

Übungsblatt 03

Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

10. Juli 2023

Punkte:

/ 30

3.1 IV-12

Wir bezeichnen die rechte Seite der DGL als $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 - y \end{pmatrix}$.

- (i) Für einen Gleichgewichtspunkt muss gelten

$$x' = x = 0 \wedge y' = x^2 - y = 0$$

also $x = 0$ und damit $-y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Also ist $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$ der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems.

Um ihn auf Stabilität zu untersuchen, bestimmen wir das linearisierte System am Gleichgewichtspunkt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J_f(x, y) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Eigenwerte 1 und -1 , nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)^T$ somit instabil.

- (ii) Die geforderte Bedingung ist insbesondere für ein erstes Integral erfüllt. Gesucht ist also eine Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (wir verwenden H und reservieren φ für Lösungen) mit $\langle \nabla H(x, y), f(x, y) \rangle = 0$.

Wir bemerken, dass $\frac{\partial}{\partial x} xy = y$ und $\frac{\partial}{\partial y} xy = x$. Und fehlt also noch ein Summand, der nach x abgeleitet zu $-x^2$ wird, aber beim Ableiten nach y verschwindet. Dies wird beispielsweise durch $-\frac{x^3}{3}$ erfüllt. Die Funktion

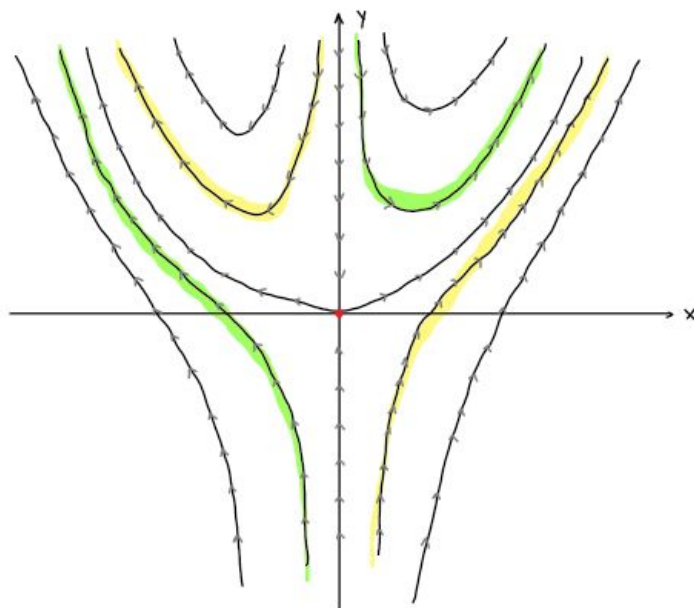
$$H(x, y) = xy - \frac{x^3}{3}$$

ist somit ein erstes Integral des Systems und daher entlang Lösungen konstant, d.h. die Phasenkurven verlaufen innerhalb der Niveaumengen von H .

- (iii) Um die Niveaumengen bestimmen zu können, stellen wir die Gleichung $H(x, y) = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ nach y um:

$$H(x, y) = c \Leftrightarrow xy = c + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3c + x^3}{3x}$$

Diese Funktion hat stets eine Nullstelle bei $-\sqrt[3]{3c}$, verläuft für $x \rightarrow 0$ je nach Wahl von c asymptotisch gegen $\pm\infty$ und läuft für $x \rightarrow \infty$ in beiden Richtungen gegen $+\infty$, sich der Trajektorie für $c = 0$ mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ annähernd. Weiterhin sind die beiden Äste von $\frac{3c+x^3}{3x}$ genau achsensymmetrisch zu den beiden Ästen von $\frac{-3c+x^3}{3x}$, sodass unser Phasenpoträt insgesamt achsensymmetrisch sein muss. Mit diesen Informationen ausgestattet zeichnen wir:



Die Informationen über die Richtung der Pfeile erhalten wir daher, dass der Eigenwert in x -Richtung -1 war, also in Richtung der x -Achse die Lösungen von Gleichgewichtspunkt wegliefen. In y -Richtung war der Eigenwert -1 , d.h. Lösungen, die auf der y -Achse starten, werden zum Gleichgewichtspunkt hingezogen.

3.2 IV-13

Wir bestimmen die Jacobi-Matrix der rechten Seite (die wir im Folgenden als f bezeichnen):

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} -3 & 1 - 6y \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese hat die Spur -3 und die Determinante 4 . Falls ihre Eigenwerte komplex sind, haben sie daher bei Realteil -1.5 und falls sie reell sind, müssen sie dasselbe Vorzeichen haben und sich zu -3 addieren, also auch beide negativ sein. Somit ist der Gleichgewichtspunkt nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität asymptotisch stabil.

Wir betrachten nun die Funktion

$$V(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4.$$

Es handelt sich hierbei um eine Lyapunov-Funktion des Systems, denn

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 8x - 2y \\ -2x + 2y + 4y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3x + y + 2y^3 \\ -4x \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -24x^2 + 8xy + 16xy^3 + 6xy - 2y^2 - 4y^4 + 8x^2 - 8xy - 16xy^3 \\ &= -16x^2 + 6xy - 2y^2 - 4y^4 = -7x^2 - y^2 - 4y^4 - (9x^2 - 6xy + y^2) \\ &= 16x^2 - y^2 - 4y^4 - (3x - y)^2 \leq 0,\end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau für $(x, y) = 0$ gilt. Es handelt sich also sogar um eine strikte Lyapunov-Funktion. Es bleibt zu zeigen, dass $V(x, y)$ in x, y ein lokales Minimum besitzt. Hierzu bestimmen wir die Hesse-Matrix

$$H_V(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 + 12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_V(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

und ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_V(\lambda) = (8 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 12$$

sowie dessen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{2} \stackrel{<10}{>} 0.$$

Somit besitzt V in $(0, 0)$ ein (striktes) lokales Minimum und nach Lyapunov ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ somit asymptotisch stabil.

