Übungsblatt 03
Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

10. Juli 2023

Punkte: | / 30

3.1 IV-12

Wir bezeichnen die rechte Seite der DGL als $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 - y \end{pmatrix}$.

(i) Für einen Gleichgewichtspunkt muss gelten

$$x' = x = 0 \land y' = x^2 - y = 0$$

also $x = 0$ und damit $-y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Also ist $(x_0, y_0)^T = (0,0)^T$ der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems.

Um ihn auf Stabilität zu untersuchen, bestimmen wir das linearisierte System am Gleichgewichtspunkt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J_f(x,y) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Eigenwerte 1 und -1, nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität ist der Gleichgewichtspunkt $(0,0)^T$ somit instabil.

(ii) Die geforderte Bedingung ist insbesondere für ein erstes Integral erfüllt. Gesucht ist also eine Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (wir verwenden H und reservieren φ für Lösungen) mit $\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = 0$.

Wir bemerken, dass $\frac{\partial}{\partial x} xy = y$ und $\frac{\partial}{\partial y} xy = x$. Und fehlt also noch ein Summand, der nach x abgeleitet zu $-x^2$ wird, aber beim Ableiten nach y verschwindet. Dies wird beispielsweise durch $-\frac{x^3}{3}$ erfüllt. Die Funktion

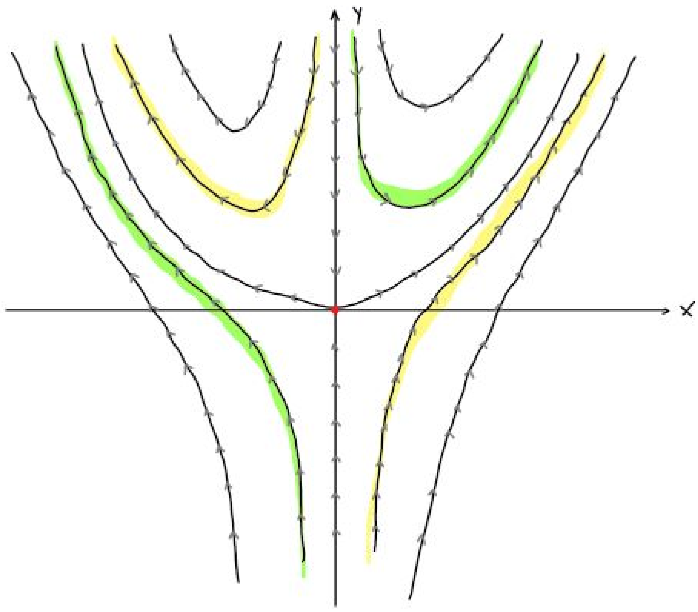
$$H(x,y) = xy - \frac{x^3}{3}$$

ist somit ein erstes Integral des Systems und daher entlang Lösungen konstant, d.h. die Phasenkurven verlaufen innerhalb der Niveaumengen von H.

(iii) Um die Niveaumengen bestimmen zu können, stellen wir die Gleichung $H(x,y) = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ nach y um:

$$H(x,y) = c \Leftrightarrow xy = c + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3c + x^3}{3x}$$

Diese Funktion hat stets eine Nullstelle bei $-\sqrt[3]{3c}$, verläuft für $x \to 0$ je nach Wahl von c asymptotisch gegen $\pm\infty$ und läuft für $x \to \infty$ in beiden Richtungen gegen $+\infty$, sich der Trajektorie für $c = 0$ mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ annähernd. Weiterhin sind die beiden Äste von $\frac{3c+x^3}{3x}$ genau achsensymmetrisch zu den beiden Ästen von $\frac{-3c+x^3}{3x}$, sodass unser Phasenpoträt insgesamt achsensymmetrisch sein muss. Mit diesen Informationen ausgestattet zeichnen wir:



Die Informationen über die Richtung der Pfeile erhalten wir daher, dass der Eigenwert in x-Richtung -1 war, also in Richtung der x-Achse die Lösungen von Gleichgewichtspunkt weglaufen. In y-Richtung war der Eigenwert -1, d.h. Lösungen, die auf der y-Achse starten, werden zum Gleichgewichtspunkt hingezogen.

