Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

(Vorgelegt am 29. October 1914 [s. oben S. 965].)

In den letzten Jahren habe ich, zum Teil zusammen mit meinem Freunde Grossmann, eine Verallgemeinerung der Relativitätstheorie ausgearbeitet. Als heuristische Hilfsmittel sind bei jenen Untersuchungen in bunter Mischung physikalische und mathematische Forderungen verwendet, so daß es nicht leicht ist, an Hand jener Arbeiten die Theorie vom formal mathematischen Standpunkte aus zu übersehen und zu charakterisieren. Diese Lücke habe ich durch die vorliegende Arbeit in erster Linie ausfüllen wollen. Es gelang insbesondere, die Gleichungen des Gravitationsfeldes auf einem rein kovarianten-theoretischen Wege zu gewinnen (Abteilung D). Auch suchte ich einfache Ableitungen für die Grundgesetze des absoluten Differentialkalkuls zu geben, die zum Teil neu sein dürften (Abteilung B), um dem Leser ein vollständiges Erfassen der Theorie ohne die Lektüre anderer, rein mathematischer Abhandlungen zu ermöglichen. Um die mathematischen Methoden zu illustrieren, habe ich die (Eulerschen) Gleichungen der Hydrodynamik und die Feldgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper abgeleitet (Abteilung C). Im Abschnitt E ist gezeigt, daß Newtons Gravitationstheorie sich aus der allgemeinen Theorie als Näherung ergibt; auch sind dort die elementarsten, für die vorliegende Theorie, charakteristischen Eigenschaften des Newtonschen (statischen) Gravitationsfeldes (Lichtstrahlenkrümmung, Verschiebung der Spektrallinien) abgeleitet.

A. Grundgedanke der Theorie.

§ 1. Einleitende Überlegungen.

Der ursprünglichen Relativitätstheorie liegt die Voraussetzung zugrunde, daß für die Beschreibung der Naturgesetze alle Koordinatensysteme gleichberechtigt seien, die relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung sind. Vom Standpunkte der Erfahrung aus, erhält diese Theorie ihre Hauptstütze in der Tatsache, daß wir beim Experimentieren auf der Erde absolut nichts davon merken, daß die Erde sich mit erheblicher Geschwindigkeit um die Sonne bewegt.

Aber das Vertrauen, welches wir der Relativitätstheorie entgegenbringen, hat noch eine andere Wurzel. Man verschließt sich nämlich nicht leicht folgender Erwägung. Wenn K' und K zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindliche Koordinatensysteme sind, so sind diese Systeme vom kinematischen Standpunkt aus vollkommen gleichwertig. Wir suchen deshalb vergeblich nach einem zureichenden Grunde dafür, warum eins dieser Systeme geeigneter sein sollte, bei der Formulierung der Naturgesetze als Bezugssystem zu dienen, als das andere; wir fühlen uns vielmehr dazu gedrängt, die Gleichberechtigung beider Systeme zu postulieren.

Dies Argument fordert aber sofort ein Gegenargument heraus. Die kinematische Gleichberechtigung zweier Koordinatensysteme ist nämlich durchaus nicht auf den Fall beschränkt, daß die beiden ins Auge gefaßten Koordinatensysteme K und K' sich in *gleichförmiger Translationsbewegung* gegeneinander befinden. Diese Gleichberechtigung vom kinematischen Standpunkt aus besteht z. B. ebensogut, wenn die Systeme relativ zueinander gleichförmig rotieren. Man fühlt sich daher zu der Annahme gedrängt, daß die bisherige Relativitätstheorie in weitgehendem Maße zu verallgemeinern sei, derart, daß die ungerecht scheinende Bevorzugung der gleichförmigen Translation gegenüber Relativbewegungen anderer Art aus der Theorie verschwindet. Dies Bedürfnis nach einer derartigen Erweiterung der Theorie muß jeder empfinden, der sich eingehend mit dem Gegenstande befaßt hat.

Zunächst scheint es nun allerdings, daß eine derartige Erweiterung der Relativitätstheorie aus physikalischen Gründen abzulehnen sei. Es sei nämlich K ein im GALILEI-NEWTONschen Sinne berechtigtes Koordinatensystem, K' ein relativ zu K gleichförmig rotierendes Koordinatensystem. Dann wirken auf relativ zu K' ruhende Massen Zentrifugalkräfte, während auf relativ zu K ruhende Massen solche nicht wirken. Hierin sah bereits NEWTON einen Beweis dafür, daß man die Rotation von K' als eine »absolute« aufzufassen habe, daß man also K' nicht mit demselben Rechte wie K als »ruhend« behandeln könne. Dies Argument ist aber — wie insbesondere E. MACH ausgeführt hat — nicht stichhaltig. Die Existenz jener Zentrifugalkräfte brauchen wir nämlich nicht notwendig auf eine Bewegung von K' zurückzuführen; wir können sie vielmehr ebensogut zurückführen auf die durchschnittliche Rotationsbewegung der ponderabeln fernen Massen der Umgebung in bezug auf K', wobei wir K' als »ruhend« behandeln. Lassen die

Newtonschen Gesetze der Mechanik und Gravitation eine solche Auffassung nicht zu, so kann dies sehr wohl in Mängeln dieser Theorie begründet sein. Für die relativistische Auffassung spricht anderseits folgendes wichtige Argument. Die Zentrifugalkraft, welche unter gegebenen Verhältnissen auf einen Körper wirkt, wird genau durch die gleiche Naturkonstante desselben bestimmt wie die Wirkung eines Schwerefeldes auf denselben, derart, daß wir gar kein Mittel haben, ein »Zentrifugalfeld« von einem Schwerefeld zu unterscheiden. So messen wir als Gewicht eines Körpers an der Erdoberfläche immer eine Superposition von Wirkungen von Feldern der beiden genannten Arten, ohne diese Wirkungen trennen zu können. Dadurch gewinnt die Auffassung durchaus an Berechtigung, daß wir das rotierende System K' als ruhend und das Zentrifugalfeld als ein Gravitationsfeld auffassen dürfen. Es erinnert diese Auffassung an diejenige der ursprünglichen (spezielleren) Relativitätstheorie, daß man die auf eine in einem Magnetfelde bewegte elektrische Masse wirkende ponderomotorische Kraft auch auffassen kann als die Einwirkung desjenigen elektrischen Feldes, welches vom Standpunkte eines mit der Masse bewegten Bezugssystems am Orte der Masse vorhanden ist.

Aus dem Gesagten geht schon hervor, daß in einer im angedeuteten Sinne erweiterten Relativitätstheorie die Gravitation eine fundamentale Rolle spielen muß; denn geht man von einem Bezugssystem K durch bloße Transformation zu einem Bezugssystem K' über, so existiert in bezug auf K' ein Gravitationsfeld, ohne daß in bezug auf K ein solches vorhanden zu sein braucht.

Es erhebt sich nun naturgemäß die Frage, was für Bezugssysteme und Transformationen wir in einer verallgemeinerten Relativitätstheorie als »berechtigte« anzusehen haben. Diese Frage wird sich jedoch erst viel später beantworten lassen (Abschnitt D). Einstweilen stellen wir uns auf den Standpunkt, daß alle Koordinatensysteme und Transformationen zuzulassen seien, die mit den bei physikalischen Theorien stets vorausgesetzten Bedingungen der Stetigkeit vereinbar sind. Es wird sich zeigen, daß die Relativitätstheorie einer sehr weitgehenden, von Willkür nahezu freien Verallgemeinerung fähig ist.

§ 2. Das Gravitationsfeld.

Nach der ursprünglichen Relativitätstheorie bewegt sich ein materieller Punkt, der weder Gravitationskräften noch sonstigen Kräften unterworfen ist, geradlinig und gleichförmig gemäß der Formel

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0, \tag{1}$$

wobei

$$ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2 \tag{2}$$

gesetzt ist. Dabei ist $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = idt$ gesetzt. ds ist das Differential der »Eigenzeit«, d. h. diese Größe gibt den Betrag an, um welchen die Angabe einer mit dem materiellen Punkt bewegten Uhr auf dem Wegelement (dx, dy, dz) vorschreitet. Die Variation in (1) ist dabei so zu bilden, daß die Koordinaten x_ν in den Endpunkten der Integration unvariiert bleiben.

Führt man nun eine beliebige Koordinatentransformation aus, so bleibt Gleichung (1) bestehen, während an Stelle von (2) die allgemeinere Form

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{2a}$$

tritt. Die 10 Größen $g_{\mu\nu}$ sind dabei Funktionen von den x_ν, welche durch die angewandte Substitution bestimmt sind. Physikalisch bestimmen die $g_{\mu\nu}$ das in bezug auf das neue Koordinatensystem vorhandene Gravitationsfeld, wie aus den Überlegungen des vorigen Paragraphen hervorgeht. (1) und (2a) bestimmen daher die Bewegung eines materiellen Punktes in einem Gravitationsfelde, das bei passender Wahl des Bezugssystems verschwindet. Wir wollen aber verallgemeinernd annehmen, daß auch sonst die Bewegung des materiellen Punktes im Gravitationsfelde stets nach diesen Gleichungen erfolge.

Den Größen $g_{\mu\nu}$ kommt noch eine zweite Bedeutung zu. Wir können nämlich immer setzen

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = -\sum_\nu dX_\nu^2\,, \tag{2b}$$

wobei die dX_ν allerdings keine vollständigen Differentiale sind. Diese Größen dX_ν können aber doch im Unendlichkleinen als Koordinaten verwendet werden. Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß im Unendlichkleinen die ursprüngliche Relativitätstheorie gelte. Die dX_ν sind dann die mit Einheitsmaßstäben und einer passend gewählten Einheitsuhr unmittelbar zu messenden Koordinaten in einem unendlich kleinen Gebiete. Die Größe ds^2 ist in diesem Sinne als der natürlich gemessene Abstand zweier Raum-Zeit-Punkte zu bezeichnen. Dagegen können die dx_ν nicht in gleicher Weise durch Messung mit starren Körpern und Uhren direkt gewonnen werden. Sie hängen vielmehr mit dem natürlich gemessenen Abstand ds zusammen in einer gemäß (2b) durch die Größen $g_{\mu\nu}$ bestimmten Weise.

Nach dem Gesagten ist ds eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig definierbare Größe, d. h. ein Skalar. ds spielt in der allgemeinen Relativitätstheorie dieselbe Rolle wie das Element der Weltlinie in der ursprünglichen Relativitätstheorie.

Im folgenden sollen die wichtigsten Sätze des absoluten Differentialkalkuls abgeleitet werden, die in unserer Theorie an die Stelle der Sätze der gewöhnlichen Vektoren- und Tensorentheorie der dreidimensionalen bzw. vierdimensionalen Vektorrechnung (die sich auf das euklidische Element ds bezieht) treten; mit Hilfe jener Sätze können die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie, welche bekannten Gesetzen der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechen, ohne Schwierigkeit abgeleitet werden.

B. Aus der Theorie der Kovarianten.

§ 3. Vierervektoren.

Kovarianter Vierervektor. Vier Funktionen A_ν der Koordinaten, welche für jedes beliebige Koordinatensystem definiert sind, nennt man dann einen kovarianten Vierervektor oder einen kovarianten Tensor ersten Ranges, wenn für ein beliebig gewähltes Linienelement mit den Komponenten dx_ν die Summe

$$\sum_\nu A_\nu dx_\nu = \phi \tag{3}$$

beliebigen Koordinatentransformationen gegenüber eine Invariante (Skalar) ist. Die Größen A_ν nennt man die »Komponenten« des Vierervektors.

Das Transformationsgesetz für diese Komponenten folgt unmittelbar aus dieser Definition. Beziehen sich nämlich die Zeichen A'_ν, dx'_ν auf denselben Punkt des Kontinuums, aber auf ein beliebig gewähltes anderes Koordinatensystem, so ist

$$\sum_\nu A'_\nu dx'_\nu = \sum_\alpha A_\alpha dx_\alpha = \sum_{\alpha\nu} A_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} dx'_\nu .$$

Da die Gleichung für beliebig gewählte dx'_ν gelten soll, so folgt das gesuchte Transformationsgesetz:

$$A'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'_\nu} A^\alpha . \tag{3a}$$

Umgekehrt ist leicht zu zeigen, daß aus der Gültigkeit dieses Transformationsgesetzes folgt, daß A_ν ein kovarianter Vierervektor ist.

Kontravarianter Vierervektor. Vier Funktionen A^ν der Koordinaten, welche für jedes beliebige Koordinatensystem definiert sind, nennt man dann einen kontravarianten Vierervektor oder einen kontravarianten Tensor ersten Ranges, wenn das Transformationsgesetz der A_ν dasselbe ist wie dasjenige für die Komponenten dx_ν des Linienelementes. Hieraus folgt als Transformationsgesetz:

$$A^{\nu'} = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} A^\alpha. \tag{4}$$

Wir deuten im Anschluß an Ricci und Levi-Civita den kontravarianten Charakter dadurch an, daß wir den Index oben anbringen. Natürlich sind gemäß dieser Definition die dx_ν selbst Komponenten eines kontravarianten Vierervektors; trotzdem wollen wir hier, der Gewohnheit zuliebe, den Index unten belassen.

Aus den beiden gegebenen Definitionen folgt unmittelbar, daß der Ausdruck

$$\sum_\nu A_\nu A^\nu = \Phi \tag{3b}$$

ein Skalar (Invariante) ist. Wir nennen Φ das innere Produkt des kovarianten Vektors (A_ν) und des kontravarianten Vektors (A^ν).

Daraus, daß die Transformationsgleichungen (3a) und (4) linear in den Vektorkomponenten sind, folgt, daß man aus zwei kovarianten bzw. kontravarianten Vierervektoren wieder einen kovarianten bzw. kontravarianten Vierervektor erhält, indem man die entsprechenden Komponenten addiert (oder subtrahiert).

§ 4. Tensoren zweiten und höheren Ranges.

Kovarianter Tensor zweiten und höheren Ranges. 16 Funktionen $A_{\mu\nu}$ der Koordinaten bezeichnet man dann als Komponenten eines kovarianten Tensors zweiten Ranges, wenn die Summe

$$\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\, dx_\mu^{(1)}\, dx_\nu^{(2)} = \Phi \tag{5}$$

ein Skalar ist; $dx_\mu^{(1)}$ und $dx_\nu^{(2)}$ bezeichnen dabei die Komponenten zweier beliebig gewählter Linienelemente.

Aus der hieraus fließenden Relation

$$\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu}\, dx_\mu^{(1)'}\, dx_\nu^{(2)'} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, dx_\alpha^{(1)}\, dx_\beta^{(2)} = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{dx_\alpha}{dx'_\mu} \frac{dx_\beta}{dx'_\nu} A_{\alpha\beta}\, dx_\mu^{(1)'}\, dx_\nu^{(2)'}$$

folgt mit Rücksicht darauf, daß dieselbe für beliebig gewählte $dx_\mu^{(1)'}$ und $dx_\nu^{(2)'}$ gelten soll; die 16 Gleichungen:

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}. \tag{5a}$$

Diese Gleichung ist wieder obiger Definition äquivalent.

Es ist klar, daß in analoger Weise auch kovariante Tensoren dritten und höheren Ranges definiert werden können.

Symmetrischer kovarianter Tensor. Erfüllt ein kovarianter Tensor für ein Koordinatensystem die Bedingung, daß die Werte zweier seiner Komponenten, welche einer bloßen Vertauschung von Indizes einander entsprechen, einander gleich sind ($A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$), so gilt dies, wie ein Blick auf Gleichung (5a) zeigt, auch für jedes andere Koordinatensystem. Dann reduzieren sich beim kovarianten Tensor zweiten Ranges die 16 Transformationsgleichungen auf 10. In dem Falle, daß $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ ist, genügt zum Beweise des Tensorcharakters von $(A_{\mu\nu})$ der Nachweis, daß

$$\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \Phi \tag{5c}$$

ein Skalar sei. Es folgt dies aus der Identität

$$\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} A_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} dx'_\mu dx'_\nu$$

mit Rücksicht auf (5a).

Symmetrische kovariante Tensoren höheren Ranges lassen sich ganz analog definieren.

Kovarianter Fundamentaltensor. In der zu entwickelnden Theorie spielt die Größe

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu ,$$

welche wir als Quadrat des Linienelementes bezeichnen wollen, eine besondere Rolle. Aus dem Vorigen geht hervor, daß $g_{\mu\nu}$ ein kovarianter (symmetrischer) Tensor zweiten Ranges ist. Wir wollen ihn als »kovarianten Fundamentaltensor« bezeichnen.

Bemerkung. Wir hätten den kovarianten Tensor auch definieren können als einen Inbegriff von 16 Größen $A_{\mu\nu}$, die sich ebenso transformieren wie die 16 Produkte $A_\mu B_\nu$ zweier kovarianter Vektoren (A_μ) und (B_ν). Setzt man

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu , \tag{6}$$

so folgt aus (3a) sofort

$$A'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_\alpha B_\beta = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta} ,$$

woraus mit Rücksicht auf (5a) folgt, daß $A_{\mu\nu}$ ein kovarianter Tensor ist. Ganz Entsprechendes gilt für Tensoren höheren Ranges. Allerdings ist nicht jeder kovariante Tensor in dieser Form darstellbar, da $(A_{\mu\nu})$ 16 Komponenten besitzt, A_μ und B_ν zusammen nur 8 Komponenten; es bestehen also zwischen den $A_{\mu\nu}$ auf Grund von (6) algebraische Beziehungen, welche Tensorkomponenten im allgemeinen nicht erfüllen. Man gelangt jedoch zu einem beliebigen Tensor, indem man mehrere Tensoren vom Typus der Gleichung (6) addiert[1], indem man setzt

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu + C_\mu D_\nu + \cdots \tag{6a}$$

Analog verhält es sich bei kovarianten Tensoren höheren Ranges. Diese Darstellung von Tensoren aus Vierervektoren erweist sich für den Beweis vieler Sätze als nützlich. Eine analoge Bemerkung gilt für kovariante Tensoren höheren Ranges.

