Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Introducción a la Computación

Ejercicio 1.1.1. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S, X, Y\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \end{aligned}$$

1. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to XYX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \\ Y &\to bbb \end{aligned}$$

Sea $L = \{ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ubbbv$ con $u, v \in \{a, b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX$$

Además, es fácil ver que la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$ nos permite generar cualquier palabra $u \in \{a, b\}^*$. Por tanto, tenemos que $X \overset{*}{\Longrightarrow} u$ y $X \overset{*}{\Longrightarrow} v$; teniendo así que $S \overset{*}{\Longrightarrow} ubbbv$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow XYX \Longrightarrow XbbbX \Longrightarrow ubbbv \mid u, v \in \{a, b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto en el apartado anterior de la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

2. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to aX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea $L = \{au \mid u \in \{a, b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = au$ con $u \in \{a,b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w:

$$S \Longrightarrow aX \Longrightarrow au \mid u \in \{a,b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $w \in L$.

3. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to XaXaX \\ X &\to aX \mid bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea $L = \{uavawa \mid u,v,w \in \{a,b\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $z \in L$. Entonces, $z = uavawa$ con $u,v,w \in \{a,b\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} z$:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de z:

$$S \Longrightarrow XaXaX \Longrightarrow uavawa \mid u,v,w \in \{a,b\}^*$$

donde en el último paso hemos empleado lo visto respecto a la regla de producción $X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$. Por tanto, $z \in L$.

4. Describe el lenguaje generado por la gramática teniendo en cuenta que P viene descrito por:

$$\begin{aligned} S &\to SS \mid XaXaX \mid \varepsilon \\ X &\to bX \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Sea el lenguaje $L = \{b^i a b^j a b^k \mid i,j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L^* = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $z \in L^* = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} L^i$. Sea n el menor número natural tal que $z \in L^n$. Notando por $n_a(z)$ al número de a's en z, tenemos que $n_a(z) = 2n$. Entonces, $z \in L \cdot \ldots \cdot L$ (n veces), por lo que existen $i_1, j_1, k_1, \ldots, i_n, j_n, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $z = b^{i_1} a b^{j_1} a b^{k_1} \cdot \ldots \cdot b^{i_n} a b^{j_n} a b^{k_n}$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} z$:

- Para conseguir el número de a's deseado, empleamos la regla de producción $S \to SS$ y reemplazamos una de las S por $XaXaX$. Esto lo hacemos n veces.
- Posteriormente, cada X la sustituiremos tantas veces como sea necesario por bX para conseguir el número de b's deseado en cada posición, y finalizaremos con $X \to \varepsilon$.

$\supset$) Sea $z \in \mathcal{L}(G)$, y sea $n_a(z)$ el número de a's en z. Entonces, como el número de a siempre aumenta de dos en dos, tenemos que $n_a(z) = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos la forma de z:

- Para llegar a z, hemos tenido que emplear la regla de producción $S \to SS \to SXaXaX$ n veces. Una vez llegados aquí, para eliminar la S (ya que habremos llegado a $n_a(z)$ a's), empleamos la regla de producción $S \to \varepsilon$.
- Posteriormente, para cada X, tan solo podemos emplear la regla de producción $X \to bX \mid \varepsilon$ para conseguir el número de b's deseado en cada posición.

Por tanto, es directo ver que $z \in L^n \subseteq L^*$.

Ejercicio 1.1.2. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$. Determinar en cada caso el lenguaje generado por la gramática.

1. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, A\} \\
T &= \{a, b\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl} S & \to & abAS \mid a \\ abA & \to & baab \\ A & \to & b \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Sea $L = \{ua \mid u \in \{abb, baab\}^*\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = ua$ con $u \in \{abb, baab\}^*$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$. Para ello, sabemos que $u \in \{abb, baab\}^* = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \{abb, baab\}^i$. Sea n el menor número natural tal que $u \in \{abb, baab\}^n$, es decir, es una concatenación de n subcadenas, cada una de las cuales es o bien abb o bien $baab$. Veamos que S produce ambas subcadenas:

- Para producir abb, tenemos que $S \to abAS \to abbS$.
- Para producir $baab$, tenemos que $S \to abAS \to baabS$.

