Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Propiedades de Lenguajes Indep. del Contexto

Ejercicio 1.1.1. Proporcione ejemplos de los siguientes lenguajes:

1. Un lenguaje que no es independiente del contexto.
2. Un lenguaje independiente del contexto pero no determinista.
3. Un lenguaje que es independiente del contexto determinista, pero que no es aceptado por un autómata con pila determinista que tiene que vaciar su pila.
4. Un lenguaje que es aceptado por un autómata con pila determinista que tiene que vaciar su pila, pero que no es un lenguaje regular.

Ejercicio 1.1.2. Encontrar cuando sea posible, un autómata con pila que acepte el lenguaje L, donde:

- $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
- $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
- $L = \{a^l b^m c^n \mid l + m = n\}$.
- $L = \{a^m b^n c^m \mid n \leqslant m\}$.

Ejercicio 1.1.3. Demostrar que los siguientes lenguajes no son libres de contexto:

- $L_1 = \{a^p \mid p \text{ es primo}\}$.
- $L_2 = \{a^{n^2} \mid n \geqslant 1\}$.

Ejercicio 1.1.4. Encontrar un autómata con pila que acepte, por el criterio de pila vacía el lenguaje

$$L = \{0^n u u^{-1} 1^n \mid u \in \{0,1\}^*\}$$

Encontrar un autómata que acepte el lenguaje complementario.

Ejercicio 1.1.5. Considerar la gramática libre de contexto dada por las siguientes producciones:

$$\begin{aligned}
S &\to aABb \mid aBA \mid \varepsilon \\
A &\to aS \mid bAAA \\
B &\to aABB \mid aBAB \mid aBBA \mid bS
\end{aligned}$$

Determinar si las cadenas aabaab y las cadenas bbaaa son generadas por esta gramática

1. Haciendo una búsqueda en el árbol de todas las derivaciones, pasando previamente la gramática a forma normal de Greibach.
2. Mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami.

Ejercicio 1.1.6. Determinar qué lenguajes son regulares y/o libres de contexto:

- $\{0^{n^2} \mid n \geqslant 1\}$.
- $\{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$.
- $\{0^n 1 0^m 1 0^{n+m} \mid n, m \geqslant 0\}$.
- Conjunto de palabras en las que toda posición impar está ocupada por un 1.

Ejercicio 1.1.7. Comprobar, usando el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami y el algoritmo de Early si las palabras $bba0d1$ y $cba1d1$ pertenecen al lenguaje generado por la gramática:

$$\begin{aligned}
S &\to AaB \mid AaC \\
A &\to Ab \mid Ac \mid b \mid c \\
B &\to BdC \mid 0 \\
C &\to CeB \mid 1
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.8. Dada la gramática:

$$\begin{array}{llll}
S \to AB & S \to C & & \\
A \to aAb & A \to ab & B \to cBd & B \to cd \\
C \to aCd & C \to aDd & D \to bDc & D \to bc
\end{array}$$

determinar mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras $abbccd$ y $aabbcd$ son generadas.

Ejercicio 1.1.9. Determinar si son regulares y/o independientes del contexto los siguientes lenguajes:

1. $\{uu^{-1}u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.
2. $\{uu^{-1}ww^{-1} \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$.
3. $\{uu^{-1}w \mid u, w \in \{0,1\}^* \text{ y } |u| \leqslant 3\}$

Justificar las respuestas.

Ejercicio 1.1.10. Construir una gramática independiente del contexto para el lenguaje más pequeño que verifica las siguientes reglas:

1. Cualquier sucesión de dígitos de $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ de longitud mayor o igual a 1 es una palabra del lenguaje.
2. Si $u_1, \ldots, u_n$ $(n \geqslant 1)$ son palabras del lenguaje, entonces $(u_1 + \cdots + u_n)$ es una palabra del lenguaje.
3. Si $u_1, \ldots, u_n$ $(n \geqslant 1)$ son palabras del lenguaje, entonces $[u_1 * \cdots * u_n]$ es una palabra del lenguaje.

