

Projektrapport Grupp 3
Space Curling
TNM085 Modelleringsprojekt

Linnéa Mellblom
Linnea Malcherek
Julia Nilsson
Michael Nilsson
Linnéa Nåbo

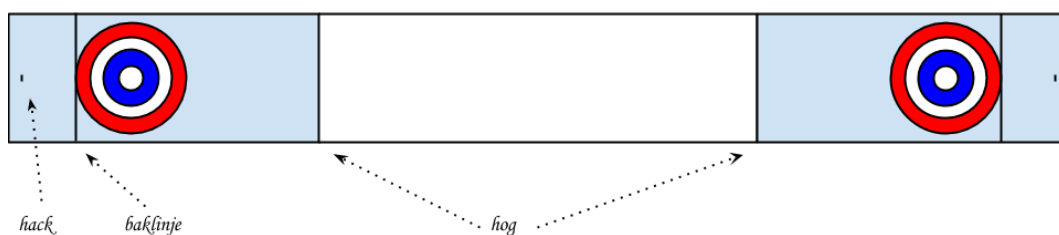
14 mars 2014

Innehåll

1	Introduktion	2
1.1	Begränsningar och förenklingar	2
2	Fysikalisk beskrivning	3
2.1	Translation	3
2.1.1	Friktionens påverkan	3
2.1.2	Resulterande translation	5
2.2	Rotation	5
2.3	Kollision	6
3	Numeriska metoder för simulering	8
3.1	Numeriska metoder	8
3.1.1	Runge-Kutta-metoden	8
3.1.2	Eulermetoden	9
3.2	Implementation	10
4	Grafisk implementering	11
4.1	WebGL	11
4.2	Modellering	11
5	Resultat	12
5.1	Matlabsimulering	12
5.2	Grafisk simulering	13
6	Diskussion	14
6.1	Numeriska metoder	14
6.2	Fysik	14
7	Att köra simuleringen	15
A	Konstanter och värden	16
B	Mått och bild på curlingstenens bana	16

1 Introduktion

Curling är en lagsport som går ut på att genom att släppa stenar över en isbana in i ett poängområde få fler poäng än motståndaren. Detta är ett intressant system att modellera eftersom det innefattar många vedertagna fysikaliska egenskaper men även delar som inte är särskilt triviala. De senaste åren har ett flertal vetenskapliga artiklar publicerats som ger sin förklaring till svängningsfenomenet, den så kallade "curlen", hos curlingstenen. Gemensamt för artiklarna är hypotesen om att svängningen på curlingstenen beror på en högre friktion på bakre delen av stenen än den främre. Anledningen till varför det är så kommer att förklaras i denna rapport.



Figur 1: Curlingbanan

1.1 Begränsningar och förenklingar

Denna rapport behandlar modellbygge och simulering av en curlingstens translation och rotation, friktionens påverkan samt kollision mellan curlingstenar. Curlingstenarna i beräkningarna har samma massa och därmed kan beräkningar förenklas genom att förkorta bort massan. I spelet använder man sig även av sopning för att påverka stenens bana över isen. Det fungerar dock i implementationen endast på den sten som senast skjuts ut. Hänsyn har inte heller tagits till den rotation som skapas för stenarna efter en sned krock (krock som inte är riktad mot masscentrum). Stenarna har istället samma rotationshastighet efter krock som de hade innan.

2 Fysikalisk beskrivning

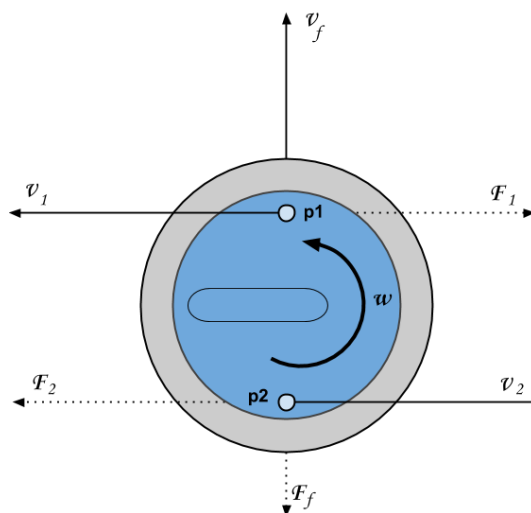
Alla variabler går att finna i en tabell i bilaga A.

