信号与系统
期中复习

Chapter1-27

11911214 杨鸿嘉

基本概念

Ch1 信号系统基本概念
Ch2 卷积与LTI系统

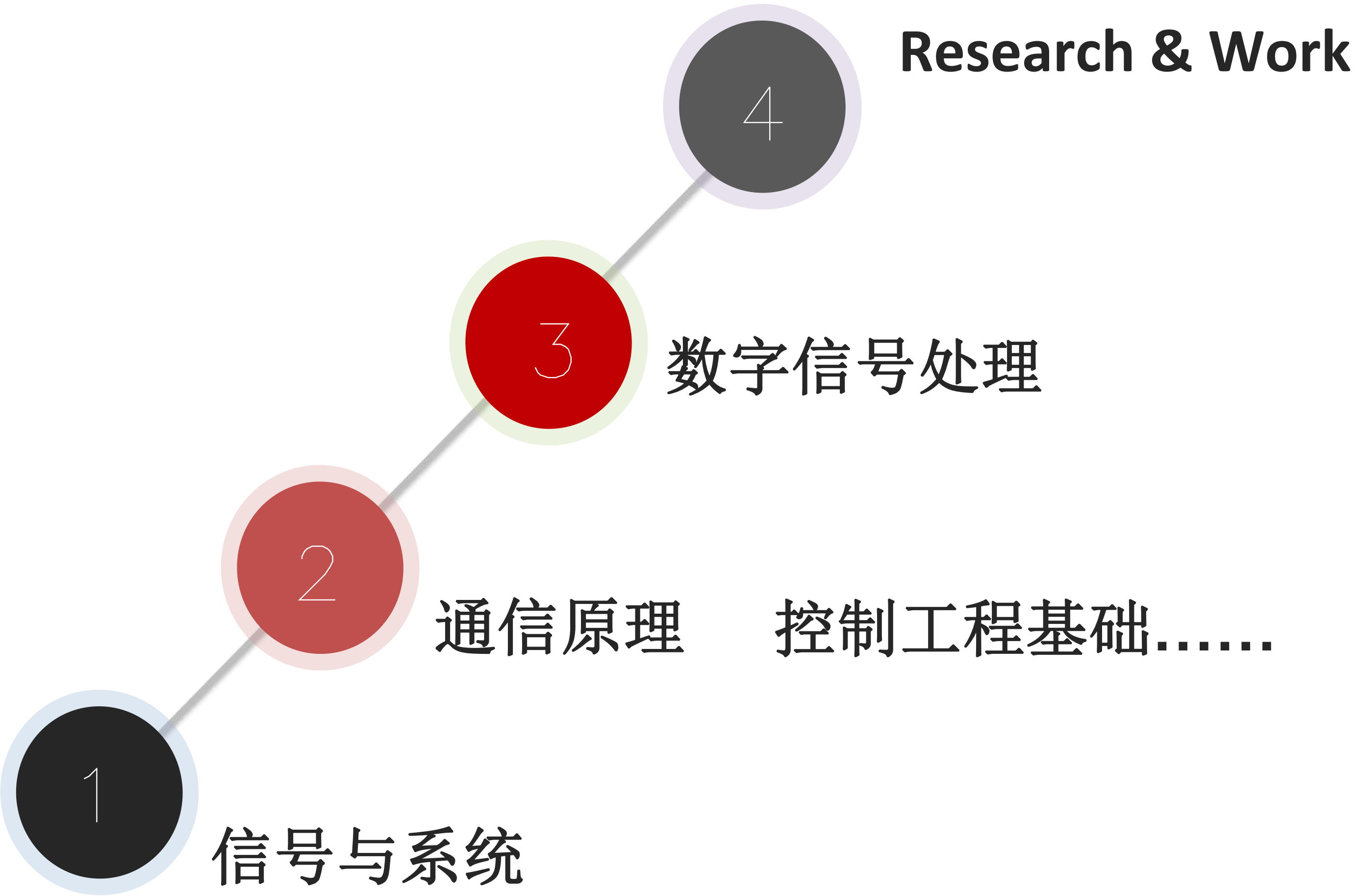
傅里叶变换

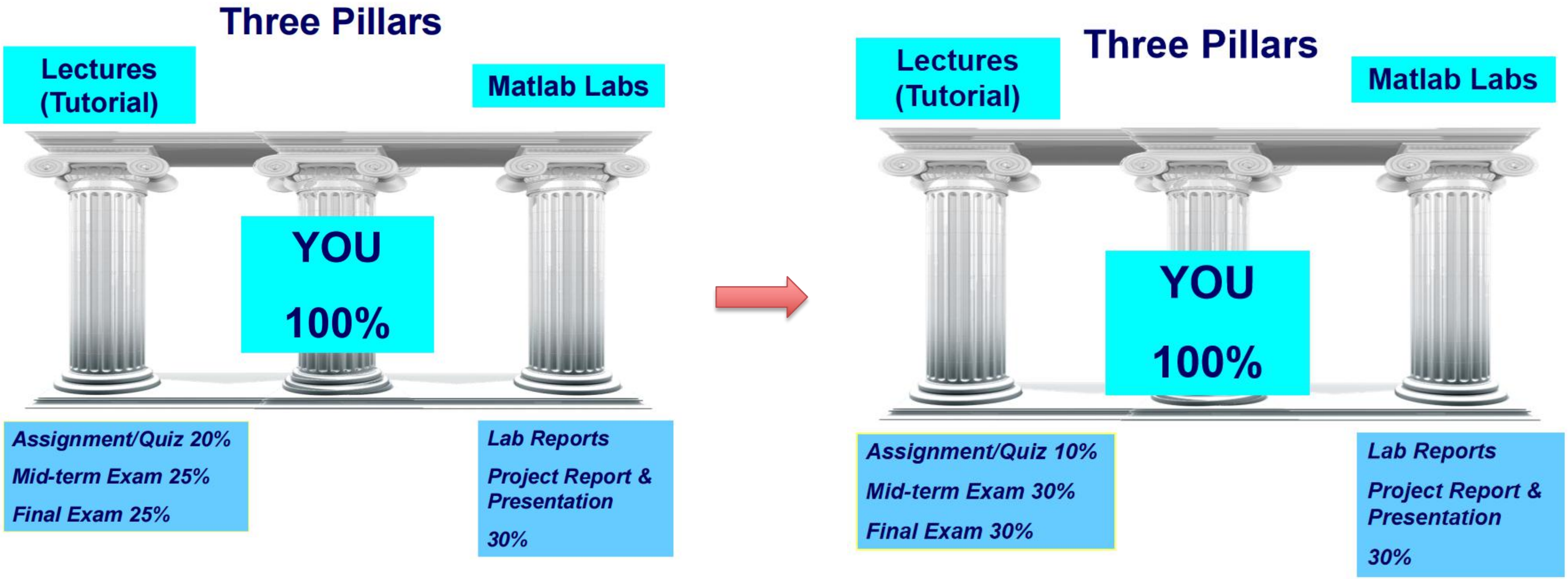
Ch3 周期信号傅里叶级数
Ch4 CT傅里叶变换
Ch5 DT傅里叶变换

信号系统应用

Ch7 采样
Ch8 通信系统

信号与系统



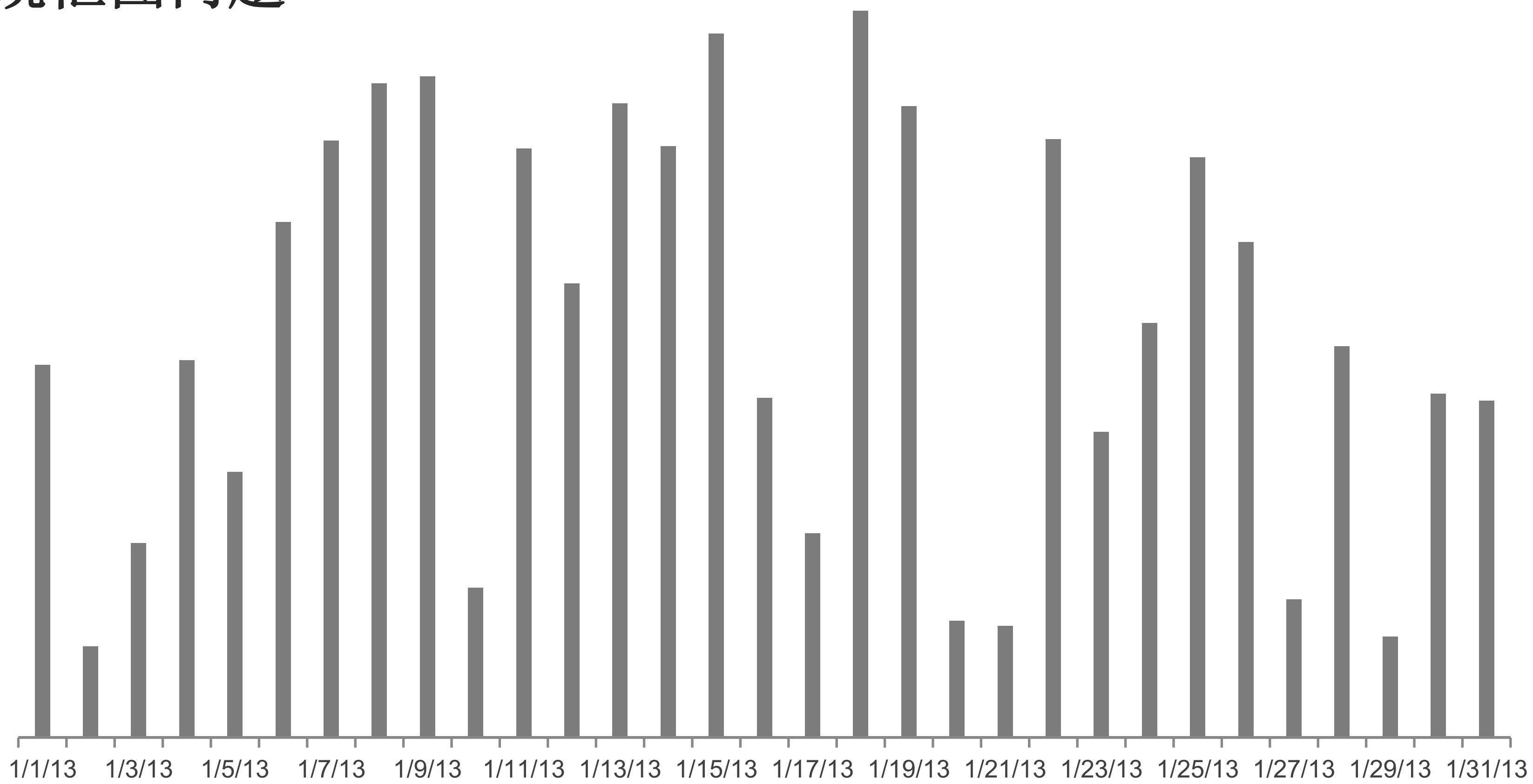

Three Pillars
Lectures (Tutorial)
Matlab Labs
YOU
100%
Assignment/Quiz 20%
Mid-term Exam 25%
Final Exam 25%
Lab Reports
Project Report & Presentation
30%
Three Pillars
Lectures (Tutorial)
Matlab Labs
YOU
100%
Assignment/Quiz 10%
Mid-term Exam 30%
Final Exam 30%
Lab Reports
Project Report & Presentation
30%