Kontravariante Tensoren. Analog wie sich kovariante Tensoren aus kovarianten Vierervektoren gemäß (6) bzw. (6a) bilden lassen, lassen sich auch kontravariante Tensoren aus kontravarianten Vierervektoren bilden gemäß den Gleichungen

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \tag{7}$$

bzw.

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + C^\mu D^\nu + \cdots \tag{7a}$$

Aus dieser Definition folgte sogleich nach (4) das Transformationsgesetz

$$A^{\mu\nu\prime} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A^{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Analog gestaltet sich die Definition von kontravarianten Tensoren höheren Ranges. Genau wie oben ist hier der Spezialfall des symmetrischen Tensors besonders zu beachten.

Gemischte Tensoren. Es lassen sich auch Tensoren (zweiten und höheren) Ranges bilden, die bezüglich gewisser Indizes kovarianten, bezüglich anderer kontravarianten Charakter haben; man nennt sie gemischte Tensoren. Ein gemischter Tensor zweiten Ranges ist z. B.

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu + C_\mu D^\nu. \tag{9}$$

Antisymmetrische Tensoren. Außer den symmetrischen kovarianten und kontravarianten Tensoren spielen die sogenannten antisymmetrischen kovarianten und kontravarianten Tensoren eine wichtige Rolle. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß Komponenten, die durch Vertauschung zweier Indizes auseinander hervorgehen, entgegengesetzt gleich sind. Wenn z. B. der kontravariante Tensor $A^{\mu\nu}$ die Bedingung $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ erfüllt, so nennt man ihn einen antisymmetrischen

[1] Es ist klar, daß durch Addition entsprechender Komponenten eines Tensors wieder Komponenten eines Tensors entstehen, wie dies für den Tensor ersten Ranges (Vierervektor) gezeigt wurde (Addition und Subtraktion von Tensoren).

kontravarianten Tensor zweiten Ranges oder Sechservektor (weil er 12 von Null verschiedene Komponenten hat, die zu je zweien den gleichen absoluten Betrag haben. Der kontravariante Tensor dritten Ranges $A^{\mu\nu\lambda}$ ist antisymmetrisch, wenn die Bedingungen erfüllt sind

$$A^{\mu\nu\lambda} = -A^{\mu\lambda\nu} = -A^{\nu\mu\lambda} = A^{\nu\lambda\mu} = -A^{\lambda\nu\mu} = A^{\lambda\mu\nu}.$$

Man erkennt, daß es (in einem Kontinuum von 4 Dimensionen) nur 4 numerisch von Null verschiedene Komponenten dieses antisymmetrischen Tensors gibt.

Daß diese Definition eine von der Wahl des Bezugssystems unabhängige Bedeutung besitzt, beweist man leicht aus Formel (5a) bzw. (8). So ist z. B. gemäß (5a)

$$A'_{\nu\mu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} A_{\alpha\beta} .$$

Ersetzt man $A_{\alpha\beta}$ durch $-A_{\beta\alpha}$ (was gemäß der Voraussetzung gestattet ist) und vertauscht man hierauf in der Doppelsumme die Summationsindizes β und α, so hat man

$$A'_{\nu\mu} = -\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta} = -A'_{\mu\nu},$$

gemäß der Behauptung. Analog ist der Beweis für kontravariante Tensoren und für Tensoren dritten und vierten Ranges. Antisymmetrische Tensoren höheren als vierten Ranges kann es in einem vierdimensionalen Kontinuum nicht geben, weil alle Komponenten verschwinden, für welche zwei Indizes gleich sind.

§ 5. Multiplikation der Tensoren.

Äußeres Produkt von Tensoren. Wir haben gesehen (vgl. Gleichungen (6), (8) und (9)), daß man durch Multiplizieren der Komponenten von Tensoren ersten Ranges die Komponenten von Tensoren höheren Ranges erhält. Analog können wir Tensoren höheren Ranges aus solchen niedrigeren Ranges durch Multiplizieren aller Komponenten des einen Tensors mit denen des anderen stets herleiten. Sind beispielsweise $(A_{\alpha\beta})$ und $(B_{\lambda\mu\sigma})$ kovariante Tensoren, so ist auch $(A_{\alpha\beta} \cdot B_{\lambda\mu\sigma})$ ein kovarianter Tensor (fünften Ranges). Der Beweis ergibt sich sofort aus der Darstellbarkeit der Tensoren durch Summe von Produkten von Vierervektoren:

$$A_{\alpha\beta} = \sum A^{(1)}_\alpha A^{(2)}_\beta ,$$

$$B_{\lambda\mu\sigma} = \sum B^{(1)}_\lambda B^{(2)}_\mu B^{(3)}_\sigma ,$$

$$\text{also } A_{\alpha\beta} B_{\lambda\mu\sigma} = \sum A^{(1)}_\alpha A^{(2)}_\beta B^{(1)}_\lambda B^{(2)}_\mu B^{(3)}_\sigma ;$$

also ist $(A_{\alpha\beta} B_{\lambda\mu\sigma})$ ein Tensor fünften Ranges.

Man nennt diese Operation »äußere Multiplikation«, das Resultat »äußeres Produkt« der Tensoren. Man sieht, daß es bei dieser Operation auf Charakter und Rang der zu »multiplizierenden« Tensoren nicht ankommt. Es gilt ferner das kommutative und das assoziative Gesetz für eine Sukzession solcher Operationen.

Inneres Produkt von Tensoren. Die in Formel (3b) angegebene, mit den Tensoren ersten Ranges A_ν und A^ν vorgenommene Operation nennt man »innere Multiplikation«, das Resultat »inneres Produkt«. Diese Operation läßt sich infolge der Darstellbarkeit von Tensoren höheren Ranges aus Vierervektoren leicht auf Tensoren erweitern.

Ist z. B. $A_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ein kovarianter, $A^{\alpha\beta\gamma\cdots}$ ein kontravarianter Tensor vom gleichen Range, so ist

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} (A_{\alpha\beta\gamma\ldots}\, A^{\alpha\beta\gamma\cdots}) = \Phi$$

ein Skalar. Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn man setzt

$$A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \sum A_\alpha B_\beta C_\gamma \cdots$$
$$A^{\alpha\beta\gamma\cdots} = \sum A^\alpha B^\beta C^\gamma \cdots,$$

hierauf ausmultipliziert und (3b) berücksichtigt.

Gemischtes Produkt von Tensoren. Die allgemeinste Multiplikation von Tensoren erhält man, wenn man letztere nach gewissen Indizes äußerlich, nach andern innerlich multipliziert. Aus den Tensoren A und B erhält man einen Tensor C gemäß folgendem Schema

$$\sum_{\alpha\beta\gamma\ldots\alpha'\beta'\gamma'} \left(A^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\gamma\ldots\varrho\sigma\tau\ldots}\, B^{\alpha\beta\gamma\ldots lmn\ldots}_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots rst\ldots}\right) = C^{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots}_{\varrho\sigma\tau\ldots rst\ldots}\,.$$

Der Beweis dafür, daß C ein Tensor ist, ergibt sich durch Kombination der beiden zuletzt angedeuteten Beweise.

§ 6. Über einige den Fundamentaltensor der $g_{\mu\nu}$ betreffende Beziehungen.

Der kontravariante Fundamentaltensor. Bildet man in dem Determinanten-Schema der $g_{\mu\nu}$ zu jedem $g_{\mu\nu}$ die Unterdeterminante und dividiert diese durch die Determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ der $g_{\mu\nu}$, so erhält man gewisse Größen $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\nu\mu})$, von denen wir beweisen wollen, daß sie einen kontravarianten symmetrischen Tensor bilden.

Aus dieser Definition und einem bekannten Determinantensatze folgt zunächst

$$\sum_\sigma g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^{\ \nu}, \qquad (10)$$

wobei δ_μ^ν die Größe 1 bzw. 0 bedeutet, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \pm \nu$ ist[1]. Es ist ferner

$$\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

ein Skalar, den wir gemäß (10) gleich

$$\sum_{\alpha\beta\mu} g_{\mu\beta} \delta_\alpha^\mu dx_\alpha dx_\beta$$

und gleich

$$\sum_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} g^{\mu\nu} dx_\alpha dx_\beta$$

setzen können. Nun sind aber nach dem vorigen Paragraphen

$$d\xi_\mu = \sum_\beta g_{\mu\beta} dx_\beta$$

die Komponenten eines kovarianten Vektors, ebenso natürlich

$$d\xi_\nu = \sum_\alpha g_{\nu\alpha} dx_\alpha .$$

Unser Skalar nimmt demnach die Form an

$$\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu .$$

Daraus, daß dies ein Skalar ist, die $d\xi_\mu$ ihrem Verhältnis nach beliebig zu wählende Komponenten eines kovarianten Vierervektors sind, und daß $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ ist, läßt sich leicht beweisen, daß $g^{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tresor ist.

Bemerkung. Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten ist

$$\left|\sum_\alpha g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}\right| = \left|g_{\mu\alpha}\right| \cdot \left|g^{\alpha\nu}\right| .$$

Anderseits ist

$$\left|\sum_\alpha (g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu})\right| = \left|\delta_\mu^\nu\right| = 1 .$$

Hieraus folgt

$$\left|g_{\mu\nu}\right| \cdot \left|g^{\mu\nu}\right| = 1 . \tag{11}$$

Invariante des Volumens. Für die unmittelbare Umgebung eines Punktes unseres Kontinuums kann gemäß (2b) immer

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_\sigma dX_\sigma^2 \tag{12}$$

gesetzt werden, falls man imaginäre Werte der dX_σ zuläßt. Für die Wahl des Systems der dX_σ gibt es noch unendlich viele Möglichkeiten; jedoch sind alle diese Systeme durch lineare orthogonale Sub-

[1] Nach dem vorigen Paragrahpen ist δ_μ^ν ein gemischter Tensor (»gemischter Fundamentaltensor«).

stitutionen verbunden. Daraus folgt, daß das über ein Volumelement erstreckte Integral

$$d\tau_0^* = \int dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$$

eine Invariante, d. h. völlig unabhängig von jeder Koordinatenwahl ist.

Wir wollen für diese Invariante einen zweiten Ausdruck suchen. Es bestehen nun jedenfalls Beziehungen von der Form

$$dX_\sigma = \sum_\mu \alpha_{\sigma\mu} dx_\mu, \tag{13}$$

woraus folgt

$$d\tau_0^* = |\alpha_{\sigma\mu}| d\tau, \tag{14}$$

wenn mit $d\tau$ bzw. $d\tau_0^*$ das Integral

$$\int dx_1 \cdot\cdot dx_4 \text{ bzw. } \int dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$$

erstreckt über dasselbe Elementargebiet bedeutet. Nach (12) und (13) ist ferner

$$g_{\mu\nu} = \sum_\sigma \alpha_{\sigma\mu} \alpha_{\sigma\nu} \tag{15}$$

und folglich nach dem Multiplikationssatz der Determinanten

$$|g_{\mu\nu}| = \left|\sum_\sigma (\alpha_{\sigma\mu} \alpha_{\sigma\nu})\right| = |\alpha_{\sigma\nu}|^2. \tag{16}$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man aus (14)

$$\sqrt{g}\, d\tau = d\tau_0^*, \tag{17}$$

wobei der Kürze halber $|g_{\mu\nu}| = g$ gesetzt ist. Damit haben wir die gesuchte Invariante gefunden.

Bemerkung. Aus (12) geht hervor, daß die dX_σ den in der ursprünglichen Relativitätstheorie üblichen Koordinaten entsprechen. Von diesen sind drei reell, eine (z. B. dX_4) imaginär. $d\tau_0$ ist daher imaginär. Anderseits ist im Falle der ursprünglichen Relativitätstheorie die Determinante g bei reeller Zeitkoordinate negativ, da die $g_{\mu\nu}$ (bei passender Wahl der Zeiteinheit) die Werte

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \tag{18}$$

erhalten; $\sqrt{g}$ ist daher ebenfalls imaginär. Daß dies allgemein der Fall ist, wird in § 17 gezeigt. Um Imaginäre zu vermeiden, setzen wir

$$d\tau_0 = \frac{1}{i}\int dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4$$

und schreiben statt (17)

$$\sqrt{-g}\, d\tau = d\tau_0\,. \tag{17a}$$

Der antisymmetrische Fundamentaltensor von Ricci und Levi-Civita. Wir behaupten, daß

$$G_{iklm} = \sqrt{g}\,\delta_{iklm} \tag{19}$$

ein kovarianter Tensor ist. δ_{iklm} bedeutet dabei $+1$ bzw. -1, je nachdem man 1 2 3 4 zu $iklm$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Indexvertauschungen gelangt.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß die Determinante

$$\sum_{iklm} \delta_{iklm}\, dx_i^{(1)}\, dx_k^{(2)}\, dx_l^{(3)}\, dx_m^{(4)} = V \tag{20}$$

bis auf einen belanglosen Zahlenfaktor gleich dem Volumen des elementaren Pentaeders ist, dessen Ecken gebildet werden durch einen Punkt des Kontinuums und vier Endpunkte von willkürlichen Linienelementen $(dx_i^{(1)})$, (dx_k^{2}), (dx_l^{3}) und (dx_m^{4}), welche von diesem Punkt aus gezogen sind. Nach (19) und (2) ist

$$\sum_{iklm} G_{iklm}\, dx_i^{(1)}\, dx_k^{(2)}\, dx_l^{(3)}\, dx_m^{(4)} = \sqrt{g}\, V.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nach (17) ein Skalar ist, so ist (G_{iklm}) ein kovarianter Tensor, und zwar wegen der Definitionseigenschaften von δ_{iklm} ein antisymmetrischer kovarianter Tensor.

Aus diesem bildet man leicht durch gemischte Multiplikation einen kontravarianten Tensor nach dem Schema

$$\sum_{\alpha\beta\lambda\mu} G_{\alpha\beta\lambda\mu}\, g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\lambda l} g^{\mu m} = G^{iklm}. \tag{21}$$

Der kontravariante Tensorcharakter ergibt sich unmittelbar aus § 4. Die linke Seite nimmt vermöge (19) die Form an

$$\sqrt{g} \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\alpha\beta\lambda\mu}\, g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\lambda l} g^{\mu m},$$

was vermöge bekannter Determinantensätze gleich

$$\sqrt{g}\;\delta_{iklm} \sum \delta_{\alpha\beta\lambda\mu}\, g^{1\alpha} g^{2\beta} g^{3\lambda} g^{4\mu}$$

oder gemäß (11) gleich

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{iklm}$$

ist. Damit ist bewiesen, daß

$$G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{iklm} \tag{21a}$$

ein kontravarianter antisymmetrischer Tensor ist.

Endlich spielt in der Theorie der allgemeinen antisymmetrischen Tensoren ein aus dem Fundamentaltensor der $g_{\mu\nu}$ gebildeter gemischter Tensor eine wichtige Rolle, dessen Komponenten sind

$$G_{ik}^{lm} = \sum_{\alpha\beta} \sqrt{g}\, \delta_{ik\alpha\beta}\, g^{\alpha l} g^{\beta m} = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{lm\alpha\beta}\, g_{\alpha i} g_{\beta k} \tag{22}$$

Der Tensor-Charakter dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Vorigen und nach § 4 evident. Zu beweisen ist nur, daß sie einander gleich sind. Den letzten derselben können wir gemäß (21) und (19) auch in der Form bringen

$$\sum_{\lambda\mu\rho\sigma\alpha\beta} \sqrt{g}\, \delta_{\lambda\mu\rho\sigma}\, g^{\lambda l} g^{\mu m} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} g_{\alpha i} g_{\beta\varkappa},$$

woraus man durch Summation nach α und β mit Rücksicht auf (10) erhält

$$\sum_{\lambda\mu} \sqrt{g}\, \delta_{\lambda\mu i\varkappa}\, g^{\lambda l} g^{\mu m};$$

letzterer Ausdruck unterscheidet sich von dem ersten der in (22) gegebenen Ausdrücke nur durch die Bezeichnung der Summationsindizes und durch die (belanglose) Reihenfolge der Indexpaare $\lambda\mu$ und ik in $\delta_{\lambda\mu ik}$.

Aus (22) ist ersichtlich, daß der gemischte Tensor (G_{ik}^{lm}) sowohl der Indizes i, k, als auch bezüglich der Indizes lm antisymmetrisch ist.

Mit Hilfe des Fundamentaltensors können wir aus einem beliebigen Tensor in mannigfacher Weise Tensoren von anderem Charakter herstellen nach den im § 5 angegebenen Regeln. So können wir beispielsweise aus dem kovarianten Tensor $(T_{\mu\nu})$ den kontravarianten $(T^{\mu\nu})$ herstellen nach der Regel

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}, \tag{23}$$

während man umgekehrt hat:

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}. \tag{23a}$$

Die Gleichwertigkeit der Gleichungen (23) und (23a) ergibt sich leicht mit Hilfe von (10). Man nennt die Tensoren $(T^{\mu\nu})$ und $(T_{\mu\nu})$ »reziprok«. Ist einer von zwei reziproken Tensoren symmetrisch bzw. antisymmetrisch, so ist es, wie aus (23) bzw. (23a) hervorgeht, auch der andere. Dies gilt für Tensoren beliebigen Ranges.

