Eine Ableitung des Theorems von Jacobi.

Von A. Einstein.

Bekanntlich lassen sich die kanonischen Gleichungen der Dynamik

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

wobei H im allgemeinsten Falle eine Funktion der Koordination q_i, der Impulse p_i und der Zeit t ist, nach Hamilton-Jacobi dadurch integrieren, daß man eine Funktion J der q_i und der Zeit t als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \bar{H} = 0 \tag{3}$$

bestimmt. Dabei entsteht $\bar{H}$ aus H, indem man in H die p_i durch die Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial q_i}$ ersetzt. Ist J ein vollständiges Integral dieser Gleichungen mit den Integrationskonstanten α_i, so wird das System (1), (2) der kanonischen Gleichungen allgemein integriert durch die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{5}$$

Daß die Erfüllung von (3), (4) und (5) zur Folge hat, daß den kanonischen Gleichungen (1), (2) Genüge geleistet wird, wird in allen eingehenderen Lehrbüchern der Dynamik durch Rechnung verifiziert. Hingegen ist mir kein naturgemäßer, von überraschenden Kunstgriffen freier Weg bekannt, um von den kanonischen Gleichungen zu dem Hamilton-Jacobischen System (3), (4), (5) zu gelangen. Ein solcher ist im folgenden gegeben.

Gebe ich für eine bestimmte Zeit t_0 den Koordinaten q_i^0 und die zugehörigen Impulse p_i^0 des Systems, so ist dessen Bewegung durch

(1) und (2) bestimmt. Ich stelle diese Bewegung dar als Bewegung eines Punktes im n-dimensionalen Koordinatenraum der q_i. Denke ich mir zur Zeit t_0 für alle Punkte (q_i) des Koordinatenraums die Impulse p_i^0 von den Gleichungen (1) und (2) entsprechenden Systemen gegeben, derart, daß die p_i^0 stetige Funktionen der q_i sind, so ist durch diese Anfangsbedingung die Bewegung all dieser Punkte vermöge (1) und (2) bestimmt. Wir nennen den Inbegriff all dieser Bewegungen ein »Strömungsfeld«.

Statt nun dieses Strömungsfeld im Sinne von (1) und (2) so zu beschreiben, daß ich Koordinaten und Impulse jedes Systempunktes in Funktion der Zeit gegeben denke, kann ich auch den durch die p_i gemessenen Bewegungszustand an jeder Stelle (q_i) als Funktion der Zeit t gegeben denken, so daß die q_i und t als unabhängige Variable anzusehen sind. Beide Darstellungsweisen entsprechen genau denjenigen in der Hydrodynamik, welche den »LAGRANGEschen« bzw. »EULERschen« Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten zugrunde liegen.

Im Sinne der zweiten Darstellungsweise habe ich die linke Seite von (1) durch

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial p_i}{\partial q_\nu} \frac{d q_\nu}{d t}$$

zu ersetzen, wofür gemäß (2)

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}$$

gesetzt werden kann. Es gilt also gemäß (1) das Gleichungssystem

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial q_\nu} = 0\,. \qquad (6)$$

Die $\frac{\partial H}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ sind bekannte Funktionen der q_i, der p_i und der Zeit t. Es ist also (6) das System von partiellen Differentialgleichungen, denn die Komponenten p_i des Impulsvektors des Strömungsfeldes genügen.

Es liegt nun die Frage nahe, ob es Strömungsfelder gibt, in welchen der Impulsvektor ein Potential besitzt, so daß den Bedingungen genügt ist

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \qquad (7)$$

$$p_i = \frac{\partial J}{\partial q_i}\,. \qquad (7a)$$

Ist (7) erfüllt, so nimmt (6) die Form an

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial q_i}\right) = 0 .$$

Das zweite Glied ist die vollständige Ableitung von H nach der Koordinate q_i. Bezeichnet man mit $\overline{H}$ diejenige Funktion der q_i und der Zeit t, welche aus H entsteht, wenn in H die p_i durch die q_i und t ausgedrückt werden, so hat man also

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_i} = 0 ,$$

oder, indem man gemäß (7a) die Potentialfunktion J einführt,

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial J}{\partial t} + \overline{H}\right) = 0 .$$

Man genügt diesen Gleichungen, indem man für J die Differentialgleichung

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \overline{H} = 0$$

vorschreibt, welche nichts anderes ist als die Hamiltonsche Gleichung (3). Sie löst in Verbindung mit (7a) die Gleichungen (6) des Strömungsfeldes.

Zu den Gleichungen (5) aber gelangen wir auf folgende Art. Ist J ein vollständiges Integral mit den willkürlichen Konstanten α_i, so muß (3) gültig bleiben, wenn man in J α_i durch $\alpha_i + d\alpha_i$ ersetzt. Es muß also gelten

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial^2 J}{\partial q_\nu \partial \alpha_i} = 0 .$$

Dafür kann man wegen (2) schreiben

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum \frac{dq_\nu}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\nu}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}\right) = 0 .$$

Der eingeklammerte Operator ist aber mit dem Operator $\left(\frac{d}{dt}\right)$ identisch, eine zeitliche Ableitung im Sinne der »Lagrangeschen« Beschreibungsweise. Es bleibt also $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$ für ein System während dessen Bewegung konstant, und es gilt daher für die Bewegung eines Systempunktes ein Gleichungssystem von der Form (5).