T):

$$\begin{aligned} f_{(Z,T)}(z,t) &= f_{(X,Y)}\left(\sqrt{ZT}, \sqrt{T/Z}\right) \cdot \left|\det Jg^{-1}(z,t)\right| = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2z} & (z,t) \in g(X,Y), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de (Z, T) es:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z} & 0 < ZT < 1,\ 0 < T < Z, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para obtener la función de densidad de probabilidad de $Z = {}^X\!/_Y$, tenemos que:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,T)}(z,t)\,dt$$

Los límites de integración los vemos claros en la gráfica anterior. Distinguimos en función del valor de z:

- Si $z \in [0, 1]$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{2z}\,dt = \frac{1}{2z}\,[t]_0^z = \frac{1}{2z}z = \frac{1}{2}.$$

- Si $z \in [1, +\infty[$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_0^{1/z} \frac{1}{2z}\,dt = \frac{1}{2z}\,[t]_0^{1/z} = \frac{1}{2z^2}.$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de Z es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < z < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2z^2} & 1 < z, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para obtener la función de densidad de probabilidad de $T = XY$, tenemos que:

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,T)}(z,w)\,dz$$

Los límites de integración los vemos claros en la gráfica anterior. Para $t \in \,]0, 1]$, tenemos que:

$$f_T(t) = \int_t^{1/t} \frac{1}{2z}\,dz = \frac{1}{2}\,[\ln(z)]_t^{1/t} = \frac{1}{2}\,[\ln({}^1\!/_t) - \ln(t)] = \frac{1}{2}\,[\ln(1) - 2\ln(t)] = -\ln(t)$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de T es:

$$f_T(t) = \begin{cases} -\ln(t) & 0 < t < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una vez tenemos ambas marginales, es fácil obtener la función de distribución de cada una. Respecto de Z, distinguimos en función del valor de z:

- Si $z \in [0,1]$, entonces:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(z)\, dz = \int_0^z \frac{1}{2}\, dz = \frac{1}{2}\, [z]_0^z = \frac{z}{2}$$

- Si $z \in [1, +\infty[$, entonces:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_Z(z)\, dz = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dz + \int_1^z \frac{1}{2z^2}\, dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\right]_1^z = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - 1\right) = 1 - \frac{1}{2z} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de distribución de probabilidad de $Z = {}^{X}\!/\!{}_{Y}$ es:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{2} & 0 < z < 1, \\ \\ 1 - \dfrac{1}{2z} & 1 < z, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Respecto de T, para $t \in \,]0,1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_T(t)\, dt = \int_0^t -\ln(t)\, dt = -\left[t\ln(t) - t\right]_0^t = \\ &= -t\ln(t) + t + \lim_{t\to 0} t\ln(t) = -t\ln(t) + t \end{aligned}$$

Por tanto, la función de distribución de probabilidad de $T = XY$ es:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0, \\ -t\ln(t) + t & 0 < t < 1, \\ 1 & 1 \leqslant t, \end{cases}$$

5. Determinar la función de distribución de probabilidad de $\max(X,Y)$, y del $\min(X,Y)$.

   Dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$P[\max(X,Y) \leqslant x] = P[X \leqslant x, Y \leqslant x] = P[(X,Y) \leqslant (x,x)]$$

   Calculamos por tanto dicho valor sabiendo $f_{(X,Y)}$. Para $z \in [0,1]$, tenemos que:

$$P[(X,Y) \leqslant (z,z)] = \int_0^z \int_0^z k\, dy\, dx = k \int_0^z z\, dx = kz\, [x]_0^z = kz^2 = z^2$$

   Por tanto, la función de distribución de probabilidad de $\max(X,Y)$ es:

$$F_{\max(X,Y)}(z) = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0, \\ z^2 & 0 < z < 1, \\ 1 & 1 \leqslant z. \end{cases}$$

Respecto del $\text{mín}(X, Y)$, dado $z \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$P[\text{mín}(X, Y) \leqslant z] = 1 - P[\text{mín}(X, Y) > z] = 1 - P[(X, Y) > z]$$

Calculamos dicho valor sabiendo $f_{(X,Y)}$. Distinguimos en función de z:

- Si $z \leqslant 0$, entonces $P[(X, Y) > z] = 1$.
- Si $0 < z < 1$, entonces:

$$P[(X, Y) > z] = \int_z^1 \int_z^1 k\, dy\, dz = k \int_z^1 (1 - z)\, dz = k(1 - z)\, [x]_z^1 = (1 - z)^2$$

- Si $z \geqslant 1$, entonces $P[(X, Y) > z] = 0$.