Comprobar por el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras: $(0+1)*3$ y $[(0+1)]$ son generadas por la gramática.

Ejercicio 1.1.11. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje:

$$L = \{ucv \mid u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y n}^{\text{o}} \text{ de subcadenas '01' en } u \text{ es igual al n}^{\text{o}} \text{ subcadenas '10' en } v\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena $010c101$ pertenece al lenguaje generado por la gramática.

Ejercicio 1.1.12. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje definido sobre el alfabeto $\{a, 0, 1\}$:

$$L = \{auava \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ y } u = v^{-1}\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadenas $a0a0a$ y $a1a0a$ pertenecen al lenguaje generado por la gramática.

Ejercicio 1.1.13. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguaje definidos sobre el alfabeto $\{a, 0, 1\}$:

$$L_1 = \{auava \mid u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$
$$L_2 = \{uvu \mid u \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena $a0a0a$ pertenece a L_1 y la cadena 011001 pertenece al lenguaje L_2.

Ejercicio 1.1.14. Sea la gramatica $G = (\{a,b\}, \{S, A, B\}, S, P)$ siendo P:

$$\begin{aligned}
&S \to AabB \\
&A \to aA \mid bA \mid \varepsilon \\
&B \to Bab \mid Bb \mid ab \mid b
\end{aligned}$$

1. ¿Es regular el lenguaje que genera G?.
2. Transforma G a una gramatica equivalente en Forma Normal de Chomsky.
3. Aplicando el algoritmo CYK, determinar si las siguientes cadenas pertenecen a $L(G)$: $aababb$, $aaba$.
4. Muestra el arbol de derivacion para generar las palabras del apartado anterior que pertenecen a $L(G)$.

Ejercicio 1.1.15. Dada la gramática:

$$\begin{array}{lll}
S \to AB & S \to C & S \to BE \\
A \to aAb & A \to \varepsilon & \\
B \to cBd & B \to \varepsilon & \\
C \to aCd & C \to aDd & \\
D \to bDc & D \to \varepsilon &
\end{array}$$

determinar mediante el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si las palabras $abbccd$ y $aabbcd$ son generadas por esta gramática.

Ejercicio 1.1.16. Demostrar que si L_1 es independiente del contexto y L_2 es regular, entonces $L_1 \cap L_2$ es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.17. Si L_1 y L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces se define el cociente $L_1/L_2 = \{u \in A^* \mid \exists w \in L_2 \text{ tal que } uw \in L_1\}$. Demostrar que si L_1 es independiente del contexto y L_2 regular, entonces L_1/L_2 es independiente dl contexto.

Ejercicio 1.1.18. Si L es un lenguaje sobre $\{0,1\}$, sea $SUF(L)$ el conjunto de los sufijos de palabras de L:

$$SUF(L) = \{u \in \{0,1\}^* \mid \exists v \in \{0,1\}^*, \text{ tal que } vu \in L\}.$$

Demostrar que si L es independiente del contexto, entonces $SUF(L)$ también es independiente del contexto.

Ejercicio 1.1.19. Demostrar que $L = \{0^i 1^1 \mid i \geqslant 0\} \cup \{0^i 1^{2i} \mid i \geqslant 0\}$ es independiente del contexto, pero no es determinista.

1.1.1. Preguntas Tipo Test

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La intersección de lenguajes libres de contexto es siempre libre de contexto.
2. Existe un algoritmo para determinar si una palabra es generada por una gramática independiente del contexto.
3. El lenguaje $\{a^i b^j c^i d^i \mid i, j \geqslant 0\}$ es independiente del contexto.
4. Existe un algoritmo para determinar si una gramática independiente del contexto es ambigua.
5. Existe un algoritmo para comprobar cuando dos gramáticas libres de contexto generan el mismo lenguaje.
6. El lenguaje $L = \{0^i 1^j 2^k \mid i \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ es independiente del contexto.
7. Si el lenguaje L es independiente del contexto, entonces L^{-1} es independiente del contexto.
8. Existe un algoritmo que permite determinar si una gramática independiente del contexto genera un lenguaje finito o infinito.
9. Existe un algoritmo para determinar si una gramática independiente del contexto es ambigua.
10. En el algoritmo de Earley, la presencia del registro $(2, 5, A, CD, adS)$ implica que a partir de CD se puede generar la subcadena de la palrba de entrada que va del carácter 3 al 5.
11. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado por una gramática libre de contexto es regular.

12. El algoritmo de Earley se puede aplicar a cualquier gramática independiente del contexto (sin producciones nulas ni unitarias).

13. El conjunto de palabras $\{a^n b^n c^i \mid i \leqslant n\}$ es independiente del contexto.

14. Si L_1 y L_2 son independientes del contexto, entonces $L_1 - L_2$ es siempre independiente del contexto.

15. Hay lenguajes que no son independientes del contexto y si verifican la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto.

16. El conjunto de palabras $\{u011u \mid u \in \{0,1\}^*\}$ es independiente del contexto.

17. El conjunto de palabras que contienen la subcadena 011 es independiente del contexto.

18. En el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami calculamos los conjuntos V_{ij} que son las variables que generan la subcadena de la palabra de entrada que va desde el símbolo en la posición i al símbolo en la posición j.

19. Un lenguaje puede cumplir la negación de la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto y ser regular.

20. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado con una gramática independiente del contexto es finito o infinito.

21. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1 L_2 \cup L_1)^*$ es independiente del contexto.

22. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1 - L_2)$ es independiente del contexto.

23. Existe un algoritmo para determinar si una palabra u tiene más de un árbol de derivación en una gramática independiente del contexto G.

24. La intersección de dos lenguajes independientes de contexto con un número finito de palabras produce siempre un lenguaje regular.

25. El complementario de un lenguaje con un número finitos de palabras es siempre libre de contexto.

26. Todo lenguaje aceptado por un autómata con pila por el criterio de estados finales cumple la condición que aparece en el lema de bombeo para lenguajes libres de contexto.

27. No existe algoritmo que para toda gramática libre de contexto G nos indique si el lenguaje generado por esta gramática $L(G)$ es finito o infinito.

28. Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes de contexto, entonces $(L_1 L_2 \cup L_1)^*$ puede ser representado por un autómata con pila.

29. Existe un algoritmo para determinar si un autómata con pila es determinista.

30. La demostración del lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto se basa en que si las palabras superan una longitud determinada, entonces en el árbol de derivación debe de aparecer una variable como descendiente de ella misma.

31. La unión de dos lenguajes independientes contexto puede ser siempre aceptada por un autómata con pila.

32. El complementario de un lenguaje libre de contexto con una cantidad finita de palabras no tiene porque producir otro lenguaje libre de contexto.

33. El lema de bombeo para lenguajes libres de contexto es útil para demostrar que un lenguaje determinado no es libre de contexto.

34. La intersección de dos lenguajes independientes del contexto da lugar a un lenguaje aceptado por un autómata con pila determinista.

35. No existe algoritmo que reciba como entrada una gramática independiente del contexto y nos devuelva si el lenguaje generado por esta gramática es finito o infinito.

36. En el algoritmo de Cocke-Younger-Kasami si $A \in V_{1,2}$ y $B \in V_{3,2}$ y $C \to AB$, podemos deducir que $C \in V_{1,4}$.

37. Si L es independiente del contexto, entonces L^{-1} es independiente del contexto.

38. No existe un algoritmo que nos diga si son iguales los lenguajes generados por dos gramáticas independientes del contexto G_1 y G_2.

39. La intersección de dos lenguajes infinitos da lugar a un lenguaje independiente del contexto.

40. La unión de dos lenguajes independientes del contexto puede ser aceptado por un autómata con pila.

41. El lenuaje $L = \{0^i 1^j 2^k \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ es independiente del contexto.

42. Si L_1 y L_2 son independientes del contexto, no podemos asegurar que $L_1 \cap L_2$ también lo sea.

43. Si un lenguaje satisface la condición necesaria del lema de bombeo para lenguajes regulares, entonces también tiene que satisfacer la condición necesaria del lema de bombeo para lenguajes independientes del contexto.