

# Übungsblatt 02

## Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

4. Juni 2023

Punkte: 

--

 / 30

### 2.1 Ein Integral

Wir stellen zuerst den Cosinus komplex dar:

$$\int_0^{2\pi i} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} (\exp(it) + \exp(-it))^{2n} dt$$

Dies entspricht einem Wegintegral über  $f(z) = \frac{(z+\bar{z})^{2n}}{i z}$  entlang des Weges  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}, t \mapsto \exp(it)$ , wie auch durch Substitution ersichtlich wird.

$$= \frac{1}{i 2^{2n}} \int_{\gamma} \frac{(z + \bar{z})^{2n}}{z} dz = \frac{1}{i 2^{2n}} \int_{\gamma} \frac{(z + z^{-1})^{2n}}{z} dz$$

Die Funktion  $f(z)$  ist im Einheitskreis, dem Inneren von  $\gamma$ , meromorph mit einer einzigen isolierten Singularität im Nullpunkt. Wir verwenden den Residuensatz.

$$= \frac{1}{i 2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot n(0, \gamma) \cdot \text{res}(0, f)$$

Es gilt  $n(0, \gamma) = 1$ . Um das Residuum zu bestimmen, betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von  $f$  mittels des binomischen Lehrsatzes:

$$f(z) = \frac{(z + z^{-1})^{2n}}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} z^{-k} z^{-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}$$

die für uns interessante Potenz  $-1$  tritt hier genau für  $k = n$  auf, also folgt

$$\text{res}(0, f) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und dies zeigt

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{i 2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

was zu beweisen war.

## 2.2 Einige Integrale

Wir verwenden für alle Kurvenintegrale den Residuensatz.

- (i) Der gegebene Integrand  $f(z) = \frac{\exp(iz^2)-1}{z^2}$  ist meromorph mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt (den im Kreisring  $A_{0,2}(0)$  ist der Integrand mangels Nennernullstellen holomorph). Der Weg  $\gamma$  umrundet diesen (mit Radius 2) genau zweimal, also gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, f).$$

Um das Residuum zu bestimmen, entwickeln wir die Funktion um den Nullpunkt:

$$f(z) = \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} = \frac{\exp(iz^2)}{z^2} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^{2n-2}}{n!} - \frac{1}{z^2}.$$

Wir sehen, dass keiner der Summanden den Exponenten  $-1$  hat, also gilt  $\operatorname{res}(0, f(z)) = 0$  und damit auch

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} dz = 0$$

- (ii) Der gegebene Integrand  $g(z) = \frac{\exp(z)}{(z-i)^3}$  hat lediglich bei  $z = i$  eine Nennernullstelle, ist also im Kreisring  $A_{0,1}(i)$  holomorph und damit im Inneren von  $\eta$ , dem Kreis  $K_1(i)$ , meromorph.  $\eta$  umrundet den Punkt  $i$  genau einmal in mathematisch negativer Richtung, der Residuensatz liefert also

$$\int_{\eta} g(z) dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res}(i, g).$$

Wieder bestimmen wir die Reihenentwicklung um  $i$ . Da  $\exp$  auf ganz  $\mathbb{C}$  und damit insbesondere in  $K_1(i)$  holomorph ist, existiert eine in  $K_1(i)$  konvergente Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{a_k} a_k(z-i)^k = \exp(z)$ . Für die Koeffizienten gilt hier  $a_k = \frac{\exp^{(k)}(i)}{k!}$ . Dies liefert:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-i)^{k-3}$$

und damit hat  $g$  im Punkt  $i$  das Residuum  $a_2 = \frac{1}{2} \exp^{(2)}(i) = \frac{1}{2} \exp(i)$ . Damit folgt

$$\int_{\eta} g(z) dz = -\pi i e^i$$

- (iii) Die Funktion  $\frac{1}{z}$  ist auf  $A_{0,2}(0)$  mangels Nennernullstellen holomorph, also ist es dort auch  $\exp(1/z)$ . Somit ist der Integrand  $h(z) = \exp(1/z)$  auf  $K_2(0)$ , dem Inneren von  $\gamma$ , meromorph und der Residuensatz liefert mit  $n(0, \gamma) = 2$

