Projektrapport Grupp 3
Curling
TNM085 Modelleringsprojekt

Linnéa Mellblom
Linnea Malcherek
Julia Nilsson
Michael Nilsson
Linnéa Nåbo

12 mars 2014

Innehåll

1 Introduktion

Curling är ett intressant system att modellera eftersom det innefattar många vedertagna fysikaliska egenskaper men även delar som inte är särskilt triviala. De senaste åren har ett flertal vetenskapliga artiklar publicerats som ger sin förklaring till svängningsfenomenet, den så kallade "curlen" hos curlingstenen. Gemensamt för artiklarna är hypotesen om att svängningen på curlingstenen beror på en högre friktion bak på stenen än den fram. Förklaringen till varför detta är så, har uppdagats det senaste året.. bla bla bla

1.1 Begränsningar och förenklingar

Denna rapport behandlar modellbygge och simulering av en curlingstens translation och rotation, friktionens påverkan samt kollision mellan curlingstenar. Curlingstenarna i beräkningarna har samma massa och därmed kan beräkningar förenklas genom att förkortta bort massan. I spelet använder man sig även av sopning för att påverka stenens bana över isen, detta behandlas endast ytligt i denna rapport.

2 Fysikalisk beskrivning

2.1 Translation

I beräkningarna av stenens rörelse har hänsyn tagits till tre påverkande friktionskrafter (Figur 1): Kraft i riktning motsatt stenens rörelseriktning, samt två krafter i ortogonal riktning mot denna (1). Dessa två krafter utgörs av friktionskrafterna i främre delen av stenen samt i den bakre delen. Differensen mellan dessa två krafter är vad som påverkar stenens curl (svängning).

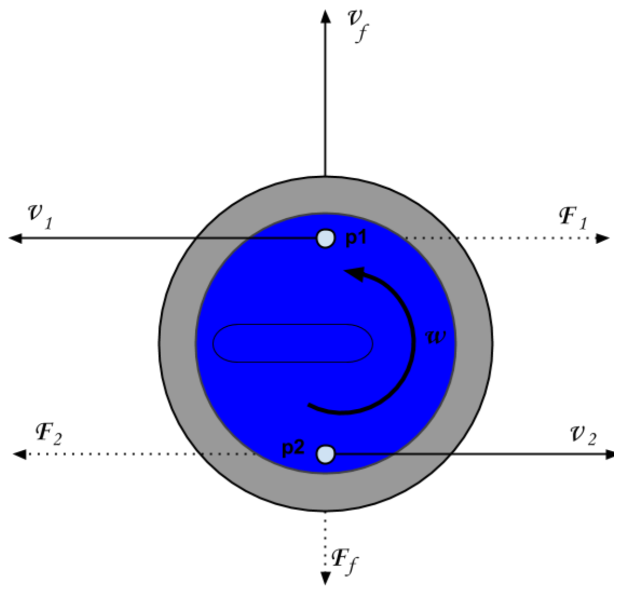
$$\bar{F_t} = \bar{F_f} + \bar{F_b} + \bar{F} \tag{1a}$$

$$\bar{F_f} < \bar{F_b} \tag{1b}$$

2.1.1 Friktionens påverkan

I kontaktytan mellan isen och curlingstenen uppstår friktion. Friktionens påverkan avgörs av stenens kontaktyta samt isens egenskaper. Isen påverkas i sin tur av temperatur och luftfuktighet. Före spel prepareras isen genom såkallad pebbling då vattendroppar sprids ut över isen och skapar en mindre glatt struktur. Vid sopning värms isen upp och en tunn vattenhinna skapas framför stenen. Detta gör så att friktion mellan sten och is minskar och därmed går stenen längre vid sopning.

