Variable Compleja I

Examen VI

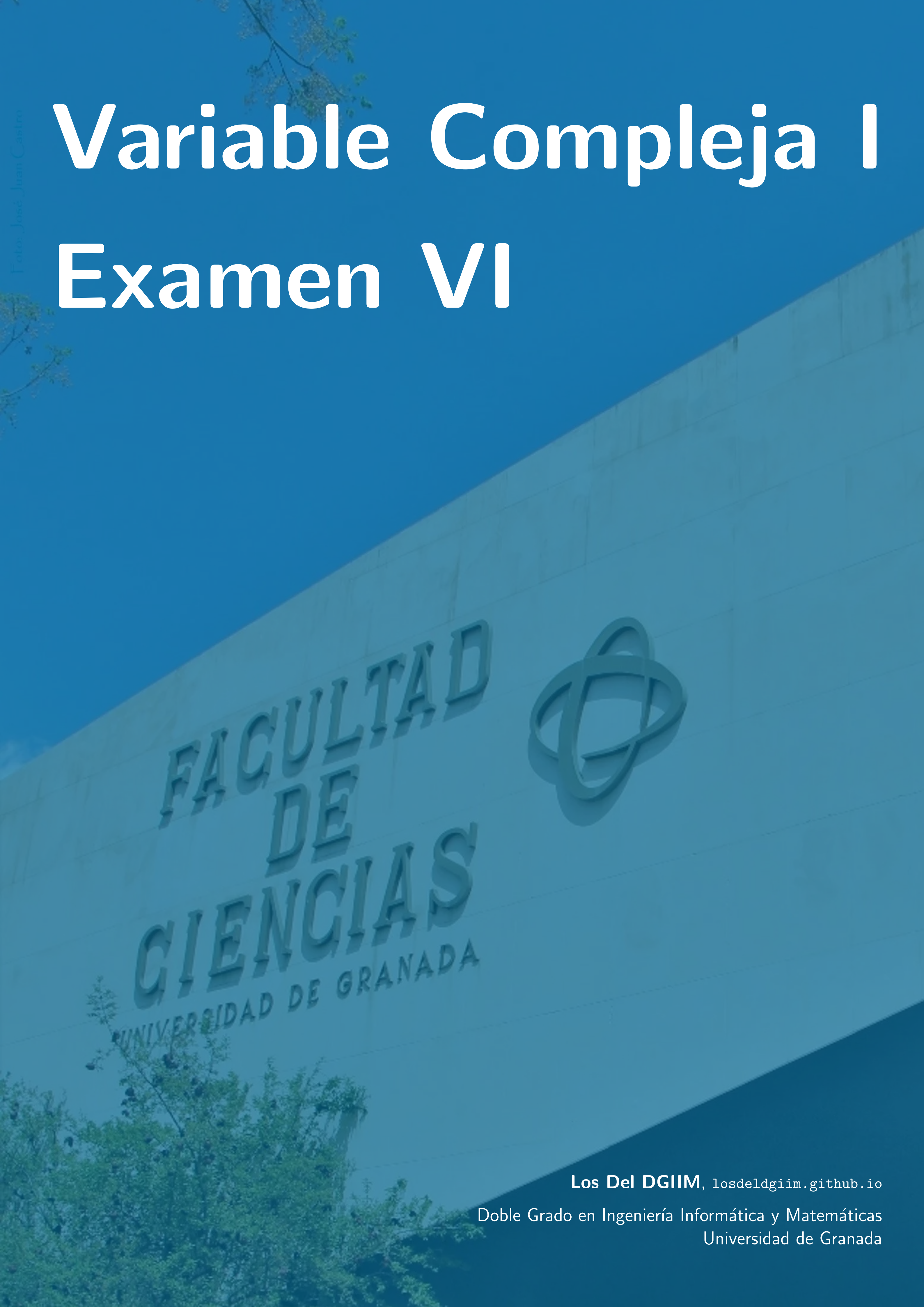

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2019-20.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 20 de Abril de 2020.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\overline{z}} \qquad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2}\, dz.$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Ejercicio 5 (Extra: 1.5 puntos)**.** Sea $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y sólo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde:

