

Lógica y Métodos Discretos



*Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación*

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas	5
1.1. Inducción	5
1.2. Recurrencia	22
1.3. Lógica Proposicional	42

1. Relaciones de Problemas

1.1. Inducción

Ejercicio 1.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostrar que es cierta la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Para $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$$

Por tanto, se tiene $P(0)$.

- Como hipótesis de inducción supondremos que $n \in \mathbb{N}$ y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

y en el paso de inducción demostraremos que $P(n+1)$ es cierto.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierto, por lo que se tiene lo que se pedía. \square

Ejercicio 1.1.2. Demuestre que para todo número natural n :

$$\left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)^2 + n^3$$

Demostración. En este caso, no se usa la demostración mediante inducción, sino la demostración por casos:

■ $n = 0$:

$$\left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

■ $n = 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^1 k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

■ $n > 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 &= \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.1.

□

Ejercicio 1.1.3 (Teorema de Nicomachus). Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2$$

■ En el caso base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^0 k\right)^2$$

Y por tanto, $P(0)$ es correcto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto; es decir,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \stackrel{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción y en $(**)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.2. Luego $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $P(n)$ se tiene, como se pedía. \square

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, a la hora de demostrar que un predicado vale para $n+1$, se usa que es cierto para todo $n \in \{0, \dots, n\}$.

Veamos un ejemplo de uso del segundo principio de inducción matemática.

Ejercicio 1.1.4. Todo número natural mayor que 1 tiene al menos un factor primo.

Demostración. El razonamiento es por el segundo principio de inducción según el predicado (o fórmula) $P(n)$ del tenor:

“ n tiene un factor primo”

donde $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ (tenemos que $i_0 = 2$).

Como hipótesis de inducción, supongamos que n es un número natural superior a 1 y que $P(k)$ vale para todo $1 < k < n$.

En el paso de inducción distinguimos dos casos:

- n es primo:

En este caso, n es un factor primo de n (note que 2 es un ejemplo de los números en este caso, por lo que se tiene el caso base).

- n no es primo:

Si n no es primo, existen números naturales u y v tales que $n = uv$ y $1 < u, v$. Claro está entonces, que $1 < u, v < n$. Por la hipótesis de inducción, $P(u)$ vale, luego u tendrá al menos un factor primo, al que podemos llamar p . Así pues, $p \mid u$ y por tanto:

$$p \mid n$$

Luego $P(n)$ vale.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n vale $P(n)$. \square

Notemos que siempre tiene que ocurrir que el caso base (i_0) esté incluido en uno de los casos, por eso lo hemos destacado anteriormente con $i_0 = 2$.

Ejercicio 1.1.5 (Multiplicación por el Método del Campesino Ruso). Sea p la función dada por:

$$p(a, 0) = 0, \\ p(a, b) = \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar,} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b , $p(a, b) = ab$.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

“Para todo número natural m , $p(m, n) = mn$.”

Supongamos como hipótesis de inducción que k es un número natural y que $P(k)$ vale para todo $0 \leq k < n$. Distinguimos los siguientes casos:

- $n = 0$, (sea cual sea m):

$$p(m, 0) = 0 = m \cdot 0$$

Luego $P(0)$ vale.

- En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ vale:

Suponemos aquí que $n > 0$. Caben dos casos:

1. $n \equiv 0 \pmod{2}$ (es par):

$$p(m, n) = p\left(2m, \frac{n}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} 2m \cdot \frac{n}{2} = mn$$

Donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n}{2} < n$.

2. $n \equiv 1 \pmod{2}$ (es impar):

$$\begin{aligned} p(m, n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m \stackrel{(*)}{=} \left(2m \cdot \frac{n-1}{2}\right) + m = \\ &= m(n-1) + m = mn - m + m = mn \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado la hipótesis de inducción, ya que $\frac{n-1}{2} < n$.

Por el segundo principio de inducción, para todo número natural n , vale $P(n)$. \square

Ejercicio 1.1.6. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ 2 \mid (5^n + 3^{n-1}) ”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 3^{1-1} = 5 + 1 = 6$$

Como $2 \mid 6$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2 \mid (5^n + 3^{n-1})$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}) - (5^n + 3^{n-1}) &= 4 \cdot 5^n + 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5^n + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Como $2 \mid (5^{n+1} + 3^{(n+1)-1} - (5^n + 3^{n-1}))$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $2 \mid 5^n + 3^{n-1}$, hemos visto que $2 \mid 5^{n+1} + 3^{(n+1)-1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $2 \mid (5^n + 3^{n-1})$. \square

Ejercicio 1.1.7. Para todo número natural n no nulo, demostrar que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ 8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) ”$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$$

Como $8 \mid 8$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Para demostrarlo, antes tenemos en cuenta que, dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid (a - b) \\ n \mid b \end{array} \right\} \implies n \mid a$$

Esto se debe a que:

$$n \cdot k = a - b = a - nk_1 \implies a = n(k + k_1) = n \cdot k_2 \implies n \mid a$$

Por tanto, haciendo uso de esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) &= \\ &= 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 3^n + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 = \\ &= 5^n(5 - 1) + 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) = \\ &= 4 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = \\ &= 4(5^n + 3^{n-1}) \stackrel{(*)}{=} 4 \cdot 2k = 8k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he usado el Ejercicio 1.1.6. Por tanto, como hemos visto que $8 \mid [(5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1) - (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)]$ y, por hipótesis de inducción, $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, se tiene que $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-1} + 1$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n no nulo, se tiene que $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.8. Demuestre que para todo número natural n no nulo, se tiene que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- En el caso base, $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \geq \sqrt{2}$$

Como $2 \geq \sqrt{2}$, $P(1)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural no nulo y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos utilizado la hipótesis de inducción. Veamos ahora que $P(n+1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \iff \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \iff \\ &\iff \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \iff \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq (2n+2)^2(n+1) \iff \\ &\iff (n+2)(4n^2+4n+1) \leq (n+1)(4n^2+8n+4) \iff \\ &\iff 4n^3+4n^2+n+8n^2+8n+2 \leq 4n^3+8n^2+4n+4n^2+8n+4 \iff \\ &\iff 2+n \leq 4+4n \iff 0 \leq 2+3n \end{aligned}$$

Como $0 \leq 2+3n$, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $P(n)$ es cierto, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“(n+1)^2 < n^3”$$

- En el caso base, $n = 3$:

$$(3+1)^2 = 16 < 27 = 3^3$$

Como $16 < 27$, $P(3)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural mayor que 2 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$(n+1)^2 < n^3$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+1+1)^2 &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n^3 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n mayor que 2, se tiene que $(n+1)^2 < n^3$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.10. Demuestre que para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ n^3 < n! ”$$

- En el caso base, $n = 6$:

$$6^3 \leq 6! \iff 6^2 \leq 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \iff 6 \leq 4 \cdot 5$$

Como $6 < 20$, $P(6)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural superior a 5 y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$n^3 < n!$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) \stackrel{(*)}{<} n^3(n+1) \stackrel{(**)}{<} n!(n+1) = (n+1)!$$

donde en $(*)$ he utilizado el Ejercicio 1.1.9 y en $(**)$ he empleado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n superior a 5, se tiene que $n^3 < n!$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.11. Demuestre que, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ 5 \mid 8^n - 3^n ”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

Como $5 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$5 \mid 8^n - 3^n$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} - 8^n + 3^n &= 8^n \cdot (8 - 1) - 3^n \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = \\ &= 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n - 2 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 2 \cdot (8^n - 3^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} 5 \cdot 8^n + 2 \cdot 5k = 5(8^n + 2k) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción. Como por hipótesis de inducción se tiene también que $5 \mid 8^n - 3^n$, se tiene que $5 \mid 8^{n+1} - 3^{n+1}$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5, como se pedía. \square

Veamos ahora un ejemplo de uso del principio del buen orden de los números naturales. Para ello, emplearemos el mínimo común múltiplo, cuya definición vamos a recordar:

Definición 1.1 (Mínimo común múltiplo). Sea A un Dominio de Integridad y $a, b \in A$. Un elemento $m \in A$ diremos que es un **mínimo común múltiplo** (abreviado como mcm) y notado $m = \text{mcm}(a, b)$ si verifica:

1. $a \mid m \wedge b \mid m$,
2. $\forall c \in A$ tal que $a \mid c \wedge b \mid c \implies m \mid c$.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que, para cualesquiera números naturales a y b , existe un mínimo común múltiplo de ellos.

Demostración. Distinguimos casos según el valor de a y b :

- $a = 0$ o $b = 0$:

Tenemos que 0 es un múltiplo común de a y de b . Además, es el mínimo múltiplo común de a y b , ya que cualquier otro múltiplo común de a y de b es mayor que 0.

