Análisis Matemático I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. El Espacio Euclídeo. Espacios normados y métricos.

Ejercicio 1.1.1. Probar que, en cualquier espacio pre-hilbertiano X, el producto escalar se obtiene a partir de la norma mediante la llamada *identidad de polarización*:

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}||x+y||^2 - ||x-y||^2 &= (x+y|x+y) - (x-y|x-y) = \\ &= \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) + \cancel{(y|y)} - \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) - \cancel{(y|y)} = 4(x|y)\end{aligned}$$

donde he usado que $(x|y) = (y|x)$ por ser simétrica, y que $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

Ejercicio 1.1.2. Si X e Y son espacios pre-hilbertianos, es una sana costumbre denotar ambos productos escalares por $(\cdot|\cdot)$ y ambas normas asociadas por $||\cdot||$. Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal que preserva la norma, es decir,

$$\|f(x)\| = \|x\|$$

Probar que entonces f también preserva el producto escalar:

$$(f(x) \mid f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}4(x|y) &\overset{(*)}{=} ||x+y||^2 - ||x-y||^2 = ||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2 = ||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2 = \\ &\overset{(*)}{=} 4(f(x)|f(y)) \Longrightarrow (x|y) = (f(x)|f(y))\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado el ejercicio anterior; y he aplicado que por ser f una aplicación lineal se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Ejercicio 1.1.3. Probar que todo espacio pre-hilbertiano X de dimensión $N \in \mathbb{N}$, se identifica totalmente con el espacio euclídeo N-dimensional; es decir, existe una biyección lineal $f : X \to \mathbb{R}^N$ que preserva el producto escalar:

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

En este sentido podemos decir que el espacio euclídeo N-dimensional es el único espacio pre-hilbertiano de dimensión N.

Sea $\mathcal{B}_X$ una base ortonormal de X, y $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$.

$$\mathcal{B}_X = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}_\mathbb{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Entonces, definimos $f : X \to \mathbb{R}^N$ forma lineal de forma que los vectores de una base de aplican en los de la otra base. Es decir, $f(v_i) = e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$. Como es una forma lineal y se aplica base en otra base, tenemos que es una biyección lineal.

Sea $x, y \in X$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i$. Comprobemos que preserva el producto escalar.

$$(f(x)|f(y)) = \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \middle| f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i f(v_i)\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \overset{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = (x|y)$$

donde en $(*)$ he aplicado que las bases escogidas son ortonormales, por lo que el producto escalar de dos elementos es la suma del producto de sus componentes expresadas en la correspondiente base.

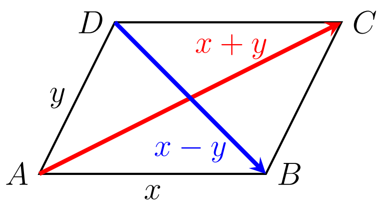
Ejercicio 1.1.4. Probar que, en todo espacio pre-hilbertiano X, se verifica la *identidad del paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Interpretar geométricamente el resultado.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) + ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y) = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Geométricamente, tenemos que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo equivale a la suma de los cuadrados de las diagonales.



Ejercicio 1.1.5. Para cualquier espacio pre-hilbertiano X, discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in X$ para verificar que $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.

La demostración de la desigualdad triangular parte de la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$||(x|y)|| \leqslant ||x||\ ||y|| \qquad \forall x, y \in X$$

Además, tenemos que la igualdad se da solo en el caso de que sean linealmente dependientes.

Demostramos ahora la desigualdad triangular a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) \overset{(1)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2|(x|y)| \overset{(2)}{\leqslant}$$
$$\overset{(2)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\ ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si se dan las igualdades en (1) y (2).

- La igualdad en (1) se da si y solo si $(x|y) \geqslant 0$.
- La igualdad en (2) se da si y solo si se da la da desigualdad en Cauchy-Schwarz; y esta se da si y solo si $\{x, y\}$ son linealmente dependientes.

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si ambos vectores son linealmente dependientes y además su producto escalar es positivo.

Ejercicio 1.1.6. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en $\mathbb{R}^N$ sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ para verificar la siguiente igualdad: $||x+y||_1 = ||x||_1 + ||y||_1$.

En primer lugar, como la norma 1 no procede de ningún producto escalar, tenemos que no son aplicables los resultados del ejercicio anterior. Demostramos por tanto la desigualdad triangular en el caso de la norma 1:

$$||x+y||_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x_k| + |y_k| = ||x||_1 + ||y||_2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto, tenemos que se dará la igualdad triangular si y solo si se cumple que $|x_k + y_k| = |x_k| + |y_k|$, $\forall k \in \Delta_N$. Para que esto ocurra, es necesario y suficiente lo siguiente:

$$x_k, y_k \geqslant 0, \qquad \forall k \in \Delta_N$$

Ejercicio 1.1.7. Probar que, para $N > 1$, no existe un producto escalar en $\mathbb{R}^N$ cuya norma asociada sea la de la suma, y que lo mismo le ocurre a la norma del máximo. Probar también que, en el espacio vectorial $\mathcal{C}[0,1]$, las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no son las asociadas a ningún producto escalar.

Tenemos que en todo espacio pre-hilbertiano X se cumple la identidad del paralelogramo:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2, \qquad \forall x, y \in X$$

Busquemos contraejemplos que demuestren que eso no es cierto para $X = \mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la del máximo. Sean los valores siguientes:

$$x = (1, \dots, 1) \qquad x + y = (0, 2, \dots, 2)$$
$$y = (-1, 1, \dots, 1) \qquad x - y = (2, 0, \dots, 0)$$

Veamos que no se cumple la identidad del paralelogramo en $\mathbb{R}^n$ para la norma 1 y el máximo:

$$2||x||_1^2 + 2||y||_1^2 = 2n^2 + 2n^2 = 4n^2 \neq [2(n-1)]^2 + 2^2 = ||x+y||_1^2 + ||x-y||_1^2$$
$$2||x||_\infty^2 + 2||y||_\infty^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4 \neq 8 = 2^2 + 2^2 = ||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo. Por tanto, no existe un producto escalar asociado a dichas normas.

Veámoslo para el caso de $\mathcal{C}[0, 1]$. Sean los valores siguientes:

$$f(x) = \cos x \geqslant 0 \in [0, 1] \qquad (f + g)(x) = \cos x + \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0, 1]$$
$$g(x) = \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0, 1] \qquad (f - g)(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Veámoslo para el caso de la norma 1:

$$||f||_1 = \int_0^1 |\cos x| \, dx = \operatorname{sen} x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 \qquad ||g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x| \, dx = -\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1$$

$$||f + g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x + \cos x| \, dx = \operatorname{sen} x - \cos x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 - \cos 1 + 1$$

$$||f - g||_1 = \int_0^1 |\cos x - \operatorname{sen} x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^1 \operatorname{sen} x - \cos x \, dx =$$
$$= \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^1 = \sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1 + \sqrt{2}$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma 1:

$$2||f||_1^2 + 2||g||_1^2 = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 1 + 2 \cdot (1 - \cos 1)^2 \neq$$
$$\neq (1 + \operatorname{sen} 1 - \cos 1)^2 + (2\sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1)^2 = ||f + g||_1^2 + ||f - g||_1^2$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0, 1]$ con la norma 1 no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma. Veámoslo para la norma del máximo.

$$||f||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\cos x\} = 1 \qquad ||g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\operatorname{sen} x\} = \operatorname{sen} 1$$
$$||f + g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{\cos x + \operatorname{sen} x\} = (f + g)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$||f - g||_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{|\cos x - \operatorname{sen} x|\} = 1$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma del máximo:

$$2||f||_\infty^2 + 2||g||_\infty^2 = 2(1 + \operatorname{sen}^2 1) \neq 3 = 2 + 1^2 = ||f + g||_\infty^2 + ||f - g||_\infty^2$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0, 1]$ con la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma.

Ejercicio 1.1.8. Sea X un espacio vectorial y sean $\mu, \nu : X \to \mathbb{R}$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

1. $\|x\| = \mu(x) + \nu(x)$:

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \mu(x)+\nu(x) \geqslant 0$ por ser la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \mu(\lambda x) + \nu(\lambda x) = |\lambda|\ [\mu(x) + \nu(x)] = |\lambda|\ ||x||$.
   - $||x + y|| = \mu(x + y) + \nu(x + y) \leqslant \mu(x) + \nu(x) + \mu(y) + \nu(y) = ||x|| + ||y||$.

2. $\|x\| = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \max\{\mu(x), \nu(x)\} \geqslant 0$ por ser $\mu(x), \nu(x) \geqslant 0$. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \max\{\mu(\lambda x), \nu(\lambda x)\} = \max\{|\lambda|\, \mu(x), |\lambda|\, \nu(x)\} = |\lambda|\ \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ y, por la definición de la norma, $|\lambda|\ ||x||$.
   - Probamos la desigualdad triangular:

   $$\begin{aligned} ||x + y|| &= \max\{\mu(x + y), \nu(x + y)\} \leqslant \max\{\mu(x) + \mu(y), \nu(x) + \nu(y)\} \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\} = ||x|| + ||y|| \end{aligned}$$

   donde en $(*)$ he aplicado lo siguiente:

   $$\begin{aligned} \mu(x) + \mu(y) &\leqslant \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\} \\ \nu(x) + \nu(y) &\leqslant \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\} \end{aligned}$$

3. $\|x\| = [\mu(x)^2 + \nu(x)^2]^{1/2}$

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = [\mu(x)^2 + \nu(x)^2]^{1/2} \geqslant 0$ por ser raíz de la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \iff \mu(x) = \nu(x) = 0 \iff x = 0$.
   - $||\lambda x|| = [\mu(\lambda x)^2 + \nu(\lambda x)^2]^{1/2} = [\lambda^2 (\mu(x)^2 + \nu(x)^2)]^{1/2} = |\lambda|\ ||x||$.
   - Verificamos la desigualdad triangular:

   $$\begin{aligned} ||x + y|| &= \left[\mu(x + y)^2 + \nu(x + y)^2\right]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left[(\mu(x) + \mu(y))^2 + (\nu(x) + \nu(y))^2\right]^{1/2} \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2} + \left[\mu(y)^2 + \nu(y)^2\right]^{1/2} = ||x|| + ||y|| \end{aligned}$$

Comprobemos la desigualdad de $(*)$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\mu(x)+\mu(y))^2+(\nu(x)+\nu(y))^2} \leqslant \sqrt{\mu(x)^2+\nu(x)^2}+\sqrt{\mu(y)^2+\nu(y)^2} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow [\mu(x)+\mu(y)]^2+[\nu(x)+\nu(y)]^2 \leqslant \mu(x)^2+\nu(x)^2+\mu(y)^2+\nu(y)^2+ \\
&\qquad +2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 2[\mu(x)\mu(y)+\nu(x)\nu(y)] \leqslant 2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2}+\cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2}+2\mu(x)\mu(y)\nu(x)\nu(y) \leqslant \cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2}+\cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2}+ \\
&\qquad +\mu(x)^2\nu(y)^2+\nu(x)^2\mu(y)^2 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 0 \leqslant [\mu(x)\nu(y)-\nu(x)\mu(y)]^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.9. Probar que la función $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$\rho(x,y)=|y-x|^{1/2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

es una distancia en $\mathbb{R}$.