2.1 Translation

I beräkningarna av stenens rörelse har hänsyn tagits till tre påverkande friktionskrafter (Figur 2): Kraft i riktning motsatt stenens rörelseriktning \bar{F}_f , samt två krafter i ortogonal riktning mot denna \bar{F}_1 och \bar{F}_2 (1). Dessa två krafter utgörs av friktionskrafterna i främre delen av stenen samt i den bakre delen. Differensen mellan dessa två krafter är vad som påverkar stenens curl (svängning). Summan av krafterna är den totala kraftpåverkan på stenen \bar{F}_t .

$$\bar{F}_t = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_f \quad (1a)$$

$$\bar{F}_1 < \bar{F}_2 \quad (1b)$$



Figur 2: Påverkan av stenens translation

2.1.1 Friktionens påverkan

I kontaktytan mellan isen och curlingstenen uppstår friktion. Friktionens påverkan avgörs av stenens kontaktyta samt isens egenskaper. Isen påverkas i sin tur av temperatur och luftfuktighet. Före spel prepareras isen genom så kallad pebbling då vattendroppar sprids ut över isen och skapar en mindre glatt struktur. Vid sopning värms isen upp och en tunn vattenhinna skapas framför stenen. Detta gör så att friktion mellan sten och is minskar och därmed går stenen längre vid sopning.

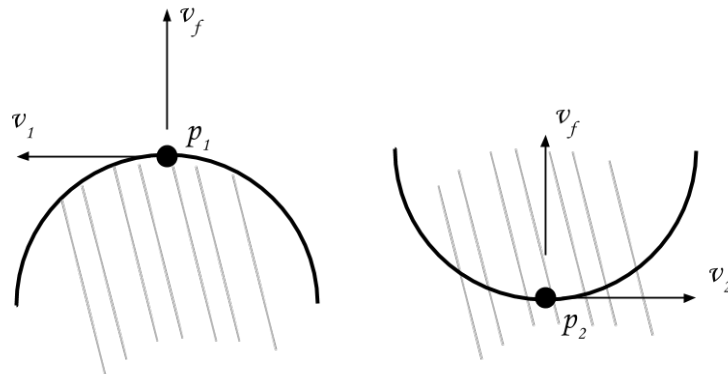
Stenens curl beror på att friktionen i den bakre delen (3) av stenen är högre än i den främre (2). En curlingsten har en kontaktyta mot isen bestående av ett tunt band (ca 5mm brett) som har en något ojäm yta, så kallad scratchad yta. När den främre halvan av stenen rör sig över den pebblede isen orsakas ett spår i isen i stenens rörelseriktning med en liten vinkel i rotationsriktningen. Då den bakre delen av bandet passerar samma yta ska bandets scratchade yta passera dessa spår, vilka då ligger i nästan rätvinklig riktning från bandets färdriktning, (Figur 3). Det innebär att den bakre delen av stenen får ett högre motstånd, en högre friktionskraft, än den främre (4)¹. Därmed gör sopning att stenen curlar mindre. Friktionen i punkterna längs bandet påverkas av av stenens rörelse framåt², vilket innebär att friktionskoefficienten μ påverkas av hastigheten v framåt. Variabeln c är en konstant som avgör storleken på friktionen i punkten. Accelerationen a i en punkt längs stenens band kan därmed beräknas (5).

$$F_1 = ma_1 = \mu_1 mg \Rightarrow a_1 = \mu_1 g \quad (2)$$

$$F_2 = ma_2 = \mu_2 mg \Rightarrow a_2 = \mu_2 g \quad (3)$$

$$\mu_2 > \mu_1 \quad (4)$$

$$\mu = \frac{c}{\sqrt{v}} \Rightarrow a = \frac{cg}{\sqrt{v}} \quad (5)$$



Figur 3: Friktion i punkt bak (p_2) respektive fram på stenen (p_1). Den bakre delen måste passera de spår framsidan av stenen skapat, vilket leder till högre friktion.

