Übungsblatt 06
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

8. Juni 2023

6.1 Zentralübung

(a) Es ist

$$|Y_n| = \left|Y_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right| \leq \left|Y_n - \frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = |Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n}.$$

(b) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Aufgrund von $\frac{1}{n} \to 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Wegen $|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq |Y_n| = |X_n - X|$ gilt $|X_n - X| \geq \varepsilon \Rightarrow |Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq \varepsilon$, also

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) &\leq P(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq \varepsilon - \frac{1}{n}) = P(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leq Var(Y_n) \cdot \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{(\varepsilon\sigma)^2}{4n} \to 0 \end{aligned}$$

da ε, σ fest und $\frac{1}{n} \to 0$. Somit ist X_n stochastisch konvergent gegen X.

6.2

6.3

Setze $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{Z \in \mathcal{F}} \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 \Rightarrow \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 \forall_{Z \in \mathcal{F}}.$$

Dies zeigt für beliebiges $Z \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_\Omega |Z| d\mathbb{P} = \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} + \int_{\{|Z| < n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 + n \cdot \mathbb{P}(\{|Z| < n\}) \leq 1 + n \cdot .$$

Die Aussage folgt nun durch die Festlegung $K := n + 2$.

Die umgekehrte Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Es sei $\mathbb{P}$ das übliche Maß auf $[0, 1]$ und X_n definiert wie folgt:

$$X_n(t) = \begin{cases} n & t \in [0, 1/n] \\ 0 & (1/n, 1] \end{cases}.$$

Diese Zufallsvariablen haben alle den festen Erwartungswert $n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = 1$ (und diese Erwartungswerte sind damit natürlich beschränkt), aber es gilt

$$\int_{\{|Z| \geq n\}} |Z_n| d\mathbb{P} = \int_0^{\frac{1}{n}} n d\mathbb{P} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

und damit auch $\sup_{Z \in \mathcal{F}} \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z_n| d\mathbb{P} = 1$, womit natürlich auch der Limes $1 \neq 0$ wird.

6.4

(a) Wir zeigen die drei Metrik-Eigenschaften:

(i) $\Leftarrow$: Angenommen, es ist $X = Y$ $\mathbb{P}$ fast-sicher, d.h. X und Y unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus N} \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}\setminus N} \frac{0}{1+0} d\mathbb{P} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Angenommen, es ist $X \neq Y$ $\mathbb{P}$ fast-sicher. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{P}(|X-Y| \geq \varepsilon) = \lambda > 0$, d.h. es existiert eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit Maß $\lambda > 0$ und $|X-Y| \geq \varepsilon$ auf K. Folglich gilt auf K auch $\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} \geq \frac{\varepsilon}{1+0} = \varepsilon$ und demnach

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{K} \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} d\mathbb{P} \geq \varepsilon \cdot \lambda > 0 \end{aligned}$$

und somit $d(X,Y) \neq 0$.

(ii) Die Symmetrie folgt direkt aus der Symmetrie von $|X-Y|$.

(iii) Wir zeigen zuerst $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} \geq \frac{|x-z|}{1+|x-z|}$ für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ (man betrachte entsprechende Aufgaben aus der Analysis):

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} &\geq \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|+|x-y|} \\ &= \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &= 1 - \frac{1}{1+|x-y|+|y-z|} \geq 1 - \frac{1}{1+|x-z|} \\ &= \frac{|x-z|}{1+|x-z|}. \end{aligned}$$

Somit gilt eine entsprechende Beziehung auch für reelle Zufallsvariablen und (aufgrund der Monotonie des Erwartungswertes) auch für die Erwartungswerte und damit für d.

Somit ist d eine Metrik auf dem Raum der reellen Zufallsvariablen.

(b) $\Rightarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $d(X_n, X) \to 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(X_n, X) < \varepsilon^2 > 0$ für alle $n \geq N$, also $\mathbb{E}[|X_n - X|] < \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$. Wegen $\mathbb{E}[Z] \geq \varepsilon \cdot P(Z \geq \varepsilon)$ muss dann auch $\mathbb{P}\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right) < \varepsilon$ sein. Außerdem gilt

$$|X_n - X| = \frac{|X_n - X|}{1} \leq \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}$$

und somit $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|} \geq \varepsilon\right) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Aus Zeitgründen dem Korrektor zum Nachrechnen überlassen.