选择填空综合题（注重概念、定义）

重要题型

计算题2道（卷积、傅里叶级数、傅里叶变换）

解答题4道　一阶系统框图问题



如何复习

作业一定要自己算，
不要对着答案写！！！

S

W

整理解题和计算技巧

T

O

最好的复习方法就是
重新做一遍作业题
（优先Assignments部分）

1

PART

Basic Concepts

1 信号的分类

Continuous\Discrete-time 连续/离散

x(t)连续信号
x[n]离散信号，n必须是整数

Deterministic\Random Signal 确定/随机

Periodic\Aperiodic 周期/非周期

CT $x(t) = x(t + mT)$ T : *period* m: *integer*
T_0: Fundamental period: the smallest positive period

DT $x[n] = x[n + mN]$ N: period
N_0: fundamental period: the smallest positive period

信号的分类

Even/Odd Signal 偶/奇信号

Even $x(t) = x(-t)$ or $x[n] = x[-n]$

Odd $x(t) = -x(-t)$ or $x[n] = -x[-n]$ $x(0)=0$, and $x[0]=0$

任意信号都能被拆分为一个偶信号和一个奇信号之和：

$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t)$, where:

$x_{even}(t) = [x(t) + x(-t)]/2$

$x_{odd}(t) = [x(t) - x(-t)]/2$

Right/Left-Sided Signal

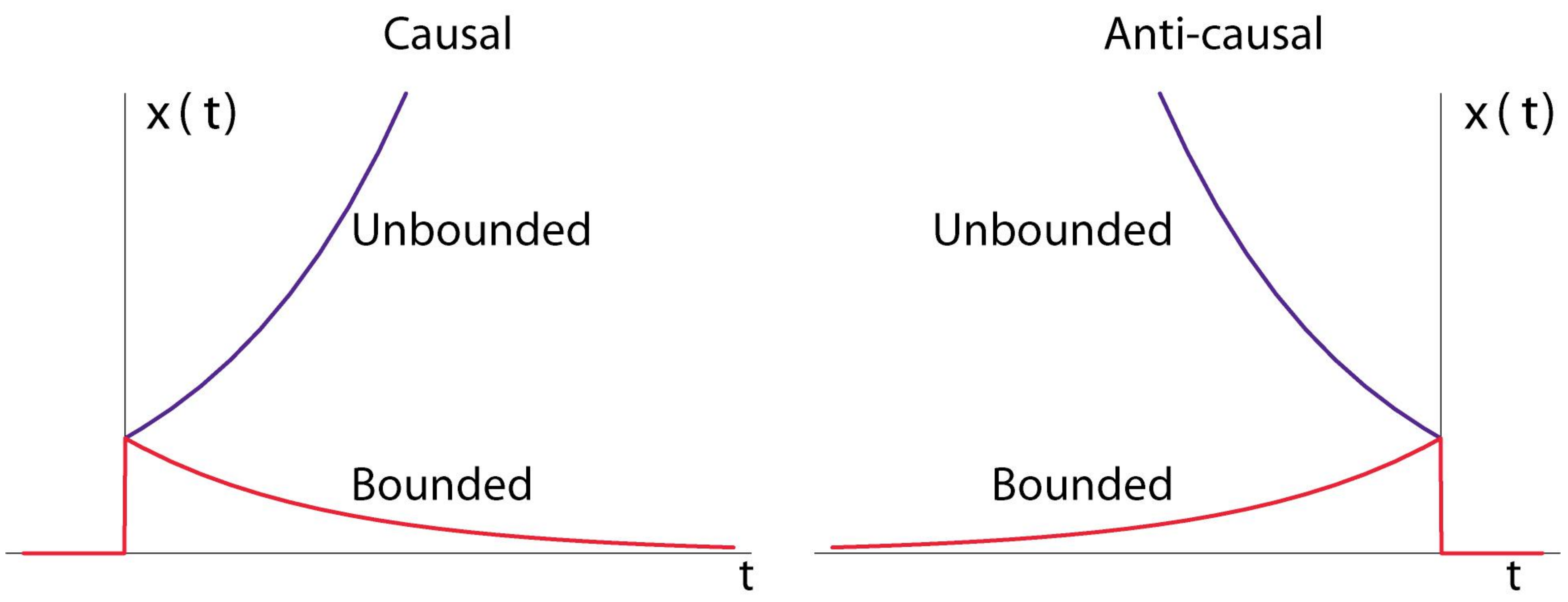
right-sided signal: zero for $t < T$

left-sided signal: zero for $t > T$

T可以为正也可以为负

1 信号的分类

Bounded/Unbounded Signal



1 信号的基本变换

Time Shift时移 $x(t) \to x(t-t_0)$ ， $x[n] \to x[n-n_0]$

Time Reversal时间反转 $x(t) \to x(-t)$ ， $x[n] \to x[-n]$

Time Scaling时间尺度转换 $x(t) \to x(at)$ ， $x[n] \to ?$

平移反转问题：先平移后反转

x(t)到x(ax+b)：x(t)----x(x+b)----x(ax+b)

先由b的值将信号超前或时延

再由a的值将信号反转/线性扩展/线性压缩

反转只改变n前符号：　x[n-1]反转：x[-n-1]

平移要给n加括号：　x[-n]右移1：x[-(n-1)]=x[1-ny]

2 复信号

$x(t) = e^{j\omega t}$

$x[n] = e^{j\omega n}$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad j = \sqrt{-1}$ 程 jy

$z = x + jy \qquad x = \mathrm{Re}\{z\} \qquad y = \mathrm{Im}\{z\} \qquad e^{j\pi} = -1 \qquad e^{j2\pi} = 1$

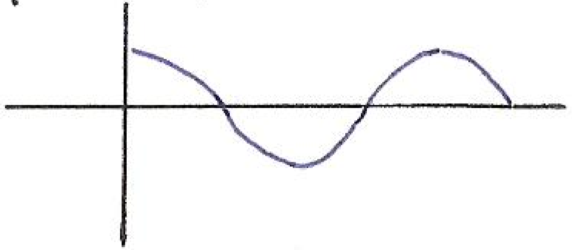
$= re^{j\theta} \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 模 magnitude

$\theta = \angle z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 相位 phase angle

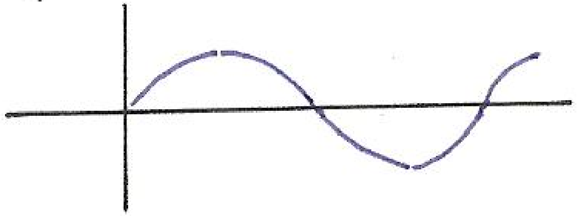
$z^* = x - jy = re^{-j\theta}$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

$\mathrm{Re}\{e^{j\omega_0 t}\} = \cos\omega_0 t$



$\mathrm{Im}\{e^{j\omega_0 t}\} = \sin\omega_0 t$



3 复信号

$e^{j\omega t}$ always periodic proof: $e^{j\omega_0 t}=e^{j\omega_0(t+T)} \Rightarrow e^{j\omega_0 T}=1$

if $\omega_0=0$ $e^{j\omega_0 T}=1$

if $\omega_0\neq 0$ $\omega_0 T=2\pi k$ $T=\left|\frac{2\pi k}{\omega_0}\right|$ $T_0=\left|\frac{2\pi}{\omega_0}\right|$

fundamental period

$e^{j\omega_0 n}$ is periodic only $\frac{\omega_0}{2\pi}$ is a rational number

proof: $e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n} \Rightarrow e^{j\omega_0 N}=1$

$\therefore \omega_0 N=2\pi k$ $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{k}{N}$ k.N为整数 ∴ $\frac{k}{N}$ 必为有理数

$N=\frac{2\pi}{\omega_0}k$.

$N_0=\frac{2\pi}{\omega_0}m$ m是使N_0为正整数的最小数.

$e^{j\omega t}$ ω↑ 信号不同 $e^{j(\omega+x)t}=e^{j\omega t}\cdot e^{jxt}$ t不为整数，∴ $e^{jxt}\neq 1$

$e^{j(\omega_0+2\pi m)n}=e^{j\omega_0 n}\cdot e^{j2\pi mn}=e^{j\omega_0 n}$

m,n均为整数，$e^{j2\pi mn}$ 必为1

一般只考虑一个2π区间上的 $e^{j\omega_0 n}$、 $\omega_0\to\pi$ 奇数倍 振荡速率↑

偶 ↓

3 复信号

表 1.1　信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同，信号不同	频率相差 2π 的整倍数，信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0 = 2\pi m/N$ 时才是周期的，这里 $N(>0)$ 和 m 均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率* ω_0/m
基波周期：$\omega_0=0$，无定义 $\omega_0\neq 0$，$2\pi/\omega_0$	基波周期：* $\omega_0=0$，无定义 $\omega_0\neq 0$，$m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

这里假设 m 和 N 无任何公共因子。

x[n]

3 复信号

$W=\frac{6\pi}{7}$ $T=\frac{2\pi}{W}=\frac{2\pi}{\frac{6\pi}{7}}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

1.26 判定下列离散时间信号的周期性；若是周期的，确定它的基波周期。

(a) $x[n]=\sin\left(\frac{6\pi}{7}n+1\right)$　　(b) $x[n]=\cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right)$　　(c) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$

$W=\frac{1}{8}$

16π

解　(a) 因 $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{6\pi/7}{2\pi}=\frac{3}{7}=\frac{m}{N}$，故 $x[n]$ 是周期的，基波周期 $N=7$。

(b) 因为 $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1/8}{2\pi}=\frac{1}{16\pi}$ 不是一个有理数，所以 $x[n]$ 是非周期的。

(c) $x[n+N]=\cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)^2\right]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n^2+\frac{\pi}{4}nN+\frac{\pi}{8}N^2\right)$

若 $\frac{\pi}{4}nN+\frac{\pi}{8}N^2=2k\pi$（$k$ 为整数）对所有的 n 成立，即 $2nN+N^2=16k$ 对所有 n 成立，则必须有 N^2 和 $2N$ 均为 16 的整数倍，此时 $x[n+N]=x[n]$，故 $x[n]$ 是周期的，基波周期 $N=8$。

4 成谐波关系的信号集合Harmonically Related Signal Sets

$$\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

集合内全部信号都是周期的，公共周期$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$

每个信号的

Fundamental Frequency $|kw_0|$

Fundamental Period $|\frac{2\pi}{kw_0}|=|\frac{T_0}{k}|$

$$\{\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\}$$

集合内全部信号都是周期的，公共周期N

每个信号的

Fundamental Frequency $|k\frac{2\pi}{N}|$

Fundamental Period $|\frac{N}{k}|$

4 成谐波关系的信号集合Harmonically Related Signal Sets

这个集合中只有N个不同的信号 $\{\phi_k[n]=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\ ,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots\}$

$$\phi_{k+N}[n]=e^{j(k+N)(\frac{2\pi}{N})n}=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\cdot e^{j2\pi n}=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=\phi_k[n]$$

$$\phi_0[n]=1,\quad \phi_1[n]=e^{j2\pi n/N},\phi_2[n]=e^{j4\pi n/N},\cdots,\quad \phi_{N-1}[n]=e^{j2\pi(N-1)n/N} \quad (1.62)$$

是全不相同的，而任何其它的 $\phi_k[n]$ 都将与上列中的一个相同(例如 $\phi_N[n]=\phi_0[n]$ 和 $\phi_{-1}[n]=\phi_{N-1}[n]$)。

