# Variable Compleja I


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Variable Compleja I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

# Índice general

# 1. Relaciones de Ejercicios

## 1.1. Números complejos

**Ejercicio 1.1.1.** Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Para comprobar ahora que $M$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, se debe probar que existe un isomorfismo entre ambos cuerpos. Sea la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M \\ & z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \end{array}$$

Para probar que $f$ es un isomorfismo, hemos de probar que es un homomorfismo (entre anillos, puesto que los cuerpos son un caso particular), y que es biyectivo. En primer lugar, comprobamos que es un homomorfismo:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 & -(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & -(\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2) \\ \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 & -\operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 & \operatorname{Re} z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_2 & -\operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 & \operatorname{Re} z_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2). \end{aligned}$$

3. $f(1) = 1$.

   Tenemos que $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2 = 1$.

Por tanto, $f$ es un homomorfismo. Ahora, comprobamos que es biyectivo. Para ello, comprobamos que es inyectivo y sobreyectivo.

- $f$ es inyectiva.

  Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de forma que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, igualando componente a componente, tenemos que $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ y $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y $f$ es inyectiva.

- $f$ es sobreyectiva.

  Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. Entonces, sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, y tenemos que $f(z) = A$. Por tanto, $f$ es sobreyectiva.

Por tanto, $f$ también es biyectiva, y por tanto es un isomorfismo. Por tanto, $M$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

**Ejercicio 1.1.2.** Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los siguientes números complejos:

1. $z_1 = \dfrac{i-\sqrt{3}}{1+i}$.

   Tenemos que:

$$z_1 = (-\sqrt{3}+i)\cdot\frac{1}{1+i} = (-\sqrt{3}+i)\cdot\frac{1-i}{1+1} = \frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i-i^2}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z_1 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\
\operatorname{Im} z_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\
|z_1| &= \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+1+3+3}{4}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2. $z_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{3}-1}$.

   Tenemos que:

$$z_2 = \frac{1}{i\sqrt{3}-1} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1+3}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} z_2 &= -\frac{1}{4}, \\
\operatorname{Im} z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}, \\
|z_2| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.1.3.** Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \qquad \forall z \in U.$$

Probar que $f$ es una biyección de $U$ sobre sí mismo y calcular su inversa.

En primer lugar, comprobamos que $f$ es una aplicación de $U$ sobre $U$. Dado $z \in U$, tenemos que:

$$|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < 1 \Longleftrightarrow |z-a| < |1-\overline{a}z| \Longleftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \Longleftrightarrow z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < 1 - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a}z\overline{z} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Longleftrightarrow |z|^2 - |a|^2|z|^2 < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow |z|^2 < 1.$$

donde hemos usado que, como $|a| < 1$, entonces $|a|^2 < 1$ y por tanto $1-|a|^2 > 0$. Por tanto, $f$ es una aplicación de $U$ sobre $U$. A partir de ahora por tanto consideramos $f : U \to U$. Veamos que es biyectiva. Para ello, vamos a probar que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad:

  Sean $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, tenemos que:

$$\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1} = \frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2} \Longrightarrow (z_1-a)(1-\overline{a}z_2) = (z_2-a)(1-\overline{a}z_1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z_1 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_1z_2} + |a|^2z_2 = z_2 - \cancel{a} - \cancel{\overline{a}z_2z_1} + |a|^2z_1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z_1 - |a|^2z_1 = z_2 - |a|^2z_2 \Longrightarrow (1-|a|^2)z_1 = (1-|a|^2)z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

- Sobreyectividad:

  Sea $w \in U$. Vamos a buscar $z \in U$ tal que $f(z) = w$. Para ello, vamos a despejar $z$ de la ecuación $f(z) = w$:

$$\frac{z-a}{1-\overline{a}z} = w \Longrightarrow z - a = w(1-\overline{a}z) \Longrightarrow z - a = w - w\overline{a}z \Longrightarrow z + w\overline{a}z = a + w \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z(1+w\overline{a}) = a + w \Longrightarrow z = \frac{a+w}{1+w\overline{a}}.$$

  donde, en el último paso, hemos hecho uso de que $1 + w\overline{a} \neq 0$, ya que $|wa| = |w||a| < 1$ y:

$$|1+w\overline{a}| \geqslant |1-|w||a|| = 1 - |w||a| > 0 \iff 1 > |w||a|$$

  y por tanto $1 + w\overline{a} \neq 0$. Por tanto, dado $w \in U$, consideramos $z = \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}}$. Vamos a comprobar que $z \in U$:

