

Übungsblatt 02

Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

17. Juni 2023

Punkte:

/ 30

2.1 Erstes Integral (II.5)

- (a) Das äquivalente System hat die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$

- (b) Ja, denn $f(x, y)$ ist stetig differenzierbar und somit stetig und lokal lipschitzstetig. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf liefert somit die Existenz einer maximalen, eindeutigen Lösung zu jedem Anfangswert.
- (c) Ja, denn $f(x, y) = (y, -\cos(x))^T$ ist linear beschränkt mit $a(t) = 1$ und $b(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\| &= \|(y, -\cos(x))^T\| \leq \|(y, 0)\| + \|(0, \cos(x))\| = |y| + |\cos(x)| \\ &\leq 1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = a(t) \cdot \|(x, y)^T\| + b(t). \end{aligned}$$

Der Satz von der linear beschränkten rechten Seite zeigt nun, dass jede maximale Lösung global, also auf ganz \mathbb{R} , existiert.

- (d) Wir berechnen zuerst den Gradienten von S :

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\langle \nabla S(x, y), f(x, y) \rangle = 2 \cdot (\cos(x) \cdot y + y \cdot (-\cos(x))) = 0$$

und da für jeden möglichen Anfangswert eine Lösung existiert handelt es sich somit um ein erstes Integral.

2.2 Mehr erste Integrale (II.7)

- (a) Es ist $E(x)$ nur von der Norm $\|x\|$ abhängig, d.h. es gilt $E(x) = \tilde{E}(\|x\|)$ für ein (differenzierbares) $\tilde{E} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Dann folgt für die k -te partielle Ableitung von E am Punkt $x \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{E}(\|x\|) = \tilde{E}'(\|x\|) \frac{\partial}{\partial x_k} \|x\| = \tilde{E}'(\|x\|) \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$$

$$= \tilde{E}'(\|x\|) \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i}} \cdot 2x_k = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} \cdot x_k$$

und somit $\nabla E(x) = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} x$. Dies zeigt

$$\langle \nabla E(x), \nu(x) \rangle = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} \langle x, \nu(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach Voraussetzung. Dies zeigt nach Satz 5.4, dass E ein erstes Integral der DGL ist.

- (b) Die Phasenkurven des Systems verlaufen innerhalb der Niveaumengen *aller* Funktionen E , die die Bedingung aus (a) erfüllen, insbesondere den kreislinienförmigen Niveaumengen von $E(x) = \|x\|$. Man beachte, dass die Phasenkurven selbst nicht notwendigerweise Kreislinien sein müssen, nur Teilmengen solcher. Da die Niveaumengen jeder anderen Funktion E mit Bedingungen aus (a) stets nur Kreise (also echte Obermengen der Kreislinien, die ja minimal dicke Kreise sind) sein können, ist keine genauere Bestimmung der Phasenkurven durch die Aussage (a) möglich.

2.3 Keine ersten Integrale (III.10)

Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung

$$y'(t) = \frac{6t}{1+3t^2} \cdot y \quad y(0) = 2$$

Diese ist separabel, d.h. für eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{z} dz &= \int_0^t \frac{6\tau}{1+3\tau^2} d\tau \\ \Leftrightarrow \ln|\varphi(t)| - \ln(2) &= \ln|1+3t^2| - \ln|1+3 \cdot 0^2| \\ \Leftrightarrow \varphi(t) &= 2 \cdot (1+3t^2) \end{aligned}$$

Da unser System skalar ist, bildet die Fundamentallösung $\varphi(t) = 1+3t^2$ bereits ein Fundamentalsystem (man wähle hierzu als Startwert nicht 2, sondern ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ und erhält $\lambda(1+3t^2)$ als Lösungsraum). Die Fundamentalmatrix ist damit eine 1×1 -Matrix der Form $X(t) = (1+3t^2)$ und die Übergangsmatrix ist $X(t, \tau) = X(t) \cdot X(\tau)^{-1} = \left(\frac{1+3t^2}{1+3\tau^2}\right)$. Dies erlaubt uns eine Bestimmung der Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, 2) &= X(t) \left(X(0)^{-1} \cdot 2 + \int_0^t X(s)^{-1} \cdot 5 ds \right) \\ &= (1+3t^2) \left(\frac{2}{1+3 \cdot 0^2} + 5 \cdot \int_0^t \frac{1}{1+3s^2} ds \right) \quad \text{Mit } \left(\frac{1}{1+(\sqrt{3}s)^2} \right) \cdot \sqrt{3} = \arctan(\sqrt{3}s)' \\ &= (1+3t^2) \left(2 + 5 \cdot \int_0^t \frac{1}{1+3s^2} ds \right) \\ &= (1+3t^2) \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \left[\arctan(\sqrt{3}s) \right]_0^t \right) \quad \text{Mit } \arctan(0) = 0 \\ &= (1+3t^2) \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) \right) \end{aligned}$$