Übungsblatt 08
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

15. Juni 2023

8.1 Zentralübung

(X_n) konvergiert $\mathbb{P}$ stochastisch gegen $X = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ (und o.B.d.A. < 1) beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ und es gilt $|X_n - X| \geq \varepsilon \Leftrightarrow X_n = n$ für alle $n \geq N$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(X_n) konvergiert nicht in L_p, denn wäre sie L_p-konvergent gegen eine Grenzvariable $\tilde{X}$, dann wäre (X_n) auch stochastisch konvergent gegen $\tilde{X}$ und aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $X = \tilde{X}$. Wir zeigen daher, dass (X_n) nicht in L_p gegen X konvergieren kann. Es ist $X = 0$, also $|X_n - X|^p = X_n^p$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}[X_n^p] = (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0^p + \frac{1}{n} \cdot n^p = n^{p-1}$$

wobei $n^{p-1} = 1 \to 1$ für $p = 1$ und $n^{p-1} \to \infty$ für $p > 1$ gilt. Die L_p-Konvergenz ist also für kein p gegeben.

Die fast sichere Konvergenz kann nicht entschieden werden. Wie oben muss (X_n), falls $\mathbb{P}$-fast sicher konvergent, gegen X konvergieren. Sind die X_n unabhängig verteilt, so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ (und o.B.d.A. < 1)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{X_k = k\}) = \sum k = n^{\infty} \mathbb{P}(\{X_k = k\}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}$$

und diese Summe kann für $k \to \infty$ nicht gegen 0 konvergieren, da dann die harmonische Reihe beschränkt wäre. Also gilt für unabhängige X_n, dass X_n nicht fast sicher konvergiert.

Für abhängige X_n lassen sich allerdings fast sicher konvergente Beispiele formulieren. Wir wollen dazu $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$ festlegen und im Fall $X_n = n$ verlangen, dass $X_{n+1} = n + 1$ mit bedingter Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{n+1}$ und $X_{n+1} = 0$ mit bedingter Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$. Dann erfüllt die Folge (X_n) alle Forderungen und es gilt $X_{n+1} \neq 0 \Rightarrow X_n \neq 0$ für alle n, also $\bigcup_{k=n}^{\infty} \{X_k = k\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{X_k \neq 0\} \subseteq \{X_n \neq 0\} = \{X_n = n\}$ und somit

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{X_k = k\}) \leq \mathbb{P}(\{X_n = n\}) = \frac{1}{n} \to 0$$

und die X_n sind fast sicher konvergent.

8.2

8.3

(i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt $\mathbb{P}(X_1 \geq 1 - \varepsilon) = \varepsilon$ und es ist

$$\mathbb{P}(|X_{(n)} - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{(n)} < 1 - \varepsilon) = \mathbb{P}(X_k < 1 - \varepsilon \ \forall_{1 \leq k \leq n}) = (1 - \varepsilon)^n \to 0,$$

da $1 - \varepsilon < 1$. Dies zeigt die stochastische Konvergenz.

(ii) Wir berechnen zuerst die Dichte von $Y_n = n(1 - X_{(n)})$. Für ein $t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(Y_n \geq t) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq 1 - \frac{t}{n}) = \mathbb{P}(X_k \leq 1 - \frac{t}{n} \ \forall_{1 \leq k \leq n}) = (1 - \frac{t}{n})^n.$$

Diese Dichte konvergiert punktweise gegen die Grenzdichte $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t}{n})^n \cdot 1_{[0,\infty)}(t) = \exp(-t) \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$, also konvergiert auch ihre Verteilung punktweise gegen die Grenzverteilung $\int_0^t \exp(-\tau) \cdot 1_{[0,\infty)}(\tau) d\tau = (1 - \exp(-t)) \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$. Dies ist eine Exponentialverteilung zum Parameter 1.