$$|z| = \left|\frac{a+w}{1+w\overline{a}}\right| = \frac{|a+w|}{|1+w\overline{a}|} < 1 \Longleftrightarrow |a+w| < |1+w\overline{a}| \Longleftrightarrow |a+w|^2 < |1+w\overline{a}|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (a+w)(\overline{a}+\overline{w}) < (1+w\overline{a})(1+\overline{w}a) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a\overline{a} + a\overline{w} + w\overline{a} + w\overline{w} < 1 + w\overline{a} + \overline{w}a + a\overline{a}w\overline{w} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |a|^2 + |w|^2 < 1 + |w|^2|a|^2 \Longleftrightarrow |a|^2 - |w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |w|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \Longleftrightarrow |w|^2 < 1.$$

Por tanto, $z \in U$ y $f(z) = w$. Por tanto, $f$ es sobreyectiva.

Por tanto, $f$ es biyectiva. Además, hemos comprobado que su inversa es:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & w & \longmapsto & \dfrac{a+w}{1+w\overline{a}} \end{array}$$

**Ejercicio 1.1.4.** Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Veamos que dicha condición es que, para cada $k \in \Delta_n$, se tenga que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Comprobaremos que dicha condición es necesaria y suficiente.

$\Longrightarrow$) Veamos que es una condición necesaria. Demostramos por inducción sobre $n$.

- $\underline{n=1}$: La igualdad es trivialmente cierta, tomando $\lambda_1 = 1$.
- $\underline{n=2}$: Hay dos opciones:

  **Opción Rutinaria** Supongamos que se cumple para $n = 2$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned} |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| &\Longrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2|z_1||z_2| \Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 + 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (z_1\overline{z_2})^2 - 2|z_1||z_2| + (z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow (z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1})^2 = 0 \Longrightarrow z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \end{aligned}$$

  Tenemos ahora dos opciones:

  **Opción 1** Tenemos que:

  $$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} \Longrightarrow z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^*$$

  Tomamos ahora $\lambda_2 = \dfrac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} \in \mathbb{R}$, por lo que:

  $$\lambda_2\ z_1 = \frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}}\ z_1 = z_2$$

  **Opción 2** Sea ahora $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces, tenemos que:

  $$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} &= (a+bi)(c-di) = ac+bd+(bc-ad)i, \\ z_2\overline{z_1} &= (c+di)(a-bi) = ac+bd+(ad-bc)i. \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$z_1\overline{z_2} = z_2\overline{z_1} \Longrightarrow bc-ad = ad-bc \Longrightarrow ad = bc.$$

  Distinguimos en función del valor de $b$:

- Si $b = 0$, entonces $ad = 0$.
  - Si $a = b = 0$, entonces $z_1 = 0 \notin \mathbb{C}^*$, por lo que no es posible.
  - Si $a \neq 0$, entonces $d = b = 0$, por lo que $z_1 = a$, $z_2 = c$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^c/_a$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.
- Si $b \neq 0$, entonces $c = {}^{ad}/_b$. Por tanto, tomando $\lambda_2 = {}^d/_b$, se tiene que $z_2 = \lambda_2\ z_1$.

$$\lambda_2\ z_1 = \frac{d}{b}(a+bi) = \frac{ad}{b} + di = c + di = z_2.$$

Por tanto, tenemos que $z_2 = \lambda_2\ z_1$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para ver que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$|z_1 + z_2| = |z_1(1+\lambda_2)| = |z_1||1+\lambda_2|$$
$$|z_1| + |z_2| = |z_1| + |\lambda_2\ z_1| = |z_1| + |\lambda_2||z_1| = |z_1|(1 + |\lambda_2|).$$

Igualando, y como $|z_1| \neq 0$, tenemos que $|1 + \lambda_2| = 1 + |\lambda_2|$. Por tanto, como la igualdad de la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ se da si los dos números tienen el mismo signo, tenemos que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

**Otra Opción** Vemos ahora los elementos de $\mathbb{C}$ como elementos de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ y la norma euclídea. En Análisis Matemático I se provó que, en $\mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad si y solo si:

1. $z_1$ y $z_2$ son linealmente dependientes. Es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 = \lambda\ z_1$.
2. Su producto escalar es positivo. Es decir, $\langle z_1, z_2 \rangle > 0$. Esto se da si y solo si:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, \lambda\ z_1 \rangle = \lambda \langle z_1, z_1 \rangle = \lambda \|z_1\|^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0.$$

En cualquier caso se cumple para $n = 2$.

