Übungsblatt 02
Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

4. Juni 2023

Punkte: / 30

2.1 Ein Integral

Wir stellen zuerst den Cosinus komplex dar:

$$\int_0^{2pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} (\exp(it) + \exp(-it))^{2n} dt$$

Dies entspricht einem Wegintegral über $f(z) = \frac{(z+\overline{z})^{2n}}{iz}$ entlang des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{D}, t \mapsto \exp(it)$, wie auch durch Substitution ersichtlich wird.

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \int_\gamma \frac{(z+\overline{z})^{2n}}{z} dz = \frac{1}{i2^{2n}} \int_\gamma \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z} dz$$

Die Funktion $f(z)$ ist im Einheitskreis, dem Inneren von γ, meromorph mit einer einzigen isolierten Singularität im Nullpunkt. Wir verwenden den Residuensatz.

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot n(0, \gamma) \cdot \operatorname{res}(0, f)$$

Es gilt $n(0, \gamma) = 1$. Um das Residuum zu bestimmen, betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von f mittels des binomischen Lehrsatzes:

$$f(z) = \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} z^{-k} z^{-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}$$

die für uns interessante Potenz -1 tritt hier genau für $k = n$ auf, also folgt

$$\operatorname{res}(0, f) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n!)}{n!(2n-n!)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und dies zeigt

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} = \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n!)}{(n!)^2},$$

was zu beweisen war.

2.2 Einige Integrale

Wir verwenden für alle Kurvenintegrale den Residuensatz.

(i) Der gegebene Integrand $f(z) = \frac{\exp(iz^2)-1}{z^2}$ ist meromorph mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt (den im Kreisring $A_{0,2}(0)$ ist der Integrand mangels Nennernullstellen holomorph). Der Weg γ umrundet diesen (mit Radius 2) genau zweimal, also gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, f).$$

Um das Residuum zu bestimmen, entwickeln wir die Funktion um den Nullpunkt:

$$f(z) = \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} = \frac{\exp(iz^2)}{z^2} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^{2n-2}}{n!} - \frac{1}{z^2}.$$

Wir sehen, dass keiner der Summanden den Exponenten -1 hat, also gilt $res(0, f(z)) = 0$ und damit auch

$$\int_\gamma \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} dz = 0$$

(ii) Der gegebene Integrand $g(z) = \frac{\exp(z)}{(z-i)^3}$ hat lediglich bei $z = i$ eine Nennernullstelle, ist also im Kreisring $A_{0,1}(i)$ holomorph und damit im Inneren von η, dem Kreis $K_1(i)$, meromorph. η umrundet den Punkt i genau einmal in mathematisch negativer Richtung, der Residuensatz liefert also

$$\int_\eta g(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res}(i, g).$$

Wieder bestimmen wir die Reihenentwicklung um i. Da exp auf ganz $\mathbb{C}$ und damit insbesondere in $K_1(i)$ holomorph ist, existiert eine in $K_1(i)$ konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{a_k} a_k(z - i)^k = \exp(z)$. Für die Koeffizienten gilt hier $a_k = \frac{\exp^{(k)}(i)}{k!}$. Dies liefert:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - i)^{k-3}$$

und damit hat g im Punkt i das Residuum $a_2 = \frac{1}{2}\exp^{(2)}(i) = \frac{1}{2}\exp(i)$. Damit folgt

$$\int_\eta g(z)dz = -\pi i e^i$$

(iii) Die Funktion $\frac{1}{z}$ ist auf $A_{0,2}(0)$ mangels Nennernullstellen holomorph, also ist es dort auch $\exp(1/z)$. Somit ist der Integrand $h(z) = \exp(1/z)$ auf $K_2(0)$, dem Inneren von γ, meromorph und der Residuensatz liefert mit $n(0, \gamma) = 2$

$$\int_\gamma h(z)dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, h).$$

Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir außerdem

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

und damit $\operatorname{res}(0, h) = 1$. Dies zeigt

$$\int_\gamma h(z)dz = 4\pi i.$$

2.3 Sinus Hyperbolicus

(i) Die Funktion hat eine Nennernullstelle bei $z_1 = 0 \in S$, also $x, y = 0$. Weiterhin liegt eine Nennernullstelle vor, falls $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = 0$, also $\exp(z) = \exp(-z)$. Wir stellen um:

$$\exp(z) = \exp(-z) \Leftrightarrow \exp(2z) = 1 \Leftrightarrow \exp(z) \in \{1, -1\}.$$

Insbesondere folgt damit $x = 0$ und $y \in k \cdot \pi i$, also liegt genau bei $z_2 = \pi i$ eine weitere Singularität vor.

