

Übungsblatt 01

Repetitorium zur Funktionentheorie

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

1. Mai 2023

Punkte:

--

 / 30

1.1 Komplexe Identitäten

Es ist

$$\begin{aligned}|z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) \\&= z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - w\bar{z} \\&= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) \\&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\bar{w}).\end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Variante des Cosinussatzes im Dreieck, das von $0, z, w$ gebildet wird, wobei

$$\begin{aligned}\Re(z\bar{w}) &= \Re(|z| \exp(i \arg(z)) \cdot \overline{|w| \exp(i \arg(w))}) \\&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\exp(i \arg(z)) \cdot \exp(-i \arg(w))) \\&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\exp(i(\arg(z) - \arg(w)))) \\&= |z| \cdot |w| \cdot \Re(\cos(\arg(z) - \arg(w)) + i \sin(\arg(z) - \arg(w))) \\&= |z| \cdot |w| \cdot \cos(\arg(z) - \arg(w))\end{aligned}$$

gilt. Falls wir also die Länge der Seiten des von $0, z, w$ gebildeten Dreiecks $[0, w], [0, z], [z, w]$ mit a, b, c bezeichnen und den Winkel zwischen $[0, z]$ und $[0, w]$ mit γ , so folgt der Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}|z - w|^2 + |z + w|^2 &= |z - w|^2 + |z - (-w)|^2 \\&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |z|^2 + |-w|^2 - 2\Re(z\overline{-w}) \\&= |z|^2 + |w|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\bar{w}) \\&= 2|z|^2 + 2|w|^2.\end{aligned}$$

Dies ist die Parallelogrammidentität, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen. Das Parallelogramm wird hierbei von den Punkten $0, z, w, z + w$ gebildet.

1.2

- (i) Da $z \mapsto z$ und $z \mapsto \bar{z}$ stetig sind, ist auch die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \sqrt{z \cdot \bar{z}} + 1/2(z + \bar{z}) = |z| + \Re(z)$ stetig. Dann ist das Urbild der offenen Menge $(1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ unter f offen, also $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) > 1\}$ offen. Dann ist ihr Komplement $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \leq 1\}$ also abgeschlossen in \mathbb{C} .

A ist nicht kompakt, denn für alle $a \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt $|a| - \Re(a) = 0 \leq 1$, d.h. die gesamte negative reelle Achse ist in A enthalten. Diese ist aber nicht beschränkt und damit nicht kompakt, womit auch A selbst nicht kompakt sein kann.

- (ii) Das Wurzelkriterium liefert uns

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{5n}}.$$

Durch Indexverschiebung erhalten wir daraus

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^5}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{e^5},$$

also den Konvergenzradius $R = e^5$.