- Supongamos que se cumple para $n$, demostrémolo para $n + 1$.

Por hipótesis (no de inducción, sino por trabajar en esta implicación), tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Por tanto:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) + |z_{n+1}|$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1|\right) + |z_{n+1}| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| + |z_{n+1}| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 + z_{n+1}\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| + |z_{n+1}|$$

Notando por $w = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1 \in \mathbb{C}^*$, y aplicando lo ya demostrado para $n = 2$, vemos que $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_{n+1} = \rho\ w$. Por tanto:

$$z_{n+1} = \rho\ w = \rho \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1$$

Tomando $\lambda_{n+1} = \rho \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $z_{n+1} = \lambda_{n+1}\ z_1$. Por tanto, se cumple para $n+1$.

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\Longleftarrow$) Veamos que es una condición suficiente. Supongamos que, para cada $k \in \Delta_n$, se tiene que $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $z_k = \lambda_k\ z_1$. Entonces, tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ z_1\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k\ z_1| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

**Ejercicio 1.1.5.** Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 2|z-i|\}$.

   Sea $z = x + iy \in A \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy+i| = 2|x+iy-i| \Longrightarrow |x+(y+1)i| = 2|x+(y-1)i| \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Longrightarrow x^2+(y+1)^2 = 4(x^2+(y-1)^2) \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2+2y+1 = 4x^2+4y^2-8y+4 \Longrightarrow 3x^2+3y^2-10y+3 = 0 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}y+1 = 0 \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1 = 0 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

   Por tanto, $A$ es la circunferencia de centro $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y radio $\frac{4}{3}$.

2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 4\}$.

   Sea $z = x + iy \in B \subset \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|x+iy-i| + |x+iy+i| = 4 \Longrightarrow |x+(y-1)i| + |x+(y+1)i| = 4 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4 \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow x^2+(y-1)^2 = 16+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow -2y = 16+2y-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow 4+y = 2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Longrightarrow 16+8y+y^2 = 4x^2+4y^2+4+8y \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow 4x^2+3y^2 = 12 \Longrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se trata de una elipse con centro en el origen. El semieje menor mide $\sqrt{3}$ y el semieje mayor mide 2. Por tanto, la distancia focal es $\sqrt{4-3} = 1$. Es decir, se trata de una elipse con ejes en los puntos $(0,i)$, $(0,-i)$ y eje mayor de longitud 4. Esto se podría haber interpretado de forma directa al ver que la suma de las distancias de un punto a dos puntos fijos es constante.

**Ejercicio 1.1.6.** Probar que se cumple la siguiente igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\arg z = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

Fijado $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, consideramos $\arg z \in \,]-\pi,\pi[$. Entonces, como en particular se tiene $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

De esta forma, como $z \notin \mathbb{R}^-$ (y por tanto $|z| \neq -\operatorname{Re} z$), tenemos que:

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)\cdot|z|}{\cos(\arg z)\cdot|z| + |z|} = \frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)+1}$$

Por ser ambas expresiones iguales, tenemos que:

$$2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)+1}\right)$$

La demostración se terminaría si vemos que las expresiones anteriores valen $\arg z$. Para ello, Definimos ahora la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} f : \ ]-\pi,\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \alpha - 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha + 1}\right) \end{aligned}$$

En primer lugar, tenemos que $f(0) = 0 - 2\arctan(0) = 0$. Por otro lado, como $f \in C^1\left(]-\pi,\pi[\,,\mathbb{R}\right)$, consideramos la derivada de $f$:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 1 - 2\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2}\cdot\frac{\cos\alpha(\cos\alpha+1)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha}{(\cos\alpha+1)^2} = \\ &= 1-2\cdot\frac{\cos^2\alpha+\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{(\cos\alpha+1)^2+\operatorname{sen}^2\alpha} = 1-2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos^2\alpha+1+2\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha} = \\ &= 1-2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2+2\cos\alpha} = 1-\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha \in \,]-\pi,\pi[\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $f$ es constante, por lo que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \,]-\pi,\pi[$. Tomando como ángulo $\alpha = \arg z$, que por la elección hecha sabemos que $\arg z \in \,]-\pi,\pi[$, tenemos que:

$$\arg z = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)+1}\right)$$

Por tanto, por lo anteriormente visto tenemos que:

$$\arg z = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-.$$

como queríamos demostrar.

