Übungsblatt 01
Repetitorium Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

28. April 2023

Punkte: $\boxed{\quad / \ 30}$

1.1 Trennung der Variablen

Es sind $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ sowie $h : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y^2+1}{2y}$ stetige Funktionen auf offenen, nicht-leeren reellen Intervallen. Damit handelt es sich bei

$$y'(x) = \frac{y^2+1}{2xy} = g(x) \cdot h(y) \qquad y(x_0) = y_0$$

um eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, die demnach eine eindeutige Lösung besitzt. Um diese zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Integrale

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{2s}{s^2+1} ds &= \left[\ln(|s^2+1|)\right]_{y_0}^{y(x)} && \text{da } \frac{d}{ds} s^2 + 1 = 2s \\ &= \ln(|y(x)^2+1|) - \ln(|y_0^2+1|) \\ &= \ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tau} d\tau = \ln(|x|) - \ln(|x_0|) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

wobei wir die Beträge weglassen können, da $y(x)^2 + 1$ sowie $y_0^2 + 1$ sicher positiv und x, x_0 beide negativ sind. Gleichsetzen und Auflösen nach $y(x)$ liefert:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1}\right) &= \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{y(x)^2+1}{y_0^2+1} &= \frac{x}{x_0} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) - 1}, \end{aligned}$$

wobei wir aufgrund von $y_0 < 0$ den negativen Ast wählen. Diese Lösung existiert, solange das Argument der Wurzel nicht-negativ bleibt, also falls

$$\frac{x}{x_0}(y_0^2+1) \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{x_0}{y_0^2+1}.$$

Das maximale Existenzintervall ist also $\left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right]$ und

$$y : \left(-\infty, \frac{x_0}{y_0^2+1}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{\frac{x}{x_0}(y_0^2+1)-1}$$

ist die maximale eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

1.2 Beweisen und Widerlegen

i) Diese Aussage ist falsch, nach Picard-Lindelöf existiert zwar eine (eindeutige) maximale Lösung, diese muss aber nicht notwendigerweise auf ganz $(-1,1)$ definiert sein. Betrachte dazu das folgende Anfangswertproblem:

$$x' = x^2 \qquad x(0) = x_0$$

f ist hier stetig und stetig differenzierbar, damit lokal lipschitzstetig, und genügt damit den Anforderungen. Separation der Variablen liefert hier die Lösung $\varphi(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$. Diese ist insbesondere an der Stelle $\frac{1}{x_0}$ nicht definiert, wählen wir also beispielsweise $x_0 = 5$ so existiert φ nur auf dem Teilintervall $(-1, 1/5)$, nicht auf ganz $(-1,1)$.

ii) Die Aussage ist korrekt. Die Funktion $f(t,x) = \exp(15t)\cos(x(t)^7)$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert (und dort stetig und bezüglich x lokal lipschitzstetig). Wegen $|cos(x)| \leq 1$ ist f außerdem linear beschränkt, d.h. $|f(t,x)| \leq \exp(15t)$ (man wähle in Satz 3.9 $a(t) = 0$ und $b(t) = \exp(15t)$). Satz 3.9 zeigt, dass dann jede Lösung der DGL auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.