Übungsblatt 06
Stochastik 2

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

31. Mai 2023

6.1 Zentralübung

(i) Es ist $p_{X|X}(x|x) = 1$, also $\mathbb{E}[X|X = x] = x$ und damit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot 1_{X(\Omega)}$. Es folgt $\mathbb{E}[X|X](\omega) = g(X(\omega)) = X(\omega)$ und damit $\mathbb{E}[X|X] = X$.

(ii) Es ist $p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x)$ aufgrund der Unabhängigkeit. Somit ist $\mathbb{E}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X]$ sowie $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}, y \mapsto \mathbb{E}[X]$ konstant. Es folgt $\mathbb{E}[X|Y](\omega) = g(Y(\omega)) = \mathbb{E}[X]$ und damit $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.

(iii) Aus (i) folgt $\mathbb{E}[X + Y|X + Y] = X + Y$. Weiterhin ist, da X und Y gleichverteilt sind, $\mathbb{E}[X|X+Y] = \mathbb{E}[Y|X+Y]$. Zusammen mit der Linearität des (bedingten) Erwartungswertes liefert dies

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + Y|X + Y] &= \mathbb{E}[X|X + Y] + \mathbb{E}[Y|X + Y] = 2 \cdot \mathbb{E}[X|X + Y] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[X|X + Y] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X + Y|X + Y] = \frac{1}{2}(X + Y)\end{aligned}$$

6.2

6.3

(i) Wir setzen $\Omega = \{0, 1\}^3$ sowie

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x + y + z \tag{6.1}$$

$$G : \Omega \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x + \frac{y + z}{2} \tag{6.2}$$

d.h. die erste Komponente von $\omega \in \Omega$ beschreibt, ob die 1-Euro-Münze auf Zahl gefallen ist und die zweite und dritte Komponente betrachtet analog die 50-Cent-Münzen. Da alle acht Elementarereignisse in Ω gleich wahrscheinlich sind, gilt für die Verteilungen:

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= \frac{1}{8} \qquad A_0 = \{(0, 0, 0)\} \\
P(Z = 1) &= \frac{3}{8} \qquad A_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\
P(Z = 2) &= \frac{3}{8} \qquad A_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \\
P(Z = 3) &= \frac{1}{8} \qquad A_3 = \{(1, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

sowie

$$P(G = 0) = \frac{1}{8} \qquad B_0 = \{(0, 0, 0)\}$$

$$
\begin{aligned}
P(G=0.5) &= \frac{2}{8} & B_{0.5} &= \{(0,1,0),(0,0,1)\} \\
P(G=1) &= \frac{2}{8} & B_{1} &= \{(1,0,0),(0,1,1)\} \\
P(G=1.5) &= \frac{2}{8} & B_{1.5} &= \{(1,1,0),(1,0,1)\} \\
P(G=2) &= \frac{1}{8} & B_{2} &= \{(1,1,1)\}
\end{aligned}
$$

und für den Erwartungswert folgt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

(ii) $Z = 2$ wird genau für die Elementarereignisse in der Menge A_2 realisiert. Wir betrachten also jeweils die Schnittmenge der B-Mengen mit A_2:

$$
\begin{aligned}
P(G=0|Z=2) &= \frac{0}{3} & B_0 \cap A_2 &= \{\} \\
P(G=0.5|Z=2) &= \frac{0}{3} & B_{0.5} \cap A_2 &= \{\} \\
P(G=1|Z=2) &= \frac{1}{3} & B_1 \cap A_2 &= \{(0,1,1)\} \\
P(G=1.5|Z=2) &= \frac{2}{3} & B_{1.5} \cap A_2 &= \{(1,1,0),(1,0,1)\} \\
P(G=2|Z=2) &= \frac{0}{3} & B_2 \cap A_2 &= \{\}
\end{aligned}
$$

Der zugehörige Erwartungswert ist damit $\mathbb{E}[G|Z=2] = 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(iii) Es ist $A_0 = \{(0,0,0)\}$. Dieses Ereignis ist nur in B_0 enthalten, womit $\mathbb{E}[G|Z=0] = 0$ folgt. Ebenfalls gilt $A_3 = \{(1,1,1)\}$. Auch hier liegt nur ein einziges Ereignis vor, dass nur in B_2 enthalten ist. Somit folgt $\mathbb{E}[G|Z=3] = 2$. Analog zur (ii) lässt sich $\mathbb{E}[G|Z=1] = \frac{2}{3}$ nachrechnen. Damit gilt für alle möglichen Realisierungen von Z tatsächlich $\mathbb{E}[G|Z=z] = \frac{2}{3}z$, also $\mathbb{E}[G|Z] = \frac{2}{3}Z$.

(iv) Die Tower-Rule besagt nun

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}|\mathbb{Z}] = \mathbb{E}[\frac{2}{3}Z] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[Z] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1.$$

6.4