Ecuaciones Diferenciales I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Sistemas Lineales **5**
1.1. Sistemas lineales homogéneos 17
1.1.1. Sistemas de coeficientes constantes 18

La parte de teoría del presente documento (es decir, excluyendo las relaciones de problemas) está hecha en función de los apuntes que se han tomado en clase. No obstante, recomendamos seguir de igual forma los apuntes del profesor de la asignatura, Rafael Ortega, disponibles en su sitio web personal https://www.ugr.es/~rortega/. Estos apuntes no son por tanto una completa sustitución de dichos apuntes, sino tan solo un complemento.

1. Sistemas Lineales

Notación. Por comodidad, a lo largo de la sección notaremos al conjunto de matrices de orden $n \times m$ sobre $\mathbb{R}$ por:

$$\mathbb{R}^{n\times m} = M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

Estudiaremos sistemas lineales de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1.1}$$

Con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ y $b : I \to \mathbb{R}^d$, funciones continuas[1] en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si notamos por $A = (a_{ij})_{i,j}$, $d = (b_i)$ y $x = (x_i)$ a las correspondientes coordenadas de A, b y x, podemos reescribir (1.1) en forma de sistema, como:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1d}(t)x_d & + & b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{2d}(t)x_d & + & b_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_d' & = & a_{d1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{dd}(t)x_d & + & b_d(t) \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Ejemplo. Supongamos que estamos en la situación de la Figura 1.1, con dos masas m_1 y m_2, y dos muelles con constantes elásticas k_1 y k_2. Supongamos además que a la masa m_2 se le aplica una fuerza $F(t)$.

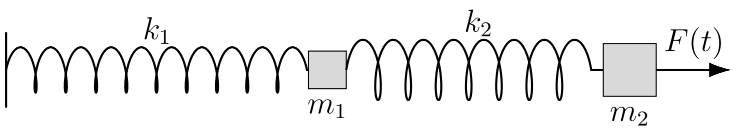

Figura 1.1: Dos masas conectadas por muelles.

Describiremos este sistema de forma matemática describiendo x_1, la distancia de la masa m_1 a su posición de equilibrio; y x_2, la distancia de la masa m_2 a su posición de equilibrio a lo largo del tiempo t.

Suponiendo que inicialmente (en el instante t_0) el primer muelle está dilatado (es decir, $x_1(t_0) > 0$) y que el segundo muelle está contraido ($x_2(t_0) - x_1(t_0) < 0$), aplicando las leyes de Newton, llegamos al sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccc} m_1 x_1'' & = & -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' & = & -k_2(x_2 - x_1) + F(t) \end{array}\right.$$

[1]Recordemos que esto significa que sean continuas coordenada a coordenada.

La máquina descrita sigue estas ecuaciones diferenciales, que no están en la categoría que nos interesa, por ser de segundo orden. Sin embargo, un sistema lineal de cualquier orden se puede hacer siempre de primer orden. Para ello, buscamos transformar dos ecuaciones de segundo orden en 4 ecuaciones de primer orden.

El truco para cambiar orden por dimensión es llamar incógnita a las derivadas. Definimos:

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_1' \qquad y_3 = x_2 \qquad y_4 = x_2'$$

De esta forma:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \dfrac{-k_1}{m_1}y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \dfrac{-k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \dfrac{F(t)}{m_2} \end{cases}$$

Obtenemos ya un sistema de ecuaciones lineal de primer orden. Los físicos dicen que hemos pasado del espacio de las configuraciones al espacio de estados.

Tenemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$$

Este cambio se puede aplicar siempre que queramos, y esta es la razón por la que en este capítulo solo estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales de primer orden, porque sabiendo resolverlo sabemos resolver cualquier sistema lineal de orden superior.

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de las soluciones)**.** *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

*definida en **todo** el intervalo I.*

Para su demostración, será necesario repasar varios conceptos ya vistos en otras asignaturas.