**Ejercicio 1.1.7.** Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0, \\ {}^{\pi}/_{2} & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -{}^{\pi}/_{2} & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Como $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que:

$$\cos(\arg z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \land \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Por tanto, tenemos que $x = \operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)$ e $y = \operatorname{Im} z = |z| \operatorname{sen}(\arg z)$. Por tanto, distinguimos en función de los valores de $x$ e $y$, usando además que $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right[$:

- <u>Si $x > 0$</u>:

  En este caso, $x = |z| \cos(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right[$.

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\arg z)}{\cos(\arg z)}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arg z$$

  donde, en la última igualdad, hemos usado que la arcotangente es la inversa de la tangente en el intervalo $\left]-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right[$.

- <u>Si $x < 0, y > 0$</u>:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]0, \pi\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]{}^{\pi}/_{2}, \pi\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z - \pi \in \left]-{}^{\pi}/_{2}, 0\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z - \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

- <u>Si $x < 0, y < 0$</u>:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in \left]-\pi, 0\right[$. Además, se tiene que $x = |z| \cos(\arg z) < 0$. Por tanto, $\arg z \in \left]-\pi, -{}^{\pi}/_{2}\right[$. No obstante, como no pertenece a la rama principal, hemos de considerar $\theta = \arg z + \pi \in \left]0, {}^{\pi}/_{2}\right[$, que por la periodicidad de la tangente sabemos que $\tan(\theta) = \tan(\arg z)$. Por tanto, tenemos que:

  $$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\tan(\arg z)\right) = \arctan\left(\tan(\theta)\right) = \theta = \arg z + \pi \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$$

- Si $x = 0, y > 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) > 0 \Longrightarrow \arg z \in ]0, \pi[$. Además, se tiene que $x = |z|\cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = \pi/2$.

- Si $x = 0, y < 0$:

  En este caso, $y = |z| \operatorname{sen}(\arg z) < 0 \Longrightarrow \arg z \in ]-\pi, 0[$. Además, se tiene que $x = |z|\cos(\arg z) = 0$. Por tanto, $\arg z = -\pi/2$.

**Ejercicio 1.1.8.** Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostraremos las fórmulas de De Moivre por inducción sobre $n$.

- $n = 1$: La igualdad es trivialmente cierta.

- Supongamos que se cumple para $n$, demostrémoslo para $n + 1$:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \\ &= (\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta + i(\cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta) = \\ &= \cos((n+1)\theta) + i\operatorname{sen}((n+1)\theta).\end{aligned}$$

Por tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Como no hemos impuesto restricciones sobre $\theta$, se cumple para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 1.1.9.** Calcular las partes real e imaginaria del número complejo

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8.$$

Sea $z' = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}|z'| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \\ \arg(z') &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

donde, para calcular el argumento, hemos empleado que $\operatorname{Re} z' > 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}z' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ z = (z')^8 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^8 \overset{(*)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado las fórmulas de De Moivre. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\\ \operatorname{Im} z &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.1.10.** Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \tag{1.2}$$

Demostraremos ambas igualdades de forma simultánea. Para ello, multiplicaremos la segunda igualdad por $i$ y sumaremos ambas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)) \overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))^k$$

donde en $(*)$ hemos usado la fórmula de De Moivre. Considerando el número complejo $z = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$, definimos $u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, por lo que $u^2 = z$. Además, tenemos que:

$$1 - z^k = u^k\overline{u}^k - u^{2k} = u^k(\overline{u}^k - u^k) = -2i\operatorname{sen}\left(k\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, usando dicho valor de $z$, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}z^k$$

La suma de la derecha es la suma de una progresión geométrica, cuya suma parcial se calcula de igual forma que en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)) &\overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-z^{n+1}}{1-z} =\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{-2i\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot u^{n+1}}{-2i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot u} =\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot u^n =\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos calculado la suma parcial, donde hemos supuesto que $z \neq 1$; es decir, que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (ya que, en dicho caso, ambas igualdades son triviales). Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos las igualdades pedidas.

