

THÉORIE DU FILTRAGE ET RÉÉCHANTILLONNAGE

Étude du filtre RIF à fenêtre de Kaiser pour l'analyse modale (0-1 Hz)

1 Introduction au processus de décimation

Le passage d'une fréquence d'échantillonnage de $F_{s1} = 1000 \text{ Hz}$ à $F_{s2} = 20 \text{ Hz}$ ne constitue pas une simple suppression de points. Pour préserver l'intégrité du signal entre 0 et 1 Hz, il est impératif d'appliquer un filtre anti-repliement (*anti-aliasing*). Sans ce filtre, toute l'énergie située au-delà de 10 Hz (nouvelle limite de Nyquist) viendrait polluer la bande basse fréquence par repliement spectral.

2 Conception du filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie)

Le VI LabVIEW utilise un filtre RIF basé sur la méthode des fenêtres de Kaiser. Contrairement aux filtres IIR (Butterworth, etc.), le filtre RIF garantit une **phase linéaire**. Cela signifie que le retard de groupe est constant pour toutes les fréquences : les amplitudes vibratoires entre 0 et 1 Hz restent parfaitement synchronisées temporellement (nous avons affaire à un retard pur et non à une distorsion de phase).

2.1 Le paramètre de forme β

Le paramètre β ajuste le compromis entre la largeur du lobe principal et l'atténuation des lobes secondaires. Il est calculé directement à partir de la réjection R_s souhaitée (en dB) :

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 \cdot (R_s - 8.7) & \text{si } R_s > 50 \\ 0.5842 \cdot (R_s - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (R_s - 21) & \text{si } 21 \leq R_s \leq 50 \\ 0 & \text{si } R_s < 21 \end{cases} \quad (1)$$

Avec $R_s = 100 \text{ dB}$, la formule simplifiée s'applique et donne $\beta \approx 10.06$. Cette valeur élevée assure que l'énergie résiduelle des fréquences parasites est divisée par 10^5 en amplitude, garantissant un spectre d'une grande pureté pour l'algorithme FDD.

2.2 Calcul de l'ordre n

L'ordre du filtre (le nombre de coefficients) détermine la "raideur" de la transition. Il est inversement proportionnel à la largeur de transition normalisée ΔW :

$$n = \left\lceil \frac{R_s - 8}{2.285 \cdot \Delta W \cdot 2\pi} \right\rceil \quad (2)$$

Dans le VI, la largeur de transition est définie par l'écart entre la bande passante choisie (W_p) et la fréquence de coupure théorique ($W_s = 0.5$).

- **Transition étroite** (W_p proche de 0.5) : Augmente n , créant un filtre très précis mais avec plus de latence.
- **Transition large** (W_p faible) : Réduit n , mais risque d'atténuer le signal utile.

3 Configuration 100 dB / 0,4

Pour l'analyse modale opérationnelle entre 0 et 1 Hz, le réglage $W_p = 0.4$ est optimal. Il signifie que le signal est préservé à 100% jusqu'à 8 Hz ($20 \text{ Hz} \times 0.4$). La bande d'intérêt (0-1 Hz) se trouve donc dans la zone de "plateau" la plus stable du filtre. La réjection de 100 dB garantit qu'aucune vibration ou parasite HF ne vient créer de faux modes dans l'analyse SVD.

MÉCANIQUE INTERNE ET MISE EN ŒUVRE

Gestion des états et de la continuité temporelle

4 Architecture logicielle du VI LabVIEW

Le diagramme interne du VI *Resample Waveform* révèle une gestion complexe des données pour assurer un traitement continu et sans discontinuité (*seamless*).

4.1 Gestion du timing et de l'historique t_0

Pour que le rééchantillonnage soit exact, le VI ne se contente pas de traiter des tableaux de nombres ; il gère des *Waveforms*.

- Le VI calcule un **used** t_0 pour chaque bloc de sortie afin de garantir l'alignement temporel parfait entre l'entrée et la sortie.
- Un registre interne (*t_0 history buffer*) mémorise la phase résiduelle du signal entre deux appels du VI, évitant ainsi tout décalage temporel cumulatif au cours de l'acquisition.

4.2 Le rôle critique du "Reset"

L'entrée **reset** commande la réinitialisation des filtres et des mémoires tampons.

- **Reset = FAUX** : Le VI fonctionne en mode "états persistants". Les derniers échantillons du bloc précédent servent de conditions initiales pour le bloc actuel. C'est indispensable pour ne pas générer d'échelons (gigue) à chaque itération de la boucle d'acquisition.
- **Reset = VRAI** : Le filtre est remis à zéro. Cela s'apparente à une mise sous tension. Un transitoire de démarrage apparaît sur une durée égale à la moitié de la longueur du filtre ($n/2$).

5 Garde-fous et limites de précision

Le VI intègre un système de surveillance pour éviter la conception de filtres physiquement impossibles ou instables. Si les paramètres dépassent les limites (Réjection > 150 dB ou BP > 0.495), le VI active une structure de cas qui renvoie l'erreur **20006** (*Accuracy Warning*). Dans ce cas, le filtre Kaiser n'est pas appliqué pour éviter des résultats aberrants.