Corolario 1.1.1. *Ahora, si tenemos una ecuación lineal de orden superior:*

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Lo que hacemos es tomar como incógnitas:

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad \ldots \qquad y_k = x^{(k-1)}$$

Y plantear el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}' & = & y_k \\ y_k' & = & -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \cdots - a_{k-1}(t)y_k + b(t) \end{array}\right.$$

Con lo que el Teorema de existencia y unicidad del Capítulo anterior es un corolario del Teorema 1.8.

Normas matriciales

Dada cualquier norma[2] $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, esta nos permite definir una norma matricial $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| \geqslant 1\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Notemos que está bien definida[3], ya que lo que hacemos es considerar la función $x \longmapsto \|Ax\|$ (que es continua) definida en la bola unidad junto con su frontera (que es un conjunto compacto), por lo que la imagen de un compacto es un compacto y al estar en $\mathbb{R}$, es un conjunto cerrado y acotado.

De forma geométrica, cada A es una transformación del espacio $\mathbb{R}^d$ en sí mismo. Lo que hacemos para calcular su norma es calcular las imágenes de todos los vectores de la bola unidad (junto con su frontera) y quedarnos con la mayor norma de todos ellos. Si consideramos la norma vectorial euclídea, lo que hacemos es coger la mayor distancia al origen.

Ejemplo. Considerando el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, si tomamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

La aplicación lineal asociada a A transforma $\mathbb{S}^1$ en una elipse de eje mayor 2 y eje menor $1/2$, tal y como vemos en la Figura 1.2, con lo que $\|A\| = 2$.

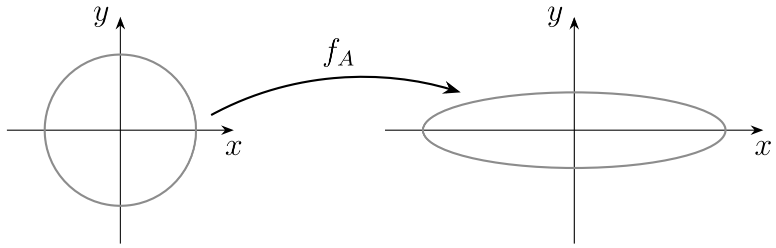

Figura 1.2: Transformación de $\mathbb{S}^1$ por la aplicación lineal asociada a A.

[2]Recordamos que una norma es cualquier función que cumpla la desigualdad triangular, homogeneidad por homotecias y no degeneración.

[3]Que en realidad existe un máximo.

Las normas matriciales así definidas tienen más propiedades que las normas vectoriales de las que provienen, que ya fueron vistas en Métodos Numéricos[4] I:

Proposición 1.2. *Se verifica que:*

1. $\|I\| = 1$.
2. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
3. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Integrales vectoriales

Supongamos que tenemos $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una función continua en un intervalo compacto, con lo que f tiene d coordenadas: $f = (f_1, \dots, f_d)$, todas ellas continuas. De esta forma, podemos definir la integral de f como el vector formado por las integrales de sus componentes

$$\int_a^b f(t)\ dt = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^b f_1(t)\ dt \\ \displaystyle\int_a^b f_2(t)\ dt \\ \vdots \\ \displaystyle\int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix}$$

Proposición 1.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, entonces:*

$$A \cdot \left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \int_a^b [A \cdot f(t)]\ dt$$

Demostración. Si notamos a las coordenadas de A por $A = (a_{ij})_{i,j}$:

[4]Diríjase a dichos apuntes para consultar la demostración de la siguiente Proposición.

$$A\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\ dt \\ \int_a^b f_2(t)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{d}\left(a_{1j}\int_a^b f_j(t)\ dt\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{d}\left(a_{2j}\int_a^b f_j(t)\ dt\right) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{d}\left(a_{dj}\int_a^b f_j(t)\ dt\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_a^b \left(\sum\limits_{j=1}^{d} a_{1j}\cdot f_j(t)\right)\ dt \\ \int_a^b \left(\sum\limits_{j=1}^{d} a_{2j}\cdot f_j(t)\right)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b \left(\sum\limits_{j=1}^{d} a_{dj}\cdot f_j(t)\right)\ dt \end{pmatrix} = \int_a^b [A\cdot f(t)]\ dt$$

□

Proposición 1.4. *Se verifica que:*

$$\left\|\int_a^b f(t)\ dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\ dt$$

Para cualquier norma.