3.2 IV-13

Wir bestimmen die Jacobi-Matrix der rechten Seite (die wir im Folgenden als f bezeichnen):

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & 1-6y \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese hat die Sur -3 und die Determinante 4. Falls ihre Eigenwerte komplex sind, haben sie daher bei Realteil -1.5 und falls sie reell sind, müssen sie dasselbe Vorzeichen haben und sich zu -3 addieren, also auch beide negativ sein. Somit ist der Gleichgewichtspunkt nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität asymptotisch stabil.

Wir betrachten nun die Funktion

$$V(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4.$$

Es handelt sich hierbei um eine Lyapunov-Funktion des Systems, denn

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla V(x,y), f(x,y)\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 8x-2y \\ -2x+2y+4y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3x+y+2y^3 \\ -4x \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -24x^2 + 8xy + 16xy^3 + 6xy - 2y^2 - 4y^4 + 8x^2 - 8xy - 16xy^3 \\
&= -16x^2 + 6xy - 2y^2 - 4y^4 = -7x^2 - y^2 - 4y^4 - (9x^2 - 6xy + y^2) \\
&== 16x^2 - y^2 - 4y^4 - (3x-y)^2 \le 0,
\end{aligned}
$$

wobei Gleichheit genau für $(x,y) = 0$ gilt. Es handelt sich also sogar um eine strikte Lyapunov-Funktion. Es bleibt zu zeigen, dass $V(x,y)$ in x, y ein lokales Minimum besitzt. Hierzu bestimmen wir die Hesse-Matrix

$$
H_V(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2+12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_V(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

und ihr charakteristisches Polynom

$$
\chi_V(\lambda) = (8-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 12
$$

sowie dessen Nullstellen

$$
\lambda_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{2} = \frac{10 \pm \overbrace{\sqrt{52}}^{<10}}{2} > 0.
$$

Somit besitzt V in $(0,0)$ ein (striktes) lokales Minimum und nach Lyapunov ist der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ somit asymptotisch stabil.

3.3 IV-14

(i) Für $\zeta = 1$ und $\zeta = -1$ ist die eindeutige maximale Lösung stationär und somit insbesondere nicht streng monoton fallend.

Falls $\zeta \in (-1,1)$, so kann die Trajektorie der entsprechenden Lösung φ_ζ die Trajektorien der beiden konstanten Lösungen nicht schneiden, also gilt $\varphi_\zeta(t) \in (-1,1)$ für alle $t \in I_\zeta$. Dann gilt $\varphi_\zeta'(t) = f(\varphi_\zeta(t)) > 0$, denn $f > 0$ auf $(-1,1)$, da $f(0) > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f, des Zwischenwertsatz und der Absenz weiterer Nullstellen kein Vorzeichenwechsel stattfinden kann. Also ist φ_ζ streng monoton steigend.

Falls $\zeta \in (-\infty,-1)$, kann φ_ζ analog das Intervall $(-\infty,-1)$ nicht verlassen und da f hier mit paralleler Argumentation ebenfalls positiv ist, muss φ_ζ auch hier streng monoton steigend.

Es verbleibt noch $\zeta \in (1,\infty)$. Analog zu den beiden oberen Fällen kann φ_ζ das Intervall $(1,\infty)$ nicht verlassen und f ist dort negativ, also ist φ_ζ streng monoton fallend.

Zusammenfassend ist φ_ζ streng monoton fallend $\Leftrightarrow \zeta \in (1,\infty)$ und streng monoton steigend $\Leftrightarrow \zeta \in (-\infty,-1) \cup (-1,1)$.

(ii) Falls $\zeta = -1$ oder $\zeta = 1$ so ist φ_ζ als konstante Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existent.

Sei nun $\zeta \in (-1,1)$. Wie bereits oben diskutiert kann dann φ_ζ das Intervall $(-1,1)$ und damit insbesondere das kompakte Intervall $[-1,1]$ nicht verlassen. Somit ist φ_ζ auf $[0,t_\omega)$

(mit t_ω dem rechten Rand des maximalen Lösungsintervalls) beschränkt und nach Korollar 3.8 folgt damit $t_\omega = \infty$, also ist φ_ζ auf $[0, \infty]$ existent. (Speziell für $\zeta \in (-1, 1)$ lässt sich hier auch $I_\zeta = \mathbb{R}$ zeigen).

Für $\zeta \in (-\infty, -1)$ ist $\varphi_\zeta(0) = \zeta$ und $\varphi_\zeta(t) > \zeta$ für alle $t \in [0, t_\omega)$ ist streng monoton steigend. Da weiterhin $\varphi_\zeta(t) < -1$ für all diese t gelten muss, ist φ_ζ also auf $[0, t_\omega)$ durch $[\zeta, -1]$ beschränkt somit gilt nach Korollar 3.8 $t_\omega = \infty$.

