Übungsblatt 11
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

2. Juli 2023

11.1 Zentralübung

(i) Die gemeinsame Dichte der n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ ist

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)$$

Für $(x_1, \dots, x_n) \in (0,1)^n = \mathcal{X}$ ist dann die Likelihood-Funktion

$$f(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

und ihre Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, x_1, \dots, x_n) = -\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \frac{1}{\theta^{n+2}} \left(n\theta + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \right)$$

Diese hat die Nullstelle $n\theta = -\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$, also ist der ML-Schätzer gleich

$$\hat{\theta}^{ML}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1/x_i)$$

(ii) Der Erwartungswert von X_1 beträgt

$$\int_0^1 x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \, dx = \frac{1}{\theta} \int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}} \, dx = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1+\theta}{\theta} x^{\frac{\theta}{1+\theta}} \right]_0^1 = \frac{1}{1+\theta}$$

und die Gleichsetzung $\frac{1}{1+\theta} = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ liefert den Schätzer

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1$$

(iii) Der ML-Schätzer liefert hier

$$\hat{\theta}^{ML}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{0.1 \cdot 0.22 \cdot 0.54 \cdot 0.36} \right) \approx 1.36$$

und aus dem Momentenschätzer erhält man

$$\hat{\theta}(0.1, 0.22, 0.54, 0.36) = \frac{4}{0.1 + 0.22 + 0.54 + 0.36} - 1 = \frac{4}{1.22} - 1 \approx 2.27$$

11.2

Wir setzen das empirische erste und zweite Moment mit dem ersten und zweiten Moment der Log-Normalverteilung gleich (man beachte, dass n in der Aufgabenstellung doppelt verwendet wurde, als Anzahl der Y_i und zur Indizierung der Momente. Wir übernehmen nur die erste Verwendung):

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Leftrightarrow \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{I}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \exp\big(2\mu + 2\sigma^2\big) \Leftrightarrow 2\mu + 2\sigma^2 = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \tag{II}$$

$(II) - 2(I)$ liefert

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \log\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = \log\left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\right)\\ &= \log(\hat{\mu}_2) - \log(\hat{\mu}_1^2) = \log\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1^2}\right)\end{aligned}$$

und damit einen Schätzer für σ^2; und aus $2(I) - 4(II)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu &= \log\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) - \log\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^4\right) = 2\log\left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}\right)\\ &= \log(\hat{\mu}_1^2) - \log(\hat{\mu}_2^4) = \log\left(\frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2^4}\right) = 2\log\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2^2}\right)\end{aligned}$$

11.3

(i) Wir bestimmen die Ableitung durch die Produktregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}F_x(\lambda) &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x}\frac{k\cdot\lambda^{k-1}}{k!} + (-1)\exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^{k-1}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\lambda^k}{k!} - \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^{k-1}}{k!}\\ &= -\underbrace{e^{-\lambda}}_{>0}\underbrace{\frac{\lambda^x}{x!}}_{\geq 0} < 0\end{aligned}$$

und somit ist $F_x(\lambda)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ streng monoton steigend auf $(0, \infty)$. Weiterhin halten wir fest, dass $F_x(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda\{X \leq x\}$ für eine zum Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable X gilt.

(ii) Wir wollen Satz 4.16 verwenden. Dann gilt:

$$\begin{aligned}n_r &= \min\left(n_0 \in \mathbb{N} \mid \sup_{\lambda\leq\lambda_0} \mathbb{P}_\lambda(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq n_0\}) \leq \alpha\right)\\ &= \min\left(n_0 \in \mathbb{N} \mid \sup_{\lambda\leq\lambda_0} 1 - \mathbb{P}_\lambda(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq n_0 + 1\}) \leq \alpha\right)\end{aligned}$$

$$= \min\left(n_0 \in \mathbb{N} \mid \sup_{\lambda \leq \lambda_0} 1 - F_{n_0+1}(\lambda) \leq \alpha\right) \quad \mid \text{mit } F_{n_0+1} \text{ s.m.f.}$$
$$= \min(n_0 \in \mathbb{N} \mid 1 - F_{n_0+1}(\lambda_0) \leq \alpha) = \min(n_0 \in \mathbb{N} \mid F_{n_0+1}(\lambda_0) \geq 0.95).$$

Da $F_{n_0+1}(\lambda_0)$ in n_0 streng monoton steigend ist, müssen wir lediglich eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $F_{r+1}(\lambda_0) = 0.95$ bestimmen und aufrunden, um $n_r = \lceil r \rceil$ zu erhalten. Dies ist allerdings nur numerisch möglich.

Für dieses n_r setzen wir dann $T = \mathbb{1}_{[n_r,\infty]}$ als unseren Test. Nach Satz 4.16 hat er Niveau α.

(iii) Für $\lambda_0 = 10$ bestimmen wir numerisch $F_{r+1}(10) = 0.95 \Leftrightarrow r \approx 13.95$, also wählen wir $n_r = 14$ und erhalten einen Verwerfungsbereich von $[0, 13]$.

Für $\lambda_0 = 1$ erhalten wir analog $F_{r+1}(1) = 0.95 \Leftrightarrow x \approx 1.35$, also $n_r = 2$ und damit den Verwerfungsbereich $\{0, 1\}$.

11.4