

Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2016-17.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primer parcial.

Fecha 16 de marzo de 2017.

Ejercicio 1. Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y) .

Ejercicio 2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

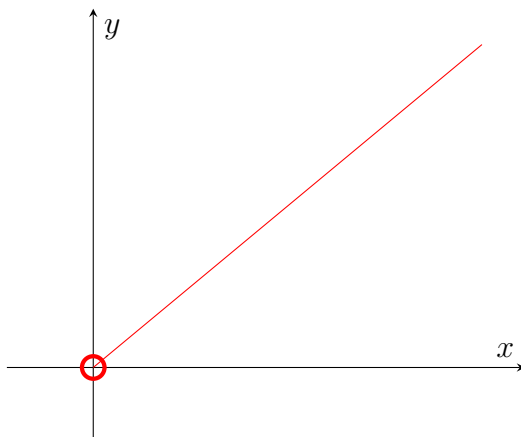
define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo \mathbb{R} . Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

Ejercicio 3. Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases}$$

Este admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y) . Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

En primer lugar, hemos de representar la órbita pedida. Como $x(t) = y(t)$, tenemos que la órbita está contenida en la recta $y = x$. No obstante, como tenemos que $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, la órbita es la parte de la recta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, sin incluir el origen. Esta es:



Para encontrar la ecuación diferencial de las órbitas, hemos de considerar la derivada de la función $y = y(x)$ que define la órbita. Así, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables

$$\phi : s = x, y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua? Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$. ¿Qué relación hay entre f y \hat{f} ?

Ejercicio 5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0, y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Observación. Se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0 .