3.3 IV-14

- (i) Für $\zeta = 1$ und $\zeta = -1$ ist die eindeutige maximale Lösung stationär und somit insbesondere nicht streng monoton fallend.

Falls $\zeta \in (-1, 1)$, so kann die Trajektorie der entsprechenden Lösung φ_ζ die Trajektorien der beiden konstanten Lösungen nicht schneiden, also gilt $\varphi_\zeta(t) \in (-1, 1)$ für alle $t \in I_\zeta$. Dann gilt $\varphi'_\zeta(t) = f(\varphi_\zeta(t)) > 0$, denn $f > 0$ auf $(-1, 1)$, da $f(0) > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f , des Zwischenwertsatz und der Absenz weiterer Nullstellen kein Vorzeichenwechsel stattfinden kann. Also ist φ_ζ streng monoton steigend.

Falls $\zeta \in (-\infty, -1)$, kann φ_ζ analog das Intervall $(-\infty, -1)$ nicht verlassen und da f hier mit paralleler Argumentation ebenfalls positiv ist, muss φ_ζ auch hier streng monoton steigend.

Es verbleibt noch $\zeta \in (1, \infty)$. Analog zu den beiden oberen Fällen kann φ_ζ das Intervall $(1, \infty)$ nicht verlassen und f ist dort negativ, also ist φ_ζ streng monoton fallend.

Zusammenfassend ist φ_ζ streng monoton fallend $\Leftrightarrow \zeta \in (1, \infty)$ und streng monoton steigend $\Leftrightarrow \zeta \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

- (ii) Falls $\zeta = -1$ oder $\zeta = 1$ so ist φ_ζ als konstante Lösung auf ganz \mathbb{R} existent.

Sei nun $\zeta \in (-1, 1)$. Wie bereits oben diskutiert kann dann φ_ζ das Intervall $(-1, 1)$ und damit insbesondere das kompakte Intervall $[-1, 1]$ nicht verlassen. Somit ist φ_ζ auf $[0, t_\omega)$

(mit t_ω dem rechten Rand des maximalen Lösungsintervalls) beschränkt und nach Korollar 3.8 folgt damit $t_\omega = \infty$, also ist φ_ζ auf $[0, \infty]$ existent. (Speziell für $\zeta \in (-1, 1)$ lässt sich hier auch $I_\zeta = \mathbb{R}$ zeigen).

Für $\zeta \in (-\infty, -1)$ ist $\varphi_\zeta(0) = \zeta$ und $\varphi_\zeta(t) > \zeta$ für alle $t \in [0, t_\omega)$ ist streng monoton steigend. Da weiterhin $\varphi_\zeta(t) < -1$ für all diese t gelten muss, ist φ_ζ also auf $[0, t_\omega)$ durch $[\zeta, -1]$ beschränkt somit gilt nach Korollar 3.8 $t_\omega = \infty$.

Analog zeigt man, dass φ_ζ für $\zeta \in (1, \infty)$ auf $[0, t_\omega)$ durch $[1, \zeta]$ beschränkt ist und auch hier $t_\omega = \infty$ gilt.

(iii) Wir betrachten die Funktion

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$

mit Gradient

$$\nabla V(x) = \frac{\partial}{\partial x} V(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1).$$

Dieser hat Nullstellen genau bei $-1, 1$ und die folgende Vorzeichenverteilung:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow \nabla V(x) < 0 \\ x \in (-1, 1) &\Rightarrow \nabla V(x) < 0 \\ x \in (1, \infty) &\Rightarrow \nabla V(x) > 0 \end{aligned}$$

– wie durch Betrachtung der Vielfachheit der Nullstellen sowie des Grenzverhaltens klar wird – und somit gilt

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \\ x \in (-1, 1) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \\ x \in (1, \infty) &\Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \end{aligned}$$

aufgrund der oben diskutierten Vorzeichenverteilung von f . Also gilt $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit genau für $x = -1, 1$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion von f auf \mathbb{R} . Auf $(0, 2) \setminus \{1\}$ und $(-2, 0) \setminus \{-1\}$ ist V sogar eine strikte Lyapunov-Funktion von f .

Weiterhin hat V bei $x_0 = 1$ eine (strikte) lokales (sogar globales) Minimum, denn die Ableitung ∇V hat dort eine Nullstelle und die zweite Ableitung $3x^2 + 2x - 1$ hat den Wert $4 > 0$. Somit ist $x_0 = 1$ nach dem Stabilitätskriterium von Lyapunov ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Schließlich ist $x_0 = -1$ ein Terrassenpunkt von V , denn V hat hier eine Nullstelle und die zweite Ableitung ebenfalls. Somit existiert in jeder Umgebung von $x_0 = -1$ ein x mit $V(x) < V(x_0)$ und nach dem Instabilitätskriterium von Lyapunov ist $x_0 = -1$ somit ein instabiler Gleichgewichtspunkt von der DGL.