- $a, b > 0$:

Sea $M_{a,b}$ el conjunto de los múltiplos comunes de a y de b . Es claro que se tiene que $0 \in M_{a,b}$, ya que 0 es múltiplo de cualquier número natural. Además, tenemos que $ab \in M_{a,b}$, ya que ab es múltiplo de a y de b . Como $a, b > 0$, se tiene que $ab > 0$. Consideramos ahora el siguiente conjunto:

$$v_{a,b} = M_{a,b} \setminus \{0\} \subsetneq M_{a,b} \subset \mathbb{N}$$

Como hemos visto, $v_{a,b}$ es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , por lo que, por el principio del buen orden de los números naturales, $v_{a,b}$ tiene un mínimo, al que llamaremos $m_{a,b}$. Veamos que $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b .

1. Como $m_{a,b} \in M_{a,b}$, se tiene que $a|m_{a,b}$ y $b|m_{a,b}$.
2. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $a|m$ y $b|m$. Buscamos demostrar que $m_{a,b}|m$. Como $m_{a,b} \neq 0$, por el Teorema de la División de Euclides, existen únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $m = qm_{a,b} + r$ con $0 \leq r < m_{a,b}$. Por tanto, $r = m - qm_{a,b}$, por lo que r es un múltiplo común de a y de b , $r \in M_{a,b}$. Como $r < m_{a,b}$, se tiene que $r \notin v_{a,b}$, por lo que:

$$r \in M_{a,b} \setminus v_{a,b} = M_{a,b} \setminus (M_{a,b} \setminus \{0\}) = \{0\}$$

Por tanto, $r = 0$, por lo que $m = qm_{a,b}$, es decir, $m_{a,b}|m$, teniendo lo buscado.

Por tanto, $m_{a,b}$ es el mínimo común múltiplo de a y de b , como se pedía.

Observación. Notemos que la definición del mínimo común múltiplo no es el mínimo de los múltiplos comunes de a y de b , algo en lo que el lector podría caer fácilmente. □

Ejercicio 1.1.13. Estime un valor de $n \in \mathbb{N}$ para el que

$$100^n < n!$$

Ejercicio 1.1.14 (Ejemplo de principio del buen orden). Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n . Demuestre que S es vacío o tiene máximo.

Demostración. Sea S un conjunto en las condiciones del enunciado y supongamos que S es no vacío. Pueden darse dos casos

1. $S = \{0\}$; en este caso, S tiene máximo y es 0.
2. $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (es decir, S tiene elementos distintos de 0); en este caso, sea el conjunto de los mayorantes de S , $M(S)$, dado por:

$$M(S) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \leq m \text{ para todo } x \in S\}$$

Se tiene entonces que $n \in M(S)$, por lo que $M(S) \neq \emptyset$. Por el principio del buen orden, $M(S)$ tiene mínimo, al que llamaremos m_0 . Veamos que m_0 es el máximo de S . Para ello, es necesario demostrar que $m_0 \in S$ y que $m_0 \geq x$ para todo $x \in S$.

- Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x \leq m_0$ para todo $x \in S$, por lo que efectivamente m_0 es un mayorante de S .
- Veamos ahora que $m_0 \in S$.

Observación. A continuación, restaremos 1 a m_0 , considerando $m_0 - 1$. Para poder trabajar en \mathbb{N} , es necesario que $m_0 \neq 0$. Como $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$, sea $x_0 \in S \setminus \{0\}$, por lo que $x_0 \neq 0$ y $x_0 \in \mathbb{N}$. Como $m_0 \in M(S)$, se tiene que $x_0 \leq m_0$, por lo que $0 < x_0 \leq m_0$.

Supongamos que $x < m_0$ para todo $x \in S$. Por tanto:

$$x \leq m_0 - 1 \text{ para todo } x \in S \implies m_0 - 1 \in M(S)$$

Además, $m_0 - 1 < m_0$, lo que contradice que m_0 sea el mínimo de $M(S)$, por lo que la hipótesis era falsa y $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 \geq m_0$. Como además $m_0 \geq x_0$ por ser $x_0 \in S$, tenemos que $m_0 = x_0$, por lo que $m_0 \in S$. Por tanto, como $m_0 \in S \cap M(S)$, se tiene que m_0 es el máximo de S . \square

Ejercicio 1.1.15. Demuestre mediante inducción que para todo número natural n tal que $2 \leq n$ se cumple:

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Caso base: $n = 2$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 < 2 &\iff 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} \iff 2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \iff (\sqrt{2})^2 < \sqrt{2} + 1 \\ &\iff \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Por tanto, $P(2)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que vale $P(n)$, es decir

$$2 \leq n \text{ y } \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. En primer lugar, veamos que:

$$n = (\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Supongando 1 a cada lado de la desigualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 &\implies (\sqrt{n+1})^2 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \implies \\ &\implies \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \\ &< \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado la hipótesis de inducción. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por el principio de inducción matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq 2$, $P(n)$ vale. \square

Ejercicio 1.1.16. Demostrar **no inductivamente** que para todo número natural n se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n k &= \left(\sum_{k=0}^n k \right) + \left(\sum_{k=0}^n (n-k) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n k + (n-k) = \sum_{k=0}^n n = n(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicio 1.1.17. Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos solo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cantidad de superior a 13.

El razonamiento es por inducción según el segundo principio de inducción y el predicado $P(n)$ del tenor:

“Es posible franquear una carta de n céntimos con sellos de 3 y 8 céntimos.”

Como hipótesis de inducción, supongamos que $14 \leq n$ y que $P(k)$ es cierto para todo $14 \leq k < n$. Distinguiamos los siguientes casos:

- Caso base: $n = 14$.

Tenemos que $14 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 8$, por lo que $P(14)$ es cierto.

- Caso base: $n = 15$.

Tenemos que $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$, por lo que $P(15)$ es cierto.

- Caso base: $n = 16$.

Tenemos que $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$, por lo que $P(16)$ es cierto.

- Supongamos que $n \geq 17$, por lo que $14 \leq n - 3 < n$, y por la hipótesis de inducción, se tiene que $P(n - 3)$ es cierto. Es decir, existirán $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $n - 3 = 3a + 8b$. En el paso de inducción, demostraremos que $P(n)$ es cierto. Tenemos que:

$$n = (n - 3) + 3 = 3a + 8b + 3 = 3(a + 1) + 8b$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto.

Por tanto, por el segundo principio de inducción, se tiene que para todo número natural n superior a 13, $P(n)$ es cierto, como se pedía.

Ejercicio 1.1.18. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ 2|(n + 1)(n + 2) ”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$2|1 \cdot 2$$

Como $2|2$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$2|(n + 1)(n + 2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n + 1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (n + 1 + 1)(n + 1 + 2) - (n + 1)(n + 2) &= (n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2) = \\ &= (n + 2)(n + 3 - n - 1) = 2(n + 2) \end{aligned}$$

Por tanto, como $2|(n + 2)(n + 3) - (n + 1)(n + 2)$ y, por hipótesis de inducción, $2|(n + 1)(n + 2)$, se tiene que $2|(n + 1 + 1)(n + 1 + 2)$. Por tanto, $P(n + 1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , se tiene que $2|(n + 1)(n + 2)$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.19. Demuestre que para cualquier número natural n se tiene que:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$6 | n(n + 1)(n + 2)$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$6 \mid 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Como $6 \mid 0$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ es cierto, es decir, que:

$$6 \mid n(n+1)(n+2)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) &= (n+1)(n+2)[n+3-n] = \\ &= 3(n+1)(n+2) \stackrel{(*)}{=} 3 \cdot 2k = 6k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado el Ejercicio 1.1.18. Por tanto, como se tiene que $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)$ y, por hipótesis de inducción, $6 \mid n(n+1)(n+2)$, se tiene que $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Por tanto, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , se tiene que $6 \mid n(n+1)(n+2)$, como se pedía. \square

Ejercicio 1.1.20 (Parcial DGIIM 23/24). Demuestre por inducción que para todo número natural $n \in \omega$ existe un polinomio $f_n(x, y)$ cumpliendo:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

Tras perfeccionar la demostración, defina sin ambigüedad el factor $f_n(x, y)$ de $x^n - y^n$ cuya existencia ha concluido y calcule su valor para $n \in 4$.

Notación. De aquí en adelante, para cualquier número natural $n \in \omega$, $f_n(x, y)$ denotará un polinomio.

Demostración. La demostración es por inducción según el segundo principio de inducción matemática y el predicado $P(n)$ del tenor:

$$“ x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k ”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $P(0)$ es cierto.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(k)$ es cierto para $k \in \omega$, $0 \leq k \leq n$, es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j$$

En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ es cierto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - y^{n+1} + x^n y - x^n y + x y^n - x y^n \\ &= (x + y)(x^n - y^n) - xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\ &\stackrel{(*)}{=} (x + y)(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy(x - y) \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \\ &= (x - y) \left[(x + y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - xy \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} y^k \right] \\ &= (x - y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^{k+1} \right] \\ &= (x - y) \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^0 y^n \right] \\ &= (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción, puesto que $n, n-1 \leq n$. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto.

