Übungsblatt 01
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

27. April 2023

1.1 Zentralübung

(a) Wir zeigen zuerst, dass es sich um eine Verteilungsfunktion handelt, indem wir die Bedingungen aus 3.34 überprüfen.

  (a) **Stetigkeit**: Für $t > 1$ und $t < 1$ ist die Funktion sicherlich stetig, und wegen $1-1^{-\alpha} = 0$ ist sie auch am Übergangspunkt $t = 1$ stetig. Somit ist F_α nach dem Klebelemma stetig und damit insbesondere rechtsseitig stetig.

  (b) **Monotonie**: Für $t < 1$ ist $F_\alpha|_{t<1} \equiv 0$, also monoton wachsend. Für $t \geq 1$ ist wegen $\alpha > 0$ die Funktion $t^{-\alpha}$ (streng) monoton fallend, also $1 - t^{-\alpha}$ (streng) monoton wachsend und außerdem stets positiv. Somit ist F_α insgesamt monoton wachsend.

  (c) **Grenzverhalten**: Es ist

$$\lim_{n\to-\infty} F_\alpha(n) \overset{n\leq 1}{=} \lim_{n\to-\infty} 0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F_\alpha(n) \overset{n\geq 1}{=} \lim_{n\to\infty} 1 - \underbrace{n^{-\alpha}}_{\to 0} = 1 - 0 = 1.$$

Somit ist F_α eine Verteilungsfunktion. Wir berechnen das Integral $\int_{-\infty}^t f_\alpha(t)dt$. Für $t < 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^t f_\alpha(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t 0 d\tau = 0 = F_\alpha(t)$$

und für $t > 1$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^t f_\alpha(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^1 0d\tau + \int_1^t \frac{\alpha}{\tau^{\alpha+1}}d\tau = \alpha\left[\frac{1}{-\alpha}\tau^{-\alpha}\right]_1^t = -\frac{1}{\alpha}t^{-\alpha} - \left(-\frac{\alpha}{\alpha}\right) = F_\alpha(t)$$

und somit ist f_α die Dichte von F_α.

(b) Es gilt für $\alpha \neq n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \int_{-\infty}^\infty x^n dF_\alpha(x) = \int_{-\infty}^\infty x^n f_\alpha(x)dx \\
&= \int_1^\infty x^n \cdot \alpha x^{-\alpha-1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \alpha x^{n-\alpha-1}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \alpha\left[\frac{1}{n-\alpha}x^{n-\alpha}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{n-\alpha}\left(t^{n-\alpha} - 1^{n-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Für $\alpha > n$ gilt nun $\lim_{t\to\infty} t^{n-\alpha} = 0$ und damit $\mathbb{E}[X^n] = \frac{\alpha}{n-\alpha}(0-1) = \frac{\alpha}{\alpha-n}$. Für $\alpha < n$ wiederum ist $\lim_{t\to\infty} t^{n-\alpha} = \infty$ und damit auch $\mathbb{E}[X^n] = \infty$.
Wir betrachten noch den Fall $\alpha = n$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \alpha x^{n-\alpha-1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \alpha x^{-1}dx = \alpha\int_1^t [\ln(x)]_1^t = \lim_{t\to\infty}\ln(t) - \ln(1) = \infty.$$

Somit ist die geforderte Gleichheit gezeigt. Sei nun $\alpha > 2$. Dann existieren das 1. und 2. Moment, und wir können die Varianz berechnen:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2(\alpha - 2) - \alpha(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}$$

(c) Sei zuerst $t < 0$. Dann ist

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\alpha \ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \underbrace{\exp(t/\alpha)}_{<1}) = 0,$$

also durch Ableiten auch $f_Y(t) = 0$ für alle $t < 0$. Sei nun $t \geq 0$. Dann gilt analog

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\alpha \ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \exp(t/\alpha)) \\ &= F_\alpha(\underbrace{\exp(t/\alpha)}_{\geq 1}) = (1 - \exp(t/\alpha)^{-\alpha}) = 1 - \exp(-t) \end{aligned}$$

und Ableiten liefert

$$f_Y(t) = \exp(-t).$$

Somit folgt insgesamt $f_Y(t) = \exp(-t) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}$, also $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

