Partielle Differentialgleichungen

Verfasser: Marc Hauptmann
erweitert durch: Cornelius Rüther

8. April 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

$$\begin{aligned}
u(t,x) \in \mathbb{R} &: \underline{\text{Dichte}} \text{ (z.B. Wärme)}\\
t &: \underline{\text{Zeit}}, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \underline{\text{Raumvariable}}\\
J(t,x) \in \mathbb{R}^n &: \underline{\text{Fluss}}\\
f(t,x) \in \mathbb{R} &: \underline{\text{Quelle}} \ (\underline{\text{Senke}})
\end{aligned}$$

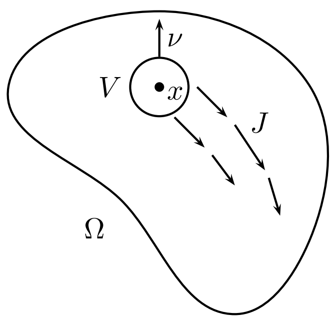

Abbildung 1.1: Vergleichsgebiet V mit Fluss J

Sei $V \subset \Omega$ Vergleichsgebiet mit Rand ∂V und äußerer Einheitsnormale $\nu(x) \in \mathbb{R}^n, x \in \partial\Omega$ wie in Abbildung 1.1 dargestellt, sowie τ die Oberfläche von V.

Bilanzgleichung:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V u(t,x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Änderungsrate in } V}}_{=\int_V \partial_t u\,\mathrm{d}x} = -\underbrace{\underbrace{\int_{\partial V} J\cdot\nu\,\mathrm{d}\tau}_{\text{Fluss nach Draußen}}}_{\underset{\text{Gauß}}{=} -\int_V \operatorname{div} J\,\mathrm{d}x} + \underbrace{\int_V f(t,x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{was im Gebiet entsteht/}\\ \text{verloren geht}}}$$

wobei $\operatorname{div} J := \nabla \cdot J = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j J^j$ mit $J = (J^1, \dots, J^n) \in \mathbb{R}^n$ und $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$. Also gilt:

$$\int\limits_V \partial_t u \, \mathrm{d}x + \int\limits_V \operatorname{div} J \, \mathrm{d}x = \int\limits_V f \, \mathrm{d}x$$

$$\underset{V \subset \Omega \text{ bel.}}{\Longrightarrow} \underline{\text{Kontinuitätsgleichung:}} \quad \partial_t u + \operatorname{div} J = f$$

für $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$.

Je nach physikalischer (biologischer, ...) Situation besteht ein Zusammenhang zwischen dem Fluss J und der Dichte u.

(i) **Transportgleichung:** $J = ub, b \in \mathbb{R}^n$

$$\Longrightarrow \boxed{\partial_t u + b \cdot \nabla u = f} \quad (n = 1 : u_t + bu_x = f)$$

(ii) **Wärmeleitungsgleichung:** Fluss ist proportional zu Dichtegefälle, d.h. $J = -d\nabla u$ ($d > 0$: Geschwindigkeit).

Laplace-Operator: $\Delta := \operatorname{div} \cdot \nabla = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\partial_t u - d\Delta u = f}$$

$$\partial_t u - d \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = f \quad (n = 1 : u_t - du_{xx} = f)$$

(iii) **(nicht viskose) Burgersgleichung:** $n = 1, J = \frac{1}{2}u^2$

$$\Longrightarrow \boxed{u_t + uu_x = f}$$

(iv) **Laplace-Gleichung:** Stationäre beziehungsweise zeitunabhängige Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\Longrightarrow \boxed{-\Delta u = f}$$

Andere Typen, die nicht auf der Kontinuitätsgleichung beruhen sind:

(v) **Wellengleichung:**

$$\boxed{\partial_t^2 u - c\Delta u = f}$$

Hierbei ist $c > 0$ die Geschwindigkeit.

(vi) **Navier-Stokes:**

$$\boxed{\partial_t u - \Delta u + \sum_{j=1}^{n} u^j \partial_j u = f - \nabla p}$$

mit $u = (u^1, \dots, u^n)$.

1.2 Typische Fragen

1. Wohldefiniertheit (lokale/globale Existenz, Eindeutigkeit, Abhängigkeit bzgl. Daten)
2. Regularität
3. Darstellungsformeln (z.B. explizite Berechnungen)
4. Qualitatives Verhalten
5. Approximation

$\vdots$

Bemerkung 1.1. (a) Eindeutigkeit benötigt meist zusätzliche Bedingungen; z.B.

- **Anfangsbedingung:** (z.B. für $t = 0$)

$$\boxed{u(0,x) \overset{!}{=} u^0(x),\ x \in \Omega}$$

  wobei u^0 gegeben ist.
- **Randbedingungen:** (wie sieht u auf $\partial\Omega$ aus?)
  - Dirichlet-Randbedingung:

$$\boxed{u(t,x) = g(x),\ x \in \partial\Omega}$$

  - Neumann-Randbedingung:

$$\boxed{\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu = g(x),\ x \in \partial\Omega}$$

    wobei ν der Einheitsnormalenvektor von $\partial\Omega$ ist.

(b) Lösungen existieren nicht immer „klassich“ (d.h. $u \in C^k$) $\Longrightarrow$ klassische Lösung/schwache Lösung/distributionelle Lösung.

1.3 Notation und Begriffe

- **Multiindex:** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha! &:= (\alpha_1)! \cdots (\alpha_n)! \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{für } f \in C^{|\alpha|} \end{aligned}$$

  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : (\alpha \geq \beta :\Leftrightarrow \alpha_j \geq \beta_j \forall j = 1, \dots, n)$

- **Leibniz:** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^k(X)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| < k$, dann gilt

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \, \partial^\beta g$$

mit $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

- Eine partielle Differentialgleichung ist von der Form

$$F\left(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k}\right) = 0,$$

wobei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$F : X \times (\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^l$$

gegeben und $u : X \to \mathbb{R}^m$ ist.

  - k: **Ordnung** der Gleichung
  - $l = 1$: eine Gleichung
  - $l > 1$: System von Gleichungen

1.4 Spezialfälle

(a) **lineare PDGl:**

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$$

mit $a_\alpha : X \to \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Ist $f = 0$, so heißt die PDE **homogen**, für $f \neq 0$ **inhomogen**.

(b) **Semilineare PDGl:**

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f\left(x, (\partial^\beta u(x))_{0 \leq |\beta| \leq k-1}\right)$$

(c) **Quasilineare PDGl:**

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha\left(x, (\partial^\beta u(x))_{0 \leq |\beta| \leq k-1}\right) \partial^\alpha u(x) = f\left(x, (\partial^\beta u(x))_{0 \leq |\beta| \leq k-1}\right)$$

(d) Gilt keiner der Fälle (a)-(c), so heißt die PDE **voll-nicht-lineare** Gleichung.

Kapitel 2

Gleichungen 1. Ordnung: Methode der Charakteristiken

2.1 Motivation

Für $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen betrachten wir

$$\left.\begin{array}{rr} a(x,y) \cdot u_x + b(x,y) \cdot u_y = c(x,y,u), & (x,y) \in \Omega \\ \text{mit} \qquad u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \Gamma \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

wobei $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Γ eine 1-dimensionale Kurve in Ω und $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ gegeben sind.

