

OBLIG 1 FYS2140

LINUS EKSTRØM

FORSTÅELES- OG DISKUSJONSSPØRSMÅL

Kapittel 3

3) Det er ofte enklere å oppnå høy Q-verdi for et svingende system som har resonansfrekvens ved høy frekvens enn ved lav. *Kan du forklare hvorfor?*

Svar: En definisjon av Q-verdi er

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Hvor Δf er FWHM til svingeenergi vs. frekvensgrafen til systemet og f_0 er resonansfrekvensen til systemet. Vi ser fra definisjonen at hvis systemet har en høyere resonansfrekvens vil systemet også ha en høyere Q-verdi.

6) Hva ville skjedd med et svingesystem uten damping dersom det ble utsatt for en harmonisk påtrykt kraft ved resonansfrekvensen? Hva ville skjedd om den påtrykte kraften hadde en frekvens bitte litt forskjellig fra resonansfrekvensen?

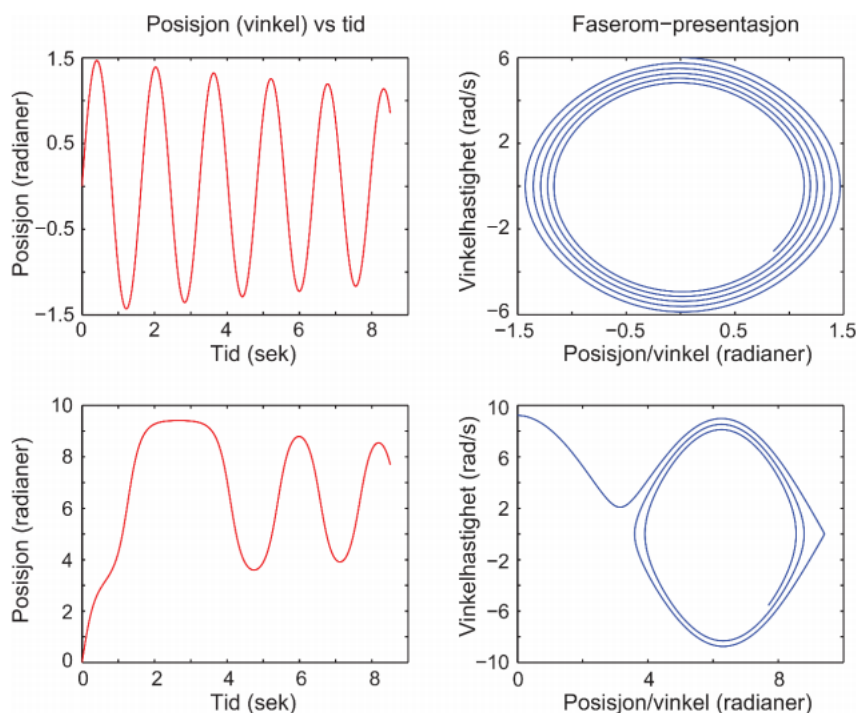
Svar: Dersom den påtrykte frekvensen $\omega_F = \omega_0$, og det ikke er noen damping, er amplituden gitt ved

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2}}$$

Utifra hva jeg skjønner vil da amplituden være udefinert (gå mot uendelig), siden den periodiske kraften vil fortsette å legge inn energi i systemet og siden det ikke er noe tap (damping) gir det vel mening at det skulle gått mot uendelig. Dersom den påtrykte kraften sin amplitude er litt forskjellig fra resonansfrekvensen vil uttrykket under brøkstreken bli veldig stort, men ikke udefinert / uendelig.

Kapittel 4

Date: January 29. 2018.



1) Hvorfor fungerer fjerde ordens Runge-Kutta vanligvis bedre enn Eulers metode?

Svar: RK4 fungerer vanligvis bedre enn Eulers siden den bruker flere punkter til å tilnærme forandringen til funksjonen i intervallet en ser på. RK4 bruker fire punkter mens Eulers metode kun bruker ett. Ved å gjøre en feilleddsanalyse av metodene finner en at RK4 har en feil som går som dx^5 , mens Eulers metode har en feil som går som dx^2 . Det vil si at hvis vi minker tidssteget $dx \rightarrow \frac{dx}{2}$ så vil feilen i RK4 minke med $\frac{dx^5}{32}$, mens feilen i Eulers metode $\frac{dx^2}{4}$. I RK4 har man altså $\frac{1}{32}$ av feilen ved en halvering av tidssteget, mens i Eulers metode har vi $\frac{1}{4}$ av den originale feilen ved halvering av tidssteget.