Por tanto, la función de distribución de probabilidad de $\text{mín}(X, Y)$ es:

$$F_{\text{mín}(X,Y)}(z) = 1 - P[(X, Y) > z] = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0, \\ 1 - (1 - z)^2 & 0 < z < 1, \\ 1 & 1 \leqslant z. \end{cases}$$

6. Determinar la función de distribución de probabilidad conjunta del $\text{máx}(X, Y)$, y del $\text{mín}(X, Y)$.

   Dado $z, t \in \mathbb{R}$, distinguimos casos:

   - Si $z \leqslant t$, como $\text{mín}(X, Y) \leqslant \text{máx}(X, Y)$, entonces:

     $$P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z, \text{mín}(X, Y) \leqslant t] = P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z] = F_{\text{máx}(X,Y)}(z)$$

     Distinguimos en función de z:
     - Si $z \leqslant 0$, entonces $F_{\text{máx}(X,Y)}(z) = 0$.
     - Si $0 < z < 1$, entonces $F_{\text{máx}(X,Y)}(z) = z^2$.
     - Si $z \geqslant 1$, entonces $F_{\text{máx}(X,Y)}(z) = 1$.
   - Si $z > t$, entonces:

     $$\begin{aligned} P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z, \text{mín}(X, Y) \leqslant t] \\ &= P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z] - P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z, \text{mín}(X, Y) > t] = \\ &= P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z] - P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] \end{aligned}$$

     Distinguimos en función de z:
     - Si $z \leqslant 0$, entonces $P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z] = 0$. Además, $t < z \leqslant 0$. Por tanto:

       $$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = 0$$

       Por tanto, $P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z, \text{mín}(X, Y) \leqslant t] = 0$.
     - Si $0 < z < 1$, entonces $P[\text{máx}(X, Y) \leqslant z] = z^2$. Además, sabemos que $t < z < 1$. Distinguimos en función de t:

- $\circ$ Si $t \leqslant 0$, entonces:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_0^z \int_0^z k\,dy\,dx = kz^2 = z^2$$

Por tanto, $P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z, \text{mín}(X,Y) \leqslant t] = z^2 - z^2 = 0$.

- $\circ$ Si $0 < t < z$, entonces:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_t^z \int_t^z k\,dy\,dx = k(z-t)^2 = (z-t)^2$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z, \text{mín}(X,Y) \leqslant t] = z^2-(z-t)^2 = z^2-z^2+2zt-t^2 = 2zt-t^2$$

- Si $z \geqslant 1$, entonces $P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z] = 1$. Distinguimos en función de t:

- $\circ$ Si $t \leqslant 0$, entonces:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_0^1 \int_0^1 k\,dy\,dx = k = 1$$

Por tanto, $P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z, \text{mín}(X,Y) \leqslant t] = 1 - 1 = 0$.

- $\circ$ Si $0 < t < 1$, entonces:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_t^1 \int_t^1 k\,dy\,dx = k(1-t)^2 = (1-t)^2$$

Por tanto,

$$P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z, \text{mín}(X,Y) \leqslant t] = 1-(1-t)^2 = 1-1+2t-t^2 = 2t-t^2$$

- $\circ$ Si $t \geqslant 1$, $t < z$, entonces:

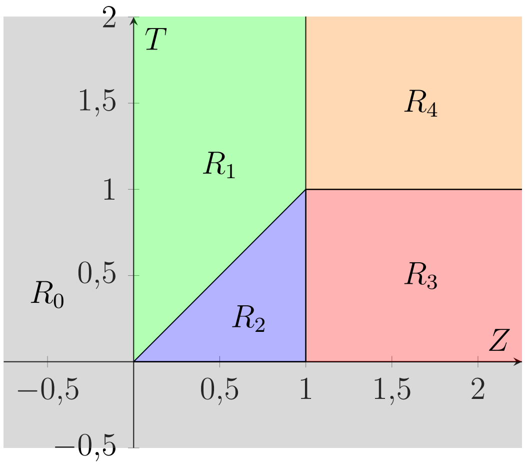
$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = 0$$

Por tanto, $P[\text{máx}(X,Y) \leqslant z, \text{mín}(X,Y) \leqslant t] = 1 - 0 = 1$.

Por tanto, la función de distribución de probabilidad conjunta de $\text{máx}(X,Y)$ y $\text{mín}(X,Y)$ es:

$$F_{\text{máx}(X,Y),\text{mín}(X,Y)}(z,t) = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0 \vee t \leqslant 0 \qquad (R_0), \\ z^2 & z \leqslant t \wedge 0 < z < 1 \qquad (R_1), \\ 2zt - t^2 & 0 < t < z < 1 \qquad (R_2), \\ 2t - t^2 & 0 < t < 1 \leqslant z \qquad (R_3), \\ 1 & 1 \leqslant t \wedge 1 \leqslant z \qquad (R_4). \end{cases}$$

Veamos gráficamente cada una de las regiones:



2
1,5
1
0,5
−0,5
T
Z
−0,5
0,5
1
1,5
2
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4