Así pues, por el principio de inducción matemática, para todo número natural n , existe un polinomio $f_n(x, y)$ dado por:

$$f_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

tal que cumple:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$$

□

Veamos ahora para cada valor de $n \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ el valor de $f_n(x, y)$:

- Para $n = 0$:

$$f_0(x, y) = \sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0 = (x - y) \cdot 0$$

- Para $n = 1$:

$$f_1(x, y) = \sum_{k=0}^0 x^{0-k} y^k = 1$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^1 - y^1 = x - y = (x - y) \cdot 1$$

- Para $n = 2$:

$$f_2(x, y) = \sum_{k=0}^1 x^{1-k} y^k = x + y$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

- Para $n = 3$:

$$f_3(x, y) = \sum_{k=0}^2 x^{2-k} y^k = x^2 + xy + y^2$$

Efectivamente, se tiene que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Observación. Proponemos ahora una demostración alternativa para la existencia de $f_n(x, y)$.

Demostración. La demostración es mediante el segundo principio de inducción matemática según el predicado $Q(n)$ del tenor:

$$“ x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y) ”$$

- En el caso base, $n = 0$:

$$\begin{aligned} x^0 - y^0 &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ &= (x - y) \cdot 0 \end{aligned}$$

Como $0 = 0 \cdot (x - y)$, $Q(0)$ es cierto.

- Supongamos como hipótesis de inducción que n es un número natural y que $Q(k)$ es cierto para todo $k \in \omega$, $0 \leq k < n$. Es decir, que:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot f_k(x, y)$$

En el paso de inducción, demostraremos que $Q(n)$ es cierto. Distinguimos dos casos:

- Para n par:

Tenemos que $n = 2m$ para algún $m \in \omega$, $m < n$. Por tanto:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m} - y^{2m} \\ &= (x^m)^2 - (y^m)^2 \\ &= (x^m - y^m)(x^m + y^m) \\ &\stackrel{(*)}{=} (x - y)f_m(x, y)(x^m + y^m) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

- Para n impar:

Tenemos que $n = 2m + 1$ para algún $m \in \omega$, $2m < n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{2m+1} - y^{2m+1} = x \cdot x^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x \cdot x^{2m} - x \cdot y^{2m} + x \cdot y^{2m} - y \cdot y^{2m} \\ &= x(x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m}(x - y) \\ &\stackrel{(*)}{=} x(x - y)f_m(x, y) + y^{2m}(x - y) \\ &= (x - y)f_m(x, y)(x + y^{2m/x}) \\ &= (x - y)f_n(x, y) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis de inducción puesto que $2m < n$. Por tanto, $Q(n)$ es cierto.

Así pues, por el segundo principio de inducción matemática, para todo número natural n , existe un polinomio $f_n(x, y)$ tal que $x^n - y^n = (x - y) \cdot f_n(x, y)$. \square

1.2. Recurrencia

Ejercicio 1.2.1. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geq 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

Por tanto, tan solo hay una raíz $r = 2$ de multiplicidad $m = 2$. La solución general de la recurrencia por tanto es:

$$x_n = (c_1 + c_2 n)2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Y ahora buscar los valores de c_1 y c_2 usando las condiciones iniciales, para obtener la solución particular. Tenemos que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 3$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + c_2 \cdot 0)2^0 = c_1 \cdot 1 = c_1 \\ 3 &= (c_1 + c_2 \cdot 1)2^1 = (1 + c_2)2 = 2 + 2c_2 \implies c_2 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)2^n = \left(\frac{2+n}{2}\right)2^n = (2+n)2^{n-1}$$

Observación. Notemos que distinguimos muy bien la recurrencia en sí, notada por u_n , de la solución particular de la recurrencia, notada por x_n .

Ejercicio 1.2.2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0$$

El orden k de la recurrencia es 2 ($k = 2$). La ecuación característica es:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Usando la notación del Teorema visto en Teoría, donde r_i son las raíces de la ecuación característica y m_i son las multiplicidades de las raíces, se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & m_1 &= 1 \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & m_2 &= 1 \end{aligned}$$

En efecto, se tiene $m_1 + m_2 = 1 + 1 = 2 = k$, por lo que estamos en las condiciones del Teorema. Si $\{x_n\}$ es solución de la recurrencia, entonces sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los valores de c_1 y c_2 se obtendrán a partir de las condiciones iniciales, que no se nos han proporcionado.

Ejercicio 1.2.3. Reuelva el problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Por el ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema entonces $x_0 = u_0 = 0$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = -c_1 \\ 1 &= x_1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) = c_1 \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= c_1 \sqrt{5} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

La solución del problema por tanto es:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Fibonacci*.

Ejercicio 1.2.4. Calcular la solución del problema lineal homogéneo:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Gracias a la solución del ejercicio 1.2.2, sabemos que la solución a la relación de recurrencia del problema es:

$$x_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Si $\{x_n\}$ es solución del problema, entonces $x_0 = u_0 = 2$ y $x_1 = u_1 = 1$. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de c_1 y c_2 :

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ &= c_1 + c_2 \implies c_2 = 2 - c_1 \\ \\ 1 &= x_1 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + (2 - c_1) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) - c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 1 = c_1 \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} \implies 0 = c_1 \sqrt{5} - \sqrt{5} \\ &\implies c_1 \sqrt{5} = \sqrt{5} \implies c_1 = 1 \implies c_2 = 1 \end{aligned}$$

La solución por tanto es:

$$x_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Notemos que esta es la conocida *sucesión de Lucas*.

Ejercicio 1.2.5. Solucionar la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \quad n \geq 0$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 3^n = c_0 + c_1 3^n$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$3 \cdot 3^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_3 = 3 \\ m_3 = 1 \\ q_3(n) = 3 \\ \deg(q_3(n)) = 0 \end{array} \right\} \quad 3 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 1 \\ q_1(n) = 3 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n \cdot 1^n = c_2 n \cdot 3^n + c_3 n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_2 y c_3 . Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$3^{n+1} + 3 = x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)}$$

Calculemos dichos valores:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= c_2 n \cdot 3^n + c_3 n = n(c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_2(n+1) \cdot 3^{n+1} + c_3(n+1) = (n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= c_2(n+2) \cdot 3^{n+2} + c_3(n+2) = (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= x_{n+2}^{(p)} - 4x_{n+1}^{(p)} + 3x_n^{(p)} = \\ &= (n+2)(3^2 c_2 \cdot 3^n + c_3) - 4(n+1)(3c_2 \cdot 3^n + c_3) + 3n(c_2 \cdot 3^n + c_3) = \\ &= c_2 3^n [3^2(n+2) - 4 \cdot 3(n+1) + 3n] + c_3 [(n+2) - 4(n+1) + 3n] = \\ &= c_2 3^n [9n + 18 - 12n - 12 + 3n] + c_3 [n + 2 - 4n - 4 + 3n] = \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$3^{n+1} + 3 = 3 \cdot 3^n + 3 = 6c_2 3^n - 2c_3$$

Igualando los coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6c_2 &= 3 \Rightarrow c_2 = 1/2 \\ -2c_3 &= 3 \Rightarrow c_3 = -3/2 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n \cdot 3^n - \frac{3}{2}n = \frac{n}{2}(3^n - 3)$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$ y entonces:

$$x_n = c_0 + c_1 3^n + \frac{n}{2}(3^n - 3) = \left(\frac{n}{2} + c_1\right) 3^n + c_0 - \frac{3n}{2}$$

Ejercicio 1.2.6. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0 \quad n \geq 0$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$$

Por tanto, tenemos que las soluciones de la ecuación característica son:

$$z_1 = 2i \quad z_2 = -2i$$

Por lo tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot (2i)^n + c_2 \cdot (-2i)^n$$

Buscamos ahora expresar la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos. Para ello, tenemos que:

$$|z_1| = |z_2| = 2 \quad \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \quad \theta_{z_2} = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión de z_1 y z_2 en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ z_2 &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Elevando a n , por el Teorema de Moivre, tenemos que:

$$\begin{aligned} (z_1)^n &= 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ (z_2)^n &= 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia en términos de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] + c_2 \cdot 2^n \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[(c_1 + c_2) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= 2^n \left[d_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad n \geq 0$$

Ejercicio 1.2.8. Calcular el número de pasos mínimo para completar una instancia del puzzle conocido como “Torres de Hanoi”, en función del número de discos n con los que cuente.

Para $n \geq 0$ sea u_n el número de movimientos necesarios para pasar los n discos del poste A al poste C . Si el puzzle tuviese $n+1$ discos entonces hacemos lo siguiente:

- Pasamos los n discos superiores del poste A al poste B . Esto nos cuesta u_n movimientos.
- Pasamos el disco base del poste A al poste C . Esto nos cuesta 1 movimiento.
- Pasamos los n discos superiores del poste B al poste C . Esto nos cuesta u_n movimientos.