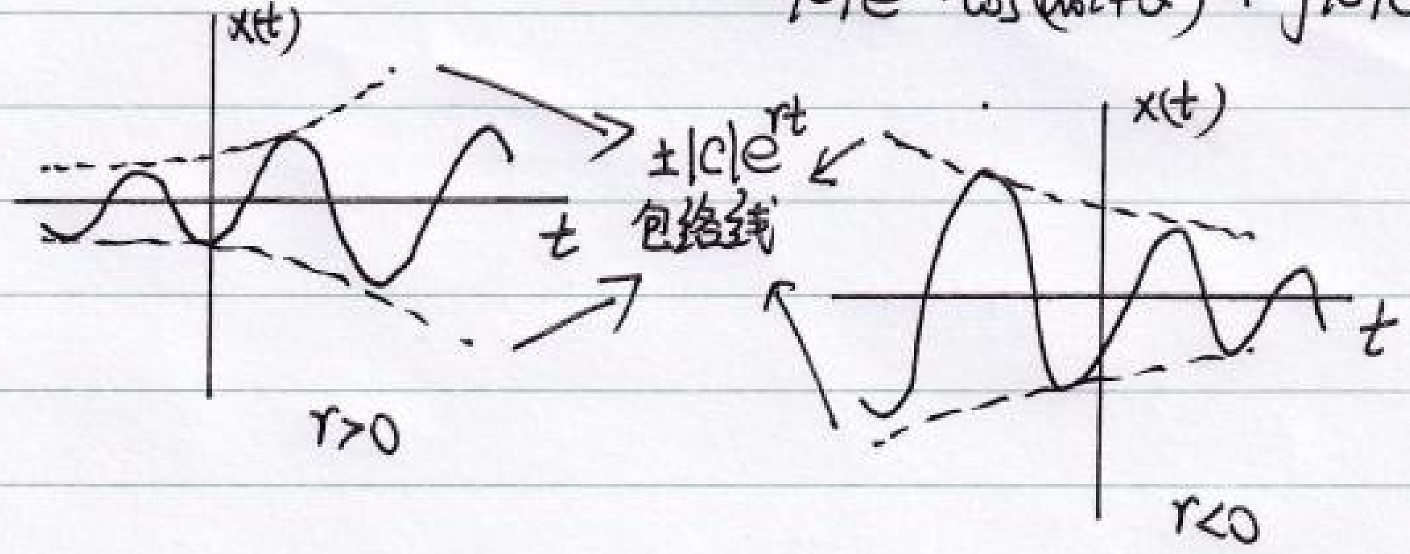
4 一般复指数信号General Complex Expential Signals

$$x(t) = Ce^{at} \quad (C, a\text{为复数})$$

$$\begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ a = r + j\omega_0 \end{cases}$$

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

$$= |C|e^{rt} \cdot \cos(\omega_0 t+\theta) + j|C|e^{rt} \cdot \sin(\omega_0 t+\theta)$$

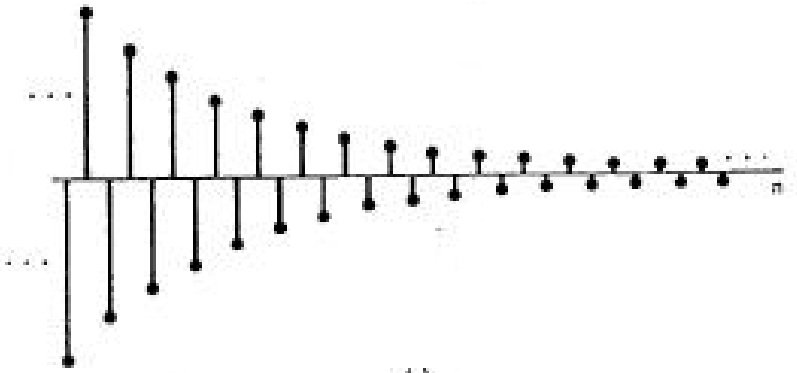


4 一般复指数信号General Complex Expential Signals

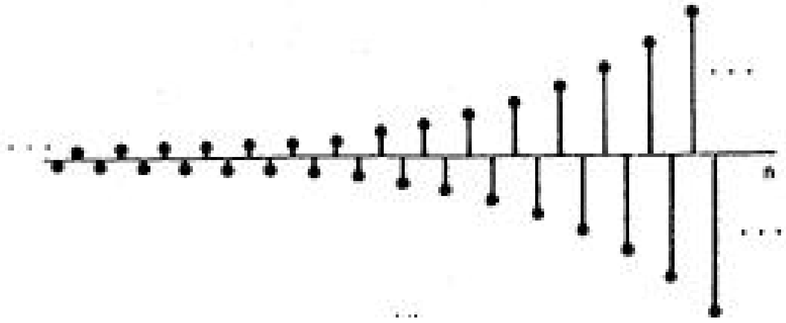
$$x[n] = C\alpha^n$$

$$\begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0} \end{cases}$$

$$x[n] = C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n+\theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n+\theta)$$
$$= |C||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$



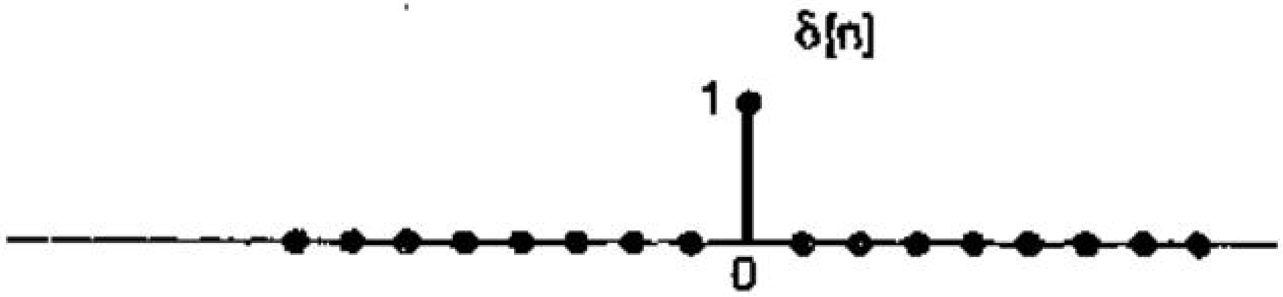
(c)



5 单位冲激和单位阶跃函数

最简单的离散时间信号之一就是单位脉冲(或单位样本),定义为

$$\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases} \qquad (1.63)$$



单位冲激的选择性

$x[n]\ \delta[n] = x[0]\ \delta[n]$

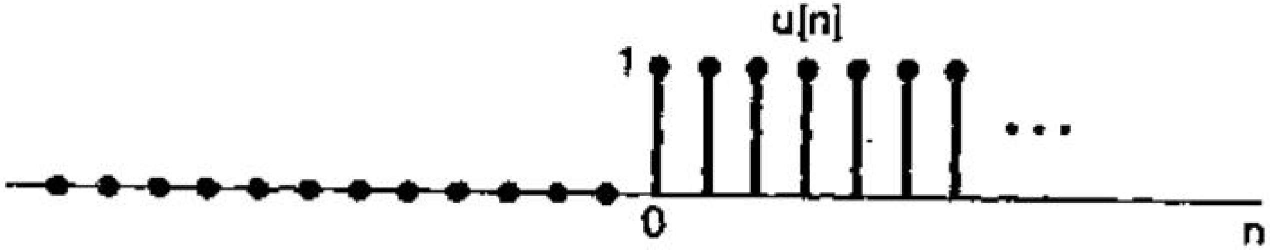
$x[n]\ \delta[n-n_0] = x[n_0]\ \delta[n-n_0]$

5 单位冲激和单位阶跃函数

第二个基本离散时间信号是离散时间单位阶跃 $u[n]$，定义为

$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}$$

单位阶跃序列如图 1.29 所示。



– First difference

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

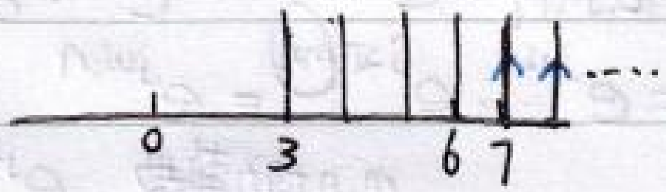
– Running Sum

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m] \begin{cases} =0, & n<0\\ =1, & n\geq 0\end{cases}$$

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

注意u[n]在n=0处为1

$$x[n]=\begin{cases}1 & 3\leqslant n\leqslant 6\\ 0 & \text{others}\end{cases}\qquad x[n]=u[n-3]-u[n-7]$$



5 单位冲激和单位阶跃函数

注意到 $\delta_\Delta(t)$ 是一个持续期为 Δ 的短脉冲，而且对任何 Δ 值，其面积都为 1。随着 $\Delta \to 0$，$\delta_\Delta(t)$ 变得愈来愈窄，愈来愈高，但始终保持单位面积。它的极限形式

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) \tag{1.74}$$

就能看作 Δ 变成无穷小后，短脉冲 $\delta_\Delta(t)$ 的一种理想化的结果。事实上，因为 $\delta(t)$ 没有持续期，但有面积，因此就用图 1.35 的符号，用在 $t=0$ 处箭头指出脉冲的面积是集中在 $t=0$，用箭头旁边的高度"1"来表示该冲激的面积，称为冲激强度。更为一般地，$k\delta(t)$ 的面积就是 k，因此有

