Übungsblatt 05
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

23. Mai 2023

5.1 Zentralübung

(i) Es ist
$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und die Matrix hat für $a \neq \frac{1}{2}$ vollen Rang, da Determinante $2a-1$. Somit ist die Verteilung von $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ nach 2.17:
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 4-a & 7 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2-2a+4 & 7-a \\ 7-a & 13 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$
Im Fall $a = 7$ sind $\tilde{X}, \tilde{Y}$ damit unkorreliert, was im Falle multivariater Normalverteilungen der Unabhängigkeit entspricht.

(ii) Wir wiederholen dieselbe Rechnung für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (voller Rang, da Determinante -3):
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

5.2

(i) Die Marginalverteilungen sind (multivariate) Normalverteilungen bezüglich der beschnittenen Matrizen:
$$X_2 \sim \mathcal{N}(1, 1)$$
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

(ii) Wegen $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \Sigma_{23} = \Sigma_{23} = 0$ sind X_2 und $(X_1, X_3)^T$ unkorreliert und damit als (multivariate) Normalverteilungen auch unabhängig.

(iii) Da A Rang 2, also vollen Rang, hat, berechnen wir die Verteilung von Y nach Satz 2.17.

$$\begin{aligned}
Y &\sim \mathcal{N}\big(A\mu + b, A\Sigma A^T\big) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

5.3

5.4

Wir wollen weiterhin stupide Satz 2.17 anwenden und stellen daher $(X_1, X_2)^T$ als Matrix-Vektor-Produkt mit $(\zeta_1, \zeta_2)^T \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ dar:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat Determinante -1, sodass 2.17 weiterhin anwendbar ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Analog gilt für $(Y_1, Y_2)^T$:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \neq 0$, also folgt wieder mit 2.17:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Die beiden Zufallsvektoren haben also die gleiche Verteilung.