Comprobemos las tres condiciones para que sea una distancia:

1. $\rho(x,y)=|y-x|^{1/2}\geqslant 0$ trivialmente. Además, $\rho(x,y)=|y-x|^{1/2}=0 \Longleftrightarrow y=x$.

2. $\rho(x,y)=|y-x|^{1/2}=\rho(y,x)=|x-y|^{1/2}$ ya que, en $\mathbb{R}$, se tiene que $|y-x|=|x-y|$.

3. $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

$$\begin{aligned}
\rho(x,z)&=|z-x|^{1/2}=|z-x+y-y|^{1/2}=\sqrt{|y-x+z-y|}\leqslant\sqrt{|y-x|+|z-y|}\overset{(*)}{\leqslant} \\
&\overset{(*)}{\leqslant}\sqrt{|y-x|}+\sqrt{|z-y|}=\rho(x,y)+\rho(y,z)
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado que, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, se tiene que:

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\Longleftrightarrow a+b\leqslant a+b+2\sqrt{ab}\Longleftrightarrow 0\leqslant 2\sqrt{ab}$$

Ejercicio 1.1.10. Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : Y\to X$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$||y||=||f(y)||, \qquad y\in Y$$

se obtiene una norma en Y. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

Demostramos que la norma así definida efectivamente es una norma.

- $||y||=||f(y)||\geqslant 0$ por ser $||f(y)||$ una norma vectorial. Además, se tiene que $||y||=||f(y)||=0\Longleftrightarrow f(y)=0\Longleftrightarrow y=0$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.

- $||\lambda y||=||f(\lambda y)||$. Por ser f lineal, tenemos que $||f(\lambda y)||=||\lambda f(y)||$, y por ser esta una norma en X, tenemos que $||\lambda f(y)||=|\lambda|\ ||f(y)||$. Por hipótesis, tenemos que $|\lambda|\ ||f(y)||=|\lambda|\ ||y||$, por lo que se tiene que $||\lambda y||=|\lambda|\ ||y||$.

- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$||x+y|| = ||f(x+y)|| \overset{(*)}{=} ||f(x)+f(y)|| \leqslant ||f(x)|| + ||f(y)|| = ||x|| + ||y||$$

  donde en $(*)$ hemos empleado que f es una aplicación lineal.

El resultado análogo para espacios métricos es:

Sean X un espacio métrico, Y un conjunto y $f : Y \to X$ una aplicación inyectiva. Probar que, definiendo

$$d(y, y') = d[f(y), f(y')], \qquad y, y' \in Y$$

se obtiene una distancia en Y. Demostrémoslo:

- $d(y, y') = d[f(y), f(y')] \geqslant 0$ por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia. Además, se tiene que $d(y, y') = d[f(y), f(y')] = 0 \iff f(y) = f(y') \iff y = y'$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.
- La simetría se obtiene trivialmente por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia en X.
- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$d(y, y') = d[f(y), f(y')] \leqslant d[f(y), f(z)] + d[f(z), f(y')] = d(y, z) + d(z, y')$$

Nótese que para los espacios métricos no se impone que Y sea un espacio vectorial ni que f sea una forma lineal inyectiva. Tan solo se imponen que X sea un conjunto e Y una aplicación inyectiva.

1.2. Topología de un espacio métrico

Ejercicio 1.2.1. Probar que, en todo espacio métrico, la distancia queda determinada cuando se conocen las bolas abiertas. En el caso particular de un espacio normado, probar que la norma queda determinada cuando se conoce la bola abierta unidad.

Sea el espacio métrico (E, d). Sean $x, y \in E$, y definimos el siguiente conjunto $A = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$. Tenemos que A no es vacío, ya que $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} B(x, \varepsilon) = E$. Por tanto, por el Teorema del Ínfimo tenemos que $\exists \inf A$. Demostramos que:

$$d(x, y) = \inf A = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$$

Para ello, vemos en primer lugar que $d(x, y)$ es un minorante de A. Demostramos por reducción al absurdo, suponiendo que $\exists \rho \in A \mid \rho < d(x, y)$. Entonces, por definición de A se tiene que $y \in B(x, \rho) \subset B(x, d(x, y))$. Por tanto, se tiene que $y \in B(x, d(x, y))$, por lo que $d(x, y) < d(x, y)$, siendo esto una contradicción.

Por tanto, $d(x, y) \leqslant \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in A$. Veamos además que $\exists \{\varepsilon_n\} \to d(x, y)$, con $\varepsilon_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon_n := d(x, y) + \frac{1}{n}$. Comprobemos que $\varepsilon_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_n = d(x, y) + \frac{1}{n} \in A \Longleftrightarrow y \in B\left(x, d(x, y) + \frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow d(x, y) < d(x, y) + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{n}$$

Además, tenemos que es trivial que $\{\varepsilon_n\} \to d(x, y)$. Por tanto, por la caracterización del ínfimo con sucesiones, tenemos que

$$d(x, y) = \inf A = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid y \in B(x, \varepsilon)\}$$

Hemos demostrado que, a partir de las bolas abiertas, podemos conocer la distancia entre dos puntos arbitrarios de E.

En el caso del espacio normado, tenemos que $\|x\| = d(x, 0) = d(0, x)$. Entonces:

$$\|x\| = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid x \in B(0, \varepsilon)\} = \inf\left\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)\right\}$$

donde la primera desigualdad se debe a lo ya demostrado, y la segunda se debe a que:

$$x \in B(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow \|x\| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| < 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)$$

Ejercicio 1.2.2. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$. Probar las siguientes afirmaciones. ¿Son ciertos los resultados análogos en un espacio métrico cualquiera?

1. $B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \Longleftrightarrow ||y - x|| < r + \rho$.

   Al ser un espacio normado, podemos considerar la distancia correspondiente a la norma: $d(x, y) = ||y - x||$, $\forall x, y \in X$. Entonces:

$\Longrightarrow$) Sea $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$. Entonces,

$$||y-x|| = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z) < r + \rho$$

$\Longleftarrow$) Suponemos $||y-x|| = d(x,y) < r+\rho$, y buscamos $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$.

Consideramos $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ punto arbitrario del segmento que uno x e y. Veamos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que z está en la intersección. Supongamos que lo está y veamos si existen dichos valores de λ.

$$\begin{aligned}
z \in B(x,r) &\Longrightarrow d(x,z) < r \Longrightarrow d(x, \lambda x + (1-\lambda)y) < r \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \|(1-\lambda)y - (1-\lambda x)x\| = (1-\lambda)\|x-y\| < r \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \lambda \\
z \in B(y,\rho) &\Longrightarrow d(y,z) < \rho \Longrightarrow d(y, \lambda x + (1-\lambda)y) < \rho \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \|\lambda(x-y)\| = \lambda\|x-y\| < \rho \Longrightarrow \lambda < \frac{\rho}{\|x-y\|}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \lambda < \frac{\rho}{\|x-y\|}$$

Dicho valor de λ existirá si y solo si $1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \frac{\rho}{\|x-y\|}$. Veámoslo:

$$1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \frac{\rho}{\|x-y\|} \Longleftrightarrow \|x-y\| - r < \rho \Longleftrightarrow \|x-y\| < r + \rho$$

Que es cierto por hipótesis. Por tanto, tenemos que la intersección no es nula.

Este resultado no es cierto para un espacio métrico cualquiera. Sea (X, d_{disc}). Entonces $B_1\left(0, \frac{3}{4}\right) = \{0\}$, $B_2\left(1, \frac{3}{4}\right) = \{1\}$. Se tiene que la intersección es nula. No obstante,

$$d(0,1) = 1 < \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

2. $B(y,\rho) \subset B(x,r) \Longleftrightarrow ||y-x|| < r - \rho$.

$\Longrightarrow$) Sea $z = x + \frac{r}{\|y-x\|}(y-x)$ un punto arbitrario de

Como $\|z-x\| = \left\| \frac{r'}{\|y-x\|}(y-x) \right\| = r' \cdot \left\| \frac{y-x}{\|y-x\|} \right\| = r' < r$, tenemos que $z \in B(y,\rho)$.

Al ser $B(y,\rho) \subset B(x,r)$, tenemos que $z \in B(x,r)$. Es decir, $\|z-x\| < r$. Entonces:

$$\|z-x\|$$

TERMINAR

$\Longleftarrow$) Sea $z \in B(y,\rho)$, es decir, $d(y,z) < \rho$. Veamos que $d(x,z) < r$.

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < r - p + \rho = r$$

Por tanto, tenemos que $z \in B(x,r)$, por lo que se da la inclusión buscada.

Este resultado no es cierto para un espacio métrico cualquiera. Sea (X, d_{disc}). Entonces $B_1(0,1) = \{0\}$, $B_2\left(0, \frac{3}{4}\right) = \{0\}$. Se tiene trivialmente que

$$B_1(0,1) = \{x\} \subset \{x\} = B_2\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

No obstante,

$$d(0,0) = 0 > r - \rho = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.2.3. Dar un ejemplo de una familia numerable de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección no sea un conjunto abierto.

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea la familia $\left\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que, como $\mathbb{N}$ es numerable, el conjunto también lo es. Es directo ver que su intersección es $\{x\}$, el cual no es un abierto porque $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \{x\}$.

Ejercicio 1.2.4. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico E con distancia d, se define la *distancia* de un punto $x \in E$ al conjunto A por

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

Probar que $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$.

$\subset$) Sea $x \in \overline{A} \subset E$. Entonces, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, sea $z_n \in A$ tal que

$$0 \leqslant d(x, z_n) < \frac{1}{n}$$

Por el lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x,z_n)\} \to 0$. Además, como se tiene que $0 \leqslant d(x,a)\ \forall a \in A$, tenemos que 0 es un minorante del conjunto. Por tanto, por la caracterización del ínfimo con sucesiones[1], tenemos que

$$0 = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} = d(x,A).$$

$\supset$) Sea $x \in E$ tal que $d(x,A) = 0 = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$. Entonces, $\exists \{d(x,z_n)\} \to 0$, con $z_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\exists \{z_n\}$ tal que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, tomando $n \geqslant m$, entonces $d(x,z_n) < \varepsilon$.

Por tanto, $\exists \{z_n\}$ tal que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$, entonces $z_n \in B(x,\varepsilon)$, $z_n \in A$. Entonces, $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, y, consecuentemente, $x \in \overline{A}$.

Ejercicio 1.2.5. Sea X un espacio normado, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, probar que

[1] El ínfimo de un conjunto es el único minorante que es límite de una sucesión de elementos del conjunto.

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$,

   $\subset$) Tenemos que $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}$. Entonces, como $\overline{B(x,r)}$ es el mínimo cerrado que contiene a $B(x,r)$, y las bolas cerradas son cerrados, tenemos que $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$.

