Übungsblatt 01
Repetitorium Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

27. April 2023

Punkte: | / 30 |

1.1 Trennung der Variablen

Es sind $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ sowie $h : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y^2+1}{2y}$ stetige Funktionen auf offenen, nicht-leeren reellen Intervallen. Damit handelt es sich bei

$$y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy} = g(x) \cdot h(y) \qquad y(x_0) = y_0$$

um eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, die demnach eine eindeutige Lösung besitzt. Um diese zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Integrale

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{2s}{s^2+1} ds &= \left[\ln(|s^2+1|)\right]_{y_0}^{y(x)} \qquad \text{da } \frac{d}{ds} s^2 + 1 = 2s \\ &= \ln(|y(x)^2+1|) - \ln(|y_0^2+1|) \\ &= \ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tau} d\tau = \ln(|x|) - \ln(|x_0|) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

wobei wir die Beträge weglassen können, da $y(x)^2 + 1$ sowie $y_0^2 + 1$ sicher positiv und x, x_0 beide negativ sind. Gleichsetzen und Auflösen nach $y(x)$ liefert:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right) &= \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1} &= \frac{x}{x_0} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) - 1}, \end{aligned}$$

wobei wir aufgrund von $y_0 < 0$ den negativen Ast wählen. Diese Lösung existiert, solange das Argument der Wurzel nicht-negativ bleibt, also falls

$$\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{x_0}{y_0^2+1}.$$

Das maximale Existenzintervall ist also $\left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right]$ und

$$y : \left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) - 1}$$

ist die maximale eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.