Übungsblatt 06
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

31. Mai 2023

6.1 Zentralübung

(i) Es ist $p_{X|X}(x|x) = 1$, also $\mathbb{E}[X|X = x] = x$ und damit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot 1_{X(\Omega)}$. Es folgt $\mathbb{E}[X|X](\omega) = g(X(\omega)) = X(\omega)$ und damit $\mathbb{E}[X|X] = X$.

(ii) Es ist $p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x)$ aufgrund der Unabhängigkeit. Somit ist $\mathbb{E}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X]$ sowie $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}, y \mapsto \mathbb{E}[X]$ konstant. Es folgt $\mathbb{E}[X|Y](\omega) = g(Y(\omega)) = \mathbb{E}[X]$ und damit $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.

(iii) Aus (i) folgt $\mathbb{E}[X + Y|X + Y] = X + Y$. Weiterhin ist, da X und Y gleichverteilt sind, $\mathbb{E}[X|X+Y] = \mathbb{E}[Y|X+Y]$. Zusammen mit der Linearität des (bedingten) Erwartungswertes liefert dies

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[X + Y|X + Y] = \mathbb{E}[X|X + Y] + \mathbb{E}[Y|X + Y] = 2 \cdot \mathbb{E}[X|X + Y] \\ \Leftrightarrow\ &\mathbb{E}[X|X + Y] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X + Y|X + Y] = \frac{1}{2}(X + Y) \end{aligned}$$

6.2

6.3

(i) Wir setzen $\Omega = \{0, 1\}^3$ sowie

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x + y + z \tag{6.1}$$

$$G : \Omega \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x + \frac{y + z}{2} \tag{6.2}$$

d.h. die erste Komponente von $\omega \in \Omega$ beschreibt, ob die 1-Euro-Münze auf Zahl gefallen ist und die zweite und dritte Komponente betrachtet analog die 50-Cent-Münzen. Da alle acht Elementarereignisse in Ω gleich wahrscheinlich sind, gilt für die Verteilungen:

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= \frac{1}{8} \qquad A_0 = \{(0, 0, 0)\} \\ P(Z = 1) &= \frac{3}{8} \qquad A_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\ P(Z = 2) &= \frac{3}{8} \qquad A_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \\ P(Z = 3) &= \frac{1}{8} \qquad A_3 = \{(1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

sowie

$$P(G = 0) = \frac{1}{8} \qquad B_0 = \{(0, 0, 0)\}$$

$$
\begin{aligned}
P(G=0.5) &= \frac{2}{8} \qquad & B_{0.5} &= \{(0,1,0),(0,0,1)\} \\
P(G=1) &= \frac{2}{8} \qquad & B_{1} &= \{(1,0,0),(0,1,1)\} \\
P(G=1.5) &= \frac{2}{8} \qquad & B_{1.5} &= \{(1,1,0),(1,0,1)\} \\
P(G=2) &= \frac{1}{8} \qquad & B_{2} &= \{(1,1,1)\}
\end{aligned}
$$

und für den Erwartungswert folgt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

(ii) $Z = 2$ wird genau für die Elementarereignisse in der Menge A_2 realisiert. Wir betrachten also jeweils die Schnittmenge der B-Mengen mit A_2:

$$
\begin{aligned}
P(G=0|Z=2) &= \frac{0}{3} \qquad & B_0 \cap A_2 &= \{\} \\
P(G=0.5|Z=2) &= \frac{0}{3} \qquad & B_{0.5} \cap A_2 &= \{\} \\
P(G=1|Z=2) &= \frac{1}{3} \qquad & B_1 \cap A_2 &= \{(0,1,1)\} \\
P(G=1.5|Z=2) &= \frac{2}{3} \qquad & B_{1.5} \cap A_2 &= \{(1,1,0),(1,0,1)\} \\
P(G=2|Z=2) &= \frac{0}{3} \qquad & B_2 \cap A_2 &= \{\}
\end{aligned}
$$

Der zugehörige Erwartungswert ist damit $\mathbb{E}[G|Z=2] = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(iii) Es ist $A_0 = \{(0,0,0)\}$. Dieses Ereignis ist nur in B_0 enthalten, womit $\mathbb{E}[G|Z=0] = 0$ folgt. Ebenfalls gilt $A_3 = \{(1,1,1)\}$. Auch hier liegt nur ein einziges Ereignis vor, dass nur in B_2 enthalten ist. Somit folgt $\mathbb{E}[G|Z=3] = 2$. Analog zur (ii) lässt sich $\mathbb{E}[G|Z=1] = \frac{2}{3}$ nachrechnen. Damit gilt für alle möglichen Realisierungen von Z tatsächlich $\mathbb{E}[G|Z=z] = \frac{2}{3}z$, also $\mathbb{E}[G|Z] = \frac{2}{3}Z$.

(iv) Die Tower-Rule besagt nun

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[G|Z]] = \mathbb{E}[\frac{2}{3}Z] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[Z] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1.$$

6.4

(i) Wir setzen im Folgenden $S := X_1 + \cdots X_N = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\ldots,N\}}(i)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S \mid N=k] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\ldots,N\}}(i) \mid N=k\right] && \text{Erwartungswert linear} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\ldots,N\}}(i) \mid N=k] && X_i \text{ von } N \text{ unabhängig} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \cdot 1_{\{1,\ldots,k\}(i)}] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i] = k \cdot \mathbb{E}[X_1].
\end{aligned}
$$

Somit folgt $\mathbb{E}[S \mid N = k] = k \cdot \mathbb{E}[X_1]$, also $\mathbb{E}[S \mid N] = N \cdot \mathbb{E}[X_1]$. Dies zeigt mit der Tower-Rule

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \cdot \mathbb{E}[X_1]] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

Analog betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S|N = k) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\dots,N\}}(i) \mid N = k\right) && X_i \text{ unabhängig} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\dots,N\}}(i)|N = k) && X_i \text{ von } N \text{ unabhängig} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i \cdot \mathbb{1}_{\{1,\dots,k\}}(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) && X_i \text{ gleichverteilt} \\
&= k \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)
\end{aligned}$$

und dies zeigt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S|N) = N \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(S|N)] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[S|N]) \\
&= \mathbb{E}[N \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(N \cdot \mathbb{E}[X_1]) \\
&= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) \cdot \mathbb{E}[X_1]^2.
\end{aligned}$$

(ii) Da N zum Parameter λ Poisson-verteilt ist, gilt $\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = \lambda$. Für X_1 folgt weiterhin (durch Rechnung):

$$\mathbb{E}[X_1] = 0.1 \cdot 20 + 0.05 \cdot 30 + 0.1 \cdot 40 + 0.15 \cdot 50 + 0.6 \cdot 60 = 2 + 1.5 + 4 + 7.5 + 36 = 51$$

sowie

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 0.1 \cdot 31^2 + 0.05 + 21^2 + 0.1 \cdot 11^2 + 0.15 \cdot 1^2 + 0.6 \cdot 9^2 = 179.$$

Mit (i) folgt $\mathbb{E}[Z] = 51\lambda$ sowie $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = \lambda \cdot 179 + \lambda \cdot 51^2 = 2780\lambda$.