Foto: José Juan Castro

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
Juan Manuel Fernández García

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios **5**
1.1. Números complejos . . . 5
1.2. Topología del plano complejo . . . 15
1.3. Funciones holomorfas . . . 21
1.4. Funciones analíticas . . . 32
1.5. Funciones Elementales . . . 43
1.6. Integral Curvilínea . . . 62
1.6.1. Sobre la convergencia uniforme de la integral de Cauchy . . . 70
1.7. Teorema local de Cauchy . . . 71
1.8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía . . . 82
1.9. Ceros de las funciones holomorfas . . . 101

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Números complejos

Ejercicio 1.1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Como ejercicio para el lector, se recomienda probar que M es un cuerpo.

Para comprobar ahora que M es isomorfo a $\mathbb{C}$, se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M \\ & z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{array}$$

Para probar que f es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3. $f(1) = 1$.

Tenemos que $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1$.

Por tanto, f es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- f es inyectiva.

  Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, igualando componente a componente, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

  Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, y tenemos que $f(z) = A$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto, M es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \dfrac{i-\sqrt{3}}{1+i}$.

   Tenemos que:

   $$z_1 = (-\sqrt{3}+i)\cdot\frac{1}{1+i} = (-\sqrt{3}+i)\cdot\frac{1-i}{1+1} = \frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i-i^2}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned}
   \operatorname{Re} z_1 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2},\\
   \operatorname{Im} z_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2},\\
   |z_1| &= \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+1+3+3}{4}} = \sqrt{2}.
   \end{aligned}$$

2. $z_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{3}-1}$.

   Tenemos que:

   $$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3}-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1+3}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned}
   \operatorname{Re} z_2 &= -\frac{1}{4},\\
   \operatorname{Im} z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4},\\
   |z_2| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2}.
   \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \qquad \forall z \in U.$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que f es una aplicación de U sobre U. Dado $z \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < 1 \iff |z-a| < |1-\overline{a}z| \iff |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \iff \\
\iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \iff z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < 1 - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a}z\overline{z} \iff \\
\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \iff |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \iff \\
\iff |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1.
\end{aligned}$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1-|a|^2 > 0$. Por tanto, f es una aplicación de U sobre U. A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \to U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad:

  Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1} = \frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2} \Longrightarrow (z_1-a)(1-\overline{a}z_2) = (z_2-a)(1-\overline{a}z_1) \Longrightarrow \\
  \Longrightarrow z_1 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_1z_2} + |a|^2z_2 = z_2 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_2z_1} + |a|^2z_1 \Longrightarrow \\
  \Longrightarrow z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \Longrightarrow (1-|a|^2)z_1 = (1-|a|^2)z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.
  \end{aligned}$$

- Sobreyectividad:

  Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar z de la ecuación $f(z) = w$:

  $$\begin{aligned}
  \frac{z-a}{1-\overline{a}z} = w \Longrightarrow z - a = w(1-\overline{a}z) \Longrightarrow z - a = w - w\overline{a}z \Longrightarrow z + w\overline{a}z = a + w \Longrightarrow \\
  \Longrightarrow z(1+w\overline{a}) = a + w \Longrightarrow z = \frac{a+w}{1+w\overline{a}}.
  \end{aligned}$$

  donde, en el último paso, hemos hecho uso de que $1 + w\overline{a} \neq 0$, ya que $|wa| = |w||a| < 1$ y:

  $$|1+w\overline{a}| \geqslant |1-|w||a|| = 1 - |w||a| > 0 \iff 1 > |w||a|$$

  y por tanto $1 + w\overline{a} \neq 0$. Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

  $$\begin{aligned}
  |z| = \left|\frac{a+w}{1+w\overline{a}}\right| = \frac{|a+w|}{|1+w\overline{a}|} < 1 \iff |a+w| < |1+w\overline{a}| \iff |a+w|^2 < |1+w\overline{a}|^2 \iff \\
  \iff (a+w)(\overline{a}+\overline{w}) < (1+w\overline{a})(1+\overline{w}a) \iff \\
  \iff a\overline{a} + a\overline{w} + w\overline{a} + w\overline{w} < 1 + w\overline{a} + \overline{w}a + a\overline{a}w\overline{w} \iff \\
  \iff |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \iff |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \iff \\
  \iff |w|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \iff |w|^2 < 1.
  \end{aligned}$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & w & \longmapsto & \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}} \end{array}$$

Ejercicio 1.1.4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k \ z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

$\Longrightarrow$) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre n.

- $\underline{n=1}$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $\underline{n=2}$: Hay dos opciones:

Opción Rutinaria Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| &\Longrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2|z_1||z_2| \Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow (z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos opciones:

Opción 1 Tenemos que:

$$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} \Longrightarrow z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^*$$

Tomamos ahora $\lambda_2 = \dfrac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\lambda_2 \ z_1 = \frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} \ z_1 = z_2$$

Opción 2 Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} &= (a+bi)(c-di) = ac+bd+(bc-ad)i, \\ z_2\overline{z_1} &= (c+di)(a-bi) = ac+bd+(ad-bc)i. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \Longrightarrow bc - ad = ad - bc \Longrightarrow ad = bc.$$

Distinguimos en función del valor de b:

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.
  - Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
  - Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^c/_a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = {}^{ad}/_b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^d/_b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.

$$\lambda_2\ z_1 = \frac{d}{b}(a + bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2\ z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1(1 + \lambda_2)| = |z_1||1 + \lambda_2| \\ |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda_2\ z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|). \end{aligned}$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Otra Opción Vemos ahora los elementos de $\mathbb{C}$ como elementos de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en $\mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad si y solo si:

1. z_1 y z_2 son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda\ z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2\rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2\rangle = \langle z_1, \lambda\ z_1\rangle = \lambda\langle z_1, z_1\rangle = \lambda\|z_1\|^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para n, demostrémolo para $n + 1$.

  Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1|\right) + |z_{n+1}| \Longrightarrow \\ &\qquad \Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| + |z_{n+1}| \Longrightarrow \\ &\qquad \Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| + |z_{n+1}| \end{aligned}$$

Notando por $w = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho\ w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho\ w = \rho \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1}\ z_1$. Por tanto, se cumple para $n+1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ z_1\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ejercicio 1.1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 2|z-i|\}$.
   Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy+i| = 2|x+iy-i| \Longrightarrow |x+(y+1)i| = 2|x+(y-1)i| \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x^2+(y+1)^2 = 4(x^2+(y-1)^2) \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2+2y+1 = 4x^2+4y^2-8y+4 \Longrightarrow 3x^2+3y^2-10y+3 = 0 \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}y+1 = 0 \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1 = 0 \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

   Por tanto, A es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 4\}$.
   Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy-i| + |x+iy+i| = 4 \Longrightarrow |x+(y-1)i| + |x+(y+1)i| = 4 \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4 \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow x^2+(y-1)^2 = 16+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow -2y = 16+2y-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow 4+y = 2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow 16+8y+y^2 = 4x^2+4y^2+4+8y \Longrightarrow\\
&\qquad \Longrightarrow 4x^2+3y^2 = 12 \Longrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4-3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0, i)$, $(0, -i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

Ejercicio 1.1.6. Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, consideramos $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$. Entonces, como en particular se tiene $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como $z \notin \mathbb{R}^-$ (y por tanto $|z| \neq -\operatorname{Re} z$), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z) \cdot |z|}{\cos(\arg z) \cdot |z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen $\arg z$. Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \left]-\pi, \pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha - 2 \arctan \left(\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que $f(0) = 0 - 2\arctan(0) = 0$. Por otro lado, como $f \in C^1 \left(\left]-\pi, \pi\right[, \mathbb{R} \right)$, consideramos la derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2} \cdot \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{(\cos \alpha + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 + 2 \cos \alpha} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 0 \qquad \forall \alpha \in \left]-\pi, \pi\right[. \end{aligned}$$

Por tanto, f es constante, por lo que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right[$. Tomando como ángulo $\alpha = \arg z$, que por la elección hecha sabemos que $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$, tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z) + 1} \right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1.1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(y/x\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(y/x\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan\left(y/x\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que $x = \operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)$ e $y = \operatorname{Im} z = |z| \operatorname{sen}(\arg z)$. Por tanto, distinguimos en función de los valores de x e y, usando además que $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$:

- Si $x > 0$:

  En este caso, $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arg z$$

  donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

- Si $x < 0, y > 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]0, \pi\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]\pi/2, \pi\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z - \pi \in \left]-\pi/2, 0\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z - \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

- Si $x < 0, y < 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi, 0\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]-\pi, -\pi/2\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z + \pi \in \left]0, \pi/2\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z + \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$$

- Si $x = 0, y > 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]0, \pi\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = \pi/2$.

- Si $x = 0, y < 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi, 0\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = -\pi/2$.

Ejercicio 1.1.8. Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre n.

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.

- Supongamos que se cumple para n, demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta + i(\cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta).\end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre θ, se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8.$$

Sea $z' = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}|z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\ \arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que $\operatorname{Re} z' > 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ z = (z')^8 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^8 \stackrel{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \\
\operatorname{Im} z &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \tag{1.2}$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por i y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)\right) \overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)\right)^k$$

donde en $(*)$ hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo $z = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$, definimos $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, por lo que $u^2 = z$. Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k\overline{u}^k - u^{2k} = u^k(\overline{u}^k - u^k) = -2i\operatorname{sen}\left(k\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de z, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n} z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)\right) &\overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{-2i\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^{n+1}}{-2i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot u} = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot u^n = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que $z \neq 1$; es decir, que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.

1.2. Topología del plano complejo

Ejercicio 1.2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Por el Ejercicio 1.1.6, sabemos que:

$$\arg z = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

Consideramos $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Como la función Id es continua, tenemos que $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$ son continuas en $\mathcal{C}$. Además, como el denominador tan solo se anula en $\mathbb{R}_0^-$, el argumento de la arcotangente restringido a Ω es una función continua. Por ser la arcotangente continua en $\mathbb{R}$ y serlo el producto de funciones continuas, concluimos que $\arg_{|\Omega}$ es continua. Como Ω es abierto, por el carácter local de la continuidad, arg es continua en $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Tan solo falta por estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^-$. Para ello, sea $z \in \mathbb{R}^-$, del que sabemos que $\arg z = \pi$. Sea la sucesión $\{\theta_n\}$ que recorre los ángulos desde 0 en sentido horario hasta $-\pi$, límite de la sucesión:

$$\{\theta_n\} = \left\{-\pi\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} \to -\pi$$

A partir de dicha sucesión, definimos $\{z_n\}$ como los números complejos de módulo $|z|$ y argumento θ_n; que recorren los puntos de la circunferencia unitaria desde el eje positivo en sentido horario hasta el eje negativo.

$$\{z_n\} = \{|z|\left(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n)\right)\} \to |z|\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -|z| = z$$

Por último, tenemos que:

$$\{\arg z_n\} = \{\theta_n\} \to -\pi \neq \pi = \arg z$$

Por tanto, hemos encontrado una sucesión $\{z_n\}$ con $z_n \in \mathbb{C}^*\ \forall n \in \mathbb{N}$, con $\{z_n\} \to z$ pero $\{\arg z_n\} \not\to \arg z$. Por tanto, arg no es continua en z. Como z era arbitrario, concluimos que arg no es continua en $\mathbb{R}^-$.

Por tanto, concluimos que arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, pero no lo es en $\mathbb{R}^-$.

Ejercicio 1.2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

La elección del argumento principal de un número complejo realizada provoca que haya una discontinuidad en $\mathbb{R}^- = S_\pi$. Este ejercicio nos pide encontrar una función que, dado un argumento θ, sea continua en $\mathbb{C}^*$ excepto en los puntos z para los cuales $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Dado $z \in S_\theta$, como arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, en primer lugar definiremos una función $g_\theta : S_\theta \to \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ que nos lleve z a un punto $w \notin \mathbb{R}^-$ (esto lo haremos girando z un ángulo de $\pi - \theta$); para poder aplicar luego arg y modificar el valor de forma que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ (esto lo haremos restando $\pi - \theta$). Vamos a ello.

Definimos en primer lugar $w_\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta) \in \mathbb{C}$, de forma que $|w_\theta| = 1$ y $\pi - \theta \in \operatorname{Arg} w_\theta$. Definimos g_θ como:

$$\begin{array}{rccl} g_\theta : & S_\theta & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \\ & z & \longmapsto & z w_\theta \end{array}$$

En primer lugar, como g_θ es polinómica, tenemos que $g_\theta \in \mathcal{C}(S_\theta)$. Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\operatorname{Arg} g_\theta(z) = \operatorname{Arg}(z w_\theta) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w_\theta = (\arg z + \pi - \theta) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Veamos que $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$. Supongamos que $g_\theta(z) \in \mathbb{R}^-$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg z + \pi - \theta = \pi + 2k\pi$. Por tanto, $\arg z = 2k\pi + \theta$. Por tanto, $\theta \in \operatorname{Arg} z$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$.

A continuación, definimos φ como sigue:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_\theta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \arg(g_\theta(z)) - (\pi - \theta) \end{array}$$

De esta forma, tenemos que φ es continua en S_θ, puesto que arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y g_θ es continua en S_θ. Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\varphi(z) \in \operatorname{Arg} g_\theta(z) - \operatorname{Arg} w_\theta = \operatorname{Arg} g_\theta(z) + \operatorname{Arg} \frac{1}{w_\theta} = \operatorname{Arg}\left(\frac{g_\theta(z)}{w_\theta}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z w_\theta}{w_\theta}\right) = \operatorname{Arg} z$$

Ejercicio 1.2.3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ de forma que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \varphi(z) - \varphi(-z) \end{array}$$

Por ser φ continua, f es continua. Además, dado $z \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) - \varphi(-z) \\ f(-z) &= \varphi(-z) - \varphi(z) = -(\varphi(z) - \varphi(-z)) = -f(z) \end{aligned}$$

Por tanto, fijado $w \in \mathbb{C}^*$, hay dos opciones:

- Si $f(w) = 0$, entonces sea $z_0 = w$, y se tiene que $f(z_0) = 0$.
- Si $f(w) \neq 0$, entonces $f(w)f(-w) < 0$. Como $\mathbb{C}^*$ es conexo, por el Teorema del Valor Intermedio $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$.

En cualquier caso, $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$. Por tanto, $\varphi(z_0) = \varphi(-z_0)$. Esto implica que $\operatorname{Arg} z_0 = \operatorname{Arg}(-z_0)$, lo cual es una contradicción ya que:

$$\operatorname{Arg} -z_0 = (\arg z_0 + \pi) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Por tanto, no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z\ \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Por otro lado, consideramos el caso para $\mathbb{T}$. Hay diversas formas de probarlo:

- De forma análoga, haciendo uso ahora de que $\mathbb{T}$ es conexo.
- Aplicando de forma directa el Teorema de Borsuk-Ulam a φ (esto es lo que en realidad hacemos en la opción anterior).
- Haciendo uso de lo anteriormente demostrado.

Desarrollaremos la tercera opción, por ser aquella que difiere de lo anterior. De nuevo, supongamos por reducción al absurdo que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z\ \forall z \in \mathbb{T}$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \varphi\left(\dfrac{z}{|z|}\right) \end{array}$$

Tenemos que f es continua, y verifica que:

$$f(z) = \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}(|z|) = \operatorname{Arg} z - 2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg} z$$

No obstante, hemos demostrado que no puede existir una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $f(z) \in \operatorname{Arg} z\ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción, y concluimos que no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z\ \forall z \in \mathbb{T}$.

Ejercicio 1.2.4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Usando sucesiones: Usaremos la caracterización que en el mismo enunciado describen. Dada una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, definimos θ_n como sigue:

- Si $z \notin \mathbb{R}^-$:
  Como $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = 2k\pi + \arg z$. Por tanto, definimos θ_n como:

  $$\theta_n = \arg z_n + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Además, tenemos que:

  $$\{\theta_n\} = \{\arg z_n + 2k\pi\} \to \arg z + 2k\pi = \theta$$

  donde hemos usado que, al ser arg continua en $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, como se tiene que $\{z_n\} \to z$, entonces $\{\arg z_n\} \to \arg z$.

- Si $z \in \mathbb{R}^-$:
  Por el Ejercicio 1.2.2, $\exists \varphi \in \mathcal{C}(S_0)$ tal que $\varphi(w) \in \operatorname{Arg} w \ \forall w \in S_0$. En particular, $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$, por lo que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \theta + 2k\pi$.

  Como $\{z_n\} \to z \in S_0 = S_0^\circ$ abierto, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $z_n \in S_0$. Por tanto, definimos θ_n como:

  $$\begin{cases} \theta_n = \arg z_n & \text{si } n < N \\ \theta_n = \varphi(z_n) - 2k\pi & \text{si } n \geqslant N \end{cases}$$

  De esta forma, tenemos que $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y además:

  $$\{\theta_n\} \to \varphi(z) - 2k\pi = \theta$$

  donde hemos usado que, al ser φ continua en $z \in S_0$, como $\{z_n\} \to z$, se tiene que $\{\varphi(z_n)\} \to \varphi(z)$.

Observación. Notemos que podríamos haber generalizado todo en el segundo caso, considerando $S_{\theta+\pi}$. No obstante, se ha optado por hacerlo de forma más explícita para facilitar la comprensión, ya que el primer caso seguramente sea más intuitivo.

Usando el punto de vista topoógico:

Definimos la función proyección:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & x + 2\pi\mathbb{Z} \end{array}$$

Tenemos la siguiente descomposición de $\mathbb{C}^*$:

$$\mathbb{C}^* = \left(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-\right) \cup \left(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+\right)$$

Tenemos que:

- En $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

  $$\operatorname{Arg}(z) = (\pi \circ \arg)(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

  Por tanto, Arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.
- En $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$:
  Por el Ejercicio 1.2.2, sabemos que $\exists \varphi \in \mathcal{C}(S_0)$ tal que:

  $$\operatorname{Arg}(z) = (\pi \circ \varphi)(z) \qquad \forall z \in S_0 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$$

  Por tanto, Arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$.

Por el carácter local de la continuidad, Arg es continua en $\mathbb{C}^*$.

