Übungsblatt 05
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

25. Mai 2023

5.1 Zentralübung

(i) Es ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Matrix hat für $a \neq \frac{1}{2}$ vollen Rang, da Determinante $2a-1$. Somit ist die Verteilung von $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ nach 2.17:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 4-a & 7 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2-2a+4 & 7-a \\ 7-a & 13 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Im Fall $a = 7$ sind $\tilde{X}, \tilde{Y}$ damit unkorreliert, was im Falle multivariater Normalverteilungen der Unabhängigkeit entspricht.

(ii) Wir wiederholen dieselbe Rechnung für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (voller Rang, da Determinante -3):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

5.2

(i) Die Marginalverteilungen sind (multivariate) Normalverteilungen bezüglich der beschnittenen Matrizen:

$$X_2 \sim \mathcal{N}(1, 1)$$
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

(ii) Wegen $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \Sigma_{23} = \Sigma_{23} = 0$ sind X_2 und $(X_1, X_3)^T$ unkorrelliert und damit als (multivariate) Normalverteilungen auch unabhängig.

(iii) Da A Rang 2, also vollen Rang, hat, berechnen wir die Verteilung von Y nach Satz 2.17.

$$
\begin{aligned}
Y &\sim \mathcal{N}\big(A\mu + b, A\Sigma A^T\big) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

5.3

(i) Wir berechnen zuerst das folgende Integral:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 + xy + y^2)\right) dx \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 + xy + y^2/4) - \frac{1}{2}y^2\right) dx \\
=& \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}(x - y/2)^2\right) dx \\
=& \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}/2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - y/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2\right) dx \\
=& \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi} \cdot 1,
\end{aligned}
$$

da der Integrand der Dichte einer Normalverteilung $\mathcal{N}(y/2, \sqrt{3}/2)$ entspricht. Analog können wir außerdem

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right) dx = \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}
$$

zeigen. Somit folgt:

$$
f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)
$$

und folglich ist $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Aus Symmetriegründen gilt analoges für X.

(ii) Wegen $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{1}{2}(y^2 + x^2)\big)$ (man betrachte beispielsweise $x = y = 0$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \neq \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \exp\big(-\frac{2}{3}\big)$) sind X, Y nicht unabhängig.

(iii) Allerdings gilt wegen $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ für die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}[Y] = 0$. Aufgrund der Symmetrie von $f_{(X,Y)}$, insbesondere $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(X,Y)}(x,-y) = f_{(X,Y)}(-x,y) = f_{(X,Y)}(-x,-y)$ gilt auch $\mathbb{E}[X \cdot Y] = 0$ und damit auch $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Die beiden Variablen sind also unkorreliert. Dies ist kein Widerspruch zur Aussage, dass die Marginalverteilungen multivariater Normalverteilungen unkorreliert sind, genau dann, wenn sie unabhängig sind, da es sich nicht um eine multivariate Normalverteilung handelt, sondern lediglich um einen Zufallsvektor mit normalverteilten Marginalverteilungen.

5.4

Wir wollen weiterhin stupide Satz 2.17 anwenden und stellen daher $(X_1, X_2)^T$ als Matrix-Vektor-Produkt mit $(\zeta_1, \zeta_2)^T \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ dar:

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat Determinante -1, sodass 2.17 weiterhin anwendbar ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}^T\right)\\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Analog gilt für $(Y_1, Y_2)^T$:

$$\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}$$

mit Determinante $1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \neq 0$, also folgt wieder mit 2.17:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T\right)\\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Die beiden Zufallsvektoren haben also die gleiche Verteilung.