Übungsblatt 04
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

14. Mai 2023

4.1 Zentralübung

Ein Varianz-Kovarianzmatrix muss positiv definit sein. Gilt $|\rho| \leq 1$, so ist

$$2 \geq 0 \qquad 2 - \rho^2 \geq 0 \qquad 4 - 4\rho^2 \geq 0$$

und Σ nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit. Nach der Varianz-Kovarianz-Formel ist

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2 + X_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{3} \Sigma_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2 \cdot \Sigma_{ij} = 5 + 8\rho.$$

Weiterhin ist die Kovarianz der Zufallsvariablen $X_1, -X_2, -X_3$ wegen der Bilinearität der Kovarianz gleich

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 2 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 2 \end{pmatrix}$$

und somit gilt erneut mit der Varianz-Kovarianz-Formel

$$\mathrm{Var}[X_1 - X_2 - X_3 = \sum_{i=1}^{3} \Sigma'_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} 2 \cdot \Sigma'_{ij} = 5.$$

Setzen wir $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ sowie $Y_2 = X_1 - X_2 - X_3$, so gilt

$$\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2) = \mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2) + \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$$

unter Verwendung von $\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2) = \mathrm{Var}(2X_1) = 4 \cdot \mathrm{Var}(X_1) = 8$ folgt damit

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Var}(Y_1 + Y_2) - \mathrm{Var}(Y_1) - \mathrm{Var}(Y_2) = 8 - (5 - 8\rho) - 5 = -2 + 8\rho$$

und damit sind Y_1, Y_2 genau für $\rho = \frac{1}{4}$ (mit $|\rho| < 1$) unkorreliert.