

# 信号与系统 期中复习

Chapter3-47

## 基本概念

Ch1 信号系统基本概念

Ch2 卷积与LTI系统

## 傅里叶变换

Ch3 周期信号傅里叶级数

Ch4 CT傅里叶变换

Ch5 DT傅里叶变换

## 信号系统应用

Ch7 采样

Ch8 通信系统



选择填空综合题（注重概念、定义）

重要题型

计算题2道（卷积、傅里叶级数、傅里叶变换）

解答题4道 一阶系统框图问题

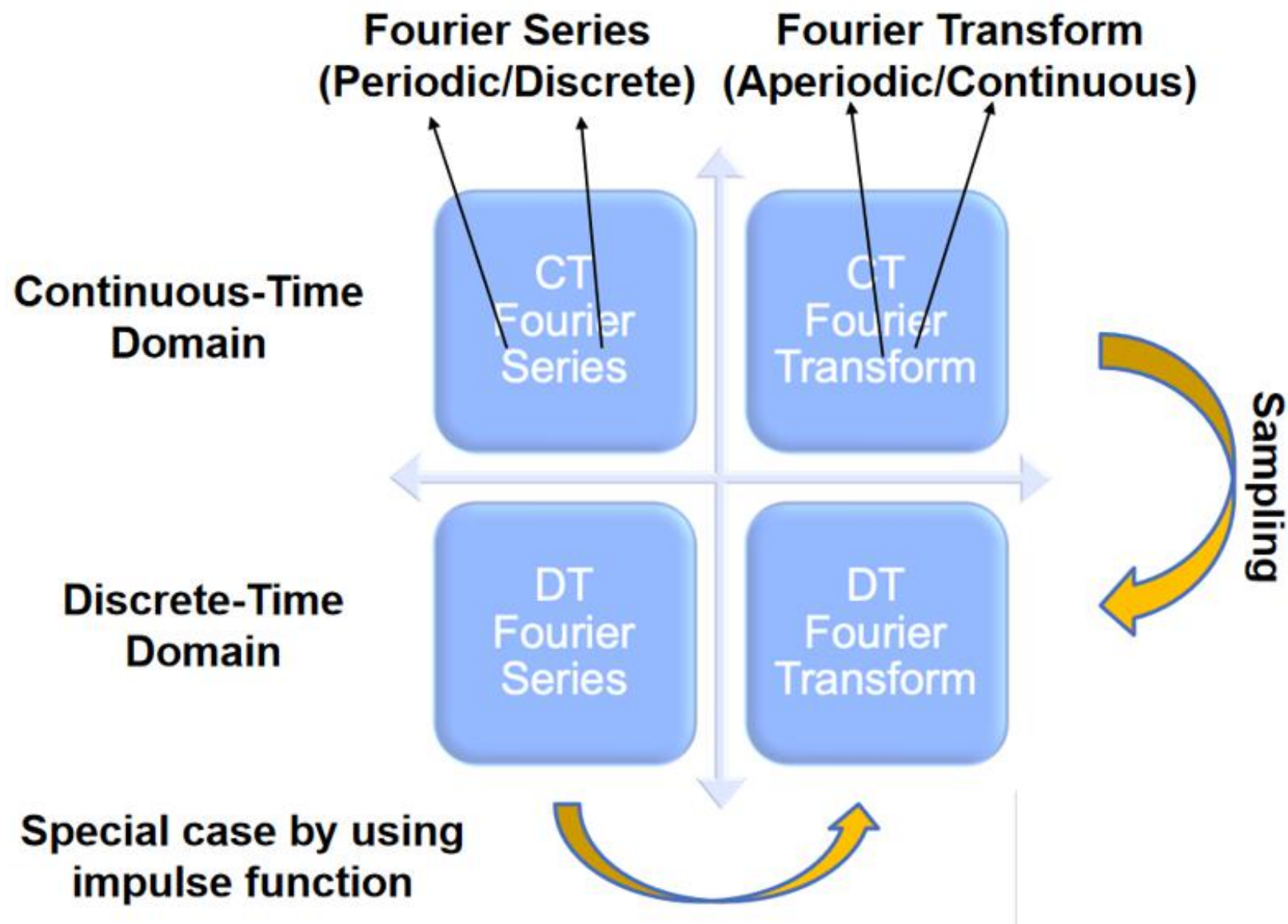


我信号不好先挂了

1  
PART

Fourier Series Representation  
of Periodic Signals

# 1 信号的分类



# 1 信号的分类

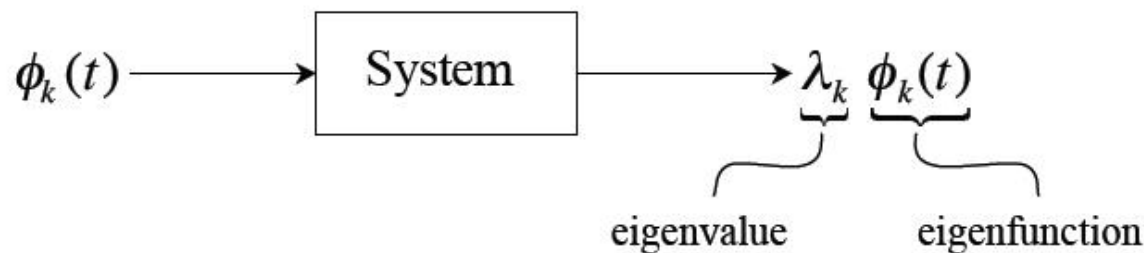
Time Domain	Non-Periodic	Periodic	
Continuous	Continuous Time Fourier Transform (CTFT)	Fourier Series (FS)	Non-Periodic
Discrete	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)	离散傅里叶级数 Discrete Fourier Transform (DFT)	Periodic
	Continuous	Discrete	Frequency Domain

## 傅里叶级数的背景

LTI系统性质:

- 基本的信号能够组成很多信号
- 系统对每个基本信号的响应十分简单, 因此系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表达式

(Focus on CT systems now, but results apply to DT systems as well.)



Eigenfunction in  $\rightarrow$  same function out with a "gain"

From the superposition property of LTI systems:

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = \sum_k \lambda_k a_k \phi_k(t)$$

## 傅里叶级数的背景

两个问题：

- 对于一个一般的LTI系统，特征方程是什么？
- 什么样的信号能被表示成这些特征方程的组合？

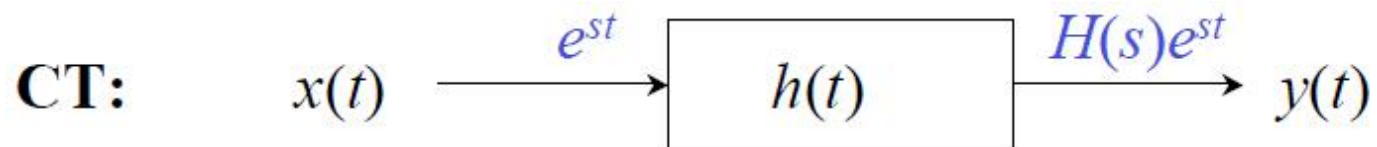
$$\begin{aligned} x(t) = e^{st} &\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \\ &= \underbrace{H(s)}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{e^{st}}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] = z^n &\longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\ &= \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} \right] z^n \\ &= \underbrace{H(z)}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{z^n}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$