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, h).$$

Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir außerdem

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$$

und damit  $\operatorname{res}(0, h) = 1$ . Dies zeigt

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 4\pi i.$$

## 2.3 Sinus Hyperbolicus

- (i) Die Funktion hat eine Nennernullstelle bei  $z_1 = 0 \in S$ , also  $x, y = 0$ . Weiterhin liegt eine Nennernullstelle vor, falls  $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = 0$ , also  $\exp(z) = \exp(-z)$ . Wir stellen um:

$$\exp(z) = \exp(-z) \Leftrightarrow \exp(2z) = 1 \Leftrightarrow \exp(z) \in \{1, -1\}.$$

Insbesondere folgt damit  $x = 0$  und  $y \in k \cdot \pi i$ , also liegt genau bei  $z_2 = \pi i$  eine weitere Singularität vor.

Wir bestimmen nun den Typ dieser Singularitäten. Man für  $z_1 = 0$  betrachte die Reihenentwicklung des  $\sinh$ :

$$f(z) = \frac{1}{z \cdot \sinh(z)} = \frac{1}{z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}}_{:=g(z)}$$

mit  $g$  holomorph (da nennernullstellenfrei) in einer Umgebung von 0 sowie  $g(0) = \frac{1}{1+0} \neq 0$ . Somit handelt es sich um einen Pol 2. Ordnung. Um den Typ von  $z_2 = i\pi$  betrachte man unter Verwendung von  $\exp(-i\pi) = \exp(i\pi) = -1$

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = \frac{1}{2}(-\exp(z)\exp(-i\pi) + \exp(-z)\exp(i\pi)) \\ &= -\frac{1}{2}(\exp(z - i\pi) - \exp(-(z - i\pi))) = -\sinh(z - i\pi). \end{aligned}$$

Dies liefert mit der Reihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1}{-z \sinh(z - i\pi)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}} = -\frac{1}{z - i\pi} \frac{1}{z} \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}}_{:=h(z)}$$

mit  $h(z)$  holomorph (da nennernullstellenfrei) in einer Umgebung von  $i\pi$  sowie  $h(i\pi) = -\frac{1}{i\pi} \frac{1}{1+0} = \frac{i}{\pi}$ . Somit handelt es sich um einen Pol 1. Ordnung.

- (ii) Für  $z_1 = 0$  betrachten wir

$$f(z) = \frac{1}{z \sinh(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{(2k+1)!}}.$$

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{(2k+1)!}$  enthält nur gerade Potenzen, also liefert unendliche Polynomdivision eine Laurentreihe mit ebenfalls nur gerade Potenzen. Damit ist  $a_{-1} = 0$ , also  $\text{res}(0, f) = 0$ . Für  $z_2 = i\pi$  gilt

$$\text{res}(i\pi, f) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} g(z) = g(z_2) = \frac{i}{\pi}.$$

- (iii) Aufgrund von  $\text{res}(i\pi, f) \neq 0$  und dem Residuensatz gilt  $\int_{\partial K_1(i\pi)} f(z) dz = 2\pi i \text{res}(i\pi, f) \neq 0$ , also kann  $f$  keine holomorphe Stammfunktion besitzen.
- (iv) Aufgrund von  $\text{res}(0, f) = 0$  gilt bereits  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für alle  $\gamma$  mit  $i\pi \notin \text{Int}(\gamma)$  und  $\int_{\gamma} f(z) dz = n(\gamma, i\pi) \text{res}(i\pi, f)$  sonst. Da das Integral und somit auch das Residuum linear

