Bemerkung über periodische Schwankungen der Mondlänge, welche bisher nach der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar schienen.

Von A. Einstein.

Es gibt bekanntlich kleine systematische Abweichungen der beobachteten Mondlängen, welche noch nicht mit Sicherheit auf ihre Ursachen zurückgeführt sind. Aus diesen hat zunächst ein empirisches periodisches Glied von einer Periode von 273 Jahren ausgesondert werden können. Die übrigbleibenden Abweichungen scheinen ebenfalls mindestens annähernd periodischen Charakter zu haben, wobei die Periode knapp 20 Jahre und die Amplitude von der Größenordnung einer Bogensekunde ist. Um diese letzteren handelt es sich im folgenden.

C. F. Bottlinger hat in einer von der Münchener Universität gekrönten Preisschrift »Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes« (Freiburg i. Br. 1912. C. Troemers Universitätsbuchhandlung) eine Erklärung dieser Abweichungen zu geben versucht, indem er anschließend an eine wichtige kosmologische Überlegung Seeligers[1] die Hypothese einführte, daß Gravitationskraftlinien beim Durchgang durch ponderable Massen eine Absorption erleiden.

Es scheint mir aber, daß die Abweichungen ohne Einführung einer neuen Hypothese sehr einfach gedeutet werden können, wie ich im folgenden kurz ausführe. Nach meiner Ansicht handelt es sich nicht um periodische Schwankungen der Mondbewegung, sondern um solche der unser Zeitmaß bildenden Drehbewegung der Erde.

Die vom Monde erzeugte Flut erhöht nämlich das Trägheitsmoment der Erde bezüglich der Erdachse, und zwar um einen Betrag, der von dem Winkel abhängt, welchen die Linie Erde—Mond mit der Äquatorebene der Erde bildet. Demnach durchläuft das Träg-

[1] Seeliger, Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum (Ber. d. Bayer. Akademie 1909 p. 9). Diese Arbeit hätte ich auch in meiner Abhandlung »Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie« (diese Berichte 1917. VI S. 142) zitieren müssen; was dort in § 1 dargelegt ist, ist Seeligers Gedanke, dessen Arbeit mir damals leider nicht bekannt war.

heitsmoment der Erde, und mithin auch deren Drehungsgeschwindigkeit, monatlich zwei Maxima und zwei Minima. Wäre die Neigung der Bahnebene des Mondes gegenüber dem Erdäquator konstant, so würde die über einen Monat gemittelte Drehgeschwindigkeit der Erde konstant sein. Dieser Winkel ändert sich aber periodisch wegen der durch die Anziehung der Sonne auf den Mond hervorgerufenen Präzessionsbewegung der Mondbahn (bezüglich der Ekliptik), wobei die Periode etwa 18.9 Jahre beträgt (Zeit eines Umlaufs des Mondknotens). Deshalb ändert sich die mittlere Drehgeschwindigkeit der Erde periodisch. Setzt man daher — wie es in der Astronomie geschieht — die Drehung der Erde als genau gleichförmig voraus, so resultiert eine scheinbare periodische Schwankung der Mondlänge mit der Periode 18.9 Jahre.

Wir wollen die soeben qualitativ gekennzeichnete Wirkung nun angenähert berechnen. Wir fassen die Flutwelle auf als rotationsellipsoidische Deformation der Wasserhülle der Erde, wobei die große Achse durch den Mond hindurchgeht. Dann erhält man durch einfache Rechnung für das Trägheitsmoment der Erde (J) in bezug auf ihre Rotationsachse den Ausdruck

$$J = J_0\left(1 + \frac{1}{3}\frac{h}{\rho R_0} - \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\phi\right). \tag{1}$$

Dabei bedeutet J_0 das Trägheitsmoment ohne Flutwirkung, h den Niveauunterschied zwischen Flut und Ebbe, R_0 den Erdradius, ρ die (als konstant betrachtete) Dichte der Erde, ϕ den Winkel zwischen der Linie Erde–Mond und der Äquatorebene. Da es uns nur auf die Abhängigkeit von ϕ ankommt, können wir die Formel durch

$$J = J_0\left(1 - \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\phi\right) \tag{2}$$

ersetzen. Bezeichnet daher ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, ω_0 diejenige für $\phi = 0$, so haben wir nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes zu setzen

