Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?

Von A. Einstein.

Weder die Newtonsche noch die relativistische Gravitationstheorie hat bisher der Theorie von der Konstitution der Materie einen Fortschritt gebracht. Demgegenüber soll im folgenden gezeigt werden, daß Anhaltspunkte für die Auffassung vorhanden sind, daß die die Bausteine der Atome bildenden elektrischen Elementargebilde durch Gravitationskräfte zusammengehalten werden.

§ 1. Mängel der gegenwärtigen Auffassung.

Die Theoretiker haben sich viel bemüht, eine Theorie zu ersinnen, welche von dem Gleichgewicht der das Elektron konstituierenden Elektrizität Rechenschaft gibt. Insbesondere G. Mie hat dieser Frage tiefgehende Untersuchungen gewidmet. Seine Theorie, welche bei den Fachgenossen vielfach Zustimmung gefunden hat, beruht im wesentlichen darauf, daß außer den Energietermen der Maxwell-Lorentzschen Theorie des elektromagnetischen Feldes von den Komponenten des elektrodynamischen Potentials abhängige Zusatzglieder in den Energie-Tensor eingeführt werden, welche sich im Vakuum nicht wesentlich bemerkbar machen, im Innern der elektrischen Elementarteilchen aber bewirken, daß den elektrischen Abstoßungskräften das Gleichgewicht geleistet wird. So schön diese Theorie, ihrem formalen Aufbau nach, von Mie, Hilbert und Weyl gestaltet worden ist, so wenig befriedigend sind ihre physikalischen Ergebnisse bisher gewesen. Einerseits ist die Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten entmutigend, andererseits ließen sich bisher jene Zusatzglieder nicht so einfach gestalten, daß die Lösung hätte befriedigen können.

Die allgemeine Relativitätstheorie änderte an diesem Stande der Frage bisher nichts. Sehen wir zunächst von dem kosmologischen Zusatzgliede ab, so lauten deren Feldgleichungen

$$R_{i\varkappa} - \frac{1}{2} g_{i\varkappa} R = - \varkappa T_{i\varkappa}, \tag{1}$$

wobei $(R_{i\varkappa})$ den einmal verjüngten Riemannschen Krümmungstensor, (R) den durch nochmalige Verjüngung gebildeten Skalar der Krümmung, $(T_{i\varkappa})$ den Energietensor der »Materie« bedeutet. Hierbei entspricht der historischen Entwicklung die Annahme, daß die $T_{i\varkappa}$ von den Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ nicht abhängen. Denn diese Größen sind ja die Energiekomponenten im Sinne der speziellen Relativitätstheorie, in welcher variable $g_{\mu\nu}$ nicht auftreten. Das zweite Glied der linken Seite der Gleichung ist so gewählt, daß die Divergenz der linken Seite von (1) identisch verschwindet, so daß aus (1) durch Divergenz-Bildung die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} g_i^{\sigma\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} = 0 \tag{2}$$

gewonnen wird, welche im Grenzfalle der speziellen Relativitätstheorie in die vollständigen Erhaltungsgleichungen

$$\frac{\partial T_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = 0$$

übergeht. Hierin liegt die physikalische Begründung für das zweite Glied auf der linken Seite von (1). Daß ein solcher Grenzübergang zu konstanten $g_{\mu\nu}$ sinnvoll möglich sei, ist a priori gar nicht ausgemacht. Wären nämlich Gravitationsfelder beim Aufbau der materiellen Teilchen wesentlich beteiligt, so verlöre für diese der Grenzübergang zu konstanten $g_{\mu\nu}$ seine Berechtigung; es gäbe dann eben bei konstanten $g_{\mu\nu}$ keine materielle Teilchen. Wenn wir daher die Möglichkeit ins Auge fassen wollen, daß die Gravitation am Aufbau der die Korpuskeln konstituierenden Felder beteiligt sei, so können wir die Gleichung (1) nicht als gesichert betrachten.

Setzen wir in (1) die Maxwell-Lorentzschen Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes $\phi_{\mu\nu}$

$$T_{i\varkappa} = \frac{1}{4} g_{i\varkappa} \phi_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta} - \phi_{i\alpha} \phi_{\varkappa\beta} g^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

so erhält man durch Divergenzbildung nach einiger Rechnung[1] für (2)

$$\phi_{i\alpha} \mathfrak{J}^\alpha = 0, \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, \phi_{\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathfrak{J}^\alpha \tag{5}$$

gesetzt ist. Bei der Rechnung ist von dem zweiten Maxwellschen Gleichungssystem

[1] Vgl. z. B. A. Einstein, diese Sitz. Ber. 1916. VII S. 187, 188.