$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = ku(t)$$

如图 1.36 所示，箭头的高度选为正比于冲激的面积。

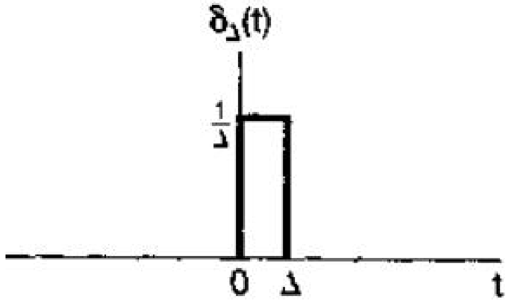


图 1.34 $u_\Delta(t)$ 的导数

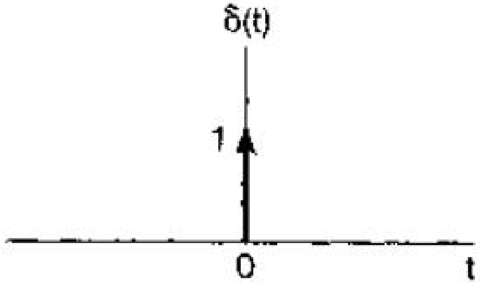


图 1.35 连续时间单位冲激

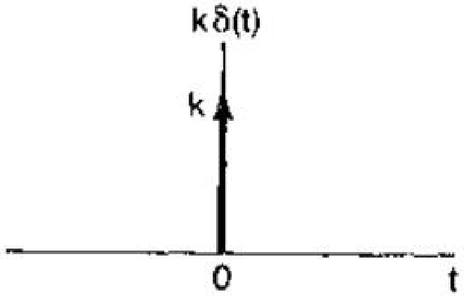
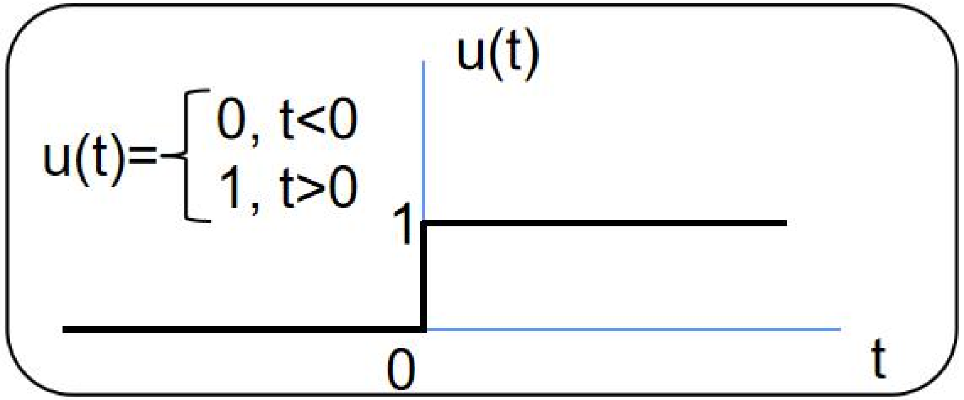
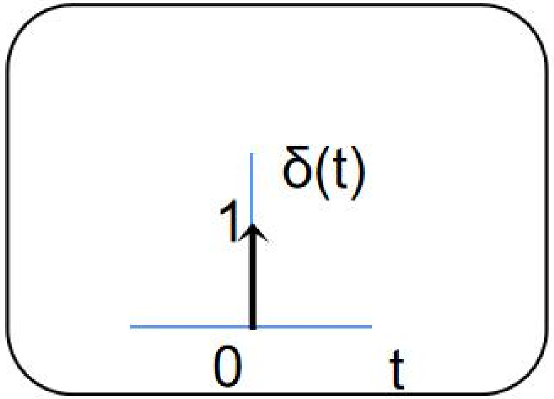


图 1.36 冲激强度为 k 的冲激 $k\delta(t)$

5 单位冲激和单位阶跃函数

Continuous-time





Relation between unit impulse and unit step functions

– First Derivative

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

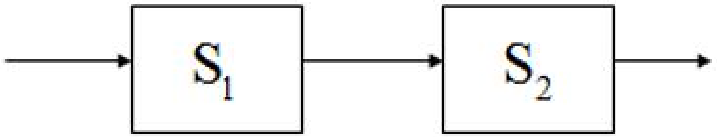
– Running Integral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

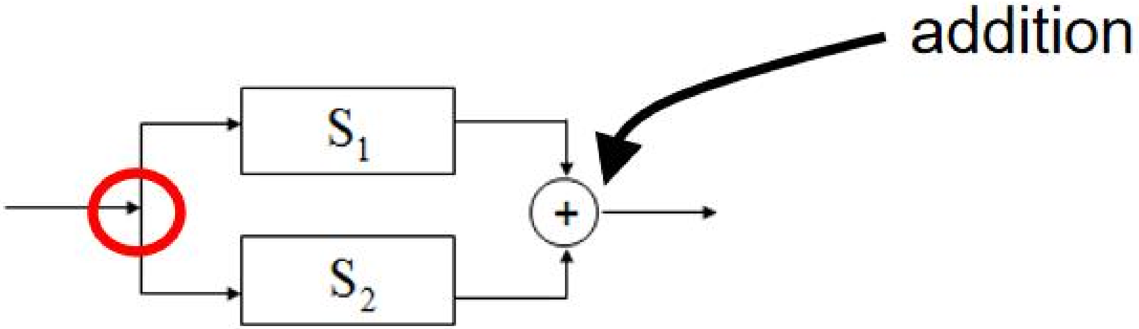
u(t)求导后是一个冲激函数，此性质在第四章计算中会用到

6 系统的级联

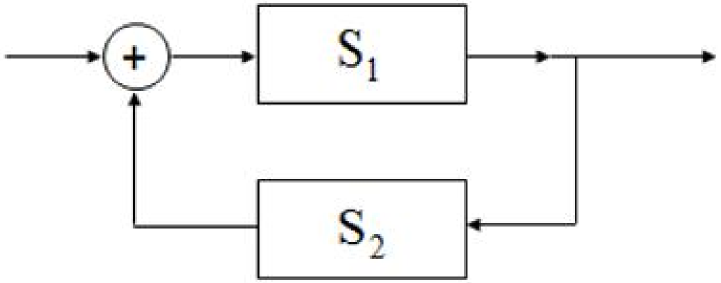
- **Series (cascade)**



- **Parallel**



- **Feedback**



红色圆圈处不是把信号一分为二，而是把信号原封不动地分别传给这两个系统

7 系统的特性

Memoryless/With Memory

Memoryless:一个系统的输出仅取决于该时刻的输入

Invertability

invertible 一个系统在不同输入下导致不同输出

证明系统不可逆的方法：举例系统在不同输入下得到了同样的输出

eg: 不可逆系统：$y[n]=0$ $y(t)=x^2(t)$

Causality

Causal: 一个系统的输出仅取决于现在和过去的输入

Memoryless一定Causal

eg: $y(t)=x(t+1)$非因果

$y(t)=x(t)\cos(t+1)$因果 只看x这一项，$\cos(t+1)$是常数

7 系统的特性

Stability

Stable:输入有界且输出有界

Time Invariance(TI)

输出信号产生与输入信号相同的时移

证明TI:严格证明过程

证明非TI:严格证明过程或者举一个反例

$$y[n]=x[Mn]$$

$$x_1[n]=x[n-n_0]$$

$$x_1[n]\rightarrow y_1[n]=x_1[Mn]=x[Mn-n_0]\neq y[n-n_0]=x[M(n-n_0)]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$x_1[n]=x[n-n_0]$$

$$x_1[n]\rightarrow y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k-n_0]=\sum_{k'=-\infty}^{n-n_0}x[k']=y[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k]$$

$$k'=k-n_0$$

7 系统的特性

Time Invariance(TI)

快速判断：如果系统没对n或t操作，就是TI的

TI: $y[n]=x[n-1]$ $y[n]=x^2[n]$

not TI: $y[n]=x[2n]$ $y[n]=x[-n]$ $y(t)=x(t/3)$

7 系统的特性

Linear/Nonlinear

1) Have $y_1(t)$ and $y_2(t)$ as output signals to $x_1(t)$ and $x_2(t)$
2) Have $y_3(t)$ as output signal to $x_3(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$
3) Does $y_3(t)$ equal "$a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$"?

8 LTI Systems线性时不变系统

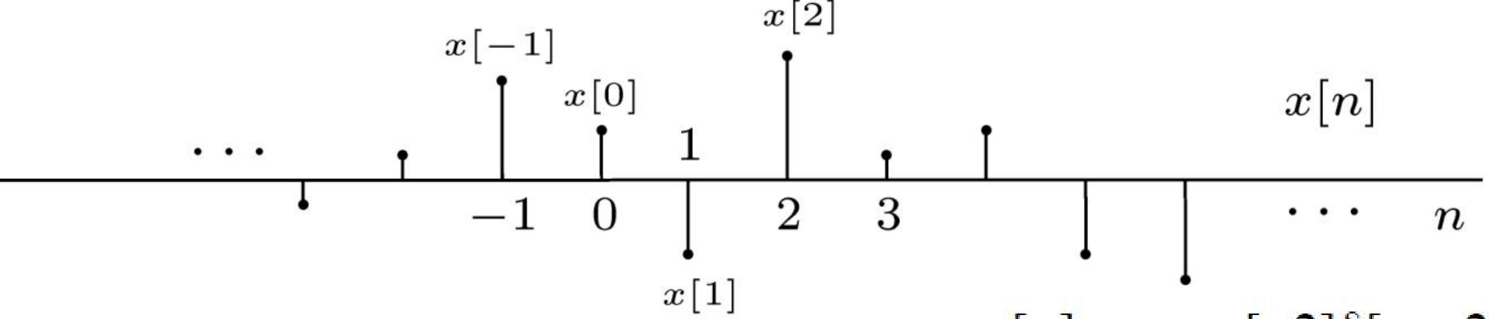
If we know the response of an LTI system to some inputs, we actually know the response to many inputs.