   $\supset$) (Opción que usa la caracterización secuencial del cierre).
   Tenemos que $y \in \overline{B(x,r)}$ si y solo si $\exists \{y_n\} \to y$, con $d(x,y_n) < r \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Sea $y \in \overline{B}(x,r)$, es decir, $d(x,y) \leqslant r$. Entonces, definimos la sucesión $\{y_n\} = \{y - \frac{1}{n}(y-x)\}$. Tenemos claramente que $\{y_n\} \to y$. Veamos que $d(x,y_n) < r \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(x,y_n) = d\left(x, y - \frac{1}{n}(y-x)\right) = \left\| y - x - \frac{1}{n}(y-x) \right\| = \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y-x) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) d(x,y) < d(x,y) \leqslant r$$

   Por tanto, tenemos que existe la sucesión buscada, por lo que $y \in \overline{B}(x,r)$.

   $\supset$) Hemos de demostrar que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. Tenemos que

$$\overline{B}(x,r) = B(x,r) \amalg^{2} S(x,r)$$

   En el caso de $y \in B(x,r)$, tenemos claramente que $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.
   En el caso de $y \in S(x,r)$, veamos que $y \in \overline{B(z,r)}$, es decir hay que comprobar que $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por el apartado 1 del ejercicio 1.2.2, tenemos que esto se da si y solo si $\|x-y\| < r + \varepsilon$, lo cual es cierto ya que $\|x-y\| = r$, por lo que $S(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

   Por tanto, como ambos conjuntos son subconjuntos de $\overline{B(x,r)}$, se tiene de forma directa.

2. $B(x,r) = [\overline{B}(x,r)]^\circ$

   $\subset$) Como las bolas abiertas son abiertos métricos, tenemos la siguiente igualdad: $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ$. Además, tenemos que:

$$[B(x,r)]^\circ = \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset B(x,r)\} \qquad \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \bigcup \{V \in \mathcal{T} \mid V \subset \overline{B}(x,r)\}$$

   Como $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$, tenemos que $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ \subset \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$, teniendo por tanto esta inclusión.

   $\supset$) Sea $y \in \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$. Entonces, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(y,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,r)$. Entonces, por el ejercicio 1.2.2, apartado 2, tenemos que $\|x-y\| \leqslant r - \varepsilon < r$. Por tanto, $d(x,y) < r$, por lo que $y \in B(x,r)$.

Deducir que $\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = S(x,r)$.

$$\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \overline{B(x,r)} \setminus [B(x,r)]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$
$$\mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = \overline{\overline{B}(x,r)} \setminus \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$

[2]Símbolo de unión de disjunta.

donde he empleado que $U \in \mathcal{T} \iff A = A^\circ$ y $C \in C_\mathcal{T} \iff C = \overline{C}$; junto que las bolas abiertas son abiertos métricos, y las bolas cerradas son cerrados métricos.

¿Son ciertos estos resultados en un espacio métrico cualquiera?

No. Sea (X, d_{disc}) espacio métrico asociado a la distancia discreta. Entonces, tomamos $B(0,1) = \{0\}$. Tenemos que $\overline{B}(0,1) = X$. No obstante, en el primer caso $\overline{B}(0,1) = \{0\} \neq X$, y en el segundo caso $[\overline{B}(x,r)]^\circ = X^\circ = X$ por ser este un abierto.

Ejercicio 1.2.6. Para un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, calcular los conjuntos J°, $\overline{J}$, J' y $\operatorname{Fr} J$.

Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Calculamos en primer lugar el interior para los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
]a,b[&= [a,b]^\circ = [a,b[^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[^\circ \\
]-\infty,b[&=]-\infty,b]^\circ =]-\infty,b[^\circ \\
]a,+\infty[&= [a,+\infty[^\circ =]a,+\infty[^\circ \\
\mathbb{R} &= [\mathbb{R}]^\circ
\end{aligned}$$

Calculamos ahora el cierre de los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} \\
]-\infty,b] &= \overline{]-\infty,b]} = \overline{]-\infty,b[} \\
[a,+\infty[&= \overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} \\
\mathbb{R} &= \overline{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Veamos ahora el valor de J'. Tenemos que el conjunto de los puntos aislados es $\overline{J} \setminus J'$. Como un intervalo no tiene puntos aislados, tenemos que $\overline{J} \setminus J' = \emptyset$, por lo que $\overline{J} = J'$ para todo J intervalo.

Veamos el valor de la frontera:

$$\begin{aligned}
\{a,b\} &= \operatorname{Fr}[a,b] = \operatorname{Fr}[a,b[= \operatorname{Fr}]a,b] = \operatorname{Fr}]a,b[\\
\{b\} &= \operatorname{Fr}]-\infty,b] = \operatorname{Fr}]-\infty,b[\\
\{a\} &= \operatorname{Fr}[a,+\infty[= \operatorname{Fr}]a,+\infty[\\
\emptyset &= \operatorname{Fr}\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. En el espacio métrico $\mathbb{R}$ y para cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, calcular su interior y su cierre, sus puntos de acumulación, sus puntos aislados y su frontera.

Números naturales $\mathbb{N}$:

1. $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{N}$.
2. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \iff x \in \mathbb{N}$
3. $\mathbb{N}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{N} \setminus \{x\} = \emptyset$.

4. $\overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}' = \mathbb{N}$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}^\circ = \mathbb{N}$.

Números enteros $\mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{Z}$.

2. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

3. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Z} \setminus \{x\} = \emptyset$.

4. $\overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^\circ = \mathbb{Z}$.

Números racionales $\mathbb{Q}$:

1. $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{Q}$.

2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de racionales.

3. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.

4. $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}' = \emptyset$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}$.

Números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

1. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$.

2. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de irracionales.

3. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.

4. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \emptyset$.

5. $\mathrm{Fr}([\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]) = \overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.8. Si un subconjunto A de un espacio métrico E verifica que $A' = \emptyset$, probar que la topología inducida por E en A es la discreta. ¿Es cierto el recíproco?

Recordamos que $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$. Además, tenemos que el conjunto de puntos aislados de un espacio métrico es $\overline{A} \setminus A'$. Como $A' = \emptyset$, tenemos que el conjunto de puntos aislados es $\overline{A} \supset A$, por lo que todo punto de A es aislado.

Por tanto, $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \cap B(x,\varepsilon) = \{x\}$. Entonces, tenemos que $A \cap B_A(x,\varepsilon) = \{x\}$. Tenemos que $A \in \mathcal{T}_A$ y $B_A(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}_A$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{T}_A$ por ser la intersección de dos abiertos. Además, como la unión arbitraria de abiertos es abierta, tenemos que, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$.

Además, trivialmente se tiene que $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{P}(A) = \mathcal{T}_{disc}$. Por doble inclusión, se tiene que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc}$.

El recíproco indica que, dado $A \subset E$, con $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc} \Longrightarrow A' = \emptyset$. Veamos que no es cierto. Sea $E = \mathbb{R}$ espacio métrico, y consideremos $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

Para ver que $\mathcal{T}_{disc} \subset \mathcal{T}_A$, veamos que $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{T}_A\ \forall \frac{1}{n} \in A$, es decir, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, tenemos que:

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \geqslant \varepsilon$$
$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \geqslant \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ se da. Por tanto, $\{x\} \in \mathcal{T}_A\ \forall x \in A$. Como las uniones arbitrarias de abiertos es abierto, tenemos que $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$. La otra inclusión es trivial, por lo que tenemos que ambas topologías son iguales.

Veamos ahora que $A' \neq \emptyset$, ya que $0 \in A'$. Como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, por definición de convergencia en $\mathbb{R}$ tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, entonces $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon$. Entonces, tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$B(0,\varepsilon) \cap (A \setminus \{0\}) = B(0,\varepsilon) \cap A = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant n_0\right\} \neq \emptyset \Longrightarrow 0 \in A'.$$

Ejercicio 1.2.9. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes en un espacio métrico E con distancia d. Probar que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente y calcular su límite.

Por ser ambas sucesiones convergentes, tenemos que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$$
$$\{y_n\} \to y \Longrightarrow d(y_n, y) \to 0$$

Además, aplicando las propiedades de la distancia, tenemos que:

$$0 \leqslant |d(x_n, x) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites y por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$.

Vemos ahora lo siguiente:

$$0 \leqslant |d(x_n, y) - d(y_n, y)| \leqslant d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, y) + d(y, y_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites, por el Lema del Sándwich y sabiendo que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$, tenemos que
$$\{d(x_n, y_n)\} \to d(x, y).$$

Ejercicio 1.2.10. Sea $E = \prod_{k=1}^{N} E_k$ un producto de espacios métricos y $A = \prod_{k=1}^{N} A_k \subset E$, donde $A_k \subset E_k$ para todo $k \in \Delta_N$. Probar que $A^\circ = \prod_{k=1}^{N} A_k^\circ$ y $\overline{A} = \prod_{k=1}^{N} \overline{A_k}$. Deducir que A es un abierto de E si, y sólo si, A_k es un abierto de E_k para todo $k \in \Delta_N$, mientras que A es un cerrado de E si, y sólo si, A_k es un cerrado de E_k para todo $k \in \Delta_N$.

TERMINAR

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A} &\Longleftrightarrow \exists\{x_n\} \to x, \text{ con } x_n \in A = \prod_{k=1}^{N} A_k \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \exists\{x_n(k)\} \to x(k), \text{ con } x_n(k) \in A_k \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x(k) \in \overline{A_k}
\end{aligned}
$$

1.3. Continuidad y límite funcional

Ejercicio 1.3.1. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ una función. Probar que f es continua si, y sólo si, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para todo conjunto $A \subset E$.

Ejercicio 1.3.2. Dado un subconjunto A de un espacio métrico E, la función característica de A es la función $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_A(x) = 1 \ \ \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \chi_A(x) = 0 \ \ \forall x \in E \setminus A$$

Probar que χ_A es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$. Deducir que χ_A es continua si, y sólo si, A es a la vez abierto y cerrado.

Ejercicio 1.3.3. Si E y F son espacios métricos, se dice que una función $f : E \to F$ es *localmente constante* cuando, para cada $x \in E$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f\big|_U$ es constante. Probar que entonces f es continua. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una función localmente constante $f : A \to \mathbb{R}$, cuya imagen $f(A)$ sea un conjunto infinito.

Ejercicio 1.3.4. Sea E un espacio métrico con distancia d y A un subconjunto no vacío de E. Probar la continuidad de la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = d(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\} \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.3.5. Sea E un espacio métrico con distancia d, y consideremos el espacio producto $E \times E$. Probar que, $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{(x, y) \in E \times E \mid d(x, y) < r\}$ es abierto, mientras que $\{(x, y) \in E \times E \mid d(x, y) \leqslant r\}$ es cerrado. En particular se tiene que la diagonal $\Delta(E) = \{(x, x) \mid x \in E\}$ es un conjunto cerrado. Deducir que, si F es otro espacio métrico y $f, g : E \to F$ son funciones continuas, entonces $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de E .

