

Cálculo I

Examen X

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo I

Examen X

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2025

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. [2 puntos] Enuncia y demuestra el Teorema (de los ceros) de Bolzano.

Ejercicio 2. [1 punto] Estudia la convergencia de la sucesión $\left\{ \frac{n \log n}{\log(n!)} \right\}$.

Ejercicio 3. Sea la sucesión recurrente $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

- a) [1 punto] Prueba que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente (observa que $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$, puedes usarlo).
- b) [1 punto] Prueba que $\left\{ \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \right\} \rightarrow 1$ (y, en particular, $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow 1$).
- c) [1 punto] Prueba que $\{a_{n+1} - a_n\} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- d) [1 punto] Prueba que $\left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \rightarrow 2$.
- e) [1 punto] Discute la convergencia de las series: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2}$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$. Se pide:

- a) [1 punto] Probar que f alcanza un mínimo absoluto.
- b) [1 punto] Probar que $\exists c > 0$ tal que $f(c) = \frac{1}{c}$.

Ejercicio 1. [2 puntos] Enuncia y demuestra el Teorema (de los ceros) de Bolzano.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Demostración. Hay dos posibilidades, o bien $f(a) < 0 < f(b)$, o $f(a) > 0 > f(b)$

Caso $f(a) < 0 < f(b)$. Sea el conjunto $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$

Claramente, el conjunto A es no vacío ($a \in A$) y, por ser $A \subseteq [a, b] \Rightarrow A$ mayorado ($b \in M(A)$). Por tanto, $\exists c = \sup(A)$, con $a \leq c \leq b$.

Usando la caracterización de supremo mediante sucesiones:

$$\exists \{x_n\} \longrightarrow c. \text{ Por ser } f \text{ continua en } c \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(c)$$

$$(x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

y, como:

$$x_n \in A, f(x_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(c) \leq 0 \quad (1)$$

En particular, $c \neq b$ (porque $f(b) > 0$) $\Rightarrow c < b$. Así, $\forall y \in]c, b] \Rightarrow f(y) \geq 0$. Podemos tomar:

$$\{y_n\} = \left\{c + \frac{b-c}{n}\right\} \rightarrow c, \text{ con } f(y_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De nuevo, por ser f continua en c :

$$\{f(y_n)\} \rightarrow f(c) \Rightarrow f(c) \geq 0$$

$$(f(y_n) \geq 0)$$

Por (1) y (2) $\Rightarrow \boxed{f(c) = 0}$

Caso $f(a) > 0 > f(b)$ Podemos considerar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g = -f, g(x) = -f(x)$
 $\forall x \in [a, b]$. La función g verifica las hipótesis del caso anterior, luego

$$\exists c \in]a, b[: g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = -g(c) = 0.$$

Ejercicio 2. [1 punto] Estudia la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{n \log n}{\log(n!)}\right\}$.

Llamemos $\{a_n\} = \{n \log(n)\}, \{b_n\} = \{\log(n!)\}$. Por ser $\{b_n\} \nearrow \nearrow +\infty$ podemos aplicar el crit. de Stolz

$$\left(Si \left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\} \longrightarrow L \implies \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \longrightarrow L \quad (L \in \mathbb{R} \text{ ó } \pm \infty) \right)$$

Estudiemos, pues, la sucesión:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\} &= \left\{ \frac{(n+1) \log(n+1) - n \log(n)}{\log((n+1)!) - \log(n!)} \right\} = \left\{ \frac{\log(n+1) + n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)} \right\} \\ &= \left\{ 1 + \frac{\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)}{\log(n+1)} \right\} \end{aligned}$$

Llamemos $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$ y $\{y_n\} = \{n\}$ Como $\{x_n\} \rightarrow 1$, podemos aplicar el crit. de Euler:

$$(\{y_n(x_n - 1)\} \rightarrow L \iff \{x_n^{y_n}\} \rightarrow e^L, x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \{y_n(x_n - 1)\} &= \left\{n \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\right\} = \{1\} \rightarrow 1 \Rightarrow \{x_n^{y_n}\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\} \rightarrow e \\ &\Rightarrow \left\{\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)\right\} \rightarrow \log(e) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{1 + \frac{\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)}{\log(n+1)}\right\} \rightarrow 1 + 0 = 1$. Y, por Stolz, la sucesión de partida

$$\boxed{\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n \log(n)}{\log(n!)}\right\} \rightarrow 1}$$

Ejercicio 3. Sea la sucesión recurrente $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

- a) [1 punto] Prueba que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y diverge positivamente (observa que $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$, puedes usarlo).

Probemos que $a_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ (en particular, $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$), por inducción. Sea el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 1\}$. Veamos si A es inductivo:

$$a_1 = 1 \geq 1 \Rightarrow 1 \in A$$

Sea $k \in A$, veamos si $(k+1) \in A$:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + a_k \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + a_k} \geq 1 \Rightarrow (k+1) \in A$$

Luego $a_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Así, $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 + a_n > a_n^2 \Leftrightarrow a_n > 0$, y $\{a_n\}$ estrictamente creciente.

