Topología I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas[1].

Grupo Único.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 14 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

Observaciones Todos los apartados de un mismo ejercicio tienen la misma puntuación.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (4.5 puntos)**.** Para todo $R \geqslant 0$, consideramos el conjunto S_R dado por $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = R\}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Se considera la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B} = \{S_R \mid R \geqslant 0\}$.

1. Estudiar cuándo el conjunto $\{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.
2. Demostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es 1AN pero no es 2AN.
3. Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ del conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |b| < 1\}$.
4. Probar que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.
5. Demostrar que A es compacto en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ si y solo si existe $J \subset [0, +\infty[$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R \in J} S_R$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Enunciar y demostrar el teorema de Tichonov. Si se hace uso del lema del tubo, entonces éste debe ser enunciado y demostrado previamente.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

1. Decidir si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ son homeomorfos entre sí dos a dos o no:
   a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 4\}$,
   b) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant 4\}$,
   c) $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{R}_i$ una relación de equivalencia en X_i tal que la proyección $p_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i/\mathcal{R}_i, \mathcal{T}/\mathcal{R}_i)$ es abierta. Demostrar que
$$(X_1 \times X_2)/\mathcal{R} \cong (X_1/\mathcal{R}_1, \mathcal{T}_1/\mathcal{R}_1) \times (X_2/\mathcal{R}_2, \mathcal{T}_2/\mathcal{R}_2),$$
donde $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia en $X_1 \times X_2$ definida por
$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff x_1\mathcal{R}_1 y_1 \text{ y } x_2\mathcal{R}_2 y_2.$$
3. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos tal que $f(A)$ es conexo en $(Y, \mathcal{T}')$ para cada A conexo en $(X, \mathcal{T})$. ¿Es f continua?