Demostración. Por comodidad, definimos $\Delta_m = \{1,\ldots,m\}$.

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ una partición de $[a,b]$ y $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $\forall j \in \Delta_m$. Como las componentes de f y la función $\|f\|$ son continuas, son integrables en el sentido de Riemann y podemos considerar las sumas de Riemann asociadas a la partición P con etiquetas ξ_j $\forall j \in \Delta_m$. Entonces, se cumple que:

$$\sigma(\|f\|, P) = \sum_{j=1}^{d} \|f(\xi_j)\|(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{d} \|f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\| \geqslant \left\|\sum_{j=1}^{d}(f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}))\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d}(f_k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}))e_k\right)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}(f_k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}))e_k\right)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{d}(\sigma(f_k, P)e_k)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \sigma(f_1, P) \\ \sigma(f_2, P) \\ \vdots \\ \sigma(f_d, P) \end{pmatrix}\right\|$$

Por lo que $\sigma(\|f\|, P) \geqslant \|(\sigma(f_1, P), \ldots, \sigma(f_d, P))\|$ para toda partición P del intervalo $[a,b]$.

Por tanto, si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $\{\Delta P_n\} \longrightarrow 0$ (donde ΔP_n es el diámetro de la partición P_n), usando que $\|f\|$ y todas las componentes de f son Riemann-integrables, se tiene que:

$$\int_a^b \|f(t)\|\ dt = \lim_{n\to\infty} \sigma(\|f\|, P_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} \sigma(f_1, P_n) \\ \vdots \\ \sigma(f_d, P_n) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f_1, P_n) \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f_d, P_n) \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix} \right\| = \left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\|$$

Es decir:

$$\left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\ dt$$

□

Convergencia uniforme

Dada cualquier norma vectorial $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y fijado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, podemos definir[5] $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\| \qquad \forall \varphi \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^d)$$

Definición 1.1 (Norma del máximo)**.** Recordamos la definición de la norma vectorial del máximo, $\|\cdot\|_{\text{máx}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Que en algunos contextos se denota también por $\|\cdot\|_1$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{máx}})$:

1. Sea $\varphi_1 :]0,1[\to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad t \in]0,1[$$

Tenemos que $\|\varphi\| = e$.

2. Sea ahora $\varphi_2 :]0,1[\to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in]0,1[$$

Tenemos que $\|\varphi\| = \infty$.

[5] En este caso, no obtenemos una norma, porque puede tomar el valor ∞.

Definición 1.2. Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ y una función f, todas ellas definidas sobre un mismo intervalo I, decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

Ejemplo. Dadas $f, \psi \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, que:

$$\|f - \psi\|_\infty \leqslant \delta$$

significa que ψ no se puede separar de f más que δ. Podemos observar esto gráficamente en la Figura 1.3, donde ψ debe estar en la región delimitada por las líneas discontinuas.

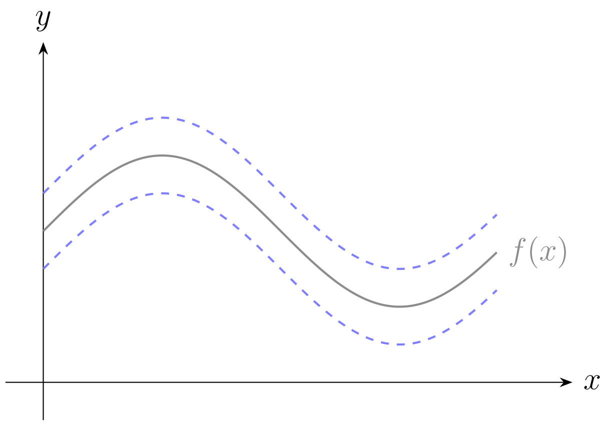

Figura 1.3: Región en la que debe estar ψ.