Wir suchen nun ein $u = u(x, y)$, das (2.1) erfüllt. Die linke Seite von (2.1) ist die Richtungsableitung von diesem $u(x, y)$ in Richtung $(a(x, y), b(x, y))$. Es ist nun naheliegend, dass wir diejenigen Kurven $(x, y) = (x(t), y(t))$ durch einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$ betrachen, deren Tangentialvektor $(\dot{x}, \dot{y})$ in Richtung von $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ zeigt. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,y), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= b(x,y), \quad y(0) = y_0 \ . \end{aligned}$$

Entlang einer charakteristischen Kurve genügt $u = u(x(t), y(t))$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung, denn:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= \dot{x}u_x + \dot{y}u_y = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y \\ &= c(x(t), y(t), u(t)) \end{aligned}\right| \tag{2.2}$$

mit $u(0) = u(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$. Damit haben wir eine Reduktion des Problems auf gewöhnliche Differentialgleichungen erreicht, und u ist durch $\varphi(x_0, y_0)$ entlang der gesamten charakteristischen Kurve durch $(x_0, y_0) \in \Gamma$ eindeutig bestimmt.

$\Longrightarrow u(x,y)$: Projektionen der charakteristischen Kurven durch $(x_0, y_0) \in \Gamma$

Es liegt nun folgende Vermutung nahe: Mittels Gleichung (2.2) lässt sich eine eindeutige Lösung von (2.1) in dem Gebiet bestimmen, das durch die charakteristischen Kurven abgedeckt wird.

Allerdings darf der Vektor $(a(x_0, y_0), b(x_0, y_0))$ in keinem Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tangential an Γ stehen! Genau dann nennen wir Γ nicht-charakteristisch.

Satz 2.1. *Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Umgebung $(\alpha, \beta) \times \Omega$ von $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sodass das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = \xi$$

für jedes $\xi \in \Omega$ eine eindeutige Lösung

$$w = w(\,\cdot\,; \xi) \in C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$$

hat.

Ferner gilt: $w \in C^1((\alpha, \beta) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Siehe Analysis II (Picard-Lindelöf). □

2.2 Quasilineare Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten

$$\left.\begin{aligned} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y &= c(x,y,u), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma \end{aligned}\right| \tag{2.3}$$

wobei Γ eine C^1-Kurve in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Parameterdarstellung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist, und $\varphi \in C^1(\Gamma)$, $a, b, c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Ist $u \in C^1(\Omega)$ eine Lösung von (2.3), so gilt

$$\vec{A} := \begin{pmatrix} a(x,y,u(x,y)) \\ b(x,y,u(x,y)) \\ c(x,y,u(x,y)) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \\ -1 \end{pmatrix} =: \vec{u}.$$

Das heißt, $\vec{A} = \vec{A}(x,y,u)$ liegt tangential auf dem Graphen $\{(x,y,z) \mid z = u(x,y)\}$.

Definition. Der Graph Σ einer Funktion $u \in C^1(\Omega)$ heißt Lösungsfläche für Gleichung (2.3), falls in jedem $P = (x,y,z) \in \Sigma$ der Vektor

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a(P) \\ b(P) \\ c(P) \end{pmatrix}$$

tangential in Σ liegt.

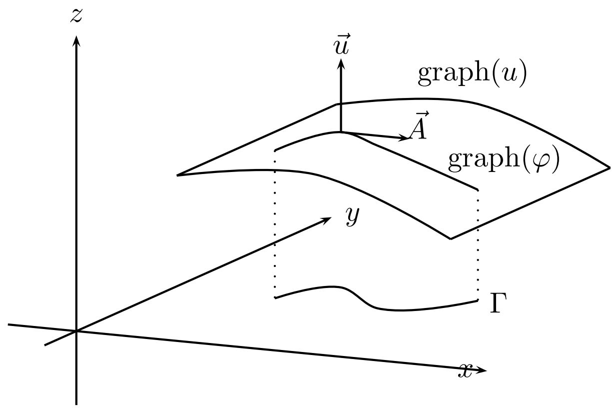

Abbildung 2.1: Weg Γ

Definition. Lösungen $(t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,y,z), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= b(x,y,z), \quad y(0) = y_0 \\ \dot{z} &= c(x,y,z), \quad z(0) = z_0 \end{aligned}$$

heißen Charakteristiken von (2.3) durch (x_0, y_0, z_0).

Lemma 2.2. *Sei $u \in C^1(\Omega)$, $\Sigma = \mathrm{graph}(u)$. Σ ist genau dann eine Lösungsfläche wenn es die Vereinigung von Charakteristiken ist.*

Beweis. Es sei $\Sigma := \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \bar{z} = u(\bar{x}, \bar{y})\}$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ Charakteristik durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ und $w(t) := z(t) - u(x(t), y(t))$. Damit ist

$$w(0) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0, \tag{2.4}$$

da $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$.

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{z} - \dot{x}u_x - \dot{y}u_y = c(x,y,z) - a(x,y,z)u_x - b(x,y,z)u_y \\ &= c(x,y,w+u(x,y)) - a(x,y,w+u(x,y))u_x \\ &\quad - b(x,y,w+u(x,y))u_y \end{aligned}\right| \tag{2.5}$$

und w ist durch (2.4), (2.5) eindeutig bestimmt.

„⇒" Sei Σ eine Lösungsfläche. Damit gilt $au_x + bu_y = c$. Aus (2.4), (2.5) folgt $\dot{w} \equiv 0$, und da $w(0) = 0$ ist, gilt $w \equiv 0$. Die Charakteristik $(t \mapsto (x(t), y(t), z(t)))$ liegt also ganz in Σ. Nun ist aber $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ beliebig gewählt. Somit ist Σ eine Vereinigung von Charakteristiken.

„⇐" Es sei Σ Vereinigung von Charakteristiken. Es ist also $w \equiv 0$ und mit Gleichung (2.5) folgt

$$c(x_0, y_0, \underbrace{u(x_0, y_0)}_{z_0}) - a(x_0, y_0, z_0)u_x - b(x_0, y_0, z_0)u_y = 0.$$

Das heißt, $\big(a(x_0, y_0, z_0), b(x_0, y_0, z_0), c(x_0, y_0, z_0)\big)^T$ steht tangential an Σ. Da (x_0, y_0, z_0) beliebig ist, ist Σ eine Lösungsfläche.

Damit folgt die Behauptung. □

Folgerung. Lösungsflächen lassen sich durch Vereinigung von Charakteristiken durch jeden $(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))), s \in [\alpha, \beta]$ (mit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) konstruieren.

Einschränkung. Der Vektor $(a(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))), b(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))))$ darf in keinem Punkt $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \in \Gamma$ tangential sein an Γ. Der Weg Γ ist also genau dann nicht-charakteristisch, wenn

$$a\left(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))\right) \dot{\gamma}_2(s) - b\left(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))\right) \dot{\gamma}_1(s) \neq 0 \quad \forall s \in [\alpha, \beta] \tag{$*$}$$

gilt.

