Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

El presente documento es un resumen del microcredencial de "Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos", que recoge los principales conceptos que se impartieron en el mismo. Si cursa el microcredencial se recomienda ver los recursos proporcionados por el profesorado. Si está cursando actualmente la asignatura de "Lógica y Métodos Discretos" del grado de Informática, los dos primeros capítulos pueden serle de gran ayuda.

A lo largo del curso trabajaremos en $\mathbb{Z}_2$, por lo que se recomienda al lector repasar los apuntes de Álgebra I en caso de no estar familiarizado con dicho cuerpo.

1. Lógica Proposicional

Consideraremos un conjunto finito de proposiciones atómicas, que serán para nosotros enunciados indivisibles. Nos interesará la veracidad o falsedad de cada una de estas proposiciones. Consideraremos sobre estas las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. De esta forma, somos capaces de definir lo que es una proposición en nuestro lenguaje.

Definición 1.1 (Proposición)**.** Definimos las proposiciones de forma recursiva[1]:

1. Las proposiciones atómicas son proposiciones.
2. Si α y β son proposiciones, también lo son:

$$\neg\alpha,\ \alpha\wedge\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\rightarrow\beta,\ \alpha\leftrightarrow\beta$$

3. No hay más proposiciones que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

1.1. Semántica

Una vez definida lo que es una proposición, pasamos a lo que nos interesa, asignar un valor de verdad o de falsedad a cada una de las proposiciones que nos encontremos. Para ello, consideraremos una aplicación del conjunto de las proposiciones en $\mathbb{Z}_2$, e interpretaremos el valor de 0 como falso y el valor de 1 como verdad.

Definición 1.2 (Interpretación)**.** Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las proposiciones de un lenguaje proposicional, una interpretación sobre el mismo es una aplicación $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $I(\neg a) = 1 + I(a)$.
2. $I(a \wedge b) = I(a)I(b)$.
3. $I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b)$.
4. $I(a \rightarrow b) = 1 + I(a) + I(a)I(b)$.
5. $I(a \leftrightarrow b) = 1 + I(a) + I(b)$.

Para cualesquiera proposiciones $a, b \in \mathcal{P}$.

[1] Algo que será habitual en este curso.

Definición 1.3. Sea α y β dos proposiciones de forma que $I(\alpha) = I(\beta)$ para cualquier interpretación I, entonces escribiremos que $\alpha \equiv \beta$ y podemos decir que α y β son semánticamente equivalentes.

Definición 1.4. Sea α una proposición:

- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 1$, diremos que p es **satisfacible**.
- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 0$, diremos que p es **refutable**.
- Si $I(\alpha) = 1$ para cualquier interpretación I, diremos que p es una **tautología**.
- Si $I(\alpha) = 0$ para cualquier interpretación I, diremos que p es una **contradicción**.

Definición 1.5 (Consecuencia lógica)**.** Sea $\Gamma \cup \{p\}$ un conjunto de proposiciones, decimos que p es consecuencia lógica de Γ (notado por $\Gamma \models p$), si dada una interpretación I, siempre que se tenga que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, entonces se tiene que $I(p) = 1$.

Notación. Por comodidad, si p es una proposición de forma que $\emptyset \models p$, entonces notaremos:

$$\models p$$

Notemos que en este caso p es una tautología, ya que estamos diciendo que $I(p) = 1$ para cualquier[2] interpretación I.

Proposición 1.1. *Se verifica que* $\Gamma \models p$ *si y solo si* $(1 + I(p)) \prod_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma) = 0$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

$\Longrightarrow$) Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces tenemos el resultado.
- En caso contrario, tendremos que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$. En dicho caso, como $\Gamma \models p$, se tendrá que $I(p) = 1$, por lo que:

$$1 + I(p) = 0 \Longrightarrow (1 + I(p)) \prod_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma) = 0$$

$\Longleftarrow$) Sea I una interpretación que verifica $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como $\mathbb{Z}_2$ es un dominio de integridad, de $(1 + I(p)) \prod_{\gamma\in\Gamma} I(\gamma) = 0$ deducimos que $I(p) + 1 = 0$, por lo que $I(p) = 1$ y entonces se tiene que $\Gamma \models p$.

$\square$

Teorema 1.2 (de la deducción)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *un conjunto de proposiciones, equivalen:*

[2] Cualquiera que haga ciertos todos los elementos del vacío.

1. $\Gamma \models \alpha \to \beta$

2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) $\Longrightarrow$ 2) Sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$ y que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces (por 1) deducimos que $I(\alpha \to \beta) = 1$, luego:

$$1 = I(\alpha \to \beta) = 1 + \cancelto{1}{I(\alpha)} + \cancelto{1}{I(\alpha)} I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta)$$

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$:

- Si $I(\alpha) = 0$, entonces:

  $$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1$$

  Por lo que se tiene 1.

- Si $I(\alpha) = 1$, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $I(\beta) = 1$, por lo que:

  $$I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + 1 = 1$$

$\square$

Ejemplo. Demostraremos ahora que varias proposiciones son tautologías:

$\models \alpha \to \alpha$

Por el Teorema de la deducción (1.2), $\models \alpha \to \alpha$ es equivalente a ver que $\{\alpha\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$, tenemos que $I(\alpha) = 1$.

$\models \alpha \to (\beta \to \alpha)$

Por el Teorema de la deducción, es equivalente ver que $\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$; que nuevamente por el Teorema de la deducción es equivalente ver que $\{\alpha, \beta\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$, entonces $I(\alpha) = 1$.

