Stochastic-Process-Exercise

dashun gan

October 2024

第二章

1

重复地抛掷一枚均匀的硬币，抛掷结果为 $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$，它们取值为 0 或 1 的概率均为 1/2，用 $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ （$n \geq 1$）表示第 $(n-1)$ 次和第 n 次抛掷出的结果中 1 的个数。X_n 是一个马尔可夫链吗?

2

小王家每天早晨都会收到报纸并且看完之后将它们堆放起来。每天傍晚，有人把所有堆起来的报纸拿走放到回收箱的概率为 1/3。另外，如果堆起来的报纸至少有 5 张的话，小王将以概率 1 把报纸放到回收箱中，考虑晚上堆起来的报纸数。

求相应的状态空间和转移概率矩阵。

3

五个白球和五个黑球分散在两个罐子中，其中每个罐子中都有五个球。每一次我们各从两个罐子中随机抽取一个球并交换它们。用 X_n 表示在时刻 n 左边罐子中白球的个数。

求 X_n 的转移概率及对应的转移概率矩阵。

5

五个白球和五个黑球分散在两个罐子中，其中每个罐子中都有五个球。每一次我们各从两个罐子中随机抽取一个球并交换它们。用 X_n 表示在时刻 n 左边罐子中的白球的个数。

求 X_n 的转移概率及对应的转移概率矩阵。

8

一个出租车司机在机场 A 和宾馆 B、宾馆 C 之间按照如下方式行车：如果他在机场，那么下一时刻他将以等概率到达两个宾馆中的任意一个；如果他在其中一个宾馆，那么下一时刻他以概率 3/4 返回机场，以概率 1/4 开往另一个宾馆。

假设时刻 0 司机在机场，分别求出时刻 2 司机在这三个可能地点的概率以及时刻 3 他在宾馆 B 的概率。

12

给出下列马尔可夫链的平稳分布，其转移矩阵为：

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

13

考虑状态空间为 $S = \{0, 1, \ldots, 5\}$ 上的一个马尔可夫链，其转移概率矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. 互通类有哪些?
2. 常返态有哪些?
3. 非常返态又有哪些?

15

一个大学提供三种类型的健康计划：A、B 和 C。经验显示，人们依照下面的转移概率矩阵改变健康计划：

$$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

在 2020 年，选择这三种计划的人员占的比例分别是 30%、25% 和 45%。

1. 2021 年选择这三种计划的人员占的比例分别是多少?
2. 从长远来看，选择这三种计划的人员占的比例分别是多少?

第四章习题

1

假设维修一台机器的时间可用一个服从均值为 2 的指数分布的随机变量来描述，请问：

1. 维修机器花费的时间在 2 小时以上的概率是多少？
2. 在已知维修机器要花费 3 小时以上的条件下，花费的时间超过 5 小时的概率是多少？

2

一台收音机的寿命服从均值为 5 年的指数分布，如果购买一部已经使用了 7 年的收音机，那么它还能继续工作 3 年的概率是多少？

4

A 和 B 同时进入一家美容院，A 要修指甲，而 B 要理发。假定修指甲（理发）的时间服从均值为 20（30）分钟的指数分布，请问：

1. A 先修完指甲的概率是多少？
2. 直到 A 和 B 都完成要花费的时间的期望是多少？

15

假定某品牌的灯泡次品率是 1%。在装有 25 个灯泡的产品中，运用泊松分布来近似计算最多有一个次品的概率。

16

假定 $N(t)$ 是速率为 3 的泊松过程，令 T_n 表示第 n 个到达的时刻，求：

1. $\mathbb{E}[T_{12}]$；
2. $\mathbb{E}[T_{12} \mid N(2) = 5]$；
3. $\mathbb{E}[N(5) \mid N(2) = 5]$。

18

假设某接听呼叫的服务台每小时接到的呼叫数是一个速率为 4 的泊松过程。

1. 在第一个小时内呼叫数少于 2 个的概率是多少?
2. 假定在第一个小时内有 6 个呼叫，求在第三个小时呼叫数少于 2 个的概率。
3. 假定服务台的话务员接听 10 个呼叫后需要休息一下，那么她的平均工作时间是多少?

23

事件按速率为每小时 $\lambda = 2$ 的泊松过程发生，请问：

1. 在晚上 8 点到 9 点没有事件发生的概率是多少？
2. 从正午开始，到第 4 个事件发生的期望时间是多少？
3. 在晚上 6 点到 8 点有两个或两个以上事件发生的概率是多少？

26

一家保险公司的赔付数是一个速率为每周 4 单的泊松过程。将"千元"简记为 K，假设每个保险单的赔付金额均值为 $10K$，标准差为 $6K$。求 4 周赔付的总金额的均值和标准差。

第五章习题

1

一小间办公室中有两个人进行股票共同基金的销售业务，他们每个人的状态有两种：要么在打电话，要么没在打电话。假设业务员 i 的通话时间服从速率为 μ_i 的指数分布，没在打电话的时间服从速率为 λ_i 的指数分布。
构建一个马氏链模型，状态空间为 $\{0, 1, 2, 12\}$，其中状态表示正在打电话的业务员。