Theorem 2.3. *Seien a, b, c, φ reellwertige Charakteristiken und Γ eine nicht-charakteristische C^1-Kurve. Dann besitzt das quasilineare Problem 1. Ordnung*

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad u|_\Gamma = \varphi$$

in einer Umgebung von Γ eine eindeutige C^1-Lösung u.

Beweis. **Existenz:** Für $s \in [\alpha, \beta]$ berechnet $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ durch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}x(t, s) &= a(x, y, z), \quad x(0, s) = \gamma_1(s) \\ \frac{\partial}{\partial t}y(t, s) &= b(x, y, z), \quad y(0, s) = \gamma_2(s) \\ \frac{\partial}{\partial t}z(t, s) &= c(x, y, z), \quad z(0, s) = \varphi(\gamma(s)) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

(Charakteristik durch $(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))))$)

Nach Satz 2.1 exitiert eine eindeutige Lösung (x, y, z) und hängt C^1 von s ab.

Für $t = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} \partial_t x(0,s) & \partial_s x(0,s) \\ \partial_t y(0,s) & \partial_s y(0,s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))) & \dot{\gamma}_1(s) \\ b(\gamma(s), \varphi(\gamma(s))) & \dot{\gamma}_2(s) \end{pmatrix} \overset{(*)}{\neq} 0$$

Nach dem Satz über Umkehrabbildungen ist die Abbildung $((t,s) \mapsto (x,y) = (x(s,t), y(s,t)))$ umkehrbar in einer Umgebung der Anfangskurve $t = 0$. Also existieren $t = t(x,y)$ und $s = s(x,y)$ in einer Umgebung $D \subset \mathbb{R}^2$ von Γ und sind dort C^1. Setze

$$u(x,y) := z(t(x,y), s(x,y)), \quad (x,y) \in D.$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x,y) &= u_x(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial t} x + u_y(x,y) \frac{\partial}{\partial t} y \\ &\overset{(2.6)}{=} a(x,y,u(x,y)) u_x(x,y) + b(x,y,u(x,y)) u_y(x,y) \end{aligned} \tag{2.7}$$

und andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial t} z(t,s) \overset{(2.6)}{=} c(x,y,z) = c(x,y,u(x,y)). \tag{2.8}$$

Aus den Gleichungen (2.7) und (2.8) folgt, dass u eine Lösungsfläche über D definiert.

Eindeutigkeit: Es sei nun $\bar{u}$ eine weitere Lösung. Wir setzen $\bar{z}(t,s) := \bar{u}(\bar{x}(t,s), \bar{y}(t,s))$, wobei

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{x}(t,s) &= a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}(\bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{x}(0,s) = \gamma_1(s), \\ \partial_t \bar{y}(t,s) &= b(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}(\bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{y}(0,s) = \gamma_2(s). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{z}(t,s) &= a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \bar{u}_x + b(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \bar{u}_y = c(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \\ &\underset{\text{Def.}}{=} c(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\bar{z}(0,s) = \bar{u}(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \overset{\bar{u}\text{ Lsg.}}{=} \varphi(\gamma(s))$$

und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ löst (2.6). Der Satz von Picard-Lindelöf liefert die Eindeutigkeit der Lösung, d.h. $(x,y,z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Also ist $u = \bar{u}$.

Damit folgt komplett die Behauptung. □

Bemerkung 2.4. (a) Der Beweis ist konstruktiv!

(b) Der Beweis lässt sich auf $n > 2$ verallgemeinern.

Beispiel 2.5. $\Gamma := \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \alpha u \\ u|_\Gamma &= \varphi \end{aligned}\right|$$

Damit ist $\begin{pmatrix} a(x,y,u) \\ b(x,y,u) \\ c(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha u \end{pmatrix}$, und für Γ gilt wegen $\begin{pmatrix} a(x,y,u) \\ b(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, dass es nicht-charakteristisch ist, da $(a,b)^T$ für $y=0$ tangential wäre.

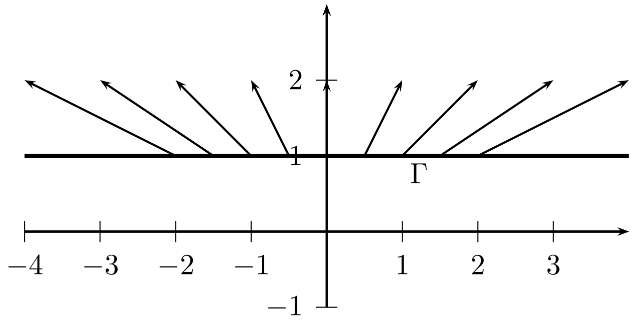

Abbildung 2.2: Weg Γ mit Vektorfeld $(x,1)$

Wir treffen die Vereinbarung, dass die zeitliche Ableitung durch einen Punkt dargestellt wird, also $\dot{\ } := \partial_t$. Mit dieser Notation ergibt sich aus den obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, & x(0,s) &= s \\ \dot{y} &= y, & y(0,s) &= 1 \\ \dot{z} &= \alpha \cdot z, & z(0,s) &= \varphi(s). \end{aligned}$$

Wir erkennen sofort, dass $x = x(t,s) = s \cdot e^t$ und $y = y(t,s) = e^t$ sein muss. Zusätzlich ergibt sich $z = z(t,s) = \varphi(s)e^{\alpha t}$. Durch Auflösen der Gleichungen für x und y nach t, s, erhalten wir $t = \ln y$ und $s = \frac{x}{y}$. Schließlich erhalten wir

$$\underline{u(x,y)} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) e^{\alpha \ln y} = \underline{\varphi\left(\frac{x}{y}\right) y^\alpha}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y > 0$.

Beispiel 2.6 (nicht-viskose Burgersgleichung). Wir betrachten die quasilineare Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} u_x + uu_y &= 0, & x > 0, y \in \mathbb{R} \\ u(0,y) &= h(y), & y \in \mathbb{R} \end{aligned}\right| \tag{B}$$

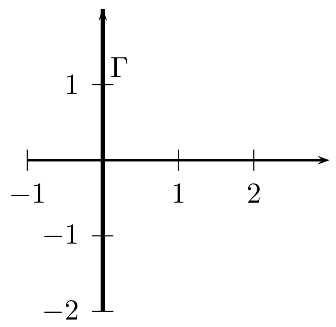

Abbildung 2.3: Weg Γ entlang der y-Achse

$$\begin{pmatrix} a(x,y,u) \\ b(x,y,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, & x(0,s) &= 0 \\ \dot{y} &= z, & y(0,s) &= s \\ \dot{z} &= 0, & z(0,s) &= h(s), \end{aligned}$$

mit folgender Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x = x(t,s) &= t \\ y = y(t,s) &= s + h(s)t \\ z = z(t,s) &= h(s) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Wir erkennen, dass u entlang der Geraden durch $(0, s)$ mit der Steigung $h(s)$ den konstanten Wert $h(s)$ hat. Also haben wir

$$u(t, s + h(s)t) = h(s). \tag{2.10}$$

Wir wissen $(t, s) \mapsto (x, y)$ ist <u>lokal</u> ein Diffeomorphismus. Es ergibt sich die implizite Gleichung

$$\boxed{u(x,y) \overset{(2.10)}{=} h(s) \overset{(2.9)}{=} h(y - h(s)x) = h(y - u(x,y)x)}.$$

Global kann aber ein Problem entstehen: Die Geraden

$$\{(t, s + h(s)t \mid t \geq 0\} \text{ und } \{(t, \bar{s} + h(\bar{s})t \mid t \geq 0\}$$

können sich schneiden. Im Schnittpunkt müsste u beide Werte $h(s)$ bzw. $h(\bar{s})$ annehmen. Dies ist ein Widerspruch.

