

Übungsblatt 11

Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

30. Juni 2023

11.1 Zentralübung

(i) Die gemeinsame Dichte der n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ist

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)$$

Für $(x_1, \dots, x_n) \in (0, 1)^n = \mathcal{X}$ ist dann die Likelihood-Funktion

$$f(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

und ihre Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, x_1, \dots, x_n) = - \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \frac{1}{\theta^{n+2}} \left(n\theta + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right)$$

Diese hat die Nullstelle $n\theta = -\sum_{i=1}^n \log(x_i)$, also ist der ML-Schätzer gleich

$$\hat{\theta}^{ML}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1/x_i)$$

(ii) Der Erwartungswert von X_1 beträgt

$$\int_0^1 x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1+\theta}{\theta} x^{\frac{1}{1+\theta}} \right]_0^1 = \frac{1}{1+\theta}$$

und die Gleichsetzung $\frac{1}{1+\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ liefert den Schätzer

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} - 1$$

(iii) Der ML-Schätzer liefert hier

$$\hat{\theta}^{ML}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{1}{0.1 \cdot 0.22 \cdot 0.54 \cdot 0.36} \right) \approx 1.36$$

und aus dem Momentenschätzer erhält man

$$\hat{\theta}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{4}{0.1 + 0.22 + 0.54 + 0.36} - 1 = \frac{4}{1.22} - 1 \approx 2.27$$

11.2

Wir setzen das empirische erste und zweite Moment mit dem ersten und zweiten Moment der Log-Normalverteilung gleich (man beachte, dass n in der Aufgabenstellung doppelt verwendet wurde, als Anzahl der Y_i und zur Indizierung der Momente. Wir übernehmen nur die erste Verwendung):

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Leftrightarrow \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \quad (I)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \exp(2\mu + 2\sigma^2) \Leftrightarrow 2\mu + 2\sigma^2 = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \quad (II)$$

$(II) - 2(I)$ liefert

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \log\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right) = \log\left(\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\right) \\ &= \log(\hat{\mu}_2) - \log(\hat{\mu}_1^2) = \log\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1^2}\right) \end{aligned}$$

und damit einen Schätzer für σ^2 ; und aus $2(I) - 4(II)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu &= \log\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right) - \log\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^4\right) = 2 \log\left(\frac{n \sum_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}\right) \\ &= \log(\hat{\mu}_1^2) - \log(\hat{\mu}_2^4) = \log\left(\frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2^4}\right) = 2 \log\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2^2}\right) \end{aligned}$$

11.3