2

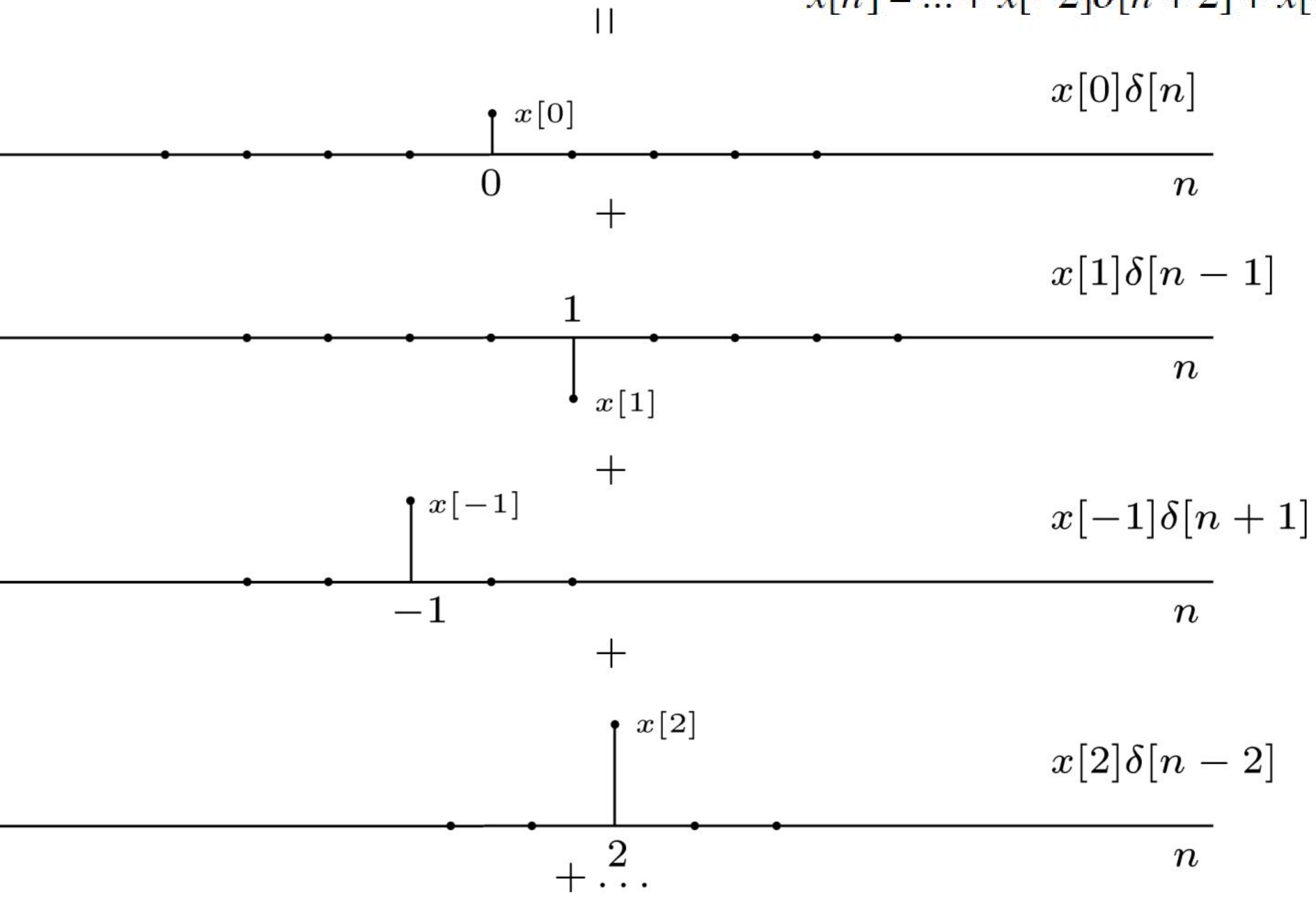
PART

Convolution

1 离散卷积



$$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

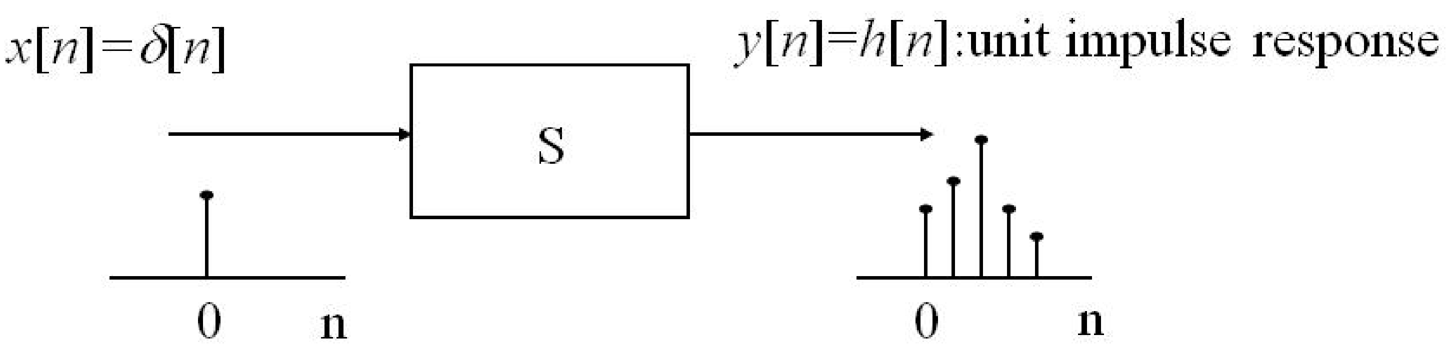


$$\Downarrow$$

Important to note the “-” sign

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}$$

1 离散卷积



From Time-Invariance:

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

From Linearity:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]=x[n]*h[n]$$

(2.6)式意味着一个很重要的结果：既然一个 LTI 系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应来表示，那么 LTI 系统的单位脉冲响应就完全刻画了系统的特性。

1 离散卷积

在此处键入公式。（了解）LTI系统不仅可通过其单位冲激响应完全描述，还可通过其单位阶跃响应s(t)完全描述

$$\boldsymbol{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$

$$\delta[n] ----- h[n]$$
$$u[n] ----- s[n]$$
$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

2 连续卷积

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT LTI}} \longrightarrow y(t)$$

- Now suppose the system is **LTI**, and define the *unit impulse response* $h(t)$:

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$\Downarrow$$

From Time-Invariance:

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$$

From Linearity:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Convolution Integration}} = x(t) * h(t)$$

3 卷积计算　　**列表法** 适用题型：离散信号+无规律长片段

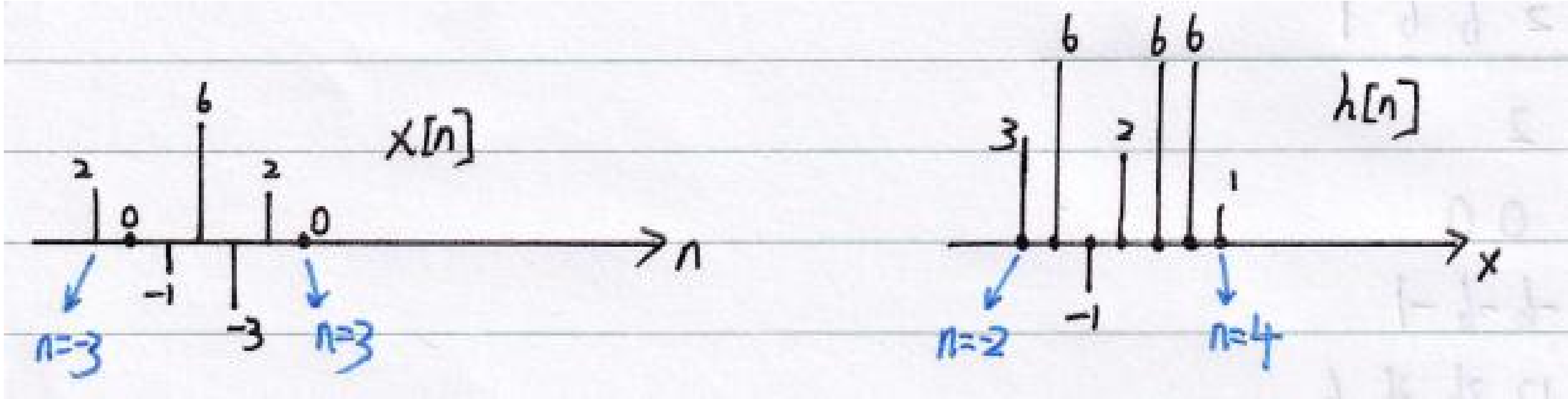
有限长离散信号片段卷积后的长度

$x[n]$ $\{n=A,\ n=A+1,\ \cdots\ n=B\}$ 长度 $M=B-A+1$

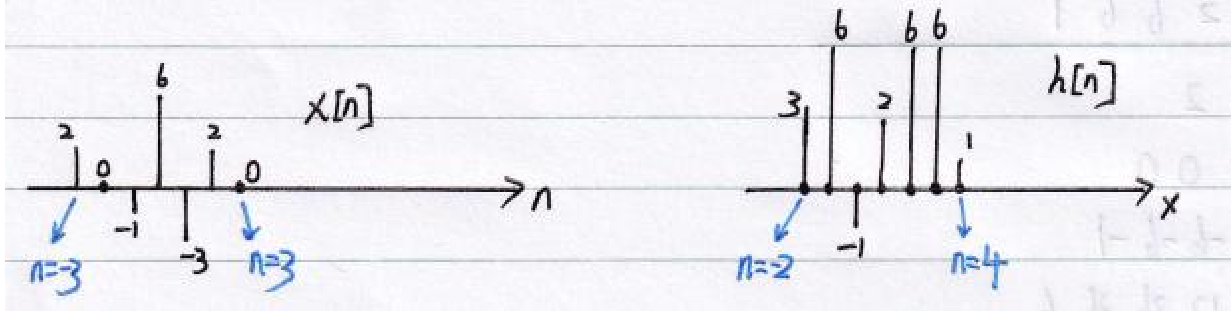
$h[n]$ $\{n=C,\ n=C+1,\ \cdots\ n=D\}$ 长度 $N=D-C+1$

$x[n]*h[n]$ $\{n=A+C,\ \cdots\ n=B+D\}$ 长度 $M+N-1$

计算下面卷积：



3 卷积计算



n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
x[n]			2	0	-1	6	-3	2
h[n]				3	6	-1	2	6
	x[-3]h[-2]	x[-3]h[-1]	x[-3]h[0]	x[-3]h[1]	x[-3]h[2]	x[-3]h[3]	x[-3]h[4]	
		x[-2]h[-2]	x[-2]h[-1]	x[-2]h[0]	x[-2]h[1]	x[-2]h[2]	x[-2]h[3]	x[-2]h[4]

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
x[n]			2	0	-1	6	-3	2	0					
h[n]				3	6	-1	2	6	6	1				
y[n]	6	12	-2	4	12	12	2							
		0	0	0	0	0	0	0						
			-3	-6	1	-2	-6	-6	-1					
				18	36	-6	12	36	36	6				
					-9	-18	3	-6	-18	-18	3			
						6	12	-2	4	12	12	2		
							0	0	0	0	0	0	0	+
y[n]	6	12	-5	16	40	-8	23	22	21	0	9	2	0	

3 卷积计算　列表法 适用题型：离散信号+无规律有限长片段

(d) $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图 P2.21 所示

3 卷积计算

画图法 不容易错，但是费时间，推荐先使用此方法

直算法 省时间，离散容易错(边界问题)，连续很好用(不用考虑边界)

离散卷积计算的2个重要求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

proof: $S_n=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$ ①

$\alpha S_n=\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n+1}$ ②

①-② $(1-\alpha)S_n=1-\alpha^{n+1}$ $\therefore S_n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

$\downarrow$ $n\to\infty$ $|\alpha|<1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}-1=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\alpha^k=\sum_{k=0}^{n}kx^k=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

proof: $\sum_{k=0}^{n}kx^k=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ ①

$x\sum_{k=0}^{n}kx^k=x^2+2x^3+\cdots+nx^{n+1}$ ②

①-② $(1-x)\sum_{k=0}^{n}kx^k=x+x^2+x^3+\cdots+x^n-nx^{n+1}$

$=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1-nx^{n+1}$

$=\frac{1-x^{n+1}-(1-x)-(1-x)nx^{n+1}}{1-x}$

$\downarrow$ $n\to\infty$ $|\alpha|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha^k=\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac12\right)^k=\begin{cases}2\left[1-\left(\tfrac12\right)^{n+1}\right] & n\geq 0\\ 0 & \text{others}\end{cases}=2\left[1-\left(\tfrac12\right)^{n+1}\right]u[n]$$

3 卷积计算

例 2.4 作为一个深入一点的例子，考虑如下两个序列：

$$x[n]=\begin{cases}1, 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n, 0\leqslant n\leqslant 6\\ 0, \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}$$