1.2

(a) Wir verwenden Beispiel 3.54, da die Dichte der Normalverteilung stetig ist. Dann gilt

$$f_Y(t) = \frac{f_X(\sqrt{t}) + f_X(\sqrt{-t})}{2\sqrt{t}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} f_X(\sqrt{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}|x|\right) \\ f_X(-\sqrt{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(-\sqrt{x})^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}|x|\right) \end{aligned}$$

wobei wir die Betragsstriche aufgrund von $t \geq 0$ auch weglassen können. Somit folgt

$$f_Y(y) = \frac{\exp(-y/2)}{\sqrt{2\pi y}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}.$$

(b) Da die Dichte der Normalverteilung absolutstetig und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar mit strikt positiver Ableitung ist, können wir Satz 3.52. anwenden. Dann hat Z die Dichte

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{f_U(\exp^{-1}(z))}{|\exp'(\exp^{-1}(z))|} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{|z|} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} z} \exp\left(-\frac{(\ln(z) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}. \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) f_U(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx.$$

Substitution von x durch $\sigma x + \mu$ liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\sigma x + \mu) \exp(-x^2/2) dx \\ &= \exp(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2\sigma x)\right) dx.\end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \exp(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2\sigma x + \sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dx \\ &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2\right) dx.\end{aligned}$$

Der Integrand entspricht nun der Dichte einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\sigma, 1)$, wodurch das Integral den Wert 1 haben muss. Dies zeigt $\mathbb{E}[Z] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.

Analog betrachten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(x))^2 f_U(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2x) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(2\sigma x + 2\mu) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \exp(2\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 4\sigma x + (2\sigma)^2) + 4\sigma^2/2\right) dx \\ &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - 2\sigma)^2\right) dx.\end{aligned}$$

Wieder ist der Integrand die Dichte einer Normalverteilung $\mathcal{N}(2\sigma, 1)$ und das Integral hat den Wert 1. Es folgt $\mathbb{E}[Z^2] = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$.

1.3

(a) Sei f die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq t] &= \int_t^{\infty} f(x) dx \leq \int_t^{\infty} \underbrace{\exp(\overbrace{s(x-t)}^{\geq 0})}_{\geq 1} f(x) dx \\ &\leq \int_t^{\infty} \exp(s(x-t)) f(x) dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \overbrace{\exp(s(x-t))}^{\geq 0} \overbrace{f(x)}^{\geq 0} dx}_{\geq 0} \\ &= \exp(-st) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) f(x) dx = \exp(-st)\mathbb{E}[\exp(sX)].\end{aligned}$$

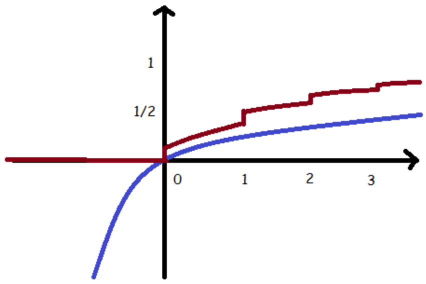
Dies zeigt die Aussage.

(b) Aus $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ folgt $sX \sim \mathcal{N}(0,s^2)$. 1.2 (c) zeigt dann $\mathbb{E}[\exp(sX)] = \exp(s^2/2)$.

(c)

1.4

(a) Sehr krude Skizze. Dichteverteilung in Rot, Graph von $x \mapsto 1 - 1/2\exp(-2x)$ in Blau.



(b) Wir betrachten

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{R^-} \underbrace{f}_{=0} d\mu + \int_{\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0} f d\mu + \int_{\mathbb{N}_0} f d\mu.$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ entspricht μ dem Lebesgue-Maß, da $\delta_k|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0} \equiv 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da $\mathbb{N}_0$ bezüglich des Lebesgue-Maßes eine Nullmenge darstellt, können wir also, um das zweite Integral zu erhalten, auch bezüglich des Lebesgue-Maßes von 0 bis ∞ über $\exp(-2x)$ integrieren. Außerdem lässt sich f auf jeder Menge der Form $\{k\}, k \in \mathbb{N}_0$ durch die konstante Funktion $\frac{1}{2e}\frac{1}{k!}$ darstellen. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f d\mu &= 0 + \int_0^\infty \exp(-2x)dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\}} f d\mu \\
&= \left[-\frac{1}{2}\exp(-2x)\right]_0^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2e}\frac{1}{k!} \underbrace{\mu(\{k\})}_{=1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2e} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!}}_{=e^1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

und damit $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.