HAMILTONsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie.

Von A. EINSTEIN.

In letzter Zeit ist es H. A. LORENTZ und D. HILBERT gelungen[1], der allgemeinen Relativitätstheorie dadurch eine besonders übersichtliche Gestalt zu geben, daß sie deren Gleichungen aus einem einzigen Variationsprinzipe ableiteten. Dies soll auch in der nachfolgenden Abhandlung geschehen. Dabei ist es mein Ziel, die fundamentalen Zusammenhänge möglichst durchsichtig und so allgemein darzustellen, als es der Gesichtspunkt der allgemeinen Relativität zuläßt. Insbesondere sollen über die Konstitution der Materie möglichst wenig spezialisierende Annahmen gemacht werden, im Gegensatz besonders zur HILBERTschen Darstellung. Anderseits soll im Gegensatz zu meiner eigenen letzten Behandlung des Gegenstandes die Wahl des Koordinatensystems vollkommen freibleiben.

§ 1. Das Variationsprinzip und die Feldgleichungen der Gravitation und der Materie.

Das Gravitationsfeld werde wie üblich durch den Tensor[2] der $g_{\mu\nu}$ (bzw. $g^{\mu\nu}$) beschrieben, die Materie (inklusive elektromagnetisches Feld) durch eine beliebige Zahl von Raum-Zeitfunktionen $q_{(\varrho)}$, deren invariantentheoretischer Charakter für uns gleichgültig ist. Es sei ferner $\mathfrak{H}$ eine Funktion der

$$g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) \text{ und } g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right), \text{ der } q_{(\varrho)} \text{ und } q_{(\varrho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\varrho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

Dann liefert uns das Variationsprinzip

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0 \qquad (1)$$

[1] Vier Abhandlungen von H. A. LORENTZ in den Jahrgängen 1915 und 1916 d. Publikationen d. Koninkl. Akad. van Wetensch. te Amsterdam; D. HILBERT, Gött. Nachr. 1915. Heft 3.

[2] Von dem Tensorcharakter der $g_{\mu\nu}$ wird vorläufig kein Gebrauch gemacht.

so viele Differentialgleichungen, wie zu bestimmende Funktionen $g_{\mu\nu}$ und $q_{(\varrho)}$ vorhanden sind, wenn wir festsetzen, daß die $g^{\mu\nu}$ und $q_{(\varrho)}$ abhängig voneinander zu variieren sind, und zwar derart, daß an den Integrationsgrenzen die $\delta q_{(\varrho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ und $\frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ alle verschwinden.

Wir wollen nun annehmen, daß $\mathfrak{H}$ in den $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ linear sei, und zwar derart, daß die Koeffizienten der $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ nur von den $g^{\mu\nu}$ abhängen. Dann kann man das Variationsprinzip (1) durch ein für uns bequemeres ersetzen. Durch geeignete partielle Integration erhält man nämlich

$$\int \mathfrak{H} d\tau = \int \mathfrak{H}^* d\tau + F, \tag{2}$$

wobei F ein Integral über die Begrenzung des betrachteten Gebietes bedeutet, die Größe $\mathfrak{H}^*$ aber nur mehr von den $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $q_{(\varrho)}$, $q_{(\varrho)\alpha}$, aber nicht mehr von den $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ abhängt. Aus (2) ergibt sich für solche Variationen, wie sie uns interessieren

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathfrak{H}^* d\tau\right\}, \tag{3}$$

so daß wir unser Variationsprinzip (1) ersetzen dürfen durch das bequemere

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}^* d\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

Durch Ausführung der Variation nach den $g^{\mu\nu}$ und nach den $q_{(\varrho)}$ erhält man als die Feldgleichungen der Gravitation und der Materie die Gleichungen[1]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\varrho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\varrho)}} = 0. \tag{5}$$

§ 2. Sonderexistenz des Gravitationsfeldes.