Wir betrachten nun $u(x, y) = h(y - u(x, y)x)$. Ableiten nach y ergibt

$$u_y(x,y) = \underbrace{h'(y - u(x,y)x)}_{=h'(s)} \cdot (1 - u_y(x,y)x)$$

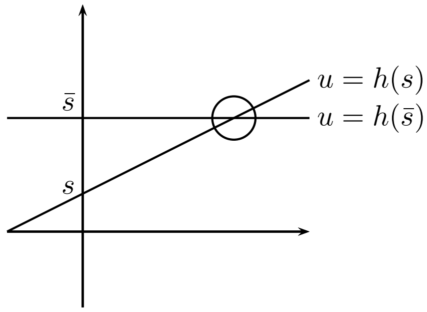

Abbildung 2.4: Schnitt der Geraden

und somit

$$u_y(x, y) = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)x}\,.$$

Ist nun $h'(s) < 0$, so geht $u_y(x, y) \to -\infty$ für $x \to \frac{-1}{h'(s)}$. Dieses Verhalten nennt man „Schock“ (der Gradient „explodiert“).

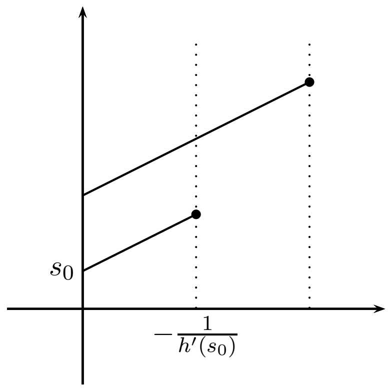

Abbildung 2.5: Test

Ist also allgemeiner $h'(s_0) = \min h' < 0$, so gibt es keine C^1-Lösung in einer beidseitigen Umgebung der Geraden $x = \frac{-1}{h'(s_0)}$. Dieser „blow-up“ ist „typisch“ für nicht-lineare Gleichungen. Als Ausweg verwenden wir einen „schwächeren“ Lösungsbegriff (nicht C^1). Seien $R, S \in C^1(\mathbb{R}), S'(w) = wR'(w)$, $R'(w) \neq 0\,\forall\, w \in \mathbb{R}$. Sei u eine C^1-Lösung von (B). Wir betrachten dafür die Divergenzform

$$\begin{aligned}\partial_x R(u) + \partial_y S(u) &= R'(u) \cdot u_x + S'(u)u_y \\ &= R'(u)(u_x + uu_y) = 0.\end{aligned}$$

Integrieren wir diese bezüglich y, erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\int_a^b R(u(x,y))dy + S(u(x,b)) - S(u(x,a)) = 0 \tag{2.11}$$

$\forall\, x > 0, \forall\, a < b$. Jede Funktion u, die (2.11) löst, heißt Integrallösung von (B). Somit gilt (2.11) für eine größere Klasse von Funktionen. Wenn allerdings u eine Integrallösung und C^1 ist, dann differenziere (2.11) nach (B), und wir erhalten

$$\underbrace{R'(u(x,b))}_{\neq 0}(u_x(x,b) + u(x,b)\cdot u_y(x,b)) = 0$$

und schließlich ist

$$u_x(x,b) + u(x,b)\cdot u_y(x,b) = 0$$

mit $x > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Also ist u Integrallösung und C^1 bzw. u ist C^1-Lösung von (B).

Betrachten wir nun folgende Situation: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wird durch eine glatte Kurve $y = \xi(x)$ in zwei Gebiete Ω_+ und Ω_- zerlegt und $u \in C^1$ sei eine auf Ω_+ bzw. Ω_- von beiden Seiten bis zum Rand $y = \xi(x)$ stetige Integrallösung von (2.11). Allerdings sei u einem Sprung auf $y = \xi(x)$ versehen. Wir setzen

$$u^{\pm}(x) := \lim_{y\to\xi^{\pm}(x)} u(x,y).$$

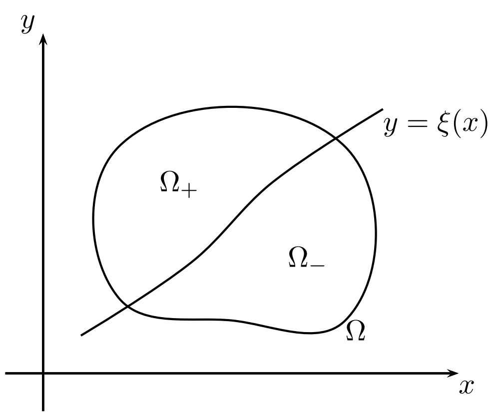

Abbildung 2.6: Zerlegung von Ω in zwei Gebiete

Unser Ziel ist eine Charakterisierung der Schockkurve $y = \xi(x)$. Für $a < \xi(x) < b$:

$$\begin{aligned}
0 =& S(a(x,b)) - S(u(x,a)) + \frac{d}{dx}\Big(\int_a^{\xi(x)} R(u(x,y))\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\xi(x)}^{b} R(u(x,y))\,\mathrm{d}y \Big) \\
=& S(u(x,b)) - S(u(x,a)) + \xi'(x) R(u^-(x)) - \xi'(x) R(u^+(x)) \\
&+ \Big(\int_b^{\xi(x)} \underbrace{\partial_x R(u(x,y))}_{=-\partial_y S(u(x,y))}\,\mathrm{d}y + \int_{\xi(x)}^{b} \underbrace{\partial_x R(u(x,y))}_{=-\partial_y S(u(x,y))}\,\mathrm{d}y \Big) \\
=& \xi'(x)\left(R(u^-(x)) - R(u^+(x)) \right) - S(u^-(x)) + S(u^+(x)).
\end{aligned}$$

Falls $R(u^-) \neq R(u^+)$, so gilt:

$$\xi'(x) = \frac{S(u^-(x)) - S(u^+(x))}{R(u^-(x)) - R(u^+(x))} \qquad \Bigg| \qquad \text{„Schockrelation“}$$

Beispiel 2.7 (vergleiche Beispiel 2.6). Wir betrachten wieder die Burgersgleichung mit einem konkreten h

$$u_x + u u_y = 0, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

$$u(0,y) = h(y) := \begin{cases} 1 & , y < 0 \\ 1 - y & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , y > 1 \end{cases}$$

Aus Beispiel 2.6 wissen wir, dass $u(x,y)$ für $s \in \mathbb{R}$ entlang der Geraden $(x,y) = (t, s + h(s)t)$ den konstanten Wert $h(s)$ hat. Ist beispielsweise $s < 0$ (und damit $h(s) = 1$), so ist $u(x,y) = 1$. Entlang $(x,y) = (t, s+t)$ ist dann $u(x,y) = 1$ für alle $0 < x, y < x$. Analog lässt sich folgern, dass

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 1, y < x \\ \frac{1-y}{1-x} & , 0 < x \leq y \leq 1 \\ 0 & , 0 < x \leq 1, y > 1 \end{cases}$$

eine stetige und stückweise C^1-Lösung auf $x \in (0,1]$ ist. Was ist jedoch für $x > 1$?

