Cálculo I
Examen I

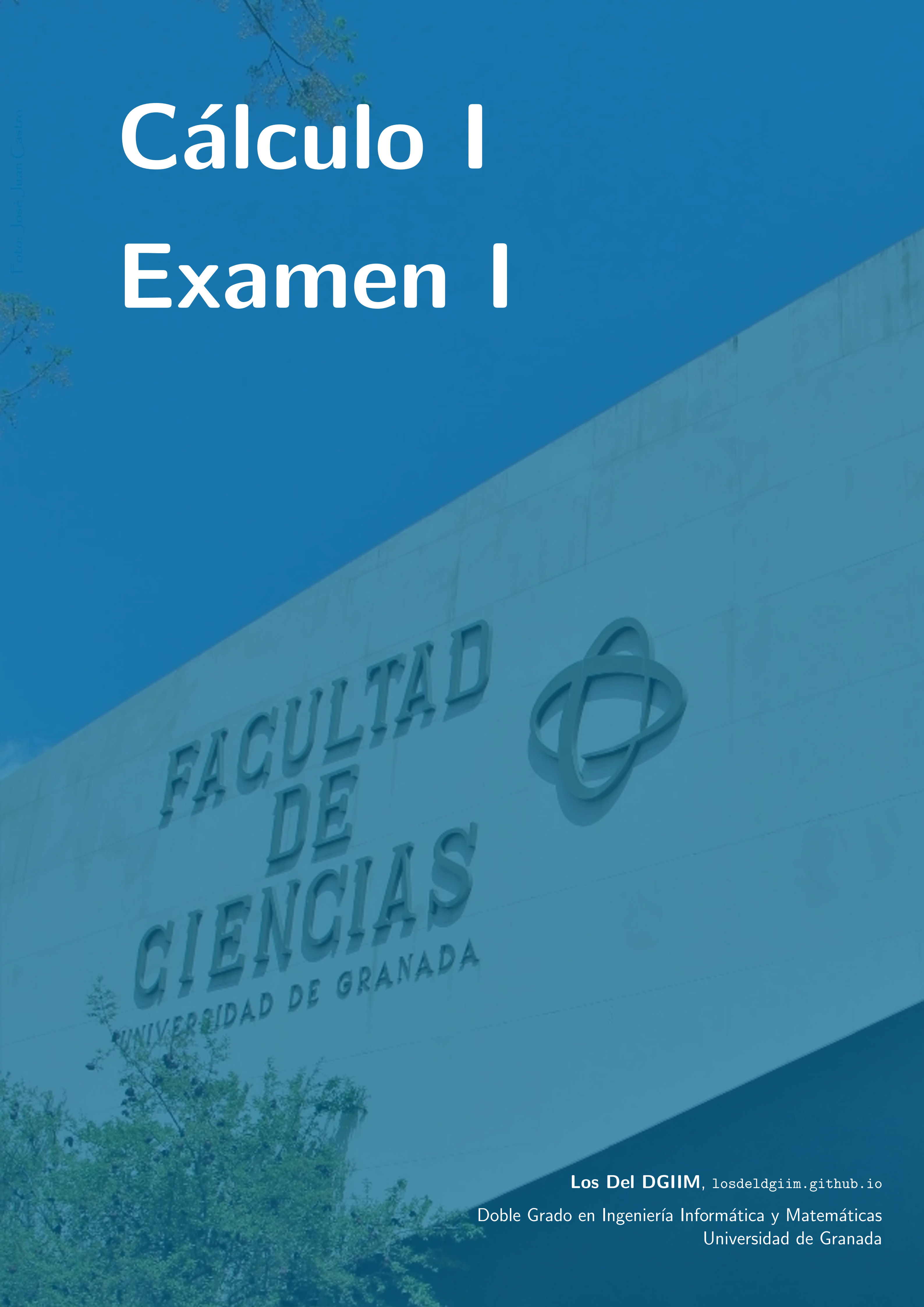

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 20 de enero de 2022.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Teorema (de los ceros) de Bolzano. Enunciado y demostración.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua verificando que

$$f(a)f(b) < 0 \ (f(a) \text{ y } f(b) \text{ tienen distinto signo})$$

Entonces, $\exists c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Definimos el conjunto C como sigue:

$$C = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) < 0\}$$

Es fácil ver que C es un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Sea $c = \sup C$. Es claro que $c \in [a, b]$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de C convergente a c y por continuidad de f en c entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(c)$. Dado que

$$f(x_n) < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $f(c) \leqslant 0$. En particular, deducimos que $c \neq b$ y $c \leqslant b$, por lo que $c \in \ ]a, b[$.

Sea $\{z_n\} = \left\{c + \frac{b-c}{n}\right\}$. Es claro que

$$z_n \in [a, b] \text{ y } z_n \notin C, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto ha de ser

$$f(z_n) \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Evidentemente, $\{z_n\} \longrightarrow c$ y usando que f es continua en c y lo anterior deducimos que

$$\{f(z_n)\} \longrightarrow f(c) \geqslant 0$$

y por tanto ha de ser $f(c) = 0$.