对于某个正的 $\alpha>1$ 的值，这两个信号如图 2.8 所示。

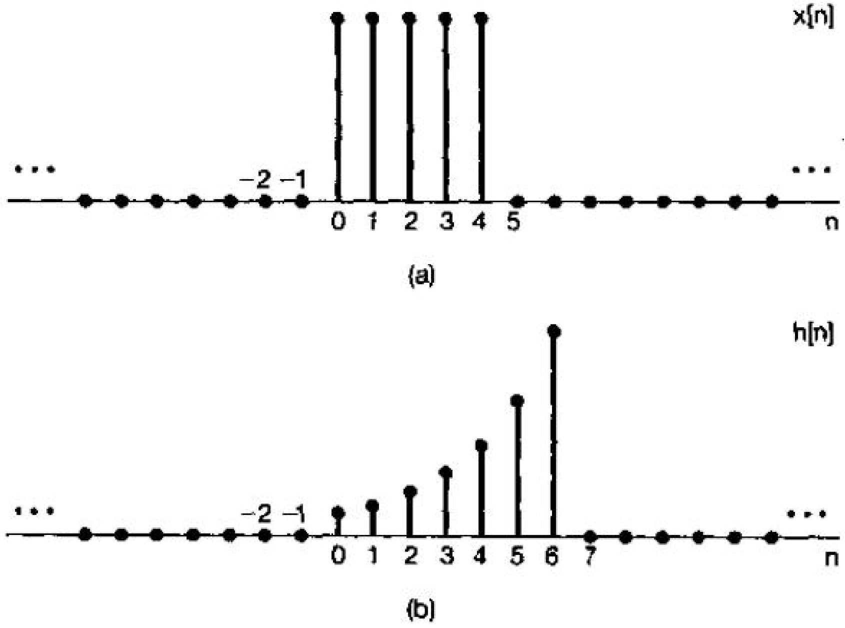
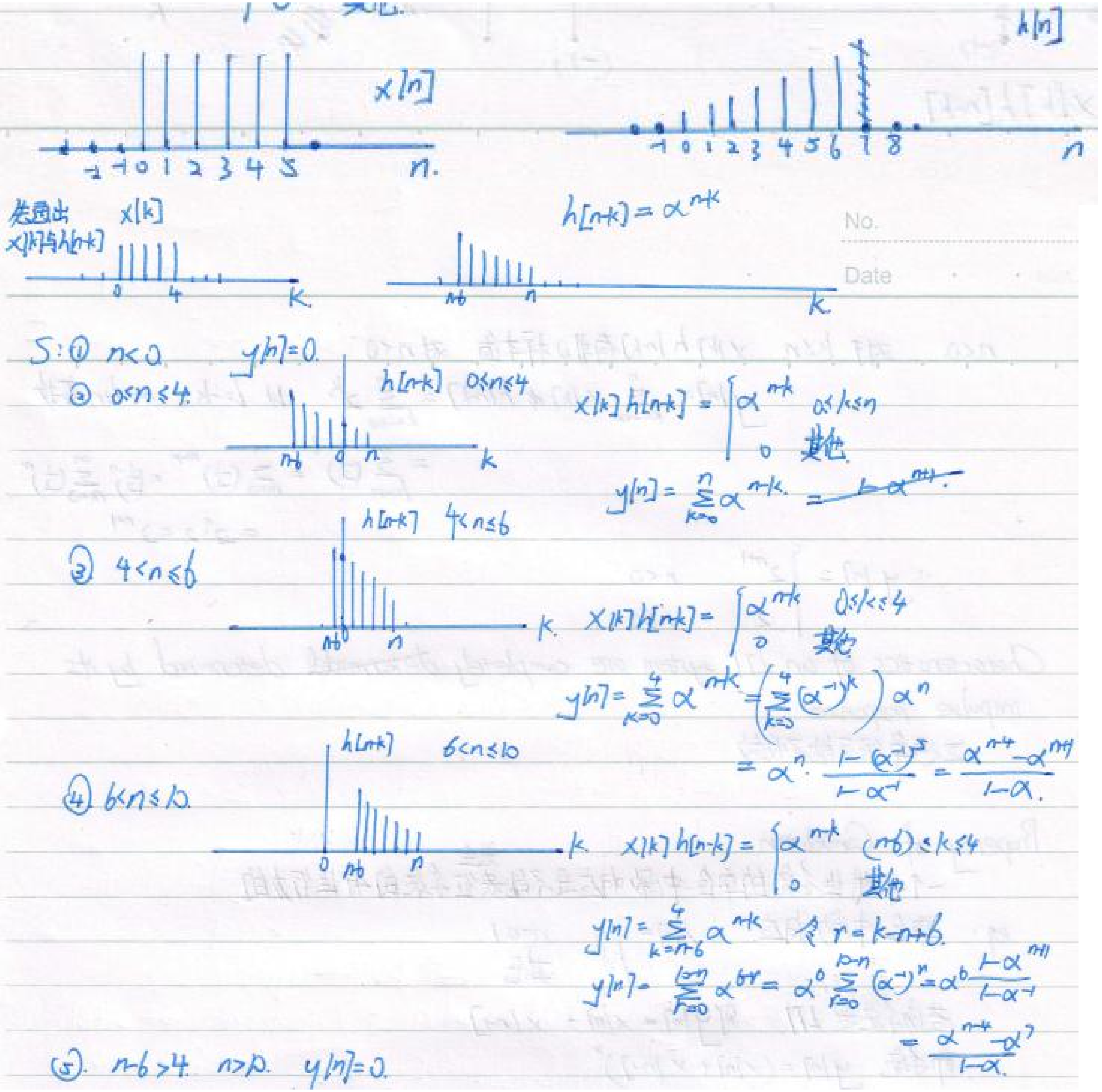


图 2.8　例 2.4 中待卷积的信号



3 卷积计算

直算法：先把信号的分段函数用阶跃响应或冲激响应表示，然后直接套用卷积公式相乘依据阶跃响应相乘后的范围确定积分/求和区间

例 2.4 作为一个深入一点的例子，考虑如下两个序列：

$$x[n]=\begin{cases}1, 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n, 0\leqslant n\leqslant 6\\ 0, \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}$$

对于某个正的 $\alpha>1$ 的值，这两个信号如图 2.8 所示。

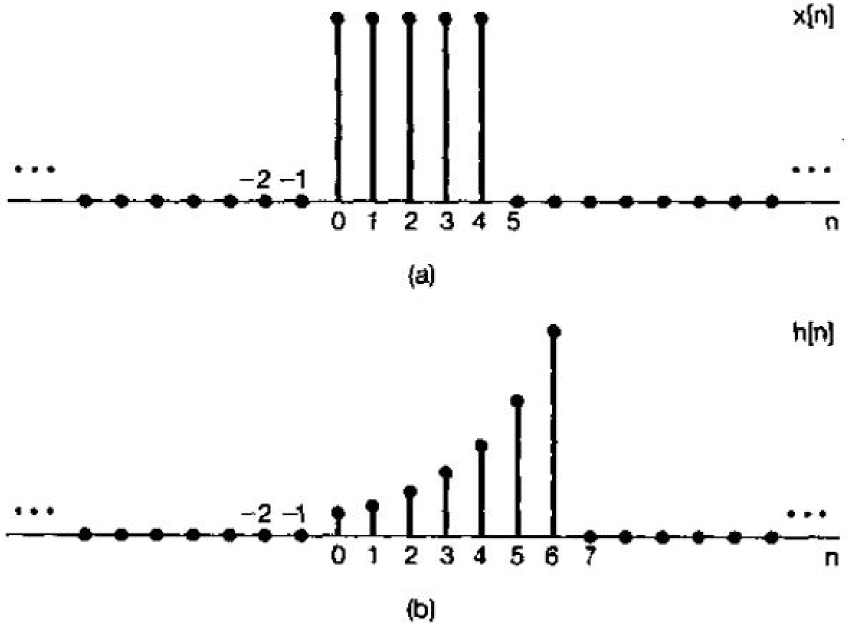


图 2.8　例 2.4 中待卷积的信号

$$x[n]=u[n]-u[n-5] \qquad h[n]=\alpha^n\left(u[n]-u[n-7]\right)$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(u[k]-u[k-5]\right)\cdot\alpha^{n-k}\left(u[n-k]-u[n-k-7]\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{n-k}\Big(\underset{0\leq k}{u[k]}\,\underset{k\leq n}{u[n-k]}-\underset{0\leq k}{u[k]}\,\underset{k\leq n-7}{u[n-k-7]}-\underset{5\leq k}{u[k-5]}\,\underset{k\leq n}{u[n-k]}+\underset{5\leq k}{u[k-5]}\,\underset{k\leq n-7}{u[n-k-7]}\Big)$$

$$=\underset{0\leq n}{\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}}-\underset{7\leq n}{\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}}-\underset{5\leq n}{\sum_{k=5}^{n}\alpha^{n-k}}+\underset{12\leq n}{\sum_{k=5}^{n-7}\alpha^{n-k}}$$

$$=\begin{cases}0 & n<0\\[4pt] \sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k} & 0\leq n\leq 4 \quad \sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\xlongequal{k'=n-k}\sum_{k'=n}^{0}\alpha^{k'}=\sum_{k'=0}^{n}\alpha^{k'}=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\\[4pt] \sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}-\sum_{k=5}^{n}\alpha^{n-k} & 5\leq n\leq 6 \quad =\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\cdot\sum_{k=0}^{4}(\alpha^{-1})^{k}=\alpha^{n}\cdot\frac{1-(\alpha^{-1})^{5}}{1-(\alpha^{-1})}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\\[4pt] \sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}-\sum_{k=5}^{n}\alpha^{n-k} & 7\leq n\leq 11\\[4pt] \sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}-\sum_{k=5}^{n}\alpha^{n-k}+\sum_{k=5}^{n-7}\alpha^{n-k} & 12\leq n \quad =\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}-\left(\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}-\sum_{k=5}^{n-7}\alpha^{n-k}\right)=0\end{cases}$$

3 卷积计算

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}-\sum_{k=5}^{n}\alpha^{n-k}\qquad 7\le n\le 11$$

$$=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-7}\alpha^{n-k}\qquad \because 7\le n\le 11\quad \therefore n-7\le 4$$

$$=\begin{cases}0 & n=11\\ \sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k} & 7\le n\le 10\end{cases}$$

$$\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}\xlongequal{r=k-n+6}\sum_{r=0}^{10-n}\alpha^{6-r}=\alpha^{6}\sum_{r=0}^{10-n}(\alpha^{-1})^{r}=\alpha^{6}\frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}.$$

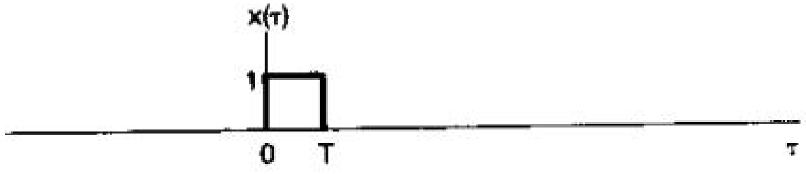
$$=\begin{cases}0 & n<0.\\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 5\le n\le 6\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 7\le n\le 10\\ 0 & 10<n\end{cases}$$