6 Impact sur la signature vibratoire (FDD)

En utilisant un filtre RIF de 100 dB avec une bande passante de 0,4 :

1. **Fidélité d'amplitude** : Les pics de résonance des arbres entre 0 et 1 Hz conservent leur énergie réelle.
2. **Fidélité de phase** : Les relations de phase entre les différents accéléromètres (nécessaires pour extraire les composantes modales) sont préservées grâce à la symétrie des coefficients du filtre Kaiser.

7 Caractéristiques quantifiées (1000 Hz → 20 Hz)

Cette section détaille les performances temporelles et spectrales du filtre généré avec les réglages suivants : **Réjection = 100 dB** et **Bande Passante = 0.4**.

7.1 Calcul des coefficients du filtre

Le VI *Resample Waveform* conçoit un noyau de filtrage RIF (fenêtre de Kaiser) dont les paramètres sont dérivés des équations internes.

1. **Paramètre de forme β :**

$$\beta = 0.1102 \cdot (100 - 8.7) \approx \mathbf{10.06}$$

Cette valeur assure une décroissance rapide des lobes secondaires.

2. **Largeur de transition normalisée (ΔW) :** Le système fixe la limite d'arrêt W_s à la fréquence de Nyquist normalisée (0.5).

$$\Delta W = W_s - W_p = 0.5 - 0.4 = \mathbf{0.1}$$

3. **Ordre du noyau (n_{kernel}) :** C'est le nombre de coefficients "de base" calculé par la formule :

$$n_{kernel} = \left\lceil \frac{100 - 8}{2.285 \cdot 0.1 \cdot 2\pi} \right\rceil = \lceil 64.08 \rceil = \mathbf{65} \text{ coefficients}$$

7.2 Latence et génération du noyau (Preuve par le code)

L'analyse du diagramme bloc (*Block Diagram*) du VI de conception montre explicitement la méthode de centrage de la réponse impulsionale.

- **Centrage du Motif Sinc :** L'entrée **retard** du VI *Motif Sinc* est câblée directement à la sortie d'une division par 2 de l'ordre calculé n .

$$\text{Retard}_{\text{samples}} = \frac{n}{2}$$

Ceci positionne le lobe principal du sinus cardinal exactement au centre du tableau de coefficients, condition *sine qua non* pour obtenir un filtre à **phase linéaire**.

- **Calcul du retard temporel absolu :** Avec un ordre estimé à $n \approx 65$ (pour le noyau de base) et une fréquence d'échantillonnage d'entrée $F_{in} = 1000 \text{ Hz}$:

$$\tau = \frac{n/2}{F_{in}} = \frac{32.5}{1000} = \mathbf{0.0325 \text{ s}} \quad (\text{pour le noyau seul})$$

Note : Dans le contexte de la décimation complète (où ce noyau est étendu ou appliqué via un processus polyphasé), le retard de groupe total ressenti par l'utilisateur correspond au délai de remplissage du buffer, soit environ :

$$\tau_{total} \approx \frac{N_{total}}{2 \cdot F_{in}} \approx 1.625 \text{ s}$$

8 Justification physique de la linéarité et du retard

8.1 L'origine de la phase linéaire : La Symétrie

La propriété de phase linéaire, essentielle pour l'analyse modale, n'est pas un hasard algorithmique mais une conséquence mathématique directe de la topologie du filtre. L'observation de la réponse impulsionale (le noyau de convolution) montre une symétrie paire parfaite autour de l'échantillon central :

$$h[n] = h[N - 1 - n] \tag{3}$$

Cette symétrie dans le domaine temporel se traduit, dans le domaine fréquentiel, par une réponse en fréquence de la forme :

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Où τ est constant. La phase $\phi(\omega) = -\omega\tau$ est donc strictement proportionnelle à la fréquence (linéaire). Cela garantit que le **retard de groupe** est constant pour toutes les composantes spectrales : le signal vibratoire est retardé mais jamais déformé (pas de dispersion temporelle).

8.2 Pourquoi un retard de $N/2$? (Principe de Causalité)

Le filtrage numérique est un processus causal : le système ne peut traiter que les données déjà acquises.

1. Le filtre de Kaiser concentre son énergie maximale au centre de sa fenêtre (le lobe principal du sinus cardinal) pour assurer la symétrie.
2. Pour appliquer ce poids central à un instant t du signal d'entrée, le processeur doit attendre d'avoir acquis suffisamment d'échantillons pour remplir la moitié "droite" de la fenêtre de convolution.
3. Ce temps d'attente, nécessaire pour que l'échantillon d'intérêt atteigne le centre du registre à décalage du filtre, correspond exactement à la moitié de l'ordre du filtre.

C'est ce délai incompressible de remplissage du buffer ($Delay = \frac{n}{2}$) que l'on retrouve câblé explicitement dans le diagramme LabVIEW via l'entrée *retard* du VI *Motif Sinc*.

9 Conclusion

Pour une analyse fiable, il faut laisser tourner l'acquisition quelques secondes avant de considérer les données comme stables, le temps que le buffer du filtre se remplisse. Il convient de maintenir le **Reset à FAUX** durant toute la durée de la mesure pour garantir la continuité de la phase, facteur clé de la décomposition en valeurs singulières (SVD).