$\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

Por el Teorema de la deducción aplicado 3 veces, es equivalente ver que:

$$\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha\} \models \gamma$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = I(\alpha \to \beta) = I(\alpha)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(\alpha \to \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta) \Longrightarrow I(\beta) = 1 \\ 1 &= I(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta \to \gamma) \\ &= 1 + I(\alpha) + I(\alpha)(1 + I(\beta) + I(\beta)I(\gamma)) = 1 + 1 + 1(1 + 1 + I(\gamma)) \\ &= I(\gamma) \Longrightarrow \underline{I(\gamma) = 1} \end{aligned}$$

$\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$

Por el Teorema de la deducción aplicado 2 veces, es equivalente ver que:

$$\{\neg\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha \to \beta\} \models \alpha$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\neg\alpha \to \neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\neg\beta)$$
$$1 = I(\neg\alpha \to \beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta)$$

Entonces (sumando):

$$0 = I(\neg\alpha \to \neg\beta) + I(\neg\alpha \to \beta) = I(\neg\alpha)(I(\neg\beta) + I(\beta)) \overset{(*)}{=} I(\neg\alpha)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $I(\neg\beta) = 1 + I(\beta) \Longrightarrow I(\neg\beta) + I(\beta) = 1$.

Como $I(\neg\alpha) = 0$, se tiene que $I(\alpha) = 1$, como queríamos demostrar.

Definición 1.6. Sea Γ un conjunto de proposiciones, decimos que Γ es **inconsistente** si para toda interpretación I existe $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$.

Proposición 1.3. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de proposiciones, equivalen:*

1. $\Gamma \models \alpha$.
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es inconsistente.*

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) $\Longrightarrow$ 2) Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces Γ es inconsistente, de donde $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ también lo es.
- Si $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, aplicando que $\Gamma \models \alpha$ deducimos que $I(\alpha) = 1 \Longrightarrow I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha) = 0$, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente, deducimos que $I(\neg\alpha) = 0$, luego $I(\alpha) = 1$.

□

1.1.1. Algoritmo de Davis & Putnam

Definición 1.7. Introducimos definiciones que nos serán útiles para llegar al algoritmo de Davis & Putnam:

- Dada una proposición atómica a, entonces decimos que a y $\neg a$ son <u>literales</u>.
- Sea a una proposición atómica, denotamos $a^c = \neg a$ y $(\neg a)^c = a$. Para un literal l, decimos que l^c es su <u>complemento</u>.
- Sean $l_1, \ldots, l_n$ literales, entonces decimos que $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ es una <u>cláusula</u>.

- Sea α una proposición, decimos que está en forma normal conjuntiva (abreviado como fnc) si α es de la forma $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$, con $c_1, \ldots, c_n$ cláusulas.
- A la cláusula sin literales (compuesta por la disyunción de 0 literales) la llamamos cláusula vacía, y la denotamos por $\square$.

Proposición 1.4. *Sea I una interpretación, entonces:*

$$I(\square) = 0$$

Demostración. Como $\square \vee a = a$ para cualquier proposición atómica a, entonces:

$$I(\square \vee a) = I(\square) + I(a) + I(\square)I(a) = I(a)$$

De donde deducimos:

$$I(\square) + I(\square)I(a) = I(\square)(1 + I(a)) = 0$$

Luego $I(\square) = 0$ o $I(a) = 1$, pero como la proposición atómica a era arbitraria (y sabemos que hay proposiciones atómicas que no son tautologías), deducimos que ha de ser $I(\square) = 0$. $\square$

Proposición 1.5. *Toda proposición puede expresarse en una proposición semánticamente equivalente que se encuentre en forma normal conjuntiva.*

Demostración. Aunque no lo demostraremos, el lector puede hacerse una idea de que el enunciado es cierto, con ayuda de las siguientes reglas:

- $\neg\neg a \equiv a$ (regla de la doble negación)
- $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$ y $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ (reglas de De Morgan)
- $a \to b \equiv \neg a \vee b$ y $a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (ley distributiva)

$\square$

Ejemplo. Sea $\alpha = (a \to b) \to a$, buscamos una proposición semánticamente equivalente en forma normal conjuntiva. Para ello, primero quitamos $\to$ de la proposición:

$$(a \to b) \to a \equiv \neg(\neg a \vee b) \vee a$$

Posteriormente, aplicamos la regla de De Morgan, así como la de la doble negación:

$$\neg(\neg a \vee b) \vee a \equiv (\neg\neg a \wedge \neg b) \vee a \equiv (a \wedge \neg b) \vee a$$

Aplicando la ley distributiva ya llegamos a una proposición semánticamente equivalente en forma normal conjuntiva:

$$(a \vee a) \wedge (a \vee \neg b)$$

Sin embargo, como $a \vee a \equiv a$, podemos seguir simplificando, obteniendo que:

$$a \wedge (a \vee \neg b)$$

Pero como:

$$\begin{aligned} I(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) &= I(\alpha)(I(\alpha) + I(\beta) + I(\alpha)I(\beta)) \\ &= I(\alpha)I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) + I(\alpha)I(\alpha)I(\beta) \\ &= I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) + I(\alpha)I(\beta) = I(\alpha) \end{aligned}$$

Llegamos finalmente a que:

$$(a \to b) \to a \equiv a$$

Proposición 1.6. *Dado el conjunto de proposiciones* $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$*, son equivalentes:*

- $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ *es inconsistente.*
- $\{\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n\}$ *es inconsistente.*

Demostración. Notemos que decir que $\{\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n\}$ sea inconsistente significa que dada una interpretación I, entonces:

$$I(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$$

$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ será inconsistente si y solo si dada una interpretación I hay alguna proposición ψ_i de forma que $I(\psi_i) = 0$, si y solo si $\prod_{k=1}^{n} I(\psi_k) = 0$, lo que equivale con que $\{\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n\}$ sea inconsistente. □

Proposición 1.7. *Dado un conjunto de proposiciones* Γ*, si consideramos el conjunto* Γ' *resultante de considerar para cada fórmula de* Γ *su forma normal conjuntiva y luego tomar la unión de todas ellas, se tiene que* Γ *es inconsistente si y solo si* Γ' *es inconsistente.*

Demostración. Puede demostrarse fácilmente usando la Proposición 1.6. □

El último resultado es de gran importancia, ya que recordemos que, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de proposiciones, que $\Gamma \vDash \varphi$ es equivalente a probar que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, conjunto que puede transformarse en un conjunto de cláusulas Δ que será inconsistente si y solo si lo era $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

De esta forma, notemos que el estudio de que una proposición sea consecuencia lógica de otra se reduce a estudiar si un conjunto de cláusulas es o no inconsistente.