Algunas propiedades de la convergencia uniforme[6] son:

Proposición 1.5. *Si f_n son continuas y convergen uniformemente a f, entonces f es continua.*

Proposición 1.6. *Si $[a, b] \subseteq I$ y tenemos $f_n : I \to \mathbb{R}^d$ funciones continuas que convergen uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}^d$, entonces:*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Sin embargo, si f_n son derivables y convergen uniformemente a f, entonces no podemos asegurar que f sea derivable:

Ejemplo. Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_n(t) = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \qquad n \in \mathbb{N} \quad t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $f_n \to f$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, ya que:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

[6] que ya fueron vistas en Análisis Matemático II

Y tenemos que:

$$f_n'(t) = \cos(nt) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Que no convergen a f', ya que:

$$f_n'(\pi) = (-1)^n \not\to f'(\pi) = 0$$

Proposición 1.7 (Test de Weierstrass). *Dadas $f_n : I \to \mathbb{R}^d$, resulta que:*

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leqslant M_n \qquad \forall t \in I, \quad \forall n \geqslant 0$$

Si tenemos que $\sum M_n \leqslant \infty$. Entonces, f_n converge uniformemente en I.

Este Test de Weierstrass nos permite demostrar la existencia del límite de una sucesión de funciones sin conocer la función límite.

Ejemplo. Sabemos que:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si definimos:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Recordando la teoría que usábamos en Análisis Matemático I sobre el radio de convergencia, vemos que el radio de convergencia de S_n es infinito, por lo que podemos garantizar convergencia uniforme en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$, pero no en todo $\mathbb{R}$.

   Pensando en que los polinomios siempre divergen en $-\infty$, podemos intuir que la convergencia en todo $\mathbb{R}$ no la tenemos garantizada, ya que la función exponencial tiede a 0 en dicho límite.

   De esta forma, una serie de polinomios nunca puede converger a una función que está acotada en un intervalo no acotado.

2. De forma análoga y usando el Test de Weierstrass, podemos desmotrar la convergencia de la suesión $\{S_n\}$ en cada intervalo compacto $[a, b]$:

$$|S_{n+1}(t) - S_n(t)| = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \qquad \forall t \in [a, b]$$

Estamos ya listos para realizar la demostración del Teorema 1.8:

Teorema 1.8 (Existencia y unicidad de las soluciones). *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

*definida en **todo** el intervalo I.*

Demostración. Inicialmente, demostraremos el teorema en un caso particular y veremos que el caso general se puede reducir al particular:

- Supongamos que I es un intervalo acotado de longitud l y que:

$$\|A(t)\| \leqslant \alpha \quad \|b(t)\| \leqslant \beta \qquad \forall t \in I$$

Exitencia. Queremos llegar a que tenemos una solución, esta cumplirá:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Con lo que la integraremos (vectorialmente) cogiendo $t_0 \in I$ (son funciones continuas en un compacto):

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Aplicando coordenada a coordenada la Regla de Barrow y que $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Y hemos llegado a una ecuación integral que cumplirá la x buscada:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Buscaremos soluciones aproximadas (buscamos las iterantes de Picard): La primera aproximación la tomamos como la condición inicial:

$$x_0(t) = x_0 \qquad t \in I$$

con lo que podemos definir:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\ ds \qquad \forall n \in \mathbb{N}:$$

La idea de la demostración es construir las iterantes de Picard (que están bien definidas y todas de clase $C^1(I)$). Los pasos a seguir son:

1. Demostraremos que las iterantes de Picard convergen uniformemente (esto será una función continua).
2. Una vez que sabemos que x_n tienden a un límite, haciendo n tender a infinito, vamos a llegar a la ecuación integral, usando para ello la comnutación de integral con convergencia uniforme.
   El límite de Picard es una solución integral.
3. Probar que una solución de la ecuación integral es una solución del problema de valores iniciales.

