Oblig 3 FYS2130

Linus Ekstrøm

Mars 1. 2018

Forståelses og diskusjonsspørsmål

Kapittel 5

2.)

For CD lyd er samplingsfrekvensen 44.1 kHz. Ved lydinnspilling må vi ha et lavpassfilter mellom mikrofonforsterker og samplingskretsene som fjerner alle frekvenser over ca 22 kHz. Hva vil kunne skje med lyden ved avspilling dersom vi ikke tok denne regelen høytidelig?
Svar: Hadde vi ikke fjernet frekvenser høyere enn halvparten av samplingsfrekvensen hadde vi ikke kunne entydig gjengitt signalet vi sampler. Hvis det

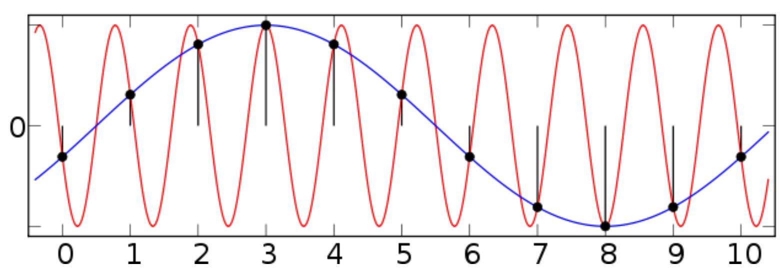

Figure 1: Aliaset sinusfunksjoner som kan representeres med identiske samplingspunkter

hadde vært frekvenser høyere enn halve samplingsfrekvensen kunne vi ikke vært sikre på om vi samplet signalet $\cos m\omega_1 t$ eller $\cos{(N-m)\omega_1 t}$.

Kapittel 14

1.)

Hva er viktigste forskjell mellom fouriertransformasjonen og waveletanalyse?

Svar: Den viktigste forskjellen mellom fourier og wavelettransformasjonen er at fourier gir ut et frekvensspekter som angir hvilke frekvenser som er med i det originale signalet. Hvis man bruker absoluttverdien til fourierkoeffisientene mister en all tidsinformasjon fra det opprinnelige signalet. Det er derfor vanskelig å si veldig mye om et signal med variabel frekvens over samplingstiden ved en fouriertransformasjon. Wavelettransformasjonen lar oss hente ut tidsinformasjonen i tillegg til frekvensinformasjonen i et signal. Den er derfor veldig nyttig når vi ønsker å finne ut hvor lenge en frekvens vedvarer.

2.)

I hvilke situasjoner gir fouriertransformasjon et temmelig ubrukelig resultat?

Svar: Når signalet vi vil analysere har tidsavhengige frekvenser mister vi mye informasjon ved en fouriertransformasjon. Et eksempel er hvis vi har et signal som først har en frekvens $f = 100$Hz og så bytter det over ved en tid t til $f = 200$Hz. En fouriertransformasjon av dette signalet vil ha to topper: en i 100Hz og en i 200Hz. Hvis vi i tillegg har brukt absoluttverdien av fourierkoeffisientene vil vi ikke kunne si, utifra fourierspekteret, at signalet alternerer mellom to frekvenser. Dette vil vi kunne gjøre med en waveletanalyse.

3.)

Hvilke ulemper har wavelettransformasjon sammenlignet med fouriertransformasjon?

Svar: Fra wavelettransformasjonen får vi både ut informasjon om tiden og om frekvensen og på grunn av dette har vi en uungåelig trade off mellom presisjon i tiden og presisjon i frekvensen. Jo mindre waveletten er, lavere K, jo høyere tidsoppløsning har vi, men i gjengjeld har vi en lavere presisjonsoppløsning og motsatt.

5.)

Wavelettransformasjon har et randproblem. Hva menes med det? Hvor stor er randverdisonen?

Svar: Et wavelettransformasjonen har et randproblem kommer av at wavelettene har en utstrekning i f.eks. tid som gjør at når waveletten er på starten eller slutten av datasettet vi jobber med vil summasjonen ha en annen verdi enn det den skal være.

Regneoppgaver

Kapittel 5

8.)

Vis både matematisk og ved programmeringseksempel at første punkt i en diskret fouriertransformasjon av et signal er lik gjennomsnittsverdien til signalet vi starter med.