ist, müssen wir also lediglich  $c$  so wählen, dass das Residuum von  $\frac{c}{z-i\pi}$  am Punkt  $i\pi$  den Wert  $-\text{res}(i\pi, f)$  und in jedem anderen Punkt den Wert 0 annimmt. Der Bruch  $\frac{c}{z-i\pi}$  hat genau eine Polstelle in  $i\pi$ , somit ist die zweite Bedingung bereits sichergestellt. Da er außerdem seine eigene Laurententwicklung um  $i\pi$  mit  $a_{-1} = c$  und  $a_k = 0$  (für  $k \neq -1$ ) darstellt, ist sein Residuum in diesem Punkt  $c$ . Wir wählen also  $c = -\text{res}(i\pi, f) = -\frac{i}{\pi} = \frac{1}{i\pi}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} f(z) + \frac{c}{z-i\pi} dz \\ &= n(\gamma, 0) \left( \text{res}(0, f) + \text{res}\left(0, \frac{c}{z-i\pi}\right) \right) + n(\gamma, i\pi) \left( \text{res}(i\pi, f) + \text{res}\left(i\pi, \frac{c}{z-i\pi}\right) \right) \\ &= n(\gamma, 0) \cdot (0 + 0) + n(\gamma, i\pi) \left( \frac{\pi}{i} - \frac{\pi}{i} \right) = 0 \end{aligned}$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $S$  und somit besitzt  $f(z) + \frac{1}{z-i\pi}$  auf  $S$  eine holomorphe Stammfunktion.

## 2.4 n-te Ableitungen geben Hinweise

- (i) Wegen  $f^{(n)}(0) = n$  können wir die Reihenentwicklung von  $f$  um den Nullpunkt bestimmen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} = z \cdot \exp(z).$$

Diese Potenzreihe hat aufgrund der Holomorphie von  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  unendlichen Konvergenzradius, also gilt  $f = z \cdot \exp(z)$  global.

Die Funktion  $\frac{f(z)}{z-1}$  besitzt genau eine isolierte Singularität, nämlich eine einfache Polstelle im Punkt 1. Da es sich um eine Polstelle der Ordnung 1 handelt, erhalten wir dieses Residuum genau als  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{f(z)}{z-1} = f(1) = 1 \cdot \exp(1) = e$ . Der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1(1)} \frac{f(z)}{z-1} dz = \text{res}\left(1, \frac{f(z)}{z-1}\right) = e$$

- (ii) Wir berechnen die  $n$ -te Ableitung von  $f(z) = z \cdot \exp(z)$ . Es folgt induktiv unter wiederholter Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(z) &= z \cdot \exp(z) + \exp(z) \\ f^{(2)}(z) &= z \cdot \exp(z) + \exp(z) + \exp(z) = z \cdot \exp(z) + 2 \cdot \exp(z) \\ f^{(n)}(z) &= z \cdot \exp(z) + n \cdot \exp(z) \end{aligned}$$

und damit  $f^{(n)}(1) = 1 \cdot \exp(1) + n \cdot \exp(1) = (n+1) \cdot e$ .

## 2.5 Rouché

Zuerst den Hinweis: Es ist

$$|\sin(z)| = \frac{1}{2} |\exp(iz) - \exp(-iz)| \leq \frac{1}{2} (|\exp(iz)| + |\exp(-iz)|)$$

$$= \frac{1}{2}(\exp(\Im(z)) + \exp(-\Im(z))).$$

Setzen wir also  $y := \Im(z)$ , so folgt  $|\sin(z)| \leq \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ . Nach Voraussetzung gilt außerdem  $y \in [-1, 1]$ . Die reelle Funktion  $\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$  nimmt (wie sich durch Kurvendiskussion verifizieren lässt) auf dem Intervall  $[-1, 1]$  ihr Maximum genau an den Randpunkten an, also folgt

$$|\sin(z)| \leq \frac{1}{2}(e + e^{-1}) \approx 1.54 < 2$$

Weiterhin ist damit  $|\frac{1}{2}\sin(z)| < 1$  und daher  $|f(z) - 1| < 1$ , jeder mögliche Fixpunkt von  $f$  muss also in der (offenen) Kreisscheibe  $K_1(1)$  liegen. Wir betrachten nun das Rechteck

$$\square = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < 1, |\Re(z)| \leq 2\}.$$

Wegen  $K_1(1) \subseteq \square$  entsprechen die Fixpunkte von  $f$  auf  $S$  den Fixpunkten von  $f$  auf  $\square$ .