Definimos las Iterantes de Picard:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\ ds \end{aligned}$$

Con $x_n : I \to \mathbb{R}^d$ bien definidas y continuas $\forall n \in \mathbb{N}$ (hacer por inducción). Además, $x_n \in C^1(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo.

Veamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en I, usando para ello el Test de Weierstrass. Comenzamos por la primera:

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)x_0 + b(s)] \, ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)x_0 + b(s)\| \, ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} [\|A(s)\|\|x_0\| + \|b(s)\|] \, ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha \cdot \|x_0\| + \beta] \, ds \right| \\
&\leqslant (\alpha \cdot \|x_0\| + \beta) \cdot l = M_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall t \in I
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - x_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)(x_2(s) - x_1(s))] \, ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)(x_2(s) - x_1(s))\| \, ds \right| \\
&\leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_0(s)\| \, ds \right| \leqslant \alpha M_0 \left| \int_{t_0}^{t} \, ds \right| \leqslant \alpha M_0 |t - t_0|
\end{aligned}$$

Si ahora decimos que esto es $\leqslant \alpha M_0 l$ no va a salir convergente. Lo que vamos a hacer es mantener $|t - t_0|$. Si seguimos:

$$\begin{aligned}
\|x_3(t) - x_2(t)\| &\leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_2(s) - x_1(s)\| \, ds \right| \leqslant \alpha^2 M_0 \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| \, ds \right| \\
&= \alpha^2 M_0 \frac{|t - t_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, se puede probar por inducción que:

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant M_0 \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \qquad \forall t \in I$$

Cogemos ahora:

$$M_n = M_0 \cdot \frac{(\alpha \cdot l)^n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una serie conocida, con lo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = M_0 \cdot e^{\alpha \cdot l} \in \mathbb{R}$$

Por el Test de Weierstrass, concluimos que $\{x_n\}$ converge uniformemente a una función $x : I \to \mathbb{R}^d$, que por ahora solo sabemos que es continua, por ser x_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que x es solución al problema de valores iniciales. Como:

$$\|A(t)x_n(t) - A(t)x(t)\| \leqslant \alpha \|x_n(t) - x(t)\|$$

Tenemos que $\{Ax_n\} \to Ax$, con lo que:

$$\int_{t_n}^{t} A(s)x_n(s)\ ds \to \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\ ds$$

En definitiva:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad \forall t \in I$$

Con lo que x es solución de la ecuación y se tiene que:

$$x(t_0) = x_0$$

Unicidad. Supongamos que $x, y : I \to \mathbb{R}^d$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial para la misma condición inicial $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Como son soluciones, también cumplen la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$
$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + b(s)]\ ds$$

Restando:

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)(x(s) - y(s))]\ ds$$

Con lo que:

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)(x(s) - y(s))]\ ds \right\| \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\|\ ds \right| \qquad \forall t \in I$$

Tomando $f(t) = \|x(t) - y(t)\|$ $\forall t \in I$, tenemos una función continua no negativa que está en las hipótesis del Lema 1.9, concluimos que $f(t) = 0$ $\forall t \in I$, con lo que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

- De vuelta al caso general, buscamos quitar las hipótesis de que I sea un intervalo acotado. Para ello, tomamos una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos abiertos y acotados de forma que $t_0 \in I_0$, $I_n \subseteq I_{n+1}$, $\overline{I_n} \subseteq I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = I$$

Podemos ahora definir:

$$\alpha_n = \max_{t \in \overline{I_n}} \|A(t)\| \qquad \beta_n = \max_{t \in \overline{I_n}} \|b(t)\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Con lo que la hipótesis extra anterior se verifica en cada intervalo I_n.