El algoritmo

El algoritmo de Davis y Putnam consiste en aplicar a un conjunto de cláusulas las reglas que a continuación se exponen, intentando siempre aplicar la primera en el orden en que vienen dadas. Cada conjunto de cláusulas que obtengamos al aplicar las reglas de esta forma será inconsistente si y solo si lo era el original del que proviene (en el caso de la última regla, el conjunto de partida es inconsistente si y solo si lo son los dos conjuntos que se generan después de aplicar la regla):

Regla 1 (regla de las tautologías). Quítense todas las fórmulas que sean tautologías, es decir, las que contengan un literal y su complementario.

Regla 2 (regla de los literales). Si hay una cláusula que es un literal L en Δ, obténgase Δ' a partir de Δ eliminando todas las cláusulas de Δ que contengan a L.

- Si Δ' es el conjunto vacío, entonces Δ no será inconsistente, ya que el vacío no lo es.
- En otro caso, obténgase Δ'' a partir de Δ' suprimiendo L^c de Δ'.

  Notemos que si L^c era una cláusula, entonces el resultado de suprimir L^c es $\square$, la cláusula vacía, en cuyo caso, el conjunto $\{\square\}$ es inconsistente.

Regla 3 (regla de los literales puros). Si un literal L aparece en algunas cláusulas y L^c no aparece en ninguna, quítense todas las cláusulas conteniendo a L.

Regla 4 (regla de la generalización). Si una cláusula C tiene todos sus literales en otra C' (es decir $C \subseteq C'$), quítese C'.

Regla 5 (regla de la subdivisión). Si un literal L y su complementario L^c están presentes en el conjunto de cláusulas, construir dos nuevos conjuntos de cláusulas de la siguiente forma:

- El primero se obtiene quitando todas las cláusulas conteniendo a L y borrando las ocurrencias de L^c.
- El segundo se obtiene quitando todas las cláusulas conteniendo a L^c y borrando las ocurrencias de L.

En este caso, el conjunto original es inconsistente si y solo si lo son los dos conjuntos resultado de aplicar esta regla.

Teorema 1.8 (Funcionamiento de Davis & Putnam). *Sea Δ un conjunto de cláusulas, Δ es inconsistente si y solo si lo son todos y cada uno de los conjuntos obtenidos tras aplicar las reglas del algoritmos de Davis y Putnam sobre Δ.*

Demostración. Para ello, hemos de probar que el conjunto que obtenemos al aplicar cada regla sobre Δ es inconsistente si y solo si lo es Δ:

- Regla 1. En este caso, basta ver que si $\Delta \cup \{\alpha\}$ es un conjunto de cláusulas de forma que α es una tautología, entonces $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si lo es Δ. Para ello, supongamos que $\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$:

  $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si lo es $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \alpha\}$, que es inconsistente si y solo si para cualquier interpretación I se tiene que:

  $$\left(\prod_{k=1}^{n} I(\varphi_k)\right) I(\alpha) = 0$$

  Que es equivalente a que $\prod\limits_{k=1}^{n} I(\varphi_k) = 0$, ya que α es una tautología, por lo que $I(\alpha) = 1$ para cualquier interpretación I. Esta última condición es equivalente con que $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k\}$ sea inconsistente, si y solo si lo es Δ.

Si ahora el conjunto original tiene $n > 1$ tautologías (el caso $n = 0$ es trivial y el caso $n = 1$ acaba de comprobarse), si quitamos una tautología cada vez, vamos obteniendo conjuntos que son inconsistentes si y solo si lo era el primero, hasta llegar a eliminar todas las tautologías del conjunto. Para este paso puede hacerse una demostración por inducción, aunque consideramos que no es necesario.

- Regla 2. Sea L un literal y Δ un conjunto de cláusulas de la forma:

$$\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n, L\}$$

verificándo que:

- ψ_i contiene a L para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- φ_i no contiene a L, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Por ser L un literal, habrá alguna interpretación I que lo haga cierto, $I(L) = 1$. En dicho caso, por ser ψ_i una cláusula que contiene a L, tendremos $I(\psi_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $\Delta' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$:

Si $\Delta' = \emptyset$ (es decir, que no había ningún φ_i en Δ), entonces Δ no era inconsistente, ya que una interpretación que hiciese cierta a L hará cierta cualquier cláusula ψ_i, por contender a L.

En el caso $\Delta' \neq \emptyset$, tendremos $\Delta'' = \{\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m\}$ de forma que φ'_i es φ_i suprimiendo L^c, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Queremos ahora ver que Δ'' es inconsistente si y solo si lo es Δ:

- Si Δ'' es inconsistente, dada una interpretación I, se cumplirá $I(\varphi'_i) = 0$ para cierto $i \in \{1, \ldots, m\}$.
  - Si $I(L) = 1$, entonces $I(L^c) = 0$, luego:

$$I(\varphi_i) = I(\varphi'_i \vee L^c) = 0$$

  - En el caso $I(L) = 0$, tenemos $L \in \Delta$.

