Übungsblatt 02
Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

20. Juni 2023

Aufgabe	1	2	3
Punkte	10/10	10/10	9/10

MG

Punkte: 29 / 30

sehr starke Abgabe !! ◡

2.1 Erstes Integral (II.5)

2/2 (a) Das äquivalente System hat die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$ ✓

← Hier schadet es nicht noch eine kleine Extraerklärung hinzuzufügen

2/2 (b) Ja, den $f(x, y)$ ist stetig differenzierbar und somit stetig und lokal lipschitzstetig. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf liefert somit die Existenz einer maximalen, eindeutigen Lösung zu jedem Anfangswert. ✓

3/3 (c) Ja, denn $f(x, y) = (y, -\cos(x))^T$ ist linear beschränkt mit $a(t) = 1$ und $b(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \|f(x,y)\| &= \|(y, -\cos(x))^T\| \leq \|(y,0)\| + \|(0, \cos(x))\| = |y| + |\cos(x)| \\ &\leq 1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = a(t) \cdot \|(x,y)^T\| + b(t). \end{aligned}$$ ✓

Der Satz von der linear beschränkten rechten Seite zeigt nun, dass jede maximale Lösung global, also auf ganz $\mathbb{R}$, existiert. ✓

3/3 (d) Wir berechnen zuerst den Gradienten von S:

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ y \end{pmatrix}.$$ ✓

Dann folgt

$$\langle \nabla S(x,y), f(x,y) \rangle = 2 \cdot (\cos(x) \cdot y + y \cdot (-\cos(x))) = 0$$ ✓

und da für jeden möglichen Anfangswert eine Lösung existiert handelt es sich somit um ein erstes Integral.

2.2 Mehr erste Integrale (II.7)

7/7 (a) Es ist $E(x)$ nur von der Norm $\|x\|$ abhängig, d.h. es gilt $E(x) = \tilde{E}(\|x\|)$ für ein (differenzierbares) $\tilde{E} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Dann folgt für die k-te partielle Ableitung von E am Punkt $x \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{E}(\|x\|) = \tilde{E}'(\|x\|) \frac{\partial}{\partial x_k} \|x\| = \tilde{E}'(\|x\|) \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i}$$ ✓

$$= \tilde{E}'(\|x\|) \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i}} \cdot 2x_k = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} \cdot x_k$$ ✓

und somit $\nabla E(x) = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} x$. Dies zeigt

$$\langle \nabla E(x), \nu(x) \rangle = \frac{\tilde{E}'(\|x\|)}{\|x\|} \langle x, \nu(x) \rangle = 0$$ ✓

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach Voraussetzung. Dies zeigt nach Satz 5.4, dass E ein erstes Integral der DGL ist.

Da wir hier im allgemeinen Dimensionen > 2 haben, sollte man eher von Sphären als von Kreisen reden

3/3 (b) Die Phasenkurven des Systems verlaufen innerhalb der Niveaumengen *aller* Funktionen E, die die Bedingung aus (a) erfüllen, insbesondere den ~~kreislinien~~förmigen Niveaumengen von ✓ $E(x) = \|x\|$. Man beachte, dass die Phasenkurven selbst nicht notwendigerweise Kreislinien sein müssen, nur Teilmengen solcher. Da die Niveaumengen jeder anderen Funktion E mit Bedingungen aus (a) stets nur Kreisringe (also echte Obermengen der Kreislinien, die ja minimal dicke Kreisringe sind) sein können, ist keine genauere Bestimmung der Phasenkurven durch die Aussage (a) möglich. ✓

9/10

2.3 Keine ersten Integrale (III.10)

Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung

$$y'(t) = \frac{6t}{1+3t^2} \cdot y \qquad y(0) = 2$$

Diese ist separabel, d.h. für eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_2^{\varphi(t)} \frac{1}{z} dz = \int_0^t \frac{6\tau}{1+3\tau^2} d\tau$$

hier sollte ein \cdot rein :)

$$\Leftrightarrow \ \ln|\varphi(t)| - |\ln(2)| = \ln|1+3t^2| - \ln|1+30^2|$$

$$\Leftrightarrow \ \varphi(t) = 2 \cdot (1+3t^2)$$ ✓

Da unser System skalar ist, bildet die Fundamentallösung $\varphi(t) = 1 + 3t^2$ bereits ein Fundamentalsystem (man wähle hierzu als Startwert nicht 2, sondern ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ und erhält $\lambda(1+3t^2)$ als Lösungsraum). Die Fundamentalmatrix ist damit eine 1×1-Matrix der Form $X(t) = (1+3t^2)$ und die Übergangsmatrix ist $X(t,\tau) = X(t) \cdot X(\tau)^{-1} = \left(\frac{1+3t^2}{1+3\tau^2}\right)$. Dies erlaubt uns eine Bestimmung der Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
\varphi(t,0,2) &= X(t)\left(X(0)^{-1} \cdot 2 + \int_0^t X(s)^{-1} \cdot 5 ds\right) \\
&= (1+3t^2)\left(\frac{2}{1+30^2} + 5 \cdot \int_0^t \frac{1}{1+3s^2} ds\right) \qquad \text{Mit } \left(\frac{1}{1+(\sqrt{3}s)^2}\right) \cdot \sqrt{3} = \arctan(\sqrt{3}t)' \\
&= (1+3t^2)\left(2 + 5 \cdot \int_0^t \frac{1}{1+3s^2} ds\right) \\
&= (1+3t^2)\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \left[\arctan(\sqrt{3}s)\right]_0^t\right) \qquad \text{Mit } \arctan(0) = 0 \\
&= (1+3t^2)\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t)\right)
\end{aligned}$$

gleiches Problem wie oben

✓ ✓

matimales Existenzintervall fehlt => -1P