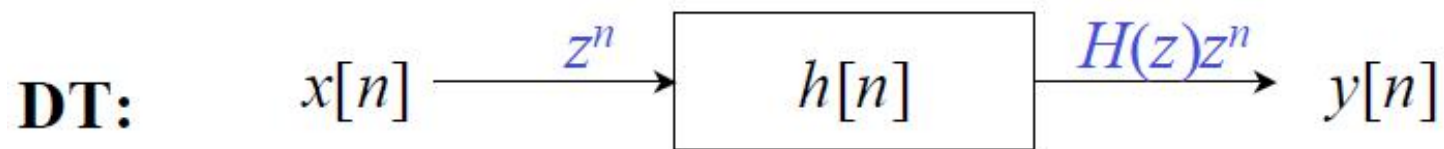
## 傅里叶级数的背景

· 对于一个一般的LTI系统，特征方程是什么？



$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \sum a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum H(s_k) a_k e^{s_k t}$$



$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \sum a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum H(z_k) a_k z_k^n$$

## 傅里叶级数的背景

换句话说，对于连续时间和离散时间来说，如果一个 LTI 系统的输入能够表示成复指数的线性组合，那么系统的输出也能够表示成相同复指数信号的线性组合；并且在输出表示式中的每一个系数可以用输入中相应的系数  $a_k$  分别与特征函数  $e^{s_k t}$  或  $z_k^n$  有关的系统特征值  $H(s_k)$  或  $H(z_k)$  相乘来求得。欧拉在振动弦问题的研究中发现的正是这一事实，高斯及其他

**Observation:** if one signal can be written as the linear combination of  $e^{st}$  or  $z^n$ , we need **NOT** to calculate the convolution for the LTI output.

When  $s = j\omega, z = e^{j\omega}$

$\Rightarrow e^{j\omega t}, e^{j\omega n}$ : *Fourier Series*

When  $s$  or  $z$  is general complex number

$\Rightarrow$  *Laplace Transform & Z Transform*

什么样的信号可以被表示成复指数信号的线性组合？

## CT周期信号傅里叶级数

$$\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

集合内全部信号都是周期的，公共周期  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

每个信号的

Fundamental Frequency  $|k\omega_0|$

Fundamental Period  $|\frac{2\pi}{k\omega_0}| = |\frac{T_0}{k}|$

这个集合中的信号都具有公共周期  $T$ ，所以任意一个周期为  $T$  的信号都能表示成这个集合中的信号的线性组合

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (3.25)$$

对  $T$  来说也是周期的。在(3.25)式中， $k=0$  这一项就是一个常数， $k=+1$  和  $k=-1$  这两项都有基波频率等于  $\omega_0$ ，两者合在一起称之为**基波分量**或称**一次谐波分量**。 $k=+2$  和  $k=-2$  这两项也是周期的，其周期是基波分量周期  $1/2$  (或者说频率是基波频率的两倍)，称为**二次谐波分量**。一般来说， $k=+N$  和  $k=-N$  的分量称为第  $N$  次谐波分量。

一个周期信号表示成(3.25)式的形式。就称为**傅里叶级数**表示。在研究这一表示法的性

$\{a_k\}$ : **Fourier series coefficients**, which represent the strength of the component  $e^{jk\omega_0 t}$ .

## CT周期信号傅里叶级数

既然一个给定信号能够被表示成3.25的形式，如何确定系数 $a_k$   
推导方法：

- (1) 课本：左右同乘 积分
- (2) 课件：正交基

CT Fourier Series Pair

$$(\omega_o = 2\pi/T)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \quad (\text{Synthesis equation})$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_o t} dt \quad (\text{Analysis equation})$$



## 傅里叶级数收敛

某些情况下 $a_k$ 的积分可能不收敛

把 $a_k$ 带入原来信号表达式 $x(t)$ 可能不收敛于原来的信号

两个充分条件:

(1)  $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$

(2) 满足狄里赫利条件

条件1 在任何周期内,  $x(t)$ 必须绝对可积, 即

条件2 在任意有限区间内,  $x(t)$ 具有有限个起伏变化; 也就是说, 在任何单个周期内,  $x(t)$ 的最大值和最小值的数目有限。

条件3 在  $x(t)$  的任何有限区间内, 只有有限个不连续点, 而且在这些不连续点上, 函数是有限值。

论的问题不具有特别重要的意义。对于一个不存在任何间断点的周期信号而言, 傅里叶级数收敛, 并且在每一点上该级数都等于原来的信号  $x(t)$ 。对于在一个周期内存在有限数目不连续点的周期信号而言, 除开那些孤立的不连续点外, 其余所有点上傅里叶级数都等于原来的  $x(t)$ ; 而在那些孤立的不连续点上, 傅里叶级数收敛于不连续点处的值的平均值。在这种情

# 傅里叶级数收敛

## 吉伯斯现象

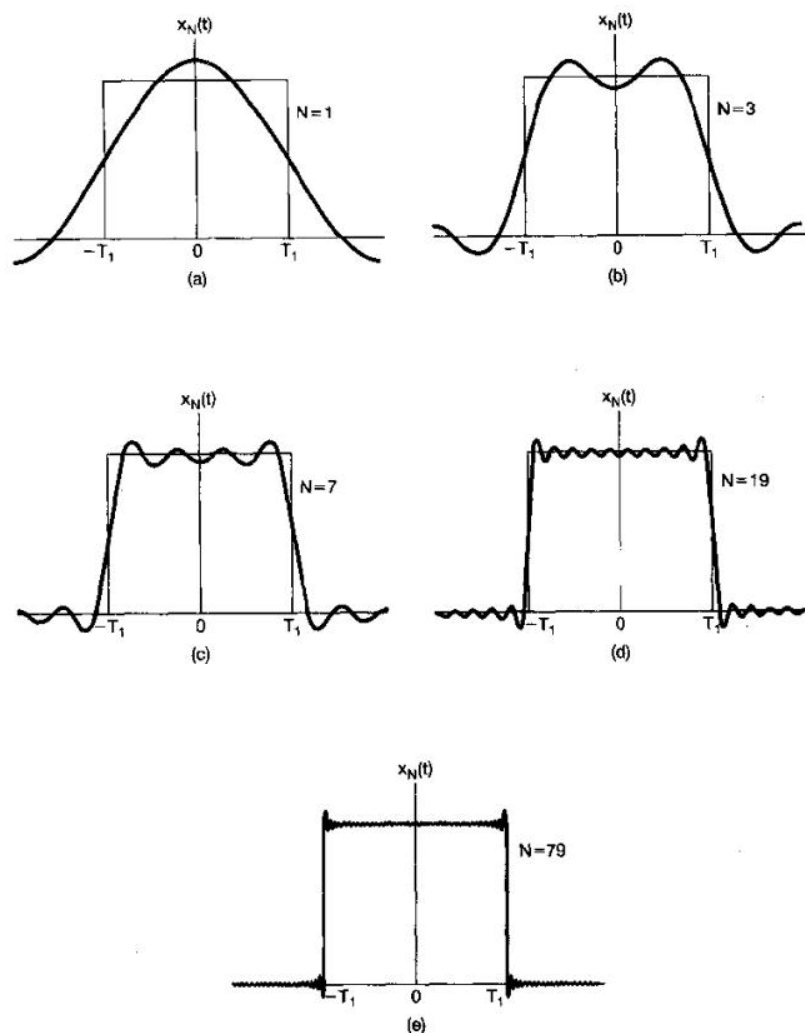


图 3.9 方波傅里叶级数表示的收敛:吉伯斯现象。图中对几个  $N$  值画出了有限项近似

对这个例子,米切尔森所观察到的有趣现象是在不连续点附近部分和  $x_N(t)$  所呈现的起伏,而且这个起伏的峰值大小似乎不随  $N$  的增大而下降!吉伯斯证明:情况确实是这样,而且也应该是这样。若不连续点处的高度是 1,则部分和所呈现的峰值的最大值是 1.09,即有 9% 的超量。无论  $N$  取多大,这个超量不变。对这个现象必须给予正确地解释!如前所述,对任何一个给定的  $t$ ,例如  $t=t_1$  部分和将会收敛于  $x(t_1)$  的真正值,而在不连续点处将收敛于不连续点两边信号值之和的一半。然而,当  $t_1$  取得愈接近不连续点时,为了把误差减小到低于某一给定值,  $N$  就必须取得愈大。于是,随着  $N$  的增加,部分和的起伏就向不连续点处压缩,但是对任何有限的  $N$  值,起伏的峰值大小保持不变,这就是吉伯斯现象。这个现象的含意是:一个不连续信号  $x(t)$  的傅里叶级数的截断近似  $x_N(t)$ ,一般说来,在接近不连续点处将呈现高频起伏和超量,而且,若在实际情况下利用这样一个近似式的话,就应该选择足够大的  $N$ ,以保证这些起伏拥有的总能量可以忽略。当然,在极限情况下,我们知道近似误差的能量是零,而且一个不连续信号(如方波)的傅里叶级数表示是收敛的。

