

Übungsblatt 05

Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

23. Mai 2023

5.1 Zentralübung

(i) Es ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Matrix hat für $a \neq \frac{1}{2}$ vollen Rang, da Determinante $2a - 1$. Somit ist die Verteilung von $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ nach 2.17:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 4-a & 7 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2-2a+4 & 7-a \\ 7-a & 13 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Im Fall $a = 7$ sind \tilde{X}, \tilde{Y} damit unkorreliert, was im Falle multivariater Normalverteilungen der Unabhängigkeit entspricht.

(ii) Wir wiederholen dieselbe Rechnung für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (voller Rang, da Determinante -3):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

5.2

(i) Die Marginalverteilungen sind (multivariate) Normalverteilungen bezüglich der beschnittenen Matrizen:

$$\begin{aligned} X_2 &\sim \mathcal{N}(1, 1) \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- (ii) Wegen $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \Sigma_{23} = \Sigma_{32} = 0$ sind X_2 und $(X_1, X_3)^T$ unkorreliert und damit als (multivariate) Normalverteilungen auch unabhängig.
- (iii) Da A Rang 2, also vollen Rang, hat, berechnen wir die Verteilung von Y nach Satz 2.17.

$$\begin{aligned}
Y &\sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A^T) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

5.3

5.4