Дискретная математика и математическая логика

Конспект по 2 семестру специальностей «экономическая кибернетика» и «компьютерная безопасность»

(лектор В. И. Бенедиктович)

Оглавление

Глава 1

Булевы функции

Замкнутые классы булевых функций

Пусть $A \subseteq P$
• **Замыканием** A называется множество функций из P_2, которые можно выразить в виде формул над A и обозначается $[A]$.

Свойства замыкания:

1. $A \subseteq [A]$
2. $A \subseteq B \Rightarrow [A] \subseteq [B]$
3. $\big[[A]\big] = [A]$
4. $[A] \cup [B] \subseteq [A \cup B]$

• A - **полная система** булевой функции, если $[A] = P_2$.
• Система буевых функций A **замкнутая**, если $[A] = A$.

Пример. $A = \{1, x_1 \oplus x_2\}$ не замкнута, так как $1 \oplus 1 = 0 \notin A$

Пусть A - замкнутый неполный класс системы булевых функций. Тогда если $A \subseteq B$, то B - неполная система.

♦ $B \subseteq A \Rightarrow [B] \subseteq [A] \neq P_2 \Rightarrow [B] \neq P_2 \Rightarrow B$ - неполная система. ⊠

Примеры замкнутых классов булевых функций

I) Класс $T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(0, \ldots, 0) = 0\}$

Например:
$0,\ x,\ x_1 \cdot x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \oplus x_2 \in T_0$
$1,\ \bar{x},\ x_1 \Rightarrow x_2,\ x_1 | x_2,\ x_1 \downarrow x_2,\ x_1 \Leftrightarrow x_2 \notin T_0$

Мощность класса: $2^n - 1$ ненулевых строк $\Rightarrow |T_0| = 2^2 - 1 = \frac{1}{2} 2^{2^n}$

Теорема. *Класс T_0 замкнут.*

♦ Поскольку $x \in T_0$, то достаточно показать, что если $f_1, f_2, \dots, f_n \in T_0$, то $f(f_1, \dots, f_n) \in T_0$. Действительно, $f(f_1(0,\dots,0), \dots, f_n(0,\dots,0)) = f(0,\dots,0) = 0$ ⊠

II) Класс $T_1 = \{f(x_1,\dots,x_n) \in P_2 | f(1,\dots,1) = 1\}$

Например:
$1, x, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \Rightarrow x_2, x_1 \Leftrightarrow x_2 \in T_1$
$0, \bar{x}, x_1 | x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \oplus x_2 \notin T_1$

Теорема. *Класс Класс T_1 замкнут.*

♦ Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы ⊠

III) Класс M монотонных функций.

Введём **частичный булевый порядок** на E_2^n: $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in E_2^n$
Говорят, что $\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \leqslant \beta_i$ для $\forall i$

• Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется **монотонной**, если $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} : \bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta} \Rightarrow f(\bar{\alpha}) \leqslant f(\bar{\beta})$
Множество всех монотонных функций обозначают M.

Например:
$0, 1, x, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2 \in M$
$0, \bar{x}, x_1 \Rightarrow x_2 \notin M$

Теорема. *Класс M замкнут.*

♦ Достаточно показать, что если $f_1, f_2, \dots, f_m \in M$, то $f(f_1, \dots, f_m) \in M = \Phi$
Пусть $\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta}$, тогда $f_1(\bar{\alpha}) \leqslant f_1(\bar{\beta}), \dots, f_m(\bar{\alpha}) \leqslant f_m(\bar{\beta}) \Rightarrow (f_1(\bar{\alpha}), \dots, f_m(\bar{\alpha})) \leqslant (f_1(\bar{\beta}), \dots, f_m(\bar{\alpha})) \Rightarrow f(f_1(\bar{\alpha}), \dots, f_m(\bar{\alpha})) \leqslant f(f_1(\bar{\beta}), \dots, f_m(\bar{\alpha}))$, то есть $\Phi(\bar{\alpha}) \leqslant \Phi(\bar{\beta})$ ⊠

Лемма. *О немонотонной функции*
Если $f(x_1,\dots,x_n)$ - немонотонная функция, то $\bar{x} \in [\{0, 1, f\}]$