表 3.1 连续时间傅里叶级数性质

性 质	节次	周期信号	傅里叶级数系数
		$x(t)$   周期为 $T$ ,	$a_k$
		$y(t)$   基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T$	$b_k$
线性	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
时移	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
频移		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	$a_{k-M}$
共轭	3.5.6	$x^*(t)$	$a_{-k}^*$
时间反转	3.5.3	$x(-t)$	$a_{-k}$
时域尺度变换	3.5.4	$x(at), a > 0$ (周期为 $T/a$ )	$a_k$
周期卷积		$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T a_k b_k$
相乘	3.5.5	$x(t) y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
微分		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
积分		$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (仅当 $a_0 = 0$ 才为有限值且为周期的)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$

## CT傅里叶级数性质

线性性质

时移性质：傅里叶级数系数的模不变

时间反转： $x(t)$ 为偶函数，傅里叶级数系数也为偶

$x(t)$ 为奇函数，傅里叶级数系数也为奇

时域尺度变换：傅里叶系数不变，傅里叶级数改变

# CT傅里叶级数性质

实信号的共轭  
对称性

3.5.6  $x(t)$  为实信号

实、偶信号

3.5.6  $x(t)$  为实、偶信号

实、奇信号

3.5.6  $x(t)$  为实、奇信号

实信号的奇偶

分解

$$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \end{cases}$$

周期信号的帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

$$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \operatorname{Re}\{a_k\} = \operatorname{Re}\{a_{-k}\} \\ \operatorname{Im}\{a_k\} = -\operatorname{Im}\{a_{-k}\} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$$

$a_k$  为实且偶

$a_k$  纯虚且为奇

$\operatorname{Re}\{a_k\}$

$\operatorname{Im}\{a_k\}$



## DT傅里叶级数

$$\{\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

集合内全部信号都是周期的，公共周期 $N$   
每个信号的

Fundamental Frequency  $|k \frac{2\pi}{N}|$

Fundamental Period  $|\frac{N}{k}|$

这个集合中只有 $N$ 个不同的信号，所以可以从任意 $k$ 值开始对 $k$ 进行连续求和

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$\sum_{k=\langle N \rangle} =$  Sum over *any*  $N$  consecutive values of  $k$

— This is a *finite* series

$\{a_k\}$  - Fourier (series) coefficients

证明周期序列 $x[N]$ 能被表示成傅里叶级数：矩阵满秩（略）

## 1DT傅里叶级数

DT傅里叶级数系数 $a_k$ 的确定：推导略

### DT Fourier Series Pair $\left(\omega_o = \frac{2\pi}{N}\right)$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_o n} \quad (\text{Synthesis equation})$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_o n} \quad (\text{Analysis equation})$$

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \cdots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n]$$

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + \cdots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] + a_N \phi_N[n]$$

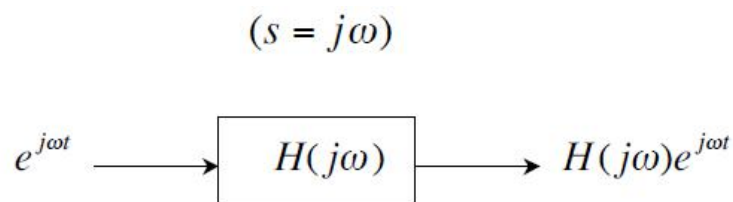
$a_k$ 也是周期性重复的

DT傅里叶级数不存在收敛问题，因为是有限项求和

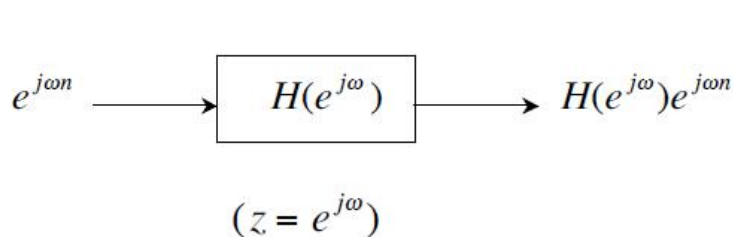
# 1DT傅里叶级数性质

性 质	周期信号	傅里叶级数系数
	$x[n]$ 周期为 $N$ , $y[n]$ 基本频率 $\omega_0 = 2\pi/N$	$a_k$ 周期的, 周期为 $N$ $b_k$
线性	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
时移	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
频移	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	$a_{k-M}$
共轭	$x^*[n]$	$a_{-k}^*$
时间反转	$x[-n]$	$a_{-k}$
时域尺度变换	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{若 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍数} \end{cases}$ (周期的, 周期为 $mN$ )	$\frac{1}{m} a_k$ (看做周期的) 周期为 $mN$
周期卷积	$\sum_{r=(N)} x[r] y[n-r]$	$Na_k b_k$
相乘	$x[n] y[n]$	$\sum_{l=(N)} a_l b_{k-l}$
一阶差分	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$
求和	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \begin{cases} \text{仅当 } a_0=0 \text{ 才为有限} \\ \text{值且为周期的} \end{cases}$	$(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}) a_k$
实信号的共轭对称性	$x[n]$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\  a_k  =  a_{-k}  \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
实、偶信号	$x[n]$ 为实、偶信号	$a_k$ 为实且偶
实、奇信号	$x[n]$ 为实、奇信号	$a_k$ 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}\{x[n]\} [x[n] \text{ 为实}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}\{x[n]\} [x[n] \text{ 为实}] \end{cases}$	$\begin{cases} \Re\{a_k\} \\ j\Im\{a_k\} \end{cases}$
	周期信号的帕斯瓦尔定理	
	$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)}  x[n] ^2 = \sum_{k=(N)}  a_k ^2$	

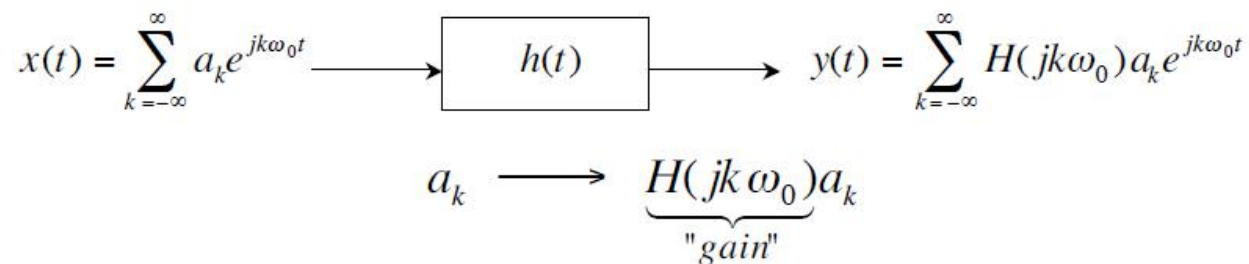
# 傅里叶级数与线性时不变系统 (!)



