

Übungsblatt 06

Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

13. Juni 2023

6.1 Zentralübung

(a) Es ist

$$|Y_n| = \left| Y_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right| \leq \left| Y_n - \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| = |Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n}.$$

(b) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Aufgrund von $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Wegen $|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq |Y_n| = |X_n - X|$ gilt $|X_n - X| \geq \varepsilon \Rightarrow |Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq \varepsilon$, also

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) &\leq P(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} \geq \varepsilon - \frac{1}{n}) = P(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leq \text{Var}(Y_n) \cdot \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{(\varepsilon\sigma)^2}{4n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

da ε, σ fest und $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Somit ist X_n stochastisch konvergent gegen X .

6.2

$(f) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (c)$, (d) , (b) und $(c), (d) \Rightarrow (b)$.

6.3

Setze $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{Z \in \mathcal{F}} \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 \Rightarrow \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 \forall Z \in \mathcal{F}.$$

Dies zeigt für beliebiges $Z \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_{\Omega} |Z| d\mathbb{P} = \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z| d\mathbb{P} + \int_{\{|Z| < n\}} |Z| d\mathbb{P} < 1 + n \cdot \mathbb{P}(\{|Z| < n\}) \leq 1 + n \cdot .$$

Die Aussage folgt nun durch die Festlegung $K := n + 2$.

Die umgekehrte Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Es sei \mathbb{P} das übliche Maß auf $[0, 1]$ und X_n definiert wie folgt:

$$X_n(t) = \begin{cases} n & t \in [0, 1/n] \\ 0 & (1/n, 1] \end{cases}.$$

Diese Zufallsvariablen haben alle den festen Erwartungswert $n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = 1$ (und diese Erwartungswerte sind damit natürlich beschränkt), aber es gilt

$$\int_{\{|Z| \geq n\}} |Z_n| d\mathbb{P} = \int_0^{\frac{1}{n}} n d\mathbb{P} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

und damit auch $\sup_{Z \in \mathcal{F}} \int_{\{|Z| \geq n\}} |Z_n| d\mathbb{P} = 1$, womit natürlich auch der Limes $1 \neq 0$ wird.

6.4

(a) Wir zeigen die drei Metrik-Eigenschaften:

- (i) \Leftarrow : Angenommen, es ist $X = Y$ \mathbb{P} fast-sicher, d.h. X und Y unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \mathbb{E} \left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus N} \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R} \setminus N} \frac{0}{1 + 0} d\mathbb{P} = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow : Angenommen, es ist $X \neq Y$ \mathbb{P} fast-sicher. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) = \lambda > 0$, d.h. es existiert eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit Maß $\lambda > 0$ und $|X - Y| \geq \varepsilon$ auf K . Folglich gilt auf K auch $\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} =: \varepsilon$ und demnach

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \mathbb{E} \left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} d\mathbb{P} \\ &\geq \int_K \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} d\mathbb{P} \geq \varepsilon \cdot \lambda > 0 \end{aligned}$$

und somit $d(X, Y) \neq 0$.

- (ii) Die Symmetrie folgt direkt aus der Symmetrie von $|X - Y|$.
 (iii) Wir zeigen zuerst $\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} \geq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|}$ für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ (man betrachte entsprechende Aufgaben aus der Analysis):

$$\begin{aligned} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} &\geq \frac{|x - y|}{1 + |x - y| + |y - z|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z| + |x - y|} \\ &= \frac{|x - y| + |y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + |x - y| + |y - z|} \geq 1 - \frac{1}{1 + |x - z|} \\ &= \frac{|x - z|}{1 + |x - z|}. \end{aligned}$$

Somit gilt eine entsprechende Beziehung auch für reelle Zufallsvariablen und (aufgrund der Monotonie des Erwartungswertes) auch für die Erwartungswerte und damit für d .

Somit ist d eine Metrik auf dem Raum der reellen Zufallsvariablen.

(b) \Rightarrow : Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $d(X_n, X) \rightarrow 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(X_n, X) < \varepsilon^2 > 0$ für alle $n \geq N$, also $\mathbb{E}[|X_n - X|] < \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$. Wegen $\mathbb{E}[Z] \geq \varepsilon \cdot P(Z \geq \varepsilon)$ muss dann auch $\mathbb{P}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) < \varepsilon$ sein. Außerdem gilt

$$|X_n - X| = \frac{|X_n - X|}{1} \leq \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}$$

und somit $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \geq \varepsilon\right) < \varepsilon$.

\Leftarrow : Aus Zeitgründen dem Korrektor zum Nachrechnen überlassen.