Como vemos, en cada caso podemos concatenar la subcadena necesaria, pero siempre nos quedará una S al final. Usamos la regla de producción $S \to a$ para eliminarla, llegando así a w, por lo que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$ y $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Veamos la forma de w, para lo cual hay dos opciones:

- $S \to a$: En este caso, habremos finalizado la palabra con a, por lo que habremos añadido la subcadena a a la palabra al final.
- $S \to abAS$: En este caso, también hay dos opciones:
  - $S \to abAS \to baabS$: En este caso, habremos concatenado $baab$ con S, por lo que habremos añadido la subcadena $baab$ a la palabra.
  - $S \to abAS \to abbS$: En este caso, habremos concatenado abb con S, por lo que habremos añadido la subcadena abb a la palabra.

Por tanto, w es de la forma ua con u una concatenación de abb's y $baab$'s, es decir, $u \in \{abb, baab\}^*$. Por tanto, $w \in L$.

2. Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}
V &= \{\langle \text{número} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle\} \\
T &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
S &= \langle \text{número} \rangle \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl} \langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{número} \rangle & \to & \langle \text{dígito} \rangle \\ \langle \text{dígito} \rangle & \to & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G)$ es el conjunto de los números naturales, permitiendo tantos ceros a la izquierda como se quiera. Es decir (usando la notación de potencia y concatenación vista para lenguajes):

$$L = \{0^i n \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Demostrémoslo mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = 0^i n$ con $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos que $\langle \text{número} \rangle \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

- En primer lugar, aplicamos $|w| - 1$ veces la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$ y la regla que lleva de $\langle \text{dígito} \rangle$ a uno de los símbolos terminales, consiguiendo así en cada etapa reemplazar la última variable presente en la cadena por un dígito.
- Finalmente, aplicamos la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{dígito} \rangle$ para reemplazar la última variable por un dígito, que será el primero del número formado.

Por tanto, $\langle \text{número} \rangle \overset{*}{\Longrightarrow} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Como la única regla que aumenta la longitud es la regla de producción $\langle \text{número} \rangle \to \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle$, tenemos que w tiene la forma:

$$\begin{aligned}
\langle \text{número} \rangle \Longrightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle &\overset{|w|-1 \text{ veces}}{\Longrightarrow} \\
&\Longrightarrow \langle \text{número} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \langle \text{dígito} \rangle \overset{|w|-1 \text{ veces}}{\cdots} \langle \text{dígito} \rangle \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \langle \text{dígito} \rangle \overset{|w| \text{ veces}}{\cdots} \langle \text{dígito} \rangle
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que se trata una sucesión de $|w|$ dígitos, lo que nos lleva a que $w \in L$.

3. Tenga en cuenta que:

$$V = \{A, S\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & aS \mid aA \\ A & \to & bA \mid b \end{array} \right\}$$

Sea $L = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos mediante doble inclusión que $L = \mathcal{L}(G)$.

$\subset$) Sea $w \in L$. Entonces, $w = a^n b^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$:

- En primer lugar, aplicamos $n-1$ veces la regla de producción $S \to aS$ para obtener $a^{n-1}S$,
$$S \overset{*}{\Longrightarrow} a^{n-1}S$$
- Para cambiar a la etapa de añadir b's, aplicamos la regla de producción $S \to aA$, obteniendo así $a^n A$,
- Después, aplicamos $m-1$ veces la regla de producción $A \to bA$ para obtener $a^n b^{m-1} A$.
- Para finalizar, aplicamos la regla de producción $A \to b$ para obtener $a^n b^m$.

Por tanto, $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, teniendo que $w \in \mathcal{L}(G)$.

$\supset$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Vemos que en la palabra siempre va a haber tan solo una variable (ya sea S o A). Se empezará con la S, y en cierto momento se cambiará a la A, sin poder entonces volver a la S.