Wir wählen $R(u) := u$ und $S(u) := \frac{1}{2}u^2$. Dann ist die Schockrelation zwischen $\Omega_- = [u = 1]$ und $\Omega_+ = [u = 0]$

$$\frac{S(1) - S(0)}{R(1) - R(0)} = \frac{1}{2}.$$

Die Schockkurve $y = \xi(x)$ beginnt im Punkt $(1,1)$ und erfüllt $\xi'(x) = \frac{1}{2}$ und $\xi(1) = 1$, also $\xi(x) = \frac{x+1}{2}$. Daher definieren wir mit $x > 1$

$$u(x,y) := \begin{cases} 1 & , y < \xi(x) \\ 0 & , y > \xi(x) \end{cases}.$$

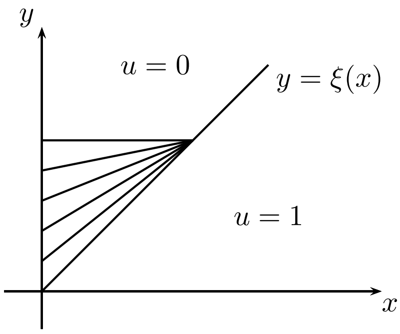

Abbildung 2.7: Schockkurve

Die so definierte Funktion ist eine Integrallösung, denn

$$\frac{d}{dx}\int_a^b u(x,y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}(u(x,b)^2 - u(x,a)^2) = 0.$$

Kapitel 3

Distributionen

Für dieses Kapitel treffen wir zwei Generalvoraussetzungen. Sofern nicht anders definiert, sei die nicht-leere Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und der Körper $\mathbb{K}$ stehe für einen Körper der Menge $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. (a) $K \Subset \Omega :\Leftrightarrow \bar{K} \subset \Omega$ kompakt.

(b) Sei $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann heißt die Menge

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

Träger von f.

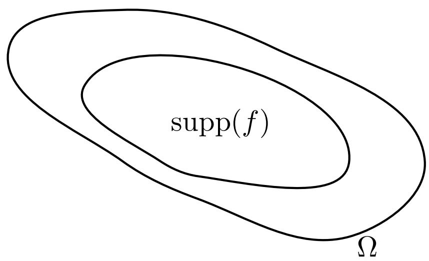

Abbildung 3.1: Träger

(c) Mit $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen mit kompakten Träger als

$$C_c^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\},$$
$$C_c(\Omega) := C_c^0(\Omega).$$

(d) Es sei Y metrischer Raum mit $X \subset Y$. Wir schreiben dann $X \overset{d}{\subset} Y$, wenn X dicht in Y liegt. In diesem Fall ist $\bar{X} = Y$.

(e) Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir die Lebesgue-Räume als

$$L_p(\Omega) := (L_p(\Omega), \|\cdot\|_p).$$

(f) Mit $k \in \mathbb{N}$ sei

$$BC^k(\Omega) := \left(\{f \in C^k(\Omega) \mid \|f\|_{BC^k} < \infty\}, \|\cdot\|_{BC^k}\right),$$

wobei

$$\|f\|_{BC^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|,$$

d.h. alle partiellen Ableitungen in jedem Punkt $x \in \Omega$ sind endlich.

(g) Wie oben sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$BUC^k(\Omega) := \{f \in BC^k(\Omega) \mid \partial^\alpha f \text{ glm. stetig } \forall\, |\alpha| \leq k\}.$$

$L_p(\Omega)$, $BC^k(\Omega)$ und $BUC^k(\Omega)$ sind Banachräume.

Lemma 3.1. *Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt:*

$$C_c(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} L_p(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. Analysis III $\square$

Definition. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, sowie $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}x = 1.$$

Dann sei für alle $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ heißt Mollifier (glättender Kern).

Bemerkung 3.2. Es sei

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & , |x| \geq 1 \\ C_0 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| < 1 \end{cases}$$

mit

$$C_0 = \left(\int_{\mathbb{B}_n} e^{-\frac{1}{1-|y|^2}} \,\mathrm{d}y\right)^{-1}.$$

$\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein Mollifier.

Beweis. Nachrechnen. $\square$

Definition. Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ messbar und

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, so dass das Integral existiert. Die daraus entstehende Funktion $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ heißt Faltung von g und f.

Erinnerung. E, F, G seien normierte Vektorräume und $T : E \times F \to G$ sei eine bilineare und stetige Abbildung. Somit existert ein $c_T > 0$ mit

$$\|T(x,y)\|_G \leq c_T \|x\|_E \cdot \|y\|_F, \quad x \in E, y \in F.$$

Dann induziert $\|T\| := \inf c_T$ eine Norm auf G.

Satz 3.3. *Seien* $L_p := L_p(\mathbb{R}^n)$, $BC^k := BC^k(\mathbb{R}^n)$ *und* $BUC^k := BUC^k(\mathbb{R}^n)$. *Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Die Faltung ist bilinear und stetig als Abbildung*

- $L_p \times L_q \to L_r, 1 \leq p, q, r \leq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$,
- $L_1 \times BC^k \to BC^k, k \in \mathbb{N}$,
- $L_1 \times BUC^k \to BUC^k, k \in \mathbb{N}$,

jeweils mit Norm 1 *(z.B.* $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$*)*

(ii) $f * g = g * f$, *falls sinnvoll.*

(iii) $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)\, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, f \in \mathcal{L}_1, g \in BC^{|\alpha|}$.