Duale Sechservektoren. Ist ferner $(F^{\mu\nu})$ ein antisymmetrischer Tensor (zweiten Ranges), so können wir zu ihm einen zweiten antisymmetrischen Tensor $F^{\mu\nu *}$ bilden nach der Gleichung

$$F^{\mu\nu *} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} G^{\mu\nu}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \tag{24}$$

Man nennt $F^{\mu\nu *}$ den zu $F^{\mu\nu}$ »dualen« kontravarianten Sechservektor. Umgekehrt ist $F^{\mu\nu}$ zu $F^{\mu\nu *}$ dual. Denn multipliziert man (24) mit $G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$, und summiert über μ und ν, so erhält man

$$\frac{1}{2} \sum G^{\sigma\tau}_{\mu\nu} F^{\mu\nu *} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} ;$$

da aber nach (22)

$$\sum_{\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu\lambda\varkappa\lambda'\varkappa'} \sqrt{g}\, \delta_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, g^{\lambda\sigma} g^{\varkappa\tau} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{\mu\nu\lambda'\varkappa'}\, g_{\lambda'\alpha} g_{\varkappa'\beta} = 2(\delta^{\sigma}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\beta} - \delta^{\sigma}_{\beta} \delta^{\tau}_{\alpha}) ,$$

ist[1], so ergibt sich

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\mu\nu} G^{\sigma\tau}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (F^{\sigma\tau} - F^{\tau\sigma}) = F^{\sigma\tau} ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Ganz Entsprechendes gilt für kovariante Sechservektoren. Man beweist ferner leicht, daß Sechservektoren, welche zwei dualen reziprok sind, selbst dual sind.

§ 7. Geodätische Linie bzw. Gleichungen der Punktbewegung

In § 2 ist bereits dargelegt, daß die Bewegung eines materiellen Punktes im Gravitationsfelde nach der Gliederung

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0 \tag{1}$$

vor sich geht. Der Bewegung eines Punktes entspricht also vom mathematischen Standpunkte eine geodätische Linse in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Wir wollen der Vollständigkeit halber die

---

[1] Die zweite dieser Umformungen beruht darauf, daß $\delta_{\mu\nu\lambda\varkappa}$ nur dann nicht verschwindet, wenn alle Indizes verschieden sind. Es bleiben deshalb nur die beiden Möglichkeiten $(\lambda = \lambda', \varkappa = \varkappa')$ und $(\lambda = \varkappa', \varkappa = \lambda')$; mit Rücksicht darauf ergibt sich zunächst durch Summation über μ und ν der Ausdruck

$$2 \sum_{\lambda\varkappa} \left\{ g^{\lambda\sigma} g^{\varkappa\tau} g^{\lambda\alpha} g^{\varkappa\beta} - g^{\lambda\sigma} g^{\varkappa\tau} g^{\lambda\beta} g^{\varkappa\alpha} \right\} ,$$

wobei die Summe zunächst nur über solche Indexkombinationen $(\lambda\varkappa)$ zu erstrecken ist, für welche $\lambda \neq \varkappa$. Da aber die Klammer für $\lambda = \varkappa$ ohnehin verschwindet, so kann die Summe über alle Kombinationen erstreckt werden. Mit Rücksicht auf (10) ergibt sich hieraus der im Text angegebene Ausdruck.

wohlbekannte Ableitung der expliziten Gleichungen dieser Linie hier hersetzen.

Es handelt sich um eine zwischen zwei Punkten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ verlaufende Linie, gegenüber der alle ihr unendlich benachbarten Linien, die durch dieselben genannten Punkte gehen, die Gleichung (1) erfüllen. Bezeichnet man mit λ eine Funktion der Koordinaten x_ν, so wird eine »Fläche« von konstanten λ auf allen diesen unendlich benachbarten Linien je einen Punkt herausschneiden, dessen Koordinaten bei gegebener Kurve als Funktionen von λ allein aufzufassen sind. Setzen wir

$$w^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda},$$

so können wir statt (1) setzen

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \, d\lambda = 0, \tag{1a}$$

da die Integrationsgrenzen λ_1 und λ_2 für alle betrachteten Kurven dieselben sind. Bezeichnet man mit δx_ν die Zuwächse, welche man den x_ν erteilen muß, um von einem Punkte der gesuchten geodätischen Linie zu dem zum gleichen Werte von λ gehörigen Punkte einer der variierten Linien zu gelangen, so hat man

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\}.$$

Setzt man dies in (1a) ein, so erhält man, indem man das letzte Glied partiell integriert und dabei berücksichtigt, daß für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ die δx_ν verschwinden

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sum_\sigma (K_\sigma \delta x_\sigma) = 0,$$

wobei

$$K_\sigma = \sum_{\mu\nu} \left[\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\sigma}}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \right]$$

gesetzt ist. Es folgt hieraus, daß

$$K_\sigma = 0 \tag{23}$$

die Gleichung der geodätischen Linie ist.

In der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechen diejenigen geodätischen Linien, für welche $ds^2 > 0$ ist, der Bewegung materieller Punkte diejenigen, für welche $ds = 0$ ist, den Lichtstrahlen. Dies wird auch in der verallgemeinerten Relativitätstheorie der Fall sein. Schließen wir den letzteren Fall ($ds = 0$) von der Betrachtung aus, so können wir als Parameter λ die auf der geodätischen Linie gemessene »Bogenlänge« s wählen. Dann geht die Gleichung der geodätischen Linie über in

$$\sum_{\mu} g_{\sigma\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0\,, \tag{23a}$$

wobei nach Christoffel die Abkürzung

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) \tag{24}$$

eingeführt ist, welcher Ausdruck bezüglich der Indizes μ und ν symmetrisch ist. Endlich multipliziert man (23a) mit $g^{\sigma\tau}$ und summiert über σ. Mit Rücksicht auf (10) und bei Benutzung des bekannten Christoffelschen Symbols

$$\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} = \sum_{\sigma} g^{\sigma\tau} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \tag{24a}$$

erhält man dann an Stelle von (23a)

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0\,. \tag{23b}$$

Dies ist die Gleichung der geodätischen Linie in ihrer übersichtlichsten Form. Sie drückt die zweiten Ableitungen der x_τ nach s durch die ersten Ableitungen aus. Durch Differenzieren von (23b) nach s erhielte man Gleichungen, die auch eine Zurückführung der höheren Differenzialquotionenten bei Koordinaten nach s auf die ersten Ableitungen gestatten; man erhielte so die Koordinaten in Taylorscher Entwicklung nach den Variabeln s. Gleichung (23b) entspricht der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in Minkowskischer Form, indem s die »Eigenzeit« bedeutet.

§ 8. Bildung von Tensoren durch Differentiation.

Die fundamentale Bedeutung des Tensorbegriffes beruht bekanntlich darauf, daß die Transformationsgleichungen für die Tensorkomponenten linear und homogen sind. Dies bringt es mit sich, daß die Komponenten eines Tensors bezüglich eines jeden beliebigen Koordinatensystems verschwinden, falls sie bezüglich eines Koordinatensystems verschwinden. Hat man also eine Gruppe von physikalischen Gleichungen in eine Form gebracht, welche das Verschwinden aller Komponenten eines Tensors aussagt, so hat dieses Gleichungssytem eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Bedeutung. Um derartige Tensorgleichungen aufstellen zu können, muß man die Gesetze kennen, nach denen aus gegebenen Tensoren neue gebildet werden können. Wie dies auf algebraischem Wege geschehen kann, ist bereits besprochen worden. Wir haben noch die Gesetze abzuleiten, gemäß welchen man durch Differentiation aus bekannten Tensoren neue bilden kann. Die Gesetze dieser Differentialbildungen sind bereits durch Christoffel und Ricci und Levi-Civita gegeben worden; ich gebe hier eine besonders einfache Ableitung für dieselben, welche neu zu sein scheint.

Alle Differentialoperationen an Tensoren lassen sich auf die sogenannte »Erweiterung« zurückführen. Diese ist im Falle der ursprünglichen Relativitätstheorie, d. h. in dem Falle, daß nur lineare, orthogonale Substitutionen als »berechtigte« zugelassen werden, durch folgenden Satz gegeben. Ist $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ ein Tensor $l$ten Ranges, so ist $\frac{\partial T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial x_s}$ ein Tensor vom $l+1$ten Range. Hieraus ergibt sich leicht die sogenannte »Divergenz« an Tensoren mit Hilfe des in Gleichung (10) des § 6 gegebenen speziellen Tensors δ_μ^ν, den wir im Falle der Beschränkung auf lineare orthogonale Transformationen, in welchem die Unterschiede zwischen kovariant und kontravariant wegfallen, durch das Zeichen $\delta_{\mu\nu}$ zu ersetzen haben. Durch innere Multiplikation des durch »Erweiterung« gebildeten Tensors $l+1$ten Ranges mit dem Tensor $\delta_{\mu\nu}$ erhalten wir den Tensor $l-1$ten Ranges

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} = \sum_{ls} \frac{\partial T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial x_s} \delta_{\alpha_l s} = \sum_{\alpha_l} \frac{\partial T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial x_{\alpha_l}}.$$

Es ist dies die nach dem Index α_l gebildete Divergenz des Tensors $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$. Es ist unsere Aufgabe, die Verallgemeinerung dieser Operationen für den Fall aufzustellen, daß die Substitutionen den genannten beschränkenden Bedingungen (Linearität-Orthogonalität) nicht unterworfen werden.

Erweiterung eines kovarianten Tensors. Es sei $\phi\ (x_1 \cdots x_4)$ ein Skalar und S eine in unserem Kontinuum gegebene Kurve. Die von einem Punkte P von S aus nach bestimmter Seite auf S im Sinne der §§ 1 und 8 gemessene »Bogenlänge« sei s. Dann können wir die Funktionswerte ϕ der auf S gelegenen Punkte des Kontinuums auch als Funktion von s ansehen. Es ist dann klar, daß auch die Größen $\frac{d\phi}{ds}$, $\frac{d^2\phi}{ds^2}$ usw. Skalare sind, d. h. Größen, die in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise definiert sind. Da aber

$$\frac{d\phi}{ds} = \sum_{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds}, \tag{25}$$

und von jedem Punkte aus Kurven S in beliebiger Richtung gezogen werden können, so sind gemäß § 3 die Größen

$$A_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \tag{26}$$

Komponenten eines kovarianten Vierervektors (Tensors ersten Ranges), den wir passend als »Erweiterung« des Skalars ϕ (eines Tensors vom nullten Range) auffassen können.

Wir erhalten weiter gemäß (25)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \sum_{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \frac{d^2 x_\tau}{ds^2}.$$

Wir spezialisieren nun unsere Betrachtung durch die von der Wahl des Bezugssystems unabhängige Festsetzung, daß die Linie S eine geodätische sei; dann erhalten wir nach (23b)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_{\tau} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \right] \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{27}$$

Wir richten nun unser Augenmerk auf die Größen

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_{\tau} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau}, \tag{28}$$

welche gemäß (24) und (24a) die Symmetriebedingung

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$$

erfüllen. Vermöge letzterer geht mit Rücksicht auf (5c) aus Gleichung (27) und aus dem Skalarcharakter von $\frac{d^2\phi}{ds^2}$ hervor, daß $A_{\mu\nu}$ ein (symmetrischer) kovarianter Tensor zweiten Ranges ist. Wir können $A_{\mu\nu}$ als die Erweiterung des kovarianten Tensors ersten Ranges $A_\mu = \frac{d\phi}{dx_\mu}$ auffassen und (28) auch in der Form schreiben

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \sum_{\tau} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau. \tag{28a}$$

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß nicht nur aus einem Vierervektor vom Typus (26), sondern aus einem beliebigen kovarianten Vierervektor gemäß (28a) durch Differentiation (Erweiterung) ein kovarianter Tensor zweiten Ranges gebildet werden kann. Dies wollen wir jetzt nachweisen.

Es ist zunächst leicht zu sehen, daß sich die Komponenten A_μ eines beliebigen kovarianten Vierervektors im vierdimensionalen Kontinuum in der Form darstellen lassen

$$A_\mu = \psi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_\mu} + \psi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_\mu} + \psi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x_\mu} + \psi_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial x_\mu},$$

wobei die Größen ψ_λ und ϕ_λ Skalare sind. Denn wählen wir (in dem speziell benutzten Koordinatensystem) willkürlich $\phi_\nu = x_\nu$, so brauchen wir nur $\psi_\nu = A_\nu$ (in dem speziell benutzten Koordinatensystem) zu setzen, um die Gleichung zu erfüllen. Um den Tensorcharakter der gemäß (28a) gebildeten Größen $A_{\mu\nu}$ einzusehen, brauchen wir daher nur zu beweisen, daß $A_{\mu\nu}$ ein Tensor ist, wenn in (28a) $A_\mu = \psi \dfrac{d\phi}{dx_\mu}$ gesetzt wird, wobei ψ und ϕ Skalare sind. Gemäß (28) sind

$$\psi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \right]$$

Tensorkomponenten, gemäß (26) und (6) ebenso

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}.$$

Durch Addition folgt der Tensorcharakter von

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right] - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \right).$$

(28a) liefert also auch aus dem Vierervektor $\psi \dfrac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ einen Tensor und damit nach dem vorhin Bewiesenen uns einen beliebigen kovarianten Vierervektor A_μ. Damit ist der gesuchte Nachweis geliefert.

Nachdem die Erweiterung des kovarianten Tensors ersten Ranges abgeleitet ist, gelingt es leicht, die Erweiterung des kovarianten Tensors beliebigen Ranges zu finden. Gemäß (6) und (6a) können wir jeden kovarianten Tensor darstellen als eine Summe von Tensoren vom Typus

$$A_{\alpha_1 \cdots \alpha_l} = A^{(1)}_{\alpha_1} A^{(2)}_{\alpha_2} \cdots A^{(l)}_{\alpha_l},$$

wobei die $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$ kovariante Vierervektoren bedeuten. Gemäß (28a) ist zunächst

$$A^{(\nu)}_{\alpha_\nu s} = \frac{\partial A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}}{\partial x_s} - \sum_\tau \begin{Bmatrix} \alpha_\nu s \\ \tau \end{Bmatrix} A^{(\nu)}_\tau$$

ein kovarianter Tensor vom zweiten Range. Diesen multiplizieren wir nach der Regel der äußeren Multiplikation mit allen $A^{(\mu)}_{\alpha_\mu}$ mit Ausnahme von $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$ und erhalten so einen Tensor vom Range $l+1$, bei dessen Bildung der Index ν bevorzugt wurde. Derartige Tensoren lassen sich l bilden, indem man der Reihe nach die Indizes $\nu = 1, \nu = 2 \cdots \nu = l$ bei der Bildung bevorzugt. Addiert man sie alle, so erhält man den Tensor $(l+1)$ten Ranges

$$A_{\alpha_1 \cdots \alpha_l s} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \cdots \alpha_l}}{\partial x_s} - \sum_\tau \left[\begin{Bmatrix} \alpha_1 s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau \alpha_2 \cdots \alpha_l} + \begin{Bmatrix} \alpha_2 s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\alpha_1 \tau \alpha_3 \cdots \alpha_l} \cdots \right] \quad (29)$$

Diese von Christoffel gefundene Formel liefert nach obiger Bemerkung aus jedem beliebigen kovarianten Tensor $l$ten Ranges einen solchen $(l+1)$ten Ranges, welchen wir dessen »Erweiterung« nennen. Auf diese Operation lassen sich alle Differentialoperationen zurückführen.

Multipliziert man (29) mit $g^{\alpha_1\beta_1} g^{\alpha_2\beta_2} \cdots g^{\alpha_l\beta_l}$ derart, daß die Multiplikation bezüglich der Indizes α eine innere, bezüglich der β eine äußere ist, so erhält man einen Tensor, der bezüglich $\beta_1 \cdots \beta_l$ kontravariant, bezüglich s kovariant ist. Schreibt man schließlich wieder α statt β, so erhält man

$$A_s^{\alpha_1 \cdots \alpha_l} = \frac{\partial A^{\alpha_1 \cdots \alpha_l}}{\partial x_s} + \sum_\tau \left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau \alpha_2 \cdots \alpha_l} + \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} A^{\alpha_1 \tau \alpha_3 \cdots \alpha_l} + \cdots \right]. \quad (30)$$

Diesen Tensor kann man die Erweiterung des kontravarianten Tensors nennen. Ein Blick auf (29) und (30) zeigt, daß die so definierte Erweiterung stets einen Index von kovariantem Charakter liefert. Es ist auch leicht, eine allgemeine Formel für die Erweiterung eines gemischten Tensors anzugeben, welche eine Verschmelzung der Formeln (29) und (30) wäre.

Divergenz. Die Erweiterung eines kontravarianten Tensors vom Range l ist ein gemischter Tensor vom Range $l+1$. Man kann aus ihm einen kontravarianten Tensor vom Range $l-1$ bilden durch innere Multiplikation mit dem gemischten Fundamentaltensor (10), und zwar kann dies auf l verschiedene Arten gemacht werden. Man kann demgemäß l im allgemeinen voneinander verschiedene Divergenzen eines kontravarianten Tensors unterscheiden. Eine derselben lautet

$$A^{\alpha_1 \cdots \alpha_{l-1}} = \sum_{\alpha_l s} A_s^{\alpha_1 \cdots \alpha_l} \delta^s_{\alpha_l}. \quad (31)$$

Bei symmetrischen und bei antisymmetrischen Tensoren ist das Resultat der Divergenzbildung unabhängig davon, welcher der Indizes α_ν hierbei bevorzugt wird.