Ejercicio 1.2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Para facilitar la notación, sea:

$$z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En primer lugar, vamos a estudiar el límite de la sucesión $\{|z_n|\}$:

$$|z_n| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{Re} z}{n}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n}\right)^2}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{Re}^2 z}{n^2} + \frac{2\operatorname{Re} z}{n} + \frac{\operatorname{Im}^2 z}{n^2}\right)^n} = \sqrt{\left(1+\frac{\frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}{n} + 2\operatorname{Re} z}{n}\right)^n}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}{n} + 2\operatorname{Re} z}{n}\right)^n} =$$

$$= \sqrt{\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}{n} + 2\operatorname{Re} z\right)} = \sqrt{\exp(2\operatorname{Re} z)} = e^{\operatorname{Re} z}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que la raíz es una función continua, y en la segunda igualdad hemos usado el Criterio de Euler. A continuación, estudiamos los argumentos de z_n. Para ello, definimos:

$$w_n = 1 + \frac{z}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{w_n\} \to 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $\operatorname{Re} w_n > 0$. Por tanto, $\forall n \geqslant N$ se tiene que:

$$\arg w_n = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} w_n}{\operatorname{Re} w_n}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right)$$

Como $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg}\left((w_n)^n\right) = n \operatorname{Arg} w_n \Longrightarrow n \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right) \in \operatorname{Arg} z_n \qquad \forall n \geqslant N$$

Por tanto, definimos la sucesión $\{\theta_n\}$ como sigue:

$$\theta_n = \begin{cases} \arg z_n & \text{si } n < N \\ n \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right) & \text{si } n \geqslant N \end{cases}$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$. Calculemos el límite de la sucesión $\{\theta_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n+\operatorname{Re} z}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n+\operatorname{Re} z}\right)}{\dfrac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{1+\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n+\operatorname{Re} z}\right)^2} \cdot \frac{-\operatorname{Im} z}{(n+\operatorname{Re} z)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \operatorname{Im} z}{(n+\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im}^2 z} = \operatorname{Im} z$$

Uniendo ambos resultados, tenemos que:

$$z_n = |z_n| \left(\cos(\theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_n)\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite, y como las funciones seno y coseno son continuas, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \left(\cos\left(\lim_{n\to\infty} \theta_n\right) + i \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} \theta_n\right)\right) = e^{\operatorname{Re} z} \left(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\right)$$

1.3. Funciones holomorfas

Ejercicio 1.3.1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como se indica:

1. $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 = (x + iy)x^2 = x^3 + ix^2y.$$

   Consideramos ahora las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^3, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = x^2y, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

   Puesto que son polinómicas, es directo ver que u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, por lo que f será derivable en $z = x + iy$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto (x, y), es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

   Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 &=& x^2, \\ 0 &=& -2xy. \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0, \\ xy &=& 0. \end{array} \right\}$$

   Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se verifican en el siguiente conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$A = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \equiv \{ai \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

   Por tanto, f es derivable en A, mientras que no lo es en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus A$. Es decir, f es derivable en los números imaginarios puros, pero no en ningún otro punto del plano complejo. Podemos además definir la función derivada $f' : A \to \mathbb{C}$ como:

$$f'(ai) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,a) = 0 + i \cdot 2 \cdot 0 \cdot a = 0 \qquad \forall ai \in \mathbb{C}.$$

   Por tanto, f es constante en A. De hecho, se tiene que:

$$f(ai) = 0 \qquad \forall ai \in \mathbb{C}.$$

2. $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \dfrac{x^2}{2}\right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^3 - y, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = y^3 + \frac{x^2}{2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

   Puesto que son polinómicas, es directo ver que u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, por lo que f será derivable en $z = x + iy$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto (x, y), es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

   Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 &=& 3y^2, \\ -1 &=& -x. \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1, \\ y &\in& \{-1, 1\}. \end{array} \right\}$$

   Por tanto, fijado $z_0 = 1 + i \in \mathbb{C}$, tenemos que f es derivable en $\{z_0, \overline{z_0}\}$, mientras que no lo es en ningún otro punto del plano complejo. En estos puntos, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 3 + i, \\ f'(\overline{z_0}) &= f'(1-i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 3 + i. \end{aligned}$$

3. $f(x+iy) = \dfrac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con $f(0) = 0$.

   Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

   donde, además, $u(0,0) = v(0,0) = 0$. Estudiamos la derivabilidad por partes:

   - <u>Estudiamos en $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:</u>
     Por el carácter local de la diferenciabilidad, sabemos que u, v con diferenciables en A, por lo que f será derivable en $z = x + iy \in A$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto (x, y), es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x^4}{(x^2+y^2)^2} & = & \dfrac{3y^2(x^2+y^2)-2y^4}{(x^2+y^2)^2}, \\ -\dfrac{x^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} & = & \dfrac{y^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2(x^2+y^2)-2x^4 & = & 3y^2(x^2+y^2)-2y^4, \\ -x^3\cdot 2y & = & y^3\cdot 2x. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(x^2+y^2)(x^2-y^2) & = & 2(x^4-y^4), \\ 2xy(y^2+x^2) & = & 0. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(x^4-y^4) & = & 2(x^4-y^4), \\ xy(y^2+x^2) & = & 0. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^4 & = & y^4, \\ xy(y^2+x^2) & = & 0. \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación podríamos deducir que x o y se anulan, pero entonces por la primera tendríamos $x = y = 0$ (valor que no pertenece a A). Por tanto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A si y solo si:

$$\begin{array}{rcl} x^4 & = & y^4, \\ y^2+x^2 & = & 0. \end{array}$$

De la segunda ecuación deducimos entonces que $x = y = 0$, que no pertenece a A. Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se verifican en ningún punto de A. Por tanto, f no es derivable en ningún punto de A.

- Estudiamos en el origen, $z = 0 = (0, 0)$:

  Lo estudiaremos a partir de la definición de derivada en un punto. Consiste en ver si el siguiente límite existe:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^3}{x^2+y^2} + i\dfrac{y^3}{x^2+y^2}}{x+iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+iy^3}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

Como sabemos, la existencia de este límite equivale a que exista el límite de las partes reales e imaginarias. Por tanto, trabajamos en primer lugar con la parte real:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^3+xy^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Para ver si dicho límite existe, calculamos los límites parciales:

$$\lim_{t\to 0}\frac{0^2}{0^2+t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Como ambos límites parciales no coinciden, el límite no existe. Por tanto, como la parte real no tiene límite, dicho límite no existe y; por tanto, f no es derivable en el origen.

Por tanto, f no es derivable en ningún punto del plano complejo.

Ejercicio 1.3.2. Probar que existe una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

Supongamos que existe una función entera f cumpliendo las condiciones dadas. Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por ser una función entera, f es derivable en todo $\mathbb{C}$, por lo que u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{R}^2$. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales de u, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) & = & 4x^3 - 12xy^2, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & = & 12x^2y - 4y^3. \end{array} \right\}$$

Integrando con respecto a y la primera ecuación, tenemos que:

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + \varphi(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando con respecto a x la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 12x^2y - 4y^3 + \varphi'(x)$$

Por tanto, como también tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducimos que $\varphi'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\varphi(x) = C \in \mathbb{R}$ y, por tanto:

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + C \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, la función f es de la forma:

$$f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y) = x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3+C) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Si imponemos la condición adicional $f(0) = 0$, tenemos que:

$$f(0) = 0 = 0 + Ci \iff C = 0.$$

Por tanto, la función f es única y viene dada por:

$$f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio 1.3.3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que existe una función entera f cumpliendo las condiciones dadas. Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por ser una función entera, f es derivable en todo $\mathbb{C}$, por lo que u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{R}^2$. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales de u, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) &=& 2ax + by, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) &=& -bx - 2cy. \end{array} \right\}$$

Integrando con respecto a y la primera ecuación, tenemos que:

$$v(x,y) = 2axy + b \cdot \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando con respecto a x la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2ay + \varphi'(x)$$

Por tanto, como también tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2ay + \varphi'(x) &= -bx - 2cy \\ \varphi'(x) &= -bx - 2y(a+c) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Como φ tan solo depende de x, la ecuación anterior se cumplirá si y solo si $a + c = 0$; en cuyo caso:

$$\varphi(x) = -\frac{bx^2}{2} + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la función f será de la forma:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + i\,(2axy + C) \\ &= a(x^2 - y^2) + bxy + i\,(2axy + C) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, y a modo de resumen, tenemos que:

$$\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ tal que } \operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \ \forall x, y \in \mathbb{R} \iff a + c = 0.$$

$\Rightarrow$) Si f cumple las condiciones dadas, hemos probado anteriormente que $a+c=0$.

$\Leftarrow$) Si $a+c=0$, La función f descrita anteriormente cumple las condiciones dadas.

Ejercicio 1.3.4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que:

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Probar que f es constante.

Definimos las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy), \qquad && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), \qquad && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por ser una función holomorfa, f es derivable en todo Ω, por lo que u, v son diferenciables en Ω y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo Ω. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Además, considerando $z = x + iy \in \Omega$, la ecuación del enunciado se puede reescribir como:

$$au(x,y) + bv(x,y) = c \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Derivamos con respecto a x y y la ecuación anterior, obteniendo:

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,\\
a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + b\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, reescribimos las ecuaciones anteriores usando solo las derivadas parciales respecto de x:

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,\\
b\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - a\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Este se trata de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con matriz de coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \Longrightarrow |M| = -(a^2+b^2) \neq 0$$

Por tanto, sabemos que, para cada $(x,y) \in \Omega$, la única solución es la trivial. Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por tanto, tenemos que:

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por tanto, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Ω es un dominio, tenemos que f es constante en Ω.

Ejercicio 1.3.5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann: Definimos las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy), \qquad && \forall (x,y) \in \Omega,\\
v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), \qquad && \forall (x,y) \in \Omega.
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, u, v son diferenciables en Ω y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo Ω. Esto es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

Escribimos ahora la función conjugada de f:

$$\overline{f(x+iy)} = \overline{u(x,y) + iv(x,y)} = u(x,y) - iv(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por tanto, como $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, también se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo Ω (teniendo en cuenta ahora el cambio de signo):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Uniendo las 4 ecuaciones, deducimos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos para cada $(x,y) \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 0,\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por tanto, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Ω es un dominio, tenemos que f es constante en Ω.

Usando un resultado teórico: Como $f, \overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, tenemos que:

$$\operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Como además sabemos que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$, en particular es constante y, por tanto, $\operatorname{Re} f$ es constante.

Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\operatorname{Re} f$ es constante, tenemos que f es constante (como queríamos demostrar).

Ejercicio 1.3.6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} \mid z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f^*(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)} \quad \text{para todo } z \in \Omega^*.$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

En primer lugar, hemos de ver que Ω^* es abierto. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$$

Vemos que T es un homeomorfismo entre espacios topológicos, y $T(\Omega) = \Omega^*$. Por tanto, Ω^* es abierto.

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann: Definimos las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \Omega, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Tenemos por tanto:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \Omega, \\ f(\overline{x+iy}) &= f(x-iy) = u(x,-y) + iv(x,-y), \qquad \forall (x,y) \in \Omega^*, \\ f^*(x+iy) &= \overline{f\left(\overline{x+iy}\right)} = \overline{u(x,-y) + iv(x,-y)} = u(x,-y) - iv(x,-y), \qquad \forall (x,y) \in \Omega^*. \end{aligned}$$

Definimos ahora las funciones $u^*, v^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u^*(x,y) &= \operatorname{Re} f^*(x+iy) = u(x,-y), && \forall (x,y) \in \Omega^*, \\ v^*(x,y) &= \operatorname{Im} f^*(x+iy) = -v(x,-y), && \forall (x,y) \in \Omega^*. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales de u^*, v^*. Para cada $(x,y) \in \Omega^*$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y), \\ \frac{\partial u^*}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y), \\ \frac{\partial v^*}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y), \\ \frac{\partial v^*}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y). \end{aligned}$$

Por un lado, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tenemos que las derivadas parciales de u, v son continuas en Ω y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo Ω. Sabiendo esto, comprobemos ahora que u^*, v^* son también diferenciables en Ω^*. Para ello, fijado $(x,y) \in \Omega^*$, tenemos que $(x,-y) \in \Omega$; y como las derivadas parciales de u, v son continuas en Ω, tenemos que las derivadas parciales de u^*, v^* son continuas en Ω^*; por lo que u^*, v^* son diferenciables en Ω^*. Veamos ahora que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω^*. Para cada $(x,y) \in \Omega^*$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial v^*}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u^*}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial v^*}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Por tanto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω^*, por lo que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$. De hecho, tenemos que:

$$(f^*)'(x+iy) = \frac{\partial u^*}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v^*}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) = \overline{f'(x-iy)} \qquad \forall (x,y) \in \Omega^*.$$

Por tanto, se tiene que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$, con:

$$(f^*)'(a) = \overline{f'\left(\overline{a}\right)} \qquad \forall a \in \Omega^*.$$

A partir de la definición: Sea $a^* \in \Omega^*$, de forma que tenemos $a \in \Omega$ tal que $a^* = \overline{a}$. Calculamos el límite:

$$\lim_{z^* \to a^*} \frac{f^*(z^*) - f^*(a^*)}{z^* - a^*} = \lim_{z^* \to a^*} \frac{\overline{f\left(\overline{z^*}\right)} - \overline{f\left(\overline{a^*}\right)}}{z^* - a^*} = \lim_{z^* \to a^*} \frac{\overline{f\left(\overline{z^*}\right) - f\left(a\right)}}{z^* - a^*} = \lim_{z^* \to a^*} \overline{\frac{f\left(\overline{z^*}\right) - f\left(a\right)}{\overline{z^*} - \overline{a^*}}} =$$
$$= \overline{\lim_{z^* \to a^*} \frac{f\left(\overline{z^*}\right) - f\left(a\right)}{\overline{z^*} - a}}$$

Para todo $z^* \in \Omega^*$, tenemos que $\overline{z^*} \in \Omega$. Además, usando que la conjugación es una función continua en $\mathbb{C}$, tenemos que:

$$\lim_{z^* \to a^*} \frac{f^*(z^*) - f^*(a^*)}{z^* - a^*} = \overline{\lim_{\overline{z^*} \to a} \frac{f\left(\overline{z^*}\right) - f\left(a\right)}{\overline{z^*} - a}} = \overline{f'\left(a\right)} = \overline{f'\left(\overline{a^*}\right)}.$$

donde la última igualdad se debe a que, si $z^* \in \Omega^*$, entonces $\overline{z^*} \in \Omega$. Por tanto, como dicho límite existe, tenemos que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$, con:

$$(f^*)'(a^*) = \overline{f'\left(\overline{a^*}\right)} \qquad \forall a^* \in \Omega^*.$$

Ejercicio 1.3.7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

La función exponencial es la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^z := f(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)) \end{array}$$

Supongamos que existe un subconjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f_{|\Omega}$ es una función racional. Por tanto, existen $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$, con $q(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, tales que:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Por un lado, sabemos que la derivada de la exponencial es ella misma, luego:

$$f'(z) = f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Por otro lado, empleando la regla de la derivada de un cociente, tenemos que:

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Igualando ambas expresiones obtenemos, para todo $z \in \Omega$:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)} \tag{1.3}$$
$$p(z)q(z) = p'(z)q(z) - p(z)q'(z) \tag{1.4}$$

Usaremos ahora los siguientes conceptos. Dados dos polinomios cualesquiera $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\deg pq &= \deg p + \deg q, \\
\deg(p+q) &\leqslant \max\{\deg p, \deg q\}, \\
\deg(p-q) &\leqslant \max\{\deg p, \deg q\}, \\
\deg p' &= \begin{cases} \deg p - 1 & \text{si } \deg p \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } \deg p = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Veamos ahora que p, q no son constantes.

- Supongamos que q es constante:

  Entonces, $f \in \mathcal{P}(\Omega)$. Por tanto, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. No obstante, sabemos que esto no es cierto, ya que $f^{(n)}(z) = f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, q no puede ser constante.

- Supongamos que p es constante:

  Sabemos que p no es nulo, ya que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, $p'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, la ecuación (1.4) se reduce a:

  $$p(z)q(z) = -p(z)q'(z) \Longrightarrow q(z) = -q'(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

  Por tanto, como $\deg q = \deg q'$, tenemos que q es constante (algo que ya hemos visto que no puede ser). Por tanto, p no puede ser constante.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\deg(pq) &= \deg p + \deg q \\
\deg(p') &= \deg p - 1 \\
\deg(q') &= \deg q - 1 \\
\deg(p'q) &= \deg p + \deg q - 1 \\
\deg(pq') &= \deg p + \deg q - 1 \\
\deg(p'q - pq') &\leqslant \max\{\deg p'q, \deg pq'\} = \deg p + \deg q - 1
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\deg(p'q - pq') \leqslant \deg p + \deg q - 1 < \deg p + \deg q = \deg(pq)$$

Por tanto, la ecuación (1.4) no puede cumplirse para ningún par de polinomios $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$. Por tanto, la función exponencial no puede ser racional en ningún subconjunto abierto no vacío del plano.

1.4. Funciones analíticas

Ejercicio 1.4.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:
   $$\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$$
   Con vistas a aplicar el criterio del cociente para sucesiones, consideramos el siguiente cociente:
   $$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
   Como la base tiende a 1 y el exponente diverge positivamente, aplicamos el criterio de Euler, y tenemos:
   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-n-1}{n+1}\right)\right] = \\ &= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}\right] = e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$
   Por tanto, por el criterio del cociente para sucesiones y por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:
   $$\{\sqrt[n]{\alpha_n}\} \to \frac{1}{e} \Longrightarrow R = \frac{1}{1/e} = e$$

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$

   En primer lugar, vemos que no se trata de forma directa de una serie de potencias. No obstante, definimos la siguiente sucesión $\{\alpha_n\}$:
   $$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
   De esta forma, tenemos que:
   $$\sum_{n\geqslant 0} z^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$$
   Estudiamos por tanto la sucesión $\{\sqrt[n]{\alpha_n}\} = \{\alpha_n\}$. Tenemos en primer lugar que no es convergente, por lo que no podemos considerar su límite. No obstante, tenemos que está acotada, por lo que consideramos su límite superior:
   $$\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\} = \limsup\{\alpha_n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{\alpha_k \mid k \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{1,0\} = \sup\{1,0\} = 1$$
   Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:
   $$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!}$

De nuevo, no está en la forma de una serie de potencias. No obstante, definimos en primer lugar el siguiente conjunto M:

$$M = \{n! \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Además, para cada $n \in M$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k! = n$. Por tanto, podemos escribir la sucesión $\{\alpha_n\}$ como:

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^k & \text{si } n \in M \\ 0 & \text{si } n \notin M \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \begin{cases} \sqrt[k!]{2^k} & \text{si } n \in M \\ 0 & \text{si } n \notin M \end{cases}$$

Entonces, tenemos que:

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = 2^{\frac{k}{k!}} = 2^{\frac{1}{(k-1)!}} \qquad \forall n \in M$$

Por tanto, el límite superior de la sucesión $\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}$ es:

$$\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[p]{\alpha_p} \mid p \geqslant n\} = \lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{(k-1)!}} = 2^0 = 1$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = 1$$

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (3 + (-1)^n)^n\, z^n$

Definimos la sucesión $\{\alpha_n\}$:

$$\alpha_n = (3 + (-1)^n)^n$$

Por tanto, la sucesión $\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}$ es:

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{(3 + (-1)^n)^n} = 3 + (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vemos que no es convergente, pero sí está acotada, puesto que:

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto, podemos considerar el límite superior de la sucesión $\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}$:

$$\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{\sqrt[k]{\alpha_k} \mid k \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{2, 4\} = 4$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = \frac{1}{4}$$

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n + a^n)\, z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$

Definimos la sucesión $\{\alpha_n\}$:

$$\alpha_n = n + a^n$$

Es directo ver que $|\alpha_n| = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para estudiar la sucesión $\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}$ empleamos el criterio del cociente para sucesiones:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+1+a^{n+1}}{n+a^n} = \frac{n+a\cdot a^n}{n+a^n} + \frac{1}{n+a^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Independientemente del valor de $a \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\left\{\frac{1}{n+a^n}\right\} \to 0$$

Para el otro sumando, distinguimos en función de los valores de a:

- Si $a = 1$, tenemos que:

$$\left\{\frac{n+a\cdot a^n}{n+a^n}\right\} = \left\{\frac{n+1}{n+1}\right\} = \{1\} \to 1$$

  Por tanto, por el Criterio del Cociente para sucesiones, tenemos que:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \to 1 + 0 = 1 \Longrightarrow \{\sqrt[n]{\alpha_n}\} \to 1$$

  Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = \frac{1}{1} = 1$$

- Si $a < 1$, tenemos que:

$$\left\{\frac{n+a\cdot a^n}{n+a^n}\right\} = \left\{\frac{1+a\cdot\dfrac{a^n}{n}}{1+\dfrac{a^n}{n}}\right\} \to 1$$

  Por tanto, por el Criterio del Cociente para sucesiones, tenemos que:

$$\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right\} \to 1 \Longrightarrow \{\sqrt[n]{\alpha_n}\} \to 1$$

  Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = 1$$

- Si $a > 1$, tenemos que:

$$\left\{\frac{n + a \cdot a^n}{n + a^n}\right\} = \left\{\frac{\frac{n}{a^n} + a}{\frac{n}{a^n} + 1}\right\} \to a$$

puesto que $\left\{\frac{n}{a^n}\right\} \to 0$. Por tanto, por el Criterio del Cociente para sucesiones, tenemos que:

$$\left\{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right\} \to a \Longrightarrow \{\sqrt[n]{\alpha_n}\} \to a$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \frac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{\alpha_n}\}} = \frac{1}{a}$$

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n$ con $a \in \mathbb{C}$

Definimos la sucesión $\{\alpha_n\}$:

$$\alpha_n = a^{n^2}$$

Tenemos que:

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{|a|^{n^2}} = |a|^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, distinguimos en función de los valores de $|a|$:

- Si $|a| < 1$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = \infty$$

- Si $|a| = 1$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = 1$$

- Si $|a| > 1$, tenemos que:

$$\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} = \{|a|^n\}$$

Supongamos que dicha sucesión está mayorada; es decir, que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a|^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$|a|^n \leqslant M \iff n \ln|a| \leqslant \ln M \iff n \leqslant \frac{\ln M}{\ln|a|}$$

Tomando $N = \left\lceil \dfrac{\ln M}{\ln |a|} + 1 \right\rceil$, tenemos que $|a|^N \geqslant M$, lo que contradice la suposición. Por tanto, la sucesión no está mayorada.
Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$R = 0$$

Ejercicio 1.4.2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k \alpha_n z^n$ con $k \in \mathbb{N}$ fijo.