Den vattenhinna som skapas vid sopning för med sig att de spår som den främre delen av stenen åstadkommer minskar och därmed även dess effekt på den bakre delen av stenen.

¹H. Nyberg, S. Alfredson, S. Hogmark, S. Jacobson, *The asymmetrical friction mechanism that puts the curl in the curling stone* (2013), Tribomaterials Group, Department of Engineering Sciences, Uppsala University, SE-751 21 Uppsala, Sweden

²A. Raymond Penner, *The physics of sliding cylinders and curling rocks* (2001), American Journal of Physics **69**, American Association of Physics Teachers

2.1.2 Resultande translation

Translationen av stenen är en resulterande hastighetsvektor v , som består av hastigheten i rörelseriktningen samt av hastigheten i punkterna längs det ringformade band stenen roterar på. Dessa hastigheter kan sammanställas till resultanten i den främre delen av stenen i punkt p_1 och den bakre i punkt p_2 , (Figur 2). Hastighetens komponenter kan då beskrivas enligt (6)

$$\bar{v}_s = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \quad (6a)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_f + \bar{v}_s \quad (6b)$$

2.2 Rotation

Stenen har även en roterande rörelse med en vinkelhastighet vars ursprungsvärde beräknas utifrån utslagshastigheten av stenen (7). Vid utslaget antas att spelaren håller stenen så att handtaget pekar i en riktning 90° från riktning framåt antingen med inhand eller outhand och släpper stenen med handtaget pekande rakt fram vid hoglinjen. Detta innebär att stenen roterar 90° under den tid det tar för spelaren att ta sig mellan hack och hog, vilket är direkt kopplat till den angivna utslagshastigheten.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2t_0} \quad (7)$$

Friktionen som påverkar rotationshastigheten är summan av all friktion som påverkar bandet som stenen roterar på. Detta kan sammanfattas till friktionen i de två punkterna, p_1 och p_2 på stenen. Accelerationen på stenens rotation kan därmed beräknas som accelerationen i de två punkterna.

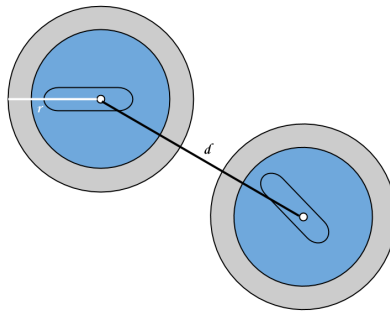
$$\alpha_{rot} = -\frac{(a_1 + a_2)}{r} = -\frac{(\mu_1 g + \mu_2 g)}{r} = -g \frac{c_1 + c_2}{r\sqrt{v_f}} \quad (8)$$

2.3 Kollision

För att kontrollera att en kollision sker beräknas avståndet mellan stenarnas position (9a). Om avståndet mellan stenarnas mittpunkter är mindre än två radier (9b) har stenarna krockat (eftersom krocken bara sker i 2 dimensioner).

$$d = \sqrt{(sten_{1_{xpos}} - sten_{2_{xpos}})^2 + (sten_{1_{ypos}} - sten_{2_{ypos}})^2} \quad (9a)$$

$$d \leq 2r \quad (9b)$$



Figur 4: Kontrollera om kollision har inträffat

Hastigheten av curlingstenarna efter en kollision (v'') beräknas med hjälp av de två stenarnas position och hastighetsvektorer före krock (v'). Beräkningarna utgår ifrån en rak central stöt i krockens normalriktning, där det finns två givna ekvationer (10) och (11) för att ta fram hastigheten efter krock. Dessa ekvationer tar endast hänsyn till fallet då $v'_1 > v'_2$. För det allmänna fallet tas absolutbeloppet av nämnare och täljare, (10), vilket kommer leda till två olika fall av ekvation (15) och (16). Med hjälp av stötkoefficienten e (10) kan stöten regleras mellan en helt elastisk krock ($e = 1$) och en helt inelastisk krock ($e = 0$). I curling är det rimligt med en energiförlust och en inelastisk stöt bör därmed tas i beräkning. Stötkoefficienten är kvoten av den relativa hastigheten efter kollision och den relativa hastigheten före kollision enligt (10)³.

