Übungsblatt 02
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

30. April 2023

2.1 Zentralübung

Es sei f die Dichte von X. Dann ist aufgrund der Symmetrie von X gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt für die charakteristische Funktion von X:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\langle t, X\rangle) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp(i\langle t, X\rangle) f(x) dx + \int_{0}^{\infty} \exp(i\langle t, X\rangle) f(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \exp(-i\langle t, X\rangle) f(-x) dx + \int_{0}^{\infty} \exp(i\langle t, X\rangle) f(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} (\overline{\exp(i\langle t, X\rangle)} + \exp(i\langle t, X\rangle)) f(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \underbrace{2\Re(\exp(i\langle t, X\rangle))}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} dx \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist φ_X rein reellwertig.

2.3

(i) Wir berechnen zuerst die Verteilung von $X_{(1)}$. Hierzu beachten wir, dass das Minimum von $X_1, \ldots, X_n$ genau dann größer oder gleich $t \in \mathbb{R}$ ist, wenn jeder der Werte $X_1, \ldots, X_n$ größer oder gleich t ist.

$$\begin{aligned}
F_{(1)}(t) &= P(X_{(1)} \leq t) = 1 - P(X_{(1) \geq t}) \\
\text{(Unabhängigkeit)} &= 1 - P(X_1 \geq t \wedge X_2 \geq t \wedge \cdots \wedge X_n \geq t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P(X_i \leq t) \\
(3.47) &= 1 - \left(\prod_{i=1}^{n} 1 - \big(1 - \exp(-\lambda_i t)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\big)\right) \\
&= \left(1 - \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i t)\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) = \left(1 - \exp\left(-t \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).
\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Exponentialverteilung mit Parameter $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Diese hat bekanntermaßen den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{(1)}] = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^{-1}$.

(ii) Wir betrachten zuerst nur den Fall für zwei Variablen X_1, X_2. Dann ist $X_1 + X_2 = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2)$ und die Linearität des Erwartungswertes liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(2)}] &= \mathbb{E}[\max(X_1, X_2)] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 - \min(X_1, X_2)] \\ &= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[\min(X_1, X_2)] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \lambda} = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2})\end{aligned}$$

unter Verwendung von (a). Für allgemeines $X_{(n)}$ betrachten wir zuerst wieder die Verteilung und nutzen, dass das Maximum von $X_1, \ldots, X_n$ genau dann kleiner oder gleich $t \in \mathbb{R}$ ist, wenn alle Einzelvariablen kleiner oder gleich t sind.

$$\begin{aligned}F_{(n)}(t) &= P(X_{(n)} \leq t) = P(X_1 \leq t \wedge \ldots X_n \leq t) \\ (\text{Unabhängigkeit}) &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) \overset{(3.47)}{=} \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\lambda t)) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \\ &= (1 - \exp(-\lambda t))^n \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Dichte dieser Verteilung mit $f_{(n)}$, so erhalten wir unseren Erwartungswert als ein Integral, das wir mithilfe des Satzes von Fubini-Tonelli umformen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{(n)}(t) dt = \int_{0}^{\infty} t \cdot f_{(n)}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{(n)}(t) dt dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{(n)} \geq x) \\ &= \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x) = \int_0^\infty 1 - F_{(n)}(t) dt.\end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich vielleicht direkt berechnen, aber es scheint kompliziert. Stattdessen wollen wir unter Verwendung von $\mathbb{E}[X_{(2)}]$ (Erwartungswert des Maximums der ersten zwei Zufallsvariablen) den Wert $\mathbb{E}[X_{(n)}]$ induktiv berechnen, indem wir das folgende Integral verwenden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(k)} - X_{(k-1)}] &= \int_0^\infty F_{(k-1)}(t) - F_{(k)}(t) dt \\ &= \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda t))^{k-1} - (1 - \exp(-\lambda t))^k dt \\ &= \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda t))^{k-1} \exp(-\lambda t) dt\end{aligned}$$

Substitution mit $x(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ und $\frac{d}{dt} x(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ liefert dann

$$\mathbb{E}[X_{(k)} - X_{(k-1)}] = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} x^{k-1} dx = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{x^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{k}.$$

Nun folgt unsere Aussage per Induktion. Den Induktionsanfang für $n = 2$ haben wir bereits eingangs gezeigt, und falls die Aussage für beliebiges aber festes $n - 1 \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt ist, so erhalten wir für n:

$$\mathbb{E}[X_{(n)}] = \mathbb{E}[X_{(n-1)}] + \mathbb{E}[X_{(n)} - X_{(n-1)}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dies zeigt die Aussage.

2.4

(i) Wir wissen bereits aus Beispiel 1.13, dass $\varphi_{\delta_x}(t) = \exp(itx)$ für das Dirac-Maß auf $\mathbb{R}$. Unter Verwendung von $\cos(t) = \frac{1}{2}(\exp(-it) + \exp(-it))$ können wir daher folgern, dass cos die charakteristische Funktion der (diskreten) Zufallsvariable X ist, die nach $\mu_X = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ verteilt ist und damit $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$ und $P(X = x) = 0$ für $x \notin \{-1, 1\}$ erfüllt. Zum Beweis rechnen wir diese Behauptung noch nach:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)] = \frac{1}{2}\exp(it \cdot 1) + \frac{1}{2}\exp(it \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(\exp(it) + \exp(-it)) = \cos(t).$$

Weiterhin können wir $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ definieren, wobei X_i voneinander unabhängige zu X gleichverteilte Zufallsvariablen seien. Satz 1.15 zeigt dann

$$\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \varphi_X(t)^n = \cos(t)^n.$$

Somit ist die Aussage falsch.

(ii) Sei f_Z die Dichte von Z, dann ist $f_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(itZ)] = \int_{-infty}^{\infty} \exp(itx) f_Z(x) dx$. Definieren wir $\tilde{Z}$ als Zufallsvariable mit der Dichte $f_{\tilde{Z}} = \frac{1}{2}(f_Z(t) + f_Z(-t))$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi_{\tilde{Z}}(t) = \mathbb{E}[\exp(\tilde{\mathbb{Z}})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \frac{1}{2}(f_Z(x) + f_Z(-x)) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f_Z(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(-t)(-x)) f_Z(-x) dx \right) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi_Z(t) + \varphi_Z(-t)) = \Re(\varphi_Z(t)).
\end{aligned}$$

Somit ist die Aussage korrekt.