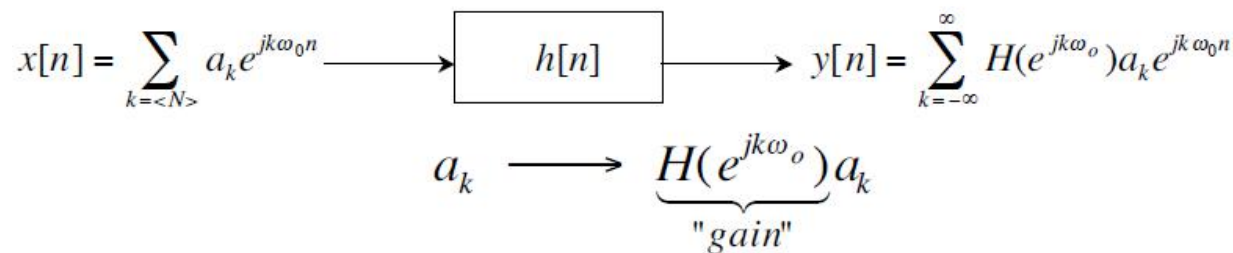
CT Frequency response:  $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$



DT Frequency response:  $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$



$H(jk\omega_0) = |H(jk\omega_0)| e^{j\angle H(jk\omega_0)}$ ,  
includes both amplitude & phase



$H(e^{jk\omega_0}) = |H(e^{jk\omega_0})| e^{j\angle H(e^{jk\omega_0})}$ ,  
includes both amplitude & phase

The effect of the LTI system is to modify each  $a_k$  through multiplication by the value of the frequency response at the corresponding frequency.

# 2

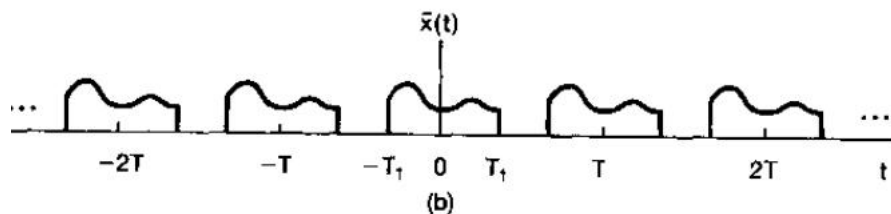
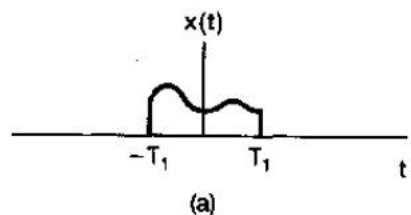


PART

## The Continuous-Time Fourier Transform

# CT傅里叶变换推导

信号是周期的----傅里叶级数  
信号非周期-----傅里叶变换



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.3)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.4)$$

式中  $\omega_0 = 2\pi/T$ 。由于在  $|t| < T/2$  内,  $\tilde{x}(t) = x(t)$ , 而在其余地方  $x(t) = 0$ , 所以(4.4)式可以重新写成

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

因此, 定义  $Ta_k$  的包络  $X(j\omega)$  为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.5)$$

这时, 系数  $a_k$  可以写为

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad (4.6)$$

将(4.6)式和式(4.3)式结合在一起,  $\tilde{x}(t)$  就可以用  $X(j\omega)$  表示为

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

或者, 因为  $2\pi/T = \omega_0$ , 又可表示为

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (4.7)$$

随着  $T \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{x}(t)$  趋近于  $x(t)$ , 结果(4.7)式的极限就变成  $x(t)$  的表示式。再者, 当  $T \rightarrow \infty$  时, 有  $\omega_0 \rightarrow 0$ , (4.7)式的右边就过渡为一个积分。这一点可以利用图

$$X(j\omega) e^{j\omega t}$$

## [CT傅里叶变换推导

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Synthesis equation}$$

— "sum" of  $e^{j\omega t}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Analysis equation}$$

综合公式对非周期信号起的作用和对周期信号起的作用一样，都相当于把一个信号表示为一组复指数信号的线性组合



## CT傅里叶变换推导

基于以上讨论,或者等效地基于(4.9)式和(3.39)式的比较,也可以注意到,一个周期信号  $\tilde{x}(t)$  的傅里叶系数  $a_k$  能够利用  $\tilde{x}(t)$  的一个周期内的信号的傅里叶变换的等间隔样本来表示。这就是,设  $\tilde{x}(t)$  是一个周期为  $T$  的周期信号,其傅里叶系数为  $a_k$ ; 令  $x(t)$  是一个有限持续期信号,它等于在一个周期内的  $\tilde{x}(t)$ ,譬如说是在这样一个周期内  $s \leq t \leq s+T$ ,  $s$  为某一个任意值的  $\tilde{x}(t)$ ,而在该周期外全为零。那么,因为(3.39)式求  $\tilde{x}(t)$  的傅里叶系数时可以在任何周期内做积分,因此

$$a_k = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

由于  $x(t)$  在  $s \leq t \leq s+T$  以外为零,所以又可写成

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

将上式与(4.9)式比较后可得

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad (4.10)$$

这里,  $X(j\omega)$  就是  $x(t)$  的傅里叶变换。(4.10)式说的是  $\tilde{x}(t)$  的傅里叶系数正比于一个周期内的  $\tilde{x}(t)$  信号傅里叶变换的样本。这一点在实际中常常是有用的,将在习题 4.37 中进一步



## CT傅里叶变换收敛

两个充分条件:

a)平方可积: Finite energy  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

b)满足狄里赫利条件:

1.  $x(t)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. 在任何有限区间内,  $x(t)$ 只有有限个最大值和最小值。

3. 在任何有限区间内,  $x(t)$ 有有限个不连续点, 并且在每个不连续点都必须是有有限值。

因此, 本身是连续的或者只有有限个不连续点的绝对可积信号都存在傅里叶变换。

c)特殊收敛

倘若在变换过程中可以使用冲激函数, 那么, 在一个无限区间内, 既不绝对可积, 又不具备平方可积的周期信号也可以认为具有傅里叶变换。这样, 就有可能把傅里叶级数和傅里叶变换纳入到一个统一的框架内。在以后的各章讨论中将会发现这样做是非常方便的。在下一节

## 周期CT的傅里叶变换

对于周期的信号也建立傅里叶变换表示，在统一的框架内考虑周期和非周期信号

为了得到一般性的结果，考虑一个信号  $x(t)$ ，其傅里叶变换  $X(j\omega)$  是一个面积为  $2\pi$ ，出现在  $\omega = \omega_0$  处的单独的一个冲激，即

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4.21)$$

为了求出与  $X(j\omega)$  相应的  $x(t)$ ，可以应用(4.8)式的反变换公式得到

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

将上面结果再加以推广，如果  $X(j\omega)$  是在频率上等间隔的一组冲激函数的线性组合，即

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.22)$$

那么利用(4.8)式，可得

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.23)$$

# 连续时间傅里叶变换性质

节次	性质	非周期信号	傅里叶变换
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	线性	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	时移	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
4.3.6	频移	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	共轭	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	时间反转	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	时间与频率 尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	卷积	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
4.5	相乘	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
4.3.6	频域微分	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$

4.3.3 实信号的共轭  
对称性

$x(t)$  为实信号

$$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$$

4.3.3 实、偶信号的对称性  $x(t)$  为实、偶信号

$X(j\omega)$  为实且偶

4.3.3 实、奇信号的对称性  $x(t)$  为实、奇信号

$X(j\omega)$  纯虚且为奇

4.3.3 实信号的奇偶分解

$$x_e(t) = \mathcal{E}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ 为实}] \quad \Re\{X(j\omega)\}$$

$$x_o(t) = \mathcal{O}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ 为实}] \quad j\Im\{X(j\omega)\}$$