- Cuando se está en la etapa en la que hay S, tan solo se pueden añadir a's, o bien cambiar a la A.
- Cuando se está en la etapa en la que hay A, tan solo se pueden añadir b's.

Por tanto, tenemos que w estará formada por una sucesión de a's seguida de una sucesión de b's, lo que nos lleva a que $w \in L$.

Ejercicio 1.1.3. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras en las que el número de b no es tres.

   Tenemos varias opciones:

   - Que no tenga b's.
   - Que tenga una b.
   - Que tenga dos b's.
   - Que tenga 4 o más b's.

Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, A, X\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & A \mid AbA \mid AbAbA \mid XbXbXbXbX \\ A & \to & aA \mid \varepsilon \\ X & \to & aX \mid bX \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

Esta gramática no obstante es de tipo 2. Busquemos otra que sea de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$V' = \{S, X, Y, Z, W\}$$
$$T' = \{a, b\}$$
$$S' = S$$
$$P' = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & \varepsilon \mid aS \mid bX \\ X & \to & \varepsilon \mid aX \mid bY \\ Y & \to & \varepsilon \mid aY \mid bZ \\ Z & \to & aZ \mid bW \\ W & \to & \varepsilon \mid aW \mid bW \end{array} \right\}$$

Esta sí es de tipo 3, y genera el lenguaje deseado.

2. Palabras que tienen 2 ó 3 b.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, A, B\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & AbAbABA \\ A & \to & aA \mid \varepsilon \\ B & \to & b \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

   Esta gramática no obstante es de tipo 2. Busquemos otra que sea de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$V' = \{S, X, Y, Z, W, V, T\}$$
$$T' = \{a, b\}$$
$$S' = S$$
$$P' = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aS \mid X \\ X & \to & bY \\ Y & \to & aY \mid Z \\ Z & \to & bW \\ W & \to & aW \mid \varepsilon \mid V \\ V & \to & bT \\ T & \to & aT \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

Esta gramática ya es de tipo 3, pero contiene un número elevado de variables. Veamos si podemos reducirlo: Sea la gramática $G'' = (V'', T'', P'', S'')$ dada por:

$$\begin{aligned}
V'' &= \{S, X, Y, Z\} \\
T'' &= \{a, b\} \\
S'' &= S \\
P'' &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aS \mid bX \\ X & \to & aX \mid bY \\ Y & \to & aY \mid \varepsilon \mid bZ \\ Z & \to & aZ \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Notemos que, en esta gramática de tipo 3, ya hemos conseguido el menor número de variables posibles, que representan las 4 etapas. Como la última es opcional, está la regla $Y \to \varepsilon$, para así no agregar la tercera b.

Ejercicio 1.1.4. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b\}$. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.

1. Palabras que no contienen la subcadena ab.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, A\} \\
T &= \{a, b\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aA \mid bS \mid \varepsilon \\ A & \to & aA \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   Notemos además que esta gramática es de tipo 3, y se tiene que:

$$\mathcal{L}(G) = \{b^i a^j \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

2. Palabras que no contienen la subcadena baa.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, B\} \\
T &= \{a, b\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aS \mid bB \mid \varepsilon \\ B & \to & bB \mid abB \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   Notemos además que esta gramática es de tipo 3.

Ejercicio 1.1.5. Encontrar una gramática libre de contexto que genere el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b\}$ de las palabras que tienen más a que b (al menos una más).

Ejercicio 1.1.6. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \; S \;\; \to \;\; aS \mid baS \mid \varepsilon \; \right\} \end{aligned}$$

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ T &= \{a, b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aS \mid bB \\ B & \to & bF \mid aS \\ F & \to & aF \mid bF \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

   Notemos que, en este caso, tenemos tres estados:

   - S: No hemos encontrado dos b's consecutivas.
   - B: Hemos encontrado una b, y puede ser que nos encontremos la segunda b.
   - F: Hemos encontrado dos b's consecutivas; ya hay libertad.

Ejercicio 1.1.7. Encontrar, si es posible, una gramática regular (o, si no es posible, una gramática libre del contexto) que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b\}^*$ y verifica:

1. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que contiene un número impar de símbolos a.