3

考虑以下情况：有两台机器，仅有一位维修工人负责维修。机器 i 在发生故障前可正常工作的时间服从速率为 λ_i 的指数分布，每台机器的维修时间服从速率为 μ_i 的指数分布，且维修工人依照机器发生故障的次序进行维修。
(a) 构建一个此情形下的马氏链，其状态空间为 $\{0, 1, 2, 12, 21\}$;
(b) 假定 $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 4$, 求平稳分布。

6

一小间办公室中有两个人进行股票共同基金的销售业务，他们每个人的状态有两种：要么在打电话，要么没在打电话。假设业务员的通话时间均服从速率为 3 的指数分布，没在打电话的时间均服从速率为 1 的指数分布。

(a) 求平稳概率分布。

(b) 假定他们升级了电话系统，若打入的电话正在通话中，则转接到另一个电话，但若另一个电话也正在通话中，则打不进去电话，求新的平稳概率分布。

8

一台机器容易发生 $i = 1, 2, 3$ 三种故障，发生速率分别为 λ_i，维修它们需要在费的时间服从速率为 μ_i 的指数分布。

构建一个状态空间为 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的马氏链并求其平稳分布。

9

三只青蛙在池塘附近玩耍。当它们在地面上晒太阳时，它们觉得太热了，于是以速率 1 跳入池塘：当它们在池塘中时，它们觉得太冷了，于是以速率 2 跳回地面上。用 X_t 表示时刻 t 晒太阳的青蛙数。

求 X_t 的平稳分布。

第六章习题

1

已知 W_t 是标准布朗运动，假设 $X(t) = |W(t)|, t \geq 0$, 求 $\mathbb{E}X_t$ 和 $VarX(t)$。

2

假设 W_t 是标准布朗运动，求：
(a) $\mathbb{P}[W(2) > 3]$;
(b) $\mathbb{P}[W(3) > W(2)]$

3

假设 W_t 是标准布朗运动，求：
(a) $aW(s) + bW(t)$ 的分布，其中 a, b, s, t 均是实数，并且 $0 < s < t$;
(b) $\mathbb{P}[W(2) - 2W(3) \leq 4]$

4

假设 W_t 是标准布朗运动，并且 $0 \le u \le s \le t$, 求：

(a) $\mathbb{E}[W^2(t)W^2(s)]$

(b) $\mathbb{E}[W(t)W(s)W(u)]$

5

假设 W_t 是标准布朗运动，求 $W(1) + W(2) + \cdots + W(n)$ 的分布。

第六章

1

已知 $W(t)$ 是标准布朗运动，假设 $X(t) = |W(t)|$，$t \geq 0$，求 $\mathbb{E}[X(t)]$ 和 $\mathrm{Var}[X(t)]$。

2

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，求：

1. $\mathbb{P}[W(2) > 3]$；
2. $\mathbb{P}[W(3) > W(2)]$。

3

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，求：

1. $aW(s) + bW(t)$ 的分布，其中 a, b, s, t 均是实数，并且 $0 < s < t$；
2. $\mathbb{P}[W(2) - 2W(3) \leq 4]$。

4

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，并且 $0 \le u \le s \le t$，求：

1. $\mathbb{E}[W^2(t)W^2(s)]$；
2. $\mathbb{E}[W(t)W(s)W(u)]$。

5

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，求 $W(1) + W(2) + \cdots + W(n)$ 的分布。

第七章

1

令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，其中 X_i 相互独立，并且 $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$。
证明：$S_n^2 - n\sigma^2$ 是一个鞅。

5

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，λ 和 v 均是实数，且 $v \geq 0$，令：

$$X(t) = \exp[\lambda W(t) - vt]$$

证明：当 $\lambda^2 = 2v$ 时，$X(t)$ 是一个鞅。

6

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，$X(t) = W(t) + \mu t$，令：

$$M(t) = \exp[-2\mu X(t)]$$

证明：$M(t)$ 是一个鞅。

7

假设 $W(t)$ 是标准布朗运动，令：

$$M(t) = W^3(t) - 3tW(t)$$

证明：$M(t)$ 是一个鞅。

第八章

10

已知 $X(t)$ 对应的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{1}{2}\theta^2(t)\,\mathrm{d}t - \theta(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中，$W(t)$ 是标准布朗运动。

求 $Z(t) = \exp[X(t)]$ 的随机微分方程。

11

已知 $X(t)$ 是一个 O-U 过程，其对应的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}X(t) = -\kappa X(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$

其中，$W(t)$ 是标准布朗运动。

假设 $Y(t) = X^2(t)$，求 $Y(t)$ 的随机微分方程。

12

若

$$\mathrm{d}X(t) = \mu X(t)\,\mathrm{d}t + \sigma X(t)\,\mathrm{d}W(t),$$

求：

1. $X^k(t)$ 的随机微分方程；
2. $X^{-1}(t)$ 的随机微分方程。

15

已知 $X(t)$ 服从几何均值回复过程（geometric mean-reverting process），其随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}X(t) = \kappa[\theta - \ln X(t)]X(t)\,\mathrm{d}t + \sigma X(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

求 $Y(t) = \ln X(t)$ 的随机微分方程。