Unicidad. Si $x, y : I \to \mathbb{R}^d$ son soluciones de la ecuación diferencial, entonces $x_{|I_n}$ y $y_{|I_n}$ son soluciones de la ecuación en I_n, donde sabemos que se verifica $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

Existencia. Si ahora llamamos x_n a la solución del problema de valores iniciales en el intervalo I_n, definimos $x : I \to \mathbb{R}^d$

$$x(t) = x_n(t) \text{ si } t \in I_n$$

Es una función bien definida gracias a la unicidad en cada I_n, es derivable y cumple la ecuación diferencial porque lo es y la cumple en cada I_n.

□

Lema 1.9. *Sea J un intervalo y $f : J \to \mathbb{R}_0^+$ continua, sean $t_0 \in J$, $\alpha > 0$:*

$$f(t) \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} f(s)\ ds \right| \quad \forall t \in J \Longrightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

Demostración. Realizando primero la demostración en un caso más específico:

- Si J es compacto, $\exists \max_{t \in J} f(t) = m$, con lo que:

$$f(t) \leqslant \alpha \cdot m \cdot |t - t_0| \qquad \forall t \in J$$

$$f(t) \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha \cdot m \cdot |s - t_0|]\ ds \right| \leqslant m \cdot \frac{\alpha^2 |t - t_0|^2}{2} \qquad \forall t \in J$$

En definitiva, se puede probar por inducción que:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant m \cdot \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \qquad \forall t \in J$$

Como sabemos que la serie de dichos términos converge, sabemos que la sucesión tiende a 0, luego tomando límites llegamos a que $0 \leqslant f(t) \leqslant 0$ $\forall t \in J$, concluimos que $f(t) = 0$ $\forall t \in J$.

- Sea ahora J cualquier intervalo, tomamos J_n un intervalo compacto de forma que $J_n \subseteq J_{n+1}$ con $t_0 \in J_0$ y:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n = J$$

Por el paso anterior, $f(t) = 0$ $\forall t \in J_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $f(t) = 0$ $\forall t \in J$.

□

1.1. Sistemas lineales homogéneos

Nos preocupamos ahora por sistemas de la forma

$$x' = A(t)x$$

con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ una función continua. Sea $V = C^1(I, \mathbb{R}^d)$ el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el intervalo I en $\mathbb{R}^d$. Definimos además $W = C^0(I, \mathbb{R}^d)$.

Definición 1.3. Dado un sistema lineal homogéneo de la forma (1.1), definimos el operador asociado a la ecuación como la aplicación $L : V \to W$ dado por:

$$L[x] = x' - Ax$$

Se verifica que el operador lineal L asociado a la ecuación (1.1) es lineal. Más aún, se verifica que $Z = \ker L$ es el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación (1.1).

Proposición 1.10. $\dim Z = d$.

Demostración. Para ello, fijado $t_0 \in I$, definimos $\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^d$ dada por $\Phi_{t_0}(x) = x(t_0)$, que es un isomorfismo entre Z y $\mathbb{R}^d$ gracias al Teorema 1.8, concluimos que $\dim Z = d$. □

Dados $\phi_1, \dots, \phi_d \in Z$ funciones linealmente independientes en V, todas las soluciones de (1.1) las obtendremos mediante combinaciones lineales de dichas funciones:

$$x(t) = c_1\phi_1(t) + \ldots + c_d\phi_d(t) \qquad c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$$

Proposición 1.11. *Dadas $\phi_1, \dots, \phi_d \in Z$, son equivalentes:*

i) $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ *es una base.*

ii) $\det(\phi_1(t)| \ldots |\phi_d(t)) \neq 0 \ \forall t \in I$.

iii) $\det(\phi_1(t)| \ldots |\phi_d(t)) \neq 0$ *para cierto* $t \in I$.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector. □

Sabemos que la ecuación de la forma (1.1) no se puede resolver de forma explícita para $d \geqslant 2$. En el siguiente ejemplo, veremos soluciones de ecuaciones de la forma (1.1) que sí se pueden resolver de forma explícita.