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \varphi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{6}$$

Gebrauch gemacht. Aus (4) ersieht man, daß die Stromdichte ($\mathfrak{J}^\sigma$) überall verschwinden muß. Nach Gleichung (1) ist daher eine Theorie des Elektrons bei Beschränkung auf die elektromagnetischen Energiekomponenten der MAXWELL-LORENTZschen Theorie nicht zu erhalten, wie längst bekannt ist. Hält man an (1) fest, so wird man daher auf den Pfad der MIEschen Theorie gedrängt[1].

Aber nicht nur das Problem der Materie führt zu Zweifeln an Gleichung (1), sondern auch das kosmologische Problem. Wie ich in einer früheren Arbeit ausführte, verlangt die allgemeine Relativitätstheorie, daß die Welt räumlich geschlossen sei. Diese Auffassung machte aber eine Erweiterung der Gleichungen (1) nötig, wobei eine neue universelle Konstante λ eingeführt werden mußte, die zu der Gesamtmasse der Welt (bzw. zu der Gleichgewichtsdichte der Materie) in fester Beziehung steht. Hierin liegt ein besonders schwerwiegender Schönheitsfehler der Theorie.

§ 2. Die skalarfreien Feldgleichungen.

Die dargelegten Schwierigkeiten werden dadurch beseitigt, daß man an die Stelle der Feldgleichungen (1) die Feldgleichungen

$$R_{i\varkappa} - \frac{1}{4} g_{i\varkappa} R = -\varkappa T_{i\varkappa} \tag{1a}$$

setzt, wobei ($T_{i\varkappa}$) den durch (3) gegebenen Energietensor des elektromagnetischen Feldes bedeutet.

Die formale Begründung des Faktors $\left(-\frac{1}{4}\right)$ im zweiten Gliede dieser Gleichung liegt darin, daß er bewirkt, daß der Skalar der linken Seite

$$g^{i\varkappa}\left(R_{i\varkappa} - \frac{1}{4} g_{i\varkappa} R\right)$$

identisch verschwindet, wie gemäß (3) der Skalar

$$g^{i\varkappa} T_{i\varkappa}$$

der rechten Seite. Hätte man statt (1a) die Gleichungen (1) zugrunde gelegt, so würde man dagegen die Bedingung $R = 0$ erhalten, welche unabhängig vom elektrischen Felde überall für die $g_{\mu\nu}$ gelten müßte. Es ist klar, daß das Gleichungssystem [(1), (3)] das Gleichungssystem [(1a), (3)] zur Folge hat, nicht aber umgekehrt.

[1] Vgl. D. HILBERT, Göttinger Ber. 20. Nov. 1915.

Man könnte nun zunächst bezweifeln, ob (1a) zusammen mit (6) das gesamte Feld hinreichend bestimmen. In einer allgemein relativistischen Theorie braucht man zur Bestimmung von n abhängigen Variabeln $n-4$ voneinander unabhängige Differenzialgleichungen, da ja in der Lösung wegen der freien Koordinatenwählbarkeit vier ganz willkürliche Funktionen aller Koordinaten auftreten müssen. Zur Bestimmung der 16 Abhängigen $g_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$ braucht man also 12 voneinander unabhängige Gleichungen. In der Tat sind aber 9 von den Gleichungen (1a) und 3 von den Gleichungen (6) voneinander unabhängig.

Bildet man von (1a) die Divergenz, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß die Divergenz von $R_{i\varkappa} - \frac{1}{2} g_{i\varkappa} R$ verschwindet

$$\phi_{\tau\alpha} J^\alpha + \frac{1}{4\varkappa} \frac{\partial R}{\partial x_\tau} = 0. \tag{4a}$$

