Übungsblatt 02
Repetitorium zu Differenzialgleichungen

Abgabe von: **Linus Mußmächer**

1. Juni 2023

Punkte: | / 30

2.1 Erstes Integral

(a) Das äquivalente System hat die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$

(b) Ja, den $f(x, y)$ ist stetig differenzierbar und somit stetig und lokal lipschitzstetig. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf liefert somit die Existenz einer maximalen, eindeutigen Lösung zu jedem Anfangswert.

(c) Ja, denn $f(x, y) = (y, -\cos(x))^T$ ist linear beschränkt mit $a(t) = 1$ und $b(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\| &= \|(y, -\cos(x))^T\| \leq \|(y, 0)\| + \|(0, \cos(x))\| = |y| + |\cos(x)| \\ &\leq 1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = a(t) \cdot \|(x, y)^T\| + b(t). \end{aligned}$$

Der Satz von der linear beschränkten rechten Seite zeigt nun, dass jede maximale Lösung global, also auf ganz $\mathbb{R}$, existiert.

(d) Wir berechnen zuerst den Gradienten von S:

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\langle \nabla S(x, y), f(x, y) \rangle = 2 \cdot (\cos(x) \cdot y + y \cdot (-\cos(x))) = 0$$

und da für jeden möglichen Anfangswert eine Lösung existiert handelt es sich somit um ein erstes Integral.