Übungsblatt 03
Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

28. Juni 2023

Punkte: | / 30 |

3.1 Logarithmus

(i) $\overline{\mathbb{D}}$ ist eine kompakte und nicht-leere Menge. Wir setzen $g(z) = 4z$ und berechnen für $z \in \partial\mathbb{D}$:

$$|f(z) - g(z)| = |z^2 + e^z| \leq |z^2| + |e^z| \leq |z|^2 + e^{|z|} = 1 + e < 4 = |4z| = |g(z)| \leq |g(z)| + |f(z)|$$

Nach dem Satz von Rouche hat somit $f(z)$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ dieselbe Anzahl an Nullstellen (gezählt nach ihrer Vielfachheit) wie $g(z) = 4z$, also genau eine (mit Vielfachheit 1). Weiterhin liegt diese Nullstelle im Inneren $\mathbb{D}$.

(ii) Sei $z_0 \in \mathbb{D}$ die eine Nullstelle von f. Dann können wir f auf $\mathbb{D}$ schreiben als $f(z) = (z - z_0)g(z)$ mit $g(z) \in H(\mathbb{D})$ und $g(z_0) \neq 0$. Angenommen, f besäße eine holomorphe Logarithmusfunktion L auf $\mathbb{D}$. Dann wäre $L|_{\mathbb{D}\setminus\{z_0\}}$ eine holomorphe Logarithmusfunktion der (auf $\mathbb{D} \setminus \{z_0\}$ nullstellenfreien und holomorphen) Funktion $f|_{\mathbb{D}\setminus\{z_0\}}$. Somit wäre $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ für alle Wege γ in $\mathbb{D} \setminus \{z_0\}$. Wir berechnen dieses Integral:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{(z - z_0)g'(z) + g(z)}{(z - z_0)g(z)} dz = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Das erste Integral hat hier stets den Wert 0, da g und g' in $\mathbb{D}$ holomorph und g nullstellenfrei und somit $\frac{g'}{g}$ holomorph ist. Das zweite Integral hat nach dem Residuensatz den Wert $n(z_0, \gamma) \cdot \operatorname{res}\left(z_0, \frac{1}{z - z_0}\right)$. Die Funktion $\frac{1}{z-z_0}$ hat in z_0 eine einfache Polstelle und es folgt $\operatorname{res}\left(z_0, \frac{1}{z-z_0}\right) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{1}{z-z_0} = 1 \neq 0$. Dies zeigt

$$0 = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(z_0, \gamma) \cdot 1.$$

Es müsste also $n(z_0, \gamma) = 0$ für alle Wege $\gamma \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$ gelten, was natürlich Unsinn ist. Somit folgt per Widerspruch, dass f in $\mathbb{D} \setminus \{z_0\}$ und damit auch in $\mathbb{D}$ keine holomorphe Logarithmusfunktion besitzt.

(iii) Angenommen, eine solche Funktion $h \in H(\mathbb{D})$ existiere. Dann ist $0 = f(z_0) = (w(z_0))^3$, also $w(z_0) = 0$. w hat also in z_0 eine (mindestens) einfache Nullstelle. Daher können wir w schreiben als $w(z) = (z - z_0)^k h(z)$ mit $h \in H(\mathbb{D})$, $h(z_0) \neq 0$ und $k \geq 1$. Dann aber ist

$$f(z) = (w(z))^3 = (z - z_0)^{3k}(h(z))^3,$$

also hat f in z_0 eine (mindestens) dreifache Nullstelle, ein Widerspruch.

3.2 Lokale Injektivität

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist f_n lokal injektiv auf ganz G, also folgt $f'_n(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Für die Funktionenfolge $(f'_n) \in H(G)$ gilt also $0 \notin f'_n(G)$ für alle n, und da (f'_n) nach Weierstraß ebenfalls kompakt gegen f' konvergiert folgt $f' \equiv 0$ oder $0 \notin f'(G)$ nach dem Satz von Hurwitz. In ersterem Fall folgt, da G ein Gebiet und insbesondere zusammenhängend ist, dass f konstant ist; in zweiterem Fall per Definition die lokale Injektivität in jedem Punkt.