

Übungsblatt 03

Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

9. Mai 2023

3.1 Zentralübung

- (i) Sei X_0 eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ , d.h. $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \varphi(t)$. Sei nun $\{X_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine (abzählbare) Menge an paarweise unabhängigen, zu X gleichverteilten Zufallsvariablen. Weiterhin sei N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ , d.h. $\mathbb{P}(N = k) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ und $\varphi_N(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1))$. N sei weiterhin von allen X_k unabhängig. Dann betrachten wir eine Zufallsvariable mit der folgenden Definition:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(N \geq k) X_k = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Dann ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}(N = n) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] \right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}[\exp(itX)] \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}(N = n) \mathbb{E} \left[\exp \left(it \cdot \sum_{k=1}^n X_i \right) \right] \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} \varphi(t)^n \right) \\ &= \exp(-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda \cdot \varphi(t))^n}{n!} \right) = \exp(-\lambda) \exp(\lambda \varphi(t)) \\ &= \exp(\lambda(\varphi(t) - 1)), \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ bedingte Erwartung verwenden. Damit ist $e^{\lambda(\varphi-1)}$ wieder eine charakteristische Funktion.

- (ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(itZ)] &= \mathbb{P}(Y = 0) \cdot \mathbb{E}[\exp(itX_1)] + \mathbb{P}(Y = 1) \cdot \mathbb{E}[\exp(itX_2)] \\ &= \alpha \varphi_1(t) + (1 - \alpha) \varphi_2(t) \end{aligned}$$

3.3

Es ist $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \varphi_X(t)$ sowie $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(itn) \cdot \mathbb{P}(X = n)$ nach der Transformationsformel. Gleichsetzen liefert

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(itn) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$

Wir berechnen (unter Ausnutzung der Holomorphie des Integranden)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-itn) \varphi_X(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(it(k-n)) \mathbb{P}(X=k) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(it(k-n)) dt.\end{aligned}$$

Für $k \neq n$ beschreibt $\exp(it(k-n))$ (integriert von $-\pi$ bis π) einen geschlossenen Weg $n-k$ -mal entlang des Randes der Einheitskreisscheibe. Da die Funktion $f: z \mapsto z$ auf der Einheitskreisscheibe holomorph ist, folgt $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(it(k-n)) dt = 0$ nach dem Cauchy-Integralsatz. Somit verbleibt nur der Summand für $k = n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-itn) \varphi_X(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(it(k-n)) \mathbb{P}(X=k) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(it(k-n)) dt. \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{P}(X=n) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(it \cdot 0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{P}(X=n) 2\pi = \mathbb{P}(X=n)\end{aligned}$$

und somit ist die Aussage gezeigt.

3.4

Nach Aufgabe 2.4 eine auf der Menge $\{-1, 1\}$ Laplace-verteilte Zufallsvariable die charakteristische Funktion $\cos(t)$, und demnach die Summe aus drei so verteilten Zufallsvariablen die charakteristische Funktion $\cos(t)^3$. Wegen der Eindeutigkeit von charakteristischen Funktionen ist X demnach derartig verteilt, hat also Wertebereich $-3, -1, 1, 3$, wobei diese Werte mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ für $X = -3, 3$ und $\frac{3}{8}$ für $X = -1, 1$ auftreten.