Ecuaciones Diferenciales I

Examen I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2017-18.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 22 de marzo de 2018.

Ejercicio 1. Se considera una solución cualquiera $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x' = 2tx.$$

Se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que, para cada $t \in I$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = cet^2.$$

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-t^2}\,x(t) \end{array}$$

Tenemos que f es derivable en I por ser producto de funciones derivables. Calculemos su derivada:

$$f'(t) = -2te^{-t^2}\,x(t) + e^{-t^2}\,x'(t) = -2te^{-t^2}\,x(t) + 2te^{-t^2}\,x(t) = 0.$$

Por tanto, al ser $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, la función f es constante en I. Es decir:

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Multiplicando por e^{t^2} ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos que:

$$x(t) = cet^2 \quad \forall t \in I.$$

Ejercicio 2. Demuestra que la transformación $\varphi(t,x) = (s,y)$, $s = t$, $y = x + t$ define un difeomorfismo del plano que es compatible con la ecuación

$$x' = (x+t)^2.$$

Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(0) = 0$ y especifica su intervalo de definición.

Veamos en primer lugar que es un difeomorfismo. Aunque no se menciona, entendemos el dominio maximal de φ, es decir:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t, x+t) \end{array}$$

Comenzamos por demostrar que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como ambas componentes de φ son polinómicas, esto es directo. Veamos ahora que φ es biyectiva buscando su inversa. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y-s) \end{array}$$

Como $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$, tenemos que $\psi = \varphi^{-1}$, por lo que φ es biyectiva. Además, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por la misma razón (ambas componentes son polinómicas). Por tanto, φ es un difeomorfismo.

Veamos ahora que es compatible con la ecuación diferencial dada. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & (x+t)^2 \end{array}$$

Nuestra ecuación diferencial es $x' = f(t,x)$, y veamos ahora que el cambio de variable φ es compatible con ella probando que:

1. Probar que f es continua, lo que es directo al ser polinómica.
2. Probar que φ es un difeomorfismo, lo que ya hemos hecho.
3. Comprobar que se cumple la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

En nuestro caso, tenemos que:

$$1 + 0 \cdot (x+t)^2 = 1 \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, el cambio de variable es compatible con la ecuación diferencial dada.

Para resolverla aplicando el cambio de variable, tenemos que la ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{dy}{ds}(s) = \frac{{}^{dy}/_{dt}(t)}{{}^{ds}/_{dt}(t)} = \frac{dy}{dt}(t) = \frac{\partial y}{\partial t}(t) + \frac{\partial y}{\partial x}(t)x'(t) = 1+1\cdot(x+t)^2 = 1+y^2 \Longrightarrow y' = 1+y^2.$$

El dominio de esta nueva ecuación es $\mathbb{R}^2$, y vemos que es una ecuación diferencial de variables separadas.

Ejercicio 3. Encuentra un cambio de variable que transforme la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

en una ecuación homogénea.

Ejercicio 4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e^t, \quad y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además, la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuación

$$x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x = t$$

define de forma implícita una única función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además, prueba que se cumple la identidad $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Para verlo, hemos de demostrar que x es una aplicación; es decir, que para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, existe un único valor $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que cumple dicha ecuación. Para ello, fijado $t \in \mathbb{R}$, definimos la función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f_t : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x - t \end{array}$$

Demostrar la existencia y unicidad de $x(t)$ es equivalente a demostrar que f_t tiene un único cero en $\mathbb{R}$.

Existencia Tenemos que f es continua, por lo que podemos aplicar el Teorema de Bolzano:

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_t(x) = +\infty.$$

Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(x(t)) = 0$.

Unicidad Veamos para ello que f_t es estrictamente creciente. Para ello, como es derivable, tenemos que:

$$f_t'(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, f_t es estrictamente creciente, lo que implica que tiene a lo sumo un cero. Por tanto, $x(t)$ es único.