Ejercicio 1.3.6. Sean E, F espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Probar que su gráfica, es decir, el conjunto $\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ es un subconjunto cerrado del espacio métrico producto $E \times F$.

Ejercicio 1.3.7. Sea E un espacio métrico e Y un espacio pre-hilbertiano. Para $f, g \in \mathcal{F}(E, Y)$, se define una función $h \in \mathcal{F}(E)$ por $h(x) = (f(x) \mid g(x))$ para todo $x \in E$. Probar que, si f, g son continuas en un punto $a \in E$, entonces h también lo es.

Ejercicio 1.3.8. Sea E un espacio métrico y $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un punto $a \in E$. Probar que la función $h : E \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{máx}\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in E$, también es continua en a.

Ejercicio 1.3.9. Probar que si Y es un espacio normado, E un espacio métrico y $f : E \to Y$ una función continua en un punto $a \in E$, entonces la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|f(x)\|$ para todo $x \in E$, también es continua en el punto a.

Ejercicio 1.3.10. Probar las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle \operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$

2. $\displaystyle \operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} = 1.$

1.4. Vector Gradiente

Ejercicio 1.4.1. Calcular todas las derivadas direccionales en el punto $(-1,0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z)=x^3-3xy+z^3 \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Sea $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$ la dirección. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f'_u(-1,0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f[(-1,0,0)+tu]-f(-1,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-1+tu_1,tu_2,tu_3)+1}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(-1+tu_1)^3-3tu_2(-1+tu_1)+t^2u_3^3+1}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{-1}+3tu_1-3t^2u_1^2+t^3u_1^3+3tu_2-3t^2u_2u_1+t^2u_3^3+\cancel{1}}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}3u_1-3tu_1^2+t^2u_1^3+3u_2-3tu_2u_1+tu_3^3=\\
&=3(u_1+u_2)
\end{aligned}$$

Por tanto, dada cualquier dirección u se tiene su derivada direccional en dicho punto.

Ejercicio 1.4.2. Fijado $p\in\mathbb{R}^*$, se considera la función $f:\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\|x\|^p$ para todo $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Probar que $f\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, con

$$\nabla f(x)=p\|x\|^{p-2}x \qquad \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$$

Como consecuencia, encontrar una función $g\in C^1(\mathbb{R}^n)$ que verifique

$$\nabla g(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Desarrollamos la expresión de la norma euclídea:

$$f(x)=\|x\|^p=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^p \qquad \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{(0,0)\}$$

Calculemos las derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=p\|x\|^{p-1}\cdot\frac{1}{2\|x\|}\cdot 2x_i=p\|x\|^{p-2}x_i \qquad \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{(0,0)\}$$

Por tanto, $\quad \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{(0,0)\}$ tenemos que:

$$\nabla f(x)=\left(p\|x\|^{p-2}x_1,\dots,p\|x\|^{p-2}x_i,\dots,p\|x\|^{p-2}x_n\right)=p\|x\|^{p-2}\cdot x$$

Además, como ∇f es una función claramente continua, $f\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.
La función g pedida vemos que es la siguiente:

$$g(x)=\frac{\|x\|^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Ejercicio 1.4.3. Sea J un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $f : J \to \Omega$ es una función derivable en un punto $a \in J$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $b = f(a)$, probar que la función $h : g \circ f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en punto a, con:

$$h'(a) = (\nabla g(b) \mid f'(a))$$

Por la regla de la Cadena, sabemos que $Dh(a) = Dg(b) \circ Df(a)$. Como h es una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$, tenemos que $h'(a) = Dh(a)(1)$. Análogamente, tenemos que $Df(a)(1) = f'(a)$. Por tanto,

$$h'(a) = Dh(a)(1) = (Dg(b) \circ Df(a))(1) = Dg(b)(Df(a)(1)) = Dg(b)(f'(a))$$

Como g es diferenciable en b, tenemos que:

$$Dg(b)(f'(a)) = (\nabla g(b) \mid f'(a))$$

como se pedía demostrar.

Ejercicio 1.4.4. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie explícita de ecuación $z = x + y^3$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en el punto $(1, 1, 2)$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y^3$. Tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$; y las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$$

Por tanto, $\nabla f(1, 1) = (1, 3)$. Por tanto, la ecuación del plano tangente a dicha superficie en en punto $(1, 1, 2)$ es:

$$\pi \equiv z - 2 = 1(x - 1) + 3(y - 1) \Longrightarrow \pi \equiv x + 3y - z = 2$$

Ejercicio 1.4.5. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se considera la superficie explícita $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x, f(x, z), z) \mid (x, z) \in \Omega\}$$

Calcular la ecuación del plano tangente a S en un punto arbitrario $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Usamos la siguiente notación:

$$y_0 = f(x_0, z_0) \qquad \alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, z_0) \qquad \beta_0 = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0)$$

Veamos ahora que dicho plano es el siguiente:

$$\Pi \equiv y - y_0 = \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(z - z_0)$$

Tenemos que se trata de una superficie explícita, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida por:

$$g(x,z) = f(x_0,z_0)+\alpha_0(x-x_0)+\beta_0(z-z_0) = f(x_0,z_0)+(\nabla f(x_0,z_0) \mid [(x,z)-(x_0,z_0)]) \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} f(x_0,z_0) + Df(x_0,y_0)[(x,z)-(x_0,z_0)])$$

donde en $(*)$ he aplicad la relación de la diferencial con su gradiente como producto escalar. Además, por el significado analítico de la diferencial, tenemos que:

$$\lim_{(x,z)\to(x_0,z_0)} \frac{f(x,z)-g(x,z)}{\|(x,z)-(x_0,z_0)\|} = 0$$

Es decir, g es una buena aproximación de f cerca del punto buscado. Por tanto, el plano tangente es Π mencionado.

Ejercicio 1.4.6. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$ una función parcialmente derivable en todo punto de Ω. Probar que, si la función $\nabla f:\Omega\to\mathbb{R}^2$ está acotada, entonces f es continua. Usando la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \quad f(0,0)=0$$

comprobar que, con las mismas hipótesis, no se puede asegurar que f sea diferenciable.

2. Prácticas

2.1. Continuidad

Ejercicio 2.1.1. Estudiar la continuidad de los campos escalares definidos por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4} \qquad h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$.

Tenemos que $\{(0,0)\} \in C_{\mathcal{T}_u}$, por lo que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \in \mathcal{T}_u$. Tenemos que $f_{|_U}, g_{|_U}, h_{|_U}$ son racionales, por lo que son una funciones continuas. Por tanto, por el carácter local de la continuidad tenemos que f, g, h son continuas en todo punto de U. Veamos ahora si son continuas en el origen.

En este caso, al ser el límite en el origen son de ayuda los límites direccionales en coordenadas cartesianas. Dado $x \in \mathbb{R}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^2(1+\lambda^4 x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{1+\lambda^4 x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} h(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^4 x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x}{1+\lambda^4 x^2} = 0$$

Por tanto, tenemos que los límites direccionales en f depende de λ, por lo que tenemos que no coinciden. Por tanto, f **no tiene límite en el origen.**

Para el caso de g, h, tenemos todos sus límites direccionales excepto uno: el uso de coordenadas cartesianas no nos sirve para calcular el límite en la dirección de e_2. Calculamos por tanto el segundo límite parcial:

$$\lim_{t\to 0} g(0,t) = \frac{0}{0+t^4} = \lim_{t\to 0} h(0,t)$$

Por tanto, tenemos que todos los límites direccionales de g, h existen y son iguales a 0. Por tanto, de existir el límite, este será 0. Intentemos realiza una acotación:

$$0 < |g(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \cdot |y| < |y|$$

$$0 < |h(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{y^2}{x^2+y^4}\right| \cdot |x| < |x|$$

Como $(x,y) \to (0,0)$, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$$

Ejercicio 2.1.2. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \cdot \operatorname{sen}(x+y) & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0 \end{cases}$$

Veamos que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \neq 0\} \in \mathcal{T}_u$. Para ello, vemos que el siguiente conjunto es un cerrado: $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\} \in C_{\mathcal{T}_u}$. Definimos la función polinómica continua $f(x,y) = x+y$. Tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U = f^{-1}(\{0\})$, que es un cerrado por ser f continua y $\{0\} \in C_{\mathcal{T}_u}$. Por tanto, tenemos que $U \in \mathcal{T}_u$.

La restricción de f a U es el producto de una función racional por la composición de la función suma con el seno, ambas continuas. Por tanto, $f_{|_U}$ es continua. Por tanto, por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Veamos ahora en los puntos que no pertenecen a U:

$$\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=-y\} = \{(a,-a) \in \mathbb{R}^2\}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. $a \neq 0$. Es decir, excluimos en esta distinción el origen. Estudiemos los límites parciales:

$$\lim_{x\to a} f(x,-a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2+a^2}{x-a} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} = \frac{2a^2}{0} \cdot 1 = \pm\infty$$

   donde he aplicado que $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} = 1$. El signo del límite dependerá si es el límite por la derecha o por la izquierda, pero en cualquier caso diverge. Por tanto, como no existe el primer límite parcial, tenemos que f no es continua en ningún punto de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} \setminus \{(0,0)\}$.

2. $a = 0$. Es decir, estudiamos en el origen. En este caso, nos puede ser de ayuda calcular los límites direccionales en coordenadas.

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\lambda^2)}{x^2(1+\lambda)^2} \cdot \operatorname{sen}[x(1+\lambda)] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\lambda^2)}{x(1+\lambda)} \cdot \frac{\operatorname{sen}[x(1+\lambda)]}{x(1+\lambda)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\lambda^2)}{1+\lambda} \cdot \frac{\operatorname{sen}[x(1+\lambda)]}{x(1+\lambda)} = 0$$

   donde he aplicado que $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} = 1$. Por tanto, vemos que no aporta información. Realizamos el siguiente cambio de variable: $(x,y) = \varphi(t) = (t, -t+t^p)$ para cierto $p \in \mathbb{N}$. Comprobemos que este cambio de variable es válido:

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = (0,0) \qquad \varphi(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ \forall t \neq 0.$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to 0} f(t, -t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+(-t+t^p)^2}{t^p}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+t^2+t^{2p}-2t^{p+1}}{t^p}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p} = \lim_{t\to 0}\frac{2+t^{2p-2}-2t^{p-1}}{t^{p-2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p}\end{aligned}$$

Para $p > 2$ (3, por ejemplo), tenemos que $(f\circ\varphi)(t)$ diverge en 0, por lo que f no tiene límite en el origen. Por tanto, f no es continua en el origen.

En conclusión, se tiene que f solo es continua en U. Es decir, f es continua en $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ si y solo si $x + y \neq 0$.