♦ Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ - немонотонная функция, то есть $\exists \bar{\alpha} < \bar{\beta} \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 1, f(\bar{\beta}) = 0 (1 > 0)$.
$\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ означает, что $\exists 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$:
$\gamma_0 = \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_1-1}, 0, \alpha_{i_1+1}, \dots, \alpha_{i_2-1}, 0, \alpha_{i_2+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 0, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n)$
$\gamma_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_1-1}, 1, \alpha_{i_1+1}, \dots, \alpha_{i_2-1}, 0, \alpha_{i_2+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 0, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n)$
$\gamma_2 = (\alpha_2, \dots, \alpha_{i_1-1}, 1, \alpha_{i_1+1}, \dots, \alpha_{i_2-1}, 1, \alpha_{i_2+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 0, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n)$
$\dots$
$\gamma_k = \bar{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_1-1}, 1, \alpha_{i_1+1}, \dots, \alpha_{i_2-1}, 1, \alpha_{i_2+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 1, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n)$
$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots < \gamma_k = \bar{\beta}$
Так как $f(\gamma_0) = 1, f(\gamma_k) = 0, f(\gamma_e) = 1, f(\gamma_{e+1}) = 0$, то $\exists l : 0 \leqslant l \leqslant k-1$, то есть $\alpha_e = 0, \beta_e = 1, \forall i \neq l, \alpha_i = \beta_i$
Построим функцию $h(x) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{e-1}, x, \alpha_{e+1}, \dots, \alpha_n)$
$$\begin{cases} h(0) = f(\bar{\alpha}) = 1 \\ h(1) = f(\bar{\beta}) = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) \equiv \bar{x}$$ ⊠

IV) Класс S самодвойственных функций.

• Функция $f^*(x_1,\dots,x_n)=\bar f(\bar x_1,\dots,\bar x_n)$ называется двойственной для функции $f(x_1,\dots,x_n)$
• Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1,\dots,x_n)=f^*(x_1,\dots,x_n)$
Другими словами:

$$\bar f(x_1,\dots,x_n)=f(\bar x_1,\dots,\bar x_n) \tag{1}$$

• Наборы $\bar\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\bar\beta=(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n)$ называются противоположными наборами.

Например:
$x,\bar x\in S$
$x_1\cdot x_2\notin S$, то есть $(x_1\cdot x_2)^*=\overline{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}}=x_1\vee x_2\neq x_1\cdot x_2$

Теорема. *6* *Класс S замкнут.*

♦ Достаточно показать, что $f_1,f_2,\dots,f_n\in S$, то $\Phi=f(f_1,\dots,f_n)\in S$
$\Phi^*(x_1,\dots,x_n)=\bar\Phi(\bar x_1,\dots,\bar x_n)=\bar f(f_1(\bar x_1,\dots,\bar x_n),\dots,f_n(\bar x_1,\dots,\bar x_n))\overset{(1)}{=}$
$\overset{(1)}{=}\bar f(\bar f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\bar f_n(x_1,\dots,x_n))=f(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))=\Phi(x_1,\dots,x_n)$
⊠

Лемма. *О несамодвойственной функции.*
Если $f(x_1,\dots,x_n)$ - несамодвойственная функция, то $0,1\in[\{\bar x,f\}]$

♦ Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ - несамодвойственная функция. Тогда $\exists\bar\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), f(\bar\alpha)=f(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.
Заменим α_i на $x\oplus\alpha_i$: $\begin{cases} x, \text{если } \alpha_i=0,\\ \bar x, \text{если } \alpha_i=1;\end{cases}$
Получим функцию $h(x)\equiv f(x\oplus\alpha_1,\dots,x\oplus\alpha_n)$
$h(0)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=c,\ c=const$
$h(1)=f(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n)=c$
$h(x)=c\Rightarrow\bar c=\bar h(x)\Rightarrow 0,1\in[\{\bar x,f\}]$ ⊠

Полином Жегалкина

• Полином Жегалкина — функция вида $\sum\limits_{\{i_1,\dots,i_k\}\in\{1,2,\dots,n\}} a_{i_1,\dots,a_k}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}\oplus a$, где a — свободный член.