Por tanto, lo dicho sugiere la siguiente recurrencia:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Tenemos que el orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 2 = 0$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n \quad c_1 \in \mathbb{C}$$

En lo que sigue, buscamos obtener una solución particular de la recurrencia. La función de ajuste es:

$$f(n) = 1 = 1 \cdot 1^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$1 \cdot 1^n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ q_1(n) = 1 \\ \deg(q_1(n)) = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2 \quad c_2 \in \mathbb{C}$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener el valor de c_2 . Para ello, como sabemos que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$1 = x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} = c_2 - 2c_2 = -c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = -1$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{x_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{x_n\} = \{x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\}$ y entonces:

$$x_n = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Como sabemos que $x_0 = u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_1 \cdot 2^0 - 1 = c_1 - 1 \implies c_1 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = 2^n - 1$$

Notemos que esta es la solución al problema de las Torres de Hanoi. Veamos como ilustración los primeros valores de la sucesión:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2^0 - 1 = 0 \\ x_1 &= 2^1 - 1 = 1 \\ x_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ x_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\ x_4 &= 2^4 - 1 = 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.9. Sea la sucesión $\{u_n\}$ definida por:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k$$

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n .

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ se tiene:

$$u_n = \sum_{k=0}^n k2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + n2^n = u_{n-1} + n2^n$$

Además, para $n = 0$ se tiene que:

$$u_0 = \sum_{k=0}^0 k2^k = 0 \cdot 2^0 = 0$$

Por tanto, la expresión recurrente para u_n es:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n2^n \end{cases} \quad n \geq 1$$

2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n .

Encontrar una fórmula explícita para u_n es equivalente a resolver la recurrencia. Para ello, su polinomio característico es:

$$x - 1 = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$u_n^{(h)} = c_0 \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es:

$$f(n) = n2^n$$

Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$n2^n \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ m = 0 \\ q(n) = n \\ \deg(q(n)) = 1 \end{cases}$$

Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n$$

Aun habiendo obtenido la forma general de la solución particular, necesitamos obtener los valores de c_1 y c_2 . Para ello, como sabemos que $u_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} n2^n &= u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = (c_1 + c_2 n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2(c_1 + c_2 n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} = \\ &= 2^{n-1}[2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2(n-1)] = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$n2^n = 2^{n-1} \cdot 2n = 2^{n-1}[c_1 + c_2 + c_2 n] \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n = (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que la solución general de la recurrencia $\{u_n\}$ es la suma de la solución homogénea y la solución particular, entonces $\{u_n\} = \{u_n^{(h)} + u_n^{(p)}\}$ y entonces:

$$u_n = c_0 + (n-1)2^{n+1}$$

Como sabemos que $u_0 = 0$ ya que no se requiere ningún movimiento para pasar 0 discos, entonces:

$$0 = c_0 + (0 - 1)2^{0+1} = c_0 - 2 \implies c_0 = 2$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$u_n = 2 + (n - 1)2^{n+1}$$

Ejercicio 1.2.10. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamos por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe hacer al final de cada plazo?

Sea u_n es la cantidad de préstamo que todavía debe el ciudadano al final del n -ésimo plazo, es decir, a continuación del n -ésimo pago. Entonces, para todo $0 \leq n \leq T - 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + I \cdot u_n - P \\ &= (1 + I)u_n - P \end{aligned}$$

El problema entonces se reduce a resolver la recurrencia:

$$\begin{cases} u_0 &= S \\ u_T &= 0 \\ u_{n+1} &= (1 + I)u_n - P \quad 0 \leq n \leq T - 1 \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - (1 + I) = 0$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

La función de ajuste es $f(n) = -P = -Pn^0 \cdot 1^n$. Para adaptar la notación a lo visto en teoría, tenemos:

$$-P \implies \begin{cases} s = -P \\ q(n) = 1 \\ \deg(q(n)) = 0 \end{cases}$$

Para obtener la multiplicidad del 1 como raíz del polinomio característico, depende del valor de I . Como la única raíz del polinomio característico es $1 + I$, realizamos la siguiente distinción de casos:

- $I = 0$: En este caso, la raíz del polinomio característico es 1 y por tanto, $m = 1$. Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1 + I)^n = c_0(1)^n = c_0x_n^{(p)} = c_1n \cdot 1^n = c_1n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1(n+1) - (1+I)c_1n = \\ &= c_1[n+1 - n(1+I)] = c_1(1-I) = c_1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0 - Pn$$

Para hallar c_0 y P , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0 - P \cdot 0 = c_0 \implies c_0 = S \\ 0 &= x_T = c_0 - P \cdot T = S - PT \implies P = \frac{S}{T} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = S - \frac{S}{T}n = S \left(1 - \frac{n}{T}\right)$$

La cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo es:

$$P = \frac{S}{T}$$

- $I \neq 0$: En este caso, la raíz del polinomio característico es $1+I$ y por tanto, $m=0$. Por tanto, tenemos:

$$x_n^{(h)} = c_0(1+I)^n x_n^{(p)} = c_1 n^0 \cdot 1^n = c_1$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$-P = x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} = c_1 - (1+I)c_1 = -Ic_1 \implies c_1 = \frac{P}{I}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es:

$$x_n = c_0(1+I)^n + \frac{P}{I}$$

Para hallar c_0 y P , usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S &= x_0 = c_0(1+I)^0 + \frac{P}{I} = c_0 + \frac{P}{I} \implies c_0 = S - \frac{P}{I} \\ 0 &= x_T = c_0(1+I)^T + \frac{P}{I} \end{aligned}$$

Por tanto, para hallar la cantidad constante que debe pagar el ciudadano al final de cada plazo, necesitamos despejar P de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(S - \frac{P}{I}\right)(1+I)^T + \frac{P}{I} \implies \\ \implies P &= (P - SI)(1+I)^T = P(1+I)^T - SI(1+I)^T \implies \\ \implies P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - I} \end{aligned}$$

La solución de la recurrencia es:

$$x_n = \left(S - \frac{P}{I}\right) (1 + I)^n + \frac{P}{I}$$

Ejercicio 1.2.11. Encuentre la solución la solución general para la siguiente recurrencia:

$$u_n = u_{n-2} + 2^n + (-1)^n \quad n \geq 2$$

y luego soluciona el problema que surge de ella junto a los valores iniciales:

$$u_0 = u_1 = 2.$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 1 = 0 \implies (x + 1)(x - 1) = 0$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$$

La función de ajuste es $f(n) = 2^n + (-1)^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n (-1)^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} 2^n + (-1)^n &= x_n^{(p)} - x_{n-2}^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n (-1)^n - c_3 2^{n-2} - c_4 (n-2) (-1)^{n-2} = \\ &= 2^{n-2} (2^2 c_3 - c_3) + (-1)^n (c_4 n - c_4 (n-2)) = \\ &= 2^{n-2} \cdot 3c_3 + 2(-1)^n c_4 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$\begin{cases} 3c_3 = 4 \implies c_3 = 4/3 \\ 2c_4 = 1 \implies c_4 = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

La solución general de la recurrencia es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n$$

Usando los valores iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{3} + 0 \implies c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\ 2 &= x_1 = -c_1 + c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \implies -c_1 + c_2 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2/3 \\ c_1 - c_2 = 1/6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 5/12 \\ c_2 = 1/4 \end{array} \right.$$

Por tanto, la solución de la recurrencia para los valores iniciales dados es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{12}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{n}{2} \cdot (-1)^n = \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (-1)^n \left(\frac{5}{12} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.12. Resuelva la recurrencia

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4^{n+3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación característica son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3 \cdot 2^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \\ r_2 = -2 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1(-2 + 2\sqrt{3}i)^n + c_2(-2 - 2\sqrt{3}i)^n$$

Para expresar la solución en términos de senos y cosenos, calculamos el módulo y el argumento de las raíces. El módulo de las raíces es:

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^4} = 4$$

Respecto al argumento de las raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1) &= \frac{\Im(r_1)}{\Re(r_1)} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{tg}(\theta_2) &= \frac{\Im(r_2)}{\Re(r_2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la parte homogénea de la recurrencia en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Moivre, es:

$$x_n^{(h)} = 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + c_4 \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \right)$$

Usando que $\sin(-x) = -\sin(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, podemos reescribir la solución anterior como:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= 4^n \left(c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + 4^n \left(c_3 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - c_4 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left((c_1 + c_3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (c_2 - c_4) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) = \\ &= 4^n \left(d_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + d_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Como solución particular de la recurrencia, partimos de:

$$x_n^{(p)} = 4^n \left[c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

Calculamos $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2} \left[c_5 \cos \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[c_5 \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \pi - \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \pi \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \pi + c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \pi \right] = \\ &= 4^{n+2} \left[-c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[-16c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 16c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(p)} &= 4^{n+1} \left[c_5 \cos \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[c_5 \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) + c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} + c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= 4^{n+1} \left[-c_5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[-4c_5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + 4c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned} 4^n \left[16 \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) - 64 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right] &= \\ &= 4^{n+2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 4^{n+3} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) = \\ &= x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 16x_n^{(p)} = \\ &= 4^n \left[-16c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 16c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] + \\ &\quad + 4^n \left[-16c_5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + 16c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] + \\ &\quad + 4^n \left[16c_5 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + 16c_6 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left[16c_6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 16c_5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{aligned} 16c_6 &= 16 \implies c_6 = 1 \\ -16c_5 &= -64 \implies c_5 = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= 4^n \left(d_1 \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) + d_2 \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right) + 4^n \left[4 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 4^n \left(d_1 \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) + d_2 \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) + 4 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.13 (Función Gamma). Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{ll} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right]$$

Por tanto, tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \stackrel{(*)}{=} n\Gamma(n)$$

donde en $(*)$ hemos usado la Regla de Barrow, junto a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-t} = 0^n \cdot e^0 = 0$$

Por tanto, mediante una fácil inducción, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \cdot \Gamma(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos el valor de $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.2.14. Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 3^n - 2 & n \geq 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

y redúzcalo a un problema de recurrencia homogénea.