Ejercicio 2.1.3. Estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\log(1+x^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x=y=0\end{cases}$$

Sea $U = \mathbb{R}\setminus\{(0, 0)\}$. Como un único punto es un cerrado, tenemos que U es abierto. Veamos que la restricción de f a U es continua. Tenemos que es el producto de una función racional con la función $(x, y) \mapsto \log(1+x^2)$. Esta es una composición de una función polinómica que toma valores en $\mathbb{R}^+$ con el logaritmo, que es continua en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, tenemos que la composición es continua, y por tanto f es continua en U. Estudiemos el caso del origen.

En primer lugar, definimos $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

Es importante notar que $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 1$. Por tanto, tenemos que $\ln(1 + x^2) = x^2\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Entonces:

$$0 < |f(x,y)| = \left|\frac{y\log(1+x^2)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{y\cdot\varphi(x)x^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\cdot|y\cdot\varphi(x)| < |y\cdot\varphi(x)|$$

Como tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\varphi(x) = 0\cdot 1 = 0$, por la acotación conseguida se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Por tanto, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.1.4. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto dado por $a = (0, 1, 2)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y,z) = \frac{x(y-1)(z-2)}{(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2)^\alpha} \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{a\}$$

Hacemos uso de los límites direccionales según la dirección de $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, con $\|(u, v, w)\|_2 = 1$:

$$\lim_{t\to 0} f(tu, 1+tv, 2+tw) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cdot uvw}{(t^2(u^2+v^2+z^2))^\alpha} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cdot uvw}{t^{2\alpha}} = \lim_{t\to 0} t^{3-2\alpha}\cdot uvw$$

Distinguimos según los valores de α:

1. Para $3 - 2\alpha < 0 \iff \alpha > \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = \pm\infty$, dependiendo de si es el límite por la derecha o por la izquierda. En cualquier caso, tenemos que no existen los límites direccionales y, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2. Para $3 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = uvw$, por lo que el valor del límite direccional depende de la dirección. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3. Para $3 - 2\alpha > 0 \iff \alpha < \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = 0$, por lo que todos los límites direccionales son iguales a 0.

   Intentemos realizar la acotación. Para ello, acotamos en su lugar la función resultante del límite direccional $f(tu, 1+tv, 2+tw) = t^{3-2\alpha} \cdot uvw$.

   Haciendo uso de que $\|(u, v, w)\|_2 = 1 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, veamos que $|uvw| \leqslant 1$:

   $$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 1 \Longrightarrow \sqrt{u^2} = |u| \leqslant 1$$

   Análogamente, se tiene que $|v|, |w| \leqslant 1$, por lo que $|uvw| \leqslant 1$. Por tanto, tenemos que:

   $$0 < |f(tu, 1+tv, 2+tw)| = |t^{3-2\alpha} \cdot uvw| = |t^{3-2\alpha}| \cdot |uvw| \leqslant |t^{3-2\alpha}|$$

   Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to a} f(x, y, z) = 0$.

Ejercicio 2.1.5. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, estudiar la existencia de límite en el origen del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2 - xy} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

En este caso, tenemos que solo está definida en el primer cuadrante. Por tanto, no tiene sentido considerar todos los límites radiales, sino tan solo los que se encuentran en el primer cuadrante. Usando coordenadas polares, sea $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) &= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \\
&= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{1 - \cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2 - \operatorname{sen}(2\theta)}
\end{aligned}$$

Distinguimos según los valores de α:

1. Para $\alpha + \beta < 2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = +\infty$. No existen los límites radiales y, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$.

2. Para $\alpha + \beta = 2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}$, por lo que el valor del límite direccional depende del ángulo θ. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$.

3. Para $\alpha + \beta > 2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = 0$, por lo que todos los límites radiales son iguales a 0.

   Intentemos realizar la acotación. Para ello, acotamos en su lugar la función resultante del límite radial $f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}$.

   $$0 < |f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)| = \left|2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}\right| \leqslant \left|2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}\right| \leqslant \left|2\rho^{\alpha+\beta-2}\right|$$

   Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to 0} f(x,y,z) = 0$.

Ejercicio 2.1.6. Estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \qquad && \forall x,y \in \mathbb{R}^* \\ f(x,0) &= f(0,y) = 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} && \end{aligned}$$

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $(x,y) \mapsto xy$ la función continua producto. Tenemos que $A = g^{-1}\{0\}$, y $\{0\}$ es un cerrado. Por tanto, tenemos que A es un cerrado y $U = \mathbb{R} \setminus A$ es un abierto.

La restricción de f a U es un producto de tres funciones continuas. La primera es polinómica, y las otras dos funciones son composiciones de funciones racionales con el seno, que es una función continua. Por tanto, tenemos que $f\big|_U$ es continua. Por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en cualquier punto de U. Veamos ahora para los puntos de A.

Tenemos que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, por lo que al menos una de las dos coordenadas ha de ser nula:

1. Sean los puntos $(a,0)$, con $a \neq 0$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:

   $$\lim_{y\to 0} f(a,y) = \lim_{y\to 0}(a+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$$

   a) Supongamos $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} \neq \pi k \Longleftrightarrow a \neq \frac{1}{\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$.

   Entonces, tenemos que $a\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) \neq 0$. Como $\lim\limits_{y\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$ no converge, tenemos que $\lim\limits_{y\to 0} f(a,y)$ tampoco lo hace, por lo que f no es continua en estos puntos.

b) Supongamos $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \iff \frac{1}{a} = \pi k \iff a = \frac{1}{\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$.
Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) =$$
$$= a\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\cdot \operatorname{sen}(\infty) = 0\cdot\operatorname{sen}(\infty) = 0$$

2. Sean los puntos $(0,a)$, con $a \neq 0$. Entonces, como la función es simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$), se tiene que ocurre al igual que en el caso pasado.
   Si $a = \frac{1}{\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$, entonces la función en $(0,a)$ converge a 0.
   Si $a \neq \frac{1}{\pi k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, entonces la función en $(0,a)$ no tiene límite en $(0,a)$.
3. Estudiamos ahora el origen:
   Realizamos la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leqslant |x+y| \qquad \forall x,y \neq \frac{1}{\pi k}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}^*$$

   Por tanto, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| = 0$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Ejercicio 2.1.7. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, como se indica:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
   Comprobamos los límites direccionales en coordenadas cartesianas, que al ser el límite en el origen quedan:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\lambda^2)}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

   Por tanto, como vemos que los límites direccionales dependen del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que f no tiene límite en el origen.
2. $g(x,y) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}$
   Tenemos la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |g(x,y)| = \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\operatorname{sen} y\right| \leqslant |\operatorname{sen} y|$$

   Tenemos que $\lim\limits_{y\to 0} \operatorname{sen} y = 0$. Por tanto, como tenemos la acotación buscada, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

3. $h(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^4)\operatorname{sen}^2(y)}{y^4+x^8}$

Definimos $\varphi, \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$ y $\Psi(x) = \frac{\ln(1+x^4)}{x^4}$, tal que $\operatorname{sen}^2 y = \varphi^2(y)\cdot y^2$ y $\ln(1+x^4) = \Psi(x)\cdot x^4$. Además,

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\Psi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^4)}{x^4} = 1$$

Veamos cuánto valen los límites parciales:

$$\lim_{x\to 0} h(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^4)\cdot 0}{x^8} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^8} = 0$$

Aplicamos ahora este cambio de variable $x = \varphi(t) = (t, t^2)$. Entonces:

$$\lim_{t\to 0} h(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^4)\operatorname{sen}^2(t^2)}{t^8+t^8} = \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(t)\cdot \cancel{t^4}\cdot\varphi^2(t^2)\cdot\cancel{t^4}}{2\cancel{t^8}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos que aplicando el cambio de variable $x = (t,t^2)$ obtenemos un candidato a límite distinto que usando $x = (t,0)$. Por tanto, tenemos que h no tiene límite en el origen.

Ejercicio 2.1.8. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x,y)\in\mathbb{R}^n$, como se indica:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si } \; x \neq y \\ 0 & \text{si } \; x = y \end{cases}$

Sea el subconjunto $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$, y consideramos su complementario $\mathbb{R}^2\setminus U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-y=0\}$. Por tanto, dada $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $f(x,y) = x-y$ función continua, tenemos que $U = f^{-1}\{0\}$. Por tanto, como es la imagen inversa de un cerrado por una función continua, tenemos que U es un abierto. Además, como $f_{|U}$ es una función racional, tenemos que es continua. Por el carácter local de continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Para los puntos de $\mathbb{R}^2\setminus U$, tenemos que $\mathbb{R}^2\setminus U = \{(a,a)\in\mathbb{R}^2 \mid a\in\mathbb{R}\}$. Entonces, para estudiar los límites laterales, realizamos la siguiente distinción:

a) Si $a\neq 0$:
$$\lim_{x\to a} f(x,a) = \lim_{x\to a}\frac{x+a}{x-a} = \frac{2a}{0} = \pm\infty$$
Tenemos que $f(x,a)$ diverge en (a,a), por lo que f no tiene límite en (a,a) para todo $a\neq 0$.

b) Si $a=0$, tenemos:
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = -1$$

Por tanto, tenemos que los límites laterales no coinciden, por lo que f no tiene límite en el origen.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases}$

Sea el subconjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y^2\}$, y consideramos su complementario $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. Por tanto, dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = x^2 - y^2$ función continua, tenemos que $U = f^{-1}\{0\}$. Por tanto, como es la imagen inversa de un cerrado por una función continua, tenemos que U es un abierto. Además, como $f_{|U}$ es una función racional, tenemos que es continua. Por el carácter local de continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Para los puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus U$, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(a,a),(a,-a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, para estudiar los límites laterales, realizamos la siguiente distinción:

a) Si $a \neq 0$:
$$\lim_{x\to a} f(x,a) = \lim_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \frac{a^3}{0} = \pm\infty$$
Tenemos que $f(x,a)$ diverge en (a,a), por lo que f no tiene límite en (a,a) para todo $a \neq 0$.
Además, $f(x,a) = f(x,-a)$, por lo que f tampoco tiene límite en $(a,-a)$ para todo $a \neq 0$.

b) Si $a = 0$, tenemos:
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y^2} = 0$$
Aplicamos ahora el cambio de variable $x = (t, t+t^p)$, para cierto $p^+ \in \mathbb{R}$. Entonces:
$$\lim_{t\to 0} f(t,t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2-(t+t^p)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2-t^2-t^{2p}-2t^{p+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{-t^{2p-3}-2t^{p-2}}$$
Para $t = 2$, tenemos:
$$\lim_{t\to 0} f(t,t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{-t-2} = -\frac{1}{2}$$
Tenemos que no coincide con el límite dado por los límites laterales, por lo que f no es continua en el origen.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $(x,y) \mapsto xy$ función polinómica, por lo que continua. Tenemos que $A = g^{-1}\{0\}$, y $\{0\}$ es un cerrado. Por tanto, tenemos que A es un cerrado y $U = \mathbb{R} \setminus A$ es un abierto.

La restricción de f a U es una función polinómica, por lo que continua. Por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en cualquier punto de U. Veamos ahora para los puntos de A.