2. $u \in L$ si, y solamente si, verifica que no contiene el mismo número de símbolos a que de símbolos b.

Ejercicio 1.1.8. Dado el alfabeto $A = \{a, b\}$ determinar si es posible encontrar una gramática libre de contexto que:

1. Genere las palabras de longitud impar, y mayor o igual que 3, tales que la primera letra coincida con la letra central de la palabra.

2. Genere las palabras de longitud par, y mayor o igual que 2, tales que las dos letras centrales coincidan.

Ejercicio 1.1.9. Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
&V = \{S, X\}\\
&T = \{a, b\}\\
&S = S\\
&P = \left\{\begin{array}{lcl} S & \to & SS \\ S & \to & XXX \\ X & \to & aX \mid Xa \mid b \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Determinar si el lenguaje generado por la gramática es regular. Justificar la respuesta.

Sea la siguiente gramática regular $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned}
&V' = \{S, X\}\\
&T' = \{a, b\}\\
&S' = S\\
&P' = \left\{\begin{array}{lcl} S & \to & aS \mid bX \\ X & \to & aX \mid bY \\ Y & \to & aY \mid bZ \\ Z & \to & aZ \mid bW \mid \varepsilon \\ W & \to & aW \mid bU \\ U & \to & aU \mid bV \\ V & \to & aV \mid \varepsilon \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y como G' es una gramática regular, tenemos que $\mathcal{L}(G)$ es regular.

Ejercicio 1.1.10. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, ¿es L^* siempre numerable? ¿nunca lo es? ¿o puede serlo unas veces sí y otras, no? Pon ejemplos en este último caso.

L^* es siempre numerable: L^* es un lenguaje del alfabeto A, por lo que $L^* \subseteq A^*$ y A^* es numerable, luego L^* también lo es.

Ejercicio 1.1.11. Dado un lenguaje L sobre un alfabeto A, caracterizar cuando $L^* = L$. Esto es, dar un conjunto de propiedades sobre L de manera que L cumpla esas propiedades si y sólo si $L^* = L$.

$$L = L^* \Longleftrightarrow \varepsilon \in L \wedge a, b \in L \Longrightarrow ab \in L$$

Es decir, $L = L^*$ si y solo si la cadena vacía está en L y además es cerrado para concatenaciones.

Demostración.

$\Longleftarrow$) La inclusión $L \subseteq L^*$ es obvia, por lo que solo falta demostrar la otra inclusión.

Sea $v \in L^*$:

1. Si $v = \varepsilon \Longrightarrow v \in L$.
2. Si no, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que
$$v = a_1 a_2 \dots a_n$$
con $a_i \in L\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, de donde tenemos que $v \in L$, por ser cerrado para concatenaciones. Luego $L^* \subseteq L$.

$\Longrightarrow$) Hemos de probar dos cosas:

1. $\varepsilon \in L^* = L$.
2. Sean $a, b \in L = L^* \Longrightarrow ab \in L^* = L$.

□

Ejercicio 1.1.12. Dados dos homomorfismos $f : A^* \to B^*$, $g : A^* \to B^*$, se dice que son iguales si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A^*$. ¿Existe un procedimiento algorítmico para comprobar si dos homomorfismos son iguales?

Sí, basta probar que su imagen coincide sobre un conjunto finito de elementos, los de A:
$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A^* \Longleftrightarrow f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$$

Demostración.

$\Longleftarrow$) Sea $v \in A^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $v = a_1 a_2 \dots a_n$ con $a_i \in A\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$
$$f(v) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n) = g(a_1)g(a_2)\dots g(a_n) = g(v)$$

$\Longrightarrow$) Sea $a \in A \Longrightarrow a \in A^* \Longrightarrow f(a) = g(a)$.

□

Ejercicio 1.1.13. Sea $L \subseteq A^*$ un lenguaje arbitrario. Sea $C_0 = L$ y definamos los lenguajes S_i y C_i, para todo $i \geqslant 1$, por $S_i = C_{i-1}^+$ y $C_i = \overline{S_i}$.

