Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik.

Von A. Einstein.

Die bisher benutzte kovarianten-theoretische Auffassung der elektrodynamischen Gleichungen rührt von Minkowski her. Sie läßt sich wie folgt charakterisieren. Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes bilden einen Sechservektor (antisymmetrischen Tensor zweiten Ranges). Diesem ist ein zweiter Sechservektor, der zum ersten duale, zugeordnet, welcher sich im Spezialfall der ursprünglichen Relativitätstheorie vom ersteren nicht in den Werten der Komponenten, sondern nur in der Art der Zuordnung dieser Komponenten zu den vier Koordinatenachsen unterscheidet. Man erhält die beiden Maxwellschen Gleichungssysteme, indem man die Divergenz des einen dieser Sechservektoren gleich Null, die Divergenz des andern gleich dem Vierervektor des elektrischen Stromes setzt.

Die Einführung des dualen Sechservektors bringt es mit sich, daß diese kovarianten theoretische Darstellung verhältnismäßig unübersichtlich ist. Insbesondere gestaltet sich die Ableitung des Erhaltungssatzes des Impulses und der Energie kompliziert, besonders im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie, welche den Einfluß des Gravitationsfeldes auf das elektromagnetische Feld mitberücksichtigt. Im folgenden wird eine Formulierung gegeben, in welcher durch Vermeidung des Begriffes des dualen Sechservektors eine erhebliche Vereinfachung des Systems erzielt wird. Es wird im folgenden gleich der Fall der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt[1].

§ 1. Die Feldgleichungen.

Es seien ϕ_ν die Komponenten eines kovarianten Vierervektors, des Vierervektors des elektromagnetischen Potentials. Aus ihnen bilden

[1] Meine Arbeit »Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie« (diese Sitzungsberichte XLI, 1914, S. 1030) wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt; der Zusatz »a. a. O.« bedeutet im folgenden stets einen Hinweis auf jene Arbeit.

wir die Komponenten $F_{\varrho\sigma}$ des kovarianten Sechservektors des elektromagnetischen Feldes gemäß dem Gleichungssystem

$$F_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \phi_\varrho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial x_\varrho} \tag{1}$$

ab. Daß $F_{\varrho\sigma}$ wirklich ein kovarianter Tensor ist, folgt aus (28a) a. a. O. Aus (1) folgt, daß das Gleichungssystem

$$\frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial F_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma} = 0 \tag{2}$$

erfüllt ist, welches die natürlichste Formulierung des zweiten Maxwellschen Gleichungssystems (Faradayschen Induktionsgesetzes) darstellt. Zunächst erkennt man, daß (2) ein allgemein kovariantes Gleichungssystem ist; denn es geht aus dem allgemein kovarianten System (1) als Folgerung hervor. Ferner beweist man durch dreimalige Anwendung von (29) a. a. O. auf $F_{\varrho\sigma}$, $F_{\sigma\tau}$, $F_{\tau\varrho}$, indem man die Erweiterung nach den Indizes τ, ρ bzw. σ bildet und die drei so erhaltenen Ausdrücke addiert, wobei man den antisymmetrischen Charakter von $F_{\varrho\sigma}$ in Betracht zieht, daß die linke Seite von (2) ein kovarianter Tensor dritten Ranges ist. Dieser Tensor dritten Ranges ist ein antisymmetrischer; denn aus dem antisymmetrischen Charakter von $F_{\varrho\sigma}$ ergibt sich, daß die linke Seite von (2) eine Änderung des Vorzeichens ohne Wertänderung erleidet, wenn zwei ihrer Indizes vertauscht werden. Das System (2) läßt sich deshalb durch die vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0 \\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

vollkommen ersetzen, welche entstehen, indem man den Indizes $\rho\sigma\tau$ der Reihe nach die Werte 2, 3, 4 bzw. 3 4 1 bzw. 4 1 2 bzw. 1 2 3 gibt.

In dem allgemein geläufigen Spezialfalle des Fehlens eines Gravitationsfeldes hat man zu setzen

$$\left.\begin{aligned}
F_{23} &= \mathfrak{h}_x \qquad & F_{14} &= \mathfrak{e}_x \\
F_{31} &= \mathfrak{h}_y \qquad & F_{24} &= \mathfrak{e}_y \\
F_{12} &= \mathfrak{h}_z \qquad & F_{34} &= \mathfrak{e}_z
\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Dann ergeben die Gleichungen (2a) die Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2b}$$

Man kann die letzteren Gleichungen auch im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie beibehalten, wenn man an den Definitionsgleichungen (3) festhält, d. h. wenn man den Sechservektor $(\mathfrak{e}, \mathfrak{h})$ als kovarianten Sechservektor behandelt.

