Übungsblatt 01
Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

5. Mai 2023

Punkte: | / 30

1.1 Trennung der Variablen

Es sind $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ sowie $h : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y^2+1}{2y}$ stetige Funktionen auf offenen, nicht-leeren reellen Intervallen. Damit handelt es sich bei

$$y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy} = g(x) \cdot h(y) \qquad y(x_0) = y_0$$

um eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, die demnach eine eindeutige Lösung besitzt. Um diese zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Integrale

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y(x)} \frac{2s}{s^2+1} ds &= \left[\ln(|s^2+1|)\right]_{y_0}^{y(x)} && \text{da } \frac{d}{ds}s^2+1 = 2s \\ &= \ln(|y(x)^2+1|) - \ln(|y_0^2+1|) \\ &= \ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tau} d\tau = \ln(|x|) - \ln(|x_0|) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

wobei wir die Beträge weglassen können, da $y(x)^2+1$ sowie y_0^2+1 sicher positiv und x, x_0 beide negativ sind. Gleichsetzen und Auflösen nach $y(x)$ liefert:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right) &= \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1} &= \frac{x}{x_0} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) - 1},\end{aligned}$$

wobei wir aufgrund von $y_0 < 0$ den negativen Ast wählen. Diese Lösung existiert, solange das Argument der Wurzel nicht-negativ bleibt, also falls

$$\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{x_0}{y_0^2+1}.$$

Das maximale Existenzintervall ist also $\left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right]$ und

$$y : \left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) - 1}$$

ist die maximale eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

1.2 Beweisen und Widerlegen

(i) Diese Aussage ist falsch, nach Picard-Lindelöf existiert zwar eine (eindeutige) maximale Lösung, diese muss aber nicht notwendigerweise auf ganz $(-1, 1)$ definiert sein. Betrachte dazu das folgende Anfangswertproblem:

$$x' = x^2 \qquad x(0) = x_0$$

f ist hier stetig und stetig differenzierbar, damit lokal lipschitzstetig, und genügt damit den Anforderungen. Separation der Variablen liefert hier die Lösung $\varphi(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$. Diese ist insbesondere an der Stelle $\frac{1}{x_0}$ nicht definiert, wählen wir also beispielsweise $x_0 = 5$ so existiert φ nur auf dem Teilintervall $(-1, 1/5)$, nicht auf ganz $(-1, 1)$.

(ii) Die Aussage ist korrekt. Die Funktion $f(t, x) = \exp(15t)\cos(x(t)^7)$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert (und dort stetig und bezüglich x lokal lipschitzstetig). Wegen $|cos(x)| \leq 1$ ist f außerdem linear beschränkt, d.h. $|f(t, x)| \leq \exp(15t)$ (man wähle in Satz 3.9 $a(t) = 0$ und $b(t) = \exp(15t)$). Satz 3.9 zeigt, dass dann jede Lösung der DGL auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

1.3 Autonome Lösungen

(i) Die rechte Seite der DGL ist ein Polynom (in der Variablen f) und daher stetig und stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig. Außerdem handelt es sich um eine autonome Differenzialgleichung. Weiterhin ist $\mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^1$ eine offene Teilmenge. Somit sind die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf erfüllt und für alle $(t_0, f_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, insbesondere also für alle $(0, f_0)$, existiert eine maximale eindeutige Lösung des geforderten Anfangswertproblems.

(ii) Da es sich um eine autonome Differenzialgleichung handelt, dürfen sich die Trajektorien der (eindeutigen) Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten nicht schneiden. Da die rechte Seite der Differenzialgleichungen Nullstellen bei $-1, 0, 1$ hat existieren weiterhin konstante Lösungen in diesen Ruhelagen, d.h. insbesondere ist $c_1(t) = 1$ eine Lösung der Differenzialgleichungen zum Anfangswert $f_0 = 1$. Eine Lösung f zu einem Anfangswert $f_0 < 1$ darf daher c_1 nicht schneiden, insbesondere darf daher kein t im Definitionsbereich von f existieren mit $f(t) = 1$. Wegen $f(0) = f_0 < 1$ und dem Zwischenwertsatz schließt dies auch die Existenz eines t im Definitionsbereich von f mit $f(t) > 1$ aus.

(iii) Wir zeigen zuerst, dass f nach oben unbeschränkt ist. Falls der maximale Definitionsbereich von f kleiner ∞ ist, so folgt dies direkt aus dem Satz über das Verhalten der Lösungen im Großen ($\mathbb{R}^2$ hat keinen Rand). Ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, so können wir folgern: $f > 1$ und daher $f' = f^3 - f > 0$ sowie $f'' = 3f^2 - 1 > 2$, d.h. ist linksgekrümmt und streng monoton steigend, also $f \to \infty$ für $t \to \infty$.

Sei nun $a > 1$ beliebig. Ist $a > f_0$, so folgt aus $f(0) = f_0$, der Unbeschränktheit von f und dem Zwischenwertsatz die Existenz des gesuchten t mit $f(t) = a$.

Ist $1 < a < f_0$, so existiert eine eindeutige Lösung g des Anfangswertproblems $f(0) = a$, die ebenfalls die obigen Eigenschaften erfüllt, d.h. es existiert ein t_0 im Definitionsbereich von g mit $g(t_0) = f_0$. Dann ist aber aufgrund der Autonomie der Differenzialgleichung $f(t) = g(t - t_0)$ eine (d.h. die eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems $f(0) = f_0$, diese Lösung ist also in $-t_0$ definiert und erfüllt dort $f(-t_0) = a$.

Ist $a = f_0$, so ist nichts zu zeigen.

Dies zeigt die Aussage für alle $a > 1$.