Kartka 1

Zad.1. *(5p)* Niech D będzie zbiorem macierzy postaci $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Czy zbiór D jest zamknięty ze względu na mnożenie macierzy ? Czy zbiór D ze zwykłym mnożeniem macierzy tworzy grupę ?

Zad.2. (a)*(2p)* Zapisz w postaci algebraicznej liczby $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ spełniające podane warunki

- $|z_1| = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \arg(z_1) = \frac{3}{4}\pi$,
- $\mathrm{Im}(z_2) = 1 \quad \wedge \quad z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$

(b)*(4p)* Rozwiąż równanie w zbiorze $\mathbb{C}$

$$2z^4 - 1 - i^{53}\sqrt{3} = 0$$

Zad.3. *(5p)* W $\mathbb{Z}_7[x]$ znajdź wartości parametrów A, B tak, aby reszta z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez $W(x)$ była równa $x^2 + 6x$.

$$V(x) = 4x^5 + Ax^4 + 6x^2 + B, \qquad W(x) = 4x^3 + x + 1$$

Kartka 2

Zad.4. *(4p)* Dla jakich wartości parametru p układ ma dokładnie jedno rozwiązanie ? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach. W przypadku nieskończonej liczby rozwiązań znajdź te rozwiązania.

$$\begin{cases} x + y + p^2 z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + 3z = p \end{cases}$$

Zad.5. *(4p)* Rozwiąż równanie macierzowe korzystając z operacji na macierzach, w tym z macierzy odwrotnej

$$X = X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Zad.6. Dane są trzy punkty $A(2, 1, -1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C(0, 2, 2)$

(a) *(2p)* Oblicz pole trójkąta ABC

(b) *(1p)* Znajdź równanie płaszczyzny π zawierającej ten trójkąt

(c) *(1p)* Znajdź równanie prostej (w postaci parametrycznej) zawierającej krawędź AB.

(d) *(2p)* Oblicz kąt nachylenia osi OX do płaszczyzny π.