   Opción 1. Distinguir casos

   Definimos la sucesión $\{\beta_n\}$:

   $$\beta_n = n^k \alpha_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Sea $\widetilde{R}$ el radio de convergencia de la serie a estudiar. Distinguimos en función de los valores de R:

   - Si $R = 0$, tenemos que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ no está mayorada. Por tanto, la sucesión:

     $$\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{n^k|\alpha_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{n^k}\,\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$$

     Supongamos ahora que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\}$ está mayorada; es decir, que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sqrt[n]{n^k|\alpha_n|} \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $n \geqslant 1$:

     $$\sqrt[n]{n^k|\alpha_n|} \leqslant M \iff \sqrt[n]{|\alpha_n|} \leqslant \frac{M}{\sqrt[n]{n^k}} \leqslant M \iff \sqrt[n]{n^k} \geqslant 1 \iff n^k \geqslant 1$$

     Por tanto, llegamos a que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ está mayorada, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\}$ no está mayorada, por lo que:

     $$\widetilde{R} = R = 0$$

   - Si $R = \infty$, tenemos que $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} \to 0$. Calculemos en primer lugar el límite de la sucesión $\left\{\sqrt[n]{n^k}\right\}$ usando el criterio del cociente para sucesiones:

     $$\left\{\frac{(n+1)^k}{n^k}\right\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right\} \to 1^k = 1$$

     Por tanto, tenemos que $\left\{\sqrt[n]{n^k}\right\} \to 1$. Por tanto, la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\}$ es:

     $$\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{n^k}\,\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} \to 1 \cdot 0 = 0$$

     Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

     $$\widetilde{R} = \infty = R$$

- Si $R \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} = 1/R$.
  Aunque sí bien es cierto que el límite superior del producto de dos sucesiones acotadas no tiene por qué ser el producto de los límites superiores, si una de las sucesiones es convergente, entonces sí se cumple[1]. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\beta_n|} \right\} &= \limsup \left\{ \sqrt[n]{n^k} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} \cdot \limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

  Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\beta_n|} \right\}} = R$$

Opción 2. Emplear un lema teórico

Mediante inducción, demostraremos que, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la siguiente serie tiene radio de convergencia R:

$$\sum_{n\geqslant 1} n^k \alpha_n z^n$$

Comprobemos entonces dicha inducción:

- Caso base: $k = 0$. La serie a estudiar es la de partida (a excepción del primer término), por lo que el radio de convergencia es R.
- Hipótesis de inducción: Supongamos que la siguiente serie tiene radio de convergencia R:

$$\sum_{n\geqslant 1} n^k \alpha_n z^n$$

- Paso inductivo: Demostrémoslo para $k+1$. Por el Lema del Radio de Convergencia de la Serie derivada término a término, tenemos que el radio de la serie siguiente es R:

$$\sum_{n\geqslant 1} n \cdot n^k \alpha_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n^{k+1} \alpha_n z^{n-1}$$

  Al multiplicar el término general de una serie por un número $z \in \mathbb{C}^*$, el radio de convergencia se mantiene, puesto que:

$$\{\rho \in \mathbb{R}^+ : \{|\alpha_n|\rho^n\} \text{ está acotada}\} = \{\rho \in \mathbb{R}^+ : \{|z||\alpha_n|\rho^n\} \text{ está acotada}\}$$

  Por tanto, el radio de convergencia de la siguiente serie es R:

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{k+1} \alpha_n z^n$$

[1]Concepto que no demostramos por ser materia de Cálculo I.

Por tanto, por inducción, tenemos que el radio de convergencia de la serie a estudiar es R para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$

Definimos la sucesión $\{\beta_n\}$:

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $\widetilde{R}$ el radio de convergencia de la serie a estudiar. Distinguimos en función de los valores de R:

- Si $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, tenemos que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ está mayorada. Calculamos ahora el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por tanto, por el Criterio del Cociente para sucesiones, tenemos que:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right\} \to 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\frac{|\alpha_n|}{n!}}\right\} = \left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right\} \to 0$$

Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$\widetilde{R} = \infty$$

- Si $R = 0$, tenemos que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ no está mayorada. Por tanto, no podemos garantizar nada sobre $\widetilde{R}$, puesto que pueden darse las tres casuísticas. Veámoslo:
  - Si $\alpha_n = (n!)^2$, tenemos que:

$$\sqrt[n]{|\beta_n|} = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{n!}} = \sqrt[n]{n!}$$

Empleamos ahora el criterio del cociente para sucesiones:

$$\left\{\frac{(n+1)!}{n!}\right\} = \{(n+1)\}$$

Como la sucesión $\{(n+1)\}$ diverge positivamente, entonces la sucesión $\left\{\sqrt[n]{\beta_n}\right\} = \left\{\sqrt[n]{n!}\right\}$ también diverge positivamente. Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:

$$\widetilde{R} = 0$$

- Fijado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si $\alpha_n = \lambda^n n!$, tenemos que:
$$\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\frac{\lambda^n n!}{n!}}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\lambda^n}\right\} = \{\lambda\} \to \lambda$$
Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:
$$\widetilde{R} = \frac{1}{\lambda}$$
- Si $\alpha_n = \sqrt{n!}$, tenemos que:
$$\left\{\sqrt[n]{|\beta_n|}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n!}}{n!}}\right\} = \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n!}}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt[2n]{n!}}\right\} \to 0$$
Por tanto, por la Fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que:
$$\widetilde{R} = \infty$$

Ejercicio 1.4.3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Fijado $a \in \mathbb{C}$, definimos la siguiente función para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \alpha_n(z-a)^n \end{array}$$

Consideramos ahora la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$. Definimos el siguiente conjunto:
$$A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \alpha_n \neq 0\}$$

Veamos que la serie converge uniformemente en todo el plano si y solo si A es finito.

$\Longrightarrow$) Por el recíproco, supongamos que A es infinito; y veamos que la serie no converge uniformemente en todo el plano. Para ello, comprobaremos que el término general de la serie no converge uniformemente a la función nula en todo el plano.

Por reducción al absurdo, supongamos que el término general de la serie converge uniformemente a la función f nula en todo el plano. Consideramos la siguiente sucesión:
$$\begin{cases} z_n = 0 & \text{si } n \notin A \\ z_n = a + \left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{1/n} & \text{si } n \in A \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:
$$f_n(z_n) = \alpha_n(z_n - a)^n = \alpha_n \left(\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{1/n}\right)^n = \alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = 1 \qquad \forall n \in A$$

Por tanto, para todo $n \in A$, tenemos que:

$$f_n(z_n) - f(z_n) = 1 - 0 = 1$$

Como A es infinito, entonces tenemos que $\{f_n(z_n) - f(z_n)\}$ no converge puntualmente a la función nula en todo el plano, por lo que hemos llegado a una contradicción y el término general de la serie no converge uniformemente a la función nula en todo el plano. Por tanto, la serie no converge uniformemente en todo el plano.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que A es finito. Si $A = \emptyset$, entonces se tiene trivialmente la convergencia uniforme de la serie en todo el plano (a la función nula). Supongamos ahora que $A \neq \emptyset$. Sea entonces $m = 1 + \max A$ (podemos considerar el máximo, puesto que es finito). Por tanto:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \qquad n \geqslant m \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(z)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} 0 \cdot (z-a)^k\right| = 0 < \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, la serie converge uniformemente en todo el plano.

Ejercicio 1.4.4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z-1}{z+1} \end{array}$$

Por tanto, tenemos que nuestra serie a estudiar es:

$$\sum_{n \geqslant 0} (\varphi(z))^n$$

Estudiamos en primer lugar la convergencia absoluta de la serie geométrica de razón $\varphi(z)$. Sabemos que converge absolutamente (y por tanto puntualmente) en cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) \in D(0,1)$, mientras que no converge (ni puntualmente) en cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) \notin D(0,1)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(z) \in D(0,1) &\iff |\varphi(z)| < 1 \iff |z-1| < |z+1| \iff |z-1|^2 < |z+1|^2 \iff \\ &\iff (z-1)(\overline{z}-1) < (z+1)(\overline{z}+1) \iff \\ &\iff |z|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}(z) < |z|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Re}(z) \iff \mathrm{Re}(z) > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, definimos el siguiente conjunto:

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

Por tanto, la serie converge absolutamente (y por tanto puntualmente) en H, y no converge (ni puntualmente) en $\mathbb{C} \setminus H$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme de la serie, pudiendo hacerlo de dos formas distintas:

Opción 1. Razonemos en primer lugar sobre compactos. Sea $K \subset H$ compacto. Por ser φ continua, tenemos que $\varphi(K) \subset D(0,1)$ es compacto, por lo que la serie converge uniformemente en K.

Supongamos ahora $\emptyset \neq A \subset H$ no necesariamente compacto, y supongamos que la serie converge uniformemente en A. Por ser condición necesaria, tenemos que la sucesión $\{(\varphi(z))^n\}$ converge uniformemente a la función nula en A. Por los conocimientos sobre el término general de una serie geométrica, como esta converge uniformemente a la función nula en A tenemos que $r < 1$, donde r se define como:

$$r = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in A\} < 1$$

Por tanto, $\varphi(A) \subset \overline{D}(0,r)$. Veamos ahora que φ es inyectiva en H. Para ello, consideramos dos elementos $z_1, z_2 \in H$ tales que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \iff \frac{z_1-1}{z_1+1} = \frac{z_2-1}{z_2+1} &\iff (z_1-1)(z_2+1) = (z_2-1)(z_1+1) \iff \\
&\iff z_1z_2 + z_1 - z_2 - 1 = z_1z_2 + z_2 - z_1 - 1 \iff \\
&\iff z_1 - z_2 = z_2 - z_1 \iff z_1 = z_2
\end{aligned}$$

Por tanto, tomámos imágenes inversas, y llegamos a que:

$$A \subset \varphi^{-1}\left(\overline{D}(0,r)\right) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\varphi(z)| \leqslant r\}$$

Veamos cómo es este conjunto. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| \leqslant r &\iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant r \iff |z-1|^2 \leqslant r^2|z+1|^2 \iff \\
&\iff |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(z) \leqslant r^2(|z|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(z)) \iff \\
&\iff (1-r^2)|z|^2 + (1-r^2) - 2\operatorname{Re}(z)(1+r^2) \leqslant 0 \iff \\
&\iff |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(z) \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Consideramos ahora $z = x + iy \in \mathbb{C}$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x+iy)| \leqslant r &\iff x^2 + y^2 + 1 - 2x \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2} \leqslant 0 \iff \\
&\iff x^2 - 2x \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2} + \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 - \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + 1 \leqslant 0 \iff \\
&\iff \left(x - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$A \subset D := \overline{D}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}, \sqrt{\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 - 1}\right)$$

Este conjunto está bien definido puesto que:

$$\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 - 1 > 0 \iff 1+r^2 > 1-r^2 \iff r > 0$$

Veamos ahora que $D \subset H$. Para ello, consideramos $z \in D$, y tenemos que:

$$\begin{aligned} z \in D &\Longrightarrow \left| z - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| < \sqrt{\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 - 1} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow |z|^2 + \cancel{\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2} - 2 \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \operatorname{Re}(z) < \cancel{\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2} - 1 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \operatorname{Re}(z) > \left(|z|^2 + 1\right) \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1}{2} > 0 \Longrightarrow z \in H \end{aligned}$$

Por tanto, hemos llegado a que $A \subset D \subset H$, siendo D compacto. Por tanto, supuesto que la serie converge uniformemente en A, hemos llegado a que A está contenido en un compacto (en el cual ya sabíamos que la serie converge uniformemente). Por tanto, tenemos que, dado $A \subset H$:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n \text{ converge uniformemente en } A \iff \exists K \subset H \text{ compacto tal que } A \subset K$$

Opción 2. Como sabemos que:

$$\sum_{n \geqslant 0} z^n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq D(0,1) \iff \rho = \sup\{|z| \mid z \in B\} < 1$$

Vamos a tratar de probar que:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq H \iff \rho = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in B\} < 1$$

$\Longleftarrow$) Supuesto que $\rho < 1$, es fácil probar la convergencia uniforme de la serie en B:

$$|f_n(z)| = |\varphi(z)|^n \leqslant \rho^n \qquad \forall z \in B, n \in \mathbb{N}$$

Y sabemos que $\sum_{n \geqslant 0} \rho^n$ converge por ser $\rho < 1$. Por el Test de Weierstrass, tenemos que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en B.

$\Longrightarrow$) Supuesto que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en un conjunto $B \subseteq H$, por reducción al absurdo, supongamos que $\rho \geqslant 1$, en cuyo caso (por la definición de supremo), tendremos la existencia de una sucesión $\{|\varphi(z_n)|\}$ con $z_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\{|\varphi(z_n)|\} \to \rho \geqslant 1$$

En cuyo caso, para dicha sucesión tendremos que:

$$|f_n(z_n)| = |\varphi(z_n)|^n$$

Y esta sucesión no podrá converger a 0, por ser $\rho \geqslant 1$, lo que contradice que la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converja uniformemente en B, por no converger uniformemente su término general a 0 en B.

1.5. Funciones Elementales

Ejercicio 1.5.1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, y supongamos que f es derivable en z_0. Por ser derivable en z_0, tenemos que:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0)f(h) - f(z_0)}{h} = f(z_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad de f. Caben dos casos:

- $\underline{\text{Si } f(z_0) = 0}$, entonces:

  $$f(z) = f(z_0 + (z - z_0)) = f(z_0)f(z - z_0) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

  Por tanto, f es la función nula, por lo que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

- $\underline{\text{Si } f(z_0) \neq 0}$, entonces:

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \in \mathbb{C}$$

  Veamos ahora que f es entera. Fijado $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

  $$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z)f(h) - f(z)}{h} = f(z) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(z) \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$

  Por lo tanto, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

En cualquier caso, f es entera. Veamos ahora $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cumple la condición del enunciado si y sólo si, $f = 0$ o $f(z) = e^{\lambda z}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\Longrightarrow$) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, y sea $z_0 \in \mathbb{C}$, por lo que f es derivable en z_0. Por lo visto anteriormente, o bien f es la función nula, o bien $f(z_0) \neq 0$ y se tiene:

$$f'(z) = f(z) \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Definimos $\lambda = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \in \mathbb{C}$, y sea la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z)e^{-\lambda z} \end{array}$$

Sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, con:

$$g'(z) = f'(z)e^{-\lambda z} - \lambda f(z)e^{-\lambda z} = e^{-\lambda z}\left(f'(z) - \lambda f(z)\right) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, g es constante. Tenemos que:

$$g(0) = f(0)e^{-\lambda \cdot 0} = f(0)$$

Por lo que $g(z) = f(0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto lado, de la ecuación del enunciado, tenemos que:

$$f(z_0) = f(z_0 + 0) = f(z_0)f(0) \Longrightarrow f(0) = 1$$

Por tanto, g es la función constante 1, y se tiene que:

$$1 = g(z) = f(z)e^{-\lambda z} \Longrightarrow f(z) = e^{\lambda z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Longleftarrow$) Sea $f(z) = e^{\lambda z}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que:

$$f(z+w) = e^{\lambda(z+w)} = e^{\lambda z}e^{\lambda w} = f(z)f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Buscamos ahora un ejemplo de función que verifique la condición del enunciado y no sea entera. Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

Veamos en primer lugar que f verifica la condición del enunciado. Para ello, sea $z, w \in \mathbb{C}$, y tenemos que:

$$f(z+w) = e^{\overline{z+w}} = e^{\overline{z}+\overline{w}} = e^{\overline{z}}e^{\overline{w}} = f(z)f(w)$$

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, y definimos la exponencial:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{z} \end{array}$$

Como $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, se tiene que $fg \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos cuál es la función fg:

$$(fg)(z) = f(z)g(z) = e^{\overline{z}}e^{z} = e^{\overline{z}+z} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como $\mathbb{C}$ es un dominio y $\mathrm{Im}(fg) = 0$ constante, entonces fg es constante. No obstante, vemos que:

$$e^{2\cdot 2} = (fg)(2) \neq (fg)(0) = e^{2\cdot 0} = 1$$

Por tanto, fg no es constante, llegando a una contradicción. Por tanto, f no es entera, y se tiene lo buscado.

Ejercicio 1.5.2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $c < d$. Consideramos:

- La banda vertical siguiente:

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b\} = [a, b] \times \mathbb{R}$$

- La banda horizontal siguiente:

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : c \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant d\} = \mathbb{R} \times [c, d]$$

- El rectángulo siguiente:

$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b, c \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d] = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

Definimos ahora la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

Calculamos la imagen de cada uno de los dominios anteriores:

- La imagen de la banda vertical Ω_1 es:

$$\begin{aligned} f(\Omega_1) = \{e^z : z \in \Omega_1\} &= \{e^{x+iy} : a \leqslant x \leqslant b, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^x e^{iy} : a \leqslant x \leqslant b, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Veamos por doble inclusión que:

$$f(\Omega_1) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \in [e^a, e^b]\}$$

  $\subseteq$) Sea $w \in f(\Omega_1)$, entonces existe $x \in [a, b]$ y $y \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{x+iy}$. Por tanto, se tiene que:

$$|w| = |e^{x+iy}| = e^x \in [e^a, e^b]$$

  $\supseteq$) Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| \in [e^a, e^b]$. Entonces, y definimos $x = \ln |w|$, y $y = \arg w$. Por tanto, se tiene que:

$$f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w} = w$$

  Por tanto, $w \in f(\Omega_1)$.

  Por tanto, se tiene que $f(\Omega_1)$ es el anillo del plano complejo delimitado por las circunferencias de radio e^a y e^b centradas en el origen.

- La imagen de la banda horizontal Ω_2 es:

$$\begin{aligned} f(\Omega_2) &= \{e^z : z \in \Omega_2\} = \{e^{x+iy} : x \in \mathbb{R}, c \leqslant y \leqslant d\} \\ &= \{e^x e^{iy} : x \in \mathbb{R}, c \leqslant y \leqslant d\} = \\ &= \{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) : x \in \mathbb{R}, c \leqslant y \leqslant d\} \end{aligned}$$

  Vemos por tanto que $f(\Omega_2)$ son los puntos del plano complejo que forman un sector angular del plano complejo delimitado por el origen y los ángulos c y d. Si $[c, d]$ parametriza toda la circunferencia (es decir, $l(c, d) = d - c \geqslant 2\pi$), entonces $f(\Omega_2) = \mathbb{C}^*$. En caso contrario, será el sector angular correspondiente a la parametrización realidada por $[c, d]$.

- La imagen del rectángulo Ω_3 es:

$$f(\Omega_3) = f(\Omega_1 \cap \Omega_2) = f(\Omega_1) \cap f(\Omega_2)$$

  Por tanto, se trata de la región del plano compleja delimitada por las circunferencias de radio e^a y e^b, y los ángulos c y d. Si $l(c, d) \geqslant 2\pi$, entonces $f(\Omega_3) = f(\Omega_1)$. En caso contrario, se trata del sector angular delimitado por los ángulos c y d y las circunferencias de radio e^a y e^b.

