Topología I
Examen IX

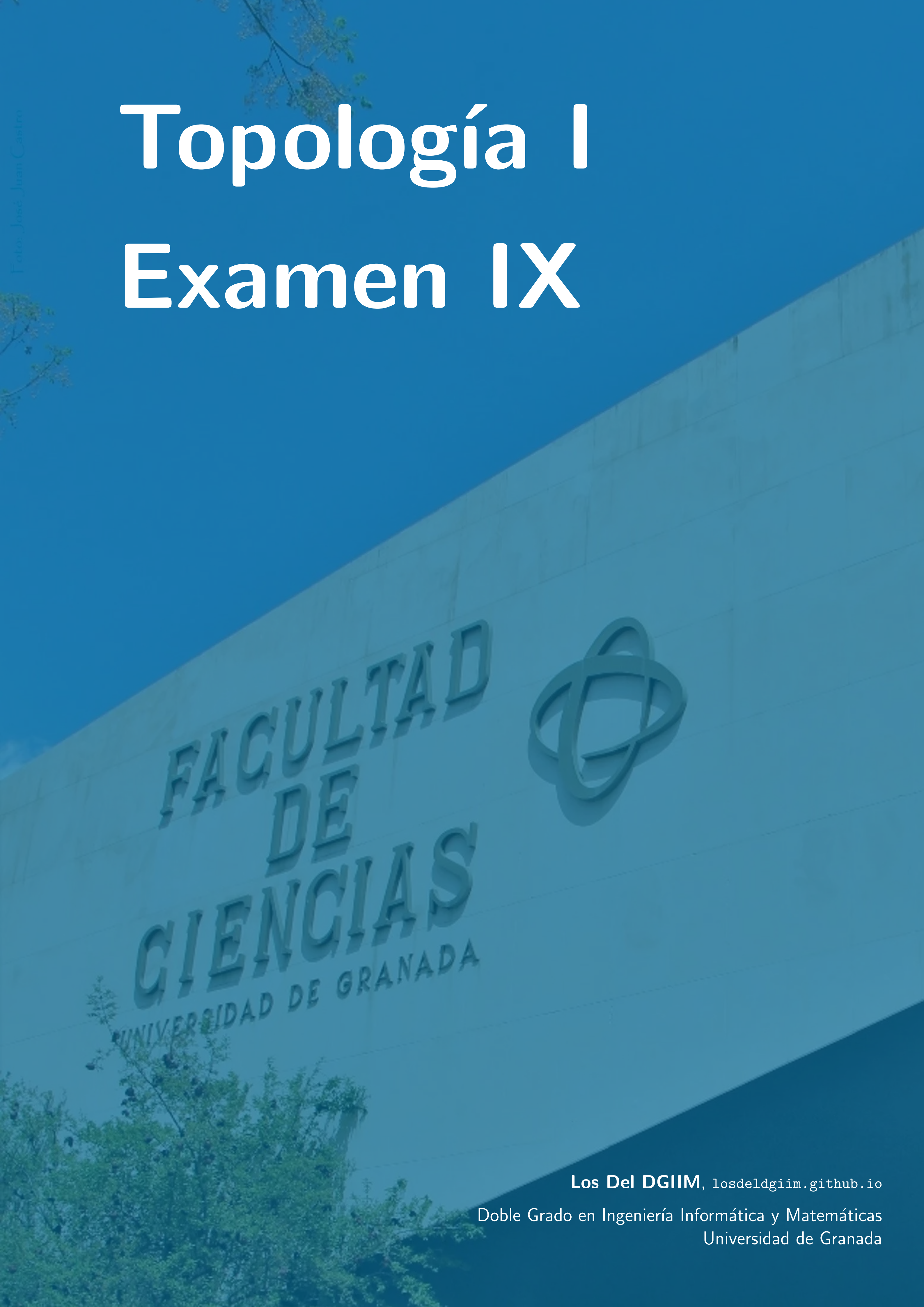

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Antonio Gálvez López.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 14 de febrero de 2023.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (4.5 puntos)**.** Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada $(x,y) \in X$ denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leqslant 1\}$$

En X, consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x,y) \in X\}$$

(a) Prueba que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología $\mathcal{T}$ en X.

(b) ¿Verifica $(X, \mathcal{T})$ el segundo axioma de numerabilidad?

(c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leqslant 1\}$.

(d) En X consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x,y) = \lambda(x',y')$$

Prueba que $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ donde $\mathcal{T}_D$ es la topología discreta.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

2a. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Prueba que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo si y sólo si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son conexos.

2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideremos $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, donde p es un punto que no pertenece a $\mathbb{R}^2$ y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde $\mathcal{T}_u$ denota la topología usual de $\mathbb{R}$. Demuéstrese que:

(a) $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

(b) $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

(c) $(X, \mathcal{T})$ es T_2 y conexo.