2) I oppgavefiguren er resultatet av beregninger av en pendelbevegelse vist for tilfellet at det er litt friksjon til stede. Figuren viser posisjon som funksjon av tid og hastighet som funksjon av posisjon (Fase-diagram). De to øvre figurene fremkommer ved en initialbetingelse der pendelen ved tiden $t = 0$ henger rett ned, men samtidig har en liten vinkelhastighet. De nedre figurene fremkommer ved at initialbetingelsen er som for øvre del, men at den initielle vinkelhastigheten er en god del større enn i det første tilfellet. Forklar hva figurene sier om bevegelsen. *Hvordan ville figuren sett ut dersom vi økte ω_0 enda*

litt mer enn den vi har i nedre del av figuren?

Svar: Figurene på venstre viser oppførselen til pendelen. Den svinger frem og tilbake i rommet mens tiden går fremover. Vi ser at for hver periode når pendelen et litt lavere vinkelutslag. Dette er på grunn av luftmotstanden. I den nedre venstre figuren er ω_0 litt større enn i den over. Effekten av dette er at pendelen blir slengt en runde rundt festepunktet sitt, dette ser vi som den bratte økningen i starten av bevegelsen. Fra 0 radianer til 2π tilsvarer en hel runde rundt, fra likevektspunkt til likevektspunkt. Pendelen stopper ikke her og fortsetter opp i samme retning til den har nådd sitt maksimalutslag ved ca $\theta = 2\pi + \pi$, dvs den står nesten rett opp ved det ustabile likevektspunktet. Pendelen står så stille en tid ca $t = 2s$, før den faller tilbake samme vei som den kom opp. Etter dette begynner det vanlige svingemønsteret som forventet. Denne samme oppførselen ser vi i fasediagrammet ved at hastigheten begynner høyt, blir gradvis mindre før den bikker over toppen og hastigheten øker igjen. Så når den det ustabile likevektspunktet i $\theta = \pi$ og stopper opp i denne posisjonen før den beveger seg tilbake og plukker og fart. Etter startoppførselen ser vi den vanlige elliptiske formen til en harmonisk svingning. Dersom ω_0 hadde vært litt større ville pendelen passert toppen en gang til og posisjonen i radianer ville blitt høyere. Dette ville vi sett i nedre venstre graf som enda en del med samme form som på starten.

REGNEOPPGAVER

Kapittel 3

12) Ved gammeldags radiomottaking i mellombølgeområdet brukte vi svingekretser bestående av en spole og en kondensator for å skille en radiostasjon fra en annen. Radiostasjonene tok opp 9kHz på frekvensbåndet, og to radiostasjoner kunne ligge så tett som 9kHz. For at vi skulle kunne skille en radiostasjon fra en annen, måtte da mottakeren ha en variabel resonanskrets som passet til en radiostasjon, men ikke til en annen. Frekvensen på Stavanger-senderen var 1313kHz. *Hvilken Q-faktor måtte radiomottakerens resonanskrets ha?*

Svar: Vi bruker definisjonen av Q-faktoren fra diskusjonsdelen 3) $Q = f_0/\Delta f$. Vi vet at radiostasjonene tok opp 9kHz på frekvensbåndet, men andre ord $\Delta f = 9\text{kHz}$. Videre trenger kretsen en resonansfrekvens som er lik frekvensen til radiostasjonen som skal bli plukket opp, så $f_0 = 1313\text{kHz}$. Det betyr at kretsen trenger en Q-faktor som er lik

$$Q = 145.9$$

13) Lyspulsene flaggermus bruker til å orientere seg har en frekvens på $40 - 100\text{kHz}$. Anta at Q -verdien for hørselen ved disse frekvensene er omtrent $Q = 100$.