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{h}{\rho R_0}\sin^2\phi\right). \tag{3}$$

Für den Mittelwert der Rotationsgeschwindigkeit für einen Monat ergibt sich

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{h}{2\rho R_0}\sin^2 i\right), \tag{4}$$

wobei i die Neigung der Mondbahn zum Erdäquator bedeutet. In dem sphärischen Dreieck, welches durch Ekliptikpol, Nordpol und Mondbahnpol bestimmt ist, sind die Seiten gleich

dem Winkel i zwischen Mondbahn und Erdäquator,
der Neigung β der Mondbahn gegen die Ekliptik (etwa 5°),
der Neigung α des Äquators gegen die Ekliptik (etwa 20°).

Der in diesem Dreieck der Seite i gegenüberliegende Winkel ist die um 180° verminderte Länge l des aufsteigenden Knotens der Mondbahn. Es ist daher mit hinreichender Annäherung

$$i = \alpha + \beta \cos l, \tag{5}$$

wobei α und β als konstant anzusehen sind, während l proportional der Zeit zunimmt. Es ergibt sich hieraus mit hinreichender Annäherung

$$\sin^2 i = \sin^2 \alpha + \beta \sin 2\alpha \cos l.$$

Hieraus ergibt sich bei etwas geänderter Bedeutung von ω_0

$$\omega - \omega_0 = \frac{\omega_0 h \beta}{2\rho R_0} \sin 2\alpha \cos l. \tag{6}$$

Durch Integration dieses Ausdrucks nach der Zeit erhält man den Voreilungswinkel der Erde Δ gegenüber der Lage, welche sie bei gleichmäßiger Drehung einnehmen würde. Das Negative davon ist die scheinbare Voreilung des Mondes. Man erhält

$$(-\Delta) = -\frac{h}{2\rho R_0} \frac{T_m}{T_e} \beta \sin 2\alpha \sin l. \tag{7}$$

wobei T_m die Umlaufzeit des Mondknotens, T_e die Umlaufzeit der Erde bedeutet. Setzt man $h = 1.5$ m, welche Größe allerdings mit bedeutender Unsicherheit behaftet ist, so ergibt sich für die Amplitude der Wert 1", also von der richtigen Größenordnung. Wir haben noch die Phase des Effektes mit der Erfahrung zu vergleichen. Wir haben für die Länge des Mondknotens, von Neujahr 1900 ab gerechnet, genügend genau

$$l = 259° - 19.35° t.$$

Hieraus ergeben sich aus (7) die Jahre, in welche Maxima und Minima der Voreilung fallen sollen. Wir vergleichen sie mit den von BOTTLINGER als Ergebnis der Beobachtung angegebenen Jahren:

Maxima		Minima	
nach (7)	beob.	nach (7)	beob.
1843	1843	1834	1830
1862	1861	1853	1852
1880	1880	1871	1874
		1895	1892

Angesichts der Unsicherheit, welche die Kleinheit der behandelten Abweichungen mit sich bringt, ist diese Übereinstimmung eine völlig genügende. Eine genauere Untersuchung bezüglich der Übereinstimmung der Amplitude des Effekts in Abhängigkeit von den empirisch gegebenen Flutamplituden wäre zu wünschen; aber es ist nach diesen Ergebnissen bereits sehr wahrscheinlich, daß die Erscheinung sich auf dem angegebenen Wege vollständig erklären läßt.

P. S. Unsere Rechnung ergibt die Amplitude des Effektes zu klein. Dies dürfte damit zusammenhängen, daß wir mit einer räumlich konstanten Dichte des Erdkörpers gerechnet haben, d. h. mit einem zu großen Trägheitsmoment der Erde.

Ausgegeben am 8. Mai.