Übungsblatt 04
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

17. Mai 2023

4.1 Zentralübung

Ein Varianz-Kovarianzmatrix muss positiv definit sein. Gilt $|\rho| \leq 1$, so ist

$$2 \geq 0 \qquad 2 - \rho^2 \geq 0 \qquad 4 - 4\rho^2 \geq 0$$

und Σ nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit. Nach der Varianz-Kovarianz-Formel ist

$$\operatorname{Var}[X_1 + X_2 + X_3 = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{Var}[X_i] + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{3} \Sigma_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2 \cdot \Sigma_{ij} = 5 + 8\rho.$$

Weiterhin ist die Kovarianz der Zufallsvariablen $X_1, -X_2, -X_3$ wegen der Bilinearität der Kovarianz gleich

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 2 \end{pmatrix}$$

und somit gilt erneut mit der Varianz-Kovarianz-Formel

$$\operatorname{Var}[X_1 - X_2 - X_3 = \sum_{i=1}^{3} \Sigma'_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2 \cdot \Sigma'_{ij} = 5.$$

Setzen wir $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ sowie $Y_2 = X_1 - X_2 - X_3$, so gilt

$$\operatorname{Var}(Y_1 + Y_2) = \operatorname{Var}(Y_1) + \operatorname{Var}(Y_2) + \operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)$$

unter Verwendung von $\operatorname{Var}(Y_1 + Y_2) = \operatorname{Var}(2X_1) = 4 \cdot \operatorname{Var}(X_1) = 8$ folgt damit

$$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = \operatorname{Var}(Y_1 + Y_2) - \operatorname{Var}(Y_1) - \operatorname{Var}(Y_2) = 8 - (5 - 8\rho) - 5 = -2 + 8\rho$$

und damit sind Y_1, Y_2 genau für $\rho = \frac{1}{4}$ (mit $|\rho| < 1$) unkorreliert.

4.2

(i) Wir erhalten die Marginalverteilungen durch Addition über die Reihen/Spalten der Tabelle der gemeinsamen Verteilung:

X	Σ
-1	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$

Y	-2	-1	1	2
Σ	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$

(ii) Wir bestimmen zuerst die Verteilung von $X \cdot Y$:

$$
\begin{aligned}
P(X \cdot Y = -2) &= P(X = 1, Y = -2) + P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \\
P(X \cdot Y = -1) &= P(X = 1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\
P(X \cdot Y = 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{4} \\
P(X \cdot Y = 1) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\
P(X \cdot Y = 2) &= P(X = 2, Y = -1) + P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Aus der Symmetrie folgern wir $\mathbb{E}[X \cdot Y] = 0$, aus den obigen (ebenfalls symmetrischen) Verteilungen analog $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. Dies zeigt

$$
\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0 - 0 \cdot 0 = 0
$$

(iii) Die beiden Variablen sind unkorreliert, aber wegen

$$
\begin{aligned}
P(Y = 1 \mid X = 0) &= \frac{P(Y = 1, X = 0)}{P(X = 0)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
P(Y = 1 \mid X = 1) &= \frac{P(Y = 1, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

nicht unabhängig.

4.3

(i) Wir berechnen das Integral über f_Z:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_Z(x, y) dy dx &= \int_1^2 \frac{2}{3} \int_0^\infty x^2 \exp(-xy) dy dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{-x} \exp(-xy) \right]_0^\infty dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 -x(\underbrace{0}_{\text{da } x>0} -1) dx = \frac{2}{3} \int_1^2 x dx \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

und somit handelt es sich bei f_Z um eine Verteilungsfunktion.

(ii) Wir berechnen zuerst für $t \in [1, 2]$:

$$
\begin{aligned}
F_X(t) = P(X \leq t) &= \int_1^t \int_0^\infty f_Z(x, y) dy dx \\
&= \mathbb{1}_{t \in [1,2]} \frac{2}{3} \int_1^t x dx = \frac{t^2 - 1}{3}.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t^2-1}{3} & t \in [1,2] \\ 1 & t > 2 \end{cases}.$$

Analog betrachten wir Y für $t > 0$ (da der Fall $t = 0$ als Nullmenge vernachlässigt werden darf):

$$\begin{aligned} F_Y(t) = P(Y \leq t) &= \int_1^2 \int_0^t f_Z(x,y)dydx = \frac{2}{3}\int_1^2 x^2 \frac{1}{-x}[\exp(-xy)\ ]_0^t dx \\ &= \frac{2}{3}\int_1^2 -x(\exp(-xt) - 1) = \frac{2}{3}\int_1^2 xdx - \frac{2}{3}\int_1^2 x\exp(-xt)dx \\ &= 1 - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{t}\exp(-xt) - \frac{1}{t^2}\exp(-xt)\right]_1^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{t+1}{t^2}\exp(-t) - \frac{2t+1}{t^2}\exp(-2t)\right). \end{aligned}$$

Dies liefert

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{t+1}{t^2}\exp(-t) - \frac{2t+1}{t^2}\exp(-2t)\right) & t > 0 \end{cases}.$$

(iii) Die beiden Variablen sind nicht unabhängig, da die Dichte der gemeinsamen Verteilung nicht dem Produkt der Marginaldichten entspricht.

4.4

(i) Kontigenztafel:

M S	0	1	2	3	4	5	Σ
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
Σ	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(ii) Die beiden Zufallsvariablen sind nicht unabhängig, denn es ist

$$P(S = 0 \mid M = 0) = 1 \neq 0 = P(S = 0 \mid M = 1).$$