Ejercicio 1 (4.5 puntos)**.** Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada $(x,y) \in X$ denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leqslant 1\}$$

En X, consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x,y) \in X\}$$

(a) Prueba que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología $\mathcal{T}$ en X.

Para una mayor intuición de la base dada, notemos que $\mathcal{B}_{(x,y)}$ es el segmento que une $(0,0)$ con (x,y) sin incluir el $(0,0)$.

Para ver que $\mathcal{B}$ es base, veamos que verifican B1 y B2:

B1) $\displaystyle\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$

Por ser $B_{(x,y)} \subseteq X \quad \forall B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$, sabemos que $\displaystyle\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} \subseteq X$.

Sea $(x,y) \in X$, $(x,y) \in B_{(x,y)} \Rightarrow (x,y) \in \displaystyle\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$.

Luego $X \subseteq \displaystyle\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$.

$\displaystyle\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$ y se tiene B1.

B2) Sean B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \mid x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Sean $B_{(x,y)}$, $B_{(x',y')} \in \mathcal{B}$. Sea $(u,v) \in B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha, \lambda \in]0,1] \mid (u,v) = (\alpha x, \alpha y) = (\lambda x', \lambda y') \Rightarrow (u,v) = \alpha(x,y) = \lambda(x',y') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\lambda}(x,y) = (x',y')$$

Si se intersecan, (x,y) y (x',y') son vectores proporcionales con factor de proporcionalidad positivo, luego es fácil ver que:

$$B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} = B = \{(tx'', ty'') \mid 0 < t \leqslant 1\}$$

Donde:

$$(x'', y'') = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad \|(x,y)\| \leqslant \|(x',y')\| \\ (x',y') & \text{si} \quad \|(x',y')\| < \|(x,y)\| \end{cases}$$

Por lo que:

$$B = \begin{cases} B_{(x,y)} & \text{si} \quad \|(x,y)\| \leqslant \|(x',y')\| \\ B_{(x',y')} & \text{si} \quad \|(x',y')\| < \|(x,y)\| \end{cases}$$

$$B \in \mathcal{B} \text{ y además, } x \in B = B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')}$$

Por lo que se tiene B2.

(b) ¿Verifica $(X, \mathcal{T})$ el segundo axioma de numerabilidad?

No:
Supongamos que sí, luego $\exists \mathcal{B}'$ base numerable de $(X, \mathcal{T})$.
Sea $(x, y) \in X$, consideramos el abierto $B_{(x,y)}$. $\mathcal{B}'$ es base de $(X, \mathcal{T})$, luego:

$$\exists B \in \mathcal{B}' \mid (x, y) \in B \subseteq B_{(x,y)}$$

Pero como B es el segmento que une el $(0, 0)$ (sin él) con un punto, y contiene al (x, y), ha de ser $B_{(x,y)}$ o algo mayor. Por estar contenido en $B_{(x,y)}$ sabemos que:

$$B = B_{(x,y)}$$

Por este razonamiento, podemos definir una aplicación $f : X \to \mathcal{B}'$ dada por:

$$f(x, y) = B_{(x,y)} \quad \forall (x, y) \in X$$

Que es claramente inyectiva, luego $|X| \leqslant |\mathcal{B}'|$. Pero $\mathcal{B}'$ era numerable y X no lo es, contradicción.

(c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leqslant 1\}$.

$$A = \mathbb{R}\times]0, 1]$$

Veamos que A es abierto:
Sea $(x, y) \in A$, $(x, y) \in B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$. Veamos que $B_{(x,y)} \subseteq A$:
Sea $(tx, ty) \in B_{(x,y)}$ con $t \in]0, 1]$. Por ser $(x, y) \in A \Rightarrow y \in]0, 1]$.
Entonces, $ty \in]0, 1]$ por estar ambos en $]0, 1]$ [1].
Luego $(tx, ty) \in A \ \ \forall (tx, ty) \in B_{(x,y)}$.
Por lo que $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq A \ \ \forall (x, y) \in A \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

$$\text{int}(A) = A$$

Para la clausura, intuimos que será el conjunto $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$. Veamos primero que este conjunto es cerrado:
Consideramos $B = X \setminus (\mathbb{R}\times]0, +\infty[) = (\mathbb{R}\times] - \infty, 0]) \setminus \{(0, 0)\}$ y veamos que es abierto:
Sea $(x, y) \in B$. Si $y = 0 \Rightarrow (x, 0) \in B_{(x,0)} \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\} \subseteq B$.
Si $y \neq 0 \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}\times] - \infty, 0[\Rightarrow y < 0$. $(x, y) \in B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid t \in]0, 1]\}$.
Luego, sea $(tx, ty) \in B_{(x,y)} \Rightarrow ty < 0 \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbb{R}\times] - \infty, 0[\subseteq B$.
Por tanto, $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq B \ \ \forall (x, y) \in B \Rightarrow B \in \mathcal{T} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Para concluir que $\overline{A} = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, veamos que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$:

$$A \cap B \neq \emptyset \ \ \forall B \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in B$$

