Kritisches zu einer von Hrn. De Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen.

Von A. Einstein.

Hr. De Sitter, dem wir tiefgreifende Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Relativitätstheorie verdanken, hat in letzter Zeit eine Lösung der Gravitationsgleichungen gegeben[1], welche nach seiner Meinung möglicherweise die metrische Struktur des Weltraumes darstellen könnte. Gegen die Zulässigkeit dieser Lösung scheint mir aber ein schwerwiegendes Argument zu sprechen, das im folgenden dargelegt werden soll.

Die De Sittersche Lösung der Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varkappa T \tag{1}$$

lautet

$$\left.\begin{aligned} & T_{\mu\nu} = 0 \text{ (für alle Indices)} \\ & ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R}\left[d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\Theta^2\right] + \cos^2\frac{r}{R}\, c^2 dt^2 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

wobei r, ψ, θ, t als Koordinaten $(x_1 \cdots x_4)$ aufzufassen sind. —

Wir werden es als Forderung der Theorie zu bezeichnen haben, daß die Gleichungen (1) für alle Punkte im Endlichen gelten. Dies wird nur dann der Fall sein können, wenn sowohl die $g_{\mu\nu}$, wie die zugehörigen kontravarianten $g^{\mu\nu}$ (nebst ihren ersten Ableitungen) stetig und differenzierbar sind; im besonderen darf also die Determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ nirgends im Endlichen verschwinden. Diese Aussage bedarf aber noch einer näheren Bestimmung und einer Einschränkung. Ein Punkt P heißt dann »ein im Endlichen gelegener Punkt«, wenn er mit einem ein für allemal gewählten Anfangspunkt P_0 durch eine Kurve verbunden werden kann, so daß das über diese erstreckte Abstandsintegral

[1] Proc. Acad. Amsterdam. Vol. XX. 30. Juni 1917. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. LXXVIII. Nr. 1.

$$\int\limits_{P_0}^{P} ds$$

einen endlichen Wert hat. Ferner ist die Stetigkeitsbedingung für die $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ nicht so aufzufassen, daß es eine Koordinatenwahl geben müsse, bei welcher ihr im ganzen Raume Genüge geleistet wird. Es muß offenbar nur gefordert werden, daß es für die Umgebung eines jeden Punktes eine Koordinatenwahl gibt, bei welcher für diese Umgebung der Stetigkeitsbedingung genügt wird; diese Einschränkung der Stetigkeitsforderung ergibt sich naturgemäß aus der allgemeinen Kovarianz der Gleichungen (1). —

Für die DE SITTERsche Lösung ist nun nach (2)

$$g = -R^4 \sin^4 \frac{r}{R} \sin^2 \psi \cos^2 \frac{r}{R}.$$

g verschwindet also zunächst für $r = 0$ und für $\psi = 0$. Dieses Verhalten bedeutet aber eine nur scheinbare Verletzung der Stetigkeitsbedingung, wie durch passende Änderung der Koordinatenwahl leicht bewiesen werden kann. g verschwindet aber auch für $r = \frac{\pi}{2} R$, und zwar scheint es sich hier um eine Unstetigkeit zu handeln, die durch keine Koordinatenwahl beseitigt werden kann. Ferner ist klar, daß die Punkte der Fläche $r = \frac{\pi}{2} R$ als im Endlichen gelegene Punkte aufzufassen sind, falls wir den Punkt $r = t = 0$ zum Punkt P_0 wählen; denn das bei konstantem ψ, Θ und t genommene Integral

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}R} dr$$

ist endlich. Bis zum Beweise des Gegenteils ist also anzunehmen, daß die DE SITTERsche Lösung in der im Endlichen gelegenen Fläche $r = \frac{\pi}{2} R$ eine echte Singularität aufweist, d. h. den Feldgleichungen (1) bei keiner Wahl der Koordinaten entspricht.

Bestände die DE SITTERsche Lösung überall zu Recht, so würde damit gezeigt sein, daß der durch die Einführung des »λ-Gliedes« von mir beabsichtigte Zweck nicht erreicht wäre. Nach meiner Meinung bildet die allgemeine Relativitätstheorie nämlich nur dann ein befriedigendes System, wenn nach ihr die physikalischen Qualitäten des Raumes allein durch die Materie vollständig bestimmt werden. Es darf also kein $g_{\mu\nu}$-Feld, d. h. kein Raum — Zeit — Kontinuum, möglich sein ohne Materie, welche es erzeugt.

In Wahrheit löst das De Sittersche System (2) die Gleichungen (1) überall, nur nicht in der Fläche $r = \frac{\pi}{2} R$. Dort wird — wie in unmittelbarer Nähe eines gravitierenden Massenpunktes — die Komponente g_{44} des Gravitationspotentials zu null. Das De Sittersche System dürfte also keineswegs dem Falle einer materielosen Welt, sondern vielmehr dem Falle einer Welt entsprechen, deren Materie ganz in der Fläche $r = \frac{\pi}{2} R$ konzentriert ist; dies könnte wohl durch einen Grenzübergang von räumlicher zu flächenhafter Verteilung der Materie nachgewiesen werden.

Ausgegeben am 21. März.