Ejercicio 1.5.3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & r & \longmapsto & e^{re^{i\theta}} \end{array}$$

Tenemos que:

$$|\varphi(r)| = |e^{re^{i\theta}}| = e^{r\cos\theta}$$

Distinguimos casos:

- Si $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, entonces $\cos\theta > 0$, y se tiene que:

$$\lim_{r\to+\infty} |\varphi(r)| = \lim_{r\to+\infty} e^{r\cos\theta} = +\infty$$

  Por tanto, $\varphi(r) \to \infty$ cuando $r \to +\infty$.

- Si $\theta \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$, entonces $\cos\theta < 0$, y se tiene que:

$$\lim_{r\to+\infty} |\varphi(r)| = \lim_{r\to+\infty} e^{r\cos\theta} = 0$$

  Por tanto, $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi(r) = 0$.

- Si $\theta = \pm\pi/2$, entonces $\cos\theta = 0$, y se tiene que:

$$|\varphi(r)| = |e^{re^{i\theta}}| = e^{r\cos\theta} = e^0 = 1 \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, hemos de estudiar la función completa para ver si tiene límite. En este caso, se tiene que:

$$\varphi(r) = e^{re^{i\theta}} = e^{ir\,\mathrm{sen}\,\theta} \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Vemos fácilmente que no tendrá límite pues recorre la circunferencia de radio 1 centrada en el origen en sentido antihorario, pero demostrémoslo. Consideramos las dos siguientes sucesiónes:

$$\{r_n\} = \{2\pi n\} \quad \text{y} \quad \{s_n\} = \{(2n+1)\pi\}$$

Se tiene que $\{r_n\} \to +\infty$ y $\{s_n\} \to +\infty$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\{\varphi(r_n)\} &= \{e^{ir_n\,\mathrm{sen}\,\theta}\} = 1\\
\{\varphi(s_n)\} &= \{e^{is_n\,\mathrm{sen}\,\theta}\} = -1
\end{aligned}$$

Por tanto, por la unicidad del límite, se tiene que $\varphi(r)$ no tiene límite cuando $r \to +\infty$.

Ejercicio 1.5.4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n{}^{w_n}\} \to e^{\lambda}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que:

$$z_n^{w_n} = e^{w_n \log z_n}$$

Calculamos por tanto el límite de la sucesión $\{w_n \log z_n\}$. Como $\{z_n\} \to 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant n_0$, se tiene que $z_n \in D(1,1)$. Además, se tiene que:

$$\log z_n = \log 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(z_n - 1)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(z_n - 1)^m \qquad \forall n \geqslant n_0$$

De esta forma, para cada $n \geqslant n_0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
w_n \log z_n = w_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(z_n-1)^m &= w_n(z_n-1)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(z_n-1)^{m-1}\\
&= w_n(z_n-1)\left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(z_n-1)^{m-1}\right) =\\
&= w_n(z_n-1)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2}}{m+1}(z_n-1)^{m}\right)
\end{aligned}$$

Calculamos ahora el radio de convergencia de dicha serie de potencias.

$$\left\{\frac{(1)^{m+3}}{m+2} \cdot \frac{m+1}{(1)^{m+2}}\right\} = \left\{\frac{m+2}{m+1}\right\} \to 1$$

Por tanto, sabemos que dicha suma es continua en cada compacto $K \subset D(1,1)$, y por el carácter local de la continuidad se tiene que dicha suma es continua en $D(1,1)$. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2}}{m+1}(z_n-1)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2}}{m+1}\left(\lim_{n\to\infty}(z_n)-1\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2}}{m+1} \cdot 0^m = 0$$

Por tanto, como el límite de dos sucesiones convegentes es el producto de sus límites, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} w_n \log z_n = \lim_{n\to+\infty} w_n(z_n-1) \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2}}{m+1}(z_n-1)^m\right) = \lambda \cdot (1+0) = \lambda$$

Por tanto, como la exponencial es una función continua, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n^{w_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{w_n \log z_n} = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} w_n \log z_n\right) = e^\lambda$$

Ejercicio 1.5.5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-nz^2}$$

Definimos las funciones siguientes:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{-nz^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{-z^2} \end{array}$$

De esta forma, tenemos que la serie pedida es:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n(z) = \sum_{n\geqslant 0} e^{-nz^2} = \sum_{n\geqslant 0} \varphi(z)^n$$

Por tanto, estamos considerando una serie geométrica de razón $\varphi(z)$. En primer lugar, sabemos que esta converge puntualmente en $D(0,1)$.

$$|\varphi(z)| = \left|e^{-z^2}\right| = e^{\mathrm{Re}(-z^2)} = e^{-\mathrm{Re}(z^2)} = \exp(\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z)^2) < 1 \iff \mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z)^2 < 0$$

Definimos por tanto el siguiente conjunto:

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z)^2 < 0\}$$

Por lo conocido sobre la serie geométrica, sabemos que la serie converge absolutamente (y por tanto puntualmente) en H, y no converge (ni siquiera puntualmente) en $\mathbb{C} \setminus H$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme de la serie. Razonemos en primer lugar sobre compactos. Sea $K \subset H$ compacto. Entonces, por ser φ continua, se tiene que $\varphi(K) \subset D(0,1)$ es compacto. Por tanto, la serie converge uniformemente en K.

Supongamos ahora $\emptyset \neq A \subset H$ no necesariamente compacto. Veamos que la serie converge uniformemente en A si y solo si $r = \sup\{\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z)^2 : z \in A\} < 0$.

$\Longleftarrow)$ Supongamos que $r = \sup\{\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z)^2 : z \in A\} < 0$.

$$|\varphi(z)|^n = \left(\exp(\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z)^2)\right)^n \leqslant (e^r)^n \quad \forall z \in A$$

Como $r < 0$, se tiene que $e^r < 1$, y por tanto la serie geométrica $\sum\limits_{n\geqslant 0} (e^r)^n$ converge. Por tanto, por el Test de Weierstrass, se tiene que la serie converge uniformemente en A.

$\Longrightarrow)$ Como $A \subset H$, no es posible que $r > 0$. Por tanto, supongamos $r = 0$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in A$ tal que:

$$\operatorname{Im}(z_n)^2 - \operatorname{Re}(z_n)^2 > -\frac{1}{n}$$

Por tanto, se tiene que:

$$|\varphi(z_n)| = \exp(\operatorname{Im}(z_n)^2 - \operatorname{Re}(z_n)^2) > \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{\exp(-1/n)\} \to 1$, se tiene que $\{|\varphi(z_n)|\}$ no converge a 0. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi(z_n)^n$ no converge uniformemente en A.

A partir de lo anterior, vemos que la serie no converge uniformemente en H. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la sudeción siguiente:

$$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \subset H$$

Por un lado, tenemos que 0 es un mayorante de $\{\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z)^2 : z \in H\}$ y, además, se tiene que $\{\operatorname{Im}(z_n)^2 - \operatorname{Re}(z_n)^2\} = \{-1/n^2\} \to 0$, entonces:

$$\sup\{\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z)^2 : z \in H\} = 0$$

Por tanto, la serie no converge uniformemente en H.

Ejercicio 1.5.6. Dados $a, b, c \in \mathbb{T}$, probar que son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.

$\Longrightarrow)$ Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero. El origen del plano complejo es el centro $\mathbb{T}$, y por tanto también el centro del triángulo equilátero. Como el ángulo interior del triángulo equilátero es de $2\pi/3$, sabemos que:

$$\begin{aligned}\arg a + \frac{2\pi}{3} &\in \operatorname{Arg} b \\ \arg a + \frac{4\pi}{3} &\in \operatorname{Arg} c\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} a + b + c &= e^{i\arg a} + e^{i\left(\arg a + \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(\arg a + \frac{4\pi}{3}\right)} \\ &= e^{i\arg a}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) \\ &= e^{i\arg a}\left(1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= e^{i\arg a}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $a+b+c=0$, y buscamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que a, b, c sean raíces cúbicas. Es decir, buscamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que:

$$a^3 = \alpha = b^3 = c^3$$

Por tanto, para cada $z \in \{a, b, c\}$, buscamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que:

$$(z-a)(z-b)(z-c) = z^3 - \alpha$$

Calculamos el polinomio de la izquierda. Para cada $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(z-a)(z-b)(z-c) &= z^3 - (a+b+c)z^2 + (ab+bc+ca)z - abc \\ &= z^3 + (ab+bc+ca)z - abc\end{aligned}$$

Como $a, b, c \in \mathbb{T}$, se tiene que $|a| = |b| = |c| = 1$. Elevando al cuadrado, vemos que $\overline{a}a = \overline{b}b = \overline{c}c = 1$, y por tanto:

$$ab+bc+ca = \overline{c}cab+\overline{a}abc+\overline{b}babc = \left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)abc = \overline{a+b+c}\cdot abc = 0\cdot abc = 0$$

Por tanto, se tiene que:

$$(z-a)(z-b)(z-c) = z^3 - abc \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Evaluando en $z \in \{a, b, c\}$, se tiene que:

$$0 = a^3 - abc = b^3 - abc = c^3 - abc \Longrightarrow a^3 = b^3 = c^3 = abc$$

De esta forma, hemos visto que a, b, c son raíces cúbicas de $\alpha = abc$. Por tanto, como $[(abc)^{1/3}]$ es finito con tres elementos, se tiene que:

$$[(abc)^{1/3}] = \{a, b, c\}$$

Además, sabemos que $[(abc)^{1/3}]$ son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio $|abc| = 1$. Por tanto, forman un triángulo equilátero.

Ejercicio 1.5.7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.

Sea $a \in \Omega$. Buscamos calcular la derivada de φ en a, pero veamos antes que $\varphi(a) \neq 0$. En efecto, si $\varphi(a) = 0$, entonces se tiene que:

$$a = \varphi(a)^2 = \varphi(a)\cdot\varphi(a) = 0\cdot 0 = 0 \Longrightarrow a = 0 \notin \Omega \subset \mathbb{C}^*$$

Por tanto, $\varphi(a) \neq 0$. Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a} \overset{(*)}{=} \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{\varphi(z)^2-\varphi(a)^2} = \\ &= \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{(\varphi(z)-\varphi(a))(\varphi(z)+\varphi(a))} = \lim_{z\to a} \frac{1}{\varphi(z)+\varphi(a)} = \frac{1}{2\varphi(a)}\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $z \in \Omega \setminus \{a\}$ y $a \in \Omega$. Por tanto, $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\varphi(z)} \qquad \forall z \in \Omega$$

Ejercicio 1.5.8. Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$

Haciendo uso del Desarrollo en Serie ya conocido

En primer lugar, por el desarrollo en serie del logaritmo, sabemos que:

$$\log w = \log 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (w-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (w-1)^n \qquad \forall w \in D(1,1)$$

Sea ahora $z \in D(0,1)$, y definimos $w = 1+z \in D(1,1)$. Entonces, se tiene que:

$$\log(1+z) = \log w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (w-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Otra opción

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \log(1+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \end{array}$$

En primer lugar, veamos que g está bien definida, es decir, que la serie converge. Tenemos que:

$$\left\{ \frac{1^{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{1^{n+1}} \right\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \to 1$$

Por tanto, la serie converge absolutamente en $D(0,1)$.

Como $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$, en particular $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por otro lado, por el Teorema de Holomorfía de las funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Calculamos ambas derivadas para cada $z \in D(0,1)$:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

Como $|z| = |-z| < 1$, se tiene que $-z \in D(0,1)$, y por tanto dicha serie geométrica converge. Es decir:

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z} = f'(z) \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Como $D(0,1)$ es un dominio, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + \lambda$. Evaluando en 0, tenemos que $f(0) = 0 = g(0)$, luego $\lambda = 0$. Por tanto, se tiene que $f = g$ en $D(0,1)$ como queríamos probar.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z)$

Fijamos $z \in D(0,1)$. Entonces, por el primer apartado:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Como $-z \in D(0,1)$, se tiene que:

$$\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{n}$$

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccl} f: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} \end{array}$$

En primer lugar, veamos que g está bien definida, es decir, que la serie converge. Tenemos que:

$$\left\{ \frac{1}{(n+1)(2(n+1)+1)} \cdot \frac{n(2n+1)}{1} \right\} \to 1$$

Por tanto, la serie converge absolutamente en $D(0,1)$.

Como $\log \in \mathcal{H}(D(0,1))$, en particular $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por otro lado, por el Teorema de Holomorfía de las funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Calculamos ambas derivadas para cada $z \in D(0,1)$:

$$f'(z) = 2 - \log(1+z) - \frac{1+z}{1+z} - \log(1-z) - \frac{1-z}{1-z} = -\left(\log(1+z) + \log(1-z)\right) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n - \frac{z^n}{n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left((-1)^{n+1} - 1\right)$$
$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)z^{2n}}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$$

Buscamos ahora simplificar $f'(z)$, y para ello razonamos según la paridad de n. Si n es impar, entonces $n+1$ es par y dicho sumando se anula. Por tanto, tan solo quedan los sumandos pares. Es decir:

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n}\left((-1)^{2n+1}-1\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n}(-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$$

Por tanto, $f'(z) = g'(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Como $D(0,1)$ es un dominio, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + \lambda$. Evaluando en 0, tenemos que $f(0) = 0 = g(0)$, luego $\lambda = 0$. Por tanto, se tiene que $f = g$ en $D(0,1)$ como queríamos probar.

Ejercicio 1.5.9. Sea la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} \setminus \{1,-1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{array}$$

Probar que f es holomorfa en el dominio $W = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{array}{rccl} g: & W & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \\ & z & \longmapsto & \dfrac{1+z}{1-z} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & \log w \end{array}$$

Veamos en primer lugar que g está bien definida. Por reducción al absurdo, sea $z = x + iy \in W$ tal que $\exists \lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $g(z) = -\lambda$. Entonces, se tiene que:

$$\frac{1+x+iy}{1-x-iy} = -\lambda \Longrightarrow 1+x+iy = -\lambda(1-x-iy) \Longrightarrow \begin{cases} 1+x = -\lambda(1-x) \\ y = \lambda y \end{cases}$$

- Si $y \neq 0$, entonces $\lambda = 1$, y se tiene que:

$$1+x = x-1 \Longrightarrow 1 = -1 \qquad \text{(absurdo)}$$

- Si $y = 0$, entonces se tiene que $z = x \in \mathbb{R}$, y como $z \in W$, se tiene que $|x| < 1$. Por tanto, se tiene que:

$$\lambda = \frac{1+x}{x-1} < 0 \qquad \text{(absurdo)}$$

En cualquier caso, vemos que g no puede tomar valores reales negativos. Por tanto, se tiene que $g(z) \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, y por tanto h está bien definida. Sabemos que $g \in \mathcal{H}(W)$ por ser racional y $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$ por tratarse del logaritmo principal. Por tanto, por la regla de la cadena, tenemos que $f = h \circ g \in \mathcal{H}(W)$, con:

$$f'(z) = h'(g(z)) \cdot g'(z) = \frac{1}{g(z)} \cdot g'(z) = \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2} =$$
$$= \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1+z)(1-z)} = \frac{2}{1-z^2} \qquad \forall z \in W$$

Para comprobar ahora esa expresión como suma de serie de potencias, definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \end{array}$$

En primer lugar, veamos que g está bien definida, es decir, que la serie converge. Tenemos que:

$$\left\{ \frac{1}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{1} \right\} \to 1$$

Por tanto, la serie converge absolutamente en $D(0,1)$, y por tanto g está bien definida. Por el Teorema de Holomorfía de las funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Calculamos su derivada para cada $z \in D(0,1)$:

$$g'(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)z^{2n}}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n \overset{(*)}{=} \frac{2}{1-z^2} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como $|z| < 1$, se tiene que $|z^2| < 1$.

Por tanto, como $D(0,1) \subset W$ es un dominio, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + \lambda$. Evaluando en 0, tenemos que $f(0) = 0 = g(0)$, luego $\lambda = 0$. Por tanto, se tiene que $f = g$ en $D(0,1)$ como queríamos probar.

Ejercicio 1.5.10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$, y $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$. Consideramos los siguientes dominios:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$$
$$\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$$

Probar que la siguiente función define una biyección de Ω sobre el dominio Ω_ρ:

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \Omega_\rho \\ & z & \longmapsto & z^\rho \end{array}$$

Veamos en primer lugar que está bien definida. En efecto, sea $z \in \Omega$, entonces se tiene que:

$$f(z) = z^\rho = \exp(\rho \log z) = \exp\left(\rho\left(\log|z| + i\arg z\right)\right) = \exp\left(\rho\log|z| + i\rho\arg z\right)$$

Por tanto, $\rho \arg z \in \operatorname{Arg} f(z)$. Como $\alpha < \arg z < \beta$, se tiene que:

$$-\pi \leqslant \rho\alpha < \rho \arg z < \rho\beta \leqslant \pi$$

Por tanto, $\rho \arg z = \arg f(z)$. Por tanto, se tiene que:

$$\rho\alpha < \arg f(z) < \rho\beta \Longrightarrow f(z) \in \Omega_\rho$$

Por tanto, f está bien definida.

- Inyectividad

  Sea $z_1, z_2 \in \Omega$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} z_1^\rho = z_2^\rho \Longrightarrow \log(z_1^\rho) = \log(z_2^\rho) \Longrightarrow \ln|z_1^\rho| + i\arg(z_1^\rho) = \ln|z_2^\rho| + i\arg(z_2^\rho) \\ \Longrightarrow \rho\ln|z_1| + i\arg(z_1^\rho) = \rho\ln|z_2| + i\arg(z_2^\rho) \end{aligned}$$

  Igualando las partes reales, obtenemos:

$$|z_1^\rho| = |z_2^\rho| \Longrightarrow e^{\operatorname{Re}(\rho\log z_1)} = e^{\operatorname{Re}(\rho\log z_2)} \Longrightarrow \rho\ln|z_1| = \rho\ln|z_2| \Longrightarrow |z_1| = |z_2|$$

  Por otro lado, igualando las partes imaginarias, se tiene que:

$$\arg(z_1^\rho) = \arg(z_2^\rho) \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z_1^\rho) = \operatorname{Arg}(z_2^\rho) \Longrightarrow \rho\operatorname{Arg}(z_1) = \rho\operatorname{Arg}(z_2) \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(z_2)$$

  Por tanto, se tiene que $z_1 = z_2$. Por tanto, f es inyectiva.

- Sobreyectividad

  Dado $w \in \Omega_\rho$, consideramos $z = w^{1/\rho}$. Entonces, se tiene que:

$$z = w^{1/\rho} = \exp\left(\frac{\log w}{\rho}\right) = \exp\left(\frac{\ln|w| + i\arg w}{\rho}\right) \Longrightarrow \frac{\arg w}{\rho} \in \operatorname{Arg} z$$

  Además, como $\rho\alpha < \arg w < \rho\beta$, se tiene que:

$$-\pi \leqslant \alpha < \frac{\arg w}{\rho} < \beta \leqslant \pi \Longrightarrow \arg z = \frac{\arg w}{\rho} \Longrightarrow z \in \Omega$$

  Veamos ahora que $f(z) = w$. En efecto, se tiene que:

$$f(z) = z^\rho = \left(w^{1/\rho}\right)^\rho = w$$

  Por tanto, f es sobreyectiva.

Por tanto, f es biyectiva.

Ejercicio 1.5.11. Probar que el seno, el coseno y la tangente son funciones simplemente periódicas.

Comprobemos que el seno y el coseno son funciones simplemente periódicas, con periodo fundamental 2π. En primer lugar, tenemos que $\mathbb{C} + 2\pi = \mathbb{C}$. Además, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen} z \cos(2\pi) + \cos z \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} z \cdot 1 + \cos z \cdot 0 = \operatorname{sen} z \\
\cos(z + 2\pi) &= \cos z \cos(2\pi) - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(2\pi) = \cos z \cdot 1 - \operatorname{sen} z \cdot 0 = \cos z
\end{aligned}$$

Por tanto, 2π es un periodo de sen y cos. Sea ahora $w \in \mathbb{C}$ otro periodo. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \\
\cos z &= \cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w
\end{aligned}$$

Considerando las restricciones a $\mathbb{R}$, como $\{\operatorname{sen} z, \cos z\}$ son linealmente independientes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\cos w &= 1 \\
\operatorname{sen} w &= 0
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} w = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
e^{iw} = e^{-iw} \Longrightarrow e^{2iw} = 1 \Longrightarrow \exp(\operatorname{Re}(2iw)) = 1 \Longrightarrow \operatorname{Re}(2iw) = 0 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow -2\operatorname{Im}(w) = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im}(w) = 0 \Longrightarrow w \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por tanto, como $w \in \mathbb{R}$, conocemos sin problema las soluciones de dicho sistema. Se tiene que $w = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, 2π es el periodo fundamental de sen y cos, y por tanto son funciones simplemente periódicas.