Eftersom det ej finns en specificerad stötkoefficient för curlingstenarnas material (granit) har en stötkoefficient uppskattats till 0.3 genom simuleringar.

$$e = \frac{v''_2 - v''_1}{v'_1 - v'_2} \quad (10a)$$

$$0 \leq e \leq 1 \quad (10b)$$

³R. Grahn, P-Å. Jansson *Dynamik*, Studentlitteratur (1995), s. 334-345

Oavsett om krocken är inelastisk eller elastisk, gäller lagen om rörelsemängdens bevarande.

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v''_1 + m_2 v''_2 \Rightarrow \quad (11a)$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \quad (11b)$$

$$v'_1 + v'_2 = v''_1 + v''_2 \quad (11c)$$

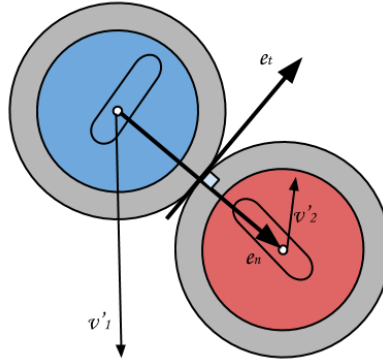
Hastigheterna delas upp i en normal- och tangentkomponent genom att projicera hastighetsvektorn på krocknormalen e_n (12) och krocktangent e_t , Figur 5. . Hastighetsvektorn delas upp i dessa komponenter eftersom energiförlusten enbart sker i normalkomponentens riktning. Genom att addera tangentkomponenten med normalkomponenten efter energiförlust, kan sneda krockar hanteras.

$$e_n = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \quad (12)$$

Där P_1 och P_2 är stenarnas position. Krocktangent är ortogonal mot krocknormalen. e_n ses i Figur 5.

$$v'_1 = v'_{1n} + v'_{1t} \quad (13)$$

$$v'_2 = v'_{2n} + v'_{2t} \quad (14)$$



Figur 5: Kollision med riktningar för hastigheter innan krock där v_1 har högre fart än v_2 .

Kollisionen räknas ut som en rak central stöt med normalkomponenterna, v'_{1n} och v'_{2n} insatta i ekvation (10) och (11c). Hastigheterna efter krocken löses sedan ut, (15) och (16).

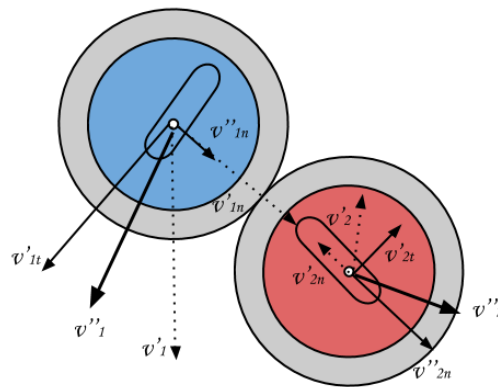
$$v''_{1n} = \frac{v'_{1n} + v'_{2n} - e(v'_{1n} + v'_{2n})}{2} \quad (15)$$

$$v''_{2n} = \frac{v'_{1n} + v'_{2n} + e(v'_{1n} + v'_{2n})}{2} \quad (16)$$

För att få den resulterande hastigheten adderas normalkomponenten efter krock med tangentkomponenten. Illustration hittas i Figur 6.

$$v''_1 = v''_{1n} + v'_{1t} \quad (17)$$

$$v''_2 = v''_{2n} + v'_{2t} \quad (18)$$



Figur 6: Hastighet före och efter kollision

3 Numeriska metoder för simulering

3.1 Numeriska metoder

Numerisk analys utgår från analytiska uppställningar som kan delas in i stegintervall för att lösas. Det finns ett flertal algoritmer som använder en numerisk approximation för att ge en uppskattad men noggrann lösning till svåra problem. Algoritmerna begränsas av de fel som diskretisering medför och därför får noggrannhet vägas mot beräkningstyngd när metod väljs. Numeriska algoritmer används ofta inom datorgrafik och simuleringar för att beräkna till exempel positionen på objekt i rörelse.