Stenens curl beror på att friktionen i den bakre delen (3) av stenen är högre än i den främre (2). En curlingsten har en kontaktyta mot isen bestående av ett tunt band (ca 5mm brett) som har en något ojämn yta, så kallad scratchad yta. När den främre halvan av stenen rör sig över den pebblade isen orsakas ett spår i isen i stenens rörelseriktning



Figur 1: Påverkan av stenens translation

med en liten vinkel i rotationsriktningen. Då den bakre delen av bandet passerar samma yta ska bandets scratchade yta passera dessa spår, vilka då ligger i nästan rätvinklig riktning från bandets färdriktning, (Figur 2). Det innebär att den bakre delen av stenen får ett högre motstånd, en högre friktionskraft, än den främre (4) [1].

$$F_1 = ma_1 = \mu_1 mg \Rightarrow a_1 = \mu_1 g \tag{2}$$

$$F_2 = ma_2 = \mu_2 mg \Rightarrow a_2 = \mu_2 g \tag{3}$$

$$\mu_2 > \mu_1 \tag{4}$$

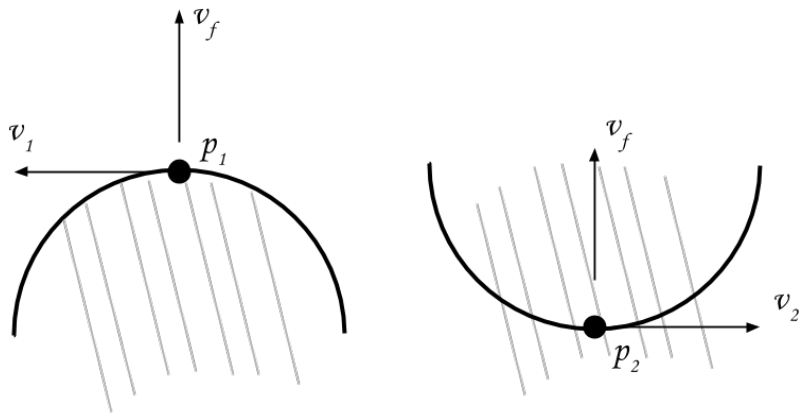
Den vattenhinna som skapas vid sopning för med sig att de spår som den främre delen av stenen åstadkommer minskar och därmed även dess effekt på den bakre delen av stenen. Därmed gör sopning att stenen curlar mindre. Friktionen i punkterna längs bandet påverkas av av stenens rörelse framåt (5) [2].

$$\mu = \frac{c}{\sqrt{v}} \Rightarrow a = \frac{cg}{\sqrt{v}} \tag{5}$$

c = konstant, g = gravitation, v = hastighet

[1] H. Nyberg, S. Alfredson, S. Hogmark, S. Jacobson, *The asymmetrical friction mechanism that puts the curl in the curling stone* (2013), Tribomaterials Group, Department of Engineering Sciences, Uppsala University, SE-751 21 Uppsala, Sweden

[2] A. Raymond Penner, *The physics of sliding cylinders and curling rocks* (2001), American Journal of Physics **69**, American Association of Physics Teachers



Figur 2: Friktion i punkt bak respektive fram på stenen. Den bakre delen måste passera de spår framsidan av stenen skapat, vilket leder till högre friktion.

2.1.2 Resulterande translation

Translationen av stenen är en resulterande hastighetsvektor v, som består av hastigheten i rörelseriktningen samt av hastigheten i punkterna längs det ringformade band stenen roterar på. Dessa hastigheter kan sammanställas till resultanten i den främre delen av stenen i punkt p_1 och den bakre i punkt p_2, (Figur 1). Hastighetens komponenter kan då beskrivas enligt (6)

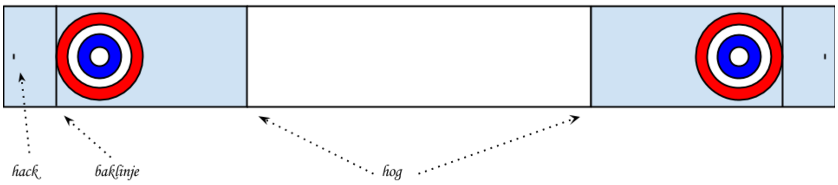
$$\bar{v_s} = \bar{v_1} + \bar{v_2} \tag{6a}$$
$$\bar{v} = \bar{v_f} + \bar{v_s} \tag{6b}$$