  Concluimos que Δ es inconsistente.
- Si Δ es inconsistente, supongamos que Δ'' no es inconsistente, por lo que existe una interpretación I de forma que $I(\varphi'_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como Δ'' no contiene en sus cláusulas ni a L ni a L^c, podemos asignar a voluntad el valor de $I(L)$ (ya que su valor no cambia que $I(\varphi'_i) = 1$). De esta forma, si tomamos $I(L) = 1$, entonces:

$$I(\varphi_i) = I(\varphi'_i \vee L) = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m\}$$

  Como ψ_i contiene a L, tenemos $I(\psi_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hemos llegado a una contradicción, ya que Δ era inconsistente, luego Δ'' es inconsistente.

- Regla 3. Sea $\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ de forma que:
  - ψ_i contiene a L y no a L^c, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- φ_i no contiene ni a L ni a L^c, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $\Delta' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, queremos ver que Δ es inconsistente si y solo si lo es Δ':

- Si Δ' es inconsistente, por ser $\Delta' \subseteq \Delta$, tenemos que Δ también será inconsistente.
- Si Δ es inconsistente, podemos repetir el razonamiento que hicimos en la regla 2: supongamos que Δ' no es inconsistente, con lo que existirá una interpretación I de forma que $I(\varphi_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como Δ' no contiene ni a L ni a L^c en ninguna de sus cláusulas, podemos asignar a voluntad el valor de $I(L)$. Si tomamos $I(L) = 1$, entonces tendremos que $I(\psi_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por ser ψ_i cláusulas que contienen a L. Hemos llegado a una contradicción, ya que Δ era inconsistente. Concluimos que Δ' ha de ser inconsistente.

- Regla 4. Sea $\Delta \cup \{C, C'\}$ un conjunto de cláusulas de forma que C tiene todos sus literales en C', veamos que $\Delta \cup \{C, C'\}$ es inconsistente si y solo si lo es $\Delta \cup \{C\}$:
  - Si $\Delta \cup \{C\}$ es inconsistente, por ser $\Delta \cup \{C\} \subseteq \Delta \cup \{C, C'\}$, entonces tenemos que este segundo también es inconsistente.
  - Si $\Delta \cup \{C, C'\}$ es inconsistente, dada una interpretación I, existirá una cláusula $\varphi \in \Delta \cup \{C, C'\}$ de modo que $I(\varphi) = 0$:
    - Si $\varphi \neq C'$, entonces $\varphi \in \Delta \cup \{C\}$ con $I(\varphi) = 0$:
    - Si $\varphi = C'$, como $I(C') = 0$ y C' contiene más literales que C, ha de ser $I(C) = 0$ (ya que si no tendríamos $I(C') = 1$). Por tanto, tenemos $C \in \Delta \cup \{C\}$ con $I(C) = 0$.

  Concluimos que $\Delta \cup \{C\}$ es inconsistente.

- Regla 5. Se deja como ejercicio.

$\square$

Ejemplo. Veamos ahora dos ejemplos de uso del algoritmo de Davis & Putnam:

1. En este caso, vamos a demostrar que el conjunto:

$$\{P \lor Q, \neg P \lor Q, P \lor \neg Q, \neg P \lor \neg Q, P \lor \neg P, P \lor Q \lor R, P \lor Q \lor \neg R, \neg P \lor S\}$$

es inconsistente. Como se trata de un conjunto de cláusulas, podemos aplicar directamente el algoritmo de Davis & Putnam. En primer lugar, aplicamos la regla 1 (ya que $P \lor \neg P$ es una tautología), obteniendo:

$$\{P \lor Q, \neg P \lor Q, P \lor \neg Q, \neg P \lor \neg Q, P \lor Q \lor R, P \lor Q \lor \neg R, \neg P \lor S\}$$

Ahora no podemos aplicar ni la regla 1 ni la 2, pero sí la 3 al literal S, obteniendo:

$$\{P \lor Q, \neg P \lor Q, P \lor \neg Q, \neg P \lor \neg Q, P \lor Q \lor R, P \lor Q \lor \neg R\}$$

La primera regla que podemos aplicar ahora es la cuarta, ya que tenemos $P \lor Q$, $P \lor Q \lor R$ y $P \lor Q \lor \neg R$; obteniendo:

$$\{P \lor Q, \neg P \lor Q, P \lor \neg Q, \neg P \lor \neg Q\}$$

Y ahora la única regla que podemos aplicar es la quinta, que si la aplicamos al literal P obtenemos:

$$\Delta_1 = \{Q, \neg Q\}, \qquad \Delta_2 = \{Q, \neg Q\}$$

Finalmente, aplicando la segunda regla a cada uno de los dos conjuntos (notemos que son iguales), obtenemos:

$$\{\square\}, \qquad \{\square\}$$

De donde deducimos que el conjunto de partida era inconsistente si y solo si lo son $\{\square\}$ y $\{\square\}$, que efectivamente, son inconsistentes.