a) Finn minste avstand mellom flaggermusa og en vegg for at flaggermusa skal klare å oppfatte et ekko etter en kort lydimpuls (anta at hørselen overdøves mens skriket foregår). Lydhastigheten i luft er $v_l \sim 340\text{m/s}$
Svar: Ligning (3.15) fra læreboka

$$\Delta t = \frac{QT}{2\pi}$$

hvor Δt er tiden det tar for lydbølgens energi til å synke til $1/e \rightarrow 36.7\%$ av sin opprinnelige energi. For denne modellen tenker vi oss at lyden må komme tilbake før denne tiden. Ved å bruke lydhastigheten i luft kan vi finne avstanden denne tiden korresponderer til. Lydbølgen skal imidlertid både frem til veggen og tilbake til flaggermusen. Jeg ganger derfor Δt med $2v_l$

$$s = \frac{Qv}{\pi f}$$

Setter så inn intervallet av mulige frekvenser og får

$$s \in [0.11, 0.27]$$

Siden denne avstanden er frem og tilbake til veggen vil den minste mulige avstanden en flaggermus kan oppfatte ekko fra være $0.055\text{m} = 5.5\text{cm}$. Dette resultatet virker nogenlunde realistisk, men antagelsen om at flaggermusen ikke kan høre lydbølgen etter Δt er jeg ikke helt sikker på om er helt realistisk. Utifra hvordan flaggermus jager og fanger insekter vil jeg si at denne minste mulige avstanden mest sannsynlig er en del mindre i virkeligheten.

b) Hvor stor ville den minste avstanden vært dersom flaggermusa brukte lydimpulser ved om lag $f = 1000\text{Hz}$

Svar: For denne oppgaven bruker jeg bare uttrykket som ble utledet over

$$s = 10.8\text{m}$$

Halvparten av dette blir da den minste avstanden en flaggermus kan være fra veggen, 5.4m .

18) En serie RCL-krets består av en resistans $R = 1.0\Omega$, en kondensator $C = 100\text{nF}$ og en induktans $L = 25\mu\text{H}$

a) Sammenligner vi ligning (3.7) med ligning (3.1), innser vi at disse ligningene er helt analoge. Bare ved å bytte noen få variable knyttet til mekanisk fjærpendel, får vi ligningen for en elektrisk RCL-seriekrets. Benyttes denne analogien, kan vi lett omforme uttrykkene for faseskift (3.3), amplitude (3.4), Q -verdi (3.11) og uttrykkene for faseresonans

og amplituderesonans for fjærpendelen, til tilsvarende formler for en RCL-seriekrets. *Bestem alle disse uttrykkene for en RCL-seriekrets.*

Svar: Vi tar i bruk symmetrien mellom de følgende ligningene for å finne uttrykk for faseskift, amplitude og Q-verdi for en RCL-krets.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) &= \frac{V_0}{L} \cos(\omega_F t) \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) &= \frac{F}{m} \cos(\omega_F t)\end{aligned}$$

Uttrykket for faseskift

$$\cot \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\omega_F b/m} \implies \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\omega_F R/L}$$

Uttrykket for amplitude

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (b\omega_F/m)^2}} \implies \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (R\omega_F/L)^2}}$$

Uttrykket for Q-verdi

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b} \implies \frac{\omega_0 L}{R}$$

Uttrykket for amplituderesonans

$$f_{amp.res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \implies \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Dette uttrykket sammenfaller med uttrykket for faseresonans når $R = 0$ og det blir

$$f_{fase.res} = \frac{1}{2\pi} \omega_0$$

I hele utledningen er $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ resonansfrekvensen til en serie-RCLkrets

b) Beregn resonansfrekvensen, både fase og amplitude, for kretsen basert på amplituder i ladningsoscillasjonene og ikke i strømoscillasjonene.

$$f_{amp.res} = 100.6 \text{ kHz}$$

$$f_{fase.res} = 100.7 \text{ kHz}$$

Her har jeg satt inn verdier i uttrykkene utledet ovenfor.

c) Beregn Q-verdien for kretsen.

$$Q = 15.8$$

d) Hvor stor faseforskjell er det mellom påtrykt spenning og strøm i kretsen ved faseresonans og ved en frekvens som svarer til $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ i

ligning (3.16)?

Når den påtrykte frekvensen er lik faseresonansen ser vi fra uttrykket for faseskift at $\cot \phi = 0$, som vil si at $\phi = \frac{\pi}{2}$. Dette skjer dersom $R \neq 0$ og $L\omega_F - \frac{1}{C\omega_F} = 0$.