Einige Hilfsformeln. Bevor wir die abgeleiteten Formeln auf Spezialfälle anwenden, leiten wir einige Differentialeigenschaften des

Fundamentaltensors ab. Durch Differenzieren der Determinante $|g_{\mu\nu}| = g$ nach x_α erhält man

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\, g^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\alpha}. \tag{32}$$

Aus (24a), (24) und (32) erhält man

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \tau \end{Bmatrix} = \sum_\tau \begin{Bmatrix} \tau\mu \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\tau\alpha} g^{\tau\alpha} \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \tag{33}$$

Durch Differenzieren von (10) ergibt sich

$$\sum_\sigma \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}\, g^{\nu\sigma} = -\sum_\sigma \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\, g_{\mu\sigma}. \tag{34}$$

Durch Multiplizieren dieser Gleichung mit $g_{\nu\tau}$ und Summieren über ν, bzw. durch Multiplizieren mit $g_{\mu\tau}$ und Summieren über μ, erhält man mit Rücksicht auf (10) zwei Gleichungen, die bei anderer Bezeichnung der Indizes lauten

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\sigma\tau} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}\, g_{\sigma\mu}\, g_{\tau\nu} \tag{35}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}\, g^{\sigma\mu} g^{\tau\nu}. \tag{36}$$

Erweiterung und Divergenz des Vierervektors. Die Erweiterung des kovarianten Vierervektors ist durch (28a) gegeben. Durch Vertauschen der Indizes μ und ν und Subtraktion erhält man den antisymmetrischen Tensor

$$A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{28b}$$

Als Erweiterung A^μ_ν des kontravarianten Vierervektors A^μ ergibt sich aus (30)

$$A^\mu_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\tau \begin{Bmatrix} \nu\tau \\ \mu \end{Bmatrix} A^\tau.$$

Hieraus die Divergenz

$$\Phi = \sum_{\mu\nu} A^\mu_\nu \delta^\nu_\mu = \sum_\mu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \mu \end{Bmatrix} A^\tau \right),$$

also nach (33)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{g}\, A^\mu). \tag{37}$$

Setzt man hierin für A^μ den kontravarianten Vektor $\sum g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}$ ein, wobei ϕ einen Skalar bedeutet, so erhält man die bekannte Verallgemeinerung des Laplaceschen $\Delta\phi$:

$$\Phi = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}\right). \tag{38}$$

Erweiterung und Divergenz des Tensors zweiten Ranges. In Anwendung auf den kovarianten und kontravarianten Tensor zweiten Ranges liefern (29) und (30) die Tensoren dritten Ranges.

$$A_{\mu\nu s} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_s} - \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix}\mu s\\ \tau\end{Bmatrix} A_{\tau\nu} + \begin{Bmatrix}\nu s\\ \tau\end{Bmatrix} A_{\mu\tau}\right) \tag{29a}$$

$$A_s^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_s} + \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix}s\tau\\ \mu\end{Bmatrix} A^{\tau\nu} + \begin{Bmatrix}s\tau\\ \nu\end{Bmatrix} A^{\mu\tau}\right). \tag{30a}$$

Man überzeugt sich hieraus leicht, daß die »Erweiterung« des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu}$ verschwindet.

Als Divergenz von $A^{\mu\nu}$ nach dem Index ν ergibt sich aus (31), (30a) und (33):

$$A^\mu = \sum_{s\nu} A_s^{\mu\nu} \delta_\nu^s = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_\nu \frac{\partial (A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sum_{\tau\nu} \begin{Bmatrix}\tau\nu\\ \mu\end{Bmatrix} A^{\tau\nu}\sqrt{g}\right). \tag{39}$$

Dies liefert für einen antisymmetrischen Tensor (Sechservektor) wegen der Symmetrie von $\begin{Bmatrix}\tau\nu\\ \mu\end{Bmatrix}$ bezüglich der Indizes τ und ν:

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\nu \frac{\partial (A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu}. \tag{40}$$

Für den Fall, daß $A^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, gestattet (39) eine Umformung, welche für das Folgende von Wichtigkeit ist; wir bilden den zu (A^μ) reziproken kovarianten Vierervektor $\sum_\mu A^\mu g_{\mu\sigma} = A_\sigma$:

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_{\mu\nu} g_{\mu\sigma} \frac{\partial (A_{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sqrt{g} \sum_{\tau\nu} \begin{bmatrix}\tau\nu\\ \sigma\end{bmatrix} A^{\tau\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_{\mu\nu} \frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{g} \sum_{\mu\nu}\left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) A^{\mu\nu}\right).$$

Hieraus, falls $A^{\mu\nu}$ symmetrisch ist:

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu}\left(\frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A^{\mu\nu}\sqrt{g}\right), \tag{41}$$

wofür man bei Einführung des gemischten Tensors $\sum_\mu g_{\sigma\mu} A^{\mu\nu} = A_\sigma^\nu$ auch setzen kann

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_\nu \frac{\partial (A_\sigma^\nu \sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A_\tau^\nu \sqrt{g}\right). \tag{41a}$$

RIEMANN-CHRISTOFFELscher Tensor. Die Formel (29) gestattet eine sehr einfache Ableitung des bekannten Kriteriums dafür, ob ein gegebenes Kontinuum mit gegebenem Linienelement ein euklidisches ist, d. h. ob man es durch eine passend gewählte Substitution erzielen kann, daß ds^2 überall gleich der Quadratsumme der Koordinatendifferentiale wird.

Wir bilden aus dem kovarianten Vierervektor A_μ durch zweimalige Erweiterung gemäß (29) den Tensor dritten Ranges $(A_{\mu\nu\lambda})$. Man erhält

$$
\begin{aligned}
A_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} &- \left[\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda}\right] \\
&- \begin{Bmatrix}\nu\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\mu} + \begin{Bmatrix}\nu\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\mu\\ \sigma\end{Bmatrix} A_\sigma \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\right] A_\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Es folgt hieraus sofort, daß auch $(A_{\mu\lambda\nu} - A_{\mu\nu\lambda})$ ein kovarianter Tensor dritten Ranges ist; es ist also

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \sigma\end{Bmatrix} + \sum_\tau\left(\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda\tau\\ \sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\right)\right] A_\sigma
$$

ein kovarianter Tensor σ dritten Ranges, die eckige Klammer also ein Tensor vierten Ranges $(K^\sigma_{\mu\nu\lambda})$, welcher nach dem Indizes μ, ν, λ kovariant, nach σ kontravariant ist. Alle Komponenten dieses Tensors verschwinden, wenn die $g_{\mu\nu}$ Konstante sind. Dies Verschwinden findet immer statt, wenn es bezüglich eines passend gewählten Koordinatensystems stattfindet. Das Verschwinden der Klammer für alle Indexkombinationen ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß sich das Linienelement auf die euklidische Form bringen läßt; daß diese Bedingung hierfür hinreicht, bedarf allerdings noch eines Beweises.

V-Tensoren. Ein Blick auf die Formeln (37), (39), (40), (41), (41 a) lehrt, daß Tensorkomponenten häufig mit $\sqrt{g}$ multipliziert auftreten. Wir wollen deshalb eine besondere Bezeichnung für die mit $\sqrt{g}$ (bzw. $\sqrt{-g}$, wenn g negativ ist) multiplizierten Tensorkomponenten einführen, indem wir die Produkte mit deutschen Buchstaben bezeichnen, z. B. setzen

$$
\begin{aligned}
A_\sigma\sqrt{g} &= \mathfrak{A}_\sigma \\
A^\sigma_\sigma\sqrt{g} &= \mathfrak{A}^\sigma_\sigma
\end{aligned}
$$

$(\mathfrak{A}_\sigma)$, $(\mathfrak{A}^\sigma_\sigma)$ usw., nennen wir V-Tensoren (Volumtensoren). Sie geben, da $\sqrt{g}\,d\tau = \sqrt{g}\,dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ein Skalar ist, mit $d\tau$ multipliziert, Tensoren im früher definierten Sinne. Bei Benutzung dieser Schreibweise nimmt (41a) beispielsweise die Form an

$$\mathfrak{A}_\tau = \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_\tau^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} \mathfrak{A}_\tau^\nu . \tag{41b}$$

C. Gleichungen der physikalischen Vorgänge bei gegebenem Gravitationsfelde.

Jeder Gleichung der ursprünglichen Relativitätstheorie entspricht eine im Sinne des vorigen Abschnitts allgemein kovariante Gleichung, welche in der verallgemeinerten Relativitätstheorie an die Stelle der ersteren zu treten hat. Bei Aufstellung jener Gleichungen hat man den Fundamentaltensor der $g_{\mu\nu}$ als gegeben zu betrachten. Man erhält so Verallgemeinerungen derjenigen physikalischen Gesetze, welche in der ursprünglichen Relativitätstheorie bereits bekannt sind; die verallgemeinerten Gleichungen geben dabei Aufschluß über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf diejenigen Vorgänge, auf welche sich jene Gleichungen beziehen. Unbekannt bleiben zunächst nur die Differentialgesetze des Gravitationsfeldes selbst, die auf eine besondere Weise gewonnen werden müssen. Wir wollen alle übrigen (z. B. mechanische, elektromagnetische) Gesetze unter dem Namen »Gesetze der materiellen Vorgänge« zusammenfassen.

§ 9. Impuls-Energie-Satz für die »materiellen Vorgänge«.

Das allgemeinste »materielle Vorgänge« betreffende Gesetz ist der Impuls-Energie-Satz. Derselbe läßt sich nach der ursprünglichen Relativitätstheorie in der Formulierung Minkowski-Laue folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial (i\mathfrak{i}_z)}{\partial l} &= f_x \\
\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial (i\mathfrak{i}_y)}{\partial l} &= f_y \\
\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{(\partial i\mathfrak{i}_z)}{\partial l} &= f_z \\
\frac{\partial (i\mathfrak{f}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (i\mathfrak{f}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (i\mathfrak{f}_z)}{\partial z} + \frac{\partial (-\eta)}{\partial l} &= iw
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Dabei ist als Zeitkoordinate $l = it$ gewählt, wobei die reelle Zeit t so gemessen wird, daß die Leichtgeschwindigkeit gleich 1 wird.

$$\begin{array}{cccc} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & i\mathfrak{i}_x \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & i\mathfrak{i}_y \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & i\mathfrak{i}_z \\ i\mathfrak{f}_x & i\mathfrak{f}_y & i\mathfrak{f}_z & -\eta \end{array}$$

ist ein symmetrischer Tensor ($T_{\sigma\nu}$) zweiten Ranges (Energietensor)

$$f_x,\ f_y,\ f_z,\ iw$$

ein Vierervektor (K_σ), beides natürlich bezüglich linearer orthogonaler Substitutionen, welche in der ursprünglichen Relativitätstheorie die allein berechtigten sind. Formal betrachtet, besagt (42), daß (K_σ) gleich der Divergenz des Energietensors $T_{\sigma\nu}$ ist. Physikalisch bedeuten

- p_{xx} usw. die »Spannungskomponenten«
- $\mathfrak{i}$ den Vektor der Impulsdichte
- $\mathfrak{f}$ den Vektor des Energiestromes
- η die Energiedichte
- f den Vektor der pro Volumeinheit von außen auf das System wirkenden Kraft
- w die dem System pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte Energie.

Falls das System ein »vollständiges« ist, verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (42).

Unsere Aufgabe ist es nun, die allgemein kovarianten Gleichungen aufzusuchen, welche den Gleichungen (42) entsprechen. Es ist klar, daß auch die verallgemeinerten Gleichungen formal dadurch charakterisiert sind, daß die Divergenz eines Tensors zweiten Ranges einem Vierervektor gleichgesetzt wird. Bei jeder solchen Verallgemeinerung besteht aber die Schwierigkeit, daß es in der verallgemeinerten Relativitätstheorie im Gegensatze zur ursprünglichen Tensoren verschiedenen Charakters (kovariante, kontravariante, gemischte, ferner von allen diesen Gattungen V-Tensoren) gibt, so daß stets eine gewisse Wahl getroffen werden muß. Diese Wahl bringt aber keine physikalische Willkür mit sich; sie hat nur Einfluß darauf, welche Variabeln bei der Darstellung bevorzugt werden[1]. Die Wahl ist so zu treffen, daß die Gleichungen möglichst übersichtlich werden, und die in denselben eingeführten Größen eine möglichst anschauliche physikalische Bedeutung erhalten. Es erweist sich, daß man diesen Gesichtspunkten am besten gerecht wird, wenn man dem Tensor $T_{\sigma\nu}$ einen gemischten V-Tensor $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$, dem

[1] Es hängt dies damit zusammen, daß aus jedem Tensor Tensoren anderen Charakters durch Multiplikation mit dem Fundamentaltensor bzw. mit $\sqrt{-g}$ gewonnen werden können.

Vierervektor (K_σ) den kovarianten V-Vierervektor $\mathfrak{K}_\sigma$ entsprechen läßt. Man hat dann die Divergenz gemäß (41b) zu bilden und erhält als Verallgemeinerung von (42) die allgemein kovarianten Gleichungen

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{T}_\tau^\nu + \mathfrak{K}_\sigma \,. \tag{42a}$$

Dabei bezeichnen wir, indem wir die obigen Benennungsweisen aufrechterhalten, die Komponenten von $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ gemäß dem Schema

	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\sigma = 2$	$-p_{xx}$	$-p_{xy}$	$-p_{xz}$	$-\mathfrak{i}_x$
$\sigma = 1$	$-p_{yx}$	$-p_{yy}$	$-p_{yz}$	$-\mathfrak{i}_y$
$\sigma = 3$	$-p_{zx}$	$-p_{zy}$	$-p_{zz}$	$-\mathfrak{i}_z$
$\sigma = 4$	$\mathfrak{f}_x$	$\mathfrak{f}_y$	$\mathfrak{f}_z$	η

(43)

die Komponenten von $\mathfrak{K}_\sigma$ gemäß dem Schema

$\sigma = 1$	$-f_x$
$\sigma = 2$	$-f_y$
$\sigma = 3$	$-f_z$
$\sigma = 4$	w

(44)

Der zu $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ gehörige rein kovariante (bzw. rein kontravariante) Tensor ist hierbei symmetrisch. Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichungen (42a) in die Gleichungen (42) übergehen, wenn den Größen $g_{\mu\nu}$ die speziellen Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \tag{45}$$

gegeben werden.

Diskussion von (42a). Wir fassen zunächst den Spezialfall ins Auge, daß ein Gravitationsfeld nicht vorhanden ist, d. h. daß die $g_{\mu\nu}$ sämtlich als konstant anzusehen sind. Dann verschwindet das erste Glied der rechten Seite von (42a). Das betrachtete System sei räumlich (d. h. in bezug auf x_1, x_2, x_3) endlich ausgedehnt. Das Integral einer Größe ϕ über

x_1, x_2, x_3, ausgedehnt über das ganze System bezeichen wir mit ϕ. Dann erhalten wir aus (42a) durch eine derartige Integration über x_1, x_2, x_3

$$\frac{d\bar{\mathfrak{i}}}{dx_4} = \bar{f}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx_4} = \bar{w}.$$

Es sind dies die Bilanzsätze des Impulses und der Energie in der üblichen Form, aus welchen im Falle des Fehlens äußerer Kräfte die zeitliche Konstanz des Impulses $\bar{\mathfrak{i}}$ und der Energie $\bar{\eta}$ folgt. In diesem Falle drückt sich der Energie-Impulssatz also durch einen eigentlichen Erhaltungssatz aus, der in differentieller Schreibweise durch die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (42b)$$

ausgedrückt wird, falls äußere Kräfte fehlen ($\mathfrak{K}_\sigma = 0$).

Existiert ein Schwerefeld, d. h. sind die $g_{\mu\nu}$ nicht konstant, so gilt auch dann kein eigentlicher Erhaltungssatz für das betrachtete (räumlich endliche) System, wenn die $\mathfrak{K}_\sigma$ verschwinden. Denn es besteht keine Gleichung vom Typus von (42b), da das erste Glied der rechten Seite von (42a) nun nicht verschwindet. Es entspricht dem die physikalische Tatsache, daß in einem Gravitationsfelde Impuls und Energie eines materiellen Systems sich mit der Zeit ändern, indem das Gravitationsfeld auf das materielle System Impuls und Energie überträgt. Die physikalische Bedeutung des ersten Gliedes der rechten Seite von (42) ist also derjenigen des zweiten Gliedes analog. Die Komponenten dieses ersten Gliedes, welche wir

$$-f_x^{(g)},\ -f_y^{(g)},\ -f_z^{(g)},\ w^{(g)}$$

nennen können, drücken also den negativen Impuls bzw. die Energie aus, welche das Gravitationsfeld pro Volumen- und Zeiteinheit auf das materielle System überträgt.

Im Falle des Verschwindens der $\mathfrak{K}_\sigma$ muß aber gefordert werden, daß für das materielle System und das zugehörige Gravitationsfeld zusammen Sätze bestehen, welche die Konstanz des Gesamtimpulses und der Gesamtenergie von Materie und Gravitationsfeld ausdrücken. Es kommt dies darauf hinaus, daß ein Komplex von Größen $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ für das Gravitationsfeld existieren muß, derart, daß die Gleichungen

$$\sum_\nu \frac{\partial(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (42c)$$

bestehen. Auf diesen Punkt kann erst dann näher eingegangen werden, wenn die Differentialgesetze für das Gravitationsfeld aufgestellt sind.

Man sieht, daß für die Einwirkung des Gravitationsfeldes auf die materiellen Vorgänge die Größen

$$\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \tag{46}$$

maßgebend sind, die wir deshalb »Komponenten des Gravitationsfeldes« nennen wollen.

§ 10. Bewegungsgleichungen kontinuierlich verteilter Massen.