Ejemplo. Un primer ejemplo de estos son los sistemas triangulares. Consideramos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1' & = x_1 + x_2 \\ x_2' & = \frac{1}{t}x_2 \end{array}\right.$$

Estamos trabajando con $I = \mathbb{R}^+$, $d = 2$ y:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

Comenzaremos resolviendo la primera ecuación y luego sustituyendo en la primera:

$$x_2' = \frac{1}{t}x_2$$

Sabemos que las soluciones de esta ecuación son de la forma $x_2 : I \to \mathbb{R}$

$$x_2(t) = c_2 t \qquad c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in I$$

Trataremos de resolver ahora la ecuación:

$$x_1' = x_1 + c_2 t$$

que es una ecuación lineal completa. Para resolverla, haremos uso de su estructura afín: buscaremos una solución a ojo y le sumaremos las soluciones de su ecuación homogénea. Buscamos con una función de la forma:

$$x_1(t) = \alpha t + \beta \qquad t \in I$$

Derivando:

$$\alpha = \alpha t + \beta + c_2 t$$

Que nos lleva a unas ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha & = \beta \\ \alpha + c_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Con lo que la solución particular buscada es:

$$x_1(t) = -c_2(t+1) \qquad t \in I$$

Finalmente, una solución de la ecuación completa es $x_1 : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$x_1(t) = -c_2(t+1) + c_1 e^t \qquad c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in I$$

Para buscar una base que nos dé el espacio de soluciones para el sistema, haremos elecciones de c_1 y c_2 para obtener dos funciones linealmente independientes. De esta forma, una base la obtenemos con:

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} -(t+1) \\ t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

Que son dos funciones $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ linealmente independientes, ya que:

$$\det(\phi_1(t)|\phi_2(t)) = t \cdot e^t \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

1.1.1. Sistemas de coeficientes constantes

Un tipo de sistemas que también se puede resolver siempre es cuando la función A es constante. Veamos este ejemplo, donde trabajamos con una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, con lo que $I = \mathbb{R}$.

Supongamos que $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$ es un valor propio no trivial de A, siendo $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ un vector propio asociado a λ.

En dicho caso, la función dada por

$$x(t) = e^{\lambda t} v \qquad t \in I$$

Es una solución del sistema, ya que:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$$

Y se tiene que:

$$Ax(t) = e^{\lambda t} Av = \lambda e^{\lambda t} v = x'(t) \qquad \forall t \in I$$

De esta forma, ante un sistema de coeficientes constantes en el que la matriz A sea diagonalizable, bastará encontrar los valores y vectores propios de la matriz para hayar las soluciones.

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, con $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$. Además, sabemos que $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$ son vectores propios asociados a dichos valores, respectivamente.

De esta forma, sabemos que:

$$\phi_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

Son soluciones del sistema, que además son linealmente independientes, ya que:

$$\det(\phi_1(t)|\phi_2(t)) = e^{2t} \det(v_1|v_2) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Variable compleja

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, si tomamos $\lambda \in \sigma(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, con vector propio $w \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$: $Aw = \lambda w$.

Lo que haremos ahora será buscar soluciones del sistema en los complejos, es decir, buscar una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ pensando en $\mathbb{C}$ como en $\mathbb{R}^2$: $x = u + iv$.

Al obtener una solución compleja v, su parte real $u = Re(x)$ y su parte imaginaria $v = Im(x)$ son soluciones reales:

$$\left.\begin{array}{r} x' = u' + iv' \\ x' = Ax = Au + iAv \end{array}\right\} \Longrightarrow u' + iv' = A \cdot (u + iv)$$

Ejemplo. Si ahora tomamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Es la matriz asociada a la rotación de 90º, que no tiene valores propios reales, sino complejos:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i\}$$

Con vectores propios asociados $v_1 = (1, i)$, $v_2 = (1, -i)$ linealmente independientes. Podemos construir una solución compleja:

$$\psi(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + i \cos t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

De donde podemos obtener dos soluciones reales:

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad t \in I$$

Que son linealmente independientes, por ser el determinante distinto de 0.