Estudiamos ahora la función tangente. Sea Ω el dominio de la función tangente:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

De la última igualdad, se deduce que $\Omega + \pi = \Omega$. Además, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\tan(z + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{\operatorname{sen} z \cos(\pi) + \cos z \operatorname{sen}(\pi)}{\cos z \cos(\pi) - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(\pi)} = \frac{\operatorname{sen} z \cdot (-1) + \cos z \cdot 0}{\cos z \cdot (-1) - \operatorname{sen} z \cdot 0} = \tan z$$

Por tanto, π es un periodo de tan. Sea ahora $w \in \mathbb{C}$ otro periodo. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\tan z = \tan(z + w) = \frac{\operatorname{sen}(z + w)}{\cos(z + w)} = \frac{\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w}{\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \operatorname{sen} z \left(\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w\right) = \cos z \left(\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w\right) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \cancel{\operatorname{sen} z \cos z \cos w} - \operatorname{sen}^2 z \operatorname{sen} w = \cancel{\operatorname{sen} z \cos z \cos w} + \cos^2 z \operatorname{sen} w \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 0 = \operatorname{sen} w \left(\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z\right) = \operatorname{sen} w
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} w = 0$, vimos anteriormente que $w \in \mathbb{R}$. Por tanto, las soluciones de $\operatorname{sen} w = 0$ son $w = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, π es el periodo fundamental de tan, y por tanto es una función simplemente periódica.

Ejercicio 1.5.12. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$$

Definimos la siguiente función para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \end{array}$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$f_n(z) = \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i \cdot 2^n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{inz}}{2^n} - \frac{e^{-inz}}{2^n}\right) = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n - \left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n\right]$$

Buscamos ahora calcular $|f_n(z)|$. Para ello, antes vemos que:

$$\left|\frac{e^{iz}}{2}\right| = \frac{|e^{iz}|}{2} = \frac{\exp(\operatorname{Re}(iz))}{2} = \frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2}$$
$$\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right| = \frac{|e^{-iz}|}{2} = \frac{\exp(\operatorname{Re}(-iz))}{2} = \frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2}$$

Por tanto, empleando la desigualdad triangular en ambos sentidos, se tienen para todo $z \in \mathbb{C}$ las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n - \left(\frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n\right| \leqslant |f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n + \left(\frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n\right]$$

Antes de estudiar la convergencia absoluta y puntual, veremos cuándo convergen ambas series geométricas presentes en la desigualdad anterior. En efecto, tenemos que:

$$\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2} < 1 \iff \operatorname{Im}(z) > -\ln(2)$$
$$\frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2} < 1 \iff \operatorname{Im}(z) < \ln(2)$$

Veamos ahora que la serie converge absolutamente en el siguiente conjunto, mientras que no converge (ni siquiera puntualmente) en el resto de $\mathbb{C}$:

$$H = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im}(z) < \ln(2)\} = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \ln(2)\}$$

- Sea $z \in H$. Entonces, las siguientes series geométricas convergen, pues tienen razon cuyo valor absoluto es menor que 1:

  $$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n \text{ y } \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n$$

  Por tanto, la serie con término general la cota superior de $|f_n(z)|$ converge, y por el criterio de comparación de series en $\mathbb{R}$, se tiene que la serie de término de general $|f_n(z)|$ converge. Por tanto, la serie converge absolutamente (y en particular puntualmente) en H.

- Sea $z \in \mathbb{C} \setminus H$. Entonces, puede darse $\operatorname{Im}(z) > \ln(2)$ o $\operatorname{Im}(z) < -\ln(2)$. En ambos casos, una de las dos sucesiones geométricas de la cota inferior de $|f_n(z)|$ converge a 0, mientras que la otra converge a 1 o diverge positivamente. Por tanto, la cota inferior de $|f_n(z)|$ no converge a 0, y por tanto:

$$\{|f_n(z)|\} \not\to 0 \Longrightarrow \{f_n(z)\} \not\to 0$$

Por tanto, la serie de término general $f_n(z)$ no converge, y por tanto no hay convergencia puntual (y por tanto tampoco absoluta) en $\mathbb{C} \setminus H$.

Por tanto, hemos probado que la serie converge absolutamente (y en particular puntualmente) en H, y no converge (ni siquiera puntualmente) en $\mathbb{C} \setminus H$.

Estudiamos ahora la convergencia uniforme de la serie. Sea $\emptyset \neq \Omega \subset H$ un conjunto. Entonces, la serie converge uniformemente en Ω si y solo si

$$r = \sup\{|\operatorname{Im}(z)| : z \in \Omega\} < \ln(2)$$

$\Longleftarrow$) Buscamos aplicar el Test de Weierstrass:

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &\leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n + \left(\frac{\exp(\operatorname{Im}(z))}{2}\right)^n\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\exp(r)}{2}\right)^n + \left(\frac{\exp(r)}{2}\right)^n\right] \qquad \forall z \in \Omega \end{aligned}$$

Como $0 \leqslant r < \ln(2) < 1$, se tiene que ambas series geométricas de la cota superior (que ya no depende de z) convergen. Por el Test de Weierstrass, se tiene que la serie converge uniformemente en Ω.

$\Longrightarrow$) Como $\Omega \subset H$, no es posible $r > \ln(2)$. Supongamos $r = \ln(2)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in \Omega$ tal que:

$$|\operatorname{Im}(z_n)| > \ln(2) - \frac{1}{n}$$

Por tanto, para $n > 1$, como $\ln(2) > 1/2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |f_n(z_n)| &\geqslant \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\exp(-\operatorname{Im}(z_n))}{2}\right)^n - \left(\frac{\exp(\operatorname{Im}(z_n))}{2}\right)^n\right| > \\ &> \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\exp(-(\ln(2) - 1/n))}{2}\right)^n - \left(\frac{\exp(\ln(2) - 1/n)}{2}\right)^n\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\exp(\ln(2) - 1/n)}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2\exp(\ln(2) - 1/n)}\right)^n\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\exp(\ln(2))}{2\exp(1/n)}\right)^n - \left(\frac{\exp(1/n)}{2\exp(\ln(2))}\right)^n\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\exp(1/n)}\right)^n - \left(\frac{\exp(1/n)}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e} - \frac{e}{4^n}\right] \end{aligned}$$

Por tanto, vemos que $\{|f_n(z_n)|\} \not\to 0$. Por tanto, la serie no converge uniformemente en Ω.

A partir de esto, vemos varios resultados. En primer lugar, veamos que la serie no converge uniformemente en H. Definimos la siguiente sucesión:

$$\{z_n\} = \left\{i\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(2)\right\} \subset H$$

Entonces, se tiene que:

$$\{|\operatorname{Im}(z_n)|\} = \{\operatorname{Im}(z_n)\} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(2)\right\} \to \ln(2)$$

Como $\ln(2)$ es un mayorante de $\{|\operatorname{Im}(z)| : z \in H\}$ y $\{|\operatorname{Im}(z_n)|\} \to \ln(2)$, se tiene que $r = \ln(2)$. Por tanto, la serie no converge uniformemente en H.

Por otro lado, si $K \subset H$ es compacto, veamos que $r < \ln(2)$. Como $K \subset H$, no puede darse $r > \ln(2)$. Supongamos $r = \ln(2)$, y llegaremos a una contradicción. Como $r = \ln(2)$, existe una sucesión $\{z_n\} \subset K$ tal que:

$$\{|\operatorname{Im}(z_n)|\} \to \ln(2)$$

Como K es compacto y $\operatorname{Im}(z)$, $|\cdot|$ son continuas en $\mathbb{C}$, se tiene que $|\operatorname{Im}(K)|$ es compacto, y en particular cerrado. Por tanto, $\ln(2) \in |\operatorname{Im}(K)|$, y entonces existe $z_0 \in K$ tal que $|\operatorname{Im}(z_0)| = \ln(2)$, por lo que $z_0 \notin H$, en contradicción con que $K \subset H$. Por tanto, se tiene que $r < \ln(2)$ y la serie converge uniformemente en K.

Ejercicio 1.5.13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) = \arccos x$ para todo $x \in \left]-1, 1\right[$. Calcular la derivada de f.

Sea $z \in \Omega$, y veamos las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $\cos w = z$.

$$\cos w = z \iff \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw}+e^{-iw} = 2z \iff e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0 \iff$$
$$\iff \left(e^{iw}-z\right)^2 = z^2 - 1 \iff e^{iw} - z \in \left[(z^2-1)^{1/2}\right]$$

Como buscamos una función holomorfa, tan solo usaremos en la construcción funciones holomorfas, por lo que buscamos un elemento de dicho conjunto que sea holomorfo. Dado $z \in \Omega$, veamos que $z^2 - 1 \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$. Supongamos que $z^2 - 1 \in \mathbb{R}_0^+$. Entonces, $z^2 \in \mathbb{R}^+$, y por tanto:

$$2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg}(z^2) = 2\operatorname{Arg}(z) \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \pi\mathbb{Z} \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $z \in \mathbb{R}$ y $|z| < 1$. Entonces $z^2 - 1 = |z|^2 - 1 < 1 - 1 = 0$, por lo que llegamos a una contradicción y $z^2 - 1 \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$. Como la raíz cuadrada principal sabemos que es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, usamos que:

$$e^{iw} - z \in \left[(z^2-1)^{1/2}\right] \iff e^{iw} - z \in \left[(-1)^{1/2}\right]\left[(1-z^2)^{1/2}\right]$$

Consideramos ahora las raíces principales, sabiendo que $(-1)^{1/2} = \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$. Como $1 - z^2 \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ para todo $z \in \Omega$, esta es holomorfa en Ω. Por tanto:

$$e^{iw} = z + i\left(1-z^2\right)^{1/2} = z + i \cdot \exp\left(\frac{\log(1-z^2)}{2}\right) = z + i \cdot \exp\left(\frac{\ln|1-z^2| + i\arg(1-z^2)}{2}\right)$$

Por tanto, encontrar la raíz holomorfa se resume en encontrar un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$, y esto se tendrá si conseguimos un argumento continuo en dicho conjunto. Para ello, consideramos la función $\varphi \in C(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+)$ que nos da el Ejercicio 1.2.2, de forma que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$. A partir de él, definimos:

$$\begin{array}{rccl} \log_\varphi : & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \ln|z| + i\varphi(z) \end{array}$$

Entonces, se tiene que $\log_\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+)$ verificando $e^{\log_\varphi(z)} = z$ para cada valor de $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$, y por tanto $\log_\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+)$. Por último, definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} (\cdot)_\varphi^{1/2} : & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \exp\left(\frac{\log_\varphi(z)}{2}\right) \end{array}$$

Entonces, se tiene que $(z)_\varphi^{1/2} \in [z^{1/2}]$ para cada $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$ verificando además lo buscado, es decir, $(\cdot)_\varphi^{1/2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+)$. Por tanto, elegimos dicha raíz.

$$\begin{aligned} e^{iw} - z = \left(z^2-1\right)_\varphi^{1/2} \iff e^{iw} &= z + \left(z^2-1\right)_\varphi^{1/2} = z + \exp\left(\frac{\log_\varphi(z^2-1)}{2}\right) = \\ &= z + \exp\left(\frac{\ln|z^2-1| + i\varphi(z^2-1)}{2}\right) \iff \\ &\iff iw \in \operatorname{Log}\{z + \left(z^2-1\right)_\varphi^{1/2}\} \iff \\ &\iff w \in -i\operatorname{Log}\left\{z + \left(z^2-1\right)_\varphi^{1/2}\right\} \end{aligned}$$

Llegados a este punto, hemos de seleccionar un logaritmo holomorfo, pero sabemos que para ello basta con encontrar un argumento continuo de la función $z + (z^2-1)_\varphi^{1/2}$ en Ω.

Ejercicio 1.5.14. Para $z \in D(0,1)$ con $\operatorname{Re} z \neq 0$, probar que

$$\arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

Por el desarrollo en serie de potencias de la función arctan, vista en clase, hemos de probar que:

$$\arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \arctan(z) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} H_- &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\} \\ H_+ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \\ H &= H_+ \cup H_- \end{aligned}$$

Definimos ahora la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \arctan(z) \end{array}$$

Sea $z \in H = H_+ \cup H_-$, y supongamos que $\exists y \in \mathbb{R}$, con $|y| \geqslant 1$, tal que $1/z = iy$. Entonces, se tiene que:

$$\frac{1}{z} = iy \Longrightarrow z = \frac{1}{iy} = -\frac{i}{y} \Longrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Longrightarrow z \notin H$$

Por tanto, tenemos que $f \in \mathcal{H}(H)$. Calculamos su derivada:

$$f'(z) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{1+z^2} = 0 \qquad \forall z \in H$$

Por tanto, f es constante en cada una de las componentes conexas de H; es decir, en H_+ y H_-. Por tanto:

$$\begin{array}{l} f(z) = f(1) = 2\arctan(1) = \pi/2 \quad \forall z \in H_+ \\ f(z) = f(-1) = 2\arctan(-1) = -\pi/2 \quad \forall z \in H_- \end{array}$$

Por tanto, se tiene demostrado lo pedido.

1.6. Integral Curvilínea

Ejercicio 1.6.1. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que

$$\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha+s)ds$$

para cualquier función $f \in C([\alpha, \alpha+r]^*)$. ¿Cual es la igualdad análoga para un segmento vertical?

El segmento horizontal $[\alpha, \alpha+r]$ viene dado por el siguiente arco:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & (1-t)\alpha + t(\alpha+r) = \alpha + tr \end{array}$$

Por tanto, por la definición de integral sobre un arco, tenemos que:

$$\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)dz = \int_0^1 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_0^1 f(\alpha+tr)rdt$$

Aplicamos ahora el siguiente cambio de variable:

$$\left[\begin{array}{c} s = rt \\ ds = rdt \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} s = 0 & \text{si } t = 0 \\ s = r & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la integral queda:

$$\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha+s)ds$$

El segmento vertical $[\alpha, \alpha+ir]$ viene dado por el siguiente arco:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & (1-t)\alpha + t(\alpha+ir) = \alpha + it\cdot r \end{array}$$

Por tanto, por la definición de integral sobre un arco, tenemos que:

$$\int_{[\alpha,\alpha+ir]} f(z)dz = \int_0^1 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_0^1 f(\alpha+it\cdot r)irdt$$

De nuevo, aplicamos ahora el mismo cambio de variable. Notemos que no es válido $s = itr$, puesto que la función de cambio de variable debe ser una función real de variable real. Por tanto, usando el mismo cambio de variable que antes, tenemos que:

$$\int_{[\alpha,\alpha+ir]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha+is)ids = i\int_0^r f(\alpha+is)ds$$

Ejercicio 1.6.2. Para $r \in]1, +\infty[$ se define

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3+1} dz \quad \text{y} \quad J(r) = \int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1} dz$$

donde $\gamma_r = C(0,r)$ y $\sigma_r = [-r, -r+i]$. Probar que

$$\lim_{r\to+\infty} I(r) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r\to+\infty} J(r) = 0.$$

Trabajamos en primer lugar con la integral $I(r)$.

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3+1} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{(re^{it})^3+1} \cdot ire^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(re^{it})^2}{(re^{it})^3+1} dt$$

Buscamos acotar ahora dicha integral:

$$|I(r)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(re^{it})^2}{(re^{it})^3+1} \right| dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|re^{it}|^2}{||re^{it}|^3 - |1||} dt \overset{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2}{|r^3-1|} dt$$

donde en $(*)$ se ha empleado que $|e^{it}| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $r > 1$ entonces $r^3 > 1$, por lo que:

$$|I(r)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2}{r^3-1} dt = 2\pi \cdot \frac{r^2}{r^3-1}$$

Por el Lema del Sándwhich tomando límite cuando $r \to +\infty$, deducimos que:

$$\lim_{r\to+\infty} |I(r)| = 0 \Longrightarrow \lim_{r\to+\infty} I(r) = 0$$

Trabajamos ahora con la integral $J(r)$. Fijado r, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \sigma_r^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{z^2 e^z}{z+1} \end{array}$$

Calculemos una cota de $||f||_\infty$. Dado $z \in \sigma_r^*$, este será de la forma $z = -r + ti$ con $t \in [0,1]$. Por tanto:

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2 e^z}{z+1} \right| = \frac{|z|^2 |e^z|}{|z+1|} \leqslant \frac{(r^2+1)e^{-r}}{||z|-1|} \leqslant \frac{(r^2+1)e^{-r}}{\sqrt{r^2}-1} = \frac{(r^2+1)e^{-r}}{r-1}$$

Por tanto, como $l(\sigma_r^*) = |i| = 1$, tenemos que:

$$|J(r)| = \left| \int_{\sigma_r^*} f(z) dz \right| \leqslant ||f||_\infty \cdot l(\sigma_r^*) \leqslant \frac{(r^2+1)e^{-r}}{r-1} = \frac{1}{r-1} \cdot (r^2+1)e^{-r}$$

Por tanto, por el Lema del Sándwhich tomando límite cuando $r \to +\infty$, deducimos que:

$$\lim_{r\to+\infty} |J(r)| = 0 \Longrightarrow \lim_{r\to+\infty} J(r) = 0$$

Ejercicio 1.6.3. Para todo $r \in]0,1[$, probar que

$$\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0$$

y deducir que

$$\int_0^\pi \log(1+r^2+2r\cos t)dt = 0.$$

Opción Rutinaria:

Usando el arco de la circunferencia $C(0,r)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \log(1+re^{it})\ dt = \\
&= i\left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|\ dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \arg(1+re^{it})\ dt\right) = \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} \arg(1+re^{it})\ dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|\ dt
\end{aligned}$$

Como vemos, calcular dicha integral no es sencillo, por lo que descartamos esta opción.

Desarrollo en Serie:

Por el Ejercicio 1.5.8, sabemos que:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Definimos ahora la función:

$$\begin{aligned}
f:\ D(0,1)\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
z &\longmapsto \frac{\log(1+z)}{z}
\end{aligned}$$

Por dicho desarrollo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{\log(1+z)}{z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

Definimos ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned}
F:\ D(0,1)\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
z &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} z^{n+1}
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Holomorfía de las funciones dadas como suma de serie de potencias, $F \in \mathcal{H}(D(0,1) \setminus \{0\})$, con:

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in D(0,1) \setminus \{0\}$$

Por tanto, F es una primitiva de f. Como $C(0,r)$ es un camino cerrado en $D(0,1) \setminus \{0\}$ $(0 < r < 1)$, por el Teorema de Caracterización de existencia de primitivas, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} f(z)dz = 0$$

Opción Mezclada:

Como vimos en la primera opción, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} i\log(1+re^{it})\ dt$$

Como $r \in]0,1[$ y $e^{it} \in \mathbb{T}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $re^{it} \in D(0,1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} i\log(1+re^{it})\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (re^{it})^n \right)\ dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot nr^n e^{int} \right)\ dt\end{aligned}$$

Por lo demostrado en la Subsección 1.6.1, como sabemos que la serie converge uniformemente, podemos permutar la integral con la suma de la serie:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot inr^n e^{int}\ dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot r^n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} ine^{int}\ dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot r^n \cdot \left(e^{i\pi n} - e^{-i\pi n}\right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot r^n \cdot 0 \right) = 0\end{aligned}$$

En resumen, por cualquier opción hemos demostrado que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0$$

Por la Opción Rutinaria, vemos por tanto que:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\sqrt{(1+r\cos t)^2 + (r \operatorname{sen} t)^2}\right)\ dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\sqrt{1+r^2+2r\cos t}\right)\ dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+r^2+2r\cos t\right)\ dt\end{aligned}$$

Como la función $t \mapsto \ln(1 + r^2 + 2r\cos t)$ es par, tenemos que:

$$0 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + r^2 + 2r\cos t\right)\, dt = \int_{0}^{\pi} \ln\left(1 + r^2 + 2r\cos t\right)\, dt$$

como se quería demostrar. Vemos que, habiendo uso de variable compleja, hemos logrado resolver una integral real que, de por si, no es trivial de resolver.