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Se trata de una serie geométrica de razón φ, donde:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z^2 - i}{z^2 + i} \end{array}$$

Sabemos que esta converge puntualmente si la razón tiene módulo menor que uno. Fijado $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right| < 1 &\iff |z^2 - i|^2 < |z^2 + i|^2 \\ &\iff \cancel{\left(\operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z\right)^2} + (2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z - 1)^2 < \cancel{\left(\operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z\right)^2} + (2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1)^2 \iff \\ &\iff 4\operatorname{Re}^2 z \operatorname{Im}^2 z - 4\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1 < 4\operatorname{Re}^2 z \operatorname{Im}^2 z + 4\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z + 1 \iff \\ &\iff \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z > 0 \end{aligned}$$

Definimos por tanto tanto el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Tenemos por tanto que converge puntualmente y absolutamente en Ω y no converge en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Respecto a la convergencia uniforme, dado $B \subset \mathbb{C}$, veamos que la serie converge uniformemente en B si y solo si:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq \Omega \iff \rho = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in B\} < 1$$

$\Longleftarrow$) Supuesto que $\rho < 1$, es fácil probar la convergencia uniforme de la serie en B:

$$|f_n(z)| = |\varphi(z)|^n \leqslant \rho^n \qquad \forall z \in B, n \in \mathbb{N}$$

Y sabemos que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \rho^n$ converge por ser $\rho < 1$. Por el Test de Weierstrass, tenemos que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en B.

$\Longrightarrow$) Supuesto que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en un conjunto $B \subseteq \Omega$, por reducción al absurdo, supongamos que $\rho \geqslant 1$, en cuyo caso (por la definición de supremo), tendremos la existencia de una sucesión $\{|\varphi(z_n)|\}$ con $z_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\{|\varphi(z_n)|\} \to \rho \geqslant 1$$

En cuyo caso, para dicha sucesión tendremos que:

$$|f_n(z_n)| = |\varphi(z_n)|^n$$

Y esta sucesión no podrá converger a 0, por ser $\rho \geqslant 1$, lo que contradice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converja uniformemente en B, por no converger uniformemente su término general a 0 en B.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por:

$$f(z) = z^2 e^{\overline{z}} \qquad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Distinguimos en función del valor de $z \in \mathbb{C}$:

- Si $z \neq 0$:

  Definimos la siguiente función:

  $$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

  Además, sabemos que:

  $$h(z) = \frac{f(z)}{z^2}$$

  Supuesto que f es derivable en z, entonces h también lo es. Pero se ha visto que h no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$. Por tanto, f no es derivable en z.

- Si $z = 0$:

  $$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 e^{\overline{z}}}{z} = \lim_{z\to 0} z e^{\overline{z}} = 0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y no lo es en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Para g, distinguimos también en función del valor de $z \in \mathbb{C}$. Para ello, veamos antes dónde se anula el seno:

$$\operatorname{sen}(x+iy) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \iff \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{senh} y = 0 \end{array} \right\} \iff x+iy \in \pi\mathbb{Z}$$

Distinguimos por tanto en función de si $z \in \pi\mathbb{Z}$ o no:

- Si $z \notin \pi\mathbb{Z}$:

  $$f(z) = \frac{g(z)}{\operatorname{sen} z}$$

  Si g es derivable en z, entonces f también lo es. Pero se ha visto que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}^*$. Por tanto, g no es derivable en z.

- Si $z = 0$:

  Como f es derivable en 0, también lo es g en 0, con:

  $$g'(0) = \cos(0) f(0) + \operatorname{sen}(0) f'(0) = f(0)$$

Observación. Este caso no habría por qué distinguirlo (puesto que estña incluido en el siguiente), pero se incluye por ser el más directo.

- Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2k\pi$:

$$\frac{g(z) - g(2k\pi)}{z - 2k\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z) f(z)}{z - 2k\pi} = \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi\}$$

Por la definición formal de derivada del seno en $2\pi k$, se tiene que:

$$1 = \cos(2\pi k) = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(2\pi k)}{z - 2\pi k} \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2\pi k}$$

Por tanto:

$$g'(2\pi k) = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z) f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \to 2\pi k} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \to 2\pi k} f(z) = f(2\pi k)$$

- Si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = (2k+1)\pi$:

$$\frac{g(z) - g((2k+1)\pi)}{z - (2k+1)\pi} = \frac{\operatorname{sen}(z) f(z)}{z - (2k+1)\pi} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi\}$$

Por la definición formal de derivada del seno en $(2k+1)\pi$, se tiene que:

$$-1 = \cos((2k+1)\pi) = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}((2k+1)\pi)}{z - (2k+1)\pi} \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - (2k+1)\pi}$$

Por tanto:

$$g'((2k+1)\pi) = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z) f(z)}{z - 2k\pi} = \lim_{z \to (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z - 2k\pi} \cdot \lim_{z \to (2k+1)\pi} f(z) = -f((2k+1)\pi)$$

Por tanto, g es derivable en z si y solo si $z \in \pi\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Calcular

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2}\, dz.$$

Definimos la función f como:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0, 1/2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\cos(z)}{(z-2)^2} \end{array}$$

Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0, 1/2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b) + B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

- Para $z = a$: $1 = A(a-b) \Longrightarrow A = \frac{1}{a-b}$.
- Para $z = b$: $1 = B(b-a) \Longrightarrow B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$.

Por tanto, la integral queda:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{1}{a-b} \left(\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz \right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{a-b} \left(2\pi i f(a) - 2\pi i f(b) \right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que la función $f(z)$ es entera y que $a, b \in D(0, R)$, por lo que se puede aplicar la Fórmula de Cauchy para la circunferencia considerando como función $f(z)$.

Sea ahora f entera y acotada. Entonces, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| &\leqslant \frac{M}{|z-a||z-b|} \leqslant \frac{M}{||z| - |a||\, ||z| - |b||} \leqslant \frac{M}{|R - |a||\, |R - |b||} \leqslant \\
&\leqslant \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} \qquad \forall z \in C(0, R)^*
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $z \in C(0, R)^*$, por lo que $|z| = R$; y que $R > \max\{|a|, |b|\}$, por lo que $R - |a| > 0$ y $R - |b| > 0$. Por tanto, se tiene que:

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leqslant 2\pi R \cdot \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)} = \frac{2\pi M R}{(R - |a|)(R - |b|)}$$

Como la anterior expresión es válida para todo $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|, |b|\}$, podemos hacer tender $R \to \infty$. Por el Lema del Sándwich, se tiene que:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$

Por la expresión anterior a la que habíamos llegado, se tiene que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2\pi i \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por la unicidad del límite, se tiene que:

$$f(b) = f(a) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Por tanto, f es constante.

Ejercicio 5 (Extra: 1.5 puntos)**.** Sea $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y sólo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.

Demostramos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Fijado $a \in \Omega$, por ser Ω abierto $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \in D(a, r) \subset \Omega$. Consideramos ahora $\overline{D}(a, {}^r\!/2)$ compacto, luego $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en $\overline{D}(a, {}^r\!/2)$. Consideramos por tanto $D(a, {}^r\!/4)$, y vemos que este es un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g, demostrando así lo pedido.

$\Longleftarrow$) Sea $K \subset \Omega$ compacto. Para cada $a \in K \subset \Omega$, $\exists N_a$ entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g. Por ser N_a un entorno de a, $\exists U_a \subset N_a$ abierto con $a \in U_a$, y $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en U_a.

Consideramos ahora el recubrimiento de K por abiertos dado por $K \subset \bigcup_{a\in K} U_a$. Por ser K compacto, $\exists I \subset K$ *finito* tal que $K \subset \bigcup_{a\in I} U_a$. Ahora, para cada $a \in I$, como la convergencia en U_a es uniforme, aplicamos la definición:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists N_a \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_a,\ |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in U_a$$

Por tratarse de una cantidad finita, podemos considerar el mínimo:

$$N = \min\{N_a : a \in I\}$$

Por tanto, para cada $a \in I$, se tiene que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in U_a$$

Como $K \subset \bigcup_{a\in I} U_a$, se tiene que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in K$$

Por tanto, se tiene la convergencia uniforme en K.