Übungsblatt 11
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

29. Juni 2023

11.1 Zentralübung

(i) Die gemeinsame Dichte der n Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)$$

Für $(x_1, \ldots, x_n) \in (0,1)^n = \mathcal{X}$ ist dann die Likelihood-Funktion

$$f(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

und ihre Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, x_1, \ldots, x_n) = -\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \frac{1}{\theta^{n+2}} \left(n\theta + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \right)$$

Diese hat die Nullstelle $n\theta = -\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$, also ist der ML-Schätzer gleich

$$\hat{\theta}^{ML}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1/x_i)$$

(ii) Der Erwartungswert von X_1 beträgt

$$\int_0^1 x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \, dx = \frac{1}{\theta} \int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}} \, dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1+\theta}{\theta} x^{\frac{\theta}{1+\theta}} \right]_0^1 = \frac{1}{1+\theta}$$

und die Gleichsetzung $\frac{1}{1+\theta} = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ liefert den Schätzer

$$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1$$

(iii) Der ML-Schätzer liefert hier

$$\hat{\theta}^{ML}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{0.1 \cdot 0.22 \cdot 0.54 \cdot 0.36} \right) \approx 1.36$$

und aus dem Momentenschätzer erhält man

$$\hat{\theta}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{4}{0.1 + 0.22 + 0.54 + 0.36} - 1 = \frac{4}{1.22} - 1 \approx 2.27$$