## 1.2. Topología del plano complejo

**Ejercicio 1.2.1.** Estudiar la continuidad de la función argumento principal; esta es, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Por el Ejercicio 1.1.6, sabemos que:

$$\arg z = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

Consideramos $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Como la función $Id$ es continua, tenemos que $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$ son continuas en $\mathcal{C}$. Además, como el denominador tan solo se anula en $\mathbb{R}_0^-$, el argumento de la arcotangente restringido a $\Omega$ es una función continua. Por ser la arcotangente continua en $\mathbb{R}$ y serlo el producto de funciones continuas, concluimos que $\arg_{|\Omega}$ es continua. Como $\Omega$ es abierto, por el carácter local de la continuidad, arg es continua en $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Tan falta por estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^-$. Para ello, sea $z \in \mathbb{R}^-$, del que sabemos que $\arg z = \pi$. Sea la sucesión $\{\theta_n\}$ que recorre los ángulos desde 0 en sentido horario hasta $-\pi$, límite de la sucesión:

$$\{\theta_n\} = \left\{-\pi\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} \to -\pi$$

A partir de dicha sucesión, definimos $\{z_n\}$ como los números complejos de módulo $|z|$ y argumento $\theta_n$; que recorren los puntos de la circunferencia unitaria desde el eje positivo en sentido horario hasta el eje negativo.

$$\{z_n\} = \{|z|\left(\cos\left(\theta_n\right) + i\sin\left(\theta_n\right)\right)\} \to |z|\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -|z| = z$$

Por último, tenemos que:

$$\{\arg z_n\} = \{\theta_n\} \to -\pi \neq \pi = \arg z$$

Por tanto, hemos encontrado una sucesión $\{z_n\}$ con $z_n \in \mathbb{C}^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con $\{z_n\} \to z$ pero $\{\arg z_n\} \not\to \arg z$. Por tanto, arg no es continua en $z$. Como $z$ era arbitrario, concluimos que arg no es continua en $\mathbb{R}^-$.

Por tanto, concluimos que arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, pero no lo es en $\mathbb{R}^-$.

**Ejercicio 1.2.2.** Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

La elección del argumento principal de un número complejo realizada provoca que haya una discontinuidad en $\mathbb{R}^- = S_\pi$. Este ejercicio nos pide encontrar una función que, dado un argumento $\theta$, sea continua en $\mathbb{C}^*$ excepto en los puntos $z$ para los cuales $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Dado $z \in S_\theta$, como arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, en primer lugar definiremos una función $g_\theta : S_\theta \to C^* \setminus \mathbb{R}^-$ que nos lleve $z$ a un punto $w \notin \mathbb{R}^-$; para poder aplicar luego arg y modificar el valor de forma que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$. Vamos a ello.

Definimos en primer lugar $w_\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta) \in \mathbb{C}$, de forma que $|w_\theta| = 1$ y $\pi - \theta \in \operatorname{Arg} w_\theta$. Definimos $g_\theta$ como:

$$\begin{array}{rccl} g_\theta : & S_\theta & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \\ & z & \longmapsto & zw_\theta \end{array}$$

En primer lugar, como $g_\theta$ es polinómica, tenemos que $g_\theta \in \mathcal{C}(S_\theta)$. Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\operatorname{Arg} g_\theta(z) = \operatorname{Arg}(zw_\theta) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w_\theta = (\arg z + \pi - \theta) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Veamos que $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$. Supongamos que $g_\theta(z) \in \mathbb{R}^-$. Entonces, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg z + \pi - \theta = 2k\pi$. Por tanto, $\arg z = 2k\pi - \pi + \theta = (2k-1)\pi + \theta$. Por tanto, $\theta \in \operatorname{Arg} z$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $g_\theta(z) \notin \mathbb{R}^-$.

A continuación, definimos $\varphi$ como sigue:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_\theta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \arg(g_\theta(z)) - (\pi - \theta) \end{array}$$

De esta forma, tenemos que $\varphi$ es continua en $S_\theta$, puesto que arg es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y $g_\theta$ es continua en $S_\theta$. Además, dado $z \in S_\theta$, tenemos que:

$$\varphi(z) \in \operatorname{Arg} g_\theta(z) - \operatorname{Arg} w_\theta = \operatorname{Arg} g_\theta(z) + \operatorname{Arg} \frac{1}{w_\theta} = \operatorname{Arg}\left(\frac{g_\theta(z)}{w_\theta}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{zw_\theta}{w_\theta}\right) = \operatorname{Arg} z$$

**Ejercicio 1.2.3.** Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ de forma que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \varphi(z) - \varphi(-z) \end{array}$$

Por ser $\varphi$ continua, $f$ es continua. Además, dado $z \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) - \varphi(-z) \\ f(-z) &= \varphi(-z) - \varphi(z) = -(\varphi(z) - \varphi(-z)) = -f(z) \end{aligned}$$

Por tanto, fijado $w \in \mathbb{C}^*$, hay dos opciones:

- Si $f(w) = 0$, entonces sea $z_0 = w$, y se tiene que $f(z_0) = 0$.
- Si $f(w) \neq 0$, entonces $f(w)f(-w) < 0$. Como $\mathbb{C}^*$ es conexo, por el Teorema del Valor Intermedio $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$.