Wir bestimmen nun den Typ dieser Singularitäten. Man für $z_1 = 0$ betrachte die Reihenentwicklung des sinh:

$$f(z) = \frac{1}{z \cdot \sinh(z)} = \frac{1}{z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}}_{:=g(z)}$$

mit g holomorph (da nennernullstellenfrei) in einer Umgebung von 0 sowie $g(0) = \frac{1}{1+0} \neq 0$. Somit handelt es sich um einen Pol 2. Ordnung. Um den Typ von $z_2 = i\pi$ betrachte man unter Verwendung von $\exp(-i\pi) = \exp(i\pi) = -1$

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = \frac{1}{2}(-\exp(z)\exp(-i\pi) + \exp(-z)\exp(i\pi)) \\ &= -\frac{1}{2}(\exp(z - i\pi) - \exp(-(z - i\pi))) = -\sinh(z - i\pi).\end{aligned}$$

Dies liefert mit der Reihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1}{-z\sinh(z - i\pi)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}} = -\frac{1}{z - i\pi} \underbrace{\frac{1}{z} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2 k}{(2k+1)!}}}_{:=h(z)}$$

mit $h(z)$ holomorph (da nennernullstellenfrei) in einer Umgebung von $i\pi$ sowie $h(i\pi) = -\frac{1}{i\pi}\frac{1}{1+0} = \frac{i}{\pi}$. Somit handelt es sich um einen Pol 1. Ordnung.

(ii) Für $z_1 = 0$ betrachten wir

$$f(z) = \frac{1}{z\sinh(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{(2k+1)!}}.$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{(2k+1)!}$ enthält nur gerade Potenzen, also liefert unendliche Polynomdivision eine Laurentreihe mit ebenfalls nur gerade Potenzen. Damit ist $a_{-1} = 0$, also $\operatorname{res}(0, f) = 0$. Für $z_2 = i\pi$ gilt

$$\operatorname{res}(i\pi, f) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} g(z) = g(z_2) = \frac{i}{\pi}.$$

(iii) Aufgrund von $\operatorname{res}(i\pi, f) \neq 0$ und dem Residuensatz gilt $\int_{\partial K_1(i\pi)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(i\pi, f) \neq 0$, also kann f keine holomorphe Stammfunktion besitzen.

(iv) Aufgrund von $\operatorname{res}(0, f) = 0$ gilt bereits $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle γ mit $i\pi \notin \operatorname{Int}(\gamma)$ und $\int_\gamma f(z)dz = n(\gamma, i\pi)\operatorname{res}(i\pi, f)$ sonst. Da das Integral und somit auch das Residuum linear ist, müssen wir also lediglich c so wählen, dass das Residuum von $\frac{c}{z-i\pi}$ am Punkt $i\pi$ den Wert $-\operatorname{res}(i\pi, f)$ und in jedem anderen Punkt den Wert 0 annimmt. Der Bruch $\frac{c}{z-i\pi}$ hat genau eine Polstelle in $i\pi$, somit ist die zweite Bedingung bereits sichergestellt. Da er außerdem seine eigene Laurententwicklung um $i\pi$ mit $a_{-1} = c$ und $a_k = 0$ (für $k \neq -1$) darstellt, ist sein Residuum in diesem Punkt c. Wir wählen also $c = -\operatorname{res}(i\pi, f) = -\frac{i}{pi} = \frac{1}{i\pi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z) + \frac{c}{z-i\pi} dz \\
=& n(\gamma, 0)\left(\operatorname{res}(0, f) + \operatorname{res}\left(0, \frac{c}{\cdot - i\pi}\right)\right) + n(\gamma, i\pi)\left(\operatorname{res}(i\pi, f) + \operatorname{res}\left(i\pi, \frac{c}{\cdot - i\pi}\right)\right) \\
=& n(\gamma, 0) \cdot (0+0) + n(\gamma, i\pi)(\frac{\pi}{i} - \frac{\pi}{i}) = 0
\end{aligned}$$

für jeden geschlossenen Weg γ in S und somit besitzt $f(z) + \frac{1}{z-i\pi}$ auf S eine holomorphe Stammfunktion.

