Übungsblatt 01
Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

30. April 2023

Punkte: | / 30 |

1.1 Komplexe Identitäten

Es ist

$$\begin{aligned}
|z-w|^2 &= (z-w)(\overline{z-w}) \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - w\overline{z} \\
&= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}).
\end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Variante des Cosinussatzes im Dreieck, das von $0, z, w$ gebildet wird, wobei

$$\begin{aligned}
\Re(z\overline{w}) &= \Re(|z|\exp(i\arg(z)) \cdot \overline{|w|\exp(i \cdot \arg(w))}) \\
&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\exp(i\arg(z)) \cdot \overline{\exp(i \cdot \arg(w))}) \\
&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\exp(i(\arg(z) - \arg(w))) \\
&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\cos(\arg(z) - \arg(w)) + i \cdot \sin(\arg(z) - \arg(w))) \\
&= |z| \cdot |w| \cdot \cos(\arg(z) - \arg(w))
\end{aligned}$$

gilt. Falls wir also die Länge der Seiten des von $0, z, w$ gebildeten Dreiecks $[0, w], [0, z], [z, w]$ mit a, b, c bezeichnen und den Winkel zwischen $[0, z]$ und $[0, w]$ mit γ, so folgt der Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
|z-w|^2 + |z+w|^2 &= |z-w|^2 + |z-(-w)|^2 \\
&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}) + |z|^2 + |-w|^2 - 2\Re(z(\overline{-w})) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\overline{w}) + |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\overline{w}) \\
&= 2|z|^2 + 2|w|^2.
\end{aligned}$$

Dies ist die Parallelogrammidentität, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Das Parallelogramm wird hierbei von den Punkten $0, z, w, z+w$ gebildet.

1.2

(i) Da $z \mapsto z$ und $z \mapsto \overline{z}$ stetig sind, ist auch die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \sqrt{z \cdot \overline{z}} + 1/2(z + \overline{z}) = |z| + \Re(z)$ stetig. Dann ist das Urbild der offenen Menge $(1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ unter f offen, also $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) > 1\}$ offen. Dann ist ihr Komplement $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \leq 1\}$ also abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

A ist nicht kompakt, denn für alle $a \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt $|a| - \Re(a) = 0 \leq 1$, d.h. die gesamte negative reelle Achse ist in A enthalten. Diese ist aber nicht beschränkt und damit nicht kompakt, womit auch A selbst nicht kompakt sein kann.

(ii)