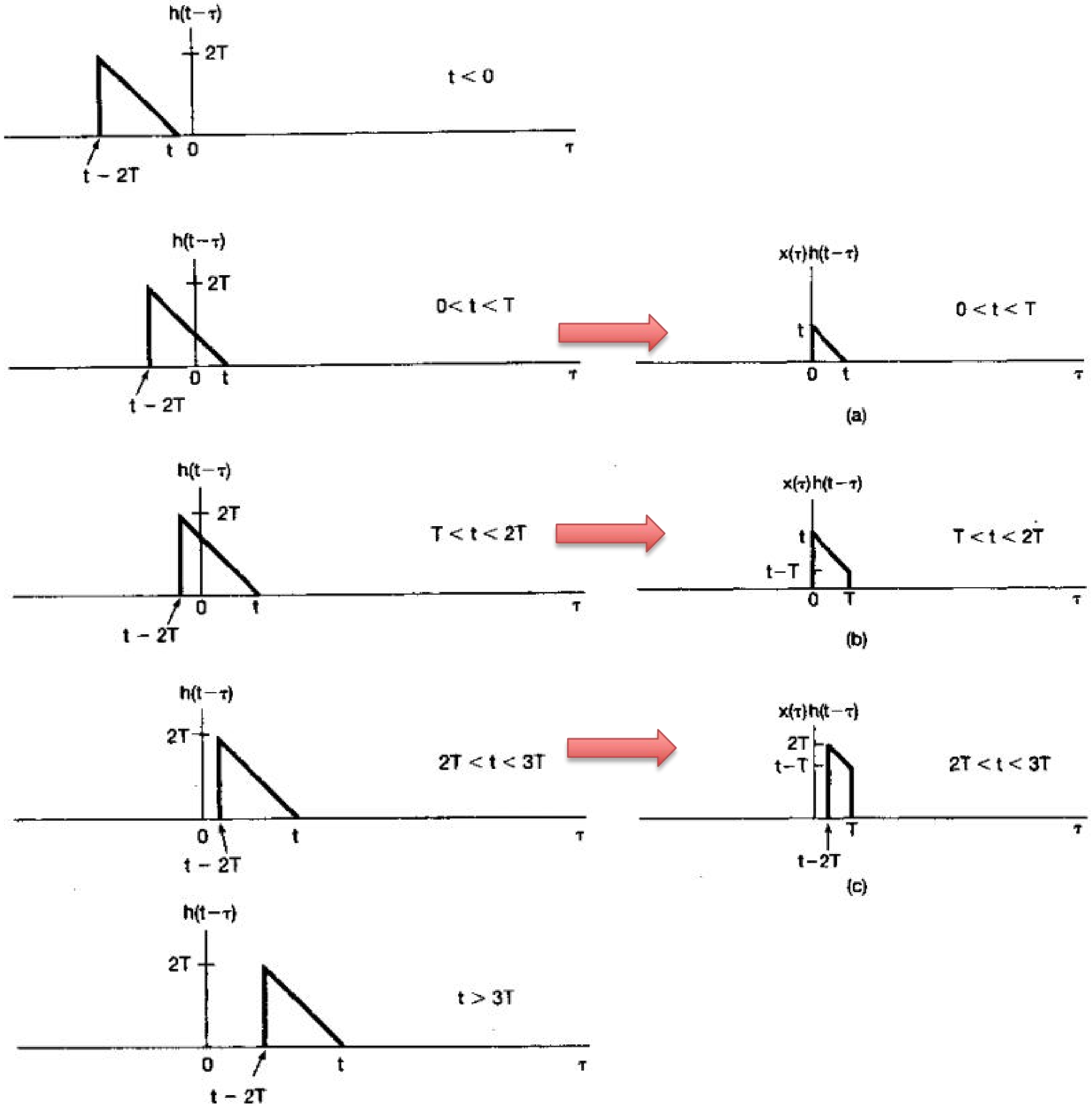
3 卷积计算

例 2.7 求以下两信号的卷积：

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值}\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}t, & 0<t<2T\\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值}\end{cases}$$





3 卷积计算

例 2.7 求以下两信号的卷积:

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值}\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}t, & 0<t<2T\\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值}\end{cases}$$

$$x(t)=u(t)-u(t-T) \qquad h(t)=t\,[u(t)-u(t-2T)]$$

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}[u(\tau)-u(\tau-T)](t-\tau)[u(t-\tau)-u(t-\tau-2T)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)\Big[\underbrace{u(\tau)u(t-\tau)}_{0\le\tau\le t}-\underbrace{u(\tau)u(t-\tau-2T)}_{0\le\tau\le t-2T}-\underbrace{u(\tau-T)u(t-\tau)}_{T\le\tau\le t}+\underbrace{u(\tau-T)u(t-\tau-2T)}_{T\le\tau\le t-2T}\Big]\cancel{dt}\,d\tau$$

$$=\underbrace{\int_0^t(t-\tau)d\tau}_{0\le t}-\underbrace{\int_0^{t-2T}(t-\tau)d\tau}_{2T\le t}-\underbrace{\int_T^t(t-\tau)d\tau}_{T\le t}+\underbrace{\int_T^{t-2T}(t-\tau)d\tau}_{3T\le t}$$

$$=\begin{cases}t<0 & 0\\ 0\le t\le T & \int_0^t(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}t^2\\ T<t\le 2T & \int_0^t(t-\tau)d\tau+\int_t^T(t-\tau)d\tau=Tt-\frac{1}{2}t^2\\ 2T<t\le 3T & \int_0^t(t-\tau)d\tau+\int_t^T(t-\tau)d\tau\,\cancel{+}-\int_0^{t-2T}(t-\tau)d\tau=Tt-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}T^2\\ 3T<t & \int_0^t-\int_0^{t-2T}-\int_T^t+\int_T^{t-2T}=\int_0^t+\int_t^T-\left(\int_0^{t-2T}+\int_{t-2T}^T\right)=\int_0^T-\int_0^T=0\end{cases}$$

3 卷积计算

重要卷积公式

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\underbrace{\delta[n-k]}_{k=n}=x[n]$$

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

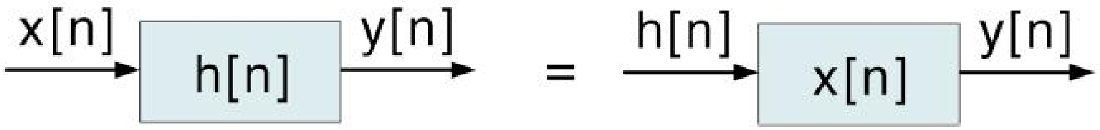
$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\tau=t}d\tau=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

4 卷积性质

Commutative

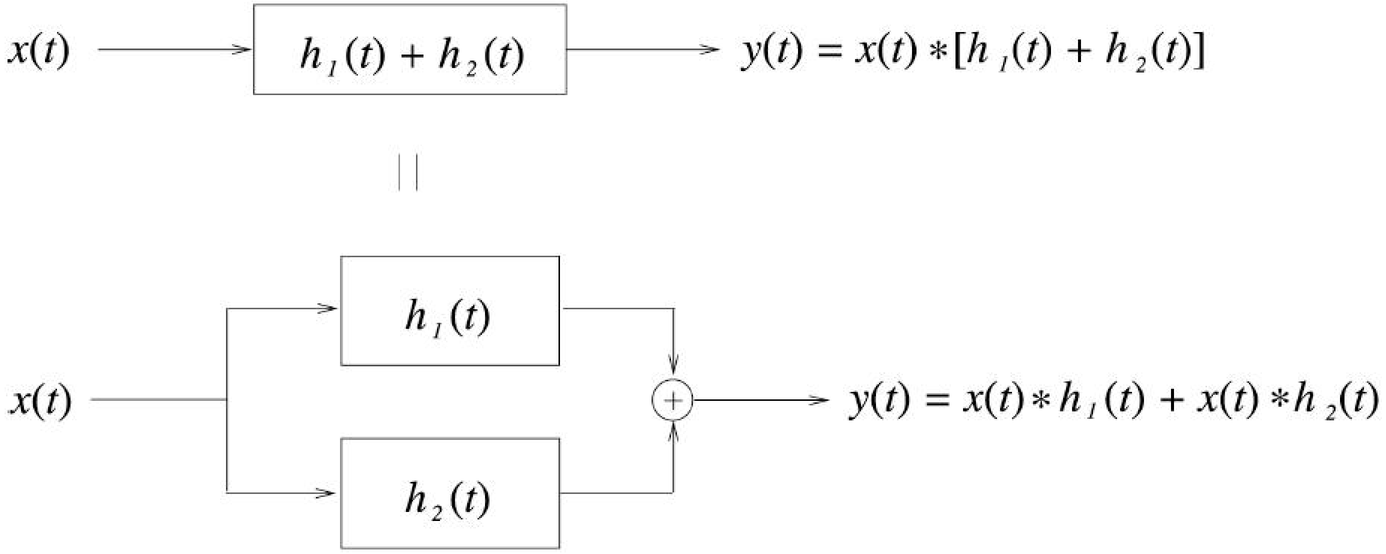
$$y[n] = x[n] * h[n] \quad = \quad h[n] * x[n]$$



$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Distributive

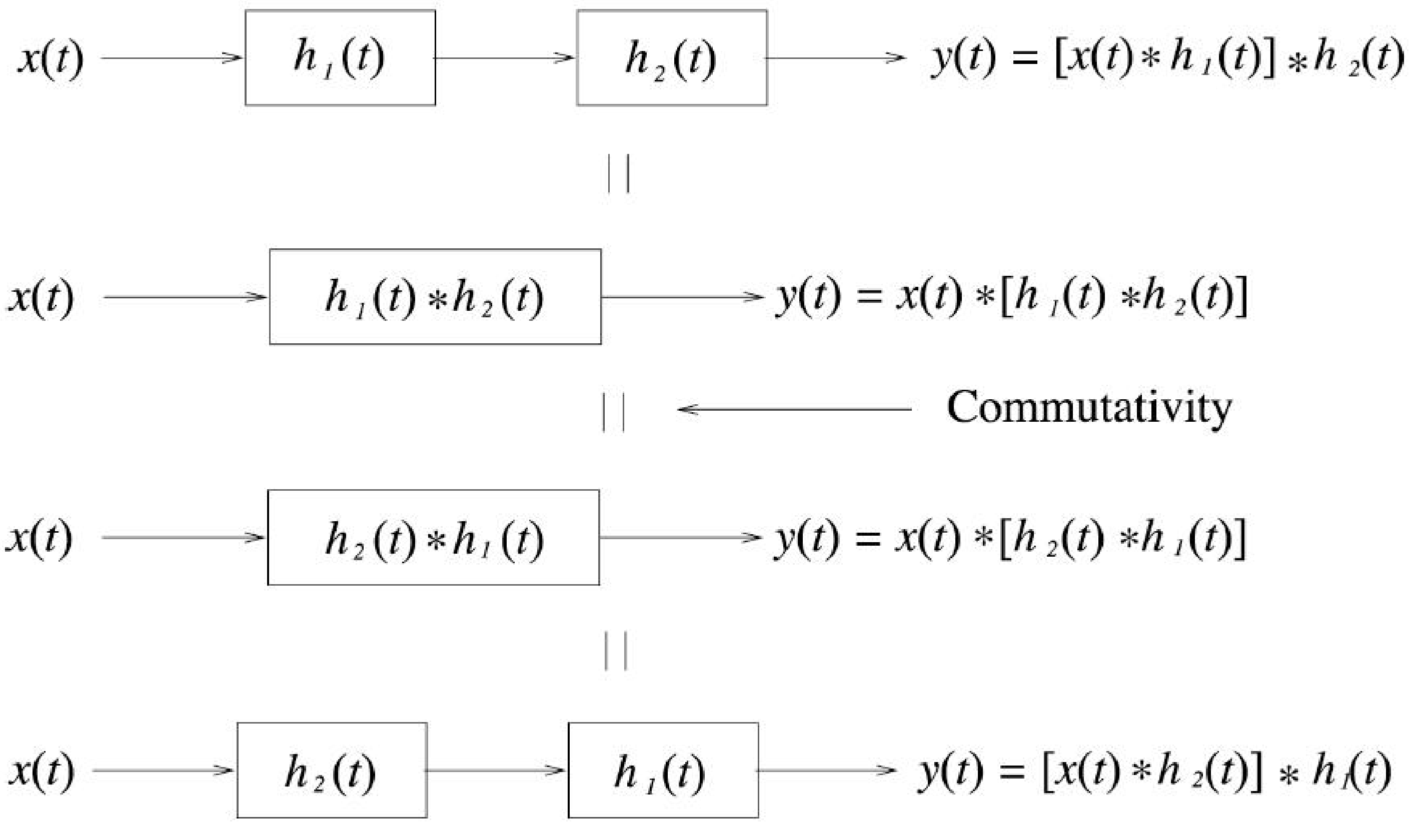
$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



4 卷积性质

Associative

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$



4 卷积性质

Causality $\Leftrightarrow$ $h[n] = 0$ for all $n < 0$

$h(t) = 0$, at $t < 0$

proof

proof: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

sufficient: $h[k]=0$ for $k<0$ $\therefore$ $y[n]$与 $\overset{x}{y}[n+1]$, $\overset{x}{y}[n+2]$…无关.

necessary: $y[n]$与$x[n+1]$, $x[n+2]$…无关. $\because$ $x[n]$可能不为0

$\therefore$ $h[k]=0$ for $k<0$

4 卷积性质

Stability $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$

BIBO — Bounded Input $\Rightarrow$ Bounded Output

proof

$k=-\infty$

proof: if $|x[n]| \le B_x < \infty$

$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \le B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$

h[n]为实序列

(sufficient condition)充分条件: if $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. $|y[n]| \le B_x S < \infty$.