Svar: Den diskrete fouriertransformasjonen er gitt ved

$$X_k = \frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{1}$$

Vi ser klart at når $k = 0$ vil eksponentialen bli null så eksponentialfunksjonen blir konstant lik 1

$$X_0 = \frac{\Sigma_{n=0}^{N-1} x_n}{N} \tag{2}$$

9.)

Kjør programmet gitt i oppgaven for frekvensene

$$f \in [100, 200, 400, 700, 950, 1300]\text{Hz}$$

Finner du et system i hvor linjene kommer ut i frekvensspekteret?

Svar: Opp til første $\frac{1}{2}f_s$ gir transformasjonen en entydig frekvens tilhørende signalet, nemlig det jeg brukte til å generere det. Mellom $\frac{1}{2}f_s$ og $2f_s$ gir transformasjonen en frekvens gitt ved $f_s - f_i \mathrm{mod} f_s$ for frekvenser $f_i \in (500, 1000)$. Ved $f_i = 1000$Hz får vi et konstant signal med verdi lik koeffisienten 0.8 som jeg brukte da jeg genererte signalet. Over $2f_s$ kommer linjene i frekvensspekteret på hundrerplassen til frekvensverdien vi sender inn. Igjen når vi kommer mellom $\frac{3}{2}f_s$ og $4f_s$ får vi linjer i frekvensspekteret ved frekvensen $f_s - f_i \mathrm{mod} f_s$. Det virker som dette mønsteret fortsetter ved høyere frekvenser utifra begrenset testing.

11.)

Bruk den gitte solflekkdataen til å lage en oppdatert figur lignende figur 5.7 i læreboka. Er det samsvar mellom høydene i toppene i tidsbildet og amplitudene i frekvensspekteret?

Svar: Vi ser at det er ca. $t = \frac{1}{0.1}$yr $= 10$yr mellom toppene i tidsbildet. Dette passer godt med den høyeste toppen i frekvensspekteret.

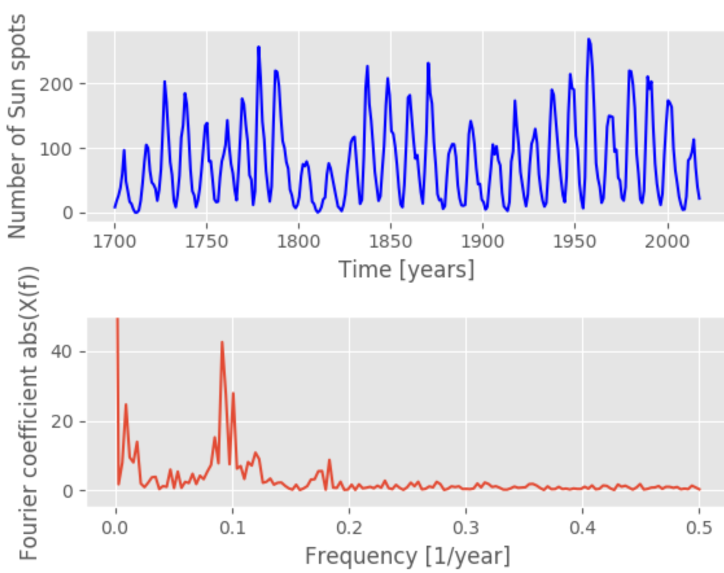

Figure 2

14.)

Skriv et program som lager et harmonisk signal med eksakt 13 perioder innenfor 512 punkter. Beregn så den fouriertransformerte av signalet. Blir dette som forventet?

Svar: Lager et rent sinus-signal, $\sin(2\pi nt)$ hvor n er antall perioder innenfor en enhetstid, samplet i 512 punkter. Ser at toppen i frekvensspekteret ligger på 13.050, og at når jeg øker antall samplingspunkter så går denne feilen mot null. Det ser ut som feilen minker linært med antall samplingspunkter utifra litt testing.