2.2 Rotation

Stenen har även en roterande rörelse med en vinkelhastighet vars ursprungsvärde beräknas utifrån utslagshastigheten av stenen. Vid utslaget antas att spelaren håller stenen så att handtaget pekar i en riktning 90°från riktning framåt antingen med inhand eller outhand och släpper stenen med handtaget pekande rakt fram vid hoglinjen. Detta innebär att stenen roterar 90°under den tid det tar för spelaren att ta sig mellan hack och hog, vilket är direkt kopplat till den angivna utslagshastigheten.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2t_0} \tag{7}$$

Friktionen som påverkar rotationshastigheten är summan av all friktion som påverkar bandet som stenen roterar på. Detta kan sammanfattas till friktionen i de två punkterna, p1 och p2 på stenen. Accelerationen på stenens rotation kan därmed beräknas som accelerationen i de två punkterna.



Figur 3: Curlingbanan

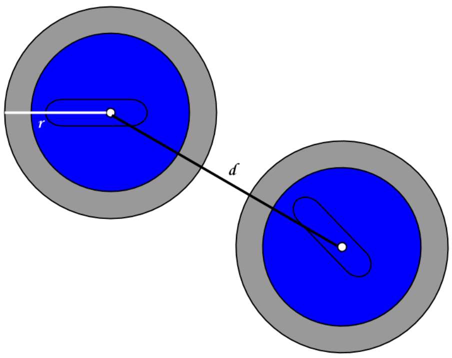
$$\alpha_{rot} = -\frac{(a_1 + a_2)}{r} = -\frac{(\mu_1 g + \mu_2 g)}{r} = -g\frac{c_1 + c_2}{r\sqrt{v_f}} \tag{8}$$

2.3 Kollision

För att kontrollera att en kollision sker beräknas avståndet mellan stenarnas position (9). Om avståndet mellan stenarnas mittpunkter är mindre än två radier (9b) har stenarna krockat (eftersom krocken bara sker i 2 dimensioner).

$$d = \sqrt{(sten_{1_{xpos}} - sten_{2_{xpos}})^2 + (sten_{1_{ypos}} - sten_{2_{ypos}})^2} \tag{9a}$$

$$d \leq 2r \tag{9b}$$



Figur 4: Kontrollera kollision

Hastigheten av curlingstenarna efter en kollision beräknas med hjälp av de två stenarnas position och hastighetsvektorer. Beräkningarna utgår ifrån en rak central stöt i krockens normalriktning, där det finns två givna ekvationer (10) och (11) för att ta fram hastigheten efter krock. Med hjälp av stötkoefficienten e (10) kan stöten regleras mellan en helt elastikt krock (e=1) och en helt inelastiskt krock (e=0). I curling är det rimligt med en energiförlust och en inelastisk stöt bör därmed tas i beräkning. Stötkoefficienten är kvoten av den relativa hastigheten efter kollision och den relativa hastigheten före kollision enligt (10)[3].

Eftersom det ej finns en specificerad stötkoefficient för curlingstenarnas material (granit) har en stötkoefficient uppskattats till 0.3 genom simuleringar.

$$e = \frac{v_2'' - v_1''}{v_2' - v_1'} \tag{10a}$$

$$0 \leq e \leq 1 \tag{10b}$$

Oavsett om krocken är inelastisk eller elastisk, gäller lagen om rörelsemängdens bevarande.