Bezüglich des ersten Maxwellschen Gleichungssystems bleiben wir bei der Verallgemeinerung des Minkowskischen Schemas, die in § 11 der mehrfach zitierten Arbeit dargelegt ist. Wir führen den kovarianten V-Sechservektor

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \tag{4}$$

ein und verlangen, daß die Divergenz dieses kontravarianten Sechservektors dem kontravarianten V-Vierervektor $\mathfrak{J}^{\mu}$ der elektrischen Vakuumstromdichte gleich sei:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mathfrak{J}^{\mu}. \tag{5}$$

Daß dies Gleichungssystem wirklich dem ersten Maxwellschen System äquivalent ist, erkennt man, indem man die $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ gemäß (4) im Falle der speziellen Relativitätstheorie berechnet, in welchem die $g_{\mu\nu}$ die Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

besitzen. Für diesen Spezialfall erhält man aus (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}^{23} &= \mathfrak{h}_x & \mathfrak{F}^{14} &= -\mathfrak{e}_x \\ \mathfrak{F}^{31} &= \mathfrak{h}_y & \mathfrak{F}^{24} &= -\mathfrak{e}_y \\ \mathfrak{F}^{12} &= \mathfrak{h}_z & \mathfrak{F}^{34} &= -\mathfrak{e}_z \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Setzt man außerdem

$$\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{i}_x, \quad \mathfrak{J}^2 = \mathfrak{i}_y, \quad \mathfrak{J}^3 = \mathfrak{i}_z, \quad \mathfrak{J}^4 = \rho, \tag{7}$$

so nimmt (5) die geläufige Form an

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} &= \mathfrak{i} \\ \operatorname{div} \mathfrak{e} &= \rho \end{aligned}\right\}. \tag{5b}$$

Im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie gelten zwar ebenfalls Gleichungen von der Form (5b). Doch sind die (dreidimensionalen) Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ nicht mehr dieselben wie in (2b). Man hätte vielmehr zwei neue Vektoren $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{h}'$ einzuführen, die mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ in dem im allgemeinen ziemlich komplizierten Zusammenhange stehen, der durch Gleichung (4) bestimmt ist.

Zusammenfassend bemerken wir, daß die neue Verallgemeinerung des Maxwellschen Systems, welches von der früher gegebenen nur der Form, nicht aber dem Inhalte nach abweicht, durch die Gleichungen (2), (4) und (5) vollständig gegeben ist.

§ 2. Ponderomotorische Kraft und Impuls-Energiesatz[1].

Wir bilden durch innere Multiplikation des kovarianten Sechservektors $F_{\sigma\mu}$ des elektromagnetischen Feldes und des V-Vierervektors der $\mathfrak{J}^\mu$ elektrischen Stromdichte den kovarianten V-Vierervektor

$$\mathfrak{K}_\sigma = \sum_\mu F_{\sigma\mu}\mathfrak{J}^\mu. \tag{8}$$

Seine Komponenten lauten gemäß (3) in üblicher dreidimensionaler Schreibweise

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= \rho\mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x \\
\mathfrak{K}_2 &= \rho\mathfrak{e}_y + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_y \\
\mathfrak{K}_3 &= \rho\mathfrak{e}_z + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_z \\
\mathfrak{K}_4 &= -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}).
\end{aligned}$$

Es ist also $\mathfrak{K}_\sigma$ für das elektromagnetische Feld gerade derjenige V-Vektor, der in Gleichung (42a) a. a. O. als Vierervektor der Kraftdichte eingeführt ist. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ sind die negativ genommenen Komponenten des pro Volumen- und Zeiteinheit von den elektrischen Massen auf das elektromagnetische Feld übertragenen Impulses; $\mathfrak{K}_4$ ist die pro Volumen- und Zeiteinheit auf das Feld übertragene Energie.

Um nun die Komponenten $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ des Energietensors des elektromagnetischen Feldes zu erhalten, brauchen wir nur mit Hilfe der Gleichung (7) und der Feldgleichungen die der Gleichung (42a) a. a. O. entsprechende Gleichung für unseren Fall zu bilden. Aus (7) und (5) ergibt sich zunächst

$$\mathfrak{K}_\sigma = \sum_{\mu\nu} F_{\sigma\mu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sum\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}) - \sum\mathfrak{F}^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

[1] Eine andere Behandlung desselben Gegenstandes verdanken wir H. A. Lorentz (Koninkl. Akad. van Wetensch. 1915, XXIII, S. 1085).

Das zweite Glied der rechten Seite läßt vermöge (2) die Umformung zu

$$\sum \mathfrak{F}^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}\sum \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

welch letzterer Ausdruck aus Symmetriegründen auch in der Form

$$-\frac{1}{4}\sum\left[\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right]$$

geschrieben werden kann. Dafür aber läßt sich schreiben

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}\sum F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right).$$

Das erste dieser beiden Glieder lautet in kürzerer Schreibweise

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum\mathfrak{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right),$$

das zweite ergibt nach Ausführung der Differenziation nach einiger Umformung

$$-\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{8}\sum\mathfrak{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g^{\rho\tau}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Nimmt man endlich alle vier berechneten Glieder zusammen, so erhält man die Relation

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{T}_\tau^\nu = \mathfrak{K}_\sigma. \qquad (8a)$$

wobei

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sum_{\alpha\beta}\left(-\mathfrak{F}^{\nu\alpha}F_{\sigma\alpha}+\frac{1}{4}\mathfrak{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\delta_\sigma^\nu\right) \qquad (9)$$

gesetzt ist. δ_σ^ν ist der gemischte Tensor, dessen Komponenten gleich 1 bzw. gleich 0 sind, je nachdem $\sigma = \nu$ oder $\sigma = n$ ist. Der Vergleich von Gleichung (8a) mit Gleichung (42a) a. a. O. zeigt, daß (8a) die Impuls-Energiegleichung für das elektromagnetische Feld ist, wobei die Komponenten des Energietensors durch (9) gegeben sind. Mit Hilfe von (3) und (6) erkennt man leicht, daß der so gefundene Energietensor des elektromagnetischen Feldes mit demjenigen der früheren Theorie übereinstimmt; doch ist die nun gefundene Form eine übersichtlichere als bei der bisherigen Behandlungsweise des Gegenstandes.