Dersom den påtrykte frekvensen er lik $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$. Her er jeg ikke helt sikker på hvilken relasjon jeg skal bruke, hvis $\Delta\omega$ er halverdibredde burde dette nevnes i oppgaveteksten, evt. skrive $FWHM\omega$. Velger hvertfall å tolke det slik, da kan jeg bruke uttrykket for Q-verdi løst for FWHM.

$$\omega_F = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = \omega_0 + \frac{\omega}{2Q}$$

Da blir uttrykket for faseforskjellen

$$\cot \phi = \frac{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{\omega}{2Q})^2}{(\frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{\omega}{2Q})R/L}$$

Kapittel 4

4) Hensikten med denne sammensatte oppgaven er at du skal lage ditt eget program for å løse annen ordens differensialligninger ved hjelp av RK-4, og kunne modifisere programmet for å takle nye utfordringer. Be gjerne om ekstra hjelp for å komme i gang. Konkrete deloppgaver er som følger:

a) Lag et program i Python som bruker RK4 for å beregne en dempet svingning fra en fjærpendel. Programmet bør bestå av minimum tre ulike deler etter et ligningende opplegg som er skissert i kapittel 4. Programmet skal testes for tilfellet $m = 100\text{g}$, $k = 10\text{N/m}$ og friksjonen antas å være lineær med friksjonskoeffisienten $b = 0.10\text{kg/s}$. Initialbetingelsene er $z(0) = 10\text{cm}$ og $\frac{dz(0)}{dt} = 0\text{m/s}$. Gjennomfør en test over hvilke tidssteg som er akseptable, og en test om det er samsvar mellom numeriske beregninger og analytisk løsning. Få med korrekte tall, tekst og enheter langs aksene i plottene.

Svar: Her har jeg gjort slik oppgaven ba om og lagd metoder for numerisk integrasjon i Python. b) Modifiser programmet slik at du kan lage en figur som viser tidsforløpet for svingningen når vi har underkritisk, kritisk og overkritisk damping. Forklar hvordan du velger parametrene dine.

Svar: Når dette gjøres algebraisk gir det mening å bruke parameterene γ , ω og α , men siden jeg skal gjøre dette i koden gir det liten mening å definere nye variabler for dette. Her setter jeg da heller begrensning på friksjonskoeffisienten b for de tre situasjonene; kritisk, underkritisk og

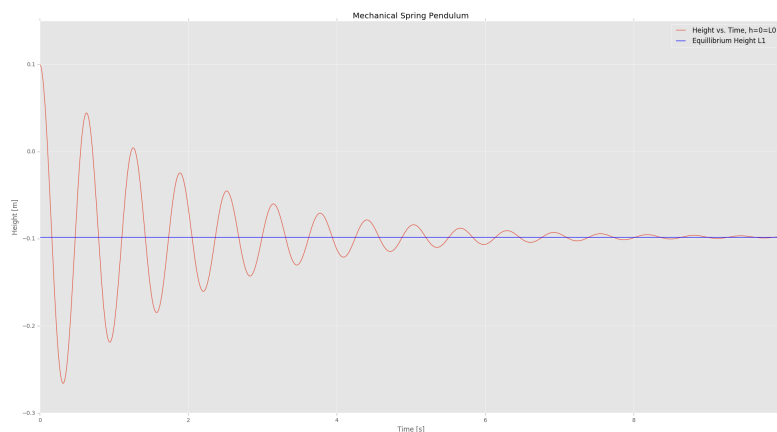


FIGURE 1. Fjærpendel med luftmotstand og gravitasjon. Differensialligning løst med RK4

overkritisk demping. For fjærpendelsystemet har vi kritisk demping ved $b = 2\sqrt{km}$, underkritisk ved $b < 2\sqrt{km}$ og overkritisk demping ved $b > 2\sqrt{km}$. Verdiene jeg valgte å bruke da jeg lagde plottene var $b = 3.5\sqrt{km}$ og $b = 0.5\sqrt{km}$ for henholdsvis over og underkritisk demping. Resultatene jeg fikk er vist i figurene under.

c) Modifiser programmet slik at det også kan håndtere tvungen svingning. Bruk $m = 100\text{g}$, $k = 10\text{N/m}$, $b = 0.040\text{kg/s}$ og $F = 0.10\text{N}$ i ligning (3.1). Forsøk å få fram plot som svarer til den første delen av hvert av tidsforløpene vi finner i figur (3.7)

d) Bruk denne siste versjonen av programmet til å sjekke at 'frekvensresponsen' til systemet blir slik den skal være, og at du faktisk kan lese ut den omtrentlige Q -verdien til systemet fra en figur du lager.