Пример: $x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1\oplus 1$

Полные системы булевых функций

Теорема. *7* *Система функций $A=x_1\vee x_2, x_1\cdot x_2,\bar x$ является полной. (Базис Буля)*

♦ $f(x_1,\dots,x_n)\in P_2$. Если булевая функция отлична от нуля, то по следствию из 2 теоремы Шеннона функция f выражается в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы, в которую входят дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, тем самым она принадлежит замыканию класса. Если $f=0$, то $f=x_1\cdot\bar x_1$. ⊠

Теорема. *8 (о сведении)*
Если система A — полная и любая функция из A может быть выражена формулой над некоторой системой функций B, то B — полная система.

♦ $[A]=P_2, A\subseteq[B]\Rightarrow P_2=[A]\subseteq\big[[B]\big]=[B]\subseteq P_2\Rightarrow[B]=P_2$. То есть B - полная система.
⊠

Теорема. *9*
Сдедующие системы являются полными:

1. $A_1 = \{x_1 \vee x_2,\ \bar{x}\}$

2. $A_2 = \{x_1 \cdot x_2,\ \bar{x}\}$

3. $A_3 = \{x_1|x_2\}$

4. $A_4 = \{x_1 \cdot x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ 1\}$

♦

1. По теореме 7 система $\{x_1 \vee x_2,\ \bar{x}\}$ — полная. По закону де Моргана: $x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in [A_1]$. По теореме 8 следует$[A_1] = P_2$.

2. По закону де Моргана $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \Rightarrow x_1 \vee x_2 \in [A_2]$. По теореме $8[A_2] = P_2$.

3. Можем представить отрицание в виде штриха Шеффера: $\bar{x} = x|x. x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1|x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2) \Rightarrow \bar{x},\ \ x_1 \cdot x_2 \in [A_3]$. По теореме 8 и доказательству п.2 $A_3 = P_2$.

4. $\bar{x} = x \oplus 1 \Rightarrow \bar{x} = [A_4]$. По теореме 8 и доказательству п.2 следует, что $[A_4] = P_2$.

⊠

Теорема. 10 *(теорема Жегалкина)*
Любую булевую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить единственным образом в виде полинома Жегалкина $G_f(x_1, \ldots, x_n)$.

♦ 1) Докажем существование:
В силу теоремы 9 и доказательства п.4 система $\{x_1 \cdot x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ 1\}$ полная $\Rightarrow$ любая булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть реализована над этой системой. После раскрытия скобок используют дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по mod 2 ($\oplus$) и приведения подобных получаем полином Жегалкина.

2) Докажем единственность:
Подсчитаем количество полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Каждое слагаемое в полиноме Жегалкина имеет вид конъюнкции переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ или существует свободный член 1. Каждая такая конъюнкция определяется подмножеством индексов во множестве индексов $i = \overline{1, n}$ ($\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$). Значит, множество всевозможных слагаемых в полиноме равно количеству подмножеств в n-элементном множестве, то есть 2^n.
Чтобы составить полином Жегалкина нужно выбрать подмножество из множества всевозможных слагаемых. Число полиномов Жегалкина равно 2^{2^n}, что равно количеству булевых функций от n переменных. А так как любая булевая функция имеет полином Жегалкин, представляющий её, то существует единственный полином представляющий булевую функцию. ⊠

В силу этой функции полином Жегалкина представляет собой булевую функцию G_f. $G_f(x_1, \ldots, x_n)$ — алгебраически нормальная формула (АНФ) булевой функции.

Булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от x_i (не является фиктивной переменной) и содержится в каком-либо слагаемом $G_f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример: $x_1 \vee x_2$

Методы приведения к виду полинома Жегалкина

1. Метод неопределенных коэффициентов
$x_1 \vee x_2 = a \cdot x_1x_2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + d$; нам необхожимо найти a, b, c, d. Подставим $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$:

$(0,0)$	$d = 0$
$(0,1)$	$1 = c + d \Rightarrow c = 1$
$(1,0)$	$1 = b + d \Rightarrow b = 1$
$(1,1)$	$1 = a + b + c + d \Rightarrow a = 1$ (по mod 2)

Следовательно, $x_1 \vee x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.
В общем случае для определения неизвестных коэффициентов при $a_{i_1,\dots,i_k}x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ составляется уравнение $G_f(a_1, \dots, a_i) = f(a_1, \dots, a_n)$, из чего следует, что всего 2^n уравнений, 2^n неизвестных коэффициентов и в силу теоремы 10 имеет единственное решение.