Natürlich gemessene Größen. Es wurde bereits hervorgehoben, daß es in der verallgemeinerten Relativitätstheorie nicht möglich ist, Koordinatensysteme so zu wählen, daß räumliche und zeitliche Koordinatendifferenzen mit an Maßstäben und Uhren erhaltenen Meßergebnissen in so unmittelbarer Weise zusammenhängen, wie dies gemäß der ursprünglichen Relativitätstheorie der Fall ist. Eine derartige bevorzugte Koordinatenwahl ist nur im Unendlichkleinen möglich, indem gesetzt wird

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu} = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2 . \tag{46}$$

Die $d\xi$ sind (vgl. § 2) genau so meßbar wie die Koordinaten der ursprünglichen Relativitätstheorie; sie sind aber keine vollständigen Differentiale. Im Unendlichkleinen lassen sich alle Größen auf das Koordinatensystem der $d\xi$ beziehen: geschieht dies, so nennen wir sie »natürlich gemessene« Größen. Das Koordinatensystem der $d\xi$ nennen wir »Normalsystem«.

Gemäß (17a) gilt für unendlich kleine vierdimensionale Volumina

$$\sqrt{-g} \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4 . \tag{47}$$

Das betrachtete Volumen bestehe nun in einem unendlich kurzen Stück eines unendlich dünnen vierdimensionalen Fadens. dv sei das über ihn erstreckte Integral $\int dx_1\, dx_2\, dx_3$. Das System der $d\xi$ wählen wir so, daß die $d\xi_4$-Achse in die Achse des Fadens fällt, dann ist $d\xi_4 = ds$, und das Integral $\int d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$ ist als natürlich gemessenes Ruhevolumen dv_0 des Fadens zu bezeichnen. Es ist nach (47)

$$\sqrt{-g}\, dv\, dx_4 = dv_0\, ds \tag{47a}$$

Masseneinheit. Die Vergleichung der Massen zweier materieller Punkte ist nach den gewöhnlichen Methoden möglich. Es bedarf also zur Messung von Massen nur einer Masseneinheit. Diese sei definiert als diejenige Menge Wasser, welche im natürlich gemessenen Volumen 1 im Zustande relativer Ruhe Platz findet. Die Masse des materiellen Punktes ist ihrer Definition nach eine Invariante bezüglich aller Transformationen.

Dichteskalar. Unter der skalaren Dichte kontinuierlich verbreiteter Materie verstehen wir deren Masse pro (mitbewegter) natürlich gemessener Volumeinheit. Der Dichteskalar charakterisiert zusammen mit den Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx_\mu}{ds}$ die Materie im Sinne der Hydrodynamik vollständig, falls man von der Existenz der Flächenkräfte absehen darf.

Energietensor strömender Massen. Bewegungsgleichungen. Aus dem Skalar ρ_0 und dem kontravarianten Vierervektor $\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ der Geschwindigkeit läßt sich der gemischte V-Tensor bilden

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \rho_0 \sqrt{-g}\, \frac{dx_\nu}{ds} \sum_\mu g_{\sigma\mu} \frac{dx_\mu}{ds}\,. \tag{48}$$

Es liegt die Vermutung nahe, daß $(\mathfrak{T}_\sigma^\nu)$ der Energietensor der ponderabeln Massenströmung sei, und daß die Gleichungen (44) in Verbindung mit (48) den EULERschen Strömungsgleichungen entsprechen für den Fall inkohärenter Massen, d. h. für den Fall, daß Flächenkräfte vernachlässigt werden können. Wir beweisen dies, indem wir aus diesen Gleichungen die früher angegebenen für die Bewegung des materiellen Punktes ableiten.

Die Ausdehnung der betrachteten Massen nach x_1, x_2, x_3 sei unendlich klein. Integrieren wir (44) bezüglich dieser Variabeln über den ganzen »Strömungsfaden« und setzen wir zur Abkürzung $dx_1\, dx_2\, dx_3 = dv$, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int \mathfrak{T}_\sigma^4 dv\right\} = \sum_{\tau\nu}\left\{\Gamma_{\nu\sigma}^\tau \int \mathfrak{T}_\tau^\nu dv\right\} + \int \mathfrak{K}_\sigma dv\,. \tag{50}$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ den in (48) gegebenen Ausdruck, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß gemäß (47a)

$$dv = \frac{dv_0}{\sqrt{-g}} \frac{ds}{dx_4}\,, \tag{47b}$$

und daß

$$m = \int \rho_0\, dv_0 \tag{49}$$

ist die Gleichung:

$$\frac{d}{dx_4}\left\{m\sum_{\mu} g_{\tau\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\right\} = \sum_{\nu\tau}\left\{\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}\frac{dx_\nu}{dx_4}\, m\sum_{\mu} g_{\tau\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\right\} + \int \mathfrak{K}_\sigma\, dv\,, \qquad (50\text{a})$$

oder, indem man zur Abkürzung den kovarianten Vierervektor

$$\mathrm{I}_\sigma = m\sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds} \qquad (51)$$

einführt[1]

$$\frac{d\mathrm{I}_\sigma}{dx_4} = \sum_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}\frac{dx_\nu}{dx_4}\mathrm{I}_\tau + \int \mathfrak{K}_\sigma\, dv\,. \qquad (50\text{b})$$

Es ist dies die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes, falls die vierte Koordinate (»Zeitkoordinate«) als unabhängige Variable gewählt wird. Aus dem Schema (43) geht hervor, daß die Komponenten von (I_σ) ihrer physikalischen Bedeutung nach gleich sind den negativ genommenen Impulskomponenten bzw. der Energie des materiellen Punktes. In dem Spezialfalle der ursprünglichen Relativitätstheorie, d. h. wenn die $g_{\mu\nu}$ die in (18) angegebenen Werte haben, ist

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{I}_1 &= \frac{m\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{I}_4 &= \frac{m}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

falls $\mathfrak{q}$ den dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektor, q dessen Betrag bedeutet. Dies ist im Einklang mit den Resultaten jener Theorie, mit Rücksicht darauf, daß wir durch die Festsetzung (18) als Zeiteinheit die »Lichtsekunde« gewählt haben[1].

---

[1] An dieser Stelle sei erwähnt, warum nach meiner Meinung nicht Gleichung (39), sondern Gleichnng (41) für die Formulierung des Impuls-Energiesatzes herangezogen wurde. Es wäre gemäß (39) der Energietensor als kontravarianter V-Tensor und die Größen $\left\{\begin{smallmatrix}\tau\nu\\ \mu\end{smallmatrix}\right\}$ als Komponenten des Gravitationsfeldes aufzufassen. In § 11 wären wir dann auf dem dargelegten Wege dazu gelangt, die Komponenten des kontravarianten Vierervektors $\left(\mathrm{I}^\sigma = m\frac{dx_\sigma}{ds}\right)$ als Impulskomponenten und Energie des materiellen Punktes aufzufassen. Daß diese Auffassung eine unserer physikalischen Auffassung vom Wesen des Impulses widerstrebende ist, soll hier an einem ganz speziellen Falle gezeigt werden.

In einem Raume ohne Gravitationsfeld führen wir ein Koordinatensystem ein, das sich von einem »Normalsystem« nur dadurch unterscheidet, daß die x_1-Achse mit der x_2-Achse (von einem Normalsystem aus beurteilt) einen von $\frac{\pi}{2}$ abweichenden Winkel φ bildet. Dann ist

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - 2dx_1\,dx_2\cos\varphi - dx_3^2 + dx_4^2\,.$$

Verschwindet in (50b) $\mathfrak{K}_\sigma$, d. h. die äußeren Kräfte mit Ausschluß der vom Gravitationsfelde herrührenden, so erhält man durch Multiplikation der Gleichung mit $\frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{1}{m}$ nach einfacher Rechnung die mit (1) gleichwertige Gleichung (23a) für die Bewegung des materiellen Punktes im Gravitationsfelde. Damit ist die Vermutung bestätigt, daß $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ in (48) tatsächlich der Energietensor der strömenden Materie ist.

Energietensor der idealen Flüssigkeit. Wir wollen nun (48) derart vervollständigen, daß wir den Energietensor einer idealen Flüssigkeit erhalten, mit Berücksichtigung der auftretenden Flächenkräfte (Druck) und die mit den Dichteänderungen verbundenen Energieänderungen[1]. Es läßt sich ohne Mühe der Energietensor an einer Stelle des Mediums gewinnen für dasjenige Normalsystem, dessen $d\xi_4$-Achse in dem betrachteten Punkte mit dem Element der vierdimensionalen Strömungslinie zusammenfällt.

Es sei ϕ das (natürlich gemessene) Volumen einer solchen Menge der Substanz, welche auf den Druck 0 gebracht das Volumen ϕ_0 und die Masse 1 besitzt. Die natürlich gemessene Energie ε dieses Quantums beim Volumen ϕ ist dann, wenn nur adiabatische Zustandsänderungen in Betracht gezogen werden

$$1 - \int_{\phi_0}^{\phi} p\, d\phi\,,$$

wobei p den natürlich gemessenen Druck bedeutet. Denn es ist nach (52) die Energie der ruhenden Masseneinheit gleich 1, wenn der Druck verschwindet. Das negativ genommene Integral ist Funktion des Druckes p allein; wir nennen es P. Die Energie pro Volumeneinheit ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit $\rho_0 = \frac{1}{\phi}$. Die Energiedichte ist also

$$\rho_0 (1 + P)\,.$$

Dann wird z. B. $-\mathrm{I}^2 = m \frac{dx_2}{ds}$. Diese Größe verschwindet, wenn der Punkt in Richtung der x_1-Achse bewegt ist. Es ist aber klar, daß in dem betrachteten Falle eine x_2-Komponente des Impulses tatsächlich existiert, die sich von der x_1-Komponente nur um den Faktor $\cos\phi$ unterscheidet.

Wenn man aber den Impulssatz auf (41) gründet, und demnach gemäß (51) den kovarianten Vierervektor für die Berechnung von Impuls und Energie heranzieht, so ergibt sich in dem betrachteten Falle $-\mathrm{I}_2 = -g_{12}\, m \frac{dx_2}{ds} = m \frac{dx_1}{ds} \cos\phi = (-\mathrm{I}_1) \cos\phi$, wie verlangt werden muß.

[1] Dabei beschränken wir uns aber auf adiabatische Strömungsvorgänge einer Flüssigkeit mit einheitlicher adiabatischer Zustandsgleichung.

Der gesuchte Tensor ist also bei unserer besonderen Koordinatenwahl gegeben durch die Komponenten

$$\begin{matrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0(1+P). \end{matrix}$$

Bei beliebig gewähltem Bezugssystem geht dieser Tensor offenbar über in:

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -p\,\delta_\sigma^\nu \sqrt{-g} + \rho_0 \sqrt{-g}\,(1+p+P)\frac{dx_\nu}{ds}\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}. \quad (48\text{a})$$

Denn ρ_0, p und P sind in ihrer Definition nach Skalare. Setzen wir zur Abkürzung

$$\rho_0\sqrt{-g}\,(1+p+P) = \rho^*,$$

so ergeben die Gleichungen (42a)

$$-\sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_\sigma} + \sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho^*\, g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\rho^*\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + \mathfrak{K}_\sigma. \quad (53)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die fünf unbekannten Funktionen p und $\frac{dx_\nu}{ds}$, da zwischen letzten die Beziehung

$$\sum g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 1$$

besteht, und ρ bei bekannter adiabatischer Zustandsgleichung der Flüssigkeit eine bekannte Funktion von p ist. Die $g_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{K}_\sigma$ sind als bekannt anzusehen. Die Gleichungen (53) ersetzen die Eulerschen Gleichungen inklusive der Kontinuitätsgleichung; das läßt sich durch Spezialisierung auf den Fall der ursprünglichen Relativitätstheorie leicht beweisen, wenn man noch die daraus entspringenden Vernachlässigungen einführt, daß die Geschwindigkeiten stets klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, und daß die Drucke so klein sind, daß sie die Trägheit nicht merklich beeinflussen.

§ 11. Die elektromagnetischen Gleichungen.

Die Überlegungen, die zu den allgemein kovarianten Gesetzen der elektromagnetischen Vorgänge führen, sind denjenigen, die bei Einreihung des Gebietes in die ursprüngliche Relativitätstheorie angestellt werden müssen, ganz analog, so daß wir uns kurz fassen können.

Elektromagnetische Gleichungen für das Vakuum. Es seien $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{F}^{\mu\nu *}$ zwei duale, kontravariante V-Sechservektoren (vgl. (24)). Aus (40) folgt dann, daß die Ausdrücke

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad \sum \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu *}}{\partial x_\nu}$$

die Komponenten kontravarianter V-Vierervektoren sind. Durch Nullsetzen dieser Komponenten erhält man die MAXWELLschen Gleichungen für das Vakuum in allgemein kovarianter Gestalt. Man erkennt in der Tat leicht, daß diese Gleichungen in die MAXWELLschen übergehen, wenn man die Komponenten von $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{F}^{\mu\nu *}$ nach den Schemen

$\mathfrak{F}^{23}$	$\mathfrak{F}^{31}$	$\mathfrak{F}^{12}$	$\mathfrak{F}^{14}$	$\mathfrak{F}^{24}$	$\mathfrak{F}^{34}$
$\mathfrak{h}_x$	$\mathfrak{h}_y$	$\mathfrak{h}_z$	$-\mathfrak{e}_x$	$-\mathfrak{e}_y$	$-\mathfrak{e}_z$

$\mathfrak{F}^{23*}$	$\mathfrak{F}^{31*}$	$\mathfrak{F}^{12*}$	$\mathfrak{F}^{14*}$	$\mathfrak{F}^{24*}$	$\mathfrak{F}^{34*}$
$-\mathfrak{e}^*_x$	$-\mathfrak{e}^*_y$	$-\mathfrak{e}^*_z$	$-\mathfrak{h}^*_x$	$-\mathfrak{h}^*_y$	$-\mathfrak{h}^*_z$

bezeichnet und berücksichtigt, daß gemäß (24)

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}$$
$$\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}$$

ist, wenn den $g_{\mu\nu}$ die speziellen Werte (18) gegeben werden.

Ladungsdichte, Konvektionsstrom. Es gibt offenbar im mitbewegten Normalsystem eine elektrische Ladungsdichte; diese ist ihrer Definition gemäß ein Skalar. Den durch Multiplikation mit $\sqrt{-g}$ hieraus entstehenden V-Skalar bezeichnen wir mit $\rho_{(e)}$. Aus ihm und dem kontravarianten Vierervektor $\frac{dx_\mu}{ds}$ bilden wir den kontravarianten V-Vierervektor des Konvektionsstromes

$$\rho_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds}$$

LORENTZsche Gleichungen für das Vakuum. Führt man im LORENTZschen Sinne alle Wechselwirkungen zwischen Materie und elektromagnetischem Felde auf Bewegung elektrischer Ladungen zurück, so wird man sich auf die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \rho_e \frac{dx_\mu}{ds} \\ \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu *}}{\partial x_\nu} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

zu stützen haben. Sie sind die Grundgleichungen der LORENTZschen Elektronentheorie in allgemein kovarianter Gestalt. Sie geben Aufschluß über die Gesetze, nach welchen das Gravitationsfeld auf das elektromagnetische Feld einwirkt.

Elektromagnetische Gleichungen bewegter Körper für den Fall, daß nur Körper mit der Dielektrizitätskonstante 1 und der magnetischen Permeabilität 1 berücksichtigt werden. Es mögen elektrische und magnetische Polarisation der Körper nur insofern Berücksichtigung finden, als sie zu elektrischen und magnetischen Ladungsdichten Veranlassung geben; elektrische und magnetische »Polarisationsströme« sollen nicht auftreten. Dagegen sollen elektrische Leitungsströme berücksichtigt werden. Die allgemein kovarianten Feldgleichungen für diesen Fall findet man, indem man auf der rechten Seite der Gleichungen einen elektrischen bzw. magnetischen Konvektionsstrom sowie einen elektrischen Leitungsstrom berücksichtigt.

Es sei ρ_e die Ladungsdichte im vorhin definierten Sinne der Polarisations- und Leitungselektronen zusammen; dann ist $\left(\rho_{(e)}\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ der V-Vierervektor des durch Polarisations- und Leitungselektronen zusammen gelieferten Konvektionsstromes.

ρ_m sei im vorher definierten Sinne die magnetische Ladungsdichte, welche von der (starren) magnetischen Polarisation herrührt. $\left(\rho_{(m)}\frac{dx_\mu}{ds}\right)$ ist dann der V-Vierervektor des magnetischen Konvektionsstromes.

Dem Leitungsstrome wird ebenfalls ein V-Vierervektor entsprechen, den wir mit $(\mathfrak{L}^\mu)$ bezeichnen. Er ist dadurch bestimmt, daß im »Normalsystem«

$$\mathfrak{L}^1 = -\lambda\mathfrak{F}^{14} \qquad \mathfrak{L}^2 = -\lambda\mathfrak{F}^{24} \qquad \mathfrak{L}^3 = -\lambda\mathfrak{F}^{34} \qquad \mathfrak{L}^4 = 0$$

und anderseits

$$\frac{dx_1}{ds} = 0 \qquad \frac{dx_2}{ds} = 0 \qquad \frac{dx^3}{ds} = 0 \qquad \frac{dx_4}{ds} = 1$$

ist. Man wird dieser Bedingung gerecht, indem man setzt

$$\mathfrak{L}^\mu = -\lambda\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\,\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{dx_\beta}{ds}. \tag{55}$$

Die Feldgleichungen sind dann

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu \frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{dx_\nu} &= \rho_{(e)}\frac{dx_\mu}{ds} + \mathfrak{L}^\mu \\ \sum_\nu \frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu*}}{dx_\nu} &= \rho_{(m)}\frac{dx_\mu}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Feldgleichungen für isotrope, elektrisch und magnetisch polarisierbare, bewegte Körper. Wir modifizieren den soeben betrachteten Fall dahin, daß wir auch elektrische und magnetische Polarisationsströme berücksichtigen. Dabei wird angenommen, daß für das mitbewegte Normalsystem die Komponenten der Feldstärken diesen Polarisationen proportional seien.