(iv) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) := \{x + y \mid x \in \operatorname{supp}(f), y \in \operatorname{supp}(g)\}$, *falls* f *oder* g *einen kompakten Träger hat und* $f * g$ *existiert.*

(v) *ist* $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ *Mollifier und* $f \in L_p$ *mit* $1 \leq p \leq \infty$, *so gilt*

$$\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f \text{ in } L_p.$$

Beweis. (i)-(iv) Übung.
(v) Sei $f \in L_p$. Dann folgt o.B.d.A. aus Lemma 3.1 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

$$\boxed{\begin{gathered} \delta > 0 \underset{\text{Lemma 3.1}}{\Longrightarrow} \exists\, g \in C_c(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_p < \frac{\delta}{2} \\ \Longrightarrow \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|\varphi_\varepsilon * f - \varphi_\varepsilon * g\|_p}_{\underset{(i)}{\leq} \|\varphi_\varepsilon\|_1 \cdot \|f-g\|_p} + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\leq \frac{\delta}{2}} \\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}x = 1 \end{gathered}}$$

$\varphi_\varepsilon * f \underset{(i),(iv)}{\in} C_c(\mathbb{R}^n)$, setze $(\tau_a f)(x) := f(x-a), x, a \in \mathbb{R}^n$, dann:

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi_\varepsilon * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\, \varphi_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y \\ &\underset{z:=\frac{x}{\varepsilon}}{\overset{\text{Transf.-Satz}}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \varepsilon z))\, \varphi(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{\bar{\mathbb{B}}^n} (f(x) - (\tau_{\varepsilon z} f)(x))\, f(z)\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$\implies \quad |f(x) - \varphi_\varepsilon * f(x)| \leq \sup_{|z|\leq 1} |f(x) - \tau_{\varepsilon z} f(x)| := h_\varepsilon(x) \tag{3.1}$$

- $f \in C_c(\mathbb{R}^n) \implies \exists\, K = \bar{K} \Subset \mathbb{R}^n : \operatorname{supp}(\tau_{\varepsilon z} f(\cdot)) \subset K \;\forall\, 0 < \varepsilon \leq 1$, $|z| \leq 1$
$$\implies \quad \forall\, x \in K^c : h_\varepsilon(x) = 0 \tag{3.2}$$

- $k|_K$ ist gleichmäßig stetig $\implies h_\varepsilon|_K \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ gleichmäßig

$$\begin{aligned} &\implies \quad (h_\varepsilon|_K)^p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \text{ gleichmäßig} \\ &\underset{(3.1),(3.2)}{\implies} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0 \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung. ☐

Definition.
- $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega\}$ heißt der Raum der Testfunktionen.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ wird mit der induktiven Limes-Topologie versehen. $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) :\Leftrightarrow \exists\, K = \bar{K} \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K\, \forall\, j$ und $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$:
$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$
- $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) :\Leftrightarrow \varphi_j - \varphi \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Satz 3.4. *Es sei* $1 \leq p \leq \infty$.

$$\implies \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} L_p(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. Es sei $g \in L_p$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \chi \leq 1, \chi|_{\bar{\mathbb{B}}^n} = 1$, weiter definieren wir $g_\varepsilon := \chi(\varepsilon) \cdot g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, wobei $\operatorname{supp}(g_\varepsilon) \Subset \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \implies \quad \|g - g_\varepsilon\|_p &= \|g - g_\varepsilon\|_{L_p([|x|>\frac{1}{2}])} \leq 2 \cdot \|g\|_{L_p([|x|>\frac{1}{2}])} \\ &= 2 \cdot \left(\int_{[|x|>\frac{1}{\varepsilon}]} |g(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$ beliebig $\Longrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0 : \|g - g_{\varepsilon_0}\|_p < \frac{\delta}{2}$. Sei $\{\varphi_\xi \mid \xi > 0\}$ Mollifier

$$\underset{\text{Satz3.3}}{\Longrightarrow} \varphi_\xi * g_{\varepsilon_0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \varphi_\xi * g_{\varepsilon_0} \xrightarrow[\xi \to 0^+]{} g_{\varepsilon_0} \text{ in } L_p,$$

d.h. $\exists\, \xi_0 > 0 : \|\varphi_{\xi_0} * g_{\varepsilon_0} - g_{\varepsilon_0}\|_p < \frac{\delta}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \|\varphi_{\xi_0} * g_{\varepsilon_0} - g\|_p < \delta$$

wegen der $\triangle$-Ungleichung. □

Definition.

$$L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \; f|_K \in L_1(K) \,\forall\, K = \bar{K} \Subset \Omega\}$$

Bemerkung 3.5. $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f * g \in BUC^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3.6. *Es sei* $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *mit* $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \,\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\Longrightarrow \quad f = 0 \quad (\textit{fast überall})$$

Beweis. Das Resultat ist lokal $\Longrightarrow \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega$

$\Longrightarrow$ o.B.d.A $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, also $\Omega = \mathbb{R}^n$.

- Es sei $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ Mollifier $\underset{\text{Satz 3.3(v)}}{\Longrightarrow} \varphi_\varepsilon * f \longrightarrow f$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0^+$. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ sei $\Psi_x(y) := \varphi_\varepsilon(x - y) \Longrightarrow \Psi_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y &\overset{\text{Vor.}}{=} 0 \\ \underset{\text{Satz 3.3(v)}}{\Longrightarrow} \quad f &= 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Definition. Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist stetig

$$:\Longleftrightarrow T(\varphi_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

in $\mathbb{K}$ für alle Folgen $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

- $\mathcal{D}'(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K} \mid T \text{ stetig, linear}\}$ heißt der Raum der Distributionen.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ versehen wir mit w^*-Topologie, d.h. $T_j \xrightarrow{w^*} T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ $:\Leftrightarrow$ $T_j(\varphi) \xrightarrow[j \to \infty]{} T(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Notation. $\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} := T(\varphi), T \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Beispiel 3.7. (a) **<u>reguläre Distributionen:</u>**

$$\forall\, f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) : \langle T_f, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$\Longrightarrow T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ linear.

Sei $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \exists\, K \Subset \Omega : \mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K\ \forall\, j$

$$\Longrightarrow \quad |\langle T_f, \varphi_j\rangle| = \left|\int_K f\varphi_j \,\mathrm{d}x\right| \le \sup_{x\in K}|\varphi_j(x)| \cdot \|f\|_{L_1(K)}$$

$\Longrightarrow T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist stetig, d.h. $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Aus Theorem 3.6 folgt

$$(T_f = T_g \Longrightarrow f = g)\ \forall\, f, g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Also ist $(f \mapsto T_f) : L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ injektiv, d.h. $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ lässt sich mit der Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ identifizieren und als reguläre Distribution bezeichnen:

$$L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Alle anderen Distributionen heißen singulär.

(b) **<u>Dirac-Distribution:</u>** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle := \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, denn ... (muss noch ausgerechnet werden...)

Anmerkung: $\exists\, f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) : T_f = \delta_{x_0}$

$\Longrightarrow \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset X := \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$:

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0) = 0$$

$\Longrightarrow \ f|_X = 0$ (fast überall) $\Longrightarrow f = 0 \Longrightarrow f \neg$ injektiv. $\sharp$

Somit ist δ_{x_0} singulär (speziell: $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$).

Notation: $\delta := \delta_0$ (d.h. $x_0 = 0$).

(c) $\{\varphi_\varepsilon \,|\, \varepsilon > 0\}$ Mollifier $\Longrightarrow \varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{w^*} \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Beweis. $\varphi_\varepsilon \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_\varepsilon, \Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varphi_\varepsilon(x)}_{=\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} \Psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\Psi(\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{(Lebesgue)}} \Psi(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx}_{=1} \\
&= \langle \delta, \Psi\rangle
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkungen und Definitionen 3.8. (a) **Multiplikation:** Es seien $a \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $f \in L_{1,\mathrm{loc}} \Longrightarrow af \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$\langle af, \varphi\rangle = \int_\Omega (af)\varphi dx = \int\limits_\Omega f(a\varphi)\,\mathrm{d}x = \langle f, a\varphi\rangle$$

Definition. Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$:

$$\langle aT, \varphi\rangle := \langle T, a\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$\Longrightarrow aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (punktweise Multiplikation).