3.1.1 Runge-Kutta-metoden

Vid lösning av differentialekvationer kan den så kallade Runge-Kutta-metoden användas. I fallet då differentialekvationen är av första ordningen benämns derivatan av x som

en funktion $f(t, x)$ (19b). Begynnelsevärdet för x är $x(t_0)$ (19a). Derivatan i den aktuella punkten x_n och efterliggande punkter beräknas i funktionen $f(t, x)$ med parametrar enligt (20). Dessa läggs samman för att beräkna den approximerade funktionsvärdesskillnaden mellan punkterna x_n och x_{n+1} . Den slutliga funktionen (21) beräknar kurvans approximerade värde i nästa steg x_{n+1} , då steglängden har värdet h .

$$x_0 = x(t_0) \quad (19a)$$

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (19b)$$

$$k_1 = f(t_0, x_n) \quad (20a)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{h}{2}k_1) \quad (20b)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{h}{2}k_2) \quad (20c)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3) \quad (20d)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (21)$$

3.1.2 Eulermetoden

Eulermetoden är en annan metod för att uppskatta nästa funktionsvärde för en kurva. Värdet vid efterföljande punkt x_{n+1} är då tidigare punkts funktionsvärde x_n adderat derivatan i punkten multiplicerat med steglängden h (22).

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n h \quad (22)$$

3.2 Implementation

För beräkningarna av curlingstenens bana över isen tas hastigheten v fram för varje tid t . Hastigheten i den föregående punkten samt den påverkande accelerationen kan i beräkningen behandlas som en differentialekvation av första ordningen. Eftersom positionen för stenen beräknas utifrån hastigheten behöver endast accelerationen med avseende på en variabel (hastigheten i rörelseriktningen) beräknas, $a(v_f)$. Tre farter beräknas i varje steg av simuleringen: fart i rörelseriktningen, fart i ortogonal riktning som tillför curl samt vinkelhastighet. Dessa beräknas genom Runge-Kutta-metoden enligt (23)⁴.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (23a)$$

$$k_1 = a(v_f) \quad (23b)$$

$$k_2 = a(v_f + \frac{h}{2}k_1) \quad (23c)$$

$$k_3 = a(v_f + \frac{h}{2}k_2) \quad (23d)$$

$$k_4 = a(v_f + hk_3) \quad (23e)$$

Funktionen a för accelerationen för farterna är olika beroende på friktionstillstånden enligt (24), (25), (26)⁵

$$a_{fram} = -\mu g \quad (24)$$

$$a_{sida} = g \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{v_f}} \quad (25)$$

$$a_{rot} = \alpha_{rot} = -g \frac{c_1 + c_2}{r\sqrt{v_f}} \quad (26)$$

Samtliga tre parametrar (fart framåt, fart i sidled och vinkelhastighet) är skalärer. Efter att nästa värde erhållits genom Runge-Kutta-metoden tas hastigheten fram i riktning framåt och i sidled och de två adderas genom vektoraddition. Ny position av stenen beräknas i sista steget genom Euler-metoden, där hastighetsvektorn anger riktning och steglängd (27).

$$pos_{n+1} = pos_n + \vec{v}\Delta t \quad (27)$$

⁴L.Ljung, T.Glad *Modellbygge och simulering* (2004), s.380-382

⁵A. Raymond Penner, *The physics of sliding cylinders and curling rocks* (2001), American Journal of Physics **69**, American Association of Physics Teachers.