[1] Nociones de Cálculo I

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, sea $B_{(x',y')} \in \mathcal{B} \mid (x,y) \in B_{(x',y')}$
Sea $(u,v) = \dfrac{(x',y')}{\|(x',y')\|} \in \mathbb{S}^1 \cap (\mathbb{R}\times]0,+\infty[) \subseteq A$, proporcional a (x',y')
Luego: $(u,v) \in B_{(x',y')} \Rightarrow A \cap B_{(x',y')} \neq \emptyset$.

$$\overline{A} = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

Por tanto:

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A) = (\mathbb{R}\times]0,+\infty[) \setminus (\mathbb{R}\times]0,1]) = \mathbb{R}\times]1,+\infty[$$

(d) En X consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x,y) = \lambda(x',y')$$

Prueba que $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ donde $\mathcal{T}_D$ es la topología discreta.

TODO.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

2a. Sean $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ espacios topológicos. Prueba que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo si y sólo si $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ son conexos.

$\Rightarrow$) Supongamos que $(X \times Y, \mathcal{T}, \mathcal{T}')$ es conexo. Recordamos que π_X y π_Y son continuas y que la imagen de un conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo. Como:

$$\pi_X(X \times Y) = X \qquad \pi_Y(X \times Y) = Y$$

Se tiene que $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ son conexos.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ son conexos. Como la conexión es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos) y tenemos que, para todo $x \in X$ e $y \in Y$:

$$X \cong X \times \{y\} \qquad Y \cong \{x\} \times Y$$

Se tiene que $X \times \{y\}$ y $\{x\} \times Y$ son conexos $\forall x \in X, y \in Y$.
Recordamos además que la unión de conexos que intersecan a uno fijo es un conjunto conexo, luego (fijado un $y \in Y$):

$$X \times Y = \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \right) \cup (X \times \{y\})$$

$$(x,y) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Es un conjunto conexo.

2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es un homeomorfismo.

Sea $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ continua e inyectiva, falta ver que es sobreyectiva y abierta (o cerrada o que su inversa es continua) para llegar a que es un homeomorfismo.

Comenzamos viendo que es cerrada:
Sabemos que $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es compacta y T_2 (visto en clase), luego f es cerrada por un teorema visto en teoria.

Veamos ahora que es sobreyectiva:
Supongamos que no, luego $\exists p \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$
TODO

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideremos $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, donde p es un punto que no pertenece a $\mathbb{R}^2$ y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde $\mathcal{T}_u$ denota la topología usual de $\mathbb{R}$. Demuéstrese que:

(a) $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Notaremos al segundo conjunto como:

$$\Lambda = \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

Primero, reescribimos Λ para tener una mayor intuición de lo que tenemos que demostrar:

$$\Lambda = \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es cerrado y acotado en } \mathcal{T}_u\}$$
$$= \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge O \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \text{ y no está mayorado ni minorado }\}$$

Veamos que se verifican A1, A2 y A3 para tener el apartado probado:

A1) $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$

$\emptyset \in \mathcal{T}$
$\mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$ y $A =]-\infty, -1[\cup \{p\} \cup]1, +\infty[\in \Lambda$
Luego: $X = \mathbb{R} \cup A \in \mathcal{T}$

A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

Sea $J = \{i \in I \mid p \notin U_i\} = \{i \in I \mid U_i \notin \Lambda\}$

$$U_j \in \mathcal{T}_u \quad \forall j \in J \Rightarrow \bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$$

$$U_i \in \Lambda \quad \forall i \in I \setminus J \text{ .Veamos si } \bigcup_{i\in I\setminus J} U_i \in \Lambda$$

$p \in U_i \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow p \in \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i$

$U_i \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u$

Sea $h \in I \setminus J$, tenemos que U_h no está mayorado ni minorado y por ser $U_h \subseteq \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\})$ no está mayorado ni minorado.

Por tanto, $\bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \Lambda$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} U_j \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \in \mathcal{T}_u \cup \Lambda = \mathcal{T}$$

A3) Si $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

Si U, $V \in \mathcal{T}_u \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$.

Si $U \in \mathcal{T}_u$ y $V \in \Lambda \Rightarrow U \cap V = U \cap (V \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$

Si $U, V \in \Lambda$:
$p \in U \wedge p \in V \Rightarrow p \in U \cap V$
$\mathbb{R} \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbb{R} \setminus V \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$
$\mathbb{R} \setminus U$ acotado $\wedge \mathbb{R} \setminus V$ acotado $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus (U \cap V)$ acotado
Luego $U \cap V \in \Lambda$.

(b) $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

(c) $(X, \mathcal{T})$ es T_2 y conexo.