(b) **Differentation:** Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \partial^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, sei weiter $f \in C^{|\alpha|} \Longrightarrow \partial^\alpha f \in C(\Omega) \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle &= \int_\Omega \partial^\alpha f\varphi\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{part. Int.}\\ \mathrm{supp}\,(\varphi) \Subset \Omega}}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\partial^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle\end{aligned}$$

Definition. Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, wir definieren

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\underset{\text{Übung}}{\Longrightarrow} \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Beachte: Für $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ stimmt $\partial^\alpha T_f$ (distributionelle Ableitung) mit $\partial^\alpha f$ (klassische Ableitung) überein.

Bemerkung 3.9. (a) $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \le j,k \le n : \partial_k\partial_j T = \partial_j\partial_k T$

(b) $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \forall\,\alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha\varphi_j \to \partial^\alpha\varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$

(c) $T_j \xrightarrow{w^*} T$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \Longrightarrow \forall\,\alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha T_j \xrightarrow{w^*} \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.10. (a) Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n$. Da ein $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert, so dass $T_f = \delta_{x_0}$, gilt:

- $\langle \partial^\alpha\delta_{x_0}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\delta_{x_0}, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(x_0)$
- $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \langle a\delta_{x_0}, \varphi\rangle =: \langle\delta_{x_0}, a\varphi\rangle = a(x_0)\varphi(x_0)$

(b) Wir betrachten

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & , x \ge 0\\ 0 & , x < 0\end{cases} \qquad \text{(Heavyside-Funktion)}$$

$\Longrightarrow \Theta \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ mit $\partial\Theta = \delta$ (im distributionellen Sinn).

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \partial\Theta, \varphi \rangle = -\langle \Theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

d.h. $\partial\Theta = \delta$. □

(c) Es seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Omega \subset \mathbb{R}, u \in C^1(\Omega \setminus \{x_0, \dots, x_n\})$, weiter sei $\partial_{\text{klass}} u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$.

$$\Longrightarrow \forall\, j \in \{0, \dots, n\} : u(x_j \pm 0) := \lim_{h \to 0^+} u(x_j \pm h)$$

existieren und es gilt

$$\partial u = \partial_{\text{klass}} u + \sum_{j=0}^n [u](x_j)\delta_{x_j}$$

mit $[u](x) := u(x+0) - u(x-0)$ (Sprung).

Beweis. Sei o.B.d.A. $n = 0$ ($n \geq 1$ analog). Sei $x_0 < x < y$ ($[x_0, y] \subset \Omega$).

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow && u(x) = u(y) - \int_x^y \partial_{\text{klass}} u(z)\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\substack{\text{Lebesgue} \\ \partial_{\text{klass}} u \in L_{1,\text{loc}}}}{\underset{x \searrow x_0}{\Longrightarrow}} && u(x_0+0) \text{ existiert, analog } u(x_0-0) \text{ mit } y > x > x_0 \\
&\Longrightarrow && u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)
\end{aligned}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), 0 < \varepsilon \ll 1$ (mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \Omega$), dann ist

$$\begin{aligned}
\langle \partial u, \varphi \rangle &= -\int_\Omega u\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega \setminus (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} u\varphi'\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u\varphi'\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[\text{Lebesgue}]{\varepsilon \to 0} 0} \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\Omega \setminus (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} \partial_{\text{klass}} u\varphi\,\mathrm{d}x + u(x_0+\varepsilon)\varphi(x_0+\varepsilon) \\
&\qquad - u(x_0-\varepsilon)\varphi(x_0-\varepsilon) \\
&\xrightarrow[\text{Lebesgue}]{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \partial_{\text{klass}} u\varphi\,\mathrm{d}x + [u](x_0)\varphi(x_0) \\
&= \langle \partial_{\text{klass}} u, \varphi \rangle + \langle [u](x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $n = 0$ folgt. □

Bemerkungen und Definitionen 3.11. (a) **Translation:** Wir definieren $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$, $x, a \in \mathbb{R}^n, f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, damit gilt

$$\begin{aligned}\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a f, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\,\mathrm{d}x = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Definition. Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow \tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (Translation).

(b) **Spiegelung:** Sei $\check{f}(x) := f(-x), x \in \mathbb{R}^n, f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad \langle \check{f}, \varphi\rangle = \langle f, \check{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Definition. $T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \langle \check{T}, \varphi\rangle := \langle T, \check{\varphi}\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(c) **Faltung:** Es sei $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$

$$\Longrightarrow \quad \tau_x\check{\varphi} = \varphi(x - \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y = \langle f, \tau_x\check{\varphi}\rangle$$

Definition. Es seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann definieren wir

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \underset{\text{(a),(b)}}{=} \langle (\tau_{-x}T)\check{}, \varphi\rangle$$

Man kann zeigen dass $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\partial^\alpha(T*\varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha\varphi), \alpha \in \mathbb{N}^n$.

(d) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann

$$(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \tau_x\check{\varphi}\rangle = (\tau_x\check{\varphi})(0) = \varphi(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. $\delta * \varphi = \varphi$.

(e) Der Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(T) := &\text{ Komplement der größten offenen Teilmenge des } \mathbb{R}^n, \\ &\text{ auf dem } T \text{ verschwindet.}\end{aligned}$$

Das heißt, es gilt:

$$\langle T, \varphi\rangle = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset (\operatorname{supp}(T))^c.$$

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \,|\, \operatorname{supp}(T) \Subset \mathbb{R}^n\}$$

sind die Distributionen mit kompakten Träger.

Beispiel.
- $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\} \Longrightarrow \delta_{x_0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(f) **Erweiterung der Faltung auf Distributionen:** Man kann zeigen: Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ lässt sich $T * S = S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

(ii) $\delta * S = S$,

(iii) $\partial^\alpha S = (\partial^\alpha \delta) * S, \alpha \in \mathbb{N}^n$,

(iv) die so definierte Faltung erweitert die ursprüngliche Faltung zwischen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

(v) $*$ ist bilinear.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha u = f \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Definition. $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Fundamentallösung von

$$A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$, falls $AK = \delta$.

Bemerkung 3.12. (a) Fundamentallösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beweis. Falls $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = 0$ ist, so gilt für eine Fundamentallösung $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$A(T + K) = AK = \delta\,.$$ □

(b) **Malgrange-Ehrenpreis:** Jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten besitzt eine Fundamentallösung.