4 Grafisk implementering

4.1 WebGL

Efter simuleringen i Matlab har koden skrivits över till WebGL för att utveckla det grafiska samt skapa ett spelkoncept på webben. Två spelare kan spela mot varandra och en poängberäkning har implementerats.

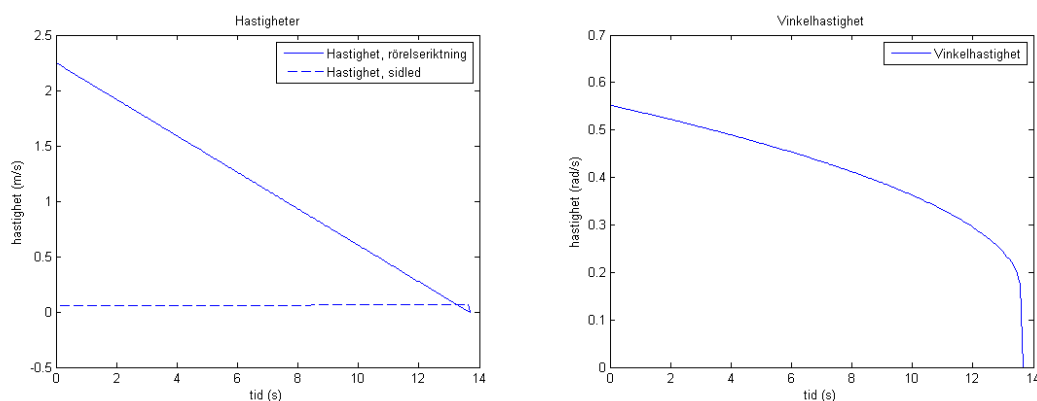
4.2 Modellering

Alla objekt, så som stenen och curlingbanan, är modellerade i 3D-grafikprogrammet Blender. På dessa objekt läggs en UV-mappning för att kunna lägga på texturen. Ett konverteringsskript används för att göra om objektet från .obj till .json där UV-koordinaterna blir sparade som strängar. Runtomkring curlingbanan finns en skybox för att skapa illusionen av en stjärnhimmel.

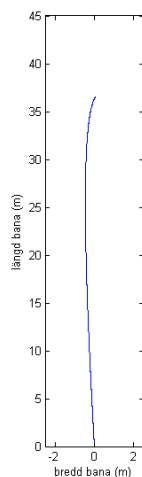
5 Resultat

5.1 Matlabsimulering

Valda konstanter för samtliga beräkningar finns i bilaga A, *Konstanter och värden*. Mått på banan finns i bilaga B, *Mått och bild på curlingstenens bana*. Friktionskonstanter har tagits fram utifrån riktlinjer tagna från angivna referenser där ungefärliga värden beräknats fram genom experiment. De slutgiltiga värdena har tagits fram genom egna undersökningar utifrån de matematiska modellerna för att få fram ett rimligt förhållande mellan utslagshastighet, utslagsvinkel och kurva.