2. Usando el algoritmo de Davis & Putnam y el Teorema de la Deducción, buscamos demostrar que:

$$\models (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma))$$

Para ello, si aplicamos 3 veces el Teorema de la Deducción (1.2), llegamos a que demostrar lo de arriba es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \lor \beta\} \models \gamma$$

Que sabemos que a su vez es equivalente a ver que el conjunto:

$$\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma, \alpha \lor \beta, \neg\gamma\}$$

es inconsistente. Para ello, aplicaremos el algoritmo de Davis & Putnam sobre este conjunto. En primer lugar, tenemos que convertir todas las proposiciones a cláusulas:

$$\alpha \to \gamma \equiv \neg\alpha \lor \gamma \qquad \beta \to \gamma \equiv \neg\beta \lor \gamma$$

Por lo que aplicaremos el algoritmo sobre el conjunto:

$$\Delta = \{\neg\alpha \lor \gamma, \neg\beta \lor \gamma, \alpha \lor \beta, \neg\gamma\}$$

Aplicando ya el algoritmo, no podemos aplicar la regla 1, pero sí la 2 sobre $L = \neg\gamma$, obteniendo:

$$\{\neg\alpha \lor \gamma, \neg\beta \lor \gamma, \alpha \lor \beta\} \neq \emptyset$$

Si ahora eliminamos las ocurrencias de $L^c = \gamma$:

$$\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \lor \beta\}$$

Llegamos a un conjunto en el que tampoco podemos aplicar la regla 1, pero sí podemos volver a aplicar la 2 sobre $L = \neg\alpha$: $\{\neg\beta, \alpha \lor \beta\} \neq \emptyset$, con lo que:

$$\{\neg\beta, \beta\}$$

Sobre el que finalmente podemos volver a aplicar la regla 2: $\{\beta\} \neq \emptyset$, con lo que obtenemos finalmente $\{\square\}$.

Por el Teorema 1.8, sabemos que Δ es inconsistente si y solo si lo es $\{\square\}$, que sí es inconsistente.

1.2. Demostraciones

Definición 1.8 (Demostración)**.** Sean $\mathcal{A}$ y $\Gamma \cup \{p\}$ dos conjuntos de proposiciones (nos referiremos al conjunto $\mathcal{A}$ como "conjunto de axiomas" y a Γ como "conjunto de hipótesis"), una demostración de p a partir de Γ (notado por $\Gamma \vdash p$) es una secuencia de proposiciones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de forma que $\alpha_n = p$ y se verifica para todo i menor o igual que n:

- bien $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$.
- bien $\exists k, j < i$ siendo $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$.

Notación. Si p es una proposición de forma que $\emptyset \vdash p$, podremos notar $\vdash p$ y diremos que p es un teorema.

Ejemplo. Como ejemplo de demostración, veamos que $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$ (regla conocida como "Modus ponens"). Para ello, consideramos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha \\
\alpha_2 &= \alpha \to \beta \\
\alpha_3 &= \beta
\end{aligned}$$

Como vemos, es una demostración de β a partir de $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ porque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son proposiciones, $\alpha_3 = \beta$ y:

- $\alpha_1 \in \Gamma$.
- $\alpha_2 \in \Gamma$.
- $1, 2 < 3$ y $\alpha_2 = \alpha_1 \to \alpha_3$.

Notación. Para abreviar las demostraciones, a partir de ahora no daremos una secuencia numerada de proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, sino que numeraremos los pasos de la demostración y entenderemos que para formalizarla totalmente debemos coger como α_i el paso $i-$ésimo de la demostración.

Más aún, para no pararnos a comprobar las condiciones abstractas que han de cumplir cada una de las propiedades de la demostrción, incluiremos junto a los pasos de la demostración un comentario sobre por qué dicho paso es válido.

Con esta notación, la demostración de $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$ quedaría de la forma:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \to \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens de 1 y 2.

Finalmente, como conjunto $\mathcal{A}$ de axiomas, consideraremos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$$

Con:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{\alpha \to (\beta \to \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\}\\
\mathcal{A}_2 &= \{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) : \alpha, \beta, \gamma \text{ son proposiciones}\}\\
\mathcal{A}_3 &= \{(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Ejemplos de algunas demostraciones:

- $\{\alpha\} \vdash \beta \to \alpha$

  1. $\alpha \to (\beta \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$
  2. α es una hipótesis
  3. $\beta \to \alpha$ Modus ponens de 1 y 2.

- $\vdash \alpha \to \alpha$

  1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)) \in \mathcal{A}_2$
  2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$
  3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ Modus ponens de 1 y 2
  4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \in \mathcal{A}_1$
  5. $\alpha \to \alpha$ Modus ponens de 3 y 4

Teorema 1.9 (de Herbrand o de la deducción)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *un conjunto de proposiciones, equivalen:*

1. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) $\Longrightarrow$ 2) Como $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, podemos construir una demostración de n pasos de la proposición $\alpha \to \beta$ a partir de Γ. En cuyo caso, podemos añadir 2 pasos más a su demostración, de forma que:

1. $\dots$

   $\vdots$

n. $\alpha \to \beta$

$n+1$. α es hipótesis

$n+2$. β por Modus ponens de n y $n+1$

Como en los n primeros pasos solo hemos usado como hipótesis Γ, hemos conseguido demostrar en $n+2$ pasos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, podemos obtener una demostración β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de n pasos: $\beta_1, \dots, \beta_n$ (con $\beta_n = \beta$). Por inducción sobre n (el número de pasos de la demostración):

- Si $n = 1$: Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gracias a la demostración $\beta_1 = \beta$, distinguimos casos:
  (a) $\beta_1 \in \mathcal{A}$. En dicho caso, podemos considerar la demostración:
    1. $\beta_1 \in \mathcal{A}$
    2. $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) \in \mathcal{A}_1$
    3. $\alpha \to \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2

    Y con esto tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

  (b) $\beta_1 \in \Gamma$. En dicho caso, podemos considerar una demostración similar al caso anterior:
    1. $\beta_1 \in \Gamma$
    2. $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) \in \mathcal{A}_1$
    3. $\alpha \to \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2

    Y con esto también tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

  (c) $\beta_1 = \alpha$. En dicho caso, podemos copiar la demostración de $\vdash \beta \to \beta$ del ejemplo anterior, llegando a que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.
- En el paso de inducción, supuesto que de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_m$ podemos deducir que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_m$ para todo $m \leqslant n$, suponemos ahora que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_{n+1}$ y queremos ver que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_{n+1}$.