Das  $f(z) = 1 + \frac{1}{2}\sin(z)$  genau einen Fixpunkt in  $S$  hat, ist nun äquivalent dazu, dass  $g(z) = 1 + \frac{1}{2}\sin(z) - z$  in  $\square$  genau eine Nullstelle hat.

$\square$  ist kompakt im Streifen  $S^\circ$  (auf dem  $g$  holomorph ist) und hat dort den Rand  $\partial\square = (2 - i, 2 + i) \cup (-2 - i, -2 + i)$ . Auf diesem gilt nun:

$$|g(z) + z| = |f(z)| = |1 + \frac{1}{2}\sin(z)| \leq 1 + \frac{1}{2}|\sin(z)| < 2 \leq |z| \leq |z| + |g(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché hat somit  $g$  auf  $\square$  genauso viele Nullstellen wie  $z$ , nämlich genau  $0 \in \square$ . Wie bereits erwähnt entsprechen die Nullstellen von  $g$  in  $\square$  genau den Fixpunkten von  $f$  in  $\square$  und damit in  $S$ , also hat  $f$  in  $S$  genau einen Fixpunkt.

## 2.6 Verkettungen

## 2.7 Sehr viel Identitätsprinzip

- (a) Man betrachte die Funktionen  $g(z) = 2z$  und  $h(z) = \frac{2z}{1+z}$ . Beide Funktionen sind auf  $\mathbb{D}$  holomorph. Angenommen, es existiere weiterhin eine auf  $\mathbb{D}$  holomorphe Funktion  $f$  wie gefordert.

Betrachten wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{1}{2n}$  mit Grenzwert  $0 \notin (a_n)$ , so gilt  $f(a_n) = \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} = g(a_n)$ , also gilt nach dem Identitätsprinzip  $f = g$  auf ganz  $\mathbb{D}$ . Betrachten wir aber die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = \frac{1}{2n-1}$ , ebenfalls mit Grenzwert  $0 \notin (b_n)$ , so gilt  $h(b_n) = \frac{\frac{2}{2n-1}}{1 + \frac{1}{2n-1}} = \frac{2}{2n-1+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = f(b_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wieder zeigt das Identitätsprinzip  $f = h$  auf ganz  $\mathbb{D}$ .

Insgesamt muss also  $g = f = h$  auf ganz  $\mathbb{D}$  gelten, im Widerspruch zu  $g(1/2) = 1 \neq \frac{2}{3} = h(1/2)$ . Eine solche Funktion  $f$  kann also nicht existieren.

- (b) Wir betrachten die Funktion  $f(z) = (\frac{1}{2} - z)^3$ , die auf ganz  $\mathbb{D}$  (sogar auf ganz  $\mathbb{C}$ ) holomorph ist und die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (a_n)$ . Es ist  $f(a_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})^3 = \frac{1}{n^3}$ . Eine Funktion wie gefordert existiert also. Angenommen, es würde eine weitere solche Funktion  $f$  existieren. Dann gilt  $f(a_n) = g(a_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (und wie bereits geklärt hat  $(a_n)$  einen Grenzwert, der nicht Teil der Folge ist aber im Holomorphiebereich von  $f$  bzw.  $g$  liegt), also stimmen  $f$  und  $g$  nach dem Identitätsprinzip überein. Somit ist die Funktion sogar eindeutig bestimmt.