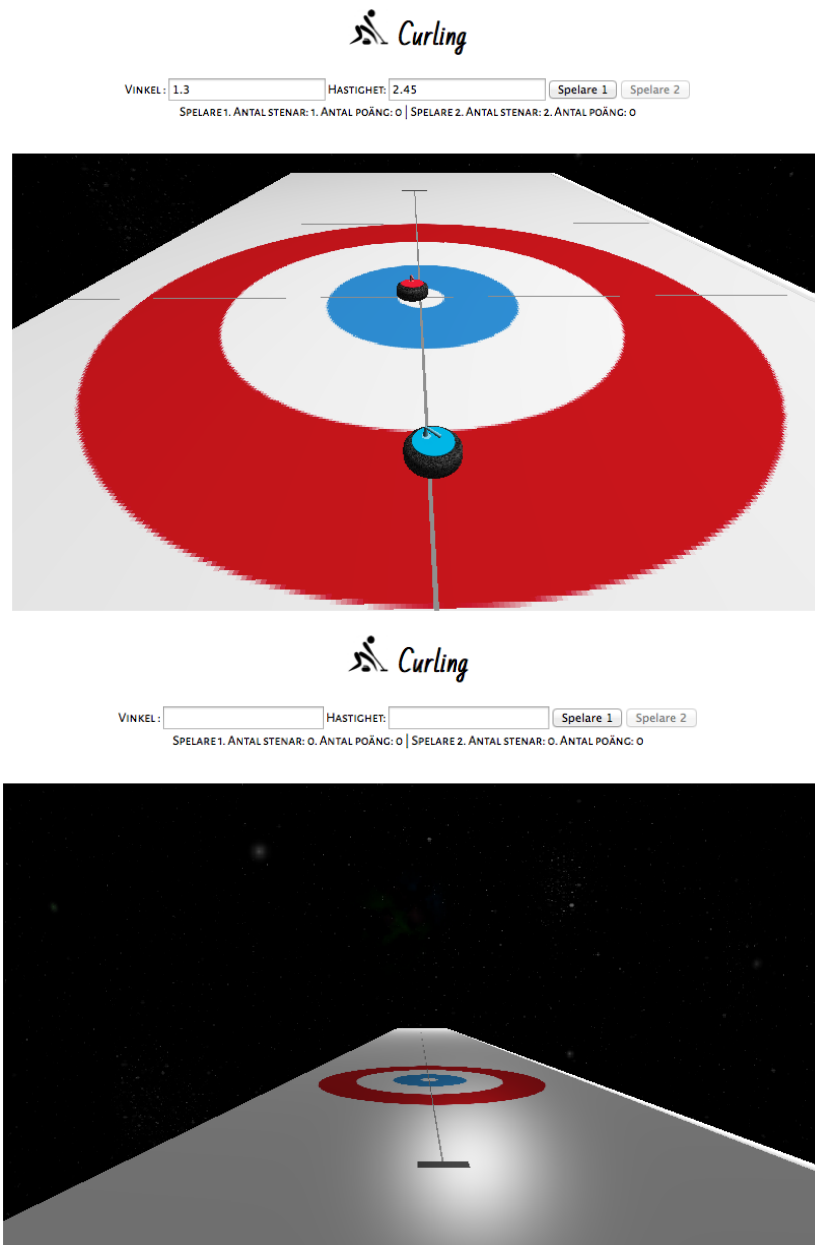
Figur 7: *t.v* Hastigheter i färdriktning och i sidled som funktion av tid. *t.h* Vinkelhastighet som funktion av tid



Figur 8: Hur en curlingstens svängning kan se ut med utslagsvinkeln 3° och utslagsfart 2.3

5.2 Grafisk simulering

Resultatet av projektet blev en curlingsimulering, i form av ett spel, i webbläsaren. Det grafiska gränssnittet ser ut enligt följande:



Figur 9: Bilder från spelet.

6 Diskussion

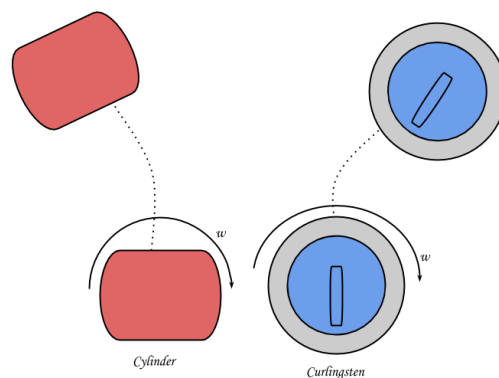
6.1 Numeriska metoder

Vid beräkningarna har två typer av numeriska metoder använts: Eulermetoden och Runge-Kutta-metoden. Runge-Kutta-metoden används vid beräkningen av de nya skalärerna, fart framåt, fart sidled och vinkelhastighet. Vid implementationen testades både Eulermetoden och Runge-Kutta-metoden. För Euler genomfördes beräkningarna med en steglängd på ca. 0.04 sekunder. Slutligen valdes Runge-Kutta-metoden då detta gör att beräkningarna blir med noggranna och stabila. Däremot har ingen större skillnad märkts av i den visuella simuleringen. Sannolikt beror detta på att Eulermetoden var relativt exakt på grund av den korta steglängden.