4.3.7 非周期信号的帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} x(t) \cdot y(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta \end{aligned}$$

# 连续时间傅里叶变换性质

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta$$

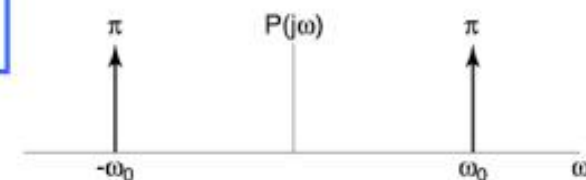
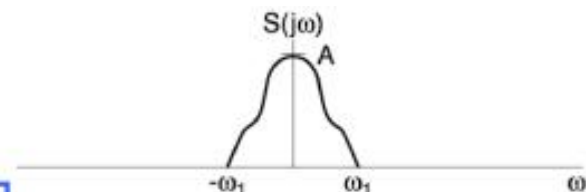
Frequency shift

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0))$$

$$e^{j\omega_0 t} \cdot x(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) * X(j\omega)]$$

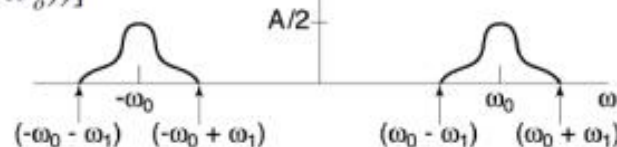
$$= X(j(\omega - \omega_0))$$

$r(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$   
Amplitude modulation (AM)



$$R(j\omega) = \frac{1}{2} [S(j(\omega - \omega_0)) + S(j(\omega + \omega_0))]$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$



Drawn assume  
 $\omega_0 - \omega_1 > 0$   
i.e.  $\omega_0 > \omega_1$

# 连续时间傅里叶变换性质

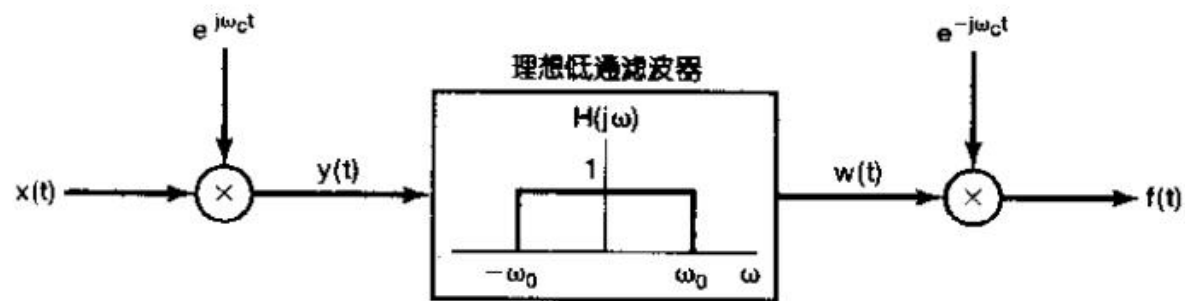


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

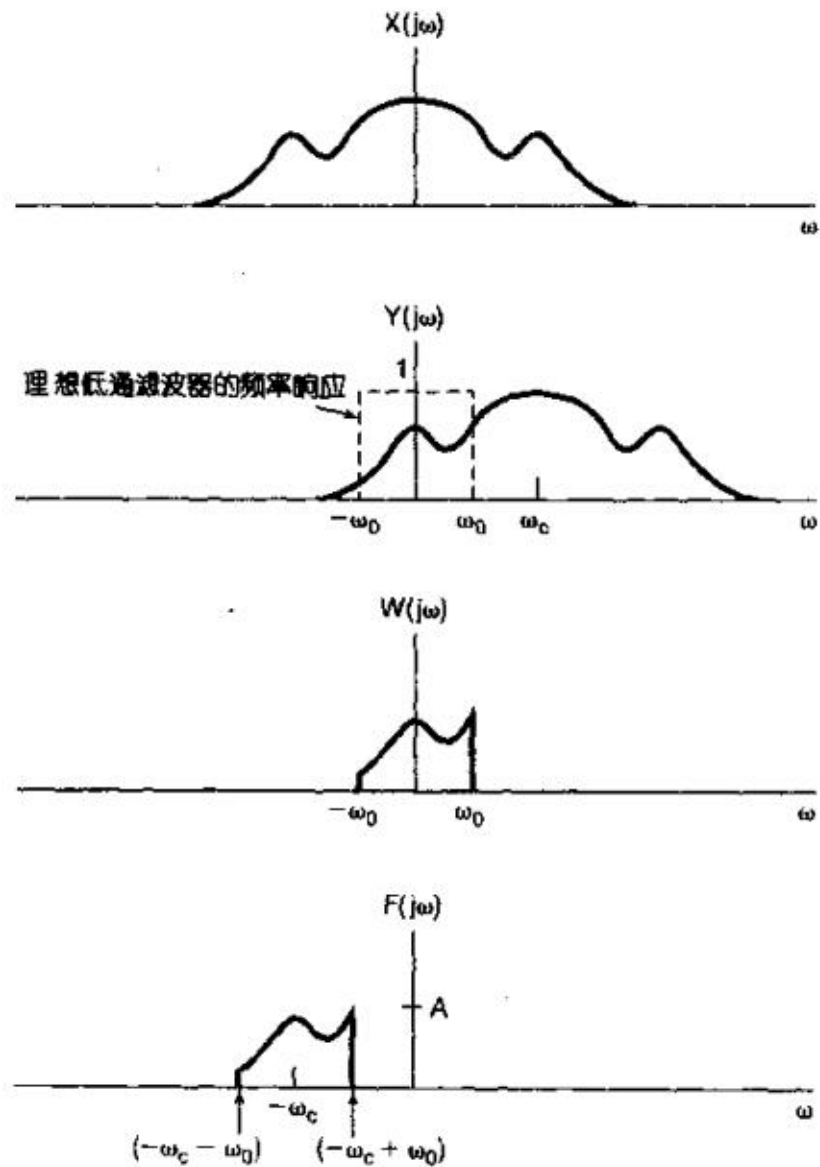


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱



## [ CT LTI Frequency Response(!)



$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$



The frequency response  $H(j\omega)$  of a CT LTI system is simply the Fourier transform of its impulse response  $h(t)$

## 线性系数微分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

或等效地为

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (4.73)$$

其中  $X(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$  和  $H(j\omega)$  分别是输入  $x(t)$ , 输出  $y(t)$  和系统单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换。现在, 对(4.72)式两边取傅里叶变换, 得

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.74)$$

根据(4.26)式的线性性质, 上式变为

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.75)$$

并且由微分性质(4.31)式, 可得

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

或者等效为

$$Y(j\omega) \left[ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(j\omega) \left[ \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right]$$

因此, 由(4.73)式有

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.76)$$

## 线性系数微分方程

$$\textcircled{1} H(j\omega) = \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_N)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_N)} = \frac{A_1}{j\omega + p_1} + \frac{A_2}{j\omega + p_2} + \cdots + \frac{A_N}{j\omega + p_N}$$

待定系数  
求  $A_1, \dots, A_N$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_m)}{(j\omega + p_1)^{k_1}(j\omega + p_2)^{k_2} \cdots (j\omega + p_N)^{k_N}} = \frac{A_{1,1}}{(j\omega + p_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,2}}{(j\omega + p_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,k_1}}{(j\omega + p_1)} + \cdots + \frac{A_{N,1}}{(j\omega + p_N)^{k_N}} + \frac{A_{N,2}}{(j\omega + p_N)^{k_N-1}} + \cdots + \frac{A_{N,k_N}}{(j\omega + p_N)}$$



## 傅里叶级数出题类型:

### (1) 简单信号求傅里叶级数+转换为三角函数形式

3.2 有一实值离散时间周期信号  $x[n]$ , 其基波周期  $N=5$ ,  $x[n]$  的非零傅里叶级数系数是

$$a_0 = 1, \quad a_2 = a_{-2}^* = e^{j\pi/4} \quad a_4 = a_{-4}^* = 2e^{j\pi/3}$$

试将  $x[n]$  表示成如下形式:

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

### (2) 求复杂信号傅里叶级数:

先算  $a_0$

再算  $a_k (k \neq 0)$

$a$  的表达式能否统一?

