Задача 1
Найти точку пересечения двух прямых, заданными уравнениями вида $Ax + By + C = 0$

Решение Составим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы получить координату y домножим первое уравнение на $A2$, а второе на $A1$ и вычтем из первого второе, получится $(B1A2 - B2A1)y = A1C2 - C1A2$, значит $y = \frac{A1C2 - C1A2}{B1A2 - B2A1}$
Чтобы получить координату x домножим первое уравнение на $B2$, а второе на $B1$ и вычтем из первого второе, получится $(B1A2 - B2A1)x = C1 - C1B1$, значит $x = \frac{C1B2 - C2B1}{B1A2 - B2A1}$ Заметим, что знаменатель обеих дробей это векторное произведение вектора нормали и направляющего вектора.
Вектор нормали имеет координаты (A, B), а направляющий либо $(B, -A)$, либо $(-B, A)$

Задача 2
Найти любую точку, лежащую на прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$

Решение Рассмотрим два случая:
1) если a не равно нулю, то можно взять точку $(\frac{-c}{a}, 0)$
2) если b не равно нулю, то можно взять точку $(0, \frac{-c}{b})$

Также можно не рассматривать случаи выше и взять точку, которая является проекцией точки $(0, 0)$ на данную прямую, она равна $(-\frac{AC}{A^2+B^2}, -\frac{BC}{A^2+B^2})$

Задача 3
Сместить прямую вида $Ax + By + C = 0$ на вектор $v = (x_m, y_m)$ и получить новые коэффициенты прямой

Решение Посмотрим на точку на смещенной прямой, пусть ее координаты (x, y), тогда ее координаты на исходной прямой это $(x, y) - v = (x - x_m, y - y_m)$
Тогда уравнение имеет вид $A(x - x_m) + B(y - y_m) + C = 0$
Раскроем скобки $Ax + By + (C - Ax_m + By_m) = 0$

Задача 4
Найти коэффициенты уравнения прямой проходящей через точки $v_1(x_1, y_1)$ и $v_2(x_2, y_2)$

Решение Мы знаем, что направляющий вектор такой прямой будет $v_2 - v_1 = (-b, a)$
Тогда мы сразу можем найти коэффициенты $A = y_2 - y_1$, $A = x_1 - x_2$, подберем подходящий коэффициент $c = -Ax_1 - By_1$

Задача 5
Найти расстояние от точки (x, y) до прямой $Ax + By + C = 0$, точку проекции, симметричную (x, y) относительно прямой.

Решение Расстояние от точки до прямой ищется по формуле: $\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
Чтобы найти проекцию точки на прямую, возьмем вектор нормали (a, b), мы уже нашли расстояние, значит можно отмерить на векторе нормали нужную нам длину расстояния от точки до прямой это буквально $(\frac{hA}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{hB}{\sqrt{A^2+B^2}})$. Теперь нужно понять, этот вектор нужно прибавить или вычесть, можно попробовать два варианта и взять тот, у котороого $|Ax + By + c|$ меньше. Чтобы найти точку, симметричную, относительно прямой для данной, найдем точку проекции и прибавим еще раз вектор этой проекции.

Задача 6
Найти уравнение серединного перепендикуляра для отрезка (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

Решение По определению серединный перпендикуляр - это геометрическое место точек, равноудаленных от первой и второй точки отрезка, значит $(x -^{2}_{)} + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Путем нехитрых математических вычислений получаем $x(2(x_2 - x_1)) + y(2(y_2 - y_1)) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$, тут хорошо видны коэффициенты нужного уравнения.

Задача 7
Проверить, пересекаются ли два отрезка AB и CD

Решение Рассмотрим крайние случаи:
1) Если оба отрезка лежат на одной прямой, то проверим что какая-нибудь точка первого отрезка лежит внутри или на границе второго отрезка
2) Если какие-нибудь три точки лежат на одной прямой, то проверим, что какая-то точка первого отрезка лежит внутри второго отрезка
Иначе нужно проверить, что концы одного отрезка лежат по разные стороны от другого отрезка, это можно сделать векторным произведением.

Задача 8
Проверить, что прямая L пересекает окружность $O((x, y), R)$. Найти точки пересечения.

Решение Рассмотрим случаи:
1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то точек касания нет.
2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то одна точка касания H, которая является проекцией центра на прямую L
3) Иначе две точки пересечения. Найдем направляющий вектор прямой L $(-B, A)$ или $(B, -A)$. Найдем расстояние от точки O до точки H, пусть оно равно d, это одна из сторон треугольника, вторая сторона равна радиусу R, в этом треугольнике есть прямой угол при основании, значит по теореме Пифагора можно найти третью сторону, пусть ее длина равна len, тогда отнормируем направляющий вектор на длину len и отложим его вправо и влево от H

Задача 9
Проверить пересекаются ли две окружности. Найти точки персечения.

Решение Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = R_2^2\end{cases} \tag{2}$$

Первое уравнение оставим без изменений, а из второго вычтем первое и перепишим систему.

$$\begin{cases}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2 \\ x(2(x_1 - x_2)) + y(2(y_1 - y_2)) + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + R_1^2 - R_2^2 = 0\end{cases} \tag{3}$$

Таким образом мы получили вместо второго уравнения окружности уравнение прямой, теперь задача сведена к задаче о пересечении прямой и окружности.
Граничный случай: если центры окружностей совпадают и радиусы одинаковые, то точек пересечения бесконечно много, иначе 0

Задача 10
Найти расстояние от точки P до отрезка (A, B)

Решение Зададим прямую L, которая содержит данный отрезок. Также построим прямые $L1$ и $L2$, которые перпендикулярны L из точек A и B соответственно. Теперь просто проверим, что точки P и B лежат по одну сторону от прямой $L1$ и точки P и A лежат по одну сторону от прямой $L2$ это можно сделать, проверив, что $Ax_a + By_a + C$ и $Ax_b + By_b + C$ одного знака. Если это так, что расстояние от точки до отрезка это просто перпендикуляр, то есть расстояние от точки до прямой. Иначе же просто возьмем минимальное расстояние между концами отрезка и точкой P

Задача 11
Проверить, лежит ли точка p в выпуклом многоугольнике P за $log(n)$

Решение Сначала найдем, в каком угле лежит данная точка, для этого воспользуемся бинпоиском: после фиксации m, проверим. правда ли, что точка лежит в угле P_0, P_m, если это так, то подвинем правую играницу, иначе - левую. Теперь угол в котором лежит точка это P_l, P_{l+1}, осталось проверить, что точка лежит внутри треугольника, который образует этот угол, это можно сделать векторным произведением $cross(P_{l+1} - P_l, p - P_l)$, если оно положительно, то точка лежит в треугольнике, иначе - нет.