Analog zeigt man, dass φ_ζ für $\zeta \in (1, \infty)$ auf $[0, t_\omega)$ durch $[1, \zeta]$ beschränkt ist und auch hier $t_\omega = \infty$ gilt.

(iii) Wir betrachten die Funktion

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$

mit Gradient

$$\nabla V(x) = \frac{\partial}{\partial x} V(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1).$$

Dieser hat Nullstellen genau bei $-1, 1$ und die folgende Vorzeichenverteilung:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow \nabla V(x) < 0 \\ x \in (-1, 1) &\Rightarrow \nabla V(x) < 0 \\ x \in (1, \infty) &\Rightarrow \nabla V(x) > 0 \end{aligned}$$

– wie durch Betrachtung der Vielfachheit der Nullstellen sowie des Grenzverhaltens klar wird – und somit gilt

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \\ x \in (-1, 1) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \\ x \in (1, \infty) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \end{aligned}$$

aufgrund der oben diskutierten Vorzeichenverteilung von f. Also gilt $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit genau für $x = -1, 1$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion von f auf $\mathbb{R}$. Auf $(0, 2) \setminus \{1\}$ und $(-2, 0) \setminus \{-1\}$ ist V sogar eine strikte Lyapunov-Funktion von f.

Weiterhin hat V bei $x_0 = 1$ eine (striktes) lokales (sogar globales) Minimum, denn die Ableitung ∇V hat dort eine Nullstelle und die zweite Ableitung $3x^2 + 2x - 1$ hat den Wert $4 > 0$. Somit ist $x_0 = 1$ nach dem Stabilitätskriterium von Lyapunov ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Schließlich ist $x_0 = -1$ ein Terrassenpunkt von V, denn V hat hier eine Nullstelle und die zweite Ableitung ebenfalls. Somit existiert in jeder Umgebung von $x_0 = -1$ ein x mit $V(x) < V(x_0)$ und nach dem Instabilitätskriterium von Lyapunov ist $x_0 = -1$ somit ein instabiler Gleichgewichtspunkt von der DGL.

3.4 V-9

Angenommen, es wäre $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Lösung der DGL mit Periode T, d.h. $x(t) = x(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (man beachte, dass eine periodische Lösung immer auf ganz $\mathbb{R}$ existiert). Dann sind auch x' und x'' periodisch mit gleicher Periode. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert im Intervall $[0, T]$ ein t_0 mit $x'(t_0) = 0$. O.B.d.A. sei $t_0 = 0$ (denn sonst ist $y(t) = x(t+t_0)$ ebenfalls eine periodische Lösung mit gleicher Periode).

Aus Multiplikation der DGL mit x' folgt

$$x''x' + f(x')x' + x = 0 \Leftrightarrow f(x')x' = -x'(x'' + x)$$

Wir betrachten das Integral

$$\int_0^T f(x'(t))x'(t)dt \geq 0$$

(aufgrund von $f(x'(t))x'(t) \geq 0$), wobei Gleichheit genau für $x' \equiv 0$ gilt, denn falls ein $t_0 \in [0, T]$ mit $x'(t_0) > 0$ existiert, so ist $f(x'(t_0))x'(t_0) > 0$ und der Integrand somit auf einer Umgebung von t_0 strikt positiv, womit das Integral nicht mehr 0 sein kann. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x'(t))x'(t)dt &= -\int_0^T x'(t)(x''(t) + x(t))dt = -\int_0^T x'(t)x''(t)dt - \int_0^T x'(t)x(t)dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_0^T 2x'(t)x''(t)dt + \int_0^T 2x(t)x'(t)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left[(x'(t))^2\right]_0^T + \left[(x(t))^2\right]_0^T\right) \\
&= -\frac{1}{2}(0 + 0) = 0
\end{aligned}$$

da $x(t)^2$ und $x'(t)^2$ selbst wiederum T-periodische Funktionen sind. Dies zeigt $x' \equiv 0$, also muss x konstant sein. Damit ist auch $x'' \equiv 0$ und unsere DGL wird zu $0 + f(0) + x = 0$, also $x = 0$ und somit ist $x \equiv 0$ die einzige periodische Lösung der Differenzialgleichung.