Übungsblatt 02
Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

21. Mai 2023

Punkte: / 30

2.1 Ein Integral

Wir stellen zuerst den Cosinus komplex dar:

$$\int_0^{2pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} (\exp(it) + \exp(-it))^{2n} dt$$

Dies entspricht einem Wegintegral über $f(z) = \frac{(z+\overline{z})^{2n}}{iz}$ entlang des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{D}, t \mapsto \exp(it)$, wie auch durch Substitution ersichtlich wird.

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \int_\gamma \frac{(z+\overline{z})^{2n}}{z} dz = \frac{1}{i2^{2n}} \int_\gamma \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z} dz$$

Die Funktion $f(z)$ ist im Einheitskreis, dem Inneren von γ, meromorph mit einer einzigen isolierten Singularität im Nullpunkt. Wir verwenden den Residuensatz.

$$= \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot n(0, \gamma) \cdot \operatorname{res}(0, f)$$

Es gilt $n(0, \gamma) = 1$. Um das Residuum zu bestimmen, betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von f mittels des binomischen Lehrsatzes:

$$f(z) = \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} z^{-k} z^{-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}$$

die für uns interessante Potenz -1 tritt hier genau für $k = n$ auf, also folgt

$$\operatorname{res}(0, f) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n!)}{n!(2n-n!)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und dies zeigt

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} = \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n!)}{(n!)^2},$$

was zu beweisen war.

2.2 Einige Integrale

Wir verwenden für alle Kurvenintegrale den Residuensatz.

(i) Der gegebene Integrand $f(z) = \frac{\exp(iz^2)-1}{z^2}$ ist meromorph mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt (den im Kreisring $A_{0,2}(0)$ ist der Integrand mangels Nennernullstellen holomorph). Der Weg γ umrundet diesen (mit Radius 2) genau zweimal, also gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, f).$$

Um das Residuum zu bestimmen, entwickeln wir die Funktion um den Nullpunkt:

$$f(z) = \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} = \frac{\exp(iz^2)}{z^2} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^{2n-2}}{n!} - \frac{1}{z^2}.$$

Wir sehen, dass keiner der Summanden den Exponenten -1 hat, also gilt $res(0, f(z)) = 0$ und damit auch

$$\int_\gamma \frac{\exp(iz^2) - 1}{z^2} dz = 0$$

(ii) Der gegebene Integrand $g(z) = \frac{\exp(z)}{(z-i)^3}$ hat lediglich bei $z = i$ eine Nennernullstelle, ist also im Kreisring $A_{0,1}(i)$ holomorph und damit im Inneren von η, dem Kreis $K_1(i)$, meromorph. η umrundet den Punkt i genau einmal in mathematisch negativer Richtung, der Residuensatz liefert also

$$\int_\eta g(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res}(i, g).$$

Wieder bestimmen wir die Reihenentwicklung um i. Da exp auf ganz $\mathbb{C}$ und damit insbesondere in $K_1(i)$ holomorph ist, existiert eine in $K_1(i)$ konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{a_k} a_k(z - i)^k = \exp(z)$. Für die Koeffizienten gilt hier $a_k = \frac{\exp^{(k)}(i)}{k!}$. Dies liefert:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - i)^{k-3}$$

und damit hat g im Punkt i das Residuum $a_2 = \frac{1}{2}\exp^{(2)}(i) = \frac{1}{2}\exp(i)$. Damit folgt

$$\int_\eta g(z)dz = -\pi i e^i$$

(iii) Die Funktion $\frac{1}{z}$ ist auf $A_{0,2}(0)$ mangels Nennernullstellen holomorph, also ist es dort auch $\exp(1/z)$. Somit ist der Integrand $h(z) = \exp(1/z)$ auf $K_2(0)$, dem Inneren von γ, meromorph und der Residuensatz liefert mit $n(0, \gamma) = 2$

$$\int_\gamma h(z)dz = 4\pi i \operatorname{res}(0, h).$$

Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir außerdem

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

und damit $\operatorname{res}(0, h) = 1$. Dies zeigt

$$\int_\gamma h(z)dz = 4\pi i.$$