Por variación de índices, tenemos que:

$$u_{n-1} = 3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2$$

Por tanto, multiplicando por 3 llegamos a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + 3^n - 2 \\ 3u_{n-1} & = & 9u_{n-2} + 3^n - 6 \\ \hline u_n - 3u_{n-1} & = & 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4 \end{array}$$

donde hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4$$

Repitiendo el proceso, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} & = & 4 \\ u_{n-1} - 6u_{n-2} + 9u_{n-3} & = & 4 \\ \hline u_n - 7u_{n-1} + 15u_{n-2} - 9u_{n-3} & = & 0 \end{array}$$

donde de nuevo hemos restado ambas ecuaciones. Por tanto, tenemos que la recurrencia homogénea equivalente es:

$$u_n = 7u_{n-1} - 15u_{n-2} + 9u_{n-3}$$

Resolvamos ahora dicha recurrencia homogénea. El orden de la recurrencia es $k = 3$. La ecuación característica es:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

Veamos mediante Ruffini que $x = 1$ es raíz de la ecuación característica:

$$1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -7 & 15 & -9 \\ & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x - 1)(x^2 - 6x + 9) = (x - 1)(x - 3)^2$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1 + c_2 \cdot 3^n + c_3 n \cdot 3^n$$

Las condiciones iniciales de contorno que debemos imponer son:

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 = 2 \\ x_1 &= u_1 = 6 + 3 - 2 = 7 \\ x_2 &= u_2 = 21 + 9 - 2 = 28 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 7 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 28 \end{array} \right\} \implies c_0 = c_1 = c_2 = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia dada es:

$$x_n = 1 + 3^n + n \cdot 3^n = 1 + (n + 1)3^n$$

Observación. Notemos que este “método” tiene varios inconvenientes: oculta que algunos de los coeficientes son independientes de los valores de contorno, no evita encontrar las raíces de un polinomio mientras que eleva el grado del polinomio a estudiar, no es algorítmico, el cálculo de los coeficientes indeterminados es efectuado mediante un sistema de mayor orden, etc.; no obstante el método es algebraicamente bello.

Ejercicio 1.2.15. Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} & n \geq 2 \\ t_n = s_{n-1} + t_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

Solucione y resuelva la primera recurrencia.

Mediante una simple variación de índices, tenemos que:

$$s_{n-1} = 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} - 2s_{n-2} - s_{n-3} - 4t_{n-2} = \\ &= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \end{aligned}$$

Luego:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})$$

Haciendo uso de que $t_n - t_{n-1} = s_{n-1}$, tenemos que:

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}$$

La ecuación característica de la recurrencia homogénea obtenida es:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Veamos que $x = -1$ es raíz de la ecuación característica:

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -3 & 1 \\ & -1 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2(2 + \sqrt{3})^n + c_3(2 - \sqrt{3})^n$$

Ejercicio 1.2.16. Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

De forma general, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, y consideramos la recurrencia dada por:

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + n\alpha^{n+1} \end{cases}$$

El orden de la recurrencia es $k = 1$. La ecuación característica es:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1$$

La función de ajuste es $f(n) = n\alpha^{n+1}$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = (c_2 + c_3n)\alpha^n$$

Como $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^2 n \alpha^{n-1} &= n \alpha^{n+1} = x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} = (c_2 + c_3n)\alpha^n - (c_2 + c_3(n-1))\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^n + c_3n\alpha^n - c_2\alpha^{n-1} - c_3n\alpha^{n-1} + c_3\alpha^{n-1} = \\ &= c_2\alpha^{n-1}(\alpha - 1) + c_3\alpha^{n-1} + c_3n\alpha^{n-1}(\alpha - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_3(\alpha - 1) = \alpha^2 \implies c_3 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \\ c_2(\alpha - 1) + c_3 = 0 \implies c_2 = \frac{-c_3}{\alpha - 1} = \frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \end{cases}$$

Por tanto, la solución particular de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \left(\frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^2}{\alpha - 1} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{-\alpha^2 + n\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que una solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \\ &= c_1 + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n \end{aligned}$$

Para hallar el valor de c_1 , como sabemos que $x_0 = s_0 = 0$, tenemos que:

$$0 = x_0 = c_1 + \frac{-\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \implies c_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$$

Por tanto, la solución a la recurrencia dada es:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \left(\frac{n\alpha^3 - n\alpha^2 - \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \right) \alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2} - \alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

Tomando límite con $n \rightarrow \infty$, suponiendo $\alpha \in [0, 1[$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3} - n\alpha^{n+2}}{(\alpha - 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora por tanto el ejercicio. Tomando $\alpha = 10^{-3}$, se tiene que:

$$s_n = x_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

Tomando límite por tanto con $n \rightarrow \infty$, como $\alpha \in [0, 1[$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3(k+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(\frac{10^{-3}}{1 - 10^{-3}} \right)^2 = (110^3 - 1)^2 = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{998001}$$

Ejercicio 1.2.17. Demuestre mediante la teoría de recurrencias que $0.\bar{9} = 1$.

Observación. Observe que, sin mucho rigor, se podría tener lo siguiente:

$$0.\bar{9} = 3 \cdot 0.\bar{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Ejercicio 1.2.18 (Parcial DGIIM 23/24). Encuentre la solución general de la recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \quad n \geq 0$$

y posteriormente encuentre la solución particular que cumple con las condiciones iniciales $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

El orden de la recurrencia es $k = 2$. La ecuación característica es:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \implies (x - 3)^2 = 0$$

La única raíz de la ecuación característica es $x = 3$ con multiplicidad doble. Por tanto, la solución de la parte homogénea de la recurrencia es:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

La función de ajuste es $f(n) = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$. Por lo visto en teoría, tenemos que una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n$$

Para el cálculo de c_3 y c_4 no intervienen los valores iniciales. Calculamos primero $x_{n+2}^{(p)}$ y $x_{n+1}^{(p)}$:

$$x_{n+2}^{(p)} = c_3 \cdot 2^{n+2} + c_4(n+2)^2 \cdot 3^{n+2} = 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n$$

$$x_{n+1}^{(p)} = c_3 \cdot 2^{n+1} + c_4(n+1)^2 \cdot 3^{n+1} = 2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n$$

Usando que $x_n^{(p)}$ es solución de la recurrencia, tenemos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= x_{n+2}^{(p)} - 6x_{n+1}^{(p)} + 9x_n^{(p)} \\ &= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\ &\quad - 6(2c_3 \cdot 2^n + 3c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n) + \\ &\quad + 9(c_3 \cdot 2^n + c_4 n^2 \cdot 3^n) \\ &= 4c_3 \cdot 2^n + 9c_4(n^2 + 4n + 4) \cdot 3^n - \\ &\quad - 12c_3 \cdot 2^n - 18c_4(n^2 + 2n + 1) \cdot 3^n + \\ &\quad + 9c_3 \cdot 2^n + 9c_4 n^2 \cdot 3^n \\ &= 2^n(4c_3 - 12c_3 + 9c_3) + 3^n(9c_4(n^2 + 4n + 4) - 18c_4(n^2 + 2n + 1) + 9c_4 n^2) \\ &= c_3 2^n + c_4 3^n(9n^2 + 36n + 36 - 18n^2 - 36n - 18 + 9n^2) \\ &= c_3 2^n + 18 \cdot c_4 3^n \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} c_3 = 3 \\ 18c_4 = 7 \implies c_4 = 7/18 \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia es:

$$x_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + \frac{7}{18} n^2 \cdot 3^n = \\ &= 3^n \left(c_1 + c_2 n + \frac{7}{18} n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales, sabiendo que $x_0 = u_0 = 1$ y $x_1 = u_1 = 4$:

$$x_0 = 1 \implies 1 = 3^0 \left(c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot 0^2 \right) + 3 \cdot 2^0 = c_1 + 3 \implies c_1 = -2$$

$$x_1 = 4 \implies 4 = 3^1 \left(-2 + c_2 \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot 1^2 \right) + 3 \cdot 2^1 = -6 + 3c_2 + \frac{7}{6} + 6 \implies c_2 = \frac{4 - 7/6}{3} = \frac{17}{18}$$

Por tanto, para el caso particular dado tenemos que la solución de la recurrencia es:

$$\begin{aligned}x_n &= 3^n \left(-2 + \frac{17}{18}n + \frac{7}{18}n^2 \right) + 3 \cdot 2^n \\&= 3^n \left(-2 + \frac{17n + 7n^2}{18} \right) + 3 \cdot 2^n\end{aligned}$$

1.3. Lógica Proposicional

Ejemplo. La fórmula proposicional $(a \rightarrow b)$ (siempre que $b \neq a$) es refutable.