  En dicho caso, supuesto que $\beta_{m+1} \notin \mathcal{A} \cup \Gamma \cup \{\alpha\}$ (ya que si no la demostración es análoga al caso $n = 1$), la única posibilidad es que hayan de existir $i, j < n + 1$ con $\beta_i = \gamma$ y $\beta_j = \gamma \to \beta_{m+1}$.

  Si ahora consideramos los i primeros pasos de la demostración, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ y si consideramos los j primeros pasos, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \to \beta_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, como $i, j < n + 1$, tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ y que $\Gamma \vdash \alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})$. En este momento, podemos realizar la demostración (con hipótesis Γ):

  1. $\ldots$

  $\vdots$

  p. $\alpha \to \gamma$

  $p+1$. $\ldots$

  $\vdots$

  q. $\alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})$

  $q+1$. $(\alpha \to (\gamma \to \beta_{n+1})) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta_{n+1})) \in \mathcal{A}_2$

  $q+2$. $(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta_{n+1})$ por Modus ponens de q y $q+1$.

  $q+3$. $\alpha \to \beta_{n+1}$ por Modus ponens de p y $q+2$.

$\square$

1.2.1. Resultados útiles a la hora de realizar demostraciones

Proposición 1.10 (Regla de reducción al absurdo clásica)**.** *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones: si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.*

Demostración. Supuesto que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, por el Teorema de Herbrand (1.9), se tiene que $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$ y que $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$. En dicho caso:

1. ...
$\vdots$

p. $\neg\alpha \to \neg\beta$

$p+1$. ...
$\vdots$

q. $\neg\alpha \to \beta$

$q+1$. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) \in \mathcal{A}_3$

$q+2$. $((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ por Modus ponens de $q+1$ y p.

$q+3$. α por Modus ponens de $q+2$ y q.

Como desde el paso 1 hasta el q solo hemos usado como hipótesis Γ, deducimos que $\Gamma \vdash \alpha$. $\square$

Proposición 1.11 (Leyes de silogismo o transitividad de la flecha)**.** *Sean α, β y γ proposiciones, se verifican:*

1. $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

2. $\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

Demostración. Demostraremos la primera y dejamos la segunda como ejercicio. Para ello, aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, llegamos a que 1 es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con la demostración:

1. $\alpha \to \beta$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. β por Modus ponens de 1 y 2
4. $\beta \to \gamma$ es una hipótesis
5. γ por Modus ponens de 3 y 4

$\square$

Corolario 1.11.1 (Regla del silogismo)**.** *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones, si $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.*

Proposición 1.12 (Ley de conmutación de premisas)**.** *Sean α, β y γ proposiciones:*

$$\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con:

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. $\beta \to \gamma$ por Modus ponens de 1 y 2
4. β es una hipótesis
5. γ por Modus ponens de 3 y 4

$\square$

Corolario 1.12.1 (Regla de conmutación de premisas). *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *un conjunto de proposiciones, si* $\Gamma \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$*, entonces* $\Gamma \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$*.*

Proposición 1.13 (Ley de la doble negación). *Sea* α *una proposición:*

$$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, ya que:

1. $\{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$
2. $\{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$

Luego concluimos que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$. $\square$

Proposición 1.14 (Ley débil de la doble negación). *Sea* α *una proposición:*

$$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, con lo que partimos que $\{\alpha, \neg\neg\neg\alpha\}$ y tenemos que demostrar una proposición y su negación. Para ello:

1. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ por la ley de la doble negación
2. $\neg\neg\neg\alpha$ es una hipótesis
3. $\neg\alpha$ por Modus ponens de 1 y 2
4. α es una hipótesis

Concluimos por la regla de la reducción al absurdo que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$. $\square$

2. Lógica de Primer Orden

Es necesario introducir ahora lenguajes en los que podamos cuantificar cosas. Como primer ejemplo, si sabemos que "Todo hombre es mortal" y que "Sócrates es un hombre", nos gustaría deducir que, entonces, "Sócrates es mortal". Sin embargo, para esto hemos de poder cuantificar, cosa que no es posible con los lenguajes proposicionales pero sí con los lenguajes de primer orden.

Los lenguajes de primer orden estarán formados por:

- Constantes: $c_1, c_2, \ldots, a, b, c, \ldots$
- Variables: $x_1, x_2, \ldots, x, y, z, \ldots$
- Símbolos de función: $f_1, f_2, \ldots, f, g, h, \ldots$
- Símbolos de relación: $R_1, R_2, \ldots, R, S, T, \ldots$
- Conectivas lógicas: $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Cuantificadores: $\forall$, $\exists$

A los conjuntos de todas las constantes, de todas la variables y de todos los símbolos de función los notaremos por $Cons(\mathcal{L}), Var(\mathcal{L}), Fun(\mathcal{L})$, si $\mathcal{L}$ es nuestro lenguaje de primer orden.

Notación. En otros libros o contextos, en vez de denotar a los símbolos de función o variables con una letra que pueda llevar o no superíndice, estos las denotan con un superíndice:

- $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots$
- $R_1^{m_1}, R_2^{m_2}, \ldots$

En este caso, el superíndice indica la ariedad de la función o relación. Por ejemplo, si consideramos f^3, tenemos un símbolo de función que se aplica a 3 variables.

Definición 2.1 (Término)**.** Un término es:

1. Cualquier constante.
2. Cualquier variable.
3. Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función $n-$ario, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.

4. No hay más términos que los que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todos los términos de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ lo denotamos por $Term(\mathcal{L})$.

Ejemplo.

- $f(x, f(x, y))$ es un término.
- $f(x, f(x))$ no es un término, ya que usamos un mismo símbolo de función, f, para denotar dos objetos: una función unaria y una función binaria.