Tenemos que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, por lo que al menos una de las dos coordenadas ha de ser nula:

a) Sean los puntos $(a, 0)$, con $a \neq 0$. Entonces, calculamos el segundo límite parcial:
$$\lim_{y\to 0} f(a,y) = \lim_{y\to 0} \frac{a^3 - y^3}{ay} = \frac{a^3}{0} \pm \infty$$
donde afirmamos que diverge ya que $a \neq 0$. Por tanto, f no es continua en los puntos $(a, 0)$, con $a \neq 0$.

b) Sean los puntos $(0, a)$, con $a \neq 0$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:
$$\lim_{x\to 0} f(x,a) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - a^3}{xa} = \frac{-a^3}{0} \pm \infty$$
donde afirmamos que diverge ya que $a \neq 0$. Por tanto, f no es continua en los puntos $(0, a)$, con $a \neq 0$.

c) Sea el origen $(0, 0)$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$
Aplicamos ahora el cambio de variable $x = (t, t^p)$, para cierto $p \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que:
$$\lim_{t\to 0} f(t,t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 - t^{3p}}{t^{p+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t^{3p-3}}{t^{p-2}} = 1 \qquad \text{para } p = 2.$$
Por tanto, tenemos que según el cambio de variable del límite parcial, el candidato a límite es 0. No obstante, en este último cambio de variable se tiene que el candidato es 1. Por tanto, tenemos que f no tiene límite en el origen, por lo que tampoco es continua en este punto.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}\arctan(x^2+y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Tenemos que su complementario es la imagen inversa de $\{0\}$ por la proyección en la segunda coordenada, que es una función continua. Por ser $\{0\}$ un cerrado, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U$ es un cerrado, por lo que U es un abierto. Además, tenemos que f restringido a U es el producto de una función racional por la composición de una polinómica con la arcotangente, que es continua. Por tanto, tenemos que $f_{|_U}$ es una función continua, y por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Realizamos la siguiente distinción:

a) Para $(a,0)$, con $a \neq 0$, tenemos que el segundo límite parcial es:

$$\lim_{y\to 0} f(a,y) = \lim_{y\to 0} \frac{a}{y} \arctan(a^2+y^2) = \frac{a}{0} \arctan(a^2)$$

Por tanto, tenemos que el segundo límite parcial diverge, ya que la arcotangente converge a un valor no nulo y el cociente, al dividir entre 0, diverge.

b) Estudiemos ahora el límite en el origen:

Definimos la siguiente aplicación continua, por ser el producto de una función racionar por la composición de una polinómica con la arcotangente:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Por tanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, tenemos la siguiente relación:

$$\arctan(x^2+y^2) = (x^2+y^2) \cdot \varphi(x,y)$$

Veamos en primer lugar el límite de φ en el origen. Para ello, definimos f, g tal que $\varphi = f \circ g$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^* \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Tenemos que $g(x,y) = x^2+y^2$ y $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$. Veamos si podemos aplicar el cambio de variable $t = g(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \qquad g(x,y) \in \mathbb{R}^* \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Por tanto, podemos usar el Teorema del Cambio de variable en el sentido original:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 1$$

Realizamos ahora el cambio de variable $x = (t, t^p)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f(t,t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^p} \arctan(t^2+t^{2p}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{p-1}}(t^2+t^{2p})\varphi(t,t^p) = \\ = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{p-3}}(1+t^{2p-2})\varphi(t,t^p) = 1 \qquad (\text{para } p=3) \end{aligned}$$

donde he usado al final el límite de φ en el origen.

Veamos ahora el valor del límite parcial:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Por tanto, tenemos que dos cambios de variable me dan candidatos a límite distintos, por lo que no hay límite en el origen.

Ejercicio 2.1.9. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^n y^n}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Estudiamos en primer lugar los límites parciales:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \cdot 0}{0 + x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Por tanto, tenemos que; en caso de converger, lo hará a 0. Para ver si converge, estudiamos los límites direccionales en coordenadas cartesianas:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \cdot \lambda^n x^n}{x^2 \cdot \lambda^2 x^2 + x^2(1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n} \cdot \lambda^n}{x^4 \cdot \lambda^2 + x^2(1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n-2} \cdot \lambda^n}{x^2 \cdot \lambda^2 + (1-\lambda)^2}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. Si $2n - 2 > 2 \iff n > 2$: Tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = 0$.

2. Si $2n - 2 = 2 \iff n = 2$: Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x^{-2} \cdot (1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{x^2}}$$

   En el caso de $\lambda = 1$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1^2}{1^2 + \frac{0}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1^2}{1^2} = 1$$

   Por tanto, como para $\lambda = 1$ el límite direccional difiere del resto, tenemos que no es convergente.

3. Si $2n - 2 < 2 \iff n < 2$: Para $\lambda = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n-2} \cdot 1^n}{x^2 \cdot 1^2} = \lim_{x\to 0} x^{2n-4} = \infty$$

   Por tanto, como este límite direccional no existe, tenemos que f no es convergente si $n < 2$.

Observación. En este caso, habiendo hecho el cambio de variable $x = (t,t)$, habría sido bastante más rápido, y no habría sido necesario calcular los límites parciales. No obstante, al seguir un procedimiento rutinario se optó por calcular los límites direccionales con coordenadas cartesianas.

Por tanto, tenemos que f solo puede ser convergente si $n > 2$, y tenemos que el candidato a límite es 0. Intentemos acotar f:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| \frac{x^n y^n}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| = \left| \frac{x^{n-2}y^{n-2}}{1 + \left(\frac{x-y}{xy}\right)^2} \right| \leqslant |x^{n-2}y^{n-2}|$$

Definiendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ dado por $g(x,y) = |x^{n-2}y^{n-2}|$, tenemos la relación de orden $\|f(x)\| \leqslant g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Además, como g es continua, tenemos que su límite en el origen debe ser igual a $g(0,0) = 0$.

Por tanto, debido a la acotación que hemos conseguido, tenemos que si $n > 2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Ejercicio 2.1.10. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. Si $\alpha > 0$:

   Tenemos la siguiente acotación:

   $$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x^\alpha|$$

   Como $\alpha > 0$, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$. Por tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0$.

2. Si $\alpha = 0$, $b \neq 0$:

   Tenemos que $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$, que es una composición de una función racional con el seno, ambas continuas. Por tanto, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Además, existe una extensión continua de f que incluye al punto $(0,b)$ con $g(x,y) = f(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$. Esta es:

   $$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \end{array}$$

   Por tanto, se tiene que:

   $$g(0,b) = \operatorname{sen} \frac{1}{b^2} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y)$$

3. Si $\alpha = 0$, $b = 0$:

   Tenemos que $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$. Calculamos el primer límite parcial por la derecha:

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$$

   Tenemos que este no converge. Por tanto, se tiene que $f(x,y)$ no converge en el origen si $\alpha = 0$.

4. Si $\alpha < 0$:

   Calculamos el primer límite parcial:

   $$\lim_{x\to 0} f(x,b) = \lim_{x\to 0} x^\alpha \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+b^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2+b^2}}{x^{-\alpha}}$$

Distinguimos ahora en función de los valores de b. Tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{b^2} = 0 \iff \frac{1}{b^2} = \pi k \iff b^2 = \frac{1}{\pi k} \iff b = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^*$$

a) Si $\alpha < 0$, $b \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$:

Tenemos que el primer límite parcial no existe, ya que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,b) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, tenemos que f no tiene límite en $(0,b)$ para estos valores de α, b.

b) Si $\alpha < 0$, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$:

En este caso, lo que nos dificulta la resolución es el seno. Para poder trabajar con él, tenemos en cuesta el siguiente límite, que es la definición formal de derivada del seno:

$$\lim_{t\to a}\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} a}{t-a} = \cos a$$

Por tanto, para $a = \frac{1}{b^2}$, tenemos:

$$\lim_{t\to\frac{1}{b^2}}\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{t-\frac{1}{b^2}} = \cos\frac{1}{b^2} = \cos(\pi k) = \pm 1$$

Por el Teorema de cambio de variable, usamos $t = \varphi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Tenemos que $t \to \frac{1}{b^2}$ si $(x,y)\to(0,b)$, y $t \neq \frac{1}{b^2}$ para $(x,y)\neq(0,b)$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}} = \cos\frac{1}{b^2} = \cos(\pi k) = \pm 1$$

Haciendo uso de ese límite, podemos reescribir $f(x,y)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) &= x^\alpha\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}} = \\ &= x^{\frac{\alpha}{2}}\cdot x^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{b^2-(x^2+y^2)}{b^2(x^2+y^2)}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}} \end{aligned}$$

Estudiamos ahora $g(x,y) = x^{\frac{\alpha}{2}}\cdot[b^2-(x^2+y^2)]$.

Tomamos ahora el cambio de variable $(x,y) = \left(x, \pm\sqrt{b^2 - x^2 + x^{\frac{-\alpha}{2}}}\right)$. Tenemos que $(x,y)\to(0,b)$ cuando $x\to 0$, y que $(x,y)\neq(0,b)$ para $x\neq 0$.

TERMINAR

Realizamos el cambio de variable $(x,y) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{k\pi+t}}\right)$. Con ese cambio de variable, tenemos que $(x,y) \to (0,b)$ cuando $t \to 0$. Además, tenemos que $(x,y) \neq (0,b)$ cuando $t \neq 0$. Por tanto, tenemos que efectivamente es un cambio de variable. Tenemos que:

$$\lim_{t\to 0} f\left(t, \frac{\pm 1}{\sqrt{k\pi+t}}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{k\pi+t}\right)}\right)}{t^{-\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k+t}{(\pi k+t)t^2+1}\right)}{t^{-\alpha}} = \left[\frac{\operatorname{sen}\pi k}{0}\right] =$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi k+t}{(\pi k+t)t^2+1}\right) \cdot \frac{(\pi k+t)t^2+1-(\pi k+t)[2t(\pi k+t)+t^2]}{[(\pi k+t)t^2+1]^2}}{-\alpha t^{-\alpha-1}} =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi k}{1}\right) \cdot \frac{1}{[1]^2} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{-\alpha t^{-\alpha-1}} = \pm \lim_{t\to 0} \frac{1}{-\alpha t^{-\alpha-1}}$$

Realizamos la siguiente distinción en función de los valores de λ:

1) $\alpha < -1$:
Tenemos que $-\alpha - 1 > 0$. por tanto, tenemos el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} f\left(t, \frac{\pm 1}{\sqrt{k\pi+t}}\right) = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, como este límite no existe, tenemos que el original tampoco.

2) $\alpha = -1$:
Tenemos que los candidatos a límite son ± 1, según el valor de b. No obstante, tenemos que el primer límite parcial nos informa que, de existir el límite, este ha de ser el 0. Por tanto, como los candidatos a límite no coinciden, tenemos que f no tiene límite en este caso, por lo que no es continua.

3) $-1 < \alpha < 0$:
TERMINAR

Ejercicio 2.1.11. Dado $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z-c|} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$

1. Si $abc \neq 0$:

Calculamos el primer límite parcial:

$$\lim_{x\to a} f(x,b,c) = \lim_{x\to a} \frac{xbc}{|x-a|} = \frac{abc}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, tenemos que el primer límite parcial no converge, por lo que f no tiene límite en u si $abc \neq 0$.