En cualquier caso, $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z_0) = 0$. Por tanto, $\varphi(z_0) = \varphi(-z_0)$. Esto implica que $\operatorname{Arg} z_0 = \operatorname{Arg} -z_0$, lo cual es una contradicción ya que:

$$\operatorname{Arg} -z_0 = (\arg z_0 + \pi) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Por tanto, no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Por otro lado, consideramos el caso para $\mathbb{T}$. Hay diversas formas de probarlo:

- De forma análoga, habiendo uso ajora de que $\mathbb{T}$ es conexo.
- Aplicando de forma directa el Teorema de Borsuk-Ulam a $\varphi$ (esto es lo que en realidad hacemos en la opción anterior).
- Haciendo uso de lo anteriormente demostrado.

Desarrollaremos la tercera opción, por ser aquella que difiere de lo anterior. De nuevo, supongamos por reducción al absurdo que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{T}$. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \end{array}$$

Tenemos que $f$ es continua, y verifica que:

$$f(z) = \varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}(|z|) = \operatorname{Arg} z - 2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg} z$$

No obstante, hemos demostrado que no puede existir una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $f(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción, y concluimos que no puede existir una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{T}$.

**Ejercicio 1.2.4.** Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Dada una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, definimos $\theta_n$ como sigue:

- Si $z \notin \mathbb{R}^-$:

  Como $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, tenemos que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = 2k\pi + \arg z$. Por tanto, definimos $\theta_n$ como:

  $$\theta_n = \arg z_n + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Además, tenemos que:

  $$\{\theta_n\} = \{\arg z_n + 2k\pi\} \to \arg z + 2k\pi = \theta$$

  donde hemos usado que, al ser arg continua en $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, como $\{z_n\} \to z$, se tiene que $\{\arg z_n\} \to \arg z$.

- Si $z \in \mathbb{R}^-$:

  Por el Ejercicio 1.2.2, sabemos que $\exists \varphi \in \mathcal{C}(S_0)$ tal que $\varphi(w) \in \operatorname{Arg} w \ \forall w \in S_0$. En particular, $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$, por lo que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \theta + 2k\pi$.

  Como $\{z_n\} \to z \in S_0 = S_0^\circ$ abierto, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $z_n \in S_0$. Por tanto, definimos $\theta_n$ como:

  $$\begin{cases} \theta_n = \arg z_n & \text{si } n < N \\ \theta_n = \varphi(z_n) - 2k\pi & \text{si } n \geqslant N \end{cases}$$

  De esta forma, tenemos que $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y además:

  $$\{\theta_n\} \to \varphi(z) - 2k\pi = \theta$$

  donde hemos usado que, al ser $\varphi$ continua en $z \in S_0$, como $\{z_n\} \to z$, se tiene que $\{\varphi(z_n)\} \to \varphi(z)$.

*Observación.* Notemos que podríamos haber generalizado todo en el segundo caso, considerando $S_{\theta+\pi}$. No obstante, se ha optado por hacerlo de forma más explícita para facilitar la comprensión, ya que el primer caso seguramente sea más intuitivo.

**Ejercicio 1.2.5.** Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Para facilitar la notación, sea:

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En primer lugar, vamos a estudiar el límite de la sucesión $\{|z_n|\}$:

$$|z_n| = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{Re} z}{n}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{n}\right)^2}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{Re}^2 z}{n^2} + \frac{2\operatorname{Re} z}{n} + \frac{\operatorname{Im}^2 z}{n^2}\right)^n} = \sqrt{\left(1 + \frac{\frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}{n} + 2\operatorname{Re} z}{n}\right)^n}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}{n} + 2\operatorname{Re} z}{n}\right)^n} =$$

$$= \sqrt{\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z + 2n\operatorname{Re} z}{n} + 2\operatorname{Re} z\right)} = \sqrt{\exp(2\operatorname{Re} z)} = e^{\operatorname{Re} z}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que la raíz es una función continua, y en la segunda igualdad hemos usado el Criterio de Euler. A continuación, estudiamos los argumentos de $z_n$. Para ello, definimos:

$$w_n = 1 + \frac{z}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{w_n\} \to 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $\operatorname{Re} w_n > 0$. Por tanto, $\forall n \geqslant N$ se tiene que:

$$\arg w_n = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} w_n}{\operatorname{Re} w_n}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right)$$

