Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag).

Von A. Einstein.

In einer neulich erschienenen Untersuchung[1] habe ich gezeigt, wie auf Riemanns Kovariantentheorie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten eine Theorie des Gravitationsfeldes gegründet werden kann. Hier soll nun dargetan werden, daß durch Einführung einer allerdings kühnen zusätzlichen Hypothese über die Struktur der Materie ein noch strafferer logischer Aufbau der Theorie erzielt werden kann.

Die Hypothese, deren Berechtigung in Erwägung gezogen werden soll, betrifft folgenden Gegenstand. Der Energietensor der »Materie« T_μ^ν besitzt einen Skalar $\sum_\mu T_\mu^\mu$. Es ist wohlbekannt, daß dieser für das elektromagnetische Feld verschwindet. Dagegen scheint er für die eigentliche Materie von Null verschieden zu sein. Betrachten wir nämlich als einfachsten Spezialfall die »inkohärente« kontinuierliche Flüssigkeit (Druck vernachlässigt), so pflegen wir ja für sie zu setzen

$$T^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,\rho_0 \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds},$$

so daß wir haben

$$\sum_\mu T_\mu^\mu = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \rho_0 \sqrt{-g}\,.$$

Hier verschwindet also nach dem Ansatz der Skalar des Energietensors nicht.

Es ist nun daran zu erinnern, daß nach unseren Kenntnissen die »Materie« nicht als ein primitiv Gegebenes, physikalisch Einfaches aufzufassen ist. Es gibt sogar nicht wenige, die hoffen, die Materie auf rein elektromagnetische Vorgänge reduzieren zu können, die allerdings einer gegenüber Maxwells Elektrodynamik vervollständigten Theorie gemäß vor sich gehen würden. Nehmen wir nun einmal an, daß in einer so vervollständigten Elektrodynamik der Skalar des Energietensors ebenfalls verschwinden würde! Würde dann das soeben aufgezeigte Resultat beweisen, daß die Materie mit Hilfe dieser Theorie nicht konstruiert werden könnte? Ich glaube diese Frage verneinen

[1] Diese Sitzungsberichte S. 778.

zu können. Denn es wäre sehr wohl möglich, daß in der »Materie«, auf die sich der eben angegebene Ausdruck bezieht, Gravitationsfelder einen wesentlichen Bestandteil ausmachen. Dann kann $\sum T_\mu^\mu$ für das ganze Gebilde scheinbar positiv sein, während in Wirklichkeit nur $\sum_\mu (T_\mu^\mu + t_\mu^\mu)$ positiv ist, während $\sum_\mu T_\mu^\mu$ überall verschwindet. Wir setzen im folgenden voraus, daß die Bedingung $\sum T_\mu^\mu = 0$ tatsächlich allgemein erfüllt sei.

Wer die Hypothese, daß molekulare Gravitationsfelder einen wesentlichen Bestandteil der Materie ausmachen, nicht von vornherein ablehnt, wird in dem Folgenden eine kräftige Stütze dieser Auffassung sehen[1].

Ableitung der Feldgleichungen.

Unsere Hypothese erlaubt es, den letzten Schritt zu tun, welchen der allgemeine Relativitätsgedanke als wünschbar erscheinen läßt. Sie ermöglicht nämlich, auch die Feldgleichungen der Gravitation in allgemein kovarianter Form anzugeben. In der früheren Mitteilung habe ich gezeigt (Gleichung (13)), daß

$$G_{im} = \sum_l \{il, lm\} = R_{im} + S_{im} \tag{13}$$

ein kovarianter Tensor bezüglich beliebiger Substitutionen ist. Dabei ist gesetzt

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{\varrho l} \begin{Bmatrix} il \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho m \\ l \end{Bmatrix} \tag{13a}$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{\varrho l} \begin{Bmatrix} im \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho l \\ l \end{Bmatrix} \tag{13b}$$

Dieser Tensor G_{im} ist der einzige Tensor, der für die Aufstellung allgemein kovarianter Gravitationsgleichungen zur Verfügung steht.

Setzen wir nun fest, daß die Feldgleichungen der Gravitation lauten sollen

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{16b}$$

so haben wir damit allgemein kovariante Feldgleichungen gewonnen. Diese drücken zusammen mit den vom absoluten Differentialkalkül gelieferten allgemein kovarianten Gesetzen für das »materielle« Geschehen die Kausalzusammenhänge in der Natur so aus, daß irgendwelche besondere Wahl des Koordinatensystems, welche ja logisch mit den zu

[1] Bei Niederschrift der früheren Mitteilung war mir die prinzipielle Zulässigkeit der Hypothese $\sum T_\mu^\mu = 0$ noch nicht zu Bewußtsein gekommen.

beschreibenden Gesetzmäßigkeiten nichts zu tun hat, auch bei deren Formulierung nicht verwendet wird.

Von diesem System aus kann man durch nachträgliche Koordinatenwahl leicht zu dem System von Gesetzmäßigkeiten zurückgelangen, welches ich in meiner letzten Mitteilung aufgestellt habe, und zwar ohne an den Gesetzen tatsächlich etwas zu ändern. Es ist nämlich klar, daß wir ein neues Koordinatensystem einführen können, derart, daß mit Bezug auf dieses überall

$$\sqrt{-g} = 1$$

ist. Dann verschwindet S_{im}, so daß man zu dem System der Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{16}$$

der letzten Mitteilung zurückgelangt. Die vom absoluten Differentialkalkül gelieferten Formeln degenerieren dabei genau in der in der letzten Mitteilung angegebenen Weise. Auch jetzt läßt ferner unsere Koordinatenwahl nur Transformationen von der Determinante 1 zu.

Der Unterschied zwischen dem Inhalte unserer aus den allgemein kovarianten gewonnenen Feldgleichungen und dem Inhalte der Feldgleichungen unserer letzten Mitteilung liegt nur darin, daß in der letzten Mitteilung der Wert für $\sqrt{-g}$ nicht vorgeschrieben werden konnte. Derselbe war vielmehr durch die Gleichung

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\right) = -\varkappa \sum_\sigma T_\sigma^\sigma \tag{21a}$$

bestimmt. Aus dieser Gleichung sieht man, daß dort $\sqrt{-g}$ nur dann konstant sein kann, wenn der Skalar des Energietensors verschwindet.

Bei unserer jetzigen Ableitung ist vermöge unserer willkürlich getroffenen Koordinatenwahl $\sqrt{-g} = 1$. Statt der Gleichung (21a) folgt daher jetzt aus unsern Feldgleichungen das Verschwinden des Skalars des Energietensors der »Materie«. Die unsern Ausgangspunkt bildenden allgemein kovarianten Feldgleichungen (16b) führen also nur dann zu keinem Widerspruch, wenn die in der Einleitung dargelegte Hypothese zutrifft. Dann aber sind wir gleichzeitig berechtigt, unseren früheren Feldgleichungen die beschränkende Bedingung

$$\sqrt{-g} = 1 \tag{21b}$$

zuzufügen.

Ausgegeben am 18. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.