2. Метод эквивалентных преобразований
С помощью следующих тождеств: $\bar{A} = A \oplus 1$, $A \vee B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = (A \oplus 1) \cdot (B \oplus 1) \oplus 1 = AB \oplus A \oplus B$, $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$, $A \oplus 0 = A$, приводим формулу к эквивалентной над системой этих трёх функций $x_1 \cdot x_2, x_1 \oplus x_2, \bar{x}$ и запишем в виде $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

3. Метод треугольника Паскаля
Используется, когда функция задана вектором значений. Метод позволяет преобразовать таблицу истинности в полином Жегалкина путем построения вспомогательной треугольной таблицы в соответствии со следующими правилами:

   (a) Строится таблица истинности, в которой строки идут в лексикографическом порядке возрастания двоичных кодов (от 0 до 1): $00\dots00$, $00\dots01$, $00\dots10$, $00\dots11$, $\dots$, $11\dots11$;

   (b) Строится вспомогательная треугольная таблица, в которой первый столбец совпадает со столбцом значений функции из таблицы истинности;

   (c) Ячейка в каждом последующем столбце таблицы получается путем суммирования по mod 2 двух ячеек: стоящей в той же строке и в строке ниже предыдущего столбца;

   (d) Столбцы вспомогательной треугольной таблицы нумеруются двоичными кодами в том же порядке, что и строки таблицы истинности;

   (e) Каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы;

   (f) Если в верхней строке любого столбца стоит 1, то соответствующий член входит в полином Жегалкина.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

00	01	10	11
1	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$
0	1	1	1
1	0	0	
1	0		
1			

Из треугольника Паскаля результат: $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$

V) Класс L линейных функций.

• Булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ **линейная**, если она может быть задана в виде полинома Жегалкина степени $\leqslant 1$.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$$

где $a_i \in E_2 = \{0, 1\}, \quad i = \overline{0, n}$

Множество всех линейных функций обозначают L.

Например: $0,\ 1,\ x,\ \bar{x} = x \oplus 1,\ x_1 \oplus x_2,\ x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1\ \in L$
$x_1 \cdot x_2,\ x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2,\ x_1 \Rightarrow x2,\ x_1 | x_2, x_1 \downarrow x_2 \notin L$

Теорема. 11
Класс L замкнут.

♦ $L = [\{1,\ x,\ x_1 \oplus x_2\}]$ – замыкание замыкания = замыканию $\Rightarrow L$ замкнут. ⊠

Лемма. 3 *(о нелинейной функции)*
Если булевая функция нелинейная, то $x_1 \cdot x_2 \in [\{0,\ 1,\ \bar{x},\ f\}]$.

♦ Пусть $f = (x_1, \ldots, x_n)$ – нелинейная, тогда по теореме 10 f может быть представлена в виде полинома Жегалкина со степенью $\leqslant 1$. Тогда в представление $G_f(x_1, \ldots, x_n)$ входит произведение $x_1 \cdot x_2 \Rightarrow$ полином Жегалкина можно представить в следующем виде:
$G_f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot p_0(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot p_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus x_2 \cdot p_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus p_3(x_3, x_4, \ldots, x_n), \quad p_0(x_3, x_4, \ldots, x_n) \not\equiv 0.$
$\exists a_3, a_4, \ldots, a_n \in E_2 : \quad p_0(a_3, \ldots, a_n) = 1$

Пусть $p_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) = b_1$,
$p_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) = b_2$,
$p_3(x_3, x_4, \ldots, x_n) = b_3$

$G_f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) = x_1 \cdot x_2 \oplus b_1 \cdot x_1 \oplus b_2 \cdot x_2 \oplus b_3$