1. ¿Es S_1 siempre, nunca o a veces igual a C_2? Justifica la respuesta.
2. Demostrar que $S_2 = C_3$, cualquiera que sea L.

   Observación. Demuestra que C_2 es cerrado para la concatenación.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que, para todo alfabeto A, el conjunto de los lenguajes finitos sobre dicho alfabeto es numerable.

1.1.1. Cálculo de gramáticas

Ejercicio 1.1.15 (Complejidad: Sencilla)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{u \in \{0,1\}^* \mid |u| \leqslant 4\}$

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, X\} \\
T &= \{0, 1\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & XXXX \\ X & \to & 0 \mid 1 \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   No obstante, esta gramática es de tipo 2. Busquemos una de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned}
V' &= \{S, X, Y, Z\} \\
T' &= \{0, 1\} \\
S' &= S \\
P' &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & 0X \mid 1X \mid \varepsilon \\ X & \to & 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon \\ Y & \to & 0Z \mid 1Z \mid \varepsilon \\ Z & \to & 0 \mid 1 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y es igual al lenguaje deseado. Tenemos por tanto que es un lenguaje regular.

2. Palabras con 0's y 1's que no contengan dos 1's consecutivos y que empiecen por un 1 y que terminen por dos 0's.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, X, Y\} \\
T &= \{0, 1\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & 1X00 \\ X & \to & 0Y \mid \varepsilon \\ Y & \to & 0Y \mid 1X \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   Notemos que esta gramática es de tipo 2 debido a la primera regla de producción. Busquemos una de tipo 3. Sea la gramática $G' = (V', T', P', S')$ dada por:

$$\begin{aligned}
V' &= \{S, X, Y\} \\
T' &= \{0, 1\} \\
S' &= S \\
P' &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & 1X \\ X & \to & 0Y \mid F \\ Y & \to & 0Y \mid 1X \mid F \\ F & \to & 00 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, y es igual al lenguaje deseado. Tenemos por tanto que es un lenguaje regular. En esta última gramática, tenemos los siguientes estados:

- S: Es el estado inicial, empezamos con un 1.
- X: Acabamos de escribir un 1, por lo que ahora tan solo podemos escribir 0's.
- Y: Acabamos de escribir un 0, por lo que ahora podemos escribir tanto 0's como 1's.
- F: Ya hemos terminado, y escribimos los dos 0's finales por la restricción impuesta.

3. El conjunto vacío.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S\} \\
T &= \emptyset \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

4. El lenguaje formado por los números naturales.

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{\langle \text{número no iniciado} \rangle, \langle \text{dígito no cero} \rangle, \langle \text{dígito} \rangle, \langle \text{número iniciado} \rangle\} \\
T &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
S &= \langle \text{número no iniciado} \rangle \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl}
\langle \text{número no iniciado} \rangle & \to & \langle \text{dígito no cero} \rangle \mid \langle \text{dígito no cero} \rangle \langle \text{número iniciado} \rangle \\
\langle \text{número iniciado} \rangle & \to & \langle \text{dígito} \rangle \mid \langle \text{dígito} \rangle \langle \text{número iniciado} \rangle \\
\langle \text{dígito no cero} \rangle & \to & 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\
\langle \text{dígito} \rangle & \to & 0 \mid \langle \text{dígito no cero} \rangle
\end{array} \right\}
\end{aligned}$$

   Notemos que esta gramática es similar a la descrita en el Ejercicio 1.1.2.2, pero adaptada para que los números naturales no puedan empezar por 0.