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1'' + m_2 v_2'' \Rightarrow \tag{11a}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \tag{11b}$$

$$v_1' + v_2' = v_1'' + v_2'' \tag{11c}$$

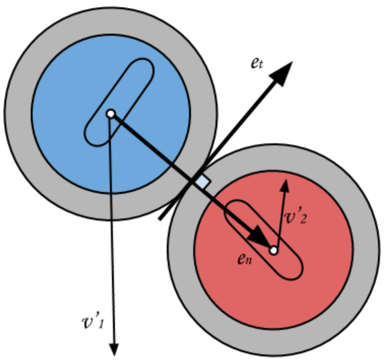
[3]R. Grahn, P-Å. Jansson *Dynamik*, Studentlitteratur (1995), s. 334-345

Hastigheterna delas upp i en normal- och tangentkomponent genom att projicera hastighetsvektorn på krocknormalen (12) och tangentnormalen. Hastighetsvektorn delas upp i dessa komponenter eftersom energiförlusten enbart sker i normalkomponentens riktning. Genom att addera tangentkomponenten med normalkomponenten efter energiförlust, kan sneda krockar hanteras.

$$e_n = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \tag{12}$$

Där P_1 och P_2 är stenarnas position. Tangentnormalen är ortogonal mot krocknormalen. e_n ses i Figur 5.

$$v_1' = v_{1n}' + v_{1t}' \tag{13}$$
$$v_2' = v_{2n}' + v_{2t}' \tag{14}$$



Figur 5: Kollision med riktningar för hastigheter innan krock där v_1 har högre fart än v_2

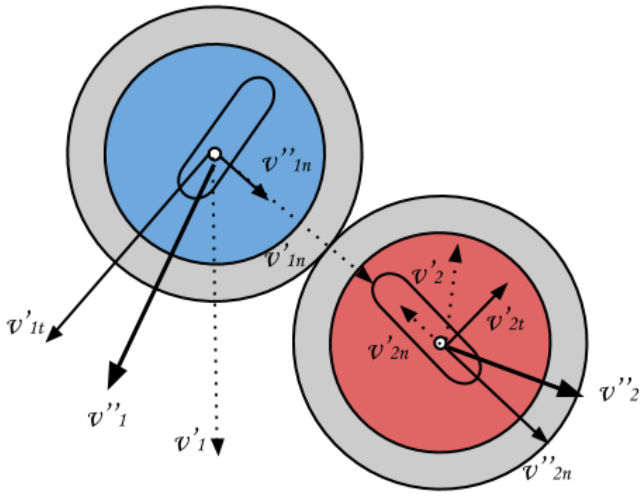
.

Kollisionen räknas ut som en rak central stöt med normalkomponenterna, v_{1n}' och v_{2n}' insatta i ekvation (10) och (11c). Hastigheterna efter krocken löses sedan ut, (15) och (16).

$$v_{1n}'' = \frac{v_{1n}' + v_{2n}' - e(v_{1n}' + v_{2n}')}{2} \tag{15}$$
$$v_{2n}'' = \frac{v_{1n}' + v_{2n}' + e(v_{1n}' + v_{2n}')}{2} \tag{16}$$

För att få den resulterande hastigheten adderas normalkomponenten efter krock med tangentkomponenten. Illustration hittas i Figur 6.

$$v_1'' = v_{1n}'' + v_{1t}' \tag{17}$$
$$v_2'' = v_{2n}'' + v_{2t}' \tag{18}$$



Figur 6: Efter en kollision med normalkomponenterna för hastigheten innan och efter och även den slutgiltiga hastigheten.

.

3 Numerisk

Tre farter beräknas i varje steg av simuleringen: fart i rörelseriktningen, fart i ortogonal riktning som tillför curl samt vinkelhastighet. Dessa beräknas genom Runge-Kutta-metoden enligt (19).