记得写其余  $a_k = 0$

### (3) 傅里叶级数性质应用

### (4) 傅里叶级数与线性时不变系统

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) & X_{\text{tr}} \\ \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) & X_{\text{tr}} \\ \sin(at+b) &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} e^{jb} - e^{-j\omega t} e^{-jb}) \\ \sin(at-b) &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} e^{-jb} - e^{-j\omega t} e^{jb}) \\ \cos(at+b) &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} e^{jb} + e^{-j\omega t} e^{-jb}) \\ \cos(at-b) &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} e^{-jb} + e^{-j\omega t} e^{jb}) \end{aligned}$$



## 傅里叶变换出题类型:

- (1) 简单信号求傅里叶变换
- (2) 求复杂信号傅里叶变换: 运用性质
- (3) 傅里叶变换与线性时不变系统

# 3

A cluster of five small triangles: a large light red one pointing down, a small dark grey one pointing right, a small red one pointing up, a small dark grey one pointing right, and a small light grey one pointing right.

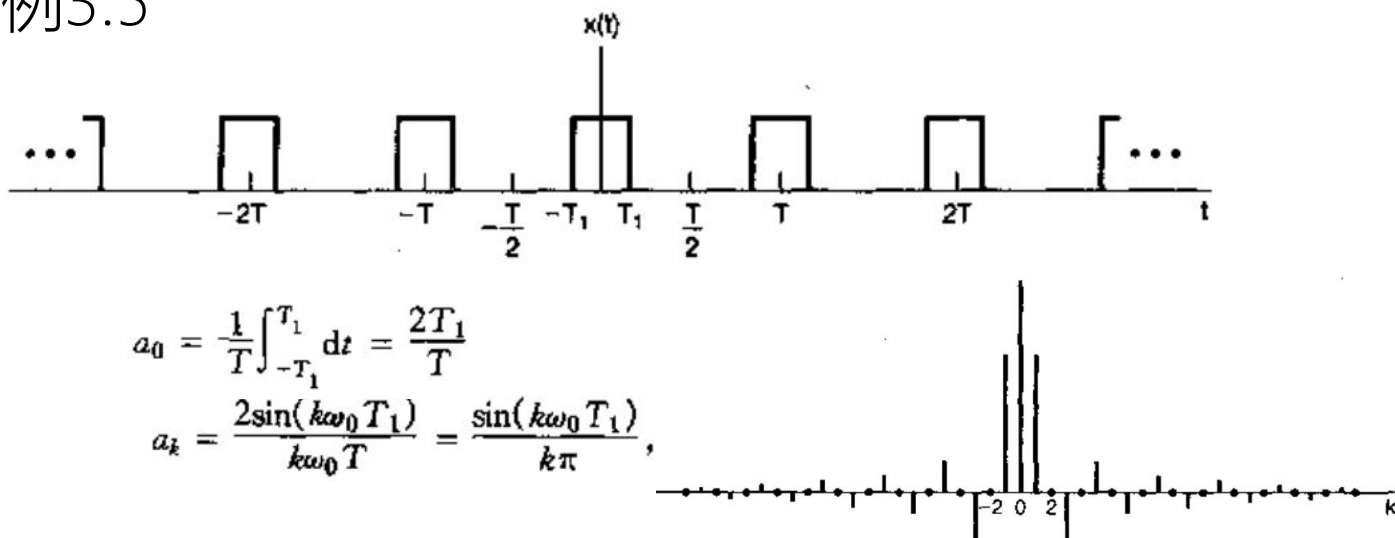
PART

# Exercise

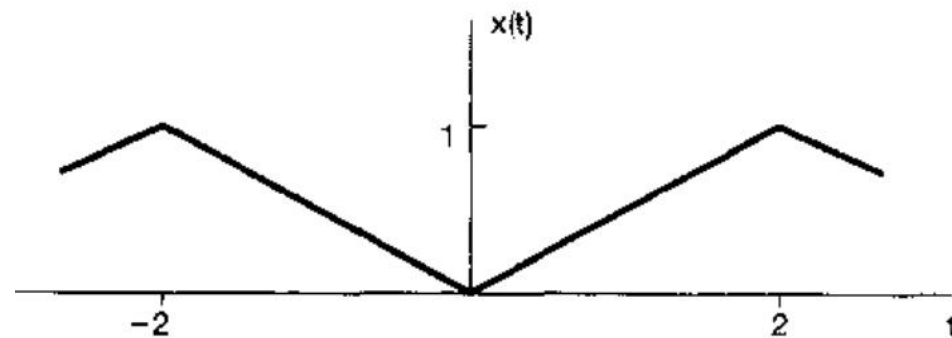
Four diagonal lines: a thin black line at the top left, a thick black line at the bottom left, a thin red line at the top right, and a thin red line at the bottom right.