7) Gjennomfør beregninger av tvungne svingninger for en rekke forskjellige påtrykte frekvenser, og sjekk at uttrykket for kvalitetsfaktor i kap. 2 stemmer overens med frekvenskurven og den alternative beregningen av Q basert på halvverdbredde og senterfrekvens.

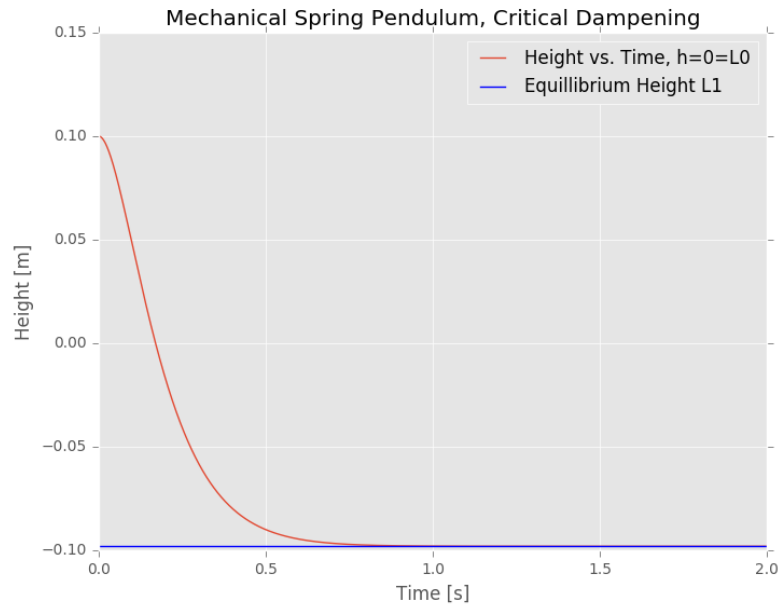


FIGURE 2. Kritisk dempning, $b = 2\sqrt{km}$

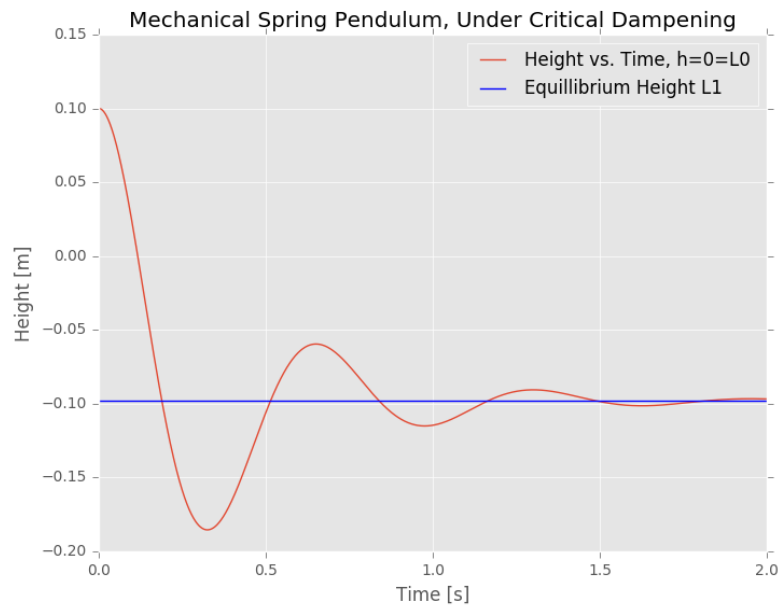