Ejercicio 1.6.4. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Admitiendo que f' es continua, probar que

$$\int_{C(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \qquad \forall r \in \left]0,1\right[.$$

Definimos la función:

$$\begin{array}{rccl} F: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \log(f(z)) \end{array}$$

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists z_0 \in D(0,1)$ tal que $f(z_0) \in \mathbb{R}_0^-$. Entonces, $f(z_0) - 1 \in \mathbb{R}$, con $f(z_0) - 1 < -1$, luego $|f(z_0) - 1| > 1$, lo que es una contradicción. Por tanto, $f(z) \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ para todo $z \in D(0,1)$. Como se tiene $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$, tenemos que $F \in \mathcal{H}(D(0,1))$, con:

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por tanto, F es una primitiva de f'. Como $C(0,r)$ es un camino cerrado en $D(0,1)$ para todo $r \in \left]0,1\right[$, por el Teorema de Caracterización de existencia de primitivas, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} f(z) dz = 0 \qquad \forall r \in \left]0,1\right[$$

Ejercicio 1.6.5. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{1+z^2} \end{array}$$

Probar que f no admite una primitiva en Ω.

Por el Teorema de Caracterización de existencia de primitivas, como Ω es un abierto no vacío y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, hemos de encontrar un camino cerrado σ en Ω tal que:

$$\int_{\sigma} f(z) dz \neq 0$$

En primer lugar, por el método de descomposición en fracciones simples, tenemos que:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{A(z+i) + B(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

- Si $z = i$: $1 = 2iA \Longrightarrow A = 1/2i$.
- Si $z = -i$: $1 = -2iB \Longrightarrow B = -1/2i$.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_\sigma f(z)dz = \frac{1}{2i}\left(\int_\sigma \frac{dz}{z-i} - \int_\sigma \frac{dz}{z+i}\right)$$

Con vistas a calcular dicha integral, consideramos como camino cerrado la circunferencia $C(i,1)$:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \Omega \\ & t & \longmapsto & i+e^{it} \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que:

$$\int_{C(i,1)} \frac{dz}{z-i} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)-i}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i$$

En segundo lugar, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{C(i,1)} \frac{dz}{z+i} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)+i}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}+2i}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}\cdot\overline{e^{it}+2i}}{(e^{it}+2i)\cdot\overline{e^{it}+2i}}dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}\cdot\left(\overline{e^{it}}+\overline{2i}\right)}{|e^{it}+2i|^2}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i-2i^2e^{it}}{\cos^2 t+(2+\operatorname{sen} t)^2}dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}+i}{\cos^2 t+4+\operatorname{sen}^2 t+4\operatorname{sen} t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}+i}{5+4\operatorname{sen} t}dt = \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos t}{5+4\operatorname{sen} t}dt\right) + i\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t}dt\right)
\end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos t}{5+4\operatorname{sen} t}dt = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t}{5+4\operatorname{sen} t}dt = \frac{1}{2}\cdot[\ln(5+4\operatorname{sen} t)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Calcular la segunda integral no es directo, por lo que vamos a intentar evitarlo. Tenemmos que:

$$\begin{aligned}
0 = \int_\sigma f(z)dz &\iff \frac{1}{2i}\left(\int_\sigma \frac{dz}{z-i} - \int_\sigma \frac{dz}{z+i}\right) = 0 \iff \\
&\iff \frac{1}{2i}\left(2\pi i - \int_\sigma \frac{dz}{z+i}\right) = 0 \iff \\
&\iff \int_\sigma \frac{dz}{z+i} = i\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t}dt\right) = 2\pi i
\end{aligned}$$

Por tanto, esto solo se dará si:

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t}dt$$

Para todo $t \in [-\pi, \pi]$, tenemos que:

$$\frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2+4\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t} \leqslant \frac{1}{2} \iff \frac{2+4\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t} \leqslant 1 \overset{(*)}{\iff} 2+4\operatorname{sen} t \leqslant 5+4\operatorname{sen} t \iff 2 \leqslant 5$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $5 \geqslant -4\operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t} dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

Por tanto:

$$2\pi \neq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen} t}{5+4\operatorname{sen} t} dt \Longrightarrow \int_\sigma f(z)dz \neq 0$$

Por tanto, se ha encontrado un camino cerrado σ en Ω tal que su integral no es nula. Por el Teorema de Caracterización de existencia de primitivas, deducimos que f no admite una primitiva en Ω.

Ejercicio 1.6.6. Probar que

$$\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2} = 0,$$

donde $\sigma(t) = \cos t + {}^{i}\!/\!_{2} \cdot \operatorname{sen} t$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Método Rutinario:

Por definición de integral sobre un arco, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sigma'(t)}{1+\sigma(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-\operatorname{sen} t + i/2 \cdot \cos t)}{1+(\cos t + i/2\cdot \operatorname{sen} t)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t + i/2 \cdot \cos t}{1+\cos^2 t - 1/4 \operatorname{sen}^2 t + i \operatorname{sen} t \cos t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t + i/2\cdot\cos t}{2 - 5/4 \operatorname{sen}^2 t + i\operatorname{sen} t\cos t} dt\end{aligned}$$

Como preveíamos, la integral no es trivial de resolver. Por tanto, descartamos esta opción.

Método Alternativo:

Sea U el siguiente conjunto:

$$U = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \geqslant 1\}$$

Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} F: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \arctan z \end{array}$$

Sabemos que $F \in \mathcal{H}(U)$, con:

$$F'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in U$$

Por tanto, F es una primitiva de $\frac{1}{1+z^2}$. Vemos además que σ es un camino cerrado, por lo que hemos de ver que $\sigma([0, 2\pi]) \subset U$.

- Si $t \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, entonces $\cos t \neq 0$, y por tanto $\operatorname{Re}(\sigma(t)) \neq 0$. Por tanto, $\sigma(t) \in U$.
- Si $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, entonces $|\operatorname{Im}(\sigma(t))| = |\operatorname{sen} t| = |{}^1\!/\!_2| < 1$, y por tanto $\sigma(t) \in U$.

Por tanto, σ es un camino cerrado en U. Como el integrando es continuo en Ω, por el Teorema de Caracterización de existencia de primitivas, tenemos que:

$$\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2} = 0$$

como se quería demostrar.

1.6.1. Sobre la convergencia uniforme de la integral de Cauchy

Al igual que ocurría en el caso real, la convergencia uniforme de sucesiones de funciones continuas definidas en intervalos compactos nos permiten permutar la integral con el límite puntual de una sucesión de funciones. En particular, podemos permutar una integral con la suma de una serie de funciones continuas siempre que tengamos convergencia uniforme en un intervalo compacto:

Teorema 1.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente en $[a, b]$ a $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ y que $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que*

$$\left\{\int_a^b f_n(t)\,dt\right\} \to \int_a^b f(t)\,dt$$

En particular, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ y $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right)\,dt$$

Demostración. En primer lugar, observamos que la integral del miembro derecho tiene perfecto sentido, ya que la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[a, b]$ nos garantiza la continuidad de f en dicho intervalo.

Dado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ nos dice que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant m \Longrightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall t \in [a, b]$$

Por tanto, para $n \geqslant m$ se tiene que

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon$$

lo que demuestra que $\left\{\int_a^b f_n(t)\,dt\right\} \to \int_a^b f(t)\,dt$.

Por otra parte, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$, escribiendo $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{S_n\}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente en $[a, b]$, por lo que aplicando lo que acabamos de demostrar:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right)\,dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(t)\,dt\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

como se quería demostrar. □

1.7. Teorema local de Cauchy

Ejercicio 1.7.1. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que, para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r$, se tiene:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

Opción 1 Consideramos el conjunto $\Omega = D(a, |z-a|)$, que es un abierto que contiene a $C(a,r)^*$. Veamos en primer lugar que $z-w$ no se anula en Ω. Para ello, supongamos que $w \in \Omega$, entonces:

$$|w-a| < |z-a| = |z-w+w-a| \leqslant |z-w|+|w-a| \Longrightarrow 0 < |z-w| \Longrightarrow z-w \neq 0.$$

Por tanto, definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & \frac{1}{w-z} \end{array}$$

Como f es racional, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Ω es estrellado, entonces admite una primitiva $F : \Omega \to \mathbb{C}$, que es holomorfa en Ω. Como $C(a,r)$ es un camino cerrado contenido en Ω, se tiene que:

$$\int_{C(a,r)} f(w)\, dw = \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

Opción 2 Como se trata de una integral sobre un camino cerrado igualada a 0, podríamos buscar una primitiva del integrando holomorfa en un abierto que contenga a $C(a,r)^*$. Sea dicho abierto el conjunto $\Omega = D(a, |z-a|)$, de forma que $C(a,r)^* \subset \Omega$, y veamos que $z-w$ admite un argumento continuo en Ω. Veamos en primer lugar que $z-w$ no se anula en Ω. Para ello, supongamos que $w \in \Omega$, entonces:

$$|w-a| < |z-a| = |z-w+w-a| \leqslant |z-w|+|w-a| \Longrightarrow 0 < |z-w| \Longrightarrow z-w \neq 0.$$

Por tanto, podemos considerar un argumento de $z-w$ en Ω. Veamos que $z-w$ admite un argumento continuo en Ω. Para ello, y en vistas de usar el Ejercicio 1.2.2, veamos que o bien nunca toma valores en $\mathbb{R}^+$, o bien nunca toma valores en $\mathbb{R}^-$. Supongamos que toma valores en ambos conjuntos; es decir, supongamos que $\exists w, w' \in \Omega$ tal que $w-z \in \mathbb{R}^+$ y $w'-z \in \mathbb{R}^-$. Entonces:

$$w-z \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} w > \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z \end{array} \right.$$
$$w'-z \in \mathbb{R}^- \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} w' < \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} w' = \operatorname{Im} z \end{array} \right.$$

Por tanto, se tiene que:

$$\operatorname{Re} w' < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$$
$$\operatorname{Im} w' = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$$

Llegados a este punto, uno ya puede ver gráficamente que hemos llegado a una contradicción, puesto que w y w' no pueden estar ammbos en $D(a, |z-a|)$, pero veámoslo formalmente. Como $w \in \Omega$, se tiene que:

$$|w-a| < |z-a| \Longrightarrow (\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} a)^2 < (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a)^2$$

Como $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} a)^2 < (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a)^2 &\Longrightarrow |\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} a| < |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \operatorname{Re} a - |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| < \operatorname{Re} w < \operatorname{Re} a + |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a|\end{aligned}$$

Realizamos el procedimiento análogo para w', llegando por tanto a que:

$$\operatorname{Re} a - |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| < \operatorname{Re} w, \operatorname{Re} w' < \operatorname{Re} a + |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a|$$

- Si $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| \geqslant 0$, se tiene que $\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} z$.
- Si $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| < 0$, se tiene que $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w'$.

En cualquier caso, se llega a una contradicción, por lo que $z - w$ no puede tomar valores en ambos conjuntos. Por tanto, $z - w$ admite un argumento continuo en Ω, por lo que se puede considerar un logaritmo continuo en Ω de $z - w$ (función holomorfa en Ω). Por tanto, existe un logaritmo holomorfo de $z - w$ en Ω (llamémosle $F : \Omega \to \mathbb{C}$), de forma que:

$$F'(w) = \frac{1}{w-z} \qquad \forall w \in \Omega.$$

Como $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una primitiva del integrando (siendo este una función continua en Ω por no anularse el denominador) y $C(a, r)$ es un camino cerrado contenido en Ω, se tiene que:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

Opción 3 Como $z \neq a$, tenemos que:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+a-z} \cdot \frac{a-z}{a-z} = \frac{1}{a-z} \cdot \frac{1}{1+\frac{w-a}{a-z}} = \frac{1}{a-z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{w-a}{a-z}\right)} \qquad \forall w \neq z$$

Por tando, para cada $w \in C(a, r)^*$, consideramos la siguiente serrie geométrica:

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{w-a}{a-z}\right)^n$$

Tenemos que:

$$\left|\left(-\frac{w-a}{a-z}\right)^n\right| = \left(\frac{r}{|a-z|}\right)^n \qquad \forall w \in C(a, r)^*$$

Por tanto, como $|a-z|>r$, por el Test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en $C(a,r)^*$. Por tanto, podemos intercambiar la integral y la suma:

$$\begin{aligned}
\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} &= \int_{C(a,r)} \frac{1}{a-z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w-a}{a-z}\right)^n dw\\
&= \frac{1}{a-z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\int_{C(a,r)}\left(-\frac{w-a}{a-z}\right)^n dw\\
&= \frac{1}{a-z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{a-z}\right)^n\int_{C(a,r)}(w-a)^n\, dw\\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{a-z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{a-z}\right)^n\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que la función $w\mapsto(w-a)^n$ es entera y admite primitiva en $\mathbb{C}$, por lo que la integral sobre un camino cerrado es 0.

Opción 4 Buscamos aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia. Buscamos un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ de forma que $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$, por lo que sea $\Omega = D(a,|z-a|)$. Como $z\notin D(a,r)$, hemos de buscar una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ de forma que:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{f(w)}{w-a}\qquad \forall w\in D(a,r)$$

Vemos por tanto la expresión de $f(w)$. Por tanto, formalmente, definimos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & w & \longmapsto & \dfrac{w-a}{w-z}\end{array}$$

Como f es racional y el denominador no se anula en Ω, se tiene que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Como $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$, estamos en las condiciones de aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$$\begin{aligned}
\int_{C(a,r)}\frac{dw}{w-z} &= \int_{C(a,r)}\frac{f(w)}{w-a}\,dw = 2\pi i\cdot f(a)\\
&= 2\pi i\cdot\frac{a-a}{a-z} = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.7.2 (Versión más general de la fórmula de Cauchy)**.** Sean $a\in\mathbb{C}$, $R\in\mathbb{R}^+$ y $f:\overline{D}(a,R)\to\mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(a,R)$ y holomorfa en $D(a,R)$. Se tiene entonces:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}dw\qquad \forall z\in D(a,R).$$

Fijado $z\in D(a,R)$, construimos la sucesión $\{r_n\}$ como sigue:

$$\{r_n\}=\left\{|z-a|+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)(R-|z-a|)\right\}$$

Es necesario probar que $z\in D(a,r_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y que $\{r_n\}\to R$.

1. <u>$z \in D(a, r_1)$</u>:

$$|z-a| < r_1 = |z-a| + \frac{1}{2} \cdot (R - |z-a|) \iff |z-a| < R \iff z \in D(a, R)$$

2. <u>r_n es creciente</u>:

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)(R-|z-a|) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(R-|z-a|) = \\ = (R-|z-a|) \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ = (R-|z-a|) \cdot \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \\ = (R-|z-a|) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

3. Con los dos apartados anteriores, vemos que:

$$|z-a| < r_1 < r_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $z \in D(a, r_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. <u>Convergencia de la sucesión</u>:

$$\{r_n\} \to |z-a| + R - |z-a| = R$$

Por tanto, hemos logrado lo buscado. Definimos ahora la función del integrando:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \overline{D}(a, R) \setminus D(a, |z-a|) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & \dfrac{f(w)}{w-z} \end{array}$$

Definimos además la parametrización φ_n de $C(a, r_n)$ como:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_n: & [-\pi, \pi] & \longrightarrow & C(a, r_n)^* \\ & t & \longmapsto & a + r_n e^{it} \end{array}$$

Además, la parametrización φ de $C(a, R)$ la definimos como:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & [-\pi, \pi] & \longrightarrow & C(a, R)^* \\ & t & \longmapsto & a + Re^{it} \end{array}$$

Es directo ver que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ puntualmente en $[-\pi, \pi]$, por lo que:

$$\int_{C(a,R)} g(w)\, dw = \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} g(\varphi_n(t)) \cdot \varphi_n'(t) dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi_n(t)) \cdot \varphi_n'(t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_{C(a,r_n)} g(w)\, dw = \lim_{n\to\infty} \int_{C(a,r_n)} \frac{f(w)}{w-z} dw \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} 2\pi i \cdot f(z) = 2\pi i \cdot f(z)$$

donde en $(*)$ hemos empleado la fórmula de Cauchy para la circunferencia, usando que $f \in \mathcal{H}(\overline{D}(a,R))$ y que $z \in D(a,R)$. Tan solo faltaría por tanto demostrar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} g(\varphi_n(t)) \cdot \varphi_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi_n(t)) \cdot \varphi_n'(t)dt$$

Por tanto, hemos de probar que $\{(g \circ \varphi_n) \cdot \varphi_n'\} \xrightarrow{\text{c.u.}} (g \circ \varphi) \cdot \varphi'$ en $[-\pi, \pi]$. Para ello, definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rrcl} h: & [r_1, R] \times [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (r,t) & \longmapsto & g(a + re^{it}) \cdot ire^{it} \end{array}$$

Como h es composición y producto de funciones continuas, tenemos que h es continua en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, y por el Teorema de Heine h es uniformemente continua. Para todo $t \in [-\pi, \pi]$, se tiene:

$$\{\|(r_n, t) - (R, t)\|\} = \{|r_n - R|\} \to 0$$

Usando eso junto con la continuidad uniforme de h, tenemos que:

$$\{|h(r_n, t) - h(R, t)|\} = \{|[(g \circ \varphi_n) \cdot \varphi_n'](t) - [(g \circ \varphi) \cdot \varphi'](t)|\} \to 0$$

Por tanto, para toda sucesión $\{t_n\}$ de puntos de $[-\pi, \pi]$, se tiene que:

$$\{|[(g \circ \varphi_n) \cdot \varphi_n'](t) - [(g \circ \varphi) \cdot \varphi'](t)|\} \to 0$$

y se tiene por tanto la convergencia uniforme buscada.

Ejercicio 1.7.3. Dados $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $b, c \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$, calcular todos los posibles valores de la integral

$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$$

dependiendo de la posición relativa de b, c respecto de la circunferencia $C(a,r)^*$.

Caben varias posibilidades:

1. Si $b = c$: En este caso, la integral queda:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)^2}$$

El integrando es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, que admite igualmente primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{b\}$. Como $C(a,r)$ es un camino cerrado con $b \notin C(a,r)$, se tiene que:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)^2} = 0$$

2. Si $b \neq c$: En este caso, descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{A}{z-b} + \frac{B}{z-c} = \frac{A(z-c) + B(z-b)}{(z-b)(z-c)}$$

- Para $z = b$: $1 = A(b - c)$.
- Para $z = c$: $1 = B(c - b)$.

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}\right)$$

Por tanto, la integral queda:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}\right)$$

Distinguimos casos, teniendo en cuenta que $b, c \notin C(a,r)*$:

a) Si $b, c \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$: En este caso, por el Ejercicio 1.7.1, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} &= \frac{1}{b-c}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}\right)\\ &= \frac{1}{b-c}(0-0) = 0\end{aligned}$$

b) Si $b, c \in D(a,r)$: En este caso, aplicamos la Fórmula de Cauchy para la circunferencia con $\Omega = \mathbb{C}$ y con función f constantemente igual a 1. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} &= \frac{1}{b-c}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}\right)\\ &= \frac{1}{b-c}(2\pi i - 2\pi i) = 0\end{aligned}$$

c) Si $b \in D(a,r)$ y $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$: En este caso, por lo visto en los dos primeros casos, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} &= \frac{1}{b-c}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}\right)\\ &= \frac{1}{b-c}(2\pi i - 0) = \frac{2\pi i}{b-c}\end{aligned}$$

d) Si $b \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$ y $c \in D(a,r)$: En este caso, por lo visto en los dos primeros casos, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} &= \frac{1}{b-c}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}\right)\\ &= \frac{1}{b-c}(0 - 2\pi i) = -\frac{2\pi i}{b-c}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.7.4. Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz \qquad (r\in\mathbb{R}^+,\ r\neq 2)$

Descomponemos el integrando en fracciones simples, y podemos hacer el ejercicio de dos formas distintas:

Opción 1: Calculando los valores de las constantes.