# CT周期性方波及其性质应用

例3.5

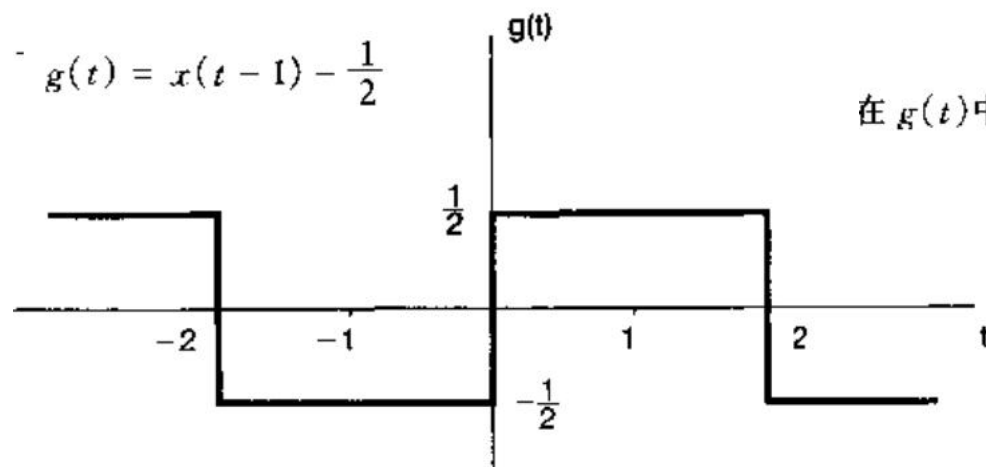


例3.7



例3.6

注意直流分量



在  $g(t)$  中直流偏移(即(3.69)式右边的  $-\frac{1}{2}$  这一项)的傅里叶系数  $c_k$  是

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

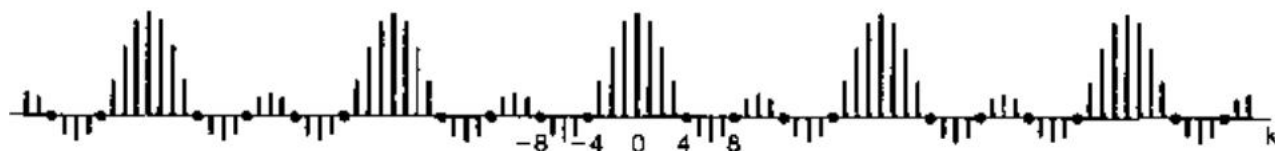
# DT周期性方波及其性质应用

例3.12

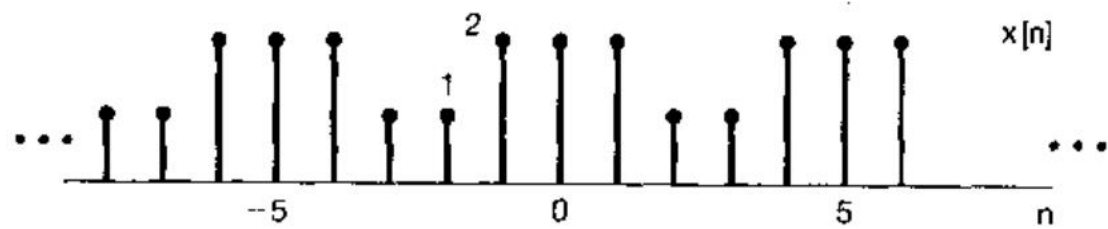


$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left( \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

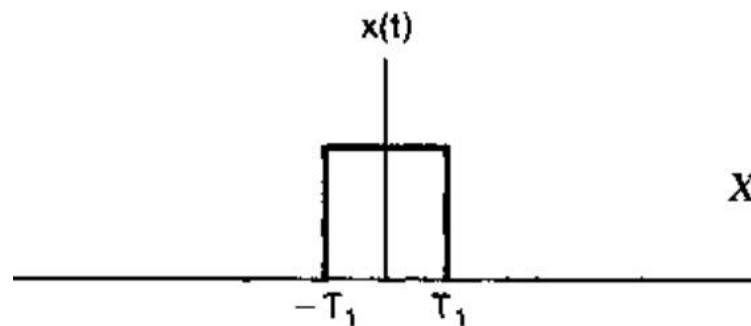


例3.13

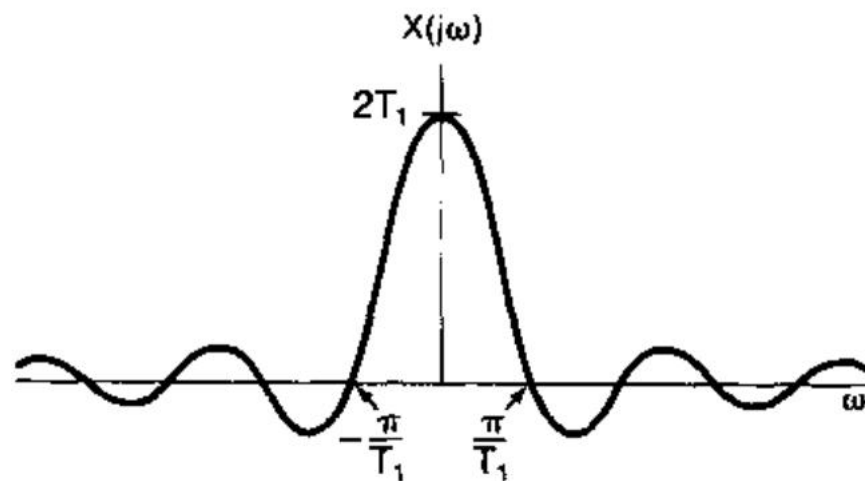


# 方波的傅里叶变换

例4.4



$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$



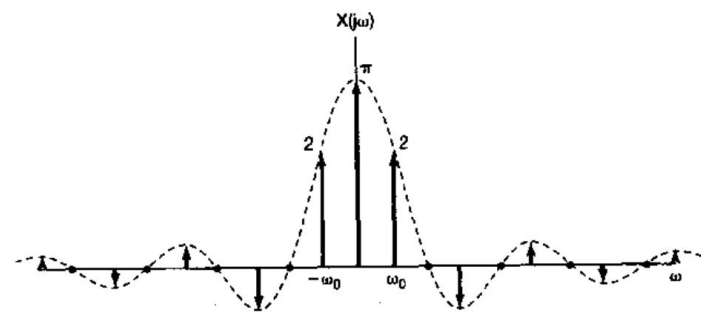
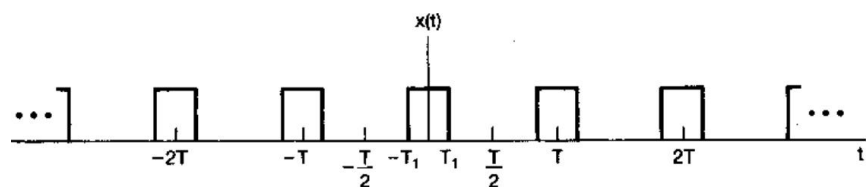
例4.6

再次考虑图 4.1 的方波信号，其傅里叶级数系数为

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

因此，该信号的傅里叶变换  $X(j\omega)$  是

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$



## 傅里叶级数、傅里叶变换性质综合题（考察概率低）

例3.9 例3.14 3.8 3.11 3.50

3.11 现对一信号  $x[n]$  给出如下信息：

1.  $x[n]$  是实、偶信号。

2.  $x[n]$  有周期  $N=10$  和傅里叶系数  $a_k$ 。

3.  $a_{11}=5$

4.  $\frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = 50$

证明： $x[n] = A \cos(Bn + C)$ ，并给出常数  $A, B$  和  $C$  的值。

例4.14 4.24.4.25

4.25 设  $X(j\omega)$  为图 P4.25 信号  $x(t)$  的傅里叶变换：

(a) 求  $X(j\omega)$

(b) 求  $X(j0)$

(c) 求  $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$

(d) 计算  $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$

(e) 计算  $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

(f) 画出  $\Re\{X(j\omega)\}$  的反变换

注意：不必具体算出  $X(j\omega)$  而能完成以上全部计算。

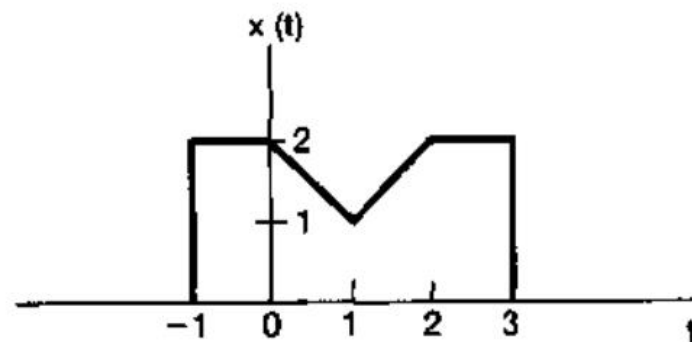


图 P4.25

# 傅里叶级数与线性时不变系统（重点）

例3.16 例3.17 3.34 3.37

例 3.17 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应  $h[n] = \alpha^n u[n]$ ,  $-1 < \alpha < 1$ , 输入为

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (3.132)$$

例 3.17.  $x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (|\alpha e^{-j\omega}| < 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore y[n] &= \frac{1}{2} H(e^{j\frac{2\pi}{N}}) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} H(e^{-j\frac{2\pi}{N}}) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