Como $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg}\left((w_n)^n\right) = n \operatorname{Arg} w_n \Longrightarrow n \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right) \in \operatorname{Arg} z_n \qquad \forall n \geqslant N$$

Por tanto, definimos la sucesión $\{\theta_n\}$ como sigue:

$$\theta_n = \begin{cases} \arg z_n & \text{si } n < N \\ n \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right) & \text{si } n \geqslant N \end{cases}$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$. Calculemos el límite de la sucesión $\{\theta_n\}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \theta_n &= \lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{n + \operatorname{Re} z}\right)^2} \cdot \frac{-\operatorname{Im} z}{(n + \operatorname{Re} z)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \operatorname{Im} z}{(n + \operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im}^2 z} = \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Uniendo ambos resultados, tenemos que:

$$z_n = |z_n| \left(\cos(\theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_n)\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite, y como las funciones seno y coseno son continuas, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \left(\cos\left(\lim_{n\to\infty} \theta_n\right) + i \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} \theta_n\right)\right) = e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\right)$$

## 1.3. Funciones holomorfas

**Ejercicio 1.3.1.** En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como se indica:

1. $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces:

   $$f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 = (x+iy)x^2 = x^3 + ix^2y.$$

   Consideramos ahora las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

   $$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^3, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = x^2y, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

   Puesto que son polinómicas, es directo ver que $u, v$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, por lo que $f$ será derivable en $z = x + iy$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(x, y)$, es decir:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

   Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 &=& x^2, \\ 0 &=& -2xy. \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0, \\ xy &=& 0. \end{array} \right\}$$

   Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se verifican en el siguiente conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$:

   $$A = \{(0,a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \equiv \{ai \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

   Por tanto, $f$ es derivable en $A$, mientras que no lo es en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus A$. Es decir, $f$ es derivable en los números imaginarios puros, pero no en ningún otro punto del plano complejo. Podemos además definir la función derivada $f' : A \to \mathbb{C}$ como:

   $$f'(ai) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,a) = 0 + i \cdot 2 \cdot 0 \cdot a = 0 \qquad \forall ai \in A.$$

   Por tanto, $f$ es constante en $A$. De hecho, se tiene que:

   $$f(ai) = 0 \qquad \forall ai \in A.$$

2. $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \dfrac{x^2}{2}\right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^3 - y, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = y^3 + \frac{x^2}{2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$
   Puesto que son polinómicas, es directo ver que $u, v$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, por lo que $f$ será derivable en $z = x+iy$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(x,y)$, es decir:
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$
   Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2 &=& 3y^2, \\ -1 &=& -x. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1, \\ y &\in& \{-1, 1\}. \end{array}\right\}$$
   Por tanto, fijado $z_0 = 1 + i \in \mathbb{C}$, tenemos que $f$ es derivable en $\{z_0, \overline{z_0}\}$, mientras que no lo es en ningún otro punto del plano complejo. En estos puntos, tenemos que:
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 3 + i, \\ f'(\overline{z_0}) &= f'(1-i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 3 + i. \end{aligned}$$

3. $f(x+iy) = \dfrac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con $f(0) = 0$.

   Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{aligned}$$
   donde, además, $u(0,0) = v(0,0) = 0$. Estudiamos la derivabilidad por partes:

   - Estudiamos en $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
     Por el carácter local de la diferenciabilidad, sabemos que $u, v$ con diferenciables en $A$, por lo que $f$ será derivable en $z = x + iy \in A$ si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(x,y)$, es decir:
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de dichas derivadas parciales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x^4}{(x^2+y^2)^2} & = & \dfrac{3y^2(x^2+y^2)-2y^4}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{3y^2(x^2+y^2)-2y^4}{(x^2+y^2)^2} & = & -\dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x^4}{(x^2+y^2)^2}.\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2(x^2+y^2)-2x^4 & = & 3y^2(x^2+y^2)-2y^4, \\ 3y^2(x^2+y^2)-2y^4 & = & -3x^2(x^2+y^2)+2x^4.\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(x^2+y^2)(x^2-y^2) & = & 2(x^4-y^4), \\ 3(x^2+y^2)^2 & = & 2(x^4+y^4).\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3(x^4-y^4) & = & 2(x^4-y^4), \\ 3(x^2+y^2)^2 & = & 2(x^4+y^4).\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x^4=y^4, \\ x^4+y^4+6x^2y^2=0.\end{array}\right\}$$

Debido a que la segunda ecuación tan solo se cumple si $x=y=0$ (valor que no pertenece a $A$), tenemos que no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto de $A$. Por tanto, $f$ no es derivable en ningún punto de $A$.