Die Feldgleichungen für diesen Fall erhalten wir aus (56), indem wir auf den rechten Seiten von (56) Ausdrücke für den V-Vierervektor des elektrischen bzw. magnetischen Polarisationsstromes hinzufügen. Die elektrische Polarisation stellen wir durch einen kontravarianten V-Vierervektor ($\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}$) dar, dessen Komponenten für das mitbewegte Normalsystem durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}^{1}_{e} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{14}; \quad \mathfrak{P}^{2}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{24}; \quad \mathfrak{P}^{3}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{34}; \quad \mathfrak{P}^{4}_{(e)} = 0$$

bestimmt sind. Man genügt dieser Festsetzung durch die Gleichung

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)} = -\sigma_{(e)}\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{dx_{\beta}}{ds}. \tag{57}$$

Aus diesem V-Vierervektor bilden wir den V-Sechservektor

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}\frac{dx_{\nu}}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(e)}\frac{dx_{\mu}}{ds}, \tag{58}$$

und aus diesem wieder durch Divergenzbildung gemäß (40) den kontravarianten V-Vierervektor

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}}{\partial x_{\nu}} \tag{59}$$

des elektrischen Konvektionsstromes. Wir bemerken, daß für das Normalsystem die Komponenten dieses Vektors

$$\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_x)}{\partial t} \quad \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_y)}{\partial t} \quad \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_z)}{\partial t} \quad -\left(\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_z)}{\partial z}\right)$$

sind. Setzt man also (59) auf der rechten Seite der ersten der Gleichungen (56) hinzu, so erhält man Gleichungen, welche für das Normalsystem in diejenigen des ersten MAXWELLschen Gleichungssystems für ruhende Körper übergehen. Hierdurch ist die Berechtigung der Festsetzungen (57), (58), (59) begründet.

Für die magnetische Polarisation setzen wir analog fest:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(m)} = -\sigma_{(m)}\sum_{\alpha} g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha *}\frac{dx_{\beta}}{ds} \tag{57a}$$

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)} = \mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}\frac{dx_{\nu}}{ds} - \mathfrak{P}^{\nu}_{(m)}\frac{dx_{\mu}}{ds}, \tag{58a}$$

woraus sich die Komponenten des V-Vierervektors des magnetischen Polarisationsstromes

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}}{\partial x_\nu} \tag{59a}$$

ergeben.

Es ergeben sich also die Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_\nu \frac{\partial(\mathfrak{F}^{\mu\nu} - \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)})}{\partial x_\nu} &= \rho_{(e)} \frac{dx_{(\mu)}}{ds} + \mathfrak{L}^\mu \\ \sum_\nu \frac{\partial(\mathfrak{F}^{\mu\nu*} - \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)})}{\partial x_\nu} &= \rho_{(m)} \frac{dx_\mu}{ds}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

wobei die $\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}$. $\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}$. $\mathfrak{L}^\mu$ mit dem Sechservektor des Feldes durch die Relationen

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \mathfrak{P}^\mu_{(e)} = -\sigma_{(e)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha} \frac{dx_\beta}{ds} & \mathfrak{P}^\mu_{(m)} = -\sigma_{(m)} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha*} \frac{dx_\beta}{ds} & \mathfrak{L}^\mu = -\lambda \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \mathfrak{F}^{\mu\alpha} \frac{dx_\beta}{ds} \\ \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)} = \mathfrak{P}^\mu_{(e)} \frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^\nu_{(e)} \frac{dx_\mu}{ds} & \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)} = \mathfrak{P}^\mu_{(m)} \frac{dx_\nu}{ds} - \mathfrak{P}^\nu_{(m)} \frac{dx_\mu}{ds} & \end{array}\right\} \tag{60a}$$

verbunden sind.

Auch einer Durchführung der Impuls-Energie-Bilanz im Sinne der Gleichung (42a) steht keine Schwierigkeit entgegen. Die bisherigen Ausführungen zeigen aber zur Genüge, wie man bei der Umwandlung bereits bekannter Naturgesetze in absolut kovariante vorzugehen hat.

D. Die Differentialgesetze des Gravitationsfeldes.

Im letzten Abschnitt wurden die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$, welche physikalisch als Komponenten des Gravitationspotentials aufzufassen sind, als gegebene Funktionen der x_ν betrachtet. Es sind noch die Differentialgesetze aufzusuchen, welchen diese Größen genügen. Das erkenntnistheoretisch Befriedigende der bisher entwickelten Theorie liegt darin, daß dieselbe dem Relativitätsprinzip in dessen weitgehendster Bedeutung Genüge leistet. Dies beruht, formal betrachtet, darauf, daß die Gleichungssysteme allgemein, d. h. beliebigen Substitutionen der x_ν gegenüber, kovariant sind.

Es scheint hiernach die Forderung geboten, daß auch die Differentialgesetze für die $g_{\mu\nu}$ allgemein kovariant sein müssen. Wir wollen aber zeigen, daß wir diese Forderung einschränken müssen, wenn wir dem Kausalgesetz vollständig Genüge leisten wollen. Wir beweisen nämlich, daß Gesetze, welche den Ablauf des Geschehens im Gravitationsfelde bestimmen, unmöglich allgemein kovariant sein können.

§ 12. Beweis von der Notwendigkeit einer Einschränkung der Koordinatenwahl.

Wir betrachten einen endlichen Teil Σ des Kontinuums, in welchem ein materieller Vorgang nicht stattfindet. Das physikalische Geschehen in Σ ist dann vollständig bestimmt, wenn in bezug auf ein zur Beschreibung benutztes Koordinatensystem K die Größen $g_{\mu\nu}$ als Funktion der x_ν gegeben werden. Die Gesamtheit dieser Funktionen werde symbolisch durch $G(x)$ bezeichnet.

Es werde ein neues Koordinatensystem K' eingeführt, welches außerhalb Σ mit K übereinstimme, innerhalb Σ aber von K abweiche, derart, daß die auf K' bezogenen $g'_{\mu\nu}$ wie die $g_{\mu\nu}$ (nebst ihren Ableitungen) überall stetig sind. Die Gesamtheit der $g'_{\mu\nu}$ bezeichnen wir symbolisch durch $G'(x')$. $G'(x')$ und $G(x)$ beschreiben das nämliche Gravitationsfeld. Ersetzen wir in den Funktionen $g'_{\mu\nu}$ die Koordinaten x'_ν durch die Koordinaten x_ν, d. h. bilden wir $G'(x)$, so beschreibt $G'(x)$ ebenfalls ein Gravitationsfeld bezüglich K, welches aber nicht übereinstimmt mit dem tatsächlichen (bzw. ursprünglich gegebenen) Gravitationsfelde.

Setzen wir nun voraus, daß die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes allgemein kovariant sind, so sind sie für $G'(x')$ erfüllt (bezüglich K'), wenn sie bezüglich K für $G(x)$ erfüllt sind. Sie sind dann also auch bezüglich K für $G'(x)$ erfüllt. Bezüglich K existierten dann die voneinander verschiedenen Lösungen $G(x)$ und $G'(x)$, trotzdem an den Gebietsgrenzen beide Lösungen übereinstimmten, d. h. durch allgemein kovariante Differentialgleichungen für das Gravitationsfeld kann das Geschehen in demselben nicht eindeutig festgelegt werden.

Verlangen wir daher, daß der Ablauf des Geschehens im Gravitationsfelde durch die aufzustellenden Gesetze vollständig bestimmt sei, so sind wir genötigt, die Wahl des Koordinatensystems derart einzuschränken, daß es ohne Verletzung der einschränkenden Bedingungen unmöglich ist, ein neues Koordinatensystem K' von der vorhin charakterisierten Art einzuführen. Die Fortsetzung des Koordinatensystems ins Innere eines Gebietes Σ hinein darf nicht willkürlich sein.

§ 13. Kovarianz bezüglich linearer Transformationen. Angepaßte Koordinatensysteme.

Nachdem wir gesehen haben, daß das Koordinatensystem Bedingungen zu unterwerfen ist, müssen wir einige Arten der Spezialisierung der Koordinatenwahl ins Auge fassen. Eine sehr weitgehende Spezialisierung erhält man, wenn man nur lineare Transformationen zuläßt. Würden wir von den Gleichungen der Physik nur verlangen, daß sie linearen Transformationen gegenüber kovariant sein müssen, so würde unsere Theorie ihre Hauptstütze einbüßen. Denn eine Transformation auf ein beschleunigtes oder rotierendes System würde dann keine berechtigte Transformation sein, und die in § 1 hervorgehobene physikalische Gleichwertigkeit des »Zentrifugalfeldes« und Schwerefeldes würde durch die Theorie nicht auf eine Wesensgleichheit zurückgeführt. Anderseits aber ist es (wie sich im folgenden zeigen wird) vorteilhaft, zu fordern, daß zu den berechtigten Transformationen auch die linearen gehören. Es sei daher zunächst kurz einiges gesagt über die Modifikation, welche die im Absatz B dargelegte Kovariantentheorie erfährt, wenn statt beliebiger nur lineare Transformationen als berechtigte zugelassen werden.

Kovarianten bezüglich linearer Transformationen. Die in § 3 bis § 8 dargestellten algebraischen Eigenschaften der Tensoren werden dadurch, daß man nur lineare Transformationen zuläßt, nicht vereinfacht; hingegen vereinfachen sich die Regeln für die Bildung der Tensoren durch Differentiation (§ 9) bedeutend.

Es ist nämlich allgemein

$$\frac{\partial}{\partial x'_\varrho} = \sum_\delta \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\delta}.$$

Also ist z. B. für einen kovarianten Tensor zweiten Ranges gemäß (§ 5a)

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\varrho} = \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}\right).$$

Für lineare Substitutionen sind die Ableitungen $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}$ usw. von den x_δ unabhängig, so daß man hat

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\varrho} = \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\varrho} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}.$$

$\left(\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}\right)$ ist also ein kovarianter Tensor dritten Ranges.

Allgemein kann gezeigt werden, daß man durch Differentiation der Komponenten eines beliebigen Tensors nach den Koordinaten wieder einen Tensor erhält, dessen Rang um 1 erhöht ist, wobei der hinzutretende Index kovarianten Charakter hat. Dies ist also die Operation der Erweiterung bei Beschränkung auf lineare Transformationen. Da die Erweiterung in Verbindung mit den algebraischen Operationen die Grundlage für die Kovariantenbildung überhaupt bildet, beherrschen wir damit das System der Kovarianten bezüglich linearer Transformationen. Wir wenden uns nun zu einer Überlegung, die zu einer viel weniger weitgehenden Beschränkung der Koordinatenwahl hinführt.

Transformationsgesetz des Integrals I. Es sei H eine Funktion der $g^{\mu\nu}$ und ihrer ersten Ableitungen $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$, die wir zur Abkürzung auch $g^{\mu\nu}_\sigma$ nennen. I bezeichne das über einen endlichen Teil Σ des Kontinuums erstreckte Integral

$$J = \int H \sqrt{-g}\, d\tau \tag{61}$$

Das zunächst benutzte Koordinatensystem sei K_1. Wir fragen nach der Änderung ΔJ, welche J erfährt, wenn man vom System K_1 auf das unendlich wenig verschiedene Koordinatensystem K_2 übergeht. Bezeichnet man mit $\Delta\phi$ den Zuwachs, welchen die beliebige, auf einen Punkt des Kontinuums sich beziehende Größe ϕ bei der Transformation erleidet, so hat man zunächst gemäß (17)

$$\Delta(\sqrt{-g}\, d\tau) = 0 \tag{62}$$

und ferner

$$\Delta H = \sum_{\mu\nu\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma} \Delta g^{\mu\nu}_\sigma \right). \tag{62a}$$

Die $\Delta g^{\mu\nu}$ lassen sich vermöge (8) durch die Δx_μ ausdrücken, indem man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu\prime} - g^{\mu\nu} \\ \Delta x_\mu &= x'_\mu - x_\mu \end{aligned}$$

berücksichtigt. Man erhält

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_\alpha \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \right) \tag{63}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma} \right\}. \tag{63a}$$

Die Gleichungen (62a). (63), (63a) liefern ΔH als lineare homogene Funktion der ersten und zweiten Ableitungen der Δx_μ nach den Koordinaten.

Bisher haben wir über die Art, wie H von den $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}_\sigma$ abhängen soll, noch keine Festsetzung getroffen. Wir nehmen nun an, daß H bezüglich linearer Transformationen eine Invariante sei; d. h. ΔH soll verschwinden, falls die $\frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}$ verschwinden. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir

$$\frac{1}{2} \Delta H = \sum_{\mu\nu\sigma\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma} \frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}. \tag{64}$$

Mit Hilfe von (64) und (62) erhält man

$$\frac{1}{2}\Delta J = \int d\tau \sum_{\mu\nu\sigma\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} \frac{\partial^2 \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma},$$

und hieraus durch partielle Integration:

$$\frac{1}{2}\Delta J = \int d\tau \sum_{\mu} (\Delta x_\mu B_\mu) + F, \tag{65}$$

wobei gesetzt ist

$$B_\mu = \sum_{\alpha\sigma\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}\left(g^{\nu\alpha}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}\right) \tag{65a}$$

$$F = \int d\tau \sum_{\alpha\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[g^{\nu\alpha}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\nu\sigma}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)\Delta x_\mu\right]. \tag{65b}$$

F läßt sich in ein Oberflächenintegral verwandeln. Es verschwindet, wenn an der Begrenzung die Δx_μ und $\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\sigma}$ verschwinden.

Angepaßte Koordinatensysteme. Wir betrachten wieder den nach allen Koordinaten endlichen Teil Σ unseres Kontinuums, der zunächst auf das Koordinatensystem K bezogen sei. Von diesem Koordinatensystem K ausgehend, denke man sich sukzessive, einander unendlich benachbarte Koordinatensysteme K', K'' usw. eingeführt, derart, daß für den Übergang von jedem System zu dem folgenden die Δx_μ und $\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha}$ an der Begrenzung verschwinden. Wir nennen alle diese Systeme »Koordinatensystem mit übereinstimmenden Begrenzungskoordinaten«. Für jede infinitesimale Koordinatentransformation zwischen benachbarten Koordinatensystemen der Gesamtheit K, K', $K'' \cdots$ ist

$$F = 0,$$

so daß hier statt (65) die Gleichung

$$\frac{1}{2}\Delta J = -\int d\tau \, \Delta x_\mu B_\mu \tag{66}$$

tritt. Unter allen Systemen mit übereinstimmenden Begrenzungskoordinaten wird es solche geben, für welche J ein Extremum ist gegenüber den J-Werten aller benachbarten Systeme mit übereinstimmenden Begrenzungskoordinaten; solche Koordinatensysteme nennen wir »dem Gravitationsfeld angepaßte Koordinntensysteme«. Für angepaßte Systeme gelten nach (66), weil die Δx_μ im Innern von Σ frei wählbar sind, die Gleichungen

$$B_\mu = 0. \tag{67}$$

Umgekehrt ist (67) hinreichende Bedingung dafür, daß das Koordinatensystem ein dem Gravitationsfeld angepaßtes ist.

Indem wir im folgenden Differenzialgleichungen des Gravitationsfeldes aufstellen, welche nur für angepaßte Koordinatensysteme Gültigkeit beanspruchen, vermeiden wir die im § 13 dargelegte Schwierigkeit. In der Tat ist es bei Beschränkung auf angepaßte Koordinatensysteme nicht gestattet, ein außerhalb Σ gegebenes Koordinatensystem ins Innere von Σ in beliebiger Weise stetig fortzusetzen.

§ 14. Der H-Tensor.

Die Gleichung (65) führt uns zu einem Satze, der für die ganze Theorie von fundamentaler Bedeutung ist. Wenn wir das Gravitationsfeld der $g_{\mu\nu}$ unendlich wenig variieren, d. h. die $g_{\mu\nu}$ durch $g^{\mu\nu}+\delta g^{\mu\nu}$ ersetzen, wobei die $\delta g^{\mu\nu}$ in einer endlich breiten, der Begrenzung von Σ anliegenden Zone verschwinden mögen, so wird H in $H+\delta H$ und das Integral J in $J+\delta J$ übergehen. Wir behaupten nun, daß stets die Gleichung

$$\Delta\{\delta J\} = 0 \tag{68}$$

gilt, wie die $\delta g_{\mu\nu}$ auch gewählt werden mögen, falls nur die Koordinatensysteme (K_1 und K_2) bezüglich des unvariierten Gravitationsfeldes angepaßte Koordinatensysteme sind; d. h. bei Beschränkung auf angepaßte Koordinatensysteme ist δJ eine Invariante.