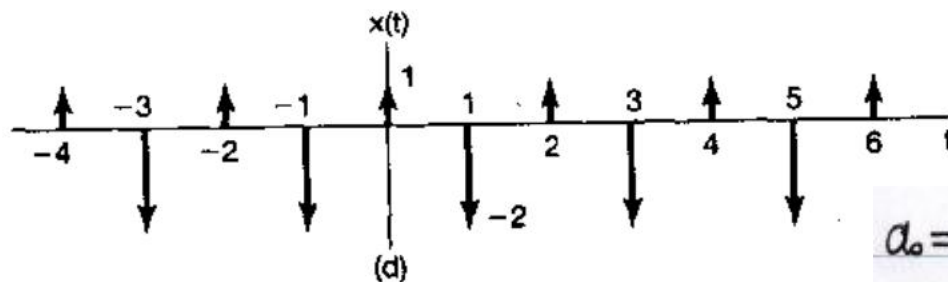
若  $\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = re^{j\theta}$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} re^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} re^{-j\theta} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2} r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right) \cdot 2 = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right) \end{aligned}$$



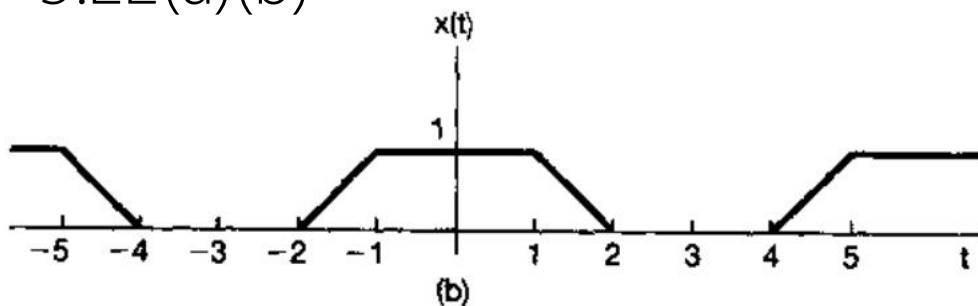
# 傅里叶级数

3.22(a)(d)



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 [d(t) - 2d(t-1)] dt = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2) = -\frac{1}{2}$$

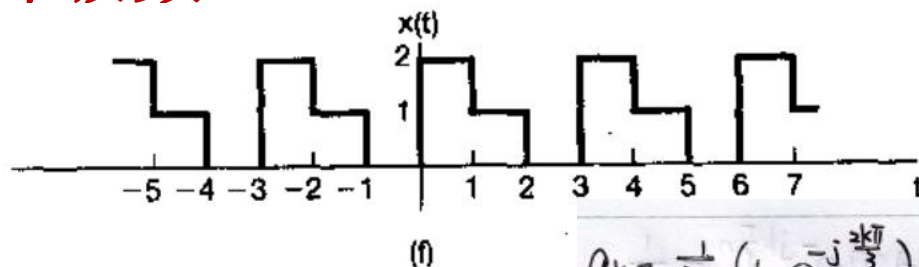
3.22(a)(b)



$$\begin{aligned} \frac{3}{k^2 \pi^2} \left( \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \frac{2k\pi}{3} \right) &= \frac{3}{k^2 \pi^2} (-2) \sin \left( \frac{\frac{k\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{k\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}}{2} \right) = \frac{6}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{6} \quad k \neq 0. \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{6}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{6} e^{jk\frac{\pi}{3}t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{6} \cos \frac{k\pi}{3} t. \\ &\downarrow k \neq 0, \text{ 交流分量 } k \neq 0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A e^{jk\frac{\pi}{3}t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A \left[ \cos \frac{k\pi}{3} t + j \sin \left( \frac{k\pi}{3} t \right) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} A \left[ \cos \frac{k\pi}{3} t + j \sin \frac{k\pi}{3} t \right] \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2A \cos \frac{k\pi}{3} t. \end{aligned}$$

# 傅里叶级数

3.22(a)(f)



$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{jk\pi} (1 - e^{-j\frac{2k\pi}{3}}) + \frac{1}{2jk\pi} (e^{-j\frac{2k\pi}{3}} - e^{-j\frac{4k\pi}{3}}) \\
 &= \frac{e^{-j\frac{k\pi}{3}}}{jk\pi} (e^{j\frac{k\pi}{3}} - e^{-j\frac{k\pi}{3}}) + \frac{e^{-jk\pi}}{2jk\pi} (e^{j\frac{k\pi}{3}} - e^{-j\frac{k\pi}{3}}) \\
 &= \frac{2}{k\pi} e^{-j\frac{k\pi}{3}} \sin\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{k\pi} e^{-jk\pi} \sin\frac{k\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

3.34.  $h(t) = e^{-4|t|}$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} e^{-j\omega t} dt$$

3.37.  $h[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{-j\omega n}$$



# 傅里叶级数

an LTI system. frequency response  $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j3\omega} & |\omega| < \frac{3\pi}{16} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(1) Determine impulse response.

(2) input  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-16k]$ , output  $y[n] = ?$

(3) input  $x[n] = \cos(0.6\pi n) + 0.8\sin(0.8\pi n)$ , output  $y[n] = ?$

$$\begin{aligned} (1) h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{3\pi}{16}}^{\frac{3\pi}{16}} e^{-j3\omega} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega(n-3)}}{j(n-3)} \right]_{-\frac{3\pi}{16}}^{\frac{3\pi}{16}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\frac{3\pi}{16}(n-3)} - e^{-j\frac{3\pi}{16}(n-3)}}{j(n-3)} = \frac{1}{\pi(n-3)} \sin\left(\frac{3\pi}{16}(n-3)\right) \end{aligned}$$

(2)  $N=16$   $\omega_b = \frac{\pi}{8}$   $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{8}n} = \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=\langle N \rangle} \delta[n] e^{-jk\frac{\pi}{8}n} = \frac{1}{16}$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(e^{jk\omega_b})}_{|k\omega_b| < \frac{3\pi}{16}} a_k e^{jk\omega_b n}$$

$|k\omega_b| < \frac{3\pi}{16} \quad k=0, \pm 1$

$$= H(e^0) \frac{1}{16} + H(e^{j\omega_b}) \frac{1}{16} e^{j\omega_b n} + H(e^{-j\omega_b}) \frac{1}{16} e^{-j\omega_b n}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} e^{-j\frac{3\pi}{8}} e^{j\frac{\pi}{8}n} + \frac{1}{16} e^{j\frac{3\pi}{8}} e^{-j\frac{\pi}{8}n} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{8}n - \frac{3}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{16} (1 + e^{j\frac{\pi}{8}n} + e^{-j\frac{\pi}{8}n}) \\ &= \frac{1}{16} (1 + 2\cos\frac{\pi n}{8}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{16} (1 + 2\cos\frac{\pi(n-3)}{8})$$

(3) 0

# 傅里叶变换

例4.13

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{-j\omega t} d\omega$$

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} e^{-j\omega t} dt \quad \therefore F\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

4.8 & 4.9

$$x(t) = (t+\frac{1}{2}) [u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})] + u(t-\frac{1}{2})$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = [u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})] + (t+\frac{1}{2}) [\delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})] + \delta(t-\frac{1}{2})$$

$$= u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2}) = y(t) \quad j\omega X(j\omega) = Y(j\omega) \Rightarrow \text{用积分性质}$$

$$Y(j\omega) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad \therefore X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} Y(j\omega) + \pi Y(0) \delta(\omega)$$

$$w=0 \text{ 不能这样用}$$

$$x(t) = \frac{t+1}{2} [u(t+1) - u(t-1)]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{t+1}{2} [\delta(t+1) - \delta(t-1)] + \frac{1}{2} [u(t+1) - u(t-1)]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} [u(t+1) - u(t-1)]}_{y(t)} - \delta(t-1)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sin(\frac{\omega \cdot 2}{2})}{\frac{\omega \cdot 2}{2}} = \frac{\sin \omega}{\omega}$$

$$\therefore j\omega X(j\omega) = Y(j\omega) - e^{-j\omega} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{\sin \omega}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$w \neq 0$