Si fuera $f(b) < 0 < f(a)$, podemos razonar igual que antes o aplicar lo que acabamos de obtener a la función $-f$ (f es continua si y sólo si lo es $-f$). □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Un tren hace el recorrido Madrid-Zaragoza un día entre las 10 y las 12. Al día siguiente, dicho tren hace el mismo recorrido en dirección contraria y con el mismo horario.Prueba que existe una determinada hora del segundo día a la que el tren se encuentra exactamente a la misma distancia de Madrid que el primer día a esa misma hora.

Sea $f : [10, 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que el primer día mide la "distancia a Madrid" en cada instante:

$$f(x) = \text{"distancia a Madrid" a la hora } x \ , \forall x \in [10, 12]$$

- f continua en $[10, 12]$
- $f(10) = 0$
- $f(12) = D$ (distancia Madrid-Zaragoza, positiva)

Del mismo modo, $g : [10,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función "distancia a Madrid" en cada instante del segundo día

- g continua en $[10,12]$
- $g(10) = D > 0$
- $g(12) = 0$

Consideramos la función $h : [10,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$ $\forall x \in [10,12]$. Tenemos que h continua en $[10,12]$. Además:

- $h(10) = f(10) - g(10) = -D$.
- $h(12) = f(12) - g(12) = D$.

Por tanto, $h(10) \cdot h(12) = -D^2 < 0$. Por el Teorema (de los ceros) de Bolzano:

$$\exists x \in]10,12[: h(c) = 0 \text{ esto es:}$$

$$0 = h(c) = f(c) - g(c) \Longrightarrow f(c) = g(c)$$

La hora buscada es $c \in]10,12[$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcula su límite (si existe):

1. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

   Defino $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ donde $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \sqrt{n} \nearrow\nearrow +\infty$ (puedo aplicar Stolz)

$$\left(\begin{array}{c} \text{Criterio de Stolz: } (b_n \nearrow\nearrow +\infty) \\ \text{Si } \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \longrightarrow L \Longrightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow L \end{array}\right)$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow 2$$

   Luego $x_n = \dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow 2$

2. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{a_n} \text{ donde } a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Criterio del cociente para sucesiones: } (a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{Si } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L \end{array}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = z_n^{y_n}$$

$$\text{donde } y_n = n, \quad z_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Criterio “exponencial”: } (z_n \longrightarrow 1) \\ z_n^{y_n} \longrightarrow e^L \iff y_n(z_n - 1) \longrightarrow L \end{array} \right)$$

$$y_n(z_n - 1) = n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \frac{-n}{n+1} \longrightarrow -1 \Longrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow e^{-1}$$

Así, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow e^{-1} \Longrightarrow x_n = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}$

3. (Dada por recurrencia) $x_1 = 11$, $x_{n+1} = 2[\sqrt{5 + x_n} - 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   Probaremos que x_n es decreciente y minorada por 4.
   (Por inducción, $4 < x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

   - <u>n=1</u> ¿$4 < x_2 < x_1$? $\iff 4 < 6 < 11$ Sí
   - Supuesto que para un $n \in \mathbb{N}$, $4 < x_{n+1} < x_n$ (hip. de ind.)
     ¿$\Rightarrow 4 \underset{(1)}{<} x_{n+2} \underset{(2)}{<} x_{n+1}$?

     (2) $x_{n+2} = 2[\sqrt{5 + x_{n+1}} - 1] < 2[\sqrt{5 + x_n} - 1] = x_{n+1}$
     (1) $x_{n+2} = 2[\sqrt{5 + x_{n+1}} - 1] > 2[\sqrt{5 + 4} - 1] = 4$

   Luego x_n es decreciente y minorada (por 4) $\Longrightarrow$ converge.
   Sea $L = \lim\{x_n\} \Longrightarrow \{x_{n+1}\} \longrightarrow L$ (parcial)

$$\left. \begin{array}{r} x_{n+1} \longrightarrow L \\ 2[\sqrt{5 + x_n} - 1] \longrightarrow 2[\sqrt{5 + L} - 1] \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{del lim)}]{\text{(unicidad}} L = 2[\sqrt{5 + L} - 1]$$

$$\iff L^2 = 16 \iff \left\{ \begin{array}{l} L = 4 \\ \cancel{L = -4} \text{ (4 es minorante)} \end{array} \right.$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Estudia la convergencia de las series:

1. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2$

   Defino $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2$, donde $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2$

   Aplicaremos comparación (límite) con la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$, con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$$

Luego $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$, pero $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ no converge (Serie de Riemann, $\alpha = 1$).

Por tanto $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ no converge.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$

   Defino $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$, con $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

   Aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos, según se ha visto en el ejercicio anterior (Ejercicio 3.2), que $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}$.

   Por tanto, $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}$

   Defino $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}$, donde $a_n = \frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}$.
   (Términos sin restricción de signo)

   ¿Hay convergencia absoluta? $\left(¿\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge?}\right)$

   Por el criterio de comparación:

$$|a_n| = \left|\frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \underset{(\text{Riemann, } \alpha=2)}{\text{converge}} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge}$$

   Así tenemos convergencia absoluta

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge} \overset{(\text{crit. conv. abs.})}{\Longrightarrow} \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge}$$