Vid uträkning av stenens nya position användes Eulermetoden. Detta gjordes av två orsaker: positionen beräknas enligt en steglängd längs en vektor i två dimensioner och det är därför implementeringsmässigt enklare och mindre beräkningstungt att använda Euler. I annat fall hade vektorn delats upp i flera komponenter och vinningen i det hade varit mindre än problemen som kommer med de tyngre beräkningarna.

6.2 Fysik

Curlingens fysik har varit fokus för ett antal vetenskapliga undersökningar på grund av den speciella sväng (curl) som curlingstenen gör. Det som har förundrat fysikerna är att curlingstenen svänger åt motsatt håll från vad som är standard för andra objekt på andra underlag som kan ses i Figur 10. Teorierna är inte helt överens om varför den svänger som den gör, men en gemensam nämnare är att stenen har en högre friktion bak än fram. På grund av detta har det inte varit helt trivialt hur curlingstenens fysikalska egenskaper ska implementeras, exempelvis gällande konstanter.



Figur 10: Visar svängningen för en cylinder och en curlingsten.

7 Att köra simuleringen

Öppna filen *index.html* i Firefox. Simuleringen fungerar bäst i denna webbläsare då sidan är utvecklad mot Firefox. När sidan är laddad har spelaren möjligheter att röra sig i världen med hjälp av piltangenterna samt tangenterna E och D för att titta upp och ned. Spelare kan själva skjuta iväg en sten genom att bestämma utslagsvinkel och utslagsfart. Det går även att sopa, och därmed minska friktionen, med hjälp av att hålla in tangenten S . Sopningen påverkar enbart den sten som man senast skickade ut för enkelhetens skull.

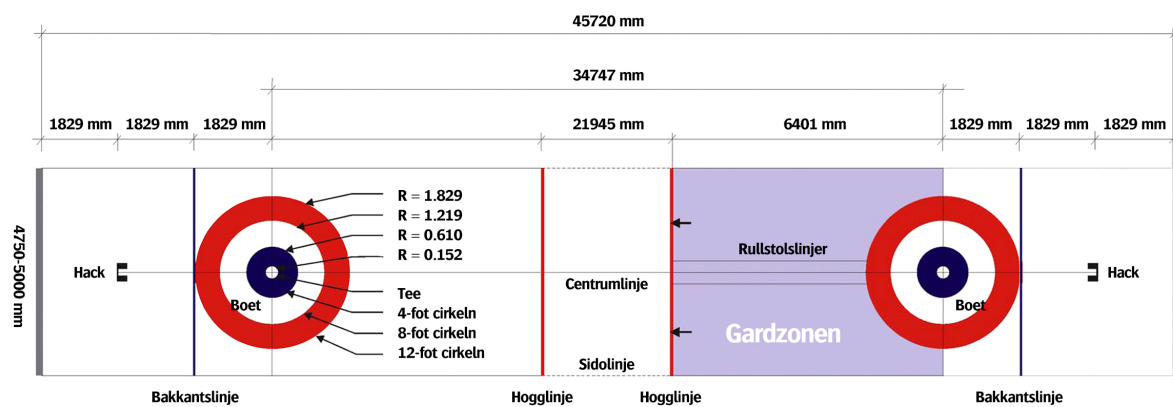
A

Konstanter och värden

benämning	förklaring	värde
fysikaliska data		
g	gravitationskonstanten	9.82 m/s^2
μ	friktionskonstant	0.0073
c_1	friktionskonstant fram	0.000001
c_2	friktionskonstant bak	0.0001
curlingstenen		
m	massa	18 kg
r	radie sten	0.1454676 m
r_{inner}	radie kontaktband	0.06 m

B

Mått och bild på curlingstenens bana



Figur 11: Mått på en curlingbana