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{19a}$$
$$k_1 = a(v_n) \tag{19b}$$
$$k_2 = a(v_n + \frac{h}{2}k_1) \tag{19c}$$
$$k_3 = a(v_n + \frac{h}{2}k_2) \tag{19d}$$
$$k_4 = a(v_n + hk_3) \tag{19e}$$

Funktionen a för accelerationen för de olika farterna olika beroende på de olika friktionstillstånden enligt (20), (21), (22).

$$a_{fram} = -\mu g \tag{20}$$
$$a_{sida} = g\frac{c_2 - c_1}{\sqrt{v_f}} \tag{21}$$
$$a_{rot} = \alpha_{rot} = -g\frac{c_1 + c_2}{r\sqrt{v_f}} \tag{22}$$

Samtliga tre parametrar (fart framåt, fart i sidled och vinkelhastighet) är skalärer. Efter att nästa värde erhållits genom Runge-Kutta-metoden tas hastigheten i riktning framåt och i sidled fram och de två adderas genom vektoraddition. Ny position av stenen beräknas i sista steget genom Euler-metoden, där hastighetsvektorn anger riktning och steglängd (23).

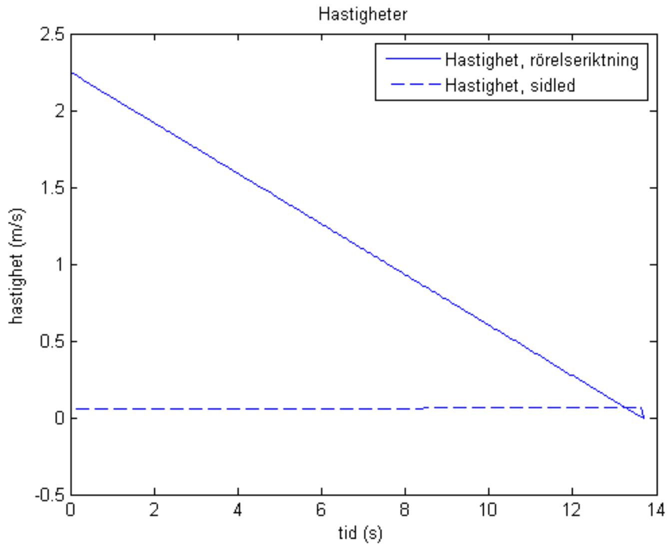
$$pos_{n+1} = pos_n + \bar{v}\Delta t \tag{23}$$

4 Grafisk implementering

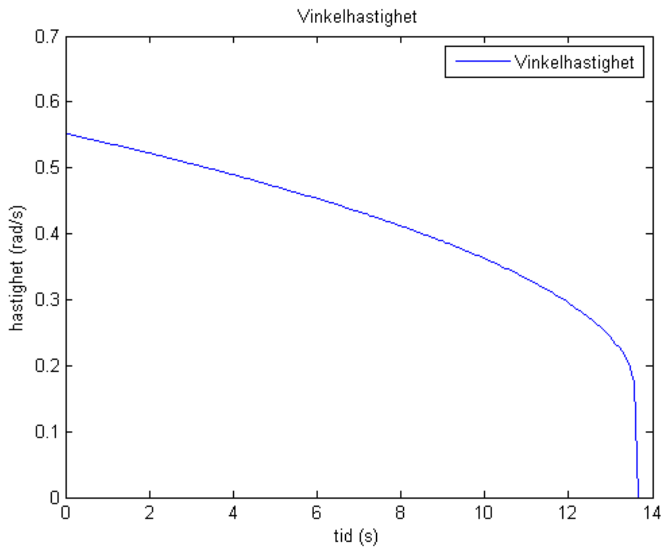
Blender, webGL, blablabla

5 Resultat

Lite grejer från matlab osv. Lagt in lite diverse grafer. Rada upp alla konstanter som används i simuleringen.



Figur 7: Hastigheter i färdriktning och i sidled som funktion av tid.



Figur 8: Vinkelhastighet som funktion av tid.

6 Diskussion

A
Title of Appendix A

Kanske lägga in alla benämningar av konstanter osv.
[1]

Referenser

[1] R. Grahn, P-Å. Jansson *Dynamik*, Studentlitteratur (1995), 334-345

genom roten ur v

Runge Kutta