第六章　粒子在球对称场中的运动

因为有恒星这样现实的球对称引力场存在，所以粒子在这种场中的运动问题是有实际意义的问题. 本章将在广义相对论基础上讨论质点在席瓦西尔场中的运动. 它与牛顿理论的相应结果之间的差别是特别令人感兴趣的，因为它可用来检验广义相对论的正确性.

§6.1　时空对称性与守恒量

对称性与守恒量的关系的理论在物理学中有广泛的用途. 这里我们将在广义相对论的框架下就质点动力学问题来讨论时空对称性与动力学守恒量的关系. 它对求解质点的运动是很有帮助的.

在相对论动力学中，质点的逆变四维动量 p^μ 定义为

$$p^\mu = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6.1.1}$$

其中 m 是标量性的静质量. 由逆变动量可派生地引入协变动量

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu. \tag{6.1.2}$$

下面将看到这个量在动力学中更为重要. 当质点在引力场中运动，它的动力学守恒量是由度规场的时空对称性决定的. 我们首先可以证明，如果 ξ^μ 所生成的映射是等度规映射，则质点在这度规场中运动时 $p_\mu\xi^\mu$ 是一个守恒量.

这证明是直截了当的. 利用标量的普通微商与协变微商的一致性，以及乘积微商的分配律，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p_\mu\xi^\mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p^\mu\xi_\mu) = (p^\mu\xi_\mu)_{,\nu}u^\nu = (p^\mu\xi_\mu)_{;\nu}u^\nu$$