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{z+2i} = \frac{A(z^2+4)+Bz(z+2i)+Cz(z-2i)}{z(z^2+4)}$$

- Para $z=0$: $1 = A4 \Longrightarrow A = 1/4$.
- Para $z=2i$: $2i+1 = B\cdot 2i(2i+2i) = -8B \Longrightarrow B = -1/8 - i/4$.
- Para $z=-2i$: $-2i+1 = -C\cdot 2i(-2i-2i) = -8C \Longrightarrow C = -1/8 + i/4$.

Por tanto:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz = \frac{1}{4}\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z} + \left(-\frac{1}{8}-\frac{i}{4}\right)\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z-2i} + \left(-\frac{1}{8}+\frac{i}{4}\right)\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z+2i}$$

Distinguimos en función del valor de r:

a) Si $r\in\,]0,2[$: En este caso, se tiene que $|2i| = |-2i| = 2 > r$, y por el Ejercicio 1.7.1, las últimas dos integrales son 0. Para la primera, considerando como función la constantemente igual a 1, se tiene que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz = \frac{1}{4}\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{2}$$

b) Si $r>2$: En este caso, se tiene que $|2i| = |-2i| = 2 < r$, y podemos usar de forma directa la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función la constantemente igual a 1. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz &= \frac{1}{4}\cdot 2\pi i + \left(-\frac{1}{8}-\frac{i}{4}\right)2\pi i + \left(-\frac{1}{8}+\frac{i}{4}\right)2\pi i \\ &= \frac{2\pi i}{4} - 2\cdot\frac{2\pi i}{8} - \frac{2\pi i}{4} + \frac{2\pi i}{4} = 0\end{aligned}$$

Opción 2: Sin calcular los valores de las constantes.

Sabemos que es posible encontrar valores $A,B,C\in\mathbb{C}$ de forma que:

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{z+2i} = \frac{A(z^2+4)+Bz(z+2i)+Cz(z-2i)}{z(z^2+4)}$$

Igualando grado a grado (haciendo uso de que $\{1,z,z^2\}$ es una base del espacio de polinomios $\mathbb{P}_2$), llegamos a unas ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& A+B+C \\ 1 &=& 2iB-2iC \\ 1 &=& 4A \end{array}\right.$$

Que no nos molestamos en calcular. De esta forma, tenemos que la integral de partida se puede expresar como:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz = A\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} + B\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z-2i} + C\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z+2i}$$

Y calculamos el valor de cada una de estas integrales:

a) Para la primera, usando la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función la constantemente igual a 1, se tiene que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

b) Para la segunda y tercera, tenemos que:
- Si $r < 2$, tenemos que $|-2i| = |2i| = 2 > r$, y por el Ejercicio 1.7.1 sabemos que la integral es 0.
- Si $r > 2$, tenemos que $|-2i| = |2i| = 2 < r$, y por la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función la constantemente igual a 1, se tiene que la integral vale $2\pi i$.

En resumen, tenemos que:

a) Si $r < 2$: tenemos que las integrales de B y C son cero, por lo que solo calculamos el valor de A, que sabemos que cumple $1 = 4A$, de donde $A = 1/4$ y:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz = A\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = 2\pi i A = \frac{\pi i}{2}$$

b) Si $r > 2$: tendremos:

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz = 2\pi i(A+B+C) = 0$$

2. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\,dz \qquad (a \in \mathbb{C},\ |a| \neq 1)$

Le hallamos las raíces al denominador:

$$\begin{aligned}
(a^2+1)z - a(z^2+1) = 0 &\iff -az^2 + (a^2+1)z - a = 0 \iff \\
&\iff z = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4(-a)(-a)}}{2(-a)} \iff \\
&\iff z = \frac{(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} = \frac{(a^2+1) \pm (a^2-1)}{2a} \iff \\
&\iff z \in \{a, 1/a\}
\end{aligned}$$

Opción 1: Descomponiendo en fracciones simples

Tenemos que:

$$\frac{1}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} = -\frac{1}{a}\left(\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-1/a}\right) = \frac{A(z-1/a) + B(z-a)}{-a(z-a)(z-1/a)}$$

- Para $z = a$: $1 = A\left(a - \frac{1}{a}\right) \Longrightarrow A = \frac{a}{a^2-1}$.
- Para $z = {}^1/_a$: $1 = B\left(\frac{1}{a} - a\right) \Longrightarrow B = \frac{a}{1-a^2} = \frac{-a}{a^2-1}$.

Por tanto, la integral queda:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz = -\frac{1}{a^2-1}\left(\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-a}\, dz - \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - {}^1/_a}\, dz\right)$$

Distinguimos casos:

a) Si $|a| < 1$: En este caso, como $a \in D(0,1)$ para la primera integral podemos aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función el coseno, que es una función entera:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-a}\, dz = 2\pi i \cdot \cos(a)$$

Por otro lado, para la segunda integral, consideramos el disco $D(0, {}^1/_{|a|})$, que contiene a $C(0,1)^*$. Como dicho disco es estrellado y la aplicación $z \mapsto \frac{\cos z}{z - {}^1/_a}$ es holomorfa en $D(0, {}^1/_{|a|})$, se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - {}^1/_a}\, dz = 0$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz &= -\frac{1}{a^2-1}\left(2\pi i \cdot \cos(a) - 0\right) \\ &= -\frac{2\pi i \cdot \cos(a)}{a^2-1}\end{aligned}$$

b) Si $|a| > 1$: En este caso, como ${}^1/_a \in D(0,1)$ para la segunda integral podemos aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función el coseno, que es una función entera:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - \frac{1}{a}}\, dz = 2\pi i \cdot \cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

Por otro lado, para la primera integral, consideramos el disco $D(0, |a|)$, que contiene a $C(0,1)^*$. Como dicho disco es estrellado y la aplicación $z \mapsto \frac{\cos z}{z-a}$ es holomorfa en $D(0, |a|)$, se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-a}\, dz = 0$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz &= -\frac{1}{a^2-1}\left(0 - 2\pi i \cdot \cos\left(\frac{1}{a}\right)\right) \\ &= \frac{2\pi i \cdot \cos\left({}^1/_a\right)}{a^2-1}\end{aligned}$$

Opción 2: Sin descomponer en fracciones simples
Como hemos visto anteriormente que:

$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{a, {}^1\!/\!_a\}$$

Podemos escribir:

$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = -a(z-a)(z-{}^1\!/\!_a)$$

Con lo que buscamos calcular la integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{-a(z-a)(z-{}^1\!/\!_a)}\, dz$$

Notemos que la condición $|a| \neq 1$ hace que $a \in D(0,1) \Longleftrightarrow {}^1\!/\!_a \notin D(0,1)$, por lo que distinguiendo casos tenemos el ejercicio resuelto:

a) Si $|a| < 1$: Tendremos que $a \in D(0,1)$ y que ${}^1\!/\!_a \notin \overline{D}(0,1)$, por lo que podemos definir la aplicación $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \frac{\cos z}{-a(z-{}^1\!/\!_a)}$$

Que claramente es continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, por ser producto de una función racional de denominador no nulo por la función coseno. Aplicando una versión más relajada de la Fórmula de Cauchy para la circunferencia que probamos en el Ejercicio 1.7.2, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{-a(z-a)(z-{}^1\!/\!_a)}\, dz = \int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{(z-a)}\, dz = 2\pi i f(a) = -\frac{2\pi i \cos a}{a^2-1}$$

b) Si $|a| > 1$: Tendremos que ${}^1\!/\!_a \in D(0,1)$ y que $a \notin \overline{D}(0,1)$, por lo que podemos definir la aplicación $g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z) = \frac{\cos z}{-a(z-a)}$$

Que de la misma forma es continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, por lo que podemos aplicar la versión del Teorema de Cauchy para la circunferencia ya comentada, teniendo que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{-a(z-a)(z-{}^1\!/\!_a)}\, dz = \int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{(z-{}^1\!/\!_a)}\, dz = 2\pi i g({}^1\!/\!_a) = \frac{2\pi i \cos({}^1\!/\!_a)}{a^2-1}$$

Ejercicio 1.7.5. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante.

Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b)+B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

- Para $z = a$: $1 = A(a-b) \Longrightarrow A = \frac{1}{a-b}$.
- Para $z = b$: $1 = B(b-a) \Longrightarrow B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$.

Por tanto, la integral queda:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{1}{a-b} \left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz \right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{a-b} \left(2\pi i f(a) - 2\pi i f(b)\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que la función $f(z)$ es entera y que $a, b \in D(0,R)$, por lo que se puede aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función $f(z)$.

Sea ahora f entera y acotada. Entonces, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| &\leqslant \frac{M}{|z-a||z-b|} \leqslant \frac{M}{||z|-|a||\,||z|-|b||} \leqslant \frac{M}{|R-|a||\,|R-|b||} \leqslant \\
&\leqslant \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} \qquad \forall z \in C(0,R)^*
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $z \in C(0,R)^*$, por lo que $|z| = R$; y que $R > \max\{|a|, |b|\}$, por lo que $R - |a| > 0$ y $R - |b| > 0$. Por tanto, se tiene que:

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leqslant 2\pi R \cdot \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} = \frac{2\pi MR}{(R-|a|)(R-|b|)}$$

Como la anterior expresión es válida para todo $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|, |b|\}$, podemos hacer tender $R \to \infty$. Por el Lema del Sándwich, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$

Por la expresión anterior a la que habíamos llegado, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por la unicidad del límite, se tiene que:

$$f(b) = f(a) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Por tanto, f es constante.

1.8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Ejercicio 1.8.1. Sea γ un camino y $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Se define $f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ por:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} \setminus \gamma^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw \end{array}$$

Probar que f es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y que:

$$f^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \forall k \in \mathbb{N}$$

Realizaremos un desarrollo similar al de la demostración del desarrollo en Serie de Taylor. Como γ es continua y está definida en un compacto, $\gamma*$ es cerrado. Por tanto, sea le abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Fijamos ahora $a \in \Omega$, y sea $R_a = d(a, \gamma^*) > 0$. Entonces, para cada $w \in \gamma^*$ y $z \in D(a, R_a)$, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{w-a}{w-z}$$

Por lo tanto, para cada $z \in D(a, R_a)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw = \int_\gamma \varphi(w) \cdot \frac{1}{w-a} \cdot \frac{w-a}{w-z}\,dw \\ &= \int_\gamma \varphi(w) \cdot \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw \\ &= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi(w) \cdot \frac{1}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n\right) dw \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Test de Weierstrass para demostrar la convergencia uniforme de la serie. Como φ es continua y está definida en un compacto, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\varphi(w)| \leqslant M$ para todo $w \in \gamma^*$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D(a, R_a)$, se tienw que:

$$\left|\varphi(w) \cdot \frac{1}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n\right| \leqslant M \cdot \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leqslant \frac{M}{R_a} \cdot \left(\frac{|z-a|}{R_a}\right)^n \qquad \forall w \in \gamma^*$$

Como $|z-a| < R_a$, se tiene que la serie de término general la cota dada es convergente. Por lo tanto, por el Test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en γ^*, y por lo tanto podemos cambiar el orden de integración y suma. Entonces, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

Por tanto, como este razonamiento es válido para cualquier $a \in \Omega$, se tiene la analiticidad de f en Ω. Para la segunda parte, por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (z-a)^{n-k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad \forall z \in D(a, R_a),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

En particular, evaluando en $z = a$, se tiene que:

$$f^{(k)}(a) = k! \cdot \int_\gamma \varphi(w) \cdot \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall a \in \Omega$$

Ejercicio 1.8.2. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se define:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

Definimos la función f siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} f: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & (1+z)^\alpha \end{array}$$

Por la definición de potencia principal, se tiene que:

$$f(z) = e^{\alpha \log(1+z)} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Como $\log(1+z)$ es holomorfa en $D(0,1)$, se tiene que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por lo tanto, por el Desarrollo en Serie de Taylor de f centrado en el origen, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

Veamos por inducción sobre n que:

$$f^{(n)}(z) = \binom{\alpha}{n} \cdot n! \cdot (1+z)^{\alpha-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0,1)$$

- Para $n = 0$, se tiene que:

$$f(z) = (1+z)^\alpha = \binom{\alpha}{0} \cdot 0! \cdot (1+z)^{\alpha-0}$$

- Para $n = 1$, se tiene que:

$$f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \binom{\alpha}{1} \cdot 1! \cdot (1+z)^{\alpha-1}$$

- Supongamos que es cierto para n, y veamos que es cierto para $n+1$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(z) &= \binom{\alpha}{n} \cdot n! \cdot (\alpha - n)(1+z)^{\alpha-n-1} \\
&= \frac{1}{\cancel{n!}} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) \cdot \cancel{n!} \cdot (\alpha - n)(1+z)^{\alpha-n-1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (\alpha - j) \cdot (n+1)! \cdot (1+z)^{\alpha-n-1} \\
&= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (1+z)^{\alpha-(n+1)} \qquad \forall z \in D(0,1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha probado por inducción. Evaluando en $z=0$, se tiene que:

$$f^{(n)}(0) = \binom{\alpha}{n} \cdot n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(1+z)^{\alpha} = f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot z^n \qquad \forall z \in D(0,1)
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.3. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función f, centrado en el origen, en cada uno de los siguientes casos:

1. $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \quad \forall z \in D(0,1)$

   Fijado $z \in D(0,1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z^2 - 3z + 2) &= \operatorname{Re}(z^2) - 3\operatorname{Re}(z) + 2 = \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 - 3\operatorname{Re}(z) + 2 \\
\operatorname{Im}(z^2 - 3z + 2) &= \operatorname{Im}(z^2) - 3\operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) - 3\operatorname{Im}(z)
\end{aligned}$$

   Supongamos que $z^2 - 3z + 2 \in \mathbb{R}_0^-$. Entonces, se tiene que:

$$0 = \operatorname{Im}(z^2 - 3z + 2) \iff 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 3\operatorname{Im}(z) \iff \left\{\begin{array}{c} \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \vee \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

   Distinguimos dos casos:

   - Supongamos $\operatorname{Im}(z) = 0$. Como la parte real es negativa, resolvemos la inecuación:

     $$\operatorname{Re}(z)^2 - 3\operatorname{Re}(z) + 2 < 0$$

     Las raíces de la ecuación son 1 y 2, y evaluando en $\operatorname{Re}(z) = 0$ vemos que:

     $$\operatorname{Re}(z)^2 - 3\operatorname{Re}(z) + 2 > 0 \qquad \forall z \in D(0,1)$$

     Por lo tanto, llegamos a una contradicción.

- Supongamos $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$. En este caso, $z \notin D(0,1)$, y por lo tanto no es posible.

Por tanto, como el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, se tiene que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por el Desarollo en Serie de Taylor, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Obtener la derivada $n-$ésima de f en el origen no es sencillo, por lo que optaremos por otro método para obtener el desarrollo. Tenemos que:

$$f'(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Descomponemos la función en fracciones parciales:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

- Para $z = 1$, se tiene que $-1 = -A$, y por lo tanto $A = 1$.
- Para $z = 2$, se tiene que $1 = B$, y por lo tanto $B = 1$.

Por lo tanto, para cada $z \in D(0,1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\ &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n\right) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n\right) \end{aligned}$$

Integrando término a término, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}\right) + C = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}(n+1)} \cdot z^{n+1}\right) + C \\ &= -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n} \cdot z^n\right) + C \qquad \forall z \in D(0,1) \end{aligned}$$

Como $f(0) = \log 2 = \ln 2$, se tiene que $C = \ln 2$ y el desarrollo en Serie de Taylor buscado es:

$$f(z) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n} \cdot z^n\right) + \ln 2 \qquad \forall z \in D(0,1)$$

2. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

   Por ser racional, sabemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$, por lo que solo podremos aspirar a un desarrollo en serie de Taylor en $D(0,1)$. Hay dos opciones:

Fracciones Simples Para evitar el cálculo de la derivada $n-$ésima, descomponemos en fracciones simples, pero antes hemos de realizar la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} z^2 & z^2+2z+1 \\ \cline{2-2} -z^2-2z-1 & 1 \\ \hline -2z-1 & \end{array}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$f(z) = 1 - \frac{2z+1}{(z+1)^2} = 1 - \left(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2}\right) = 1 - \left(\frac{A(z+1)+B}{(z+1)^2}\right)$$

- Para $z=-1$, se tiene que $-1=B$.
- Para $z=0$, se tiene que $1=A+B$, y por lo tanto $A=2$.

Por tanto:

$$f(z) = 1 - \frac{2}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Viendo el tercer sumando como la derivada de una función que es la suma de una serie geométrica, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(z) &= 1 - 2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right) + \left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right)' = \\
&= 1 - 2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right) + \left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ z^{n-1}\right) = \\
&= 1 - 2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ z^n\right) + \left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\ z^n\right) = \\
&= 1 - 2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\ z^n\right) = \\
&= 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n-1)\ \ z^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,(n-1)\ \ z^n \qquad \forall z\in D(0,1)
\end{aligned}$$

Usando el Ejercicio 1.8.2 Ya hemos visto que solo podemos aspirar a un desarrollo en serie de Taylor en $D(0,1)$. En ese conjunto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(z) = z^2(1+z)^{-2} &= z^2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\cdot z^n\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\cdot z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty}\binom{-2}{n-2}\cdot z^n \qquad \forall z\in D(0,1)
\end{aligned}$$

3. $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z \quad \forall z\in D(0,1)$

Para definir el arcoseno, hacemos uso de que:

$$\operatorname{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

Por tanto, para cada $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = w \iff z - \frac{\pi}{2} \in -i\,\mathrm{Log}(w \pm \sqrt{w^2-1}) \iff \\ \iff z \in \frac{\pi}{2} - i\,\mathrm{Log}(w \pm \sqrt{w^2-1}) \end{aligned}$$

Por tanto, definimos el arcoseno complejo como:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arc\,sen}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & \dfrac{\pi}{2} - i\log\left(w + \sqrt{w^2-1}\right) \end{array}$$

Tenemos que:

$$\operatorname{arc\,sen}(w) = \frac{\pi}{2} - i\log\left(w + \exp\left(\frac{\log(w^2-1)}{2}\right)\right)$$

En cualquier caso, se puede probar que arc sen es holomorfa en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\}$ (y en particular $D(0,1)$), con:

$$\operatorname{arc\,sen}'(w) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = (1-w^2)^{-1/2} \qquad \forall w \in D(0,1)$$

Usando el Ejercicio 1.8.2, tenemos que:

$$\operatorname{arc\,sen}'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} w^{2n} \qquad \forall w \in D(0,1)$$

Integrando término a término, tenemos que:

$$\operatorname{arc\,sen}(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Como $\operatorname{arc\,sen}(0) = 0$, se tiene que $C = 0$, por lo que:

$$\operatorname{arc\,sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

4. $f(z) = \cos^2 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, se tiene que f es analítica en $\mathbb{C}$. Como será centrado en el origen y el coseno y el seno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales, podríamos usar el desarrollo en serie de Taylor de las correspondientes funciones trigonométricas reales, pero preferimos hacerlo directamente desde 0 para así practicar. Veamos por inducción sobre n que:

$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cos(2z) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$$

- Para $n = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -2\cos(z)\,\mathrm{sen}(z) = -\,\mathrm{sen}(2z) \\ f''(z) &= -2\cos(2z) = (-1)^1 \cdot 2^1 \cdot \cos(2z) \end{aligned}$$

- Supuesto cierto para n, veamos que es cierto para $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(z) &= (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cos(2z) \\ f^{(2n+1)}(z) &= (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot \mathrm{sen}(2z) \\ f^{(2(n+1))}(z) = f^{(2n+2)}(z) &= (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1} \cdot \cos(2z) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{2(n+1)-1} \cdot \cos(2z) \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Evaluando en $z = 0$, se tiene que:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cos(0) = (-1)^n \cdot 2^{2n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostremos ahora por inducción que:

$$f^{(2n-1)}(z) = (-1)^{n-1} \cdot 2^{2(n-1)} \cdot \mathrm{sen}(2z) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$$

- Para $n = 1$, se tiene que:

$$f'(z) = -\,\mathrm{sen}(2z) = (-1)^0 \cdot 2^0 \cdot \mathrm{sen}(2z)$$

- Supuesto cierto para n, veamos que es cierto para $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(2n-1)}(z) &= (-1)^{n-1} \cdot 2^{2(n-1)} \cdot \mathrm{sen}(2z) \\ f^{(2n)}(z) &= (-1)^{n-1} \cdot 2^{2(n-1)+1} \cdot \cos(2z) \\ f^{(2(n+1)-1)}(z) = f^{(2n+1)}(z) &= (-1)^n \cdot 2^{2(n-1)+2} \cdot \mathrm{sen}(2z) = (-1)^n \cdot 2^{2(n)} \cdot \mathrm{sen}(2z) \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Evaluando en $z = 0$, se tiene que:

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 2^{2(n-1)} \cdot \mathrm{sen}(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.4. Dado $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{N}$, probar que existe una única función f tal que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que:

$$zf'(z) - \alpha f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \forall z \in D(0,1)$$

Como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, se tiene que f es analítica en $D(0,1)$. Consideramos su serie de Taylor centrada en el origen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot n \cdot z^{n-1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por tanto, la ecuación dada se puede reescribir como:

$$z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot n \cdot z^{n-1} - \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\alpha)\alpha_n z^n = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Principio de Identidad de funciones analíticas, se tiene que:

$$(n-\alpha)\alpha_n = (-1)^n \Longrightarrow \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n-\alpha} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha} \cdot z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Además, esta función está bien definida en $D(0,1)$. Esto prueba la existencia y unicidad de la función f.