Hieraus erkennt man zunächst, daß der Krümmungsskalar R in den vierdimensionalen Gebieten, in denen die Elektrizitätsdichte verschwindet, konstant ist. Nimmt man an, daß alle diese Raumteile zusammenhängen, daß also die Elektrizitätsdichte nur in getrennten Weltfäden von null verschieden ist, so besitzt außerhalb dieser Weltfäden der Krümmungsskalar überall einen konstanten Wert R_0. Gleichung (4a) läßt aber auch einen wichtigen Schluß zu über das Verhalten von R innerhalb der Gebiete mit nicht verschwindender elektrischer Dichte. Fassen wir, wie üblich, die Elektrizität als bewegte Massendichte auf, indem wir setzen

$$J^\tau = \frac{\mathfrak{J}^\tau}{\sqrt{-g}} = \rho \frac{dx_\tau}{ds}, \tag{7}$$

so erhalten wir aus (4a) durch innere Multiplikation mit J^σ wegen der Antisymmetrie von $\phi_{\mu\nu}$ die Beziehung

$$\frac{\partial R}{\partial x_\tau} \frac{dx_\tau}{ds} = 0. \tag{8}$$

Der Krümmungsskalar ist also auf jeder Weltlinie der Elektrizitätsbewegung konstant. Die Gleichung (4a) kann anschaulich durch die Aussage interpretiert werden: Der Krümmungsskalar R spielt die Rolle eines negativen Druckes, der außerhalb der elektrischen Korpuskeln einen konstanten Wert R_0 hat. Innerhalb jeder Korpuskel besteht ein negativer Druck (positives $R-R_0$), dessen Gefälle der elektrodynamischen Kraft das Gleichgewicht leistet. Das Druckminimum bzw. das Maximum des Krümmungsskalars im Innern der Korpuskel ändert sich nicht mit der Zeit.

Wir schreiben nun die Feldgleichungen (1a) in der Form

$$\left(R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R\right)+\frac{1}{4}g_{i\varkappa}R_0=-\varkappa\left(T_{i\varkappa}+\frac{1}{4\varkappa}g_{i\varkappa}[R-R_0]\right). \quad (9)$$

Anderseits formen wir die früheren, mit kosmologischem Glied versehenen Feldgleichungen

$$R_{i\varkappa}-\lambda g_{i\varkappa}=-\varkappa\left(T_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}T\right)$$

um. Durch Subtraktion der mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Skalargleichung erhält man zunächst

$$\left(R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R\right)+g_{i\varkappa}\lambda=-\varkappa T_{i\varkappa}.$$

Nun verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung in solchen Gebieten, wo nur elektrisches Feld und Gravitationsfeld vorhanden ist. Für solche Gebiete erhält man durch Skalarbildung

$$-R+4\lambda=0.$$

In solchen Gebieten ist also der Krümmungsskalar konstant, so daß man λ durch $\frac{R_0}{4}$ ersetzen kann. Wir können daher die frühere Feldgleichung (1) in der Form schreiben

$$\left(R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R\right)+\frac{1}{4}g_{i\varkappa}R_0=-\varkappa T_{i\varkappa}. \quad (10)$$

Vergleicht man (9) mit (10), so sieht man, daß sich die neuen Feldgleichungen von den früheren nur dadurch unterscheiden, daß als Tensor der »gravitierenden Masse« statt $T_{i\varkappa}$ der von dem Krümmungsskalar abhängige $T_{i\varkappa}+\frac{1}{4\varkappa}g_{i\varkappa}[R-R_0]$ auftritt. Die neue Formulierung hat aber den großen Vorzug vor der früheren, daß die Größe λ als Integrationskonstante, nicht mehr als dem Grundgesetz eigene universelle Konstante, in den Grundgleichungen der Theorie auftritt.

§ 3. Zur kosmologischen Frage.

Das letzte Resultat läßt schon vermuten, daß bei unserer neuen Formulierung die Welt sich als räumlich geschlossen betrachten lassen wird, ohne daß hierfür eine Zusatzhypothese nötig wäre. Wie in der früheren Arbeit zeigen wir wieder, daß bei gleichmäßiger Verteilung der Materie eine sphärische Welt mit den Gleichungen vereinbar ist.

Wir setzen zunächst

$$ds^2 = -\sum \gamma_{i\nu} dx_i dx_\varkappa + dx_4^2 \text{ (Summation über } i \text{ und } k \text{ von } 1-3\text{)}. \quad (12)$$

Sind dann $P_{i\varkappa}$ bzw. P Krümmungstensor zweiten Ranges bzw. Krümmungsskalar im dreidimensionalen Raume, so ist

$$\begin{aligned} R_{i\varkappa} &= P_{i\varkappa} \text{ (}i\text{ und }\varkappa\text{ zwischen 1 und 3)} \\ R_{i4} &= R_{4i} = R_{44} = 0 \\ R &= -P \\ -g &= \gamma. \end{aligned}$$