Сделаем подстановки:
x_1 заменим на $x_1 \oplus b_2 \quad \begin{cases} x_1, \text{если} b_2 = 0, \\ \bar{x}_1, \text{если} b_2 = 1; \end{cases}$,
а x_2 заменим на $x_2 \oplus b_1 \quad \begin{cases} x_2, \text{если} b_1 = 0, \\ \bar{x}_2, \text{если} b_1 = 1; \end{cases}$.
В результате:
$G_f(x_1 \oplus b_2, x_2 \oplus b_1, a_3, \ldots, a_n) = (x_1 \oplus b_2)(x_2 \oplus b_1) \oplus b_1(x_1 \oplus b_2) \oplus b_2(x_2 \oplus b_1) \oplus b_3 = x_1 \cdot x_2 \oplus$

$b_1 \cdot b_2 \oplus b_3, \quad b_1 \cdot b_2 \oplus b_3 = c$

$$x_1 \cdot x_2 = G_f(x_1 \oplus b_2, x_2 \oplus b_1, a_3, \dots, a_n) \oplus c = \begin{cases} G_f, \text{если} c = 0, \\ \bar{G}_f, \text{если} c = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in [\{0,\ 1,\ \bar{x},\ f\}]. \boxtimes$$

Заметим, что классы $T_0,\ T_1,\ S,\ M,\ L$ попарно различны:

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+

Теорема. 12 *(Критерий полноты Поста)*
Чтобы система функций A была полной необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов $T_0,\ T_1,\ S,\ M,\ L$. (То есть $f_0,\ f_1,\ f_s,\ f_m,\ f_l \in A$ и $f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_m \notin M,\ f_s \notin S,\ f_l \notin L$.)

⧫ Необходимость: A -полная и пусть $A \subseteq X$, где X - один из классов $T_0,\ T_1,\ S,\ M,\ L$. Тогда замыкание $[A] \subseteq [X] \notin P_2 \Rightarrow A$ – неполная, из чего следует противоречие.
Достаточность: Так как $f_0,\ f_1,\ f_s,\ f_m,\ f_l \in A$ и $f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_m \notin M,\ f_s \notin S,\ f_l \notin L \Leftrightarrow f_0(0, \dots, 0) = 1$. Рассмотрим два случая:

a) $\quad f_0(1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow f_0(x, \dots, x) \equiv 1 \in [A]$.
С другой стороны, $f_1(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow f_1(f_0(x, \dots, x), \dots, f_0(x, \dots, x_n)) \equiv 0 \in A$. Так как $0,\ 1 \in [A]$ и $f_m \in [A]$, то по лемме 1 о немонотонной функции $\bar{x} \in [0,\ 1,\ f_m] \in [A]$.

b) $\quad f_0(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow f_0(x, \dots, x) \equiv \bar{x}$. По лемме 2 о не самодвойственной функции: $0,\ 1 \in [\bar{x},\ f_s] \subseteq [A] \Rightarrow$ замыканию класса A принадлежат константы и отрицание и по лемме 3 о нелинейной функции $x_1 \cdot x_2 \in [0,\ 1,\ \bar{x},\ f_l] \equiv [A]$.
Таким образом, $\bar{x},\ x_1 \cdot x_2 \in [f_0,\ f_1,\ f_s,\ f_m,\ f_l] \subseteq [A]$. По теореме 9 о сведении А — полная система. ⊠

Замечание: *по теореме Поста можно проверить полноту любой системы из множества булевых функций* $A = \{f_1, \dots, f_t\}$. Строим таблицу, где строки соответствуют функциям, а столбцы - классам.

	T_0	T_1	S	M	L
f_1			+		
f_i			+	-	
f_t			+		

На пересечении строки f_i и столбца записываем: «+», если функция f_i принадлежит классу, записанному в данном столбце, и «-», если f_i не принадлежит классу, записанному в данном столбце.

По теореме Поста, система A является полной тогда и только тогда, когда в любом столбце найдётся хотя бы один минус, и неполной, если есть хотя бы один стобцец, полностью состоящий из плюсов («+»).

Пример:

	T_0	T_1	S	M	L
$\bar{x}$	-	-	-	$+$	$+$
$x \Rightarrow y$	-	$+$	-	-	-

$\Rightarrow$ система полная.