2.4 n-te Ableitungen geben Hinweise

(i) Wegen $f^{(n)}(0) = n$ können wir die Reihenentwicklung von f um den Nullpunkt bestimmen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} = z \cdot \exp(z).$$

Diese Potenzreihe hat aufgrund der Holomorphie von f auf ganz $\mathbb{C}$ unendlichen Konvergenzradius, also gilt $f = z \cdot \exp(z)$ global.

Die Funktion $\frac{f(z)}{z-1}$ besitzt genau eine isolierte Singularität, nämlich eine einfache Polstelle im Punkt 1. Da es sich um eine Polstelle der Ordnung 1 handelt, erhalten wir dieses Residuum genau als $\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{f(z)}{z-1} = f(1) = 1 \cdot \exp(1) = e$. Der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(1)} \frac{f(z)}{z-1} dz = \operatorname{res}\left(1, \frac{f(z)}{z-1}\right) = e$$

(ii) Wir berechnen die n-te Ableitung von $f(z) = z \cdot \exp(z)$. Es folgt induktiv unter wiederholter Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= z \cdot \exp(z) + \exp(z) \\
f^{(2)}(z) &= z \cdot \exp(z) + \exp(z) + \exp(z) = z \cdot \exp(z) + 2 \cdot \exp(z) \\
f^{(n)}(z) &= z \cdot \exp(z) + n \cdot \exp(z)
\end{aligned}$$

und damit $f^{(n)}(1) = 1 \cdot \exp(1) + n \cdot \exp(1) = (n+1) \cdot e$.

2.5 Rouche

Zuerst den Hinweis: Es ist

$$|\sin(z)| = \frac{1}{2} |\exp(iz) - \exp(-iz)| \leq \frac{1}{2}(|\exp(iz)| + |\exp(-iz)|)$$

$$= \frac{1}{2}(\exp(\Im(z)) + \exp(-\Im(z))).$$

Setzen wir also $y := \Im(z)$, so folgt $|\sin(z)| \leq \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$. Nach Voraussetzung gilt außerdem $y \in [-1, 1]$. Die reelle Funktion $\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ nimmt (wie sich durch Kurvendiskussion verifizieren lässt) auf dem Intervall $[-1, 1]$ ihr Maximum genau an den Randpunkten an, also folgt

$$|\sin(z)| \leq \frac{1}{2}(e + e^{-1}) \approx 1.54 < 2$$

Weiterhin ist damit $|\frac{1}{2}\sin(z)| < 1$ und daher $|f(z) - 1| < 1$, jeder mögliche Fixpunkt von f muss also in der (offenen) Kreisscheibe $K_1(1)$ liegen. Wir betrachten nun das Rechteck

$$\square = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < 1, |\Re(z)| \leq 2\}.$$

Wegen $K_1(1) \subseteq \square$ entsprechen die Fixpunkte von f auf S den Fixpunkten von f auf $\square$.

Das $f(z) = 1 + \frac{1}{2}\sin(z)$ genau einen Fixpunkt in S hat, ist nun äquivalent dazu, dass $g(z) = 1 + \frac{1}{2}\sin(z) - z$ in $\square$ genau eine Nullstelle hat.