Es folgt also für unsern Fall

$$R_{i\varkappa} - \frac{1}{2} g_{i\varkappa} R = P_{i\varkappa} - \frac{1}{2} \gamma_{i\varkappa} P \quad (i \text{ und } \varkappa \text{ zwischen 1 und 3})$$

$$R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{1}{2} P.$$

Den Rest der Betrachtung führen wir auf zwei Arten durch. Zunächst stützen wir uns auf Gleichung (1a). In dieser bedeutet $T_{i\varkappa}$ den Energietensor des elektromagnetischen Feldes, das von den die Materie konstituierenden elektrischen Teilchen geliefert wird. Für dies Feld gilt überall

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^3 + \mathfrak{T}_4^4 = 0.$$

Die einzelnen $\mathfrak{T}_i^\varkappa$ sind mit dem Orte rasch wechselnde Größen; für unsere Aufgabe dürfen wir sie aber wohl durch ihre Mittelwerte ersetzen. Wir haben deshalb zu wählen

$$\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{T}_2^2 = \mathfrak{T}_3^3 = -\frac{1}{3}\mathfrak{T}_4^4 = \text{konst.}$$

$$\mathfrak{T}_i^\varkappa = 0, \text{ (für } i \neq k)$$

$$\text{also } T_{i\varkappa} = +\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\gamma_{i\varkappa}; \quad T_{44} = \frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Mit Rücksicht auf das bisher ausgeführte erhalten wir an Stelle von (1a)

$$P_{i\varkappa} - \frac{1}{4}\gamma_{i\varkappa} P = -\frac{1}{3}\gamma_{i\varkappa}\frac{\varkappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \quad (13)$$

$$\frac{1}{4} P = -\frac{\varkappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \quad (14)$$

Die skalare Gleichung zu (13) stimmt mit (14) überein. Hierauf beruht es, daß unsere Grundgleichungen eine sphärische Welt zulassen. Aus (13) und (14) folgt nämlich

$$P_{i\varkappa} + \frac{4}{3} \frac{\varkappa \mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{i\varkappa} = 0, \tag{15}$$

welches System bekanntlich[1] durch eine (dreidimensional) sphärische Welt aufgelöst wird.

Wir können unsere Überlegung aber auch auf die Gleichungen (9) gründen. Auf der rechten Seite von (9) stehen diejenigen Glieder, welche bei phänomenologischer Betrachtungsweise durch den Energietensor der Materie zu ersetzen sind; sie sind also zu ersetzen durch

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho, \end{matrix}$$

wobei ρ die mittlere Dichte der als ruhend angenommenen Materie bedeutet. Man erhält so die Gleichungen

$$P_{i\varkappa} - \frac{1}{2} \gamma_{i\varkappa} P - \frac{1}{4} \gamma_{i\varkappa} R_0 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{4} R_0 = -\varkappa\rho. \tag{17}$$

Aus der skalaren Gleichung zu (16) und aus (17) erhält man

$$R_0 = -\frac{2}{3} P = 2\varkappa\rho \tag{18}$$

und somit aus (16)

$$P_{i\varkappa} - \varkappa\rho\gamma_{i\varkappa} = 0, \tag{19}$$

welche Gleichung mit (15) bis auf den Ausdruck des Koeffizienten übereinstimmt. Durch Vergleichung ergibt sich

$$\mathfrak{T}_4^4 = \frac{3}{4} \rho \sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

Diese Gleichung besagt, daß von der die Materie konstituierenden Energie drei Viertel auf das elektromagnetische Feld, ein Viertel auf das Gravitationsfeld entfällt.

§ 4. Schlußbemerkungen.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen die Möglichkeit einer theoretischen Konstruktion der Materie aus Gravitationsfeld und elektromagnetischem Felde allein ohne Einführung hypothetischer Zusatzglieder im Sinne der MIEschen Theorie. Besonders aussichtsvoll erscheint die ins Auge gefaßte Möglichkeit insofern, als sie uns von der Notwendigkeit

[1] Vgl. H. WEYL, Zeit. Raum. Materie. § 33.

der Einführung einer besonderen Konstante λ für die Lösung des kosmologischen Problems befreit. Anderseits besteht aber eine eigentümliche Schwierigkeit. Spezialisiert man nämlich (1) auf den kugelsymmetrischen, statischen Fall, so erhält man eine Gleichung zuwenig zur Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$, derart, daß jede kugelsymmetrische Verteilung der Elektrizität im Gleichgewicht verharren zu können scheint. Das Problem der Konstitution der Elementarquanta läßt sich also auf Grund der angegebenen Feldgleichungen noch nicht ohne weiteres lösen.