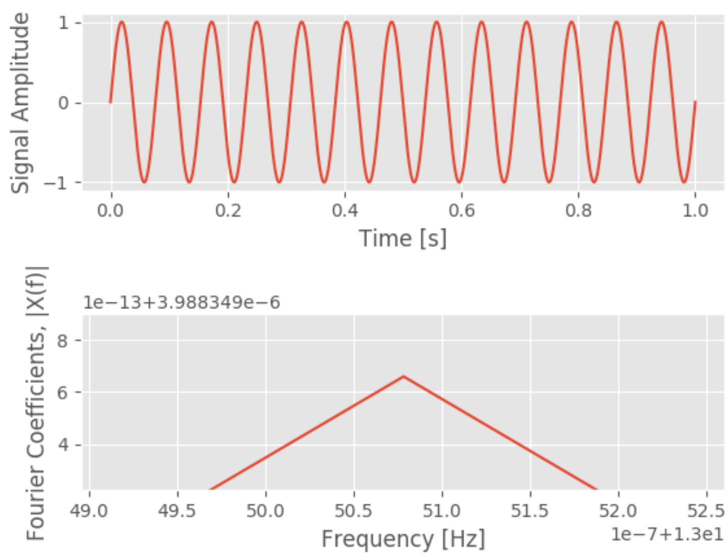

Figure 3: Ser på samme transformasjonen når $N = 5.12 \cdot 10^6$. Vi ser at feilen er på størrelsesorden av oppløsningen

15.)

Modifiser programmet såvidt slik at signalet nå får 13.2 perioder innenfor de 512 punktene. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå?

Svar: Når vi setter signalets frekvens til 13.2 er toppen i frekvensspekteret på 13.050. Den venstre siden av toppen er hevet litt i forhold til $f = 13.0$ og den høyre siden av toppen er litt slakere.

16.)

Modifiser programmet slik at du får 16 hele perioder med firkantsignal innenfor $N = 2^{14}$ samplingspunkter. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå?

Svar: Frekvensspekteret har topper på verdier som følger $x_n = 16(2n-1)$ hvor $n \in [1, 8]$

Kapittel 14

8.)

I denne oppgaven er det underliggende temaet analogien til Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

a) Generer en numerisk tallrekke som representerer signalet

$$f(t) = c_1 \sin(2_1 t) + c_2 \sin(2\pi f_2 t) \tag{3}$$

Bruk 10kHz samplingsfrekvens og $N = 8192$ punkter, $f_1 = 1000$Hz, $f_2 = 1600$Hz, $c_1 = 1.0$ og $c_2 = 1.7$. Plott signalet i tidsbildet.

b) Beregn den fouriertransformerte av signalet. Plott et passe utsnitt av signalet i frekvensbildet.

Svar: Under ser vi øverst signalet i tidsbildet og nederst har vi signalet i frekvensdomenet.

c) Beregn den wavelettransformerte av signalet. Bruk Morlet wavelets, og la analysefrekvensen gå f.eks. fra 800 til 2000 Hz. Plot etter tur resultatet for bølgetallet K lik 24 og 200. Kommenter resultatet.

Svar: Ved $K = 24$ skal vi egentlig ha en bedre tidsoppløsning enn med $K = 200$, men siden det harmoniske signalet vedvarer over hele analyseperioden får vi så og si identisk tidsoppløsning for de to bølgetallene. Vi ser at ved lavere bølgetall har vi større usikkerhet i frekvensdomenet, dette er uskarphetsprinsippet.

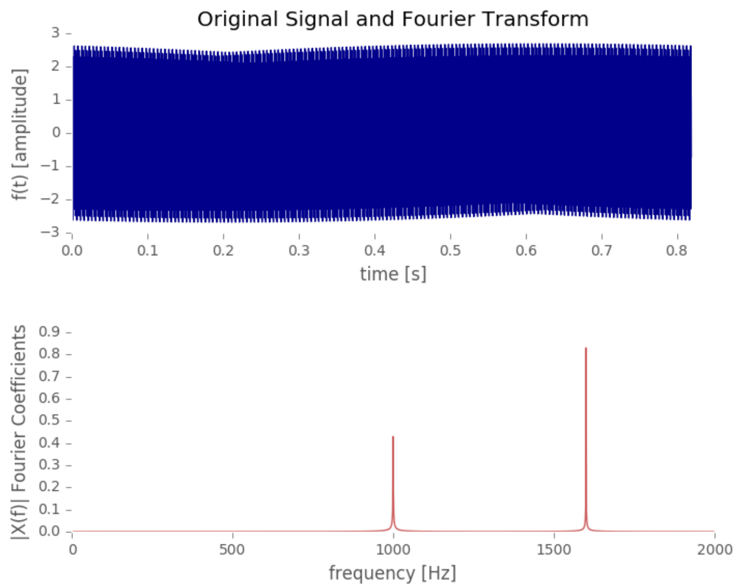

Figure 4: Caption

d) La så signalet være et harmonisk signal som før, men nå konvolutert med en gaussisk funksjon slik at vi får to bølgepakker

