# Übungsblatt 03
# Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

9. Mai 2023

## 3.1 Zentralübung

(i) Sei $X_0$ eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi$, d.h. $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \varphi(t)$. Sei nun $\{X_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine (abzählbare) Menge an paarweise unabhängigen, zu $X$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Weiterhin sei $N$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda$, d.h. $\mathbb{P}(N = k) = \exp(\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ und $\varphi_N(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1))$. $N$ sei weiterhin von allen $X_k$ unabhängig. Dann betrachten wir eine Zufallsvariable mit der folgenden Definition:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(N \geq k) X_k = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Dann ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \right)$$

sowie

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)] &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}\left[ \exp\left( it \cdot \sum_{k=1}^{n} X_i \right) \right] \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} \varphi(t)^n \right) \\
&= \exp(-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(\lambda \cdot \varphi(t))^n}{n!} \right) = \exp(-\lambda) \exp(\lambda \varphi(t)) \\
&= \exp(\lambda(\varphi(t) - 1)),
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ bedingte Erwartung verwenden. Damit ist $e^{\lambda(\varphi - 1)}$ wieder eine charakteristische Funktion.

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(itZ)] &= \mathbb{P}(Y = 0) \cdot \mathbb{E}[\exp(itX_1)] + \mathbb{P}(Y = 1) \cdot \mathbb{E}[\exp(itX_2)] \\
&= \alpha \varphi_1(t) + (1 - \alpha) \varphi_2(t)
\end{aligned}$$

## 3.3

Es ist $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \varphi_X(t)$ sowie $\mathbb{E}[\exp(itX)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(itn) \cdot \mathbb{P}(X = n)$ nach der Transformationsformel. Gleichsetzen liefert

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(itn) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$

Wir berechnen (unter Ausnutzung der Holomorphie des Integranden)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-itn)\varphi_X(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(it(k-n))\mathbb{P}(X=k)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\int_{-\pi}^{\pi}\exp(it(k-n))dt.\end{aligned}$$

Für $k \neq n$ beschreibt $\exp(it(k-n))$ (integriert von $-\pi$ bis $\pi$) einen geschlossenen Weg $n-k$-mal entlang des Randes der Einheitskreisscheibe. Da die Funktion $f : z \mapsto z$ auf der Einheitskreisscheibe holomorph ist, folgt $\int_{-\pi}^{\pi}\exp(it(k-n))dt = 0$ nach dem Cauchy-Integralsatz. Somit verbleibt nur der Summand für $k = n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-itn)\varphi_X(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(it(k-n))\mathbb{P}(X=k)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\int_{-\pi}^{\pi}\exp(it(k-n))dt.\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbb{P}(X=n)\int_{-\pi}^{\pi}\exp(it\cdot 0)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbb{P}(X=n)2\pi = \mathbb{P}(X=n)\end{aligned}$$

und somit ist die Aussage gezeigt.

## 3.4

Nach Aufgabe 2.4 eine auf der Menge $\{-1,1\}$ Laplace-verteilte Zufallsvariable die charakteristische Funktion $\cos(t)$, und demnach die Summe aus drei so verteilten Zufallsvariablen die charakteristische Funktion $\cos(t)^3$. Wegen der Eindeutigkeit von charakteristischen Funktionen ist $X$ demnach derartig verteilt, hat also Wertebereich $-3,-1,1,3$, wobei diese Werte mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ für $X = -3, 3$ und $\frac{3}{8}$ für $X = -1, 1$ auftreten. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(itY)] &= \sum_{y=-\infty}^{\infty}\exp(ity)P(Y=y)dt\\ &= \sum_{x=-\infty}^{\infty}\exp(it(x^3-3x^2+1))P(X=x)dt\\ &= \sum_{x\in\{-3,-1,1,3\}}\exp(it(x^3-3x^2+1))P(X=x)dt\\ &= \frac{1}{8}\exp(-53it)+\frac{3}{8}\exp(-3it)+\frac{3}{8}\exp(-it)+\frac{1}{8}\exp(it)\end{aligned}$$