(necessary condition)必要条件: 证 $|y[n]| < \infty \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$.

~~if $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$:~~ 证逆否命题成立即可: 证 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \Rightarrow |y[n]| = \infty$.

存在x[n]

令 $x[n] = \frac{h[-n]}{|h[-n]|} = \text{sign}\{h[-n]\}$

$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h[k]h[k]}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$. 得证.

h[n]为复冲激响应序列: sufficient condition: 同上.

necessary condition: 令 $x[n] = \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}$ 同证逆否命题

$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[k]h[k]}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$. 得证

4 卷积性质

Property: Memory/Memoryless

– A linear, time-invariant, causal system is memoryless only

if $\quad h[n]=K\delta[n] \qquad h(t)=K\delta(t)$

$\quad y[n]=Kx[n] \qquad y(t)=Kx(t)$

$n\neq 0 \quad h[n]=0$

$t\neq 0 \quad h(t)=0$

2.3.5 LTI 系统的可逆性

考虑一下冲激响应为 $h(t)$的连续时间 LTI 系统，根据在 1.6.2 节的讨论，仅当存在一个逆系统，其与原系统级联后所产生的输出等于第一个系统的输入时，这个系统才是可逆的。再者，如果一个 LTI 系统是可逆的，那么它就有一个 LTI 的逆系统(见习题 2.50)。因此，就有图 2.26 这样的图，给定一个系统其冲激响应为 $h(t)$，逆系统的冲激响应是 $h_1(t)$，它的输出是 $w(t)=x(t)$，这样图 2.26(a)的级联系统就与图 2.26(b)的恒等系统一样。因为图 2.26(a)的总冲激响应是 $h(t)*h_1(t)$，而 $h_1(t)$又必须满足它是逆系统冲激响应的条件，即

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \tag{2.66}$$

同样，在离散时间情况下，一个冲激响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统的逆系统的冲激响应 $h_1[n]$也必须满足

$$h(n)*h_1(n)=\delta(n) \tag{2.67}$$

下面两个例子用来说明可逆性及其逆系统的构成。

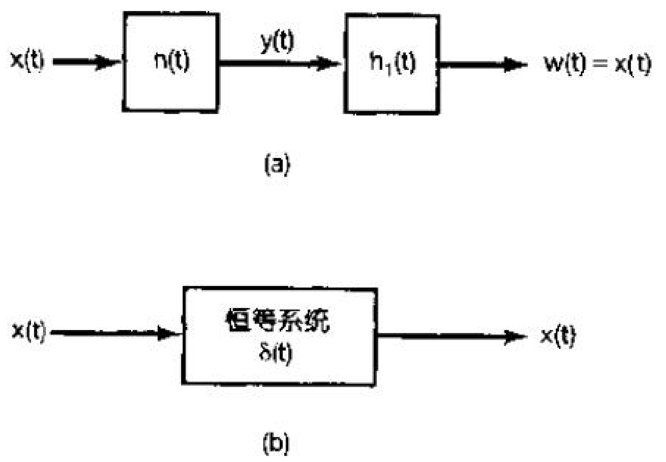
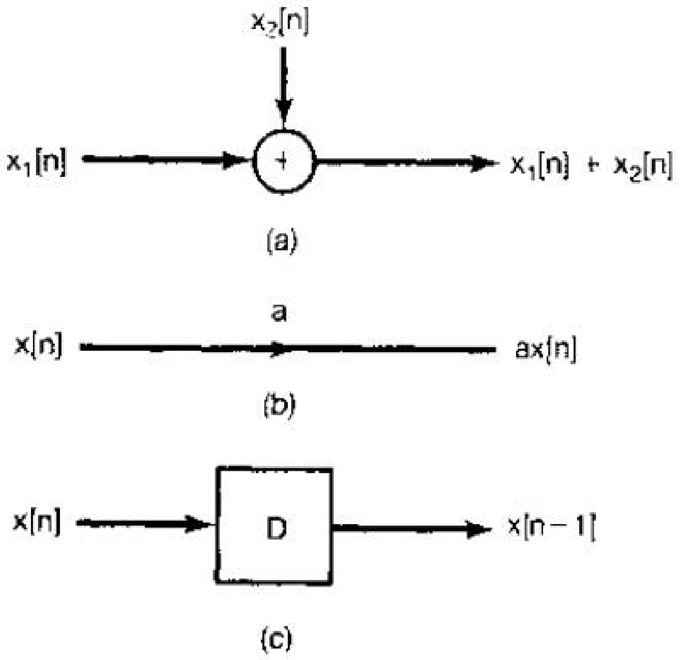


图 2.26 连续时间 LTI 系统的逆系统概念。如果 $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$，冲激响应为 $h_1(t)$的系统就是冲激响应为 $h(t)$的系统的逆系统

5 一阶系统框图（考点）



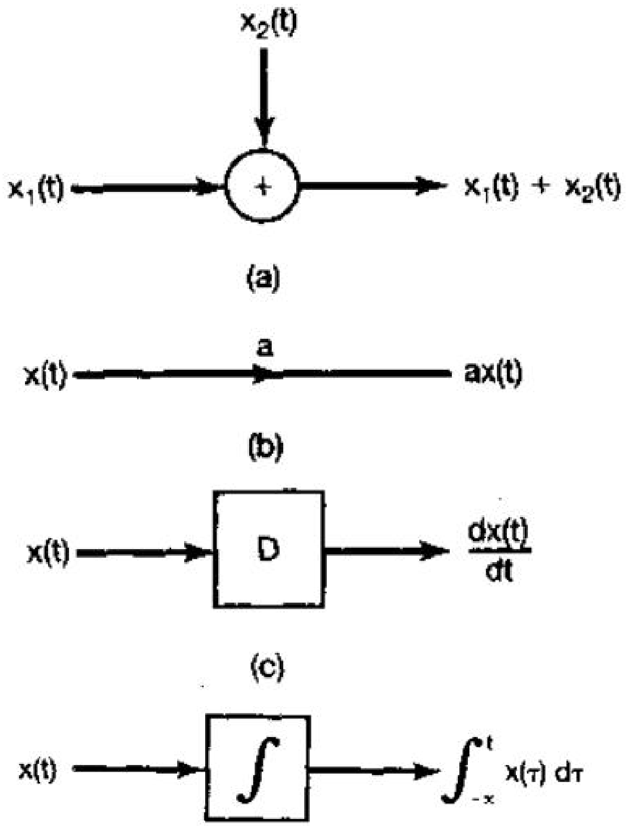
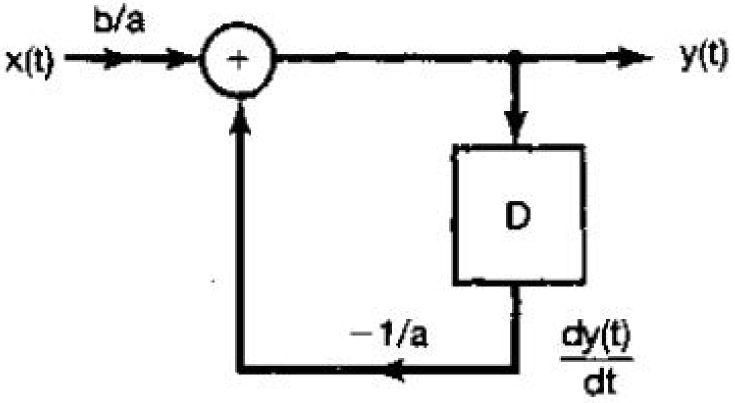


图 2.31　积分器的方框图表示



$$y(t)=-\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{b}{a}x(t)$$

补充

2.11. $y(t)=\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-3)}]u(t-3)-\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-5)}]u(t-5)$ 求 $\frac{dy(t)}{dt}$

2.13. 已知 $h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$ $h[n]$为系统S冲激响应，求S逆系统冲激响应$g[n]$

2.25 令信号

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

其中

$$x[n]=3^n u[-n-1]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \text{ 和 } h_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

(a)不利用卷积的分配律性质求 $y[n]$。

(b)利用卷积的分配律性质求 $y[n]$。

补充

2.11. $y(t)=\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-3)}]u(t-3)-\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-5)}]u(t-5)$ 求 $\frac{dy(t)}{dt}$

$$\frac{dy(t)}{dt}=e^{-3(t-3)}u(t-3)+\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-3)}]\delta(t-3)$$
$$-e^{-3(t-5)}u(t-5)-\frac{1}{3}[1-e^{-3(t-5)}]\delta(t-5)$$

前导乘后,后导乘前。

2.13. 已知 $h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$ $h[n]$为系统S冲激响应,求S逆系统冲激响应 $g[n]$

$h[n]*g[n]=\delta[n]$ $h[n]=h[n]*\delta[n]$

$\frac{1}{5}h[n-1]=\frac{1}{5}h[n]*\delta[n-1]$ $\therefore h[n]*\underbrace{(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1])}_{g[n]}=\delta[n]$

2.25. $x[n]=3^n u[-n-1]+(\frac{1}{3})^n u[n]=(\frac{1}{3})^{|n|}$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}(\frac{1}{3})^{-k}\cdot(\frac{1}{4})^{n-k}u[n-k+3]+\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n-k}u[n-k+3]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n+k}u[n+k+3]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k+1}(\frac{1}{4})^{n+k+1}u[n+k+4]$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n+k}\underbrace{u[n+k+4]}_{k\geq -4-n}$$

$k\geq 0$

$n\leq -4 \Rightarrow -4-n\geq 0$: $\frac{1}{12}\sum_{k=-n-4}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n+k}=\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k-n-4}(\frac{1}{4})^{n+k-n-4}=\frac{1}{12}\cdot 4^4\cdot 3^{n+4}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{12})^{k}=\frac{12^4}{11}\cdot 3^n$

$n>-4 \Rightarrow -4-n<0$: $\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n+k}=\frac{(\frac{1}{4})^n}{12}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{12})^{k}=\frac{1}{11}(\frac{1}{4})^n$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n-k}\underbrace{u[n-k+3]}_{n+3\geq k}$$

$k\geq 0$.

$$=\sum_{k=0}^{n+3}(\frac{1}{3})^{k}(\frac{1}{4})^{n-k} \quad n\geq -3$$

$$=(\frac{1}{4})^n\sum_{k=0}^{n+3}(\frac{4}{3})^{k}=(\frac{1}{4})^n\frac{1-(\frac{4}{3})^{n+4}}{1-\frac{4}{3}}=-3(\frac{1}{4})^n+3(\frac{4}{3})^{n+4}(\frac{1}{4})^n=-3(\frac{1}{4})^n+(\frac{1}{3})^n\frac{256}{27}$$

$$=\begin{cases}\frac{12^4}{11}\cdot 3^n & n\leq -4\\ \frac{1}{11}(\frac{1}{4})^n-3(\frac{1}{4})^n+\frac{256}{27}(\frac{1}{3})^n & -3\leq n\end{cases}$$

THANKS