FIGURE 3. Underkritisk dempning, $b = 0.5\sqrt{km}$

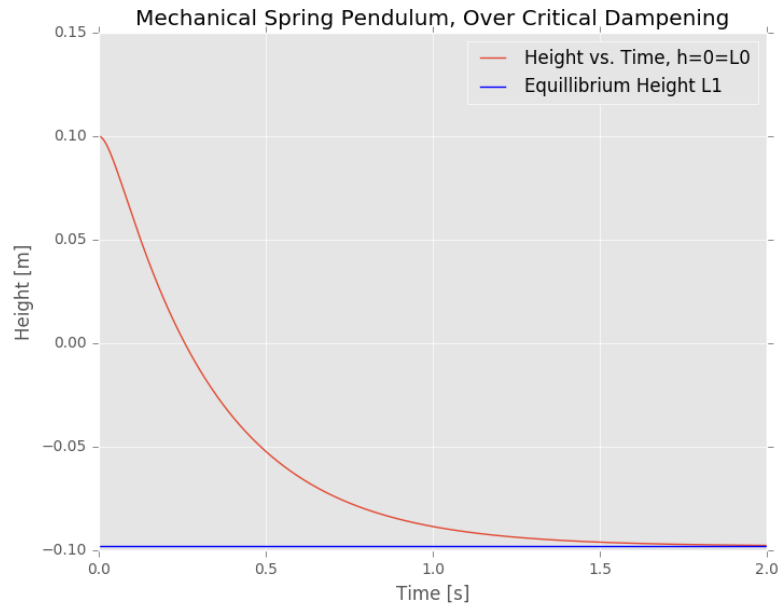


FIGURE 4. Overkritisk dempning, $b = 3.5\sqrt{km}$

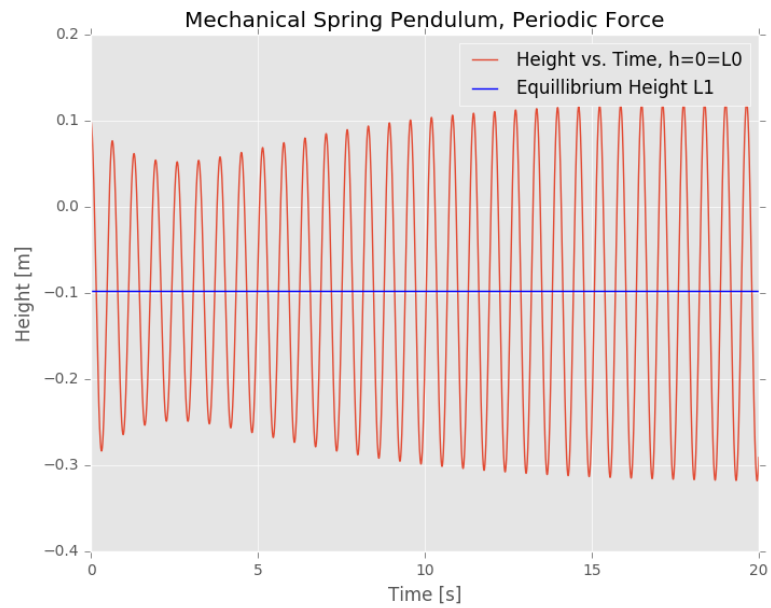


FIGURE 5. Periodisk påtrykt kraft på fjærpendel med frekvens $\omega_F = \omega_0$

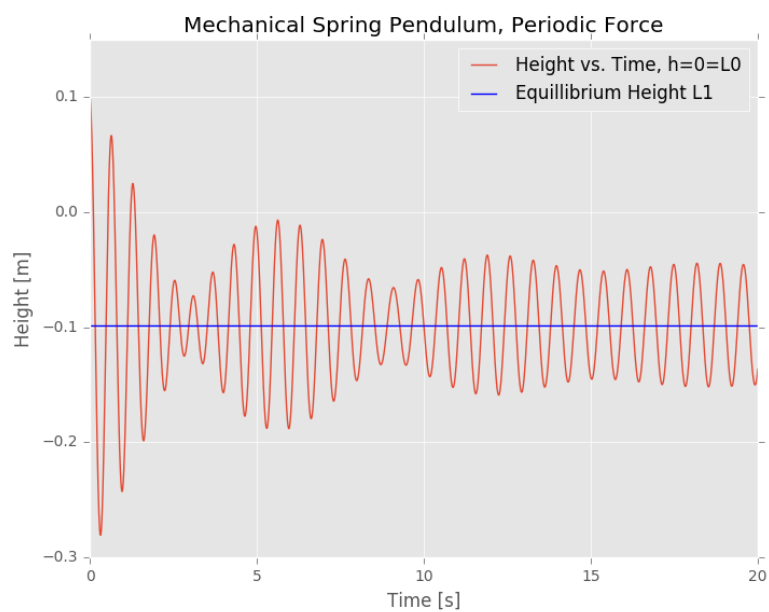


FIGURE 6. Periodisk påtrykt kraft på fjærpendel med frekvens $\omega_F = 0.9\omega_0$