Übungsblatt 08
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

21. Juni 2023

8.1 Zentralübung

(i) Es ist (X_i) gleichgradig integrierbar, d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0.$$

Insbesondere existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} < 1$ für alle $i \in I$ und damit ist

$$\mathbb{E}[|X_i|] = \int |X_i| d\mathbb{P} = \int_{\{|X_i|\geq n\}} |X_i| d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|<n\}} |X_i| d\mathbb{P} < 1 + n$$

für alle $i \in I$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert folglich ein $r > 0$ mit $\frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] < \varepsilon$ für alle $i \in I$ und damit

$$\mathbb{P}(X_i \notin \overline{K_r(0)}) = \mathbb{P}(|X_i| > r) \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}[|X_i|] < \varepsilon$$

und damit $\mathbb{P}(X_i \in \overline{K_r(0)}) \geq 1 - \varepsilon$. Da $\overline{K_r(0)}$ kompakt ist, zeigt dies die Straffheit.

(ii) Betrachte die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0,1/n]}$ (wobei $\mathbb{P}$ der uniformen Verteilung auf $[0,1]$ entspreche). Dann ist X_n straff, denn für die kompakte Menge $[0,1]$ gilt $\mathbb{P}(X_n \in [0,1]) = 1 \geq 1 - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Allerdings ist (X_n) nicht uniform integrierbar, denn für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ist $\int_{|X_N|\geq N} |X_N| d\mathbb{P} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|X_n|\geq N} |X_n| d\mathbb{P} \geq 1$. Somit kann der Limes $n \to \infty$ auch nur größer oder gleich 1 sein und es (X_n) ist nicht uniform integrierbar.

8.2

(b) wichtig

8.3

(d) ist äquivalent, aber muss nicht gezeigt werden

8.4

(i) Die Verteilungsfunktionen zu X bzw. X_n sind

$$F(k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \qquad F_n(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Wir wollen zeigen, dass an allen Stetigkeitsstellen (in unserem Fall: in allen natürlichen Zahlen k) $F_n(k) \to F(k)$ gilt. Sei daher $k \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \left(\prod_{m=n-k+1}^{n}\underbrace{\frac{m}{n}}_{\to 1}\right)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\to\exp(-\lambda)}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) = F(k)
\end{aligned}$$

und dies zeigt $X_n \xrightarrow{d} X$. (Man beachte insbesondere, dass das Produkt stets eine feste Anzahl an Faktoren hat, die einzeln gegen 1 konvergieren, wenn n und damit auch m gegen ∞ strebt.)

Alternativ folgt dies bereits aus 3.21, aber dann bliebe wenig zu tun.

(ii)

(b) Was haben wir für Aussagen erstmal über schwache Konvergenz. Wie jetzt stochastische Konvergenz? Deterministisches e hoch lambda ausschlaggebend! 3.20