Ejercicio 1.8.5. Probar que existe una única función f tal que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que $f(0) = 0$ y:

$$\exp\left(-zf'(z)\right) = 1 - z \quad \forall z \in D(0,1)$$

Como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, se tiene que f es analítica en $D(0,1)$. Consideramos su serie de Taylor centrada en el origen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de series de potencias, se tiene que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \cdot (n+1) \cdot z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por lo tanto, la ecuación dada se puede reescribir como:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_n \cdot n \cdot z^n\right) = 1 - z \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Derivando la ecuación anterior, se tiene que:

$$(1-z)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}-\alpha_n\cdot n^2\cdot z^{n-1}=-1 \iff$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n+1}\cdot(n+1)^2\cdot z^n=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \forall z\in D(0,1)$$

Por el Principio de Identidad de funciones analíticas, se tiene que:

$$\alpha_{n+1}\cdot(n+1)^2=1\Longrightarrow\alpha_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0$$

Nos falta por determinar α_0. Tenemos por el momento que:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n \qquad \forall z\in D(0,1)$$

Como $f(0)=0$, se tiene que $\alpha_0=0$. Por lo tanto, se tiene que:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n \qquad \forall z\in D(0,1)$$

Además, esta función está bien definida en $D(0,1)$, puesto que la serie converge, puesto que su radio de convergencia es 1.

Esto prueba la existencia y unicidad de la función f.

Ejercicio 1.8.6. Para $z\in\mathbb{C}$ con $1-z-z^2\neq 0$ se define $f(z)=(1-z-z^2)^{-1}$. Sea $\sum\limits_{n>0}\alpha_n z^n$ la serie de Taylor de f centrada en el origen. Probar que $\{\alpha_n\}$ es la sucesión de Fibonacci:

$$\alpha_0=\alpha_1=1 \quad\text{y}\quad \alpha_{n+2}=\alpha_n+\alpha_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Calcular en forma explícita dicha sucesión.

En primer lugar, hemos de determinar en qué conjunto es holomorfa la función f. Para ello, resolvemos la ecuación:

$$1-z-z^2=0 \iff z^2+z-1=0 \iff z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. Por tanto, podemos aspirar a un desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen en $D\,(0,R)$,l donde:

$$R=\text{mín}\left\{\left|\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|,\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|\right\}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Descomponemos la función en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-z-z^2}=-\frac{A}{z-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{B}{z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{A(z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})+B(z-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}{-(z-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})}$$

- Para $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, se tiene que $1 = A \cdot \sqrt{5}$, y por lo tanto $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

- Para $z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, se tiene que $1 = B \cdot (-\sqrt{5})$, y por lo tanto $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Por tanto, para cada $z \in D(0, R)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)^n - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)^n \right)
\end{aligned}$$

donde podemos considerar dichas series convergentes, puesto que $|z| < R \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, para cada $z \in D(0, R)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)^n + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)^n \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} z^n \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right) z^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}$$

Por tanto, ya tenemos la sucesión $\{\alpha_n\}$ de forma explícita. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{5-1} = 1 \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^2 - (-1+\sqrt{5})^2}{(-1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^2} = \\
&= \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5})}{[(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})]^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{(5-1)^2} = 1
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $\alpha_{n+1} + \alpha_n$ fijado un $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} + \alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+2} + \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} - \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2} - \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} + 1\right) - \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} + 1\right)\right]
\end{aligned}$$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{4}{1+5-2\sqrt{5}} = \frac{4}{6-2\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
\frac{2}{-1+\sqrt{5}} + 1 &= \frac{2-1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{-(1+\sqrt{5})^2}{1-5} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{4}{1+5+2\sqrt{5}} = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\
-\frac{2}{1+\sqrt{5}} + 1 &= \frac{-2+1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-(-1+\sqrt{5})^2}{1-5} = \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\alpha_{n+1} + \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^{n+3} - \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+3}\right] = \alpha_{n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Ejercicio 1.8.7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f^{(n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. $\Omega = \mathbb{C}, \qquad a_n = n$

   Supongamos que existe. Entonces, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen necesariamente tiene que ser:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

   Comprobemos que efectivamente $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Calculamos su radio de convergencia:

   $$\left\{\frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{1}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0 \Longrightarrow \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}}\right\} \to 0 \Longrightarrow R = \infty$$

   Por tanto, efectivamente $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y verifica la condición dada.

2. $\Omega = \mathbb{C}, \qquad a_n = (n+1)!$

   Supongamos que existe. Entonces, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen necesariamente tiene que ser:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

   Calculemos su radio de convergencia R:

   $$\left\{\sqrt[n]{n+1}\right\} \to 1 \Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

   Por tanto, f no converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$, en contradicción con que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Por tanto, no existe tal función f.

3. $\Omega = D(0,1), \qquad a_n = 2^n n!$

   Supongamos que existe. Entonces, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen necesariamente tiene que ser:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\ z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

   Calculemos su radio de convergencia R:

   $$\left\{\sqrt[n]{2^n}\right\} = \{2\} \to 2 \Longrightarrow R = \frac{1}{2}$$

   Por tanto, f no converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/2)$, en contradicción con $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Por tanto, no existe tal función f.

4. $\Omega = D(0, 1/2), \qquad a_n = n^n$

   Supongamos que existe. Entonces, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen necesariamente tiene que ser:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ z^n \qquad \forall z \in D(0, 1/2)$$

   Calculemos su radio de convergencia R:

   $$\left\{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right\} = \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \to e \Longrightarrow R = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

   Por tanto, f no converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/e)$, en contradicción con $f \in \mathcal{H}(D(0, 1/2))$. Por tanto, no existe tal función f.

Ejercicio 1.8.8. Dados $r \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| < r < |a|$, calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k}$$

Descomponemos en primer lugar en fracciones simples. Sabemos que existen $A, B_1, \ldots, B_k \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)^k} = \frac{A}{z-a} + \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{(z-b)^i} = \frac{A(z-b)^k + \sum\limits_{i=1}^{k} B_i(z-a)(z-b)^{k-i}}{(z-a)(z-b)^k}$$

Por el Ejercicio 1.7.1, como $r < |a|$, sabemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)} = 0$$

Para $i \in \{2, \ldots, k\}$, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-b)^i} = 0$$

puesto que el integrando admite una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, $b \notin C(0,r)^*$ y $C(0,r)$ es un camino cerrado. Por tanto, el único término que no se anula es el de $i = 1$. Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k} = B_1 \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z-b}$$

Aplicamos ahora la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, aplicado a la función constantemente igual a 1 (que es entera). Como $b \in D(0,r)$, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k} = B_1 \cdot 2\pi i$$

Para obtener el valor de B_1, tras igualar los numeradores de la igualdad de fracciones simples, igualamos los coeficientes de z^k y vemos que:

$$0 = A + B_1$$

Por otro lado, tras igualar los denominadores evaluamos en $z = a$, y obtenemos:

$$A = \frac{1}{(a-b)^k} \Longrightarrow B_1 = -\frac{1}{(a-b)^k}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k} = -\frac{2\pi i}{(a-b)^k}$$

Ejercicio 1.8.9. Calcular la integral para cada una de las siguientes curvas:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz$$

1. $\gamma = C(1/4, 1/2)$

   En primer lugar, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} = \frac{Az(z-1) + B(z-1) + Cz^2}{z^2(z-1)}$$

   - Para $z = 0$, se tiene que $1 = B \cdot (-1)$, y por lo tanto $B = -1$.
   - Para $z = 1$, se tiene que $1 = C \cdot 1^2$, y por lo tanto $C = 1$.
   - Igualando los coeficientes de z^2, se tiene que $0 = A + C$, por lo que $A = -C = -1$.

   Por tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz = -\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz - \int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz$$

   Centrándonos en el caso de $\gamma = C(1/4, 1/2)$, como la exponencial es entera y $0 \in D(1/4, 1/2)$, por la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

   Respecto a la segunda integral, como la exponencial es entera y $0 \in D(1/4, 1/2)$, por la Fórmula de Cauchy para las derivadas tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

   Respecto a la tercera integral, sabemos que el integrando es holomorfo en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, y en particular lo es en $D(0, 1)$. Como $D(0, 1)$ es estrellado, por el Teorema Local de Cauchy el integrando admite una primitiva en $D(0, 1)$. Como $D(1/4, 1/2)$ es un camino cerrado en $D(0, 1)$, se tiene que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz = 0$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz &= -\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz - \int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz \\ &= -2\pi i - 2\pi i + 0 = -4\pi i\end{aligned}$$

2. $\gamma = C(1, 1/2)$

   El integrando tanto de la primera como de la segunda integral es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, y en particular lo es en $D(1,1)$. Como dicho conjunto es estrellado, por el Teorema Local de Cauchy el integrando admite una primitiva en $D(1,1)$. Como $C(1, 1/2)$ es un camino cerrado en $D(1,1)$, se tiene que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz = 0$$

   Respecto a la tercera integral, como la exponencial es entera y $1 \in D(1, 1/2)$, por la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i e^1 = 2\pi e i$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz &= -\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz - \int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz \\ &= 0 + 0 + 2\pi e i = 2\pi e i\end{aligned}$$

3. $\gamma = C(0,2)$

   Como $0 \in D(0,2)$, por la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i e^1 = 2\pi e i$$

   Por la Fórmula de Cauchy para las derivadas, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz &= -\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz - \int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz \\ &= -2\pi i - 2\pi i + 2\pi e i = 2\pi(e-2)i\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.10. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\, dz$

   Como el seno es una función entera y $0 \in D(0,1)$, por la Fórmula de Cauchy para las derivadas se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \operatorname{sen}^{(n-1)}(0)$$

Calculando las derivadas sucesivas de la función seno (compruébese mediante una sencilla inducción), se tiene que:

$$\operatorname{sen}^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz$

Multiplicamos y dividimos por 2:

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz = 2\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{senh} z}{z^n}\, dz$$

Como la función seno hiperbólico es una función entera y $0 \in D(0,1)$, por la Fórmula de Cauchy para las derivadas se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{senh} z}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \operatorname{senh}^{(n-1)}(0)$$

Calculando las derivadas sucesivas de la función seno hiperbólico (compruébese mediante una sencilla inducción), se tiene que:

$$\operatorname{senh}^{(n)}(z) = \begin{cases} \cosh z & \text{si } n \text{ es impar} \\ \operatorname{senh} z & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Evaluando en 0, se tiene que:

$$\operatorname{senh}^{(n)}(0) = \begin{cases} e^0 = 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz = \begin{cases} \frac{4\pi i}{(n-1)!} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

3. $\displaystyle\int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n}\, dz$

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \log(1+z) \end{array}$$

Sabemos que $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Demostramos por inducción que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} \qquad \forall z \in D(0,1),\ n \in \mathbb{N}$$

- Para $n = 1$, se tiene que:

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+z)^1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

- Supongamos cierto para n, y veámoslo para $n+1$:

$$f^{(n+1)}(z) = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cdot n(1+z)^{n-1}}{(1+z)^{2n}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+z)^{n+1}} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Por tanto, queda probado para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por la Fórmula de Cauchy para las derivadas se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n}\,dz &= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(0) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \dfrac{(-1)^n(n-2)!}{(1)^{n-1}} = (-1)^n \cdot \dfrac{2\pi i}{n-1} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.11 (Fórmula de cambio de variable)**.** Si Ω es un abierto del plano, γ un camino en Ω y $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\varphi \circ \gamma$ es un camino y, para cualquier función f que sea continua en $(\varphi \circ \gamma)^*$ se tiene:

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$$

Veamos en primer lugar que $\varphi \circ \gamma$ es un camino. Como γ es un camino, existe una partición

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$$

del intervalo de definición de γ tal que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\gamma_{\big|[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k])$. Como γ es un camino en Ω, la siguiente composición tiene sentido:

$$(\varphi \circ \gamma)_{\big|[t_{k-1},t_k]} = \varphi \circ \gamma_{\big|[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k])$$

donde, para afirmar que es de clase 1, hemos hecho uso de que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, por tanto, es analítica en Ω, lo que implica que es infinitamente derivable en Ω. Por tanto, $\varphi\circ\gamma$ es un camino. Aplicamos ahora la definición de integral sobre un camino:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)dz &= \sum_{k=1}^n \int_{(\varphi\circ\gamma)_{\big|[t_{k-1},t_k]}} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\left((\varphi\circ\gamma)(t)\right) \cdot \left(\varphi\circ\gamma\right)'(t)dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\left(\varphi(\gamma(t))\right) \cdot \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{\big|[t_{k-1},t_k]}} f\left(\varphi(w)\right) \cdot \varphi'(w)\ dw\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.12. Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}$

   Buscamos una función φ que nos permita transformar el integrando de forma que el denominador tan solo se anule en un punto. Notemos que, dado $a^* \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$|a| < r \Longrightarrow \frac{1}{|a|} > \frac{1}{r}$$
$$|a| > r \Longrightarrow \frac{1}{|a|} < \frac{1}{r}$$

   Por tanto, en este caso tenemos $\varphi \circ \gamma = C(0,2)$, y buscamos $\gamma = C(0, {}^1\!/\!_2)$ (o similar). Esto nos permitirá que ambos puntos (0 y 1) dejen de ser problemáticos, y podremos usar el Teorema Local de Cauchy. Una vez introducida la intuición, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & {}^1\!/\!_w \end{array}$$

   Supongamos $\gamma = C(0, {}^1\!/\!_2)$. Entonces, se tiene que:

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = \varphi\left(\gamma(t)\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}e^{it}\right) = \frac{2}{e^{it}} = 2e^{-it} \qquad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

   Por tanto, $\varphi \circ \gamma = -C(0,2)$. Por tanto, se tiene que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = -\int_{\varphi\circ\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} \overset{(*)}{=} -\int_\gamma \frac{1}{\varphi(w)^2(\varphi(w)-1)^2} \cdot \varphi'(w)\ dw$$

   donde en $(*)$ hemos usado el resultado del ejercicio 1.8.11. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} &= -\int_{C(0,1/2)} \frac{w^2}{\left(\frac{1}{w}-1\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw = \\ &= \int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\left(\frac{1-w}{w}\right)^2} dw = \\ &= \int_{C(0,1/2)} \frac{w^2}{(1-w)^2} dw \end{aligned}$$

   El integrando es una función racional y holomorfa en $D(0, {}^3\!/\!_4)$ (estrellado), y por el Teorema Local de Cauchy el integrando admite una primitiva en $D(0, {}^3\!/\!_4)$. Como $C(0, {}^1\!/\!_2)$ es un camino cerrado en $D(0, {}^3\!/\!_4)$, se tiene que:

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^2}{(1-w)^2} dw = 0$$

2. $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)}$

De igual forma, consideremos como φ la función:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & w & \longmapsto & 1/w \end{array}$$

Consideramos de nuevo $\gamma = C(0, 1/2)$, de forma que $\varphi \circ \gamma = -C(0, 2)$. Esto provocará que, de los tres puntos problemáticos $(1, -1, 3)$, dos dejen de ser problemáticos, y tan solo el 3 se transformará en el $1/3$, que será problemático pero podremos aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)} &= -\int_{\varphi\circ\gamma} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)} \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} -\int_{\gamma} \frac{1}{(\varphi(w)-1)^2(\varphi(w)+1)^2(\varphi(w)-3)} \cdot \varphi'(w)\, dw \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado el resultado del ejercicio 1.8.11. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)} &= -\int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\left(\frac{1-w}{w}\right)^2\left(\frac{1+w}{w}\right)^2\left(\frac{1-3w}{w}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw = \\ &= \int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\left(\frac{1-w}{w}\right)^2\left(\frac{1+w}{w}\right)^2\left(\frac{1-3w}{w}\right)} \cdot \left(\frac{1}{w^2}\right) dw = \\ &= \int_{C(0,1/2)} \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)^2(1-3w)} dw = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \int_{C(0,1/2)} \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)^2\,(w-1/3)} dw \end{aligned}$$

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z^3}{(1-z)^2(1+z)^2} \end{array}$$

Por ser f racional, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$. Como $\overline{D}(0, 1/2) \subset \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, por la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, se tiene que:

$$\int_{C(0,1/2)} \frac{f(w)}{w-1/3}\, dw = 2\pi i \cdot f(1/3) = 2\pi i \cdot \frac{(1/3)^3}{(1-1/3)^2(1+1/3)^2} = 2\pi i \cdot \frac{(1/3)^3}{(2/3)^2\,(4/3)^2} = 2\pi i \cdot \frac{3}{64}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)} &= -\frac{1}{3} \cdot \int_{C(0,1/2)} \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)^2\,(w-1/3)} dw \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2\pi i \cdot \frac{3}{64} = -\frac{\pi i}{32} \end{aligned}$$

1.9. Ceros de las funciones holomorfas

Ejercicio 1.9.1. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|} \quad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que $|f^{(n)}(0)| \leqslant e(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.9.2. Sea f una función entera verificando que existen constantes $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$z \in \mathbb{C}, |z| > \rho \implies |f(z)| \leqslant \alpha |z|^\beta.$$

Probar que f es una función polinómica de grado menor o igual que β.

Ejercicio 1.9.3. Sea f una función entera verificando que:

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 1.9.4. Sea f una función entera verificando que:

$$f\left(f(z)\right) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f?

Ejercicio 1.9.5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f, holomorfa en un entorno del origen, y verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:

1. $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $a_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.9.6. Enunciar y demostrar un resultado referente al orden de los ceros de una suma, producto o cociente de funciones holomorfas.

Ejercicio 1.9.7. Dado un abierto Ω del plano, probar que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad si, y sólo si, Ω es conexo.

Ejercicio 1.9.8. ¿Qué se puede afirmar sobre dos funciones enteras cuya composición es constante?

Ejercicio 1.9.9. Sea f una función entera verificando que $f(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$. Probar que f es una función polinómica.

Ejercicio 1.9.10. Sea f una función entera verificando que:

$$z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \implies |f(z)| = 1.$$

Probar que existen $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que:

$$f(z) = \alpha z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$