

# Übungsblatt 10

## Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

23. Juni 2023

### 10.1 Zentralübung

Die Parameter der geometrischen Verteilung sind  $\theta \in \Theta = (0, 1)$ , der Stichprobenraum ist  $\mathcal{X} = \mathbb{N}^n$ . Aus der Definition der geometrischen Verteilung bestimmen wir die Likelihood-Funktion und direkt daraus folgend die Log-Likelihood-Funktion:

$$L : \Theta \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], (\theta, x) \mapsto \prod_{k=1}^n (1 - \theta)^{x_k - 1} \theta$$
$$\mathcal{L} : \Theta \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], (\theta, x) \mapsto \log \left( \prod_{k=1}^n (1 - \theta)^{x_k - 1} \theta \right) = n \cdot \log \theta + \log(1 - \theta) \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - 1)$$

Wir bestimmen ihr Maximum durch die Nullstellen der Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}(\theta, x) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{1 - \theta} \sum_{k=1}^n (x_k - 1) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{1 - \theta} \left( -n + \sum_{k=1}^n x_k \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow n \cdot (1 - \theta) = \theta \sum_{k=1}^n x_k - n\theta \Leftrightarrow n = \theta \sum_{k=1}^n x_k \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k} = \frac{1}{\bar{x}}$$

wobei  $\bar{x}$  den Durchschnitt von  $x_1, \dots, x_n$  bezeichne. Der (in diesem Fall aufgrund des an einer eindeutigen Stelle angenommen Maximums eindeutige) ML-Schätzer ist daher

$$\hat{\theta}^{ML} : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\Theta}, x \mapsto \frac{1}{\bar{x}}.$$

### 10.2

(i) Es ist

$$\mathbb{E}_{\theta}[X] = \frac{2}{3}\theta \cdot 0 + \frac{1}{3}\theta \cdot 1 + \frac{2}{3}(1 - \theta) \cdot 2 + \frac{1}{3}(1 - \theta) \cdot 3 = 0 + \frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\theta + 1 - \theta = \frac{7}{3} - 2\theta.$$

(ii) Uns ist der Erwartungswert (in Abhängigkeit von  $\theta$ ) bereits bekannt. Wir können nun für eine Menge an Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  die unabhängig identisch wie  $X$  verteilt sind, den Momentenschätzer dieser Variablen unter Rückgriff auf den Durchschnitt  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  berechnen als

$$\bar{X} = \mathbb{E}_{\theta}[X] = \frac{7}{3} - 2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{7 - 3\bar{X}}{6}.$$

Insbesondere fällt auf, dass dieser für extreme Durchschnitte (z.B.  $\bar{X} = 3$ ) auch Werte außerhalb von  $\Theta = [0, 1]$  annehmen kann.

- (iii) Der Durchschnitt der Beobachtungen ist  $\bar{X} = \frac{1}{10} \cdot 15 = \frac{3}{2}$ . Damit ist der Wert des Momentenschätzers gleich  $\frac{7-\frac{9}{2}}{6} = \frac{5}{12}$ .

Um den Wert des ML-Schätzers für diese Beobachtungen zu bestimmen, müssen wir nicht die gesamte Funktion  $\hat{\theta}^{ML}$  bestimmen, sondern lediglich die Wahrscheinlichkeit genau dieses Ereignisses bestimmen:

$$\mathbb{P}(3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\theta\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}(1-\theta)\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}(1-\theta)\right)^2 = \frac{32\theta^5(1-\theta^5)}{59049}.$$

Diese Funktion wird am Maximum von  $\theta^5(1-\theta)^5$  maximiert, also bei  $\theta = \frac{1}{2}$ . Damit ist dies der Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers.

Dies ist auch insofern plausibel, dass jedes Teilereignis 0,1 genauso oft auftritt wie das 'symmetrische' Ereignis 2,3 und insofern die Wahrscheinlichkeiten (vermutlich) gleich hoch sein sollten. Der Momentenschätzer, der nur den Durchschnitt 'sieht', kann dies allerdings nicht erkennen und tendiert daher zu niedrigerem  $\theta$ .

## 10.3

## 10.4

- (i) Wir wollen das Maximum von

$$f(x, \nu) = \nu x_0^\nu x^{-(\nu+1)} \mathbb{1}_{x \geq x_0} = \nu (x_0 x^{-1})^\nu x^{-1} \mathbb{1}_{x \geq x_0}$$

für festes  $x$ , aber variables  $\nu$  bestimmen. Sei dazu  $x \geq x_0$  beliebig, aber fest. Wir leiten nach  $\nu$  ab:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} f(x, \nu) = 1 \cdot (x_0 x^{-1})^\nu x^{-1} + \nu \ln(x_0 x^{-1}) (x_0 x^{-1})^\nu x^{-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} f(x, \nu) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_0 x^{-1})^\nu x^{-1} &= -\nu \ln(x_0 x^{-1}) (x_0 x^{-1})^\nu x^{-1} \\ \Leftrightarrow 1 &= -\nu \ln(x_0 x^{-1}) \\ \Leftrightarrow \nu &= \frac{1}{\ln(x/x_0)} \end{aligned}$$

und damit, da  $\nu \in (1, \infty)$ :

$$\hat{\theta}^{ML}(x) : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty), x \mapsto \max\left(1, \frac{1}{\ln(x) - \ln(x_0)}\right)$$

- (ii) Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\nu \in \mathbb{R}$  ist die Likelihood-Funktion

$$f(x, \nu) = \begin{cases} 1 & \forall 1 \leq k \leq n \quad x_k \in [\nu, \nu + 1] \\ 0 & \exists 1 \leq k \leq n \quad x_k \notin [\nu, \nu + 1] \end{cases}$$

Setze  $x_{(0)} = \min\{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$  und  $x_{(n)} = \max\{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ .

Falls  $x_{(n)} - x_{(0)} > 1$ , so existiert kein  $\nu$  für das  $f(x, \nu) = 1$  ist. Da wir aber annehmen, dass unsere Datenpunkte wie angegeben verteilt sind, kann dies nicht auftreten.

Betrachten wir nun die Funktion

$$\hat{\theta}^{ML} : \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n \mid x_{(n)} - x_{(0)} \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_{(0)}.$$

Sicher gilt  $x_{(0)} \in [x_{(0)}, x_{(0)} + 1]$  und ebenso  $x_{(n)} \in [x_{(0)}, x_{(0)} + 1]$ , da  $\max\{x_k\} - x_{(0)} \leq 1$ . Damit gilt  $x_k \in [x_{(0)}, x_{(0)} + 1]$  für alle  $k$ , also ist  $f(x, \hat{\theta}^{ML}L(x)) = 1$ , was dem Supremum von  $f$  entspricht (da  $f$  ja nur zwei Werte annimmt).

Betrachten wir aber analog  $\hat{\Theta}^{ML_2}(x) = x_{(n)} - 1$ , so gilt  $x_{(0)} \in [x_{(n)} - 1, x_{(n)}]$  aufgrund der Abstandbedingung und  $x_{(n)} \in [x_{(n)} - 1, x_{(n)}]$ . Wieder folgt daher  $f(x, \hat{\Theta}^{ML_2}(x)) = 1$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  und auch  $\hat{\Theta}^{ML_2}(x)$  ist ein ML-Schätzer.

Da insbesondere  $x$  mit  $x_{(0)} - x_{(n)} < 1$  existieren, sind diese beiden Schätzer außerdem unterschiedlich und "der" ML-Schätzer somit nicht eindeutig festgelegt. Man sollte also stets von "einem", nicht "dem", ML-Schätzer sprechen.