5. $\{a^n \in \{a, b\}^* \mid n \geqslant 0\} \cup \{a^n b^n \in \{a, b\}^* \mid n \geqslant 0\}$

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$\begin{aligned}
V &= \{S, X, Y\} \\
T &= \{a, b\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl}
S & \to & X \mid Y \mid \varepsilon \\
X & \to & aX \mid \varepsilon \\
Y & \to & aYb \mid \varepsilon
\end{array} \right\}
\end{aligned}$$

6. $\{a^n b^{2n} c^m \in \{a,b,c\}^* \mid n,m > 0\}$

   Sea la gramática $G = (V,T,P,S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S,X,Y,Z\} \\ T &= \{a,b,c\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & aXbbcY \\ X & \to & aXbb \mid \varepsilon \\ Y & \to & cY \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

7. $\{a^n b^m a^n \in \{a,b\}^* \mid m,n \geqslant 0\}$

   Sea la gramática $G = (V,T,P,S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S,X\} \\ T &= \{a,b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & aSa \mid bX \mid \varepsilon \\ X & \to & bX \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

8. Palabras con 0's y 1's que contengan la subcadena 00 y 11.

9. Palíndromos formados con las letras a y b.

   Sea la gramática $G = (V,T,P,S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S,X,Y\} \\ T &= \{a,b\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & aSa \mid bSb \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.16 (Complejidad: Media)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{uv \in \{0,1\}^* \mid u^{-1} \text{ es un prefijo de } v\}$

   Sea la gramática $G = (V,T,P,S)$ dada por:

$$\begin{aligned} V &= \{S,X,Y\} \\ T &= \{0,1\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{lll} S & \to & XY \\ X & \to & 0X0 \mid 1X1 \mid \varepsilon \\ Y & \to & 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

   Notemos que X deriva en el palíndromo, uu^{-1}, y Y en el resto de la palabra de v.

2. $\{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid |u| = |v|\}$

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$
$$T = \{a, b, c\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XSX \mid c \\ X & \rightarrow & a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

3. $\{u1^n \in \{0,1\}^* \mid |u| = n\}$

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$
$$T = \{0, 1\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XS1 \mid \varepsilon \\ X & \rightarrow & 0 \mid 1 \end{array} \right\}$$

4. $\{a^n b^{n+1} \in \{a,b\}^* \mid n \geqslant 0\}$ (observar transparencias de teoría)

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb \mid b \end{array} \right\}$$

Ejercicio 1.1.17 (Complejidad: Difícil)**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m c^k \in \{a,b,c\}^* \mid k = m + n\}$

   Sea la gramática $G = (V, T, P, S)$ dada por:

$$V = \{S, X\}$$
$$T = \{a, b, c\}$$
$$S = S$$
$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSc \mid X \\ X & \rightarrow & bXc \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

2. Palabras que son múltiplos de 7 en binario.

Ejercicio 1.1.18 (Complejidad: Extrema (no son libres de contexto))**.** Calcula, de forma razonada, gramáticas que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1. $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
2. $\{a^{n^2} \in \{a\}^* \mid n \geqslant 0\}$
3. $\{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ es primo}\}$
4. $\{a^n b^m \in \{a,b\}^* \mid n \leqslant m^2\}$

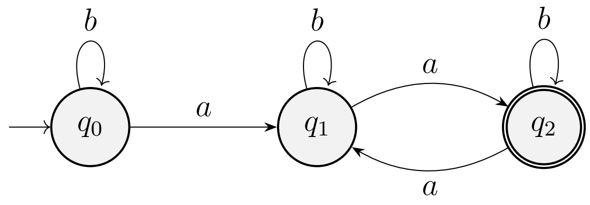

Figura 1.1: Autómata Finito Determinista del Ejercicio 1.2.2

1.2. Autómatas Finitos

Ejercicio 1.2.1. Considera el siguiente Autómata Finito Determinista (AFD) $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$, donde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $A = \{0, 1\}$
- La función de transición viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= q_1, & \delta(q_0, 1) &= q_0 \\ \delta(q_1, 0) &= q_2, & \delta(q_1, 1) &= q_0 \\ \delta(q_2, 0) &= q_2, & \delta(q_2, 1) &= q_2 \end{aligned}$$

- $F = \{q_2\}$

Describe informalmente el lenguaje aceptado.

Ejercicio 1.2.2. Dado el AFD de la Figura 1.1, describir el lenguaje aceptado por dicho autómata.