2. Si $bc \neq 0$, $a = 0$:

   Calculamos el primer límite parcial:

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x,b,c) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xbc}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} bc = bc$$

   Calculamos el primer segundo parcial:

   $$\lim_{y\to b} f(0,y,c) = \lim_{y\to b} \frac{0}{|y-b|} = \lim_{y\to b} 0 = 0$$

   Por tanto, como $bc \neq 0$, tenemos que los límites parciales no coinciden, por lo que f no tiene límite en u si $bc \neq 0$, $a = 0$.

   Además, tenemos que esto se generaliza a siempre que haya 2 componentes de u no nulas y la tercera nula. Sea u_k la componente nula. Entonces, el límite parcial k-ésimo no será nulo (valdrá el producto de las otras dos componentes), mientras que el resto de límites parciales serán nulos, al anularse el denominador.

   Por tanto, si u tiene dos componentes no nulas y una tercera nula, tenemos que f no tiene límite en u.

3. Si $a \neq 0$, $b, c = 0$:

   Tenemos la siguiente acotación:

   $$0 \leqslant |f(x,y,z)| = \left|\frac{xyz}{|x-a|+|y|+|z|}\right| = \left|\frac{z}{|x-a|+|y|+|z|}\right| \cdot |xy| \leqslant |xy|$$

   Donde hemos usado que $\left|\frac{z}{|x-a|+|y|+|z|}\right| \leqslant 1$, que $|x-a|+|y| > 0$. Por tanto, debido a la acotación tenemos que, si $a \neq 0$, $b, c = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to u} f(u) = 0$.

   Además, tenemos que esto se generaliza a siempre que haya 2 componentes de u nulas y la tercera no nula. Sea u_k la componente no nula. Entonces, será necesario acotar por $u_k \cdot u_j$, donde u_j es una de las componentes nulas.

   Por tanto, si u tiene dos componentes nulas y una tercera no nula, tenemos que $\lim\limits_{x\to u} f(u) = 0$.

4. Si $a, b, c = 0$:

   Tenemos la misma acotación que en el caso anterior:

   $$0 \leqslant |f(x,y,z)| = \left|\frac{xyz}{|x|+|y|+|z|}\right| = \left|\frac{z}{|x|+|y|+|z|}\right| \cdot |xy| \leqslant |xy|$$

   Donde hemos usado que $\left|\frac{z}{|x|+|y|+|z|}\right| \leqslant 1$, que $|x|+|y| > 0$. Por tanto, debido a la acotación tenemos que, si $a, b, c = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to u} f(u) = 0$.

Ejercicio 2.1.12 (Prueba DGIIM 2023-24)**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \qquad f(a,b) = 0$$

2.2. Diferenciabilidad

Ejercicio 2.2.1. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad f(0,0) = 0$

   Sabemos que U es abierto. Como $f_{\big|U}$ es racional, tenemos que $f_{\big|U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que f es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 2x^3y}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^4) - x^2y \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4+x^2y^4-4x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4-3x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

   Por tanto, tenemos que f es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

   Estudiamos ahora la diferenciabilidad en el origen. Para ello, definimos la aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2y}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Calculamos el límite radial según la dirección $y = x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{(x^2+x^4)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Por tanto, de tener φ límite en el origen (que no lo sabemos), será $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, por lo que f no es diferenciable en el origen. Por tanto, hemos visto que f en diferenciable en U.

   Por la condición suficiente de diferenciabilidad, si alguna de las dos derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces f sería diferenciable en el origen. Por tanto, las derivadas parciales son continuas en U, pero no en el origen.

   Por último, estudiamos la continuidad de f en el origen. Tenemos que:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| \frac{x^2y}{x^2+y^4} \right| \leqslant |y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, por lo que f es continua en el origen.

En resumen, f es continua y parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, pero tan solo es diferenciable en U. Además, ambas derivadas parciales tan solo son continuas en U.

2. $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad g(0,0) = 0$

Sabemos que U es abierto. Como $g_{|_U}$ es racional, tenemos que $g_{|_U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que g es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4) - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{2yx^2(x^2+y^4) - x^2y^2 \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2yx^4 + 2x^2y^5 - 4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2yx^4 - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \\ &= \frac{2yx^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U\end{aligned}$$

Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Por tanto, tenemos que g es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla g(0,0) = (0,0)$. Veamos ahora que $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen:

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right| = \left|\frac{2yx^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\right| = |2y| \cdot \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \cdot \left|\frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}\right| \leqslant |2y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

Por tanto, deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como además la función g es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, tenemos que g es diferenciable en el origen, por lo que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en $\mathbb{R}^2$.

Por último, falta estudiar la continuidad de las derivadas parciales. Ya se ha visto que la derivada parcial respecto de y es continua en $\mathbb{R}^2$. Veámoslo para la derivada parcial respecto de x. Aplicando el cambio de variable $(x,y) = (t^2,t)$, tenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2t^6}{(t^4+t^4)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^8}{4t^8} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Cambio de Variable, de tener límite la parcial respecto de x en el origen, este sería $\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial g}{\partial x}$ no es continua en el origen.

3. $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad h(0,0) = 0$

Sabemos que U es abierto. Como $h_{|_U}$ es racional, tenemos que $h_{|_U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que h es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

Por simetría, se tiene directamente que

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x,0) - h(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

De nuevo, por simetría, tenemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

Por tanto, tenemos que h es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla h(0,0) = (0,0)$.

Veamos ahora que sus derivadas parciales son continuas en el origen:

$$0 \leqslant \left| \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = |2x| \cdot \left| \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \leqslant |2x| \qquad \forall (x,y) \in U$$

Por tanto, deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen. Análogamente, también se demuestra que $\frac{\partial h}{\partial x}$ en continua en el origen. Por tanto, ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$

Por tanto, por la condición suficiente de diferenciabilidad, tenemos que h es diferenciable en el origen, por lo que es continua también en el origen.

En conclusión, tenemos que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.2. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^3(y-1)^2}{x^2+|y-1|} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}, \qquad f(0,1) = 0$$

Consideramos $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$, que sabemos que es un cerrado por ser la imagen inversa de $\{1\}$ (cerrado) mediante la proyección en la segunda coordenada, que es una función continua. Por tanto, sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus C$.

Observación. Notemos que en este caso no se escoge $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$, ya que en ese abierto la función f no es de clase 1 por no serlo el valor absoluto.

Tenemos que $f\big|_U \in C^1(\mathbb{U})$; y usando el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, tenemos que f es continua y diferenciable en todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U. En concreto, para todo $(x,y) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2(y-1)^2(x^2+|y-1|) - 2x^4(y-1)^2}{(x^2+|y-1|)^2} = \\ &= \frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot(x^2+|y-1|) - 2x^2]}{(x^2+|y-1|)^2} = \frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot|y-1| + x^2]}{(x^2+|y-1|)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2(y-1)x^3(x^2+|y-1|) - x^3(y-1)^{\cancel{2}}\cdot\frac{|y-1|}{\cancel{y-1}}}{(x^2+|y-1|)^2} = \\ &= \frac{x^3(y-1)\ [2(x^2+|y-1|) - |y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2} = \frac{x^3(y-1)\ [2x^2+|y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2}\end{aligned}$$

Estudiamos ahora para los puntos de C. Tenemos que $C = \{(c,1) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Veamos el valor de las derivadas parciales en dichos puntos. Tenemos que $f(x,1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,1) = \lim_{x\to c}\frac{f(x,1)-f(c,1)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{0-0}{x-c} = 0$$

Respecto a la segunda derivada parcial, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c,1) = \lim_{y\to 1}\frac{f(c,y)-f(c,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\frac{c^3(y-1)^2}{c^2+|y-1|} - 0}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{c^3(y-1)}{c^2+|y-1|} = 0 \qquad \forall c \neq 0$$

No obstante, para $c = 0$, tenemos que $f(0,y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$; por lo que el resultado anterior también es válido para $c = 0$. Por tanto, f es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, y se tiene que $\nabla f(c,1) = (0,0)$ para todo $(c,1) \in C$.

Veamos ahora que las derivadas parciales de f son continuas en todo punto $(c,1) \in C$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \left|\frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot|y-1|+x^2]}{(x^2+|y-1|)^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+|y-1|}\right|\ \left|\frac{[3\cdot|y-1|+x^2]}{x^2+|y-1|}\right|\ (y-1)^2 \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \left|\frac{3\ [\ |y-1|+x^2]}{x^2+|y-1|}\right|(y-1)^2 = 3(y-1)^2\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $[3\cdot|y-1|+x^2] \leqslant 3\ [\ |y-1|+x^2]$, ya que $x^2 \geqslant 0$. Por tanto, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(c,1)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(c,1)$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en C y, por tanto, lo es en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= \left|\frac{x^3(y-1)\ [2x^2+|y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+|y-1|}\right|\ \left|\frac{[2x^2+|y-1|\ ]}{x^2+|y-1|}\right|\ |x|\ |y-1| \overset{(**)}{\leqslant} \\ &\overset{(**)}{\leqslant} \left|\frac{2\ [x^2+|y-1|\ ]}{x^2+|y-1|}\right|\ |x|\ |y-1| = 2\ |x|\ |y-1|\end{aligned}$$

donde en $(**)$ hemos aplicado que $[2x^2+|y-1|\,] \leqslant 2\,[x^2+|y-1|\,]$, ya que $|y-1| \geqslant 0$. Por tanto, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(c,1)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(c,1)$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en C y, por tanto, lo es en $\mathbb{R}^2$.

En conclusión, como las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$, tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.3. Probar que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^6(x^2+y^2)}{(y-x^2)^2+x^6} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Consideramos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es un abierto por ser $\{(0,0)\}$ un cerrado. Además, $f_{|_U} \in C^1(\mathbb{U})$ por ser racional; por lo que por el carácter local de la diferenciabilidad f es diferenciable en todo punto de U.

Como no pide información sobre las derivadas parciales en los puntos de U, evitamos calcularlas; ya que a simple vista parecen complejas. Veamos si f es parcialmente derivable en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^8}{x^4+x^6}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Por tanto, tenemos que f es parcialmente derivable en el origen, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Veamos ahora si f es diferenciable o no en el origen. Para ello, buscamos acotar la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-(\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^6(x^2+y^2)}{[(y-x^2)^2+x^6]\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \frac{x^6\sqrt{x^2+y^2}}{(y-x^2)^2+x^6} \qquad \forall x \in U$$

Tenemos que la acotación es:

$$0 \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant |\sqrt{x^2+y^2}| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de lo que se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$, luego f es diferenciable en el origen. Por tanto, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = (x+y)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

Consideramos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abierto, y veamos que $f_{|_U} \in C^1(U)$. Como en la Figura 2.1 se ve, el término de la derecha es composición de funciones de clase C^1

en sus respectivos dominios; y por la Regla de la Cadena, dicha composición es de clase 1. Veamos cuáles son esas funciones. Tenemos que la aplicación $p : U \to \mathbb{R}^+$ es polinómica, por lo que es de clase 1. Además, $\sqrt{x}$ es también de clase 1; por lo que la composición (el denominador) es de clase 1. Además, la función inversa $\frac{1}{x}$ con dominio en $\mathbb{R}^+$ es de clase 1, por lo que el argumento del seno es de clase 1. Por último, $x \mapsto \operatorname{sen} x$ es de clase 1, y el argumento hemos visto que también; por lo que por la Regla de Cadena, tenemos que la composición es de clase 1.

$$U \xrightarrow{\quad p \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \sqrt{x} \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \frac{1}{x} \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \operatorname{sen}(x) \quad} [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \longmapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Figura 2.1: Composición del término de la derecha.