Basta tomar una valoración v tal que $v(a) = 1$ y $v(b) = 0$.

De hecho, $a \rightarrow b$ es satisfacible, luego es una fórmula contingente.

Ejemplo. Las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías:

1. $(a \rightarrow a)$

$$\begin{aligned} v(a \rightarrow a) &= v(a)v(a) + v(a) + 1 \\ &= v(a) + v(a) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Observación. Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}_2$, se tiene que $a^2 = a$ y $2a = 0$. Esto será usado constantemente, aunque en un principio el lector no esté acostumbrado a trabajar a trabajar en este anillo.

2. $(\alpha \vee \neg\alpha)$. Esta tautología se conoce como el principio del tercio excluso.

$$\begin{aligned} v(\alpha \vee \neg\alpha) &= v(\alpha)v(\neg\alpha) + v(\alpha) + v(\neg\alpha) \\ &= v(\alpha)(v(\alpha) + 1) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)^2 + v(\alpha) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo. Dada una valoración v y dadas α, β fórmulas proposicionales, se tiene que:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) = v(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} v((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\beta \rightarrow \alpha) \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta)v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta)v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + \\ &\quad + v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \\ &= 6 \cdot v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\ &= v(\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.1. Dadas α, β fórmulas proposicionales, clasifique las siguientes fórmulas en función de si son tautologías, contradicciones o contingentes:

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

En lo que sigue, sea v una valoración fija pero arbitraria. Para facilitar el desarrollo, notaremos que dada γ fórmula proposicional, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\gamma)v(\neg\gamma) &= v(\gamma)(v(\gamma) + 1) \\ &= v(\gamma)^2 + v(\gamma) \\ &= v(\gamma) + v(\gamma) = 0 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\neg\beta) + 1) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1} \\
 &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\beta)v(\neg\alpha) + v(\beta)) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= \cancel{v(\alpha)v(\beta)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)} + \cancel{v(\alpha)v(\beta)^2} + v(\neg\alpha)^2v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) + \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)(v(\neg\beta) + v(\beta)) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha)(2v(\beta) + 1) + v(\alpha) \\
 &= v(\neg\alpha) + v(\alpha) \\
 &= 2v(\alpha) + 1 = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una tautología.

2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) &= v(\alpha \rightarrow \beta)v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)(v(\alpha \rightarrow \beta)v(\neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1) + v(\alpha \rightarrow \beta) + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)^2v(\neg\alpha) + v(\alpha \rightarrow \beta)^2 + \cancel{v(\alpha \rightarrow \beta)} + \cancel{v(\alpha \rightarrow \beta)} + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)[v(\neg\alpha) + 1] + 1 \\
 &= v(\alpha \rightarrow \beta)v(\alpha) + 1 \\
 &= [v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1]v(\alpha) + 1 \\
 &= v(\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2} + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + 1 \\
 &= v(\neg(\alpha \wedge \beta))
 \end{aligned}$$

Por tanto, depende de la valoración.

- Si $v(\alpha) = 1 = v(\beta)$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) = 0$$

- Si $v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 0$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)) = 1$$

En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una fórmula contingente.

3. $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) &= v(\alpha \rightarrow \neg\beta)v(\neg\alpha \rightarrow \beta) + v(\alpha \rightarrow \neg\beta) + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1)(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\
 &= (v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha))(v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\alpha)) + v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) \\
 &= \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)v(\neg\alpha)v(\beta)}^{\rightarrow 0} + v(\neg\alpha)^2v(\beta) + \cancel{v(\alpha)^2v(\neg\beta)} + \cancel{v(\neg\alpha)v(\alpha)}^{\rightarrow 0} + \\
 &\quad + \cancel{v(\alpha)v(\neg\beta)} + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha + 1)v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\
 &= v(\alpha \vee \beta)
 \end{aligned}$$

Por tanto, depende de la valoración.

- Si $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 0$$

- Si $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$, entonces:

$$v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) = 1$$

En general, la fórmula ni será tautología ni contradicción. Es una fórmula contingente.

Ejercicio. Para cualesquiera fórmulas proposicionales α, β, γ , demuestre que las siguientes reglas son correctas:

1. $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$. Esta regla se conoce como *modus ponens*.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \rightarrow \beta)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\
 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\
 &= 1 \cdot v(\beta) + 1 + 1 \\
 &= v(\beta)
 \end{aligned}$$

Por tanto, como $v(\beta) = 1$, la regla es correcta.

2. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \wedge \beta \models \gamma$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha \wedge \beta}{\gamma}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1 = v(\alpha \wedge \beta)$$

Debemos demostrar que $v(\gamma) = 1$.

Como $v(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta \rightarrow \gamma) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) = v(\alpha)v(\beta)$. Como por hipótesis también tenemos que $v(\alpha \wedge \beta) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \wedge \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) \end{aligned}$$

Uniendo ambos resultados, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) &= v(\alpha)v(\beta) \\ 1 \cdot v(\gamma) &= 1 \\ v(\gamma) &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $v(\gamma) = 1$, y la regla es correcta.

3. $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \vee \beta$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \gamma) = 1 = v(\beta \rightarrow \gamma)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \\ 1 &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}v(\alpha)v(\gamma) &= v(\alpha) \\v(\beta)v(\gamma) &= v(\beta)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= v(\alpha \vee \beta)v(\gamma) + v(\alpha \vee \beta) + 1 \\&= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta))v(\gamma) + (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)) + 1 \\&= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1\end{aligned}$$

Aplicando las igualdades anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}v(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) + 1 \\&= 2v(\alpha)v(\beta) + 2v(\alpha) + 2v(\beta) + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta.

4. $\gamma \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \beta \vdash \gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\gamma \rightarrow \alpha \quad \gamma \rightarrow \beta}{\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\gamma \rightarrow \alpha) = 1 = v(\gamma \rightarrow \beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}1 &= v(\gamma)v(\alpha) + v(\gamma) + 1 \\1 &= v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$v(\gamma)v(\alpha) = v(\gamma) = v(\gamma)v(\beta)$$

Comprobemos que la regla es cierta:

$$\begin{aligned}v(\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta) &= v(\gamma)v(\alpha \wedge \beta) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma)(v(\alpha)v(\beta)) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma)v(\alpha)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\&\stackrel{(*)}{=} v(\gamma)v(\beta) + v(\gamma) + 1 \\&= v(\gamma) + v(\gamma) + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado las hipótesis. Por tanto, la regla es correcta.

5. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha, \beta \models \gamma$

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c} (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{array}}{\gamma}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) = 1 = v(\alpha) = v(\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \\ &= v(\alpha \wedge \beta)v(\gamma) + v(\alpha \wedge \beta) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Usando que $v(\alpha) = v(\beta) = 1$, tenemos que:

$$1 = v(\gamma) + 1 + 1 \implies v(\gamma) = 1$$

Por tanto, la regla es correcta.

6. $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma \models \beta \vee \gamma$. Esta regla se conoce como la regla de resolución.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \vee \gamma \end{array}}{\beta \vee \gamma}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 = v(\neg\alpha \vee \gamma)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ \\ 1 &= v(\neg\alpha \vee \gamma) \\ &= v(\neg\alpha)v(\gamma) + v(\neg\alpha) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\gamma) + v(\alpha) + 1 + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha) &= v(\alpha)v(\gamma) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la regla es correcta:

$$\begin{aligned} v(\beta \vee \gamma) &= v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= (v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1)v(\gamma) + v(\beta) + v(\gamma) \\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\gamma) + \cancel{v(\gamma)} + v(\beta) + \cancel{v(\gamma)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la regla es correcta. Hagamos ahora otro razonamiento distinto:

- Si $v(\alpha \vee \beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$.
- Si $v(\neg\alpha \vee \gamma) = 1$, entonces $v(\alpha) = 0$ ó $v(\gamma) = 1$.