$\square$ ist kompakt im Streifen S° (auf dem g holomorph ist) und hat dort den Rand $\partial\square = (2 - i, 2 + i) \cup (-2 - i, -2 + i)$. Auf diesem gilt nun:

$$|g(z) + z| = |f(z)| = |1 + \frac{1}{2}\sin(z)| \leq 1 + \frac{1}{2}|\sin(z)| < 2 \leq |z| \leq |z| + |g(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouche hat somit g auf $\square$ genauso viele Nullstellen wie z, nämlich genau $0 \in \square$. Wie bereits erwähnt entsprechen die Nullstellen von g in $\square$ genau den Fixpunkten von f in $\square$ und damit in S, also hat f in S genau einen Fixpunkt.

2.6 Verkettungen

Offensichtlich ist die Bedingung für alle konstanten Funktionen erfüllt. Sei daher im folgenden f nicht konstant. Für die Ableitung von f gilt:

$$f' = (f \circ f)' = (f' \circ f) \cdot f'$$

also $f' \circ f = 1$ auf $\tilde{G} := G \setminus \{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ und folglich $f' \equiv 1$ auf $f(\tilde{G})$. Da f' holomorph ist, liegen seine Nullstellen isoliert also ist $\tilde{G}$ dicht in G und aufgrund der Stetigkeit von f ist auch $\tilde{H} := f(\tilde{G})$ dicht in $H := f(G)$, wobei $H = f(G)$ aufgrund der Gebietstreue ein Gebiet ist. Wähle nun einen Punkt $z_0 \in H \setminus \tilde{H}$ (falls f' keine Nullstellen hat und somit $\tilde{H} = H$ gilt, so wähle ab hier $\tilde{H} = H \setminus \{z_0\}$ für ein beliebiges $z_0 \in f(G)$, dies liegt sicherlich dicht, da H offen war). Da $\tilde{H}$ dicht in H liegt, existiert somit eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{H} \subseteq H = f(G) \subseteq G$ mit $z_n \to z_0 \in H$, insbesondere ist dann $f'(z_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $z_0 \notin (z_n)$. Nach dem Identitätsprinzip zeigt dies $f' \equiv 1$ auf ganz G.

Somit ist $f(z) = z + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Weiterhin gilt $z + 2c = (f \circ f)(z) = f(z) = z + c \forall_{z\in G} \Leftrightarrow 2c = c \Leftrightarrow c = 0$ und somit $f(z) = z$, also $f = \mathrm{id}$.

Die einzigen Funktionen, die auf G $f \circ f = f$ erfüllen, sind also die Identität und die konstanten Funktionen.

2.7 Sehr viel Identitätsprinzip

(a) Man betrachte die Funktionen $g(z) = 2z$ und $h(z) = \frac{2z}{1+z}$. Beide Funktionen sind auf $\mathbb{D}$ holomorph. Angenommen, es existiere weiterhin eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f wie gefordert.

Betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{2n}$ mit Grenzwert $0 \notin (a_n)$, so gilt $f(a_n) = \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} = g(a_n)$, also gilt nach dem Identitätsprinzip $f = g$ auf ganz $\mathbb{D}$. Betrachten wir aber die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2n-1}$, ebenfalls mit Grenzwert $0 \notin (b_n)$, so gilt $h(b_n) = \frac{\frac{2}{2n-1}}{1+\frac{1}{2n-1}} = \frac{2}{2n-1+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wieder zeigt das Identitätsprinzip $f = h$ auf ganz $\mathbb{D}$.

Insgesamt muss also $g = f = h$ auf ganz $\mathbb{D}$ gelten, im Widerspruch zu $g(1/2) = 1 \neq \frac{2}{3} = h(1/2)$. Eine solche Funktion f kann also nicht existieren.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(z) = (\frac{1}{2} - z)^3$, die auf ganz $\mathbb{D}$ (sogar auf ganz $\mathbb{C}$) holomorph ist und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \to 0 \notin (a_n)$. Es ist $f(a_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})^3 = \frac{1}{n^3}$. Eine Funktion wie gefordert existiert also. Angenommen, es würde eine weitere solche Funktion f existieren. Dann gilt $f(a_n) = g(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und wie bereits geklärt hat (a_n) einen Grenzwert, der nicht Teil der Folge ist aber im Holomorphiebereich von f bzw. g liegt), also stimmen f und g nach dem Identitätsprinzip überein. Somit ist die Funktion sogar eindeutig bestimmt.