Zum Beweise denken wir uns die Variationen $\delta g^{\mu\nu}$ aus zwei Teilen zusammengesetzt; wir schreiben also

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta_1 g^{\mu\nu} + \delta_2 g^{\mu\nu}, \tag{69}$$

welche Teilvariationen in folgender Weise gewählt werden:

a) Die $\delta_1 g^{\mu\nu}$ seien so gewählt, daß das Koordinatensystem K_1 nicht nur dem (wirklichen) Gravitationsfelde der $g^{\mu\nu}$, sondern auch dem (variierten) Gravitationsfelde der $g^{\mu\nu}+\delta g^{\mu\nu}$ angepaßt sei. Es bedeutet dies, daß nicht nur die Gleichung

$$B_\mu = 0,$$

sondern auch die Gleichungen

$$\delta_1 B_\mu = 0 \tag{70}$$

gelten soll. Die $\delta_1 g^{\mu\nu}$ sind also nicht voneinander unabhängig, sondern es bestehen zwischen ihnen 4 Differentialgleichungen.

b) Die $\delta_2 g^{\mu\nu}$ seien so gewählt, wie sie ohne Änderung des Gravitationsfeldes durch bloße Variation des Koordinatensystems erzielt werden könnten, und zwar durch eine Variation in demjenigen Teilgebiete von Σ, in welchem die $\delta g^{\mu\nu}$ von Null verschieden sind. Eine derartige Variation ist durch vier voneinander unabhängige Funktionen (Variationen der Koordinaten) bestimmt. Es ist klar, daß im allgemeinen $\delta_2 B_\mu \neq 0$ ist.

Die Superposition dieser beiden Variationen ist also durch

$$(10-4)+4=10$$

voneinander unabhängige Funktionen bestimmt; sie wird also einer beliebigen Variation der $\delta g^{\mu\nu}$ äquivalent sein. Der Beweis unseres Satzes ist also geleistet, wenn Gleichung (68) für beide Teilvariationen bewiesen ist.

Beweis für die Variation δ_1: Durch δ_1-Variation von (65) erhält man unmittelbar

$$\frac{1}{2}\Delta(\delta_1 J) = \int d\tau \sum_\mu (\Delta x_\mu \, \delta_1 B_\mu) + \delta_1 F. \tag{65a}$$

Da an der Begrenzung von Σ die δ_1-Variationen der $g^{\mu\nu}$ und ihrer sämtlichen Ableitungen verschwinden, so verschwindet gemäß (65b) die in ein Oberflächenintegral verwandelbare Größe $\delta_1 F$. Hiernach und nach (70) geht (65a) über in die behauptete Beziehung

$$\Delta(\delta_1 J) = 0. \tag{68a}$$

Beweis für die Variation δ_2: Die Variation $\delta_2 J$ entspricht einer infinitesimalen Koordinatentransformation bei festgehaltenen Begrenzungskoordinaten. Da das Koordinatensystem bezüglich des unvariierten Gravitationsfeldes ein angepaßtes sein soll, so ist also gemäß der Definition des angepaßten Koordinatensystems

$$\delta_2 J = 0.$$

Es werde zunächst angenommen, daß die betrachtete Variation des Gravitationsfeldes bezüglich des Koordinatensystems K_1 als eine δ_2-Variation gewählt sei; dann ist also zunächst

$$\delta_2(J_1) = 0.$$

Ist diese Variation dann auch bezüglich K_2 eine δ_2-Variation, was nachher bewiesen werden wird, so gilt bezüglich K_2 die analoge Gleichung

$$\delta_2(J_2) = 0.$$

Durch Subtraktion folgt dann die zu beweisende Gleichung

$$\delta_2(\Delta J) = \Delta(\delta_2 J) = 0. \tag{68b}$$

Es ist noch der Nachweis zu erbringen, daß die betrachtete Variation auch bezüglich K_2 eine δ_2-Variation ist. Wir bezeichnen symbolisch mit G_1 bzw. G_2 die unvariierten, auf K_1 bzw. K_2 bezogenen Tensoren der $g^{\mu\nu}$, mit G_1^* bzw. G_2^* die variierten, auf K_1 bzw. K_2 bezogenen Tensoren $g^{\mu\nu}$. Von G_1 zu G_2 bzw. von G_1^* zu G_2^* gelangt man durch die Koordinatentransformation T; die inverse Substitution sei T^{-1}. Ferner gelange man von G_1 zu G_1^* durch die Koordinatentransformation t. Dann erhält man G_2^* aus G_2 durch die Aufeinanderfolge

$$T^{-1}-t-T$$

von Transformationen, also wieder durch eine Koordinatentransformation. Damit ist gezeigt, daß die betrachtete Variation der $g^{\mu\nu}$ auch bezüglich K_2 eine δ_2-Variation ist.

Aus (68a) und (68b) folgt endlich die zu beweisende Gleichung (68).

Aus dem bewiesenen Satze leiten wir die Existenz eines aus 10 Komponenten bestehenden Komplexes ab, der bei Beschränkung auf angepaßte Koordinatensysteme Tensorcharakter besitzt. Nach (61) hat man

$$\begin{aligned}\delta J &= \delta\left\{\int H\sqrt{-g}\,d\tau\right\}\\ &= \int d\tau \sum_{\mu\nu\sigma}\left\{\frac{\partial(H\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(H\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\delta g_\sigma^{\mu\nu}\right\}\end{aligned}$$

oder, da $\delta g_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\delta g^{\mu\nu})$, nach partieller Integration und mit Rücksicht darauf, daß die $\delta(g^{\mu\nu})$ an der Begrenzung verschwinden.

$$\delta J = \int d\tau \sum_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\right)\right\} \tag{71}$$

Wir haben nun bewiesen, daß δJ bei Beschränkung auf angepaßte Koordinatensysteme eine Invariante ist. Da die $\delta g^{\mu\nu}$ nur in einem unendlich kleinen Gebiete von Null verschieden zu sein brauchen und $\sqrt{-g}\,d\tau$ ein Skalar ist, so ist auch der durch $\sqrt{-g}$ dividierte Integrand eine Invariante, d. h. die Größe

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum \delta g^{\mu\nu}\mathfrak{E}_{\mu\nu}, \tag{72}$$

wobei

$$\mathfrak{E}_{\mu\nu} = \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\right) \tag{73}$$

gesetzt ist. Nun ist aber $\delta g^{\mu\nu}$ ebenso wie $g^{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor, und es sind die Verhältnisse der $\delta g^{\mu\nu}$ frei wählbar. Daraus folgt, daß

$$\frac{\mathfrak{E}_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}$$

bei Beschränkung auf angepaßte Koordinatensysteme und Substitutionen zwischen solchen ein kovarianter Tensor, $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ selbst der entsprechende kovariante V-Tensor ist, und zwar nach (73) ein symmetrischer Tensor.

§ 15. Ableitung der Feldgleichungen.

Es liegt die Annahme nahe, daß in den gesuchten Feldgleichungen der Gravitation, welche an die Stelle der Poissonschen Gleichung der Newtonschen Theorie zu treten haben, der Tensor $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ eine fundamentale Rolle spiele. Denn wir haben nach den Überlegungen der §§ 13 und 14 zu fordern, daß die gesuchten Gleichungen — ebenso wie der Tensor $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ — nur bezüglich angepaßter Koordinatensysteme kovariant seien. Da wir ferner im Anschluß an (42a) gesehen haben, daß für die Einwirkung des Gravitationsfeldes auf die Materie der Energietensor $\mathfrak{T}_\tau^\nu$ maßgebend ist, so werden die gesuchten Gleichungen in einer Verknüpfung der Tensoren $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{T}_\tau^\nu$ bestehen. Es liegt also nahe, die gesuchten Gleichungen so anzusetzen:

$$\mathfrak{E}_{\sigma\tau} = \varkappa \mathfrak{T}_{\sigma\tau} \tag{74}$$

Dabei ist $\varkappa$ eine universelle Konstante und $\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$ der symmetrische kovariante V-Tensor, der zu dem gemischten Energietensor $\mathfrak{T}_\tau^\nu$ gehört, gemäß der Relation

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} &= \sum_\nu g_{\nu\tau} \mathfrak{T}_\sigma^\nu \\ \text{bzw.}\quad \mathfrak{T}_\sigma^\nu &= \sum_\tau \mathfrak{T}_{\sigma\tau} g^{\nu\tau} \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Bestimmung der Funktion H. Damit sind die gesuchten Gleichungen insofern noch nicht vollständig gegeben, als wir die Funktion H noch nicht festgelegt haben. Wir wissen bisher nur, daß H von den $g^{\mu\nu}$ und $g_\sigma^{\mu\nu}$ allein abhängt und bezüglich linearer Transformationen ein Skalar ist[1]. Eine weitere Bedingung, welcher H genügen muß, erhalten wir auf folgendem Wege.

Ist $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ der Energietensor des gesamten, in dem betrachteten Gebiete vorhandenen materiellen Vorganges, so verschwindet in (42a) der V-Vierervektor $(\mathfrak{K}_\sigma)$ der Kraftdichte. (42a) sagt dann aus, daß die Divergenz des Energietensors $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ des materiellen Vorganges verschwindet; gleiches gilt dann gemäß (74) für den Tensor $\mathfrak{E}_{\sigma\tau}$, bzw. für den aus

[1] Ohne die letztere, in § 14 eingeführte Beschränkung hätten wir für B_μ nicht den in (65a) gegebenen Ausdruck gefunden; die im folgenden im Texte angegebene Betrachtung zur Bestimmung von H scheitert, wenn man jene Beschränkung fallen läßt. Hierin liegt ihre Rechtfertigung.

demselben zu bildenden gemischten V-Tensor $\mathfrak{E}_\sigma^\nu$. Es muß also für jedes Gravitationsfeld die Beziehung erfüllt sein (vgl. (41b) und (34)).

$$\sum_{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\tau\nu}\mathfrak{E}_{\sigma\tau}) + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{E}_{\mu\nu} = 0 .$$

Diese Beziehung läßt sich auf Grund von (73) und (65a) in die Form bringen:

$$\sum_\nu \frac{\partial S_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - B_\sigma = 0 , \tag{76}$$

wobei

$$S_\sigma^\nu = \sum_{\mu\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g_\mu^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\mu^{\sigma\tau}} + \frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu H\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g_\sigma^{\mu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\nu^{\mu\tau}}\right) \tag{76a}$$

gesetzt ist ($\delta_\sigma^\nu = 1$ bzw. 0, je nachdem $\sigma = \nu$ oder $\sigma \pm \nu$ ist).

Wenn die $\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$ gegeben sind, so können die 10 Gleichungen (74) dazu dienen, die 10 Funktionen $g^{\mu\nu}$ zu bestimmen. Außerdem müssen die $g^{\mu\nu}$ aber noch die vier Gleichungen (67) erfüllen, da das Koordinatensystem ein angepaßtes sein soll. Wir haben also mehr Gleichungen als zu suchende Funktionen. Dies geht nur dann an, wenn die Gleichungen nicht alle voneinander unabhängig sind. Es wird gefordert werden müssen, daß die Erfüllung der Gleichungen (74) zur Folge hat, daß auch die Gleichungen (67) erfüllt sind. Ein Blick auf (76) und (76a) zeigt, daß dies dann erreicht ist, wenn S_σ^ν (welche Größe wie H eine Funktion der $g^{\mu\nu}$ und $g_\sigma^{\mu\nu}$ ist) identisch verschwindet für jede Kombination der Indizes. H muß also gemäß den Bedingungen

$$S_\sigma^\nu \equiv 0 \tag{77}$$

gewählt werden.

Ohne einen formalen Grund dafür angeben zu können, fordere ich ferner, daß H eine ganze homogene Funktion zweiten Grades in den $g_\sigma^{\mu\nu}$ sei. Dann ist H bis auf einen konstanten Faktor vollkommen bestimmt. Denn da es bezüglich linearer Transformationen ein Skalar sein soll, muß[1] es mit Rücksicht auf die eben angegebene Festsetzung eine lineare Kombination der folgenden fünf Größen sein:

$$\sum g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\tau\tau}}{\partial x_\tau}\,;\quad \sum g^{\tau\tau'} g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\tau} g_{\mu'\nu'}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x'_\sigma}\,;\quad \sum g^{\tau\tau'}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g^{\tau'\nu}}{\partial x_\nu}\,;$$

$$\sum g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g^{\tau\tau'}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x'_\sigma}\,;\quad \sum g_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\tau}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\beta\tau}}{\partial x_\tau}\quad .$$

Die Bedingungen (77) führen endlich dazu, die Funktion H, abgesehen von einem konstanten Faktor der vierten dieser Größen gleich-

[1] Der Beweis hierfür ist einfach, aber weitläufig, deshalb lasse ich ihn weg.

zusetzen. Wir setzen daher[1] mit Rücksicht auf (35), indem wir über die Konstante willkürlich verfügen:

$$H = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g^{\tau\rho}}{\partial x_\beta}. \tag{78}$$

Wir beschränken uns darauf, zu zeigen, daß bei dieser Wahl von H Gleichung (77) wirklich erfüllt ist. Mit Hilfe der Relationen

$$dg = g \sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau} dg_{\sigma\tau} = -g \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau}\, dg^{\sigma\tau}$$

$$dg_{\alpha\beta} = -\sum_{\mu\nu} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}\, dg^{\mu\nu}$$

erhält man aus (78)

$$\left.\begin{aligned}
\sum_\tau g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} &= \frac{1}{2} H\sqrt{-g}\,\delta_\sigma^\nu + \frac{1}{4}\sqrt{-g} \sum_{\mu\mu'\tau} g^{\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum_{\rho\rho'\varkappa} g^{\rho\rho'} \frac{\partial g_{\sigma\varkappa}}{\partial x_\rho} \frac{\partial g^{\nu\varkappa}}{\partial x_{\rho'}} \\
\sum_{\mu\tau} g_\mu^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\mu^{\sigma\tau}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum_{\rho\rho'\varkappa} g^{\rho\rho'} \frac{\partial g_{\sigma\varkappa}}{\partial x_\rho} \frac{\partial g^{\nu\varkappa}}{\partial x_{\rho'}} \\
\frac{1}{2} \sum_{\mu\tau} g_\sigma^{\mu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\nu^{\mu\tau}} &= \frac{1}{4}\sqrt{-g} \sum_{\mu\mu'\tau} g^{\mu\tau} \frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\tau} \frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Wir sind nun auf rein formalem Wege, d. h. ohne direkte Heranziehung unserer physikalischen Kenntnisse von der Gravitation, zu ganz bestimmten Feldgleichungen gelangt. Um dieselben in ausführlicher Schreibweise zu erhalten, multiplizieren wir (74) mit $g^{\nu\tau}$ und summieren über den Index τ; wir erhalten so mit Rücksicht auf (73)

$$\varkappa \mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sum_{\tau\alpha} g^{\nu\tau} \left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right] \right) \tag{80}$$

oder

$$-\sum_{\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right) = \varkappa \mathfrak{T}_\sigma^\nu + \sum_{\alpha\tau} \left(-g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g_\alpha^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}} \right). \tag{80a}$$

Dabei gilt, weil unser Koordinatensystem ein angepaßtes ist, gemäß (67) und (65a) die Gleichung

---

[1] Drückt man H durch die Komponenten $\Gamma_{\tau\tau}^\nu$ des Gravitationsfeldes aus (vgl. (46)), so erhält man $H = -\sum_{\mu\rho\tau\tau'} g^{\tau\tau'} \Gamma_{\mu\tau}^\rho \Gamma_{\rho\tau'}^\mu$.

$$\sum_{\alpha\tau\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\tau} \frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\tau\tau}}\right) = 0,$$

also mit Rücksicht auf (80) die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\mathfrak{T}_\sigma + \frac{1}{\varkappa}\sum_{\alpha\tau}\left(-g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} + g_\alpha^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\alpha^{\sigma\tau}}\right)\right\} = 0. \quad (80b)$$

Vermöge (78), (79) und (46) können wir an die Stelle der Gleichungen (80a) und (80b) die folgenden setzen

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\, \Gamma^\nu_{\sigma\beta}) = -\varkappa(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu), \quad (81)$$

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu) = 0, \quad (42c)$$

wobei

$$\Gamma^\nu_{\sigma\beta} = \frac{1}{2}\sum_\tau g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\beta}, \quad (81a)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_\sigma^\nu &= -\frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\sum_{\mu\mu'\varrho\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau} - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu g^{\varrho\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_\varrho}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_\tau}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\sum_{\mu\varrho\tau\tau'}\left(g^{\nu\tau}\Gamma^\varrho_{\mu\sigma}\Gamma^\mu_{\varrho\tau} - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu g^{\tau\tau'}\Gamma^\varrho_{\mu\tau}\Gamma^\mu_{\varrho\tau'}\right) \end{aligned}\right\} \quad (81b)$$

Die Gleichungen (81) in Verbindung mit (81a) und (81b) sind die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes. Die Gleichungen (42c) drücken nach den in § 10 gegebenen Überlegungen die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie für Materie und Gravitationsfeld zusammen aus. $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ sind diejenigen auf das Gravitationsfeld bezüglichen Größen, welche den Komponenten $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ des Energietensors (V-Tensors) der physikalischen Bedeutung nach analog sind. Es sei hervorgehoben, daß die $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ nicht beliebigen berechtigten, sondern nur linearen Transformationen gegenüber Tensorkovarianz besitzen; trotzdem nennen wir $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)$ den Energietensor des Gravitationsfeldes. Analoges gilt für die Komponenten $\Gamma^\nu_{\sigma\beta}$ der Feldstärke des Gravitationsfeldes.

Das Gleichungssystem (81) läßt trotz seiner Kompliziertheit eine einfache physikalische Interpretation zu. Die linke Seite drückt eine Art Divergenz des Gravitationsfeldes aus. Diese wird — wie die rechte Seite zeigt — bedingt durch die Komponenten des totalen Energietensors. Sehr wichtig ist dabei das Ergebnis, daß der Energietensor des Gravitationsfeldes selbst in gleicher Weise felderregend wirksam ist wie der Energietensor der Materie.

§ 16. Kritische Bemerkungen über die Grundlage der Theorie.