Wenn man über die Art und Weise, wie $\mathfrak{H}$ von den $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $q_{(\varrho)}$, $q_{(\varrho)\alpha}$ abhängt, keine spezialisierende Voraussetzung macht, können die Energiekomponenten nicht in zwei Teile gespalten werden, von denen der eine zum Gravitationsfelde, der andere zu der Materie gehört. Um diese Eigenschaft der Theorie herbeizuführen, machen wir folgende Annahme

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

[1] Zur Abkürzung sind in den Formeln die Summenzeichen weggelassen. Es ist über diejenigen Indizes stets summiert zu denken, welche in einem Gliede zweimal vorkommen. In (4) bedeutet also z. B. $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)$ den Term $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)$.

wobei $\mathfrak{G}$ nur von den $g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{\sigma}, g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $\mathfrak{M}$ nur von $g^{\mu\nu}, q_{(\varrho)}, q_{(\varrho)\alpha}$ abhänge. Die Gleichungen (4), (4a) nehmen dann die Form an

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\varrho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\varrho)}} = 0. \tag{8}$$

Dabei steht $\mathfrak{G}^*$ zu $\mathfrak{G}$ in derselben Beziehung wie $\mathfrak{H}^*$ zu $\mathfrak{H}$.

Es ist wohl zu beachten, daß die Gleichungen (8) bzw. (5) durch andere zu ersetzen wären, wenn wir annehmen würden, daß $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{H}$ noch von höheren als den ersten Ableitungen der $q_{(\varrho)}$ abhängig wären. Ebenso wäre es denkbar, daß die $q_{(\varrho)}$ nicht als voneinander unabhängig, sondern als durch Bedingungsgleichungen miteinander verknüpft aufzufassen wären. All dies ist für die folgenden Entwicklungen ohne Bedeutung, da letztere allein auf die Gleichungen (7) gegründet sind, welche durch Variieren unseres Integrals nach den $g^{\mu\nu}$ gewonnen sind.

§ 3. Invariantentheoretische bedingte Eigenschaften der Feldgleichungen der Gravitation.

Wir führen nun die Voraussetzung ein, daß

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

eine Invariante sei. Damit ist der Transformationscharakter der $g_{\mu\nu}$ festgelegt. Über den Transformationscharakter der die Materie beschreibenden $q_{(\varrho)}$ machen wir keine Voraussetzung. Hingegen seien die Funktionen $H = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$ sowie $G = \frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ und $M = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$ Invarianten bezüglich beliebiger Substitutionen der Raum-Zeitkoordinaten. Aus diesen Voraussetzungen folgt die allgemeine Kovarianz der aus (1) gefolgerten Gleichungen (7) und (8). Ferner folgt, daß G (bis auf einen konstanten Faktor) gleich dem Skalar des Riemannschen Tensors der Krümmung sein muß; denn es gibt keine andere Invariante von den für G geforderten Eigenschaften[1]. Damit ist auch $\mathfrak{G}^*$ und damit die linke Seite der Feldgleichung (7) vollkommen festgelegt[2].

Aus dem allgemeinen Relativitätspostulat folgen gewisse Eigenschaften der Funktion $\mathfrak{G}^*$, die wir nun ableiten wollen. Zu diesem

[1] Hierin liegt es begründet, daß die allgemeine Relativitätsforderung zu einer ganz bestimmten Gravitationstheorie führt.

[2] Man erhält durch Ausführung der partiellen Integration

$$\mathfrak{G}^* = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left[\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right].$$

Zweck führen wir eine infinitesimale Transformation der Koordinaten durch, indem wir setzen

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu\,; \tag{10}$$

die Δx_ν sind beliebig wählbare, unendlich kleine Funktionen der Koordinaten. x'_ν sind die Koordinaten des Weltpunktes im neuen System, dessen Koordinaten im ursprünglichen System x_ν sind. Wie für die Koordinaten gilt für jede andere Größe ψ ein Transformationsgesetz vom Typus

$$\psi' = \psi + \Delta\psi\,,$$

wobei sich $\Delta\psi$ stets durch die Δx_ν ausdrücken lassen muß. Aus der Kovarianteneigenschaft der $g^{\mu\nu}$ leitet man leicht für die $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}_\sigma$ die Transformationsgesetze ab:

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial(\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}\,. \tag{12}$$

