Übungsblatt 01
Repetitorium Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

27. April 2023

Punkte: $\boxed{\quad / 60}$

1.1 Komplexe Identitäten

Es ist

$$\begin{aligned}|z-w|^2 &= (z-w)(\overline{z-w})\\ &= z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - w\overline{z}\\ &= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}})\\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}).\end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Variante des Cosinussatzes im Dreieck, dass von $0, z, w$ gebildet wird, wobei

$$\begin{aligned}\Re(z\overline{w}) &= \Re(|z|\exp(i\arg(z)) \cdot \overline{|w|\exp(i\cdot\arg(w))})\\ &= |z|\cdot|w|\cdot\Re(\exp(i\arg(z))\cdot\overline{\exp(i\cdot\arg(w))})\\ &= |z|\cdot|w|\cdot\Re(\exp(i(\arg(z)-\arg(w)))\\ &= |z|\cdot|w|\cdot\Re(\cos(\arg(z)-\arg(w)) + i\cdot\sin(\arg(z)-\arg(w)))\\ &= |z|\cdot|w|\cdot\cos(\arg(z)-\arg(w))\end{aligned}$$

gilt. Falls wir also die Länge der Seiten des von $0, z, w$ gebildeten Dreiecks $[0, w], [0, z], [z, w]$ mit a, b, c bezeichnen und den Winkel zwischen $[0, z]$ und $[0, w]$ mit γ, so folgt der Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}|z-w|^2 + |z+w|^2 &= |z-w|^2 + |z-(-w)|^2\\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}) + |z|^2 + |-w|^2 - 2\Re(z(\overline{-w}))\\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}) + |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\overline{w})\\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2.\end{aligned}$$

Dies ist die Parallelogrammidentität, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Das Parallelogramm wird hierbei von den Punkten $0, z, w, z+w$ gebildet.