Es liegt im Wesen der abgeleiteten Theorie, daß im Unendlichkleinen überall die ursprüngliche Relativitätstheorie gilt. Dies ist klar. wenn gezeigt ist, daß bei passender Wahl reeller Koordinaten die Größen $g_{\mu\nu}$ in einem beliebig gegebenen Punkte die Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

annehmen. Es ist das der Fall, wenn die Fläche zweiten Grades

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1$$

für jedes in unserem Kontinuum auftretende Wertsystem der $g_{\mu\nu}$ stets drei imaginäre Achsen und eine reelle Achse besitzt. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Quadrate der reziproken Halbachsen der Fläche, so erfüllen sie die Gleichung vierten Grades

$$|g_{\mu\nu} - \lambda \delta_\mu^\nu| = 0 = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)(\lambda_4 - \lambda) .$$

Es ist also

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = g .$$

Sollen die Größen $g^{\mu\nu}$ nicht unendliche Werte annehmen, so wird zu fordern sein, daß g nirgends verschwindet; denn die $g^{\mu\nu}$ sind die durch g dividierten Unterdeterminanten der $g_{\mu\nu}$-Determinante. Es kann dann keines der λ je Null werden. Ist also für einen Punkt des Kontinuums $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 > 0$, so ist dies überall der Fall: der raumzeitliche Charakter unseres Kontinuums entspricht also in der Umgebung aller Punkte dem in der ursprünglichen Relativitätstheorie zugrunde gelegten Falle. Man kann dies mathematisch so ausdrücken: von vier paarweise zueinander »senkrecht« von einem Punkte weggezogenen Linienelementen ist jeweilen eine »zeitartig«, die drei übrigen »raumartig«.

Damit ist jedoch noch keine Beziehung des Zeitartigen und Raumartigen zu dem Koordinatensystem der x_ν gegeben. Während in der ursprünglichen Relativitätstheorie jedes Linienelement, indem nur dx_4 von Null abweicht, überall zeitartig, jedes Linienelement mit verschwindendem dx_4 raumartig ist, kann das gleiche für unsere angepaßten Koordinatensysteme nicht behauptet werden. Es ist also wohl denkbar, daß man, wenn man genügend große Teile der Welt ins Auge faßt, keine Koordinatenachse als »Zeitachse« bezeichnen kann, sondern daß die Linienelemente einer Achse teils zeitartig, teils raumartig sind. Die Gleichwertigkeit der vier Dimensionen der Welt wäre dann nicht eine nur formale, sondern eine vollständige. Diese wichtige Frage muß einstweilen offengelassen werden.

Eine noch tiefer gehende Frage von fundamentaler Bedeutung, deren Beantwortung mir nicht möglich ist, soll nun aufgeworfen werden. In der gewöhnlichen Relativitätstheorie ist jede Linie, welche die Bewegung eines materiellen Punktes beschreiben kann, d. h. jede aus nur zeitartigen Elementen bestehende Linie, notwendig eine ungeschlossene; denn eine solche Linie besitzt niemals Elemente, für die dx_4 verschwindet. Das Entsprechende kann in der hier entwickelten Theorie nicht behauptet werden. Es ist daher a priori eine Punktbewegung denkbar, bei welcher die vierdimensionale Bahnkurve des Punktes eine fast geschlossene wäre. In diesem Falle könnte ein und derselbe materielle Punkt in einem beliebig kleinen raum-zeitlichen Gebiete in mehreren voneinander scheinbar unabhängigen Exemplaren vorhanden sein. Dies widerstrebt meinem physikalischen Gefühl aufs lebhafteste. Ich bin aber nicht imstande, den Nachweis zu führen, daß das Auftreten solcher Bahnkurven nach der entwickelten Theorie ausgeschlossen sei.

Da ich nach diesen Bekenntnissen nicht umhin kann, im Antlitz des Lesers ein mitleidiges Lächeln zu erblicken, kann ich folgende Bemerkung über die bisherige Auffassung der Grundlagen der Physik nicht unterdrücken. Vor Maxwell waren die Naturgesetze in räumlicher Beziehung im Prinzip Integralgesetze; damit soll ausgedrückt werden, daß in den Elementargesetzen die Abstände zwischen endlich voneinander entfernten Punkten auftraten. Dieser Naturbeschreibung liegt die euklidische Geometrie zugrunde. Letztere bedeutet zunächst nichts als den Inbegriff der Folgerungen aus den geometrischen Axiomen; sie hat insofern keinen physikalischen Inhalt. Die Geometrie wird aber dadurch zu einer physikalischen Wissenschaft, daß man die Bestimmung hinzufügt, zwei Punkte eines »starren« Körpers sollen einen bestimmten von der Lage des Körpers unabhängigen Abstand realisieren; die Sätze der durch diese Festsetzung ergänzten Geometrie sind (im physikalischen Sinne) entweder zutreffend oder unzutreffend. Die Geometrie in diesem erweiterten Sinne ist es, welche der Physik zugrunde liegt. Die Sätze der Geometrie sind von diesem Gesichtspunkte aus als physikalische Integralgesetze anzusehen, indem sie von den Abständen endlich entfernter Punkte handeln.

Durch und seit Maxwell hat die Physik eine durchgreifende Umwälzung erfahren, indem sich allmählich die Forderung durchsetzte, daß in den Elementargesetzen Abstände endlich entfernter Punkte nicht mehr auftreten dürften; d. h. die »Fernwirkungs-Theorien« werden durch »Nahewirkungs-Theorien« ersetzt. Bei diesem Prozeß vergaß man, daß auch die euklidische Geometrie — wie sie in der Physik verwendet wird — aus physikalischen Sätzen besteht, die den Integralgesetzen der Newtonschen Punktmechanik vom physikalischen Gesichtspunkte aus durchaus an die Seite zu stellen sind. Dies bedeutet nach meiner Ansicht eine Inkonsequenz, von der wir uns befreien müssen.

Ein Versuch dieser Befreiung führt wieder dazu, statt der Koordinaten zunächst willkürliche Parameter zur Darstellung des vierdimensionalen raum-zeitlichen Kontinuums, daß uns umgibt. zu verwenden. Wir gelangen so wieder zu den nämlichen Betrachtungen, wie wir sie in den Abschnitten *B* und *C* dieser Abhandlung gegeben haben, mit dem einzigen Unterschied, daß ein Zusammenhang der $g_{\mu\nu}$ mit dem Gravitationsfelde nicht vorausgesetzt wird. An Stelle der in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen hätten wir aber, wenn wir an den Forderungen der euklidischen Geometrie (im angegebenen Sinne) festhalten wollen, solche zu setzen, die aus der Behauptung fließen: die Koordinaten x_ν sind so wählbar, daß die $g_{\mu\nu}$ von den x_ν unabhängig werden. Wir gelangen so zu der Forderung, daß die Komponenten des in § 9 entwickelten Riemann-Christoffelschen Tensors verschwinden sollen. Damit wären die Sätze der euklidischen Geometrie auf Differentialgesetze reduziert; aber man wird sich bei dieser Formulierung des Umstandes bewußt, daß vom Standpunkt der konsequenten Durchführung der Nahewirkungs-Theorie jene Möglichkeit durchaus nicht die einfachste und naheliegendste ist.

E. Einiges über den physikalischen Inhalt der entwickelten allgemeinen Gesetze.

Bei der Ableitung der Gesetze habe ich mich — soweit dies möglich war — nur von formalen Gesichtspunkten leiten lassen. Nun aber soll, damit die Darlegung des Gegenstandes nicht allzu lückenhaft bleibe, auch die physikalische Seite der erlangten Resultate kurz beleuchtet werden. Dabei beschränken wir uns aber, um nicht durch mathematische Komplikationen erdrückt zu werden, auf die Betrachtung von Näherungen.

§ 17. Aufstellung von Näherungsgleichungen nach verschiedenen Gesichtspunkten.

Aus der weitgehenden Brauchbarkeit der Gleichungen der ursprünglichen Relativitätstheorie geht hervor. daß in dem für unsere

Wahrnehmung in Betracht kommenden raum-zeitlichen Gebiete die $g^{\mu\nu}$ nahezu als Konstante behandelt werden dürfen. Wir setzen demnach

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu 0} + h_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= g_0^{\mu\nu} \;\; + h^{\mu\nu} \end{aligned}\right\}, \tag{82}$$

wobei die $g_{\mu\nu 0}$ und die $g_0^{\mu\nu}$ die Werte

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\} \tag{82a}$$

besitzen. Die $h_{\mu\nu}$ und $h^{\mu\nu}$ sind dabei als unendlich kleine Größen erster Ordnung zu behandeln, zwischen denen bei Vernachlässigung von Unendlichkleinem zweiter Ordnung die Beziehungen bestehen

$$h^{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} \tag{83}$$

Hierbei ist wie bei MINKOWSKI die Zeitkoordinate rein imaginär gewählt; dadurch wird erzielt, daß $(g_{44})_0 = g_0^{44} = -1$ wird und daß die Gleichungssysteme linearen orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant bleiben. Bei imaginärer Wahl der Zeitkoordinate werden g_{14}, g_{24}, g_{34} imaginär, ebenso $\sqrt{-g}$; die Gültigkeit der von uns entwickelten Gleichungen bleibt indes gewährleistet, weil man von einer reellen Zeitvariable zu einer imaginären durch eine lineare Transformation gelangt. Durch die Festsetzung (82a) ist erzielt, daß natürlich gemessene Längen und Koordinatenlängen in dem betrachteten Gebiete bis auf Unendlichkleines erster Ordnung übereinstimmen.

Wir ersetzen nun die Gleichungen (81) und (81a) durch solche, in denen unendlich kleine Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt ist. Dann verschwindet t_τ^ν und wir erhalten

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 h_{\tau\nu}}{\partial x_\alpha^2} = i\varkappa \mathfrak{T}_\tau^\nu \tag{84}$$

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\nu = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\tau\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{84a}$$

Eine weitere Näherungsannahme führen wir nun ein, indem wir in $\mathfrak{T}_\tau^\nu$ nur diejenigen Terme berücksichtigen, welche der ponderabeln Materie entsprechen, wobei die von Flächenkräften herrührenden Terme unberücksichtigt bleiben. Unter diesen Voraussetzungen gibt (48) den Energietensor. Da die $\mathfrak{T}_\tau^\nu$ gemäß (48) endlich sind, gelangt man bereits zu einer weitgehenden Näherung, wenn man in (48) bereits unendlich Kleines erster Ordnung vernachlässigt. Man erhält so

$$\mathfrak{T}''_\sigma = -i\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds_0} \frac{dx_\nu}{ds_0}. \tag{84b}$$

Durch Einsetzen in (84) erhält man, indem man die linke Seite $\Box h_{\sigma\nu}$ schreibt:

$$\Box h_{\sigma\nu} = \varkappa\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds_0} \frac{dx_\nu}{ds_0}. \tag{85}$$

In dieser Gleichung bedeuten x_1, x_2, x_3 die räumlichen Koordinaten $x_4 = it$ die (imaginäre) Zeitkoordinate, $ds_0 = dt\sqrt{1-\left(\frac{dx_1^2}{dt}+\frac{dx_2^2}{dt}+\frac{dx_3^2}{dt}\right)}$ das Element von Minkowskis »Eigenzeit«.

Nachdem wir so die Gleichungen (81) durch Näherungsgleichungen ersetzt haben, deren Ähnlichkeit mit der Poissonschen Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie in die Augen springt, wollen wir auch die Gleichungen der Bewegung des materiellen Punktes (50b) nebst (51) durch Näherungsgleichungen ersetzen. Die roheste Näherung erhält man, indem man statt (51) setzt

$$\mathfrak{l}_\sigma = -m \frac{dx_\sigma}{ds_0}. \tag{86}$$

Bei Einführung des dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{q}$ mit dem Betrage q bedeutet dies die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{l}_1 &= \frac{m\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}} \\ -\mathfrak{l}_2 &= \frac{m\mathfrak{q}_y}{\sqrt{1-q^2}} \\ -\mathfrak{l}_3 &= \frac{m\mathfrak{q}_z}{\sqrt{1-q^2}} \\ -\mathfrak{l}_4 &= i\frac{m}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right\} \tag{86a}$$

Die Wahl der imaginären Zeitkoordinate bringt es hier mit sich, daß nicht wie gemäß (52) die Größe $\mathfrak{l}_4$ die Energie ausdrückt, sondern die Größe $i\mathfrak{l}_4$. An Stelle von (50b) erhält man gemäß (84a) beim Fehlen äußerer Kräfte

$$\frac{d_\alpha(-\mathfrak{l}_\sigma)}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{\nu\tau} \frac{\partial h_{\nu\tau}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\nu}{dt} (-\mathfrak{l}_\tau). \tag{87}$$

Die Gleichungen (85), (87), (86) ersetzen in erster Näherung die Newtonsche Theorie.

NEWTONS Theorie als Näherung. Zu letzterer gelangen wir, indem wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ als unendlich klein behandeln und in den Gleichungen jeweilen nur diejenigen Glieder beibehalten, welche die Komponenten von $\mathfrak{q}$ in der niedrigsten Potenz enthalten. An die Stelle von (85) treten dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Box h_{\sigma\nu} &= 0 \text{ (wenn nicht } \nu = \sigma = 4) \\ \Box h_{44} &= -\varkappa \rho_0 \end{aligned}\right\} \tag{85a}$$

und an die Stelle von (87)

$$\frac{d(m\mathfrak{q})}{dt} = \frac{m}{2} \operatorname{grad} h_{44}. \tag{87a}$$

Aus (85a) schließt man, daß in diesem Falle (bei passenden Grenzbedingungen fürs Unendliche) alle $h_{\sigma\nu}$ bis auf h_{44} verschwinden, aus (87a), daß $\left(-\frac{h_{44}}{2}\right)$ die Rolle des Gravitationspotentials spielt; nennt man diese Größe ϕ, so hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Box \phi &= \frac{\varkappa}{2} \rho_0 \\ \frac{d(m\mathfrak{q})}{dt} &= -m \operatorname{grad} \phi \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

im Einklang mit NEWTONS Theorie in dem Falle, daß $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ neben $\frac{\partial^2 \phi}{x\,\partial^2}$ usw. vernachlässigt werden kann.

In der NEWTONschen Theorie lautet die erste der Gleichungen (88)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi K \rho_0,$$

so daß man hat

$$\frac{\varkappa}{2} = 4\pi K.$$

Die Konstante K hat bei Zugrundelegung der Sekunde als Zeiteinheit den Zahlenwert $6.7 \cdot 10^{-8}$, bei Zugrundelegung der Lichtsekunde als Zeiteinheit also den Wert $\frac{6.7 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}}$. Man erhält demnach

$$\varkappa = 8\pi \cdot \frac{6.7 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 1.87 \cdot 10^{-27}. \tag{89}$$

Für den natürlich gemessenen Abstand benachbarter Raumzeitpunkte ergibt sich für den Fall der NEWTONschen Näherung

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + 2\phi)\,dt^2.$$

Für einen rein räumlichen Abstand ergibt sich

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Koordinatenlängen sind also hier zugleich natürlich gemessene Längen; es gilt die euklidische Abstandgeometrie mit der hier in Betracht gezogenen Genauigkeit. Für rein zeitliche Abstände galt

$$ds^2 = (1 + 2\,\phi)\,dt^2$$

oder

$$ds = (1 + \phi)\,dt .$$

Zu der natürlich gemessenen Dauer ds gehört die Zeitdauer $\dfrac{ds}{1+\phi}$. Die Ganggeschwindigkeit einer Uhr ist also durch $(1+\phi)$ gemessen, wächst also mit dem Gravitationspotential. Hieraus schließt man, daß die Spektrallinien, welche auf der Sonne erzeugtem Lichte zugehören, gegenüber den entsprechenden, auf der Erde erzeugten Spektrallinien eine Verschiebung nach Rot hin aufweisen im Betrage

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6} .$$

Für Lichtstrahlen ($ds = 0$) ist

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = 1 + \phi .$$

Die Lichtgeschwindigkeit ist also unabhängig von der Richtung, aber mit dem Gravitationspotential veränderlich; hieraus folgt ein gekrümmter Verlauf der Lichtstrahlen im Gravitationsfelde.

Wir berechnen endlich Impuls und Energie des materiellen Punktes im Newtonschen Felde, wobei wir uns nicht auf die Gleichungen (86a), sondern auf die exakten Gleichungen (51) stützen. Setzt man in diese für die $g_{\sigma\mu}$ die Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + h_{44} \end{matrix}$$

und für dx_ν die Größen

$$dx \qquad dy \qquad dz \qquad idt$$

ein, so erhält man, indem man sich in bezug auf h_{44} auf Größen erster Ordnung beschränkt, $\left(-\dfrac{h_{44}}{2}\right)$ wieder durch ϕ ersetzt und Glieder höherer als zweiter Ordnung in bezug auf Geschwindigkeiten vernachlässigt:

$$-\mathfrak{I}_1 = m(1-\phi)\,q_x$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$i\mathfrak{I}_4 = m\left[(1+\phi)+\frac{1}{2}(1-\phi)\,q^2\right].$$

Da $(-\mathfrak{I}_1)$ die X-Komponente des Impulses und $(i\mathfrak{I}_4)$ die Energie des materiellen Punktes ist, so folgt hieraus, daß die träge Masse mit abnehmendem Gravitationspotential zunimmt. Es ist dies durchaus im Geiste der hier vertretenen Auffassung. Denn da es nach unserer Theorie selbständige physikalische Qualitäten des Raumes nicht gibt, so ist die Trägheit einer Masse die Folge einer Wechselwirkung zwischen ihr und den übrigen Massen; diese Wechselwirkung wird dadurch zunehmen müssen, daß man der betrachteten Masse andere Massen nähert, d. h. ϕ verkleinert.

Ausgegeben am 26. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.