Von φ-Segmentierung zu Euler: Beweiskette & Ableitung

Kurzfassung

Wir zeigen, wie das **φ-Segmentgitter** (diskrete Skalenstufen) auf die **Euler-Darstellung** $e^{x+i\theta}$ zurückgeführt werden kann. Daraus folgen (i) die Lattice-Vorhersage $1+z=\varphi^n$ für Rotverschiebungen bzw. Frequenz-Verhältnisse, (ii) die Darstellung als **logarithmische Spirale** mit festem Wachstumsparameter, und (iii) konkrete, falsifizierbare Tests in Labor- und Astrodaten. Der zentrale Reduktionsschritt nutzt die **Polarzerlegung** eines komplexen Exponenten: Magnitude e^x (Skala) × Phase $e^{i\theta}$ (Drehung). Die φ-Segmentierung fixiert x pro Segment zu $\ln\varphi$, die Topologie legt $\Delta\theta$ pro Segment fest.

---

1. Axiome & Definitionen

A1 (Segment-Postulat). Raumzeit besitzt Diskretstufen S_n mit **konstanter lokalen Kopplung** und **konstanter effektiver Metrik** innerhalb eines Segments.

A2 (Skalenfaktor). Beim Übergang $S_n \to S_{n+1}$ skaliert jede relevante Längen-/Zeit-/Frequenzgröße durch den **festen Faktor** φ (goldener Schnitt). Beispiel: Wellenlänge λ wächst wie $\lambda \mapsto \varphi\,\lambda$; Frequenz f fällt wie $f \mapsto f/\varphi$.

A3 (Winkel-Quantelung). Die Segmentgrenze entspricht einer festen **Phasenrotation** $\Delta\theta$ (z. B. Viertelkreis $\Delta\theta=\pi/2$ oder allgemein $2\pi/N$).

D1 (Ratio, Redshift). $R \equiv f_{\text{emit}}/f_{\text{obs}} = 1+z = \lambda_{\text{obs}}/\lambda_0$.

Hypothese H_φ (Lattice).

$$\boxed{1+z=R=\varphi^n}, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

---

2. Lemma: Logarithmisches Gitter in log-Skala

Aus **A2** folgt $\ln R = n\,\ln\varphi$. Daher ist $\ln(1+z)$ **periodisch** modulo $\ln\varphi$, und die beste ganzzahlige Stufe ist

$$\hat{n} = \operatorname{round}\left(\frac{\ln R}{\ln\varphi}\right).$$

Residual $\varepsilon = \frac{\ln R}{\ln\varphi} - \hat{n} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

---

3. Euler-Reduktion: von φ-Stufen zur Exponentialform

Die Bewegung/Übertragung über Segmente kann im **komplexen Plan** parametrisiert werden:

$$z_k = r_k\, e^{i\theta_k} = r_0\, \varphi^k\, e^{ik\,\Delta\theta} = r_0\, e^{k(\ln\varphi + i\,\Delta\theta)}.$$

Schreibweise mit Euler: $e^{x+i\theta} = e^x(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Folgerungen. - Pro Segment multipliziert die **Magnitude** um $e^{\ln\varphi} = \varphi$ (Skalen-Jump), - die **Phase** rotiert um $\Delta\theta$ (Topologie/Geometrie der Grenze), - der kontinuierliche Grenzpfad ist eine **logarithmische Spirale**

$$r(\theta) = r_0\, e^{b\theta}, \qquad b = \frac{\ln\varphi}{\Delta\theta}.$$

Für Viertelkreis-Segmentierung $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ gilt $b = \frac{2\ln\varphi}{\pi}$.

Damit ist die φ-Segmentierung exakt die **Betragskomponente** der Euler-Form; die Grenzrotation liefert die **Phasenkomponente**. Die Lattice-Physik ist daher die reelle Achse $x = \ln\varphi$ einer komplexen Euler-Exponentialbewegung.

---

4. Satz (Euler-Darstellung der φ-Skalierung)

Satz. Unter **A1–A3** existiert eine Parametrisierung der beobachtbaren Verhältnisse R als **reeller Anteil** eines komplexen Exponenten,

$$R = e^{n\ln\varphi} = \left|e^{n(\ln\varphi + i\Delta\theta)}\right|,$$

so dass die φ-Stufe n die **Magnitude** steuert, die Geometrie $\Delta\theta$ die **Phase**. Für Spektren/Zeitraten folgt $1 + z = \varphi^n$, für Frequenzen $f_{\text{obs}} = f_{\text{emit}}/\varphi^n$.

Beweis. Direkt aus der Euler-Zerlegung und dem Produktgesetz der Exponentialfunktion. □

---

5. Rückführung auf die „Euler-Formel am Anfang“

Viele Darstellungen im Projekt beginnen mit einer **Euler-Spirale** des Typs

$$r(\theta) = \exp(k\,\theta), \quad \text{mit} \quad k = \frac{\ln\varphi}{\pi}\ (\text{oder äquivalent}).$$

Dies ist ein Spezialfall der obigen Herleitung mit $\Delta\theta$ passend gewählt. Allgemein gilt

$$r(\theta) = e^{\frac{\ln\varphi}{\Delta\theta}\,\theta} = \varphi^{\theta/\Delta\theta}.$$

Wählt man $\theta = \pi$ als Referenz-Halbumlauf und $\Delta\theta = \pi/2$ (Segment als Viertelkreis), so ist

$$r(\pi) = \varphi^{\pi/(\pi/2)} = \varphi^2.$$

Andere Normalisierungen (z. B. $r(\pi) = 1$) entsprechen nur einer Wahl von r_0 und verschieben k additiv; die **Ableitungsstruktur** bleibt identisch. Entscheidend ist: **Der Wachstumskoeffizient** ist proportional zu $\ln \varphi$, also **rein reell**, und die Rotation ist **rein imaginär** ($i\theta$). Genau das ist Eulers Zerlegung.

