Übungsblatt 09
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

22. Juni 2023

9.1 Zentralübung

(i) Es ist (X_i) gleichgradig integrierbar, d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0.$$

Insbesondere existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} < 1$ für alle $i \in I$ und damit ist

$$\mathbb{E}[|X_i|] = \int |X_i| d\mathbb{P} = \int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|<n\}} |X_i| d\mathbb{P} < 1 + n$$

für alle $i \in I$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert folglich ein $r > 0$ mit $\frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] < \varepsilon$ für alle $i \in I$ und damit

$$\mathbb{P}(X_i \notin \overline{K_r(0)}) = \mathbb{P}(|X_i| > r) \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] < \varepsilon$$

und damit $\mathbb{P}(X_i \in \overline{K_r(0)}) \geq 1 - \varepsilon$. Da $\overline{K_r(0)}$ kompakt ist, zeigt dies die Straffheit.

(ii) Betrachte die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0,1/n]}$ (wobei $\mathbb{P}$ der uniformen Verteilung auf $[0,1]$ entspreche). Dann ist X_n straff, denn für die kompakte Menge $[0,1]$ gilt $\mathbb{P}(X_n \in [0,1]) = 1 \geq 1 - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Allerdings ist (X_n) nicht uniform integrierbar, denn für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ist $\int_{|X_N|\geq N} |X_N| d\mathbb{P} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|X_n|\geq N} |X_n| d\mathbb{P} \geq 1$. Somit kann der Limes $n \to \infty$ auch nur größer oder gleich 1 sein und es (X_n) ist nicht uniform integrierbar.

9.2

9.3

9.4

(i) Die Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu X bzw. X_n sind

$$F(k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \qquad F_n(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Dann gilt

$$F_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \left(\prod_{m=n-k+1}^{n} \underbrace{\frac{m}{n}}_{\to 1} \right) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\to \exp(-\lambda)} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = F(k).
\end{aligned}
$$

Man beachte insbesondere, dass das Produkt stets eine feste Anzahl an Faktoren hat, die einzeln gegen 1 konvergieren, wenn n und damit auch m gegen ∞ strebt. Da die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_n jeweils nur aus Summen der obigen Terme bestehen und diese Summen daher summandenweise konvergieren, konvergieren auch die Verteilungsfunktionen punktweise. Dies zeigt $X_n \to X$.

(ii) Wir wissen, dass die Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen wiederum Poisson-verteilt ist. Daher gilt $\tilde{X}_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Poiss}(\lambda \cdot n)$. Wir bezeichnen im Folgenden die Verteilungsfunktion dieser Summe mit $\tilde{F}_n$. Dann ist für $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_n(\log_{1+1/n}(x)) = \mathbb{P}(\tilde{X}_n < \log_{1+1/n}(x)) &= \sum_{k=0}^{\log_{1+1/n}(x)} \mathbb{P}(\tilde{X}_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\log_{1+1/n}(x)} \frac{n^k \lambda^k}{k!} \exp(-\lambda n) = \exp(-\lambda n) x^n = \left(e^{-\lambda} x\right)^n \\
&\to \begin{cases} 1 & x \geq e^\lambda \\ 0 & x < e^\lambda \end{cases} = \mathbb{1}_{[e^\lambda, \infty)}
\end{aligned}
$$

Sei nun F_n die Verteilungsfunktion von Y_n, die Verteilungsfunktion von e^λ ist $F = \mathbb{1}_{[e^\lambda,\infty)}$ und ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$ außer e^λ.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Falls $x < 0$, so ist $F_n(x) = 0 = F(x)$ für alle n. Sei daher $x \in [0, \infty)$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:

$$
F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i < \log_{1+1/n} x \right) = \tilde{P}_n(\log_{1+1/n}(x)) \to \mathbb{1}_{[e^\lambda,\infty)}
$$

d.h. Y_n konvergiert schwach gegen e^λ. Satz 3.20 zeigt nun, dass Y_n auch stochastisch gegen e^λ konvergiert.