Definición 2.2 (Fórmulas atómicas)**.** Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y R es un símbolo de relación $n-$ario, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica (o simplemente, un átomo).

Definición 2.3 (Fórmulas)**.** Son fórmulas:

1. Las fórmulas atómicas.
2. Si φ y ψ son fórmulas, también lo son:
$$\neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \to \psi,\ \varphi \leftrightarrow \psi$$
3. Si x es una variable y φ es una fórmula, también lo son: $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$.
4. No hay más fórmulas que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todas las fórmulas de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ lo denotamos por $Form(\mathcal{L})$.

Definición 2.4. Una ocurrencia de una variable en una fórmula es una aparición de su escritura.

- En la fórmula $\forall x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\forall x$.
- En la fórmula $\exists x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\exists x$.

Diremos que x se encuentra cuantificada al ver $\forall x$ o $\exists x$.
Diremos que una ocurrencia de una variable x es ligada si aparece cuantificada o en el radio de acción de $\forall x$ o de $\exists x$.
Finalmente, diremos que una variable es libre si no aparece ligada. Si φ es una fórmula en la que las variables $x_1, \ldots, x_n$ aparecen libres, será usual denotar:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Que no debe confundirse con un término de una función o relación $n-$aria, ya que φ no es ni un símbolo de función o relación, sino una fórmula.

Ejemplo. En la siguiente fórmula:

$$\forall x(\exists y R(x, y) \to Q(y))$$

- x aparece cuantificada en su primera ocurrencia.

- y aparece cuantificada en su primera ocurrencia.
- x aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece como variable libre en su tercera ocurrencia.

Definición 2.5 (Sentencia)**.** Una sentencia es una fórmula sin ocurrencias de variables libres.

2.1. Semántica

Trataremos de generalizar el concepto de "interpretación", ya visto para lenguajes proposicionales. Para ello, será necesario primero definir los conceptos de "estructura" y de "asignación".

Definición 2.6 (Estructura)**.** Una estructura ε es una cuádrupla

$$\varepsilon = (D, \{c_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}, \{R_i^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}})$$

de forma que:

- D es un conjunto no vacío al que llamamos universo o dominio.
- A cada constante c_i de $\mathcal{L}$ le corresponde un elemento c_i^ε de D.
- A cada símbolo de función f_i de $\mathcal{L}$ le corresponde una función $f_i^\varepsilon : D^n \to D$.
- A cada símbolo de relación R_i de $\mathcal{L}$ le corresponde una aplicación $R_i^\varepsilon : D^m \to \mathbb{Z}_2$, de forma que $R_i^\varepsilon(c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon) = 1$ si c_1^ε y c_2^ε están relacionados y 0 en caso contrario.

Definición 2.7 (Asignación)**.** Una asignación v en ε es una aplicación $v : Var(\mathcal{L}) \to D$. Dada una asignación v, podremos extenderla a $v' : Term(\mathcal{L}) \to D$ de la forma:

$$v'(t) = \begin{cases} c^\varepsilon & \text{si } t = c \text{ una constante} \\ v(x) & \text{si } t = x \text{ una variable} \\ f^\varepsilon(v'(t_1), \ldots, v'(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definición 2.8 (Interpretación)**.** Una interpretación es una tupla (ε, v) con ε una estructura y v una asignación que tiene asociada una aplicación[1] $I_\varepsilon^v : Form(\mathcal{L}) \to \mathbb{Z}_2$ que cumple para cualesquiera fórmulas φ y ψ:

1. $I^v(\neg\varphi) = 1 + I^v(\varphi)$.
2. $I^v(\varphi \wedge \psi) = I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
3. $I^v(\varphi \vee \psi) = I^v(\varphi) + I^v(\psi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
4. $I^v(\varphi \to \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.

[1] A la que próximamente denotaremos simplemente como I^v, por simplicidad, entendiendo que la estructura ε viene dada por el contexto.

5. $I^v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\psi)$.

6. $I^v(\forall x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } a \in D,\ I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

7. $I^v(\exists x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } a \in D \text{ con } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Siendo:

$$v(x \mid a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ a & \text{si } y = x \end{cases}$$

Definición 2.9. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ y una estructura ε, diremos que φ es válida en ε si $I^v(\varphi) = 1$ para toda asignación v en ε.

Definición 2.10. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es satisfacible en una estructura ε si existe una asignación v en ε tal que $I^v(\varphi) = 1$.

Definición 2.11. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es universalmente válida si es válida en cualquier estructura ε. Esto lo notaremos por $\vDash \varphi$.

Definición 2.12. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es satisfacible si existe una estructura ε tal que φ es satisfacible en ε.

Definición 2.13. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es refutable si $\neq \varphi$ es satisfacible.

Definición 2.14. Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es una contradicción si $\neq \varphi$ es universalmente válida.

Lema 2.1 (de Coincidencia)**.** *Sean $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, $x_1, \ldots, x_n \in Var(\mathcal{L})$ con ocurrencias libres en φ, y una estructura ε. Entonces, dada una asignación v en ε:*

$$I^v(\varphi) = I^w(\varphi)$$

para toda asignación w en ε tal que $w(x_i) = v(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

En particular, si φ es una sentencia, entonces $I^v(\varphi)$ no depende de la asignación v. Por tanto, si φ es válida en ε, entonces φ es válida en ε.

Definición 2.15. Dado $\Gamma \cup \{\varphi\} \subset Form(\mathcal{L})$, diremos que φ es consecuencia lógica de Γ si para toda interpretación (ε, v) tal que $I^v(\chi) = 1$ para toda $\chi \in \Gamma$, se tiene que $I^v(\varphi) = 1$.

En este caso, lo notaremos por $\Gamma \vDash \varphi$.