---

6. Physik: von der Spirale zur Rotverschiebung

- **Zeitdilatation/Frequenz:** Jede durchlaufene Grenze erhöht die lokale Eigenzeit-Skala um $\varphi \Rightarrow f$ fällt um $1/\varphi \Rightarrow R = f_{\text{emit}}/f_{\text{obs}} = \varphi^n$.
- **Wellenlänge/Redshift:** λ wächst pro Segment um $\varphi \Rightarrow 1 + z = \lambda_{\text{obs}}/\lambda_0 = \varphi^n$.
- **Log-Linearität:** $\ln(1 + z) = n \ln \varphi \Rightarrow$ Gitter in $\ln$ -Koordinaten.

---

7. Testbare Vorhersagen

1. **Ganzzahltest:** $n^* = \text{round}(\ln R / \ln \varphi)$ mit kleinem Residuum $|\varepsilon| \leq \epsilon$ (Fehlerfortpflanzung aus Messunsicherheiten).
2. **Periodizität:** Histogramm von ε flach unter Nullhypothese, **spitz** um 0 unter H_φ .
3. **ΔBIC:** Vergleiche $H_\varphi : R = \varphi^n$ vs. **uniformes** oder **kontinuierliches** Modell; φ-Modell gewinnt, wenn Daten φ-quantisiert sind.

---

8. Mathematische Beweiskette (Skizze)

Lemma 1 (Skalenhomomorphie). Die Abbildung $n \mapsto R = \varphi^n$ ist ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Lemma 2 (Euler-Einbettung). $\exists\, \Delta\theta > 0$ mit $z_n = r_0\, e^{n(\ln \varphi + i\Delta\theta)}$ und $|z_n| = \varphi^n$.

Satz 2 (Äquivalenz). H_φ ist äquivalent zur Aussage, dass die beobachtbaren Ratios R die **Beträge** einer **Euler-Exponentialbahn** auf einem logarithmischen Gitter sind.

Korollar (Rotverschiebungs-Gitter). $\ln(1 + z) \in (\ln \varphi)\, \mathbb{Z}$ bis auf Messfehler.

---

9. Konsistenz & Grenzen

- **Kontinuierliche Näherung:** Für große n ist $\ln R$ fein quantisiert; lokal erscheint es quasi-kontinuierlich.
- **Geometrische Wahl von $\Delta\theta$:** Viertelkreis ($\pi/2$) ist natürlich, andere Segmentierungen (N pro Umdrehung) sind möglich; sie ändern nur $b = \ln \varphi / \Delta\theta$, **nicht** die φ-Logik.
- **Falsifizierbarkeit:** Systematische Abweichungen der **Residuen** von 0 oder Verlust der **ΔBIC-Überlegenheit** widerlegen **H_φ**.

---

10. Praktische Ableitungsschritte (Rezept)

1. **Messgrößen → Ratio:** Bestimme $R = f_{\text{emit}}/f_{\text{obs}}$ oder $1 + z = \lambda_{\text{obs}}/\lambda_0$.
2. **Ganzzahl-Schätzer:** $n^* = \text{round}(\ln R/\ln\varphi)$; Residuum $\varepsilon = \ln R/\ln\varphi - n^*$.
3. **Euler-Einbettung:** Verifiziere, dass die Daten auf einer Bahn $z_k = r_0 e^{k(\ln\varphi + i\Delta\theta)}$ liegen (Magnitude richtig, Phase mit Geometrie kompatibel).
4. **Modelle vergleichen:** ΔBIC (φ-Lattice vs. uniform/GR-kontinuierlich), Vorzeichentest der | Fehler|.

---

11. Verbindung zu den einleitenden Euler-Formeln der Paper

Die häufig verwendete Startform $r(\theta) = \exp(k\,\theta)$ ist genau die **reelle** Komponente der oben abgeleiteten komplexen Euler-Form. Setzt man $k = \ln\varphi/\pi$ (oder äquivalente Normierungen), erhält man dieselbe logarithmische Spirale, deren **Wachstum** durch $\ln\varphi$ (Segment-Skala) und deren **Drehung** durch θ (Segment-Topologie) festgelegt ist. Damit ist die „Euler-Formel am Anfang" kein separates Axiom, sondern die **kompakte Schreibweise** der φ-Segmentlogik.

---

12. Fazit

Die φ-Logik **ist** eine Euler-Logik: Diskrete **Skalenjumps** sind die **reelle Exponential-Komponente**, Segment-**Grenzrotationen** die **imaginäre**. Alles reduziert sich auf $e^{x+i\theta}$ mit $x = \ln\varphi\, n$. Daraus folgen $1 + z = \varphi^n$, die logarithmische Spirale und die beobachteten Signale in Spektren/Uhren – präzise testbar und falsifizierbar.