Si $v(\beta) = 1$, entonces $v(\beta \vee \gamma) = 1$. Supongamos por tanto que $v(\beta) = 0$, y demostremos que $v(\gamma) = 1$. Como $v(\beta) = 0$, entonces $v(\alpha) = 1$, por lo que $v(\alpha) \neq 0$ y por tanto, $v(\gamma) = 1$, de donde $v(\beta \vee \gamma) = 1$. Queda demostrado por tanto que la regla es correcta.

7. $\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \alpha$. Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo clásica.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\alpha \rightarrow \neg\beta}{\alpha}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\neg\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + \cancel{1} + \cancel{1} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + v(\beta) + 1 + \cancel{v(\alpha)} \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) \\ v(\alpha)v(\beta) &= v(\beta) \end{aligned}$$

De forma directa, tenemos que $v(\alpha) = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

8. $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta \models \neg\alpha$. Esta regla se conoce como la regla de reducción al absurdo intuicionista.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \rightarrow \neg\beta}{\neg\alpha}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ \\ 1 &= v(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &= v(\alpha)v(\neg\beta) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)(v(\beta) + 1) + v(\alpha) + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\alpha)} + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= v(\alpha)v(\beta) \\ v(\alpha)v(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $v(\alpha) = 0$, por lo que $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1 = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

9. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$. Esta regla se conoce como la regla de demostración por casos.

Tenemos que es equivalente a:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Sea v una asignación fija pero arbitraria a condición de cumplir:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1 \\ \\ 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \end{aligned}$$

De la primera hipótesis deducimos que $v(\alpha)v(\beta) = v(\alpha)$, y por tanto de la segunda hipótesis deducimos que $v(\beta) = 1$, y por tanto, la regla es correcta.

Observación. Sean A, B dos conjuntos, y sea $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces, definimos la aplicación f_* por:

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ C &\longmapsto \{f(x) \mid x \in C\} \end{aligned}$$

Notemos que, dado $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales, se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si, para toda valoración v , se tiene que $v(\alpha) = 1$ siempre que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$.

Proposición 1.1. *Dada una fórmula α , demostrar que α es una tautología si y sólo si $\models \alpha$.*

Demostración. Tenemos que notar $\models \alpha$ es equivalente a notar $\emptyset \models \alpha$. Dada una valoración v , tenemos que $v_*(\emptyset) = \emptyset \subseteq \{1\}$.

Por tanto, sabemos que $\models \alpha$ si y sólo si para toda asignación se tiene que $v(\alpha) = 1$ y esto se da si y sólo si α es una tautología. \square

Proposición 1.2. *Veamos algunos resultados sobre conjuntos satisfacibles.*

1. *El conjunto \emptyset es satisfacible.*
2. *Existen conjuntos insatisfacibles.*
3. *Si Δ es insatisfacible y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces Γ es insatisfacible.*
4. *$\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha\}$ es insatisfacible.*

Demostración.

1. Razonamos por vacuidad. Dado una fórmula a_0 , sea $v = \chi_{\{a_0\}}$.

Si \emptyset fuese insatisfacible, existiría $\varphi_v \in \emptyset$ tal que $v(\varphi_v) = 0$, lo cual es absurdo.

2. Sea el conjunto $\{a, \neg a\}$. Sea v tal que $v(a) = 1$. Entonces $v(\neg a) = v(a) + 1 = 0$, por lo que dicho junto no es satisfacible.
3. Como Δ es insatisfacible, entonces para toda valoración v se tiene que existe $\varphi_v \in \Delta \subset \Gamma$ tal que $v(\varphi_v) = 0$, por lo que Γ es insatisfacible.
4. Sea v tal que $v(\alpha) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) &= v(\alpha)v(\neg \alpha) + v(\alpha) + 1 \\ &= 1 \cdot 0 + 1 + 1 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Si $\{\alpha, \alpha \rightarrow \neg \alpha\}$ fuera satisfacible, debería ser $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) = 1$, pero si $v(\alpha) = 1$, entonces $v(\alpha \rightarrow \neg \alpha) = 0$.

□

Proposición 1.3. Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces,

$$\text{Con}(\Gamma) = \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$$

Demostración. Demostramos por doble inclusión:

⊂) Como $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma)$, entonces $\text{Con}(\Gamma) \subset \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$.

⊃) Dado $\alpha \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$, entonces por definición $\text{Con}(\Gamma) \models \alpha$.

Para ver que $\alpha \in \text{Con}(\Gamma)$, basta ver que $\Gamma \models \alpha$. Sea v una valoración con $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Por tanto, $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$, y por tanto $v(\alpha) = 1$, por lo que $\Gamma \models \alpha$.

□

Ejercicio 1.3.2. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demostrar que si $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$, entonces $\Gamma \models \beta$. Es decir, si $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\Gamma)$, entonces $\beta \in \text{Con}(\Gamma)$.

Demostración. Demostremos en primer lugar que $\text{Con}(\Gamma) \models \beta$. Sea v una valoración tal que $v_*(\text{Con}(\Gamma)) \subseteq \{1\}$. Entonces, tendremos que:

$$v(\alpha) = 1 = v(\alpha \rightarrow \beta)$$

Por la regla de *modus ponens*, como $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$, entonces $v(\beta) = 1$. Por tanto, $\text{Con}(\Gamma) \models \beta$. Deducimos entonces que $\beta \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma)) = \text{Con}(\Gamma)$, por lo que $\Gamma \models \beta$.

Este resultado se resume diciendo que $\text{Con}(\Gamma)$ es cerrado por *modus ponens*. □

Proposición 1.4. Para toda α, β fórmulas proposicionales, $\beta \in \text{Con}(\{\alpha \wedge \neg \alpha\})$.

Demostración. Sabemos que $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha$, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ son tautologías, por lo que:

$$(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha \in \text{Con}(\emptyset)$$

Además, $\alpha \wedge \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Como $\emptyset \subset \{\alpha \wedge \neg\alpha\}$, tenemos que:

$$\alpha \wedge \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha, (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Por la Regla de *modus ponens*, tenemos que $\alpha, \neg\alpha \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Además, tenemos que otra tautología es:

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Aplicando la Regla de *modus ponens* dos veces de forma consecutiva, primero llegamos a que $\neg\alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$, y posteriormente llegamos a que se tiene que $\beta \in \text{Con}(\alpha \wedge \neg\alpha)$, que es lo que buscábamos demostrar. \square

Ejercicio 1.3.3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, se cumple

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) = \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$$

Demostración. La demostración es por doble inclusión.

\subseteq) Veamos en primer lugar que $\alpha, \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Sabemos que $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ es una tautología, luego $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\emptyset)$. Como $\emptyset \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$, entonces $\text{Con}(\emptyset) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha)$, y por tanto $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Por otro lado, $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha)$, y por tanto $\alpha \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$.

Por tanto, como $\text{Con}(\Gamma, \alpha)$ es cerrado por *modus ponens*, entonces tenemos que $\alpha \vee \beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$. Como además $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma, \alpha)$, entonces:

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma, \alpha)) = \text{Con}(\Gamma, \alpha)$$

Razonando de igual forma, tenemos que $\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \beta)$, por lo que:

$$\text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$$

\supseteq) Sea $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta)$, es decir:

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha) \implies \Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma$$

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \beta) \implies \Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma$$

Tenemos que demostrar que $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$, es decir, que $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \models \gamma$. Demostremos antes el siguiente resultado.

Sea v una asignación fija. Veamos que si $v(\alpha \vee \beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$. Por reducción al absurdo, supongamos que no, es decir, que $v(\alpha) = 0 = v(\beta)$. Entonces:

$$1 = v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta) = 0$$

Por tanto, llegamos a una contradicción, por lo que $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$.

Sabiendo esto, veamos si $\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$. Sea v una valoración tal que $v(\theta) = 1$ para todo $\theta \in \Gamma$ y $v(\alpha \vee \beta) = 1$. Por lo que acabamos de ver, $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$, supongamos $v(\alpha) = 1$ (el otro caso es idéntico). Entonces, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \gamma$, entonces $v(\gamma) = 1$, por lo que:

$$\gamma \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$$

Por tanto, $\text{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \text{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$

□

Ejercicio. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, si $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \beta$ y $\Gamma \models \alpha \rightarrow \psi$, entonces $\Gamma \models \neg\beta \rightarrow \psi$ y $\Gamma \models \neg\psi \rightarrow \beta$.