Teorema 2.2 (de la Deducción)**.** *Dado $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subset Form(\mathcal{L})$, equivalen:*

1. $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Definición 2.16 (Inconsistencia)**.** Dado $\Gamma \subset Form(\mathcal{L})$, diremos que Γ es inconsistente si no existe una interpretación (ε, v) tal que $I^v(\chi) = 1$ para toda $\chi \in \Gamma$.

Teorema 2.3. *Dado $\Gamma \cup \{\varphi\} \subset Form(\mathcal{L})$, son equivalentes:*

1. $\Gamma \vDash \varphi$.

2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

2.2. Demostraciones

Los axiomas son:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_5$$

Con:

$\mathcal{A}_1 = \{\varphi \to (\psi \to \varphi) : \varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})\}$
$\mathcal{A}_2 = \{(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) : \varphi, \psi, \chi \in Form(\mathcal{L})\}$
$\mathcal{A}_3 = \{(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi) : \varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})\}$
$\mathcal{A}_4 = \{\forall x\varphi(x) \to \varphi(t) : \varphi \in Form(\mathcal{L}), x \in Var(\mathcal{L}), t \in Term(\mathcal{L}) \text{ con } t \text{ libre para } x \in \varphi(x)\}$
$\mathcal{A}_5 = \{\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi) : \varphi, \psi \in Form(\mathcal{L}), x \in Var(\mathcal{L}) \text{ con } x \text{ no libre en } \varphi\}$

donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $x_1, \ldots, x_n$ son variables que, si aparecen en φ, tienen ocurrencias libres. Además, en $\varphi(t)$ cambio las ocurrencias libres de x por t. En ese proceso, no se permite que variables de t se queden ligadas. Dos casos particulares de $\mathcal{A}_4$ son:

- $\forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$
- $\forall x\varphi \to \varphi$, donde x no aparece en φ.

Estos son suficientes, ya que podemos expresar:

- $\wedge, \vee$ en función de $\to$ y $\neg$.
- $\exists x\varphi$ es sinónimo de $\neg\forall x\neg\varphi$.

Algunas reglas de inferencia útiles son:

- Modus ponens: $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$.
- Generalización: $\{\varphi\} \vdash \forall x\varphi$.

Teorema 2.4 (de la Deducción)**.** *Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subset Form(\mathcal{L})$. Entonces:*

1. *Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y en la demostración no usamos generalización de un paso en el que haya intervenido φ con una variable libre en φ, entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*
2. *Si $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Notemos que si φ es una sentencia, se da la equivalencia.

Teorema 2.5 (Reducción al Absurdo)**.** *Dadas $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subset Form(\mathcal{L})$, si:*

- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$.
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$.

Con las mismas restricciones que en el teorema de la deducción, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema 2.6. *Dada $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, si $\vDash \varphi$, entonces $\vdash \varphi$.*

Ejemplo. Buscamos demostrar lo siguiente:

$$\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$$

con x no libre en φ.

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, buscamos:

$$(\varphi \to \forall x\psi) \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$$

1. $\varphi \to \forall x\psi$ es una hipótesis.
2. $\forall x\psi \to \psi$ axioma 4.
3. $\varphi \to \psi$ por silogismo de 1 y 2.
4. $\forall x(\varphi \to \psi)$ Generalización de 3.

Por el Teorema de la Deducción, como x no está libre en φ, se tiene. □

Ejemplo.

$$\vDash \forall x\varphi(x) \longleftrightarrow \forall g\varphi(y)$$

y libre para x en φ.

Dada cualquier (ε, v) interpretación, supongamos:

$$1 = I^v(\forall x\varphi(x) \longleftrightarrow \forall y\varphi(y))$$

Por tanto:

$$I^v\left(\forall x\varphi(x)\right) = I^v\left(\forall y\varphi(y)\right)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} I^v\left(\forall x\varphi(x)\right) &= \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1 \ \forall a \in D \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1 \ \forall a \in D \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &= I^v\left(\forall y\varphi(y)\right) \end{aligned}$$

Ejemplo.

$$\vDash \forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$$

Por el Teorema de la Deducción:

$$\{\forall x\varphi(x)\} \vDash \varphi(t)$$

Supongamos $I^v(\forall x\varphi(x)) = 1$. Entonces, para todo $a \in D$, tenemos $I^{v(x|a)}(\varphi(x)) =$ 1.

Tomando $a = v(t)$, tenemos que:

$$I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = I^v(\varphi(t))$$

2.2.1. Lenguaje de Primer Orden con Igualdad

Ahora, $\mathcal{L}$ tiene al menos un símbolo de relación binario $A(t,s)$, que notaremos por $t = s$.

Añadimos dos nuevos conjuntos de axiomas. El primero se puede resumir en uno solo

$$\mathcal{A}_6 = \{\forall x(x = x)\}$$
$$\mathcal{A}_7 = \{(x = y) \to (\varphi(x,x) \to \varphi(x,y)) \mid x, y \in Var(\mathcal{L}),\ \varphi(x,y) \in Form(\mathcal{L})\}$$

donde $\varphi(x,y)$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias libres de x por y en φ.

Algunas demostraciones a las que llegamos son:

- $\vdash (x = y) \to (f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,y,\dots,t_n))$

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, buscamos probar:

$$\{x = y\} \vdash f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,y,\dots,t_n)$$

1. $\forall x(x = x)$ por el axioma 6.
2. $\forall x(x = x) \to f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,x,\dots,t_n)$
3. $f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,x,\dots,t_n)$ por modus ponens de 1 y 2.
4. $(x = y) \to ((f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,x,\dots,t_n)) \to (f(t_1,\dots,x,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,y,\dots,t_n)))$
5. $x = y$ Por modus ponens.
6. $(s = s) \to (s = u)$ por modus ponens.
7. $s = u$ por modus ponens.

□