11-1

(a) W=[3,2,1,2]如果我们按照顺序用贪婪算法装箱，K =4，得到的应该是{3},{2,1},{2},需要3 辆车。但是最优解为{3,1}，{2,2}，需要 2 辆车就足够了。

(b) 假设使用这个算法得到的结果是需要调度 2q+1 辆车（我们先验证奇数的情况）。

把他们排列后两两一组，除了最后一组，每组的 weight $\mathrm{w}\,2_i$ 都满足$\mathrm{k} < \mathrm{w}\,2_i \leq 2\,\mathrm{k}$，最后一辆车的 weigh 满足$0 < \mathrm{w} \leq \mathrm{k}$，因此求和得到$\mathrm{q} * \mathrm{k} < \sum_{n=1}^{N} w_i < (2 * q + 1) * k$，因为最优解 OPT 一定满足$\mathrm{OPT} > \frac{\sum_{n=1}^{N} w_i}{k}$，结合上式可以得到：

$$\mathrm{OPT} > \mathrm{q}$$
$$\mathrm{OPT} \geq \mathrm{q} + 1$$
$$2 * \mathrm{OPT} \geq 2\mathrm{q} + 1$$

当我们需要调度 2q 辆车，分组后，我们同样可以得到

$$\mathrm{q} * \mathrm{k} < \sum_{n=1}^{N} w_i < (2q) * k$$

$$\mathrm{OPT} > \frac{\sum_{n=1}^{N} w_i}{k}$$
$$2\mathrm{OPT} > 2\mathrm{q}$$

11-3

(a) A={2，49}，B=50

(b) 遍历每一个权重，当 sum+w[i]≤B 就加入集合，如果超过就一定有 sum 或者 w[i] > B/2，于是我们返回较大的值就可以了。复杂度是 O(n)，满足题意要求的 O(nlogn)

11-5

从书上 P603 可以得到结论$\mathrm{T} < t_j \leq T^*$

在本题中，我们知道 OPT(T*)一定大于总时间/机器数，将最大的单项任务时间代入上式，有：

$$T^* \geq \frac{1}{m} \sum_j t_j \geq \frac{1}{10} * 3000 = 300$$

$$\frac{T - T^*}{T^*} \leq \frac{t_j}{T^*} \leq \frac{50}{300} = \frac{1}{6} < 20\%$$

13-1

由于这是一个最大化问题，我们需要一个上界 c*，

$\mathrm{c} < \mathrm{m}$，其中 m=| E |.

算法是用三种不同的颜色中的一种分别为每个节点着色，每种颜色的概率为三分之一。

对于任意一条边，有 9 种给它的两端上色的办法，但是其中有 3 种不满足要求。

假设随机变量X_e满足：当边 e 符合条件，$\mathrm{X}_e = 1$；当边 e 不符合条件，$\mathrm{X}_e = 0$。所以X_e的期望是$\mathrm{Exp}[X_e] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

设 Y 是表示满足的边数的随机变量，根据期望的线性度，$\mathrm{Exp}[Y]=\mathrm{Exp}[\sum_{e\in E}X_e]=$

$\sum_{e\in E}\mathrm{Exp}[X_e]=\frac{2}{3}m\geq\frac{2}{3}c^*$

13−2

给选民编号 1, 2, 3, ⋯, 100000，其中前 20000 是共和党的选民。令X_i是随机变量。如果等于 0，说明投给了 R；如果是 1，说明投给了 D。于是有$\mathrm{X}=\sum_{i=1}^{10000}X_i$.

对于$\mathrm{i}\leq 20000,\mathrm{E}X_i=0.99*0+0.01*1=0.01$

对于$\mathrm{i}>20000,\mathrm{E}X_i=0.01*0+0.99*1=0.99$

通过期望的线性关系，可得：

$$\mathrm{EX}=\sum_{I=1}^{100000}\mathrm{E}X_i=20000*0.01+80000*0.99=79400$$

13-3

(a) 假设集合中有两个进程P_i和P_j都设置为 1，而且要共享一个资源，这就会与协议矛盾。因为如果一个进程被设置为 1，那么和其冲突的进程都选择了值为 0。因此。得到的集合 S 是没有冲突的。对于每一个进程P_i来说，他被选中的概率取决于P_i选取值 1，而它的所有 d 冲突过程选取值 0。因此 P[P_i $selected$]=$\frac{1}{2}*(\frac{1}{2})^d$，由于有 n 个独立取值的过程，所以 S 的预期大小为$\mathrm{n}*(\frac{1}{2})^{d+1}$。

(b) 现有一过程P_i以 p 的概率选取数值 1，以 1-p 的概率选取数值 0。那么P_i被选中的概率为$\mathrm{p}*(1-p)^d$。

现在我们想让一个进程被选中的概率最大化，可以通过求导得取到最值时$\mathrm{p}=\frac{1}{d+1}$。所以一个过程被选中的概率为$\frac{(d)^d}{(d+1)^{d+1}}$，集合 S 的预期大小为$\mathrm{n}*\frac{(d)^d}{(d+1)^{d+1}}$。注意到它等于$\frac{\mathrm{n}}{d}*(1-\frac{1}{d+1})^{d+1}$，这个项的极限是$\frac{1}{e}$，因此通过改变概率，我们得到了$\frac{n}{d}$节点的一部分。