$$f(t) = c_1 \sin(2\pi f_1 t) exp\Big(- [\frac{t - t_1}{\sigma_1}]\Big) + c_2 \sin(2\pi f_2 t) exp\Big(- [\frac{t - t_2}{\sigma_2}]\Big)$$

hvor $t_1 = 0.15$s, $t_2 = 0.5$s, $\sigma_1 = 0.01$s og $\sigma_2 = 0.10$s. Beregn den fouriertransformerte av signalet, og også den wavelettransformerte av signalet. Plot signalet i tidsbildet, frekvensbildet og den wavelettransformerte av signalet for $K = 24$ og $K = 100$.

Svar:

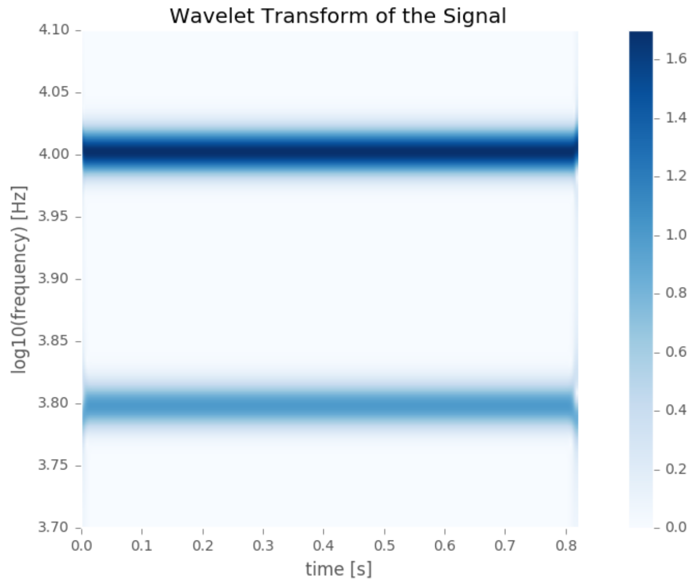

Figure 5: Bolgetallet $K = 24$

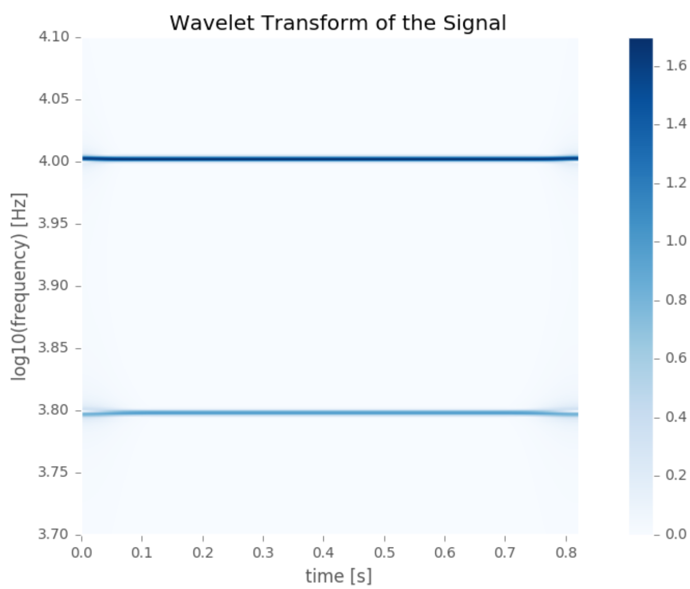

Figure 6: Bølgetallet $K = 200$

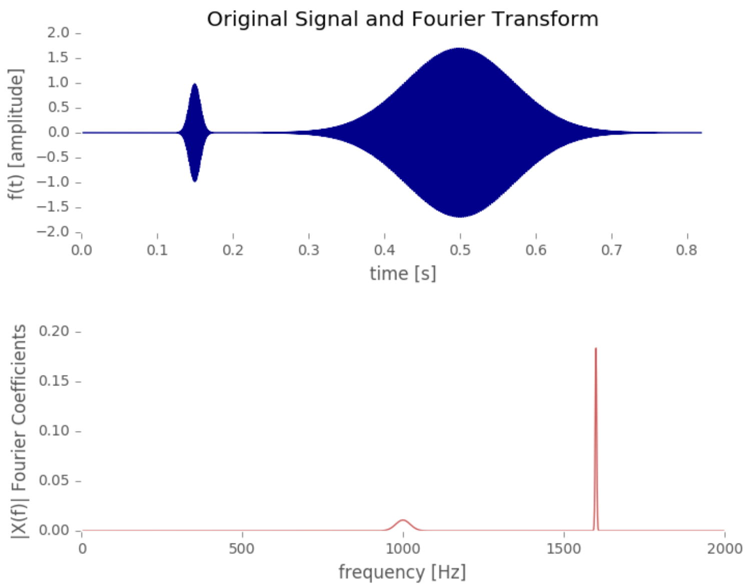

Figure 7: Plot av det Gaussiske signalet i tidsbildet og frekvensbildet

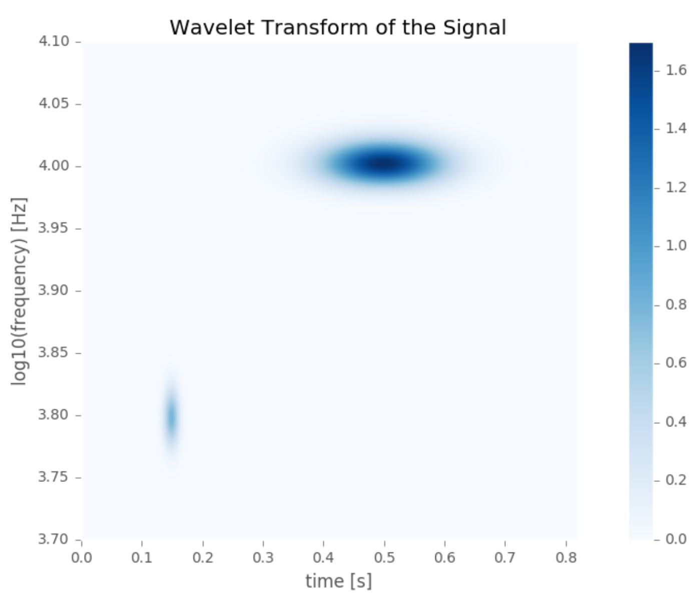

Figure 8: Bølgetallet $K = 24$

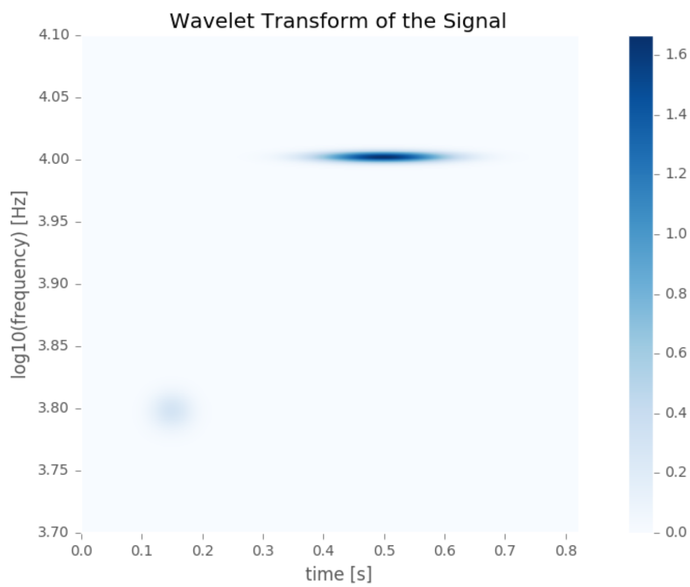

Figure 9: Bølgetallet $K = 100$