Übungsblatt 03
Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

5. Juli 2023

Punkte: $\boxed{\quad / 30}$

3.1 IV-12

Wir bezeichnen die rechte Seite der DGL als $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 - y \end{pmatrix}$.

(i) Für einen Gleichgewichtspunkt muss gelten

$$x' = x = 0 \wedge y' = x^2 - y = 0$$

also $x = 0$ und damit $-y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Also ist $(x_0, y_0)^T = (0,0)^T$ der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems.

Um ihn auf Stabilität zu untersuchen, bestimmen wir das linearisierte System am Gleichgewichtspunkt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J_f(x,y) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Eigenwerte 1 und -1, nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität ist der Gleichgewichtspunkt $(0,0)^T$ somit instabil.

(ii) Die geforderte Bedingung ist insbesondere für ein erstes Integral erfüllt. Gesucht ist also eine Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (wir verwenden H und reservieren φ für Lösungen) mit $\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = 0$.

Wir bemerken, dass $\frac{\partial}{\partial x} xy = y$ und $\frac{\partial}{\partial y} xy = x$. Und fehlt also noch ein Summand, der nach x abgeleitet zu $-x^2$ wird, aber beim Ableiten nach y verschwindet. Dies wird beispielsweise durch $-\frac{x^3}{3}$ erfüllt. Die Funktion

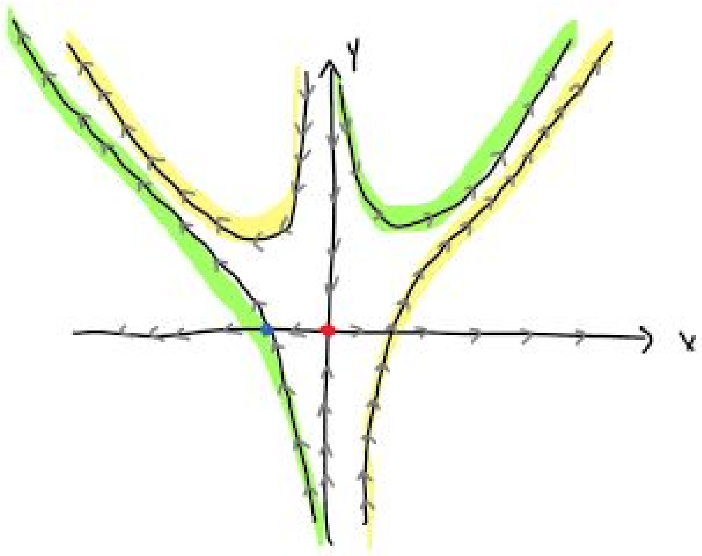
$$H(x,y) = xy - \frac{x^3}{3}$$

ist somit ein erstes Integral des Systems und daher entlang Lösungen konstant, d.h. die Phasenkurven verlaufen innerhalb der Niveaumengen von H.

(iii) Um die Niveaumengen bestimmen zu können, stellen wir die Gleichung $H(x,y) = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ nach y um:

$$H(x,y) = c \Leftrightarrow xy = c + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3c + x^3}{3x}$$

Diese Funktion hat stets eine Nullstelle bei $-\sqrt[3]{3c}$, verläuft für $x \to 0$ je nach Wahl von c asymptotisch gegen $\pm\infty$ und hat ein lokales Extremum bei *test*. Weiterhin sind die beiden Äste von $\frac{3c+x^3}{3x}$ genau achsensymmetrisch zu den beiden Ästen von $\frac{-3cx^3}{3x}$, sodass unser Phasenpoträt insgesamt achsensymmetrisch sein muss. Mit diesen Informationen ausgestattet zeichnen wir:



Die Informationen über die Richtung der Pfeile erhalten wir daher, dass der Eigenwert in x-Richtung -1 war, also in Richtung der x-Achse die Lösungen von Gleichgewichtspunkt weglaufen. In y-Richtung war der Eigenwert -1, d.h. Lösungen, die auf der y-Achse starten, werden zum Gleichgewichtspunkt hingezogen.