Theorem 3.13. *Es sei*

$$A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und sei $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung von A. Es sei weiter $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sowie $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ oder $K \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(a) *$u := K * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ löst $Au = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Diese Lösung wird als „distributionelle Lösung“ bezeichnet.*

(b) *$u = K * f$ ist die eindeutige Lösung von $Au = f$ in der Klasse aller Distributionen, die mit K faltbar sind.*

Beweis. (a) Wegen Bemerkung 3.11 ist $u = K * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert. Bemerkung 3.11 liefert ebenfalls

$$Au = A(K * f) = (AK) * f = \delta * f = f.$$

(b) Seien $u = K * f$ und $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ faltbar mit K und $Av = f$. Mit $w := u - v$ erhalten wir

$$Aw \underset{A \text{ linear}}{=} Au - Av = f - f = 0.$$

Also ist

$$w = \delta * w = (AK) * w = A(K * w) = K * \underbrace{Aw}_{=0} = 0,$$

damit folgt $u = v$. □

Beispiel 3.14 (Fundamentallösung des Laplace-Operators für $n = 1$). $(x \mapsto -x\Theta(x)) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist Fundamentallösung von $-\partial_x^2$.

Beweis. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle -\partial_x^2(-x\Theta), \varphi \rangle &= \langle x\Theta, \varphi'' \rangle \\
&= \int_0^\infty x\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{x\varphi'(x)\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

also ist $-\partial_x^2(-x\Theta) = \delta$. □

Kapitel 4

Harmonische Funktionen

Auch in diesem Kaptitel sei wieder Ω eine nicht-leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Laplace-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

mit dem Laplace-Operator

$$-\Delta := -\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2.$$

Diese Gleichung ist eine elliptische Differentialgleichung.

Definition. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch, falls $-\Delta u = 0$ in Ω erfüllt wird.

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend), und $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ω ist ein C^m-Gebiet (kurz: $\Omega \in C^m$) genau dann, wenn gilt, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^m-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Siehe dazu Abbildung 9.1.

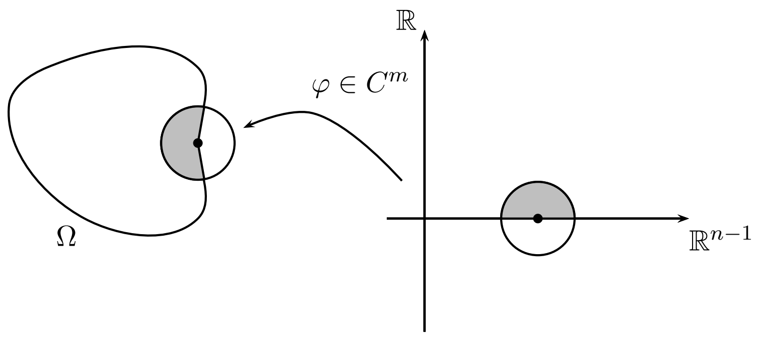

Abbildung 4.1: Untermannigfaltigkeit

Definition. Es sei $u \in C^m(\bar{\Omega})$. Genau dann ist $u \in C^m(\Omega)$ und alle Ableitungen der Ordnung $\leq m$ lassen sich auf $\bar{\Omega}$ stetig fortsetzen.

Satz 4.1. *Es $\Omega \in C^1$ beschränkt und ν äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Außerdem seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ und $w \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(i) ***Gauß:***

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} w(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

(ii) ***1. Greensche Formel:***

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

mit $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$.

(iii) ***2. Greensche Formel:***

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

Beweis. (i) Analysis III.

(ii) Wende (i) auf $w = v\nabla u$ an.

(iii) vertausche u und v in (ii). ☐

Bemerkung 4.2. $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ist harmonisch und Ω wie in Satz 4.1. Dann ist mit $v = 1$

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

4.1 Fundamentallösung

Sei $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung von $-\Delta$, also gelte $-\Delta K = \delta$. Dann ist $u = K * f$ für alle $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Betrachten wir die orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. $A^TA = 1$). Gilt $-\Delta u(x) = 0$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so gilt ebenfalls $-\Delta u(Ax) = 0$. Die Lösungen u sind also rotationsinvariant. Nun ist es naheliegend rotationssymmetrische Lösungen, also Lösungen für die $u(x) = \varphi(r)$ mit $r = |x|$ gilt, zu suchen. Wegen $\frac{\partial}{\partial x_j} r = \frac{x_j}{|x|}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} &\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \varphi(r) = \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\varphi'(r)\frac{x_j}{r}\right) \\
=&\sum_{j=1}^n \left(\varphi''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \varphi'(r)\frac{1}{r} - \varphi'(r)\frac{x_j}{r^2}\frac{x_j}{r}\right) \\
=&\varphi''(r) + \frac{n}{r}\varphi'(r) - \frac{1}{r}\varphi'(r).
\end{aligned}$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
&& \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) &= 0 \\
\iff && \frac{d}{dr}\ln(\varphi'(r)) &= \frac{1-n}{r} \\
\iff && \ln(\varphi'(r)) &= (1-n)\ln r + c \qquad \iff \varphi'(r) = c_0 r^{1-n} \\
\iff && \varphi(r) &= \begin{cases} c_1 r^{2-n} + c_2 & , n > 2 \\ c_1 \ln r + c_2 & , n = 2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Lemma 4.3. *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ harmonisch und radial-symmetrisch, d.h. $-\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $u(x) = \varphi(r)$ mit $r = |x|$, so ist φ von der Form*

$$\varphi(r) = \begin{cases} c_1 r^{2-n} + c_2 & , n > 2 \\ c_1 \ln r + c_2 & , n = 2 \end{cases}$$

mit $r > 0$. Umgekehrt ist jedes solches φ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definition. Es sei $r > 0$ und $S_r^{n-1} := \partial\mathbb{B}_{R^n}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$. Wir definieren $S^{n-1} := S_1^{n-1}$ und

$$\omega_n := \lambda_{n-1}(S^{n-1}) = \mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Dabei ist Γ die Gamma-Funktion, die durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$$

definiert ist. Somit ist $\mathrm{vol}(S_r^{n-1}) = r^{n-1}\omega_n = r^{n-1}\,\mathrm{vol}(S^{n-1})$.

Definition (Newton-Potential)**.** Das Newton-Potential ist definiert als

$$\mathcal{N}_n(x) := \mathcal{N}(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & , n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)}|x|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}.$$

Theorem 4.4. *$\mathcal{N} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist Fundamentallösung von $-\Delta$ auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. $n = 2$: Übung

$n \geq 3$: Für alle $R > 0$ ist

$$\int_{\mathbb{B}(0,R)} |x|^{2-n}\,\mathrm{d}x \underset{\text{Pol-Koord.}}{=} \omega_n \int_0^R r^{2-n}r^{n-1}\,\mathrm{d}r.$$

Damit ist $\mathcal{N} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{B}(0,R)$ und $R > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta |x|^{2-n}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \le |x| \le R} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Green}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \int_{\varepsilon \le |x| \le R} \underbrace{\Delta |x|^{2-n}}_{=0} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{|x|=R} \underbrace{(|x|^{2-n} \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu |x|^{2-n})}_{=0} \, \mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_{|x|=\varepsilon} (|x|^{2-n} \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu |x|^{2-n}) \, \mathrm{d}\sigma \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Auf $[|x| