Lógica y Métodos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Lógica y Métodos Discretos

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-24

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. Problemas de sesiones prácticas

Ejercicio 1.1.1. Demustre que para todo número natural n:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\right)^2 + n^3$$

Demostración. La demostración es por casos:

$n = 0$;

$$\left(\sum_{n=0}^{0} k\right)^2 = 0^2 = 0 = 0 + 0 = \left(\sum_{k=0}^{-1} k\right)^2 + 0^3$$

$n = 1$;

$$\left(\sum_{k=0}^{1} k\right)^2 = 0 + 1 = \left(\sum_{k=0}^{0} k\right)^2 + 1^3 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

$n > 1$;

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + n\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)n =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + 2\frac{(n-1)n}{2}n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2 + (n-1)n^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^2(1 + n - 1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)^2 + n^3$$

$\square$

Ejercicio 1.1.2 (Teorema de Nicomachus)**.** Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Demostración. La demostración es por inducción según el principio de inducción matemática y predicado $P(n)$ del contenido literal (tenor):

$$" \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k \right)^2 "$$

- En el caso base $n = 0$;

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = 0^2 = \left(\sum_{k=0}^{0} k \right)^2$$

  Y por tanto, $P(0)$ vale.

- Como hipótesis de inducción, supondremos que n es un número natural y que $P(n)$ vale, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k \right)^2$$

  En el paso de inducción, demostraremos que $P(n+1)$ vale.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3 \right) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k \right)^2 + (n+1)^3 \overset{(**)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k \right)^2$$

  donde en $(*)$ he utilizado la hipótesis de inducción.
  donde en $(**)$ he utilizado el ejercicio 1.4.4.
  Luego $P(n+1)$ vale.
  Por el principio de inducción matemática para todo número natural n, $P(n)$ vale como se pedía.

$\square$

Observación. El segundo principio de inducción matemática se utiliza cuando, en vez de usar como hipótesis una verdad sobre n, usar una verdad como $n - k$ con $k > 1$, cuando estemos demostrado que el predicado vale para $n + 1$.