Da $\mathfrak{G}^*$ nur von den $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}_\sigma$ abhängt, ist es mit Hilfe von (13) und (14) möglich, $\Delta\mathfrak{G}^*$ zu berechnen. Man erhält so die Gleichung

$$\sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\,\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\,, \tag{13}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$S^\nu_\sigma = 2\,\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}}\, g^{\mu\nu} + 2\,\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}\, g^{\mu\nu}_\alpha + \mathfrak{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu}\, g^{\mu\alpha}_\sigma\,. \tag{14}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ziehen wir zwei für das Folgende wichtige Folgerungen. Wir wissen, daß $\dfrac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ eine Invariante ist bezüglich beliebiger Substitutionen, nicht aber $\dfrac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$. Wohl aber ist es leicht, von letzerer Größe zu beweisen, daß sie bezüglich linearer Substitutionen der Koordinaten eine Invariante ist. Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (13) stets verschwinden muß, wenn sämtliche $\dfrac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ verschwinden. Es folgt daraus, daß $\mathfrak{G}^*$ der Identität

$$S^\nu_\sigma \equiv 0 \tag{15}$$

genügen muß.

Wählen wir ferner die Δx_ν so, daß sie nur im Innern eines betrachteten Gebietes von null verschieden sind, in infinitesimaler Nähe der Begrenzung aber verschwinden, so ändert sich der Wert des in Gleichung (2) auftretenden, über die Begrenzung erstreckten Integrales nicht bei der ins Auge gefaßten Transformation: es ist also

$$\Delta(F) = 0$$

und somit[1]

$$\Delta\left\{\int \mathfrak{G}\, d\tau\right\} = \Delta\left\{\int \mathfrak{G}^* d\tau\right\}.$$

Die linke Seite der Gleichung muß aber verschwinden, da sowohl $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ wie $\sqrt{-g}\,d\tau$ Invarianten sind. Folglich verschwindet auch die rechte Seite. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (14), (15) und (16) zunächst die Gleichung

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \tag{16}$$

Formt man diese durch zweimalige partielle Integration um, so erhält man mit Rücksicht auf die freie Wählbarkeit der Δx_σ die Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Aus den beiden Identitäten (16) und (17), welche aus der Invarianz von $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$, also aus dem Postulat der allgemeinen Relativität hervorgehen, haben wir nun Folgerungen zu ziehen.

Die Feldgleichungen (7) der Gravitation formen wir zunächst durch gemischte Multiplikation mit $g^{\mu\sigma}$ um. Man erhält dann (unter Vertauschung der Indizes σ und ν) die den Feldgleichungen (7) äquivalenten Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = -(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu), \tag{18}$$

wobei gesetzt ist

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \tag{19}$$

$$\mathfrak{t}_\sigma^\nu = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^* \delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\sigma^{\mu\alpha}\right). \tag{20}$$

Der letzte Ausdruck für $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ rechtfertigt sich aus (14) und (15). Durch Differenzieren von (18) nach x_ν und Summation über ν folgt mit Rücksicht auf (17)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu) = 0. \tag{21}$$

[1] Indem wir statt $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ die Größen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ einführen.

Die Gleichung (21) drückt die Erhaltung des Impulses und der Energie aus. Wir nennen $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ die Komponenten der Energie der Materie, $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ die Komponenten der Energie des Gravitationsfeldes.

Aus den Feldgleichungen (7) der Gravitation folgt durch Multiplizieren mit $g_\sigma^{\mu\nu}$ und Summieren über μ und ν mit Rücksicht auf (20)

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (19) und (21)

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

wobei $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ die Größen $g_{\nu\sigma}\mathfrak{T}_\mu^\sigma$ bedeuten. Es sind dies 4 Gleichungen, welchen die Energie-Komponenten der Materie zu genügen haben.

Es ist hervorzuheben, daß die (allgemein kovarianten) Erhaltungssätze (21) und (22) aus den Feldgleichungen (7) der Gravitation in Verbindung mit dem Postulat der allgemeinen Kovarianz (Relativität) allein gefolgert sind, ohne Benutzung der Feldgleichungen (8) für die materiellen Vorgänge.

Ausgegeben am 2. November.