Veamos si diverge por reducción al absurdo. Si $\{a_n\}$ no diverge, al ser estrictamente creciente, estará mayorada, luego $\{a_n\} \rightarrow L$.

$$\left. \begin{array}{l} \{a_{n+1}^2\} \rightarrow L^2 \\ \{a_n^2 + a_n\} \rightarrow L^2 + L \end{array} \right] \xrightarrow[\text{del límite}]{\text{(unicidad)}} L^2 = L^2 + L \Rightarrow L = 0$$

Lo cual es una contradicción, ya que una sucesión creciente de positivos no puede converger a 0 y $\{a_n\} \rightarrow +\infty$

- b) [1 punto] Prueba que $\left\{\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\right\} \rightarrow 1$ (y, en particular, $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \rightarrow 1$)

$$\left\{ \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} \right\} = \left\{ \frac{a_n^2 + a_n}{a_n^2} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{a_n} \right\} \longrightarrow 1 + 0 = 1$$

($\{a_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \{\frac{1}{a_n}\} \rightarrow 0$)

En particular, $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}} \right\} \rightarrow \sqrt{1} = 1$

c) [1 punto] Prueba que $\{a_{n+1} - a_n\} \rightarrow \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \{a_{n+1} - a_n\} &= \left\{ \frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{a_{n+1} + a_n} \right\} = \left\{ \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n} \right\} = \left\{ \frac{\cancel{a_n^2} + a_n - \cancel{a_n^2}}{a_{n+1} + a_n} \right\} \\ &= \left\{ \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1} \right\} \end{aligned}$$

Como por el apartado anterior, $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow 1 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}$

d) [1 punto] Prueba que $\left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \rightarrow 2$. Como el denominador es $\{a_n\} \nearrow \nearrow +\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz (ya enunciado antes). Estudiamos, pues, esta otra sucesión:

$$\left\{ \frac{n+1-n}{a_{n+1}-a_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{a_{n+1}-a_n} \right\}$$

Como por el apartado anterior, $\{a_{n+1} - a_n\} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right\} \rightarrow 2 \Rightarrow \left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \rightarrow 2$.

e) [1 punto] Discute la convergencia de las series: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2}$.

Para estudiar la serie de térm. posit. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$, aplicaremos el criterio límite de comparación:

$$\left(\begin{array}{l} a_n \geq 0, b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \ (L \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ó } +\infty) \\ \text{Caso } L = 0 : \text{ Si } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \\ \text{Caso } L = +\infty : \text{ Si } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge} \\ \text{Caso } L = \mathbb{R}^+ : \text{ Si } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge} \end{array} \right)$$

Compararemos con la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$:

$$\left\{ \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{n}} \right\} = \left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \xrightarrow[\text{anterior)}]{\text{(apdo.}} 2 \in \mathbb{R}^+$$

Así, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ conv. $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ conv. Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ no conv. $\Rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n} \text{ no conv.}}$

Para estudiar la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2}$ aplicaremos de nuevo el criterio límite de comparación, comparado ahora con la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

$$\left\{ \frac{\frac{1}{a_n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right\} = \left\{ \frac{n^2}{a_n^2} \right\} = \left\{ \left(\frac{n}{a_n} \right)^2 \right\} \xrightarrow[\text{anterior)}]{\text{(apdo.}} 2^2 = 4 \in \mathbb{R}^+$$

Así, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2}$ conv. $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ conv. Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2} \text{ conv.}}$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$. Se pide:

a) [1 punto] Probar que f alcanza un mínimo absoluto.

A partir de la hipótesis, probemos que $\text{Im}(f)$ está minorada:

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, f(x) \geq x \geq 0 \Rightarrow 0 \text{ es minorante de } \text{Im}(f).$$

Como, además, $\text{Im}(f)$ es no vacío, $\exists \alpha = \inf(\text{Im}(f))$. Para probar si es el mínimo, bastará ver que $\alpha \in \text{Im}(f)$. Por la caracterización de ínfimo mediante sucesiones:

$$\exists \{y_n\} \longrightarrow \alpha \\ (y_n \in \text{Im}(f) \forall n \in \mathbb{N})$$

Observemos que:

- $\{y_n\}$ convergente $\Rightarrow \{y_n\}$ acotada, en particular. mayorada $\Rightarrow \exists M > 0 :$
 $y_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathbb{R}_0^+ : y_n = f(x_n)$

Luego:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq x_n \leq f(x_n) = y_n \leq M \Rightarrow \{x_n\} \text{ acotada}$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, por ser acotada, admitirá una parcial convergente, $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}_0^+$.

Luego

$$\left. \begin{array}{l} \{f(x_{\sigma(n)})\} \xrightarrow{\text{(f continua)}} f(x_0) \\ \{y_{\sigma(n)}\} \xrightarrow{\text{(parcial)}} \alpha \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{(unicidad del límite)}]{} \alpha = f(x_0)$$

Así, $\alpha \in Im(f)$ y es el valor mínimo absoluto, que se alcanza en el punto x_0 .

b) [1 punto] Probar que $\exists c > 0$ tal que $f(c) = \frac{1}{c}$.

La proposición equivale a $c > 0 : cf(c) - 1 = 0$. Consideremos entonces la función: $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = xf(x) - 1$. Vemos que es continua (pues es suma y producto de continuas). Además:

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \cdot f(0) - 1 = -1 < 0 \\ g(2) = 2 \cdot f(2) - 1 \geq 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \end{array} \right\}$$

Por el Tma. Bolzano (Ej 1) $\exists c \in]0, 2[: g(c) = 0 \Rightarrow \exists c > 0$, con $cf(c) - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow f(c) = 1/c$