Übungsblatt 10
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

23. Juni 2023

10.1 Zentralübung

Die Parameter der geometrischen Verteilung sind $\theta \in \Theta = (0,1)$, der Stichprobenraum ist $\mathcal{X} = \mathbb{N}^n$. Aus der Definition der geometrischen Verteilung bestimmen wir die Likelihood-Funktion und direkt daraus folgend die Log-Likelihood-Funktion:

$$L : \Theta \times \mathcal{X} \to [0,1],\ (\theta, x) \mapsto \prod_{k=1}^{n} (1-\theta)^{x_k - 1}\theta$$

$$\mathcal{L} : \Theta \times \mathcal{X} \to [0,1],\ (\theta, x) \mapsto \log\left(\prod_{k=1}^{n} (1-\theta)^{x_k - 1}\theta\right) = n \cdot \log\theta + \log(1-\theta) \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)$$

Wir bestimmen ihr Maximum durch die Nullstellen der Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\theta, x) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\left(-n + \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \cdot (1-\theta) = \theta \sum_{k=1}^{n} x_k - n\theta \Leftrightarrow n = \theta \sum_{k=1}^{n} x_k \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \frac{1}{\overline{x}}$$

wobei $\overline{x}$ den Durschnitt von $x_1, \ldots, x_n$ bezeichne. Der (in diesem Fall aufgrund des an einer eindeutigen Stelle angenommen Maximums eindeutige) ML-Schätzer ist daher

$$\hat{\theta}^{ML} : \mathcal{X} \to \overline{\Theta}, x \mapsto \frac{1}{\overline{x}}.$$

10.2

(i) Es ist

$$\mathbb{E}_\theta[X] = \frac{2}{3}\theta \cdot 0 + \frac{1}{3}\theta \cdot 1 + \frac{2}{3}(1-\theta) \cdot 2 + \frac{1}{3}(1-\theta) \cdot 3 = 0 + \frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\theta + 1 - \theta = \frac{7}{3} - 2\theta.$$

(ii) Uns ist der Erwartungswert (in Abhängigkeit von θ) bereits bekannt. Wir können nun für eine Menge an Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ die unabhängig identisch wie X verteilt sind, den Momentenschätzer dieser Variablen unter Rückgriff auf den Durchschnitt $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n$ berechnen als

$$\overline{X} = \mathbb{E}_\theta[X] = \frac{7}{3} - 2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{7 - 3\overline{X}}{6}.$$

Insbesondere fällt auf, dass dieser für extreme Durchschnitte (z.B. $\overline{X} = 3$) auch Werte außerhalb von $\Theta = [0,1]$ annehmen kann.

(iii) Der Durchschnitt der Beobachtungen ist $\overline{X} = \frac{1}{10} \cdot 15 = \frac{3}{2}$. Damit ist der Wert des Momentenschätzers gleich $\frac{7-\frac{9}{2}}{6} = \frac{5}{12}$.

Um den Wert des ML-Schätzers für diese Beobachtungen zu bestimmen, müssen wir nicht die gesamte Funktion $\hat{\theta}^{ML}$ bestimmen, sondern lediglich die Wahrscheinlichkeit genau dieses Ereignisses bestimmen:

$$\mathbb{P}(3,0,2,1,3,2,1,0,2,1) = \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\theta\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}(1-\theta)\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}(1-\theta)\right)^2 = \frac{32\theta^5(1-\theta^5)}{59049}.$$

Diese Funktion wird am Maximum von $\theta^5(1-\theta)^5$ maximiert, also bei $\theta = \frac{1}{2}$. Damit ist dies der Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers.

Dies ist auch insofern plausibel, dass jedes Teilereignis $0, 1$ genauso oft auftritt wie das 'symmetrische' Ereignis $2, 3$ und insofern die Wahrscheinlichkeiten (vermutlich) gleich hoch sein sollten. Der Momentenschätzer, der nur den Durchschnitt 'sieht', kann dies allerdings nicht erkennen und tendiert daher zu niedrigerem θ.

10.3