- Estudiamos en el origen, $z=0=(0,0)$:

  Lo estudiaremos a partir de la definición de derivada en un punto. Consiste en ver si el siguiente límite existe:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{y^3}{x^2+y^2}}{x+iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+iy^3}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

  Como sabemos, la existencia de este límite equivale a que exista el límite de las partes reales e imaginarias. Por tanto, trabajamos en primer lugar con la parte real:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^3+xy^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

  Para ver si dicho límite existe, calculamos los límites parciales:

$$\lim_{t\to 0}\frac{0^2}{0^2+t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

  Como ambos límites parciales no coinciden, el límite no existe. Por tanto, como la parte real no tiene límite, dicho límite no existe y; por tanto, $f$ no es derivable en el origen.

Por tanto, $f$ no es derivable en ningún punto del plano complejo.

**Ejercicio 1.3.2.** Probar que existe una función entera $f$ tal que:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces $f$ es única.

Supongamos que existe una función entera $f$ cumpliendo las condiciones dadas. Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por ser una función entera, $f$ es derivable en todo $\mathbb{C}$, por lo que $u, v$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{R}^2$. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales de $u$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) &=& 4x^3 - 12xy^2, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) &=& 12x^2y - 4y^3. \end{array} \right\}$$

Integrando con respecto a $y$ la primera ecuación, tenemos que:

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + \varphi(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que depende solo de $x$ y representa la constante de integración. Derivando con respecto a $x$ la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 12x^2y - 4y^3 + \varphi'(x)$$

Por tanto, como también tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducimos que $\varphi'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\varphi(x) = C \in \mathbb{R}$ y, por tanto:

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + C \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, la función $f$ es de la forma:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3 + C) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Si imponemos la condición adicional $f(0) = 0$, tenemos que:

$$f(0) = 0 = 0 + Ci \iff C = 0.$$

Por tanto, la función $f$ es única y viene dada por:

$$f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Ejercicio 1.3.3.** Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera $f$ tal que:

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que existe una función entera $f$ cumpliendo las condiciones dadas. Definimos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2, && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy), && \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Por ser una función entera, $f$ es derivable en todo $\mathbb{C}$, por lo que $u, v$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y, además, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{R}^2$. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales de $u$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) & = & 2ax + by, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & = & -bx - 2cy. \end{array} \right\}$$

Integrando con respecto a $y$ la primera ecuación, tenemos que:

$$v(x,y) = 2axy + b \cdot \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que depende solo de $x$ y representa la constante de integración. Derivando con respecto a $x$ la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2ay + \varphi'(x)$$

Por tanto, como también tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2ay + \varphi'(x) &= -bx - 2cy \\ \varphi'(x) &= -bx - 2y(a+c) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Como $\varphi$ tan solo depende de $x$, la ecuación anterior se cumplirá si y solo si $a + c = 0$; en cuyo caso:

$$\varphi(x) = -\frac{bx^2}{2} + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la función $f$ será de la forma:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + i\,(2axy + C) \\ &= a(x^2 - y^2) + bxy + i\,(2axy + C) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, y a modo de resumen, tenemos que:

$$\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ tal que } \operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \ \forall x,y \in \mathbb{R} \iff a + c = 0.$$

$\Rightarrow$) Si $f$ cumple las condiciones dadas, hemos probado anteriormente que $a+c=0$.

$\Leftarrow$) Si $a+c=0$, La función $f$ descrita anteriormente cumple las condiciones dadas.

**Ejercicio 1.3.4.** Sea $\Omega$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que:

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Probar que $f$ es constante.

**Ejercicio 1.3.5.** Sea $\Omega$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $f$ es constante.

**Ejercicio 1.3.6.** Sea $\Omega$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} \mid z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f^*(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)} \quad \text{para todo } z \in \Omega^*.$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

**Ejercicio 1.3.7.** Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

## 1.4. Funciones analíticas

**Ejercicio 1.4.1.** Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n + a^n) z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n$ con $a \in \mathbb{C}$

**Ejercicio 1.4.2.** Conocido el radio de convergencia $R$ de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^k \alpha_n z^n$ con $k \in \mathbb{N}$ fijo.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$

**Ejercicio 1.4.3.** Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

**Ejercicio 1.4.4.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$