Además, el término de la izquierda es polinómico, por lo que es también de clase 1. Por tanto, $f_{|_U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la continuidad y diferenciabilidad, tenemos que f es continua y diferenciable para todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U. La parcial respecto de x para todo punto de U es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= n(x+y)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{-1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \\ &= n(x+y)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - (x+y)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

La derivada parcial respecto de y de f coincide debido a la simetría. Por tanto, calculamos ahora la derivada parcial respecto de x en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{|x|}$$

- Para $n-1<0 \iff n<1$:

  Tenemos que la derivada parcial respecto a x en el origen no está definida (el límite no converge, diverge), por lo que f no es diferenciable en el origen. Además, por la simetría, la derivada parcial respecto a y en el origen tampoco está definida.

  Para estudiar la continuidad de f en el origen, distinguimos casos:

  - Para $n=0$:

    Tenemos que $f(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Como es límite buscado es en el origen, aplicamos el cambio de variable $(x, y) = (t, t)$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2}}\right) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\ |t|}\right)$$

Por tanto, este límite no existe, por lo que el límite de f en el origen tampoco existe, implicando que f no es continua en el origen.

- Para $n < 0$:

  Como es límite buscado es en el origen, aplicamos el cambio de variable $(x, y) = (t, t)$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} (2t)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2}}\right) = \lim_{t\to 0} 2^n t^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\ |t|}\right)$$

  Por tanto, este límite no existe (diverge), por lo que el límite de f en el origen tampoco existe, implicando que f no es continua en el origen.

Por tanto, f es continua, diferenciable y con derivadas parciales continuas tan solo en U para $n < 1$.

- Para $n - 1 = 0 \iff n = 1$:

Tenemos que la derivada parcial respecto a x en el origen no está definida (el límite no converge), ya que queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{|x|}$$

Por tanto, f no es diferenciable en el origen. Además, por la simetría, la derivada parcial respecto a y en el origen tampoco está definida. Veamos ahora si f es continua en el origen:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leqslant x + y$$

de lo que se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, por lo que f es continua en el origen.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$. No obstante, f es diferenciable y con derivadas parciales continuas tan solo en U.

- Para $n - 1 > 0 \iff n > 1$: :

Tenemos que las derivadas parciales en el origen son nulas, por lo que el gradiente es $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Estudiamos por tanto la diferenciabilidad. Para ello, definimos la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

Por facilidad para los cálculos, usamos la norma 1 en el denominador:

$$\varphi(x,y) = \frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Buscamos acotar dicha función. Para todo $(x,y) \in U$, tenemos:

$$0 \leqslant |\varphi(x,y)| = \left|\frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\right| = \frac{|(x+y)^n|}{|x|+|y|} \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} \frac{|(x+y)^n|}{|x+y|} = |(x+y)^{n-1}|$$

donde, como $n > 1$, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$. Además, en $(*)$ hemos usado la desigualdad triangular.

Entonces, f es diferenciable, y por tanto continua, en el origen. Tan solo falta por ver si las derivadas parciales son continuas en el origen Para ello, calculamos el límite radial en el origen en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) &= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - (2x)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot\frac{x}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - 2^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{\frac{3}{2}}x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - 2^{n-\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot x^{n-2}
\end{aligned}$$

- <u>Para $n = 2$</u>:

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{x\to 0^+} 4x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$$

  Tenemos que, para $n = 2$, ese límite no converge; ya que no lo hace el coseno. Por tanto, la derivada parcial respecto a x (y por simetría también respecto a y) no son continuas en el origen. Por tanto, ambas derivadas parciales son continuas tan solo en U.

- <u>Para $n > 2$</u>:
  La derivada parcial respecto a x en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta) &= n\rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \rho^n[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^n\cos\frac{1}{|\rho|}\cdot\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2|\rho|} = \\
&= \rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\left[n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \rho[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\frac{1}{|\rho|}\cdot\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2|\rho|}\right] = \\
&= \rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\left[n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \frac{1}{|\rho|}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right]
\end{aligned}$$

Acotamos dicha función:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\right| = \\
&= \left|\rho^{n-1}\right| \cdot \left|[\cos\theta + \operatorname{sen}\theta]^{n-1}\right| \cdot \left|n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \frac{1}{|\rho|}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right| \overset{(*)}{\leqslant} \\
&\overset{(*)}{\leqslant} \left|\rho^{n-1}\right| \cdot \left|[\cos\theta + \operatorname{sen}\theta]^{n-1}\right| \cdot \left[\left|n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|}\right| + \left|\frac{1}{|\rho|}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right|\right] \leqslant \\
&\leqslant \left|\rho^{n-1}\right| \cdot 2^{n-1} \cdot \left[n + \frac{2}{|\rho|}\right] = \left|\rho^{n-2}\right| \cdot 2^{n-1} \cdot [n|\rho| + 2]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $|b-c| \leqslant |b| + |-c| = |b| + |c|$ para todo $b, c \in \mathbb{R}$. Como $n \geqslant 2$, tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} |\rho^{n-2}| \cdot 2^{n-1} \cdot [n|\rho| + 2] = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Por tanto, tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

Ejercicio 2.2.6. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \qquad f(0,0,0) = 0$$

Sea $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Tenemos que U es un abierto, y veamos que $f_{|U} \in C^1(U)$. El numerador es polinómica, por lo que es de clase 1. El denominador es una composición de una polinómica con la raíz cuadrada, que es de clase 1 en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, tenemos que $f_{|U}$ es cociente de dos funciones de clase 1, por lo que $f_{|U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, tenemos que f es continua y diferenciable en todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U, siendo estas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y,z) = \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2) - x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall (x,y,z) \in U$$

Además, por la simetría notemos que todas las derivadas parciales coinciden. Calculemos ahora el valor de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}f(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

De nuevo, por simetría, tenemos que todas las derivadas parciales en el origen coinciden. Veamos que la derivada parcial respecto de x es continua en el origen. Para todo $(x, y, z) \in U$, se tiene:

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z)\right| = \left|\frac{yz(x^2+y^2+z^2) - x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \left|\frac{yz(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| + \left|\frac{x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| + \left|\frac{x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| + \left|\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right| \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leqslant |z| + |z|$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0,0)$$

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^3$, y análogamente se tiene que lo son el resto de derivadas parciales. Por tanto, queda directamente demostrado que $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Ejercicio 2.2.7 (Prueba DGIIM 2023-24)**.** Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad\qquad f(0,0) = 0$$

2.3. Imagen de una función de dos variables

Ejercicio 2.3.1. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant 2y - y^2\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4)$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant 2y - y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y + y^2 \leqslant 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\} = \\ &= \overline{B}[(0, 1), 1] \end{aligned}$$

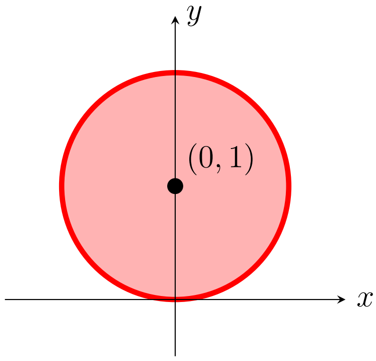


Figura 2.2: Conjunto de definición $A = \overline{B}[(0, 1), 1]$.

Como A es una bola cerrada, tenemos que es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto. Además, es convexo, luego conexo. Como f es continua por ser polinómica, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo.

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que $A^\circ = B[(0, 1), 1]$. Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x, y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x, y) = 0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(0, 1) \in A^\circ$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y - y^2\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\} = \\ &= S[(0, 1), 1] \end{aligned}$$

Además, como para todo $(x, y) \in A$, se tiene que $x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$, entonces:

$$(y - 1)^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |y - 1| \leqslant 1 \Longrightarrow y \in [0, 2]$$

Por tanto, para $(x,y) \in \partial A \subset A$, tenemos que:

$$f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y = y^4 - y^2 - 2y$$

Es decir, $f(\partial A) = h([0,2])$, con $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por $h(y) = y^4 - y^2 - 2y$. Calculamos por tanto la imagen de dicha función real de variable real. Como es polinómica, tenemos que h es derivable en $[0,2]$, con $h'(y) = 4y^3 - 2y - 2$. Los puntos críticos son entonces los que anulan la primera derivada:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & & 2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que $h'(y) = 2(y-1)(2y^2 + 2y + 1)$. Como $y \in [0,2]$, tenemos que el segundo factor no se anula. Por tanto, tenemos que los posibles extremos absolutos de h son $\{0, 1, 2\}$.

$$h(0) = 0 \qquad h(1) = -2 \qquad h(2) = 16 - 4 - 4 = 8$$

Por tanto, $h([0,2]) = f(\partial A) = [-2, 8]$.

Como el único candidato a extremo relativo del interior de A era el punto $(0,1)$, y $f(0,1) = -3$, tenemos que:

$$f(A) = [-3, 8]$$

El mínimo absoluto se da en $(0,1)$, y el máximo absoluto se da para $y = 2$, es decir, para el punto $(0,2)$.

Ejercicio 2.3.2. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\} = \overline{B}[(1,0),2] \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$$

TERMINAR

Figura 2.3: Conjunto de definición A.

Como A es la intersección de una bola cerrada (cerrado) con

Tenemos que $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} = g^{-1}([0, +\infty[)$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ es una función continua y $[0, +\infty[$ es un cerrado. Como la imagen inversa de un cerrado mediante una función continua es un cerrado, tenemos que $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ es un cerrado. Además, como una bola cerrada es un cerrado, tenemos que A es la intersección de dos cerrados, luego es cerrado. Además, es acotado, ya que $A \subset B[(1,0),3]$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto.

Además, una bola cerrada es convexa, y el semiplano $x \geqslant 0$ también es convexo, luego su intersección es convexa, luego conexa.

Como f es continua por ser polinómica, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo.

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que $A^\circ = B[(1,0),2]$. Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(2,0) \in A^\circ$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que:

// TODO: TERMINAR

Ejercicio 2.3.3 (Prueba DGIIM 2022-23 y 2023-24[1]). Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, siendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2(1-y^2)\}$$
$$f(x,y) = (x-1)^4 + y^2 \qquad \forall (x,y) \in A$$

[1]Se repitió ambos años