Demostración. Sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Entonces, por hipótesis, tenemos que:

$$v(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 = v(\alpha \rightarrow \psi)$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= v(\neg\alpha \rightarrow \beta) \\ &= v(\neg\alpha)v(\beta) + v(\neg\alpha) + 1 \\ &= (v(\alpha) + 1)v(\beta) + v(\alpha) + 1 + 1 \\ &= v(\alpha)v(\beta) + v(\beta) + v(\alpha) \\ &= v(\alpha \vee \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= v(\alpha \rightarrow \psi) \\ &= v(\alpha)v(\psi) + v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Veamos que es cierto lo dicho. Tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\neg\beta \rightarrow \psi) &= v(\neg\beta)v(\psi) + v(\neg\beta) + 1 \\ &= (v(\beta) + 1)v(\psi) + v(\beta) + 1 + 1 \\ &= v(\beta)v(\psi) + v(\psi) + v(\beta) \\ &= v(\beta \vee \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\neg\psi \rightarrow \beta) &= v(\neg\psi)v(\beta) + v(\neg\psi) + 1 \\ &= (v(\psi) + 1)v(\beta) + v(\psi) + 1 + 1 \\ &= v(\psi)v(\beta) + v(\beta) + v(\psi) \\ &= v(\psi \vee \beta) \end{aligned}$$

Por tanto, nuestro problema se reduce a demostrar que $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

- Si $v(\beta) = 1$, entonces $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

- Si $v(\beta) = 0$, entonces por la primera hipótesis tenemos que $v(\alpha) = 1$, y por la segunda hipótesis tenemos que $v(\psi) = 1$, por lo que $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

En cualquier caso, tenemos que $v(\alpha \vee \beta) = 1$, por lo que $\Gamma \models \neg\beta \rightarrow \psi$ y $\Gamma \models \neg\psi \rightarrow \beta$. \square

Teorema 1.5 (de la Reducción). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Equivalen:*

1. $\Gamma, \alpha \models \beta$
2. $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$

Demostración. La demostración es mediante doble implicación.

$1 \implies 2$) Supongamos que $\Gamma, \alpha \models \beta$. Entonces, sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Caben dos posibilidades:

- $v(\alpha) = 0$. Entonces, $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, por lo que $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$.
- $v(\alpha) = 1$. Entonces, por hipótesis tenemos que $v(\beta) = 1$, por lo que $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, y por tanto $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$.

$2 \implies 1$) Tenemos que $\alpha \rightarrow \beta \in \text{Con}(\Gamma) \subset \text{Con}(\Gamma, \alpha)$. Como $\alpha \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$, entonces por la regla de *modus ponens* tenemos que $\beta \in \text{Con}(\Gamma, \alpha)$, es decir, $\Gamma, \alpha \models \beta$, que es lo que queríamos demostrar.

\square

Teorema 1.6. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, equivalen:*

1. $\Gamma \models \alpha$
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

Demostración. La demostración es mediante doble implicación.

$1 \implies 2$) Supongamos que $\Gamma \models \alpha$, y sea v una valoración fija pero arbitraria. Si $\exists \varphi \in \Gamma$ tal que $v(\varphi) = 0$, entonces ya tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible. En caso contrario, tenemos que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$, por lo que $v(\alpha) = 1$, y por tanto $v(\neg\alpha) = 0$, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

$2 \implies 1$) Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, y sea v una valoración tal que $v_*(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, entonces $v(\neg\alpha) = 0$, por lo que $v(\alpha) = 1$.

\square

Observación. En numerosas ocasiones, estudiar la insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas es más sencillo que estudiar la validez de una fórmula (es decir, es más fácil estudiar el punto 2 que el punto 1 en el teorema anterior). Usaremos por tanto dicho resultado para demostrar la validez de una fórmula.

Ejemplo (Regla de la Cláusula Unit). Veamos algunos ejemplos de la Regla 2 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea $\Sigma = \{a, a \vee b, \neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$ un conjunto de cláusulas.

Tan solo cuenta con una cláusula unitaria, $\lambda = a$. Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

$$\Sigma' = \{\neg a \vee b, \neg a \vee b \vee c\}$$

Como $\Sigma' \neq \emptyset$, eliminamos ahora de cada cláusula de Σ' todas las ocurrencias de la cláusula unitaria $\lambda^c = \neg a$:

$$\Sigma'' = \{b, b \vee c\}$$

Por la regla 2, sabemos que Σ'' es insatisfacible si y solo si lo es Σ .

2. Sea $\Sigma = \{a, a \vee b, a \vee \neg c\}$ un conjunto de cláusulas.

Tan solo cuenta con una cláusula unitaria, $\lambda = a$. Eliminamos todas sus ampliaciones, y obtenemos:

$$\Sigma' = \emptyset$$

Por tanto, por la regla 2, sabemos que Σ es satisfacible.

Ejemplo (Regla del Literal Puro). Veamos algunos ejemplos de la Regla 3 del Algoritmo de Davis y Putnam.

1. Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, b \vee \neg d\}$ un conjunto de cláusulas.

Tenemos que $\lambda = \neg a$ es un literal puro en Σ , puesto que $\lambda^c = a$ no aparece en ninguna otra cláusula. Eliminamos todas las ampliaciones de λ , y obtenemos:

$$\Sigma' = \{\neg b \vee c, b \vee \neg d\}$$

Por la regla 3, sabemos que Σ' es insatisfacible si y solo si lo es Σ .

2. Sea $\Sigma = \{\neg a \vee b, a \vee \neg b\}$ un conjunto de cláusulas.

En este caso, no hay literales puros, por lo que no podemos aplicar la regla 3.

Ejemplo (Regla de Descomposición). Veamos un ejemplo de la Regla 4 del Algoritmo de Davis y Putnam. Sea el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee d, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg d\}$$

Apliquemos las reglas vistas:

1. Σ no tiene cláusulas tautológicas.
2. Σ no tiene cláusulas unitarias.
3. Σ no tiene literales puros.

4. Considerando $\lambda = a$, podemos dividir las cláusulas como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{b \vee d, b \vee \neg d\} \\ \Sigma_1 &= \{\neg b \vee \neg c\} \cup \Omega = \{\neg b \vee \neg c, b \vee d, b \vee \neg d\} \\ \Sigma_2 &= \{b \vee c\} \cup \Omega = \{b \vee c, b \vee d, b \vee \neg d\}\end{aligned}$$

Por la regla 4, sabemos que Σ es insatisfacible si y solo si lo son Σ_1 y Σ_2 .

Ejercicio 1.3.4. Sean las siguientes fórmulas proposicionales:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (a \vee b) \rightarrow (c \vee d) \\ \gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \rightarrow (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ \gamma_3 &= a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ \varphi &= (d \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow (d \wedge \neg(a \vee \neg b))\end{aligned}$$

Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$; y en caso de no serlo dé una asignación que lo evidencie.

Estudiaremos la satisfacibilidad del conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\}$ mediante el Algoritmo de Davis y Putnam. Para ello, en primer lugar hemos de transformar las fórmulas a su forma normal conjuntiva.

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (a \vee b) \rightarrow (c \vee d) \\ &= \neg(a \vee b) \vee (c \vee d) \\ &= (\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee d) \\ &= (\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \\ \gamma_2 &= (\neg a \wedge \neg d) \rightarrow (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= \neg(\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (\neg\neg a \vee \neg\neg d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (a \vee d) \vee (\neg c \wedge (c \vee e)) \\ &= (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e) \\ \gamma_3 &= a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ &= \neg a \vee (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b)) \\ &= (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b) \\ \neg\varphi &= \neg[(d \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= \neg[\neg(d \rightarrow (b \vee a)) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= \neg[\neg(\neg d \vee b \vee a) \vee (d \wedge \neg(a \vee \neg b))] \\ &= (a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg(d \wedge \neg a \wedge b) \\ &= (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)\end{aligned}$$

Queremos por tanto estudiar la satisfacibilidad del conjunto Σ_0 :

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \neg\varphi\} \\ &= \{(\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d), \\ &\quad (a \vee d \vee \neg c) \wedge (a \vee d \vee c \vee e), \\ &\quad (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee b), \\ &\quad (a \vee b \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)\}\end{aligned}$$

Estudiar la satisfacibilidad de Σ_0 equivale a estudiar la satisfacibilidad de Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(\neg a \vee c \vee d), \quad (\neg b \vee c \vee d), \\ &\quad (a \vee d \vee \neg c), \quad (a \vee d \vee c \vee e), \\ &\quad (\neg a \vee \neg c), \quad (\neg a \vee \neg b), \quad (\neg a \vee \neg d \vee b), \\ &\quad (a \vee b \vee \neg d), \quad (a \vee \neg b \vee \neg d)\} \\ &= \{\neg a \vee c \vee d, \\ &\quad \neg b \vee c \vee d, \\ &\quad a \vee d \vee \neg c, \\ &\quad a \vee d \vee c \vee e, \\ &\quad \neg a \vee \neg c, \\ &\quad \neg a \vee \neg b, \\ &\quad \neg a \vee \neg d \vee b, \\ &\quad a \vee b \vee \neg d, \\ &\quad a \vee \neg b \vee \neg d\}\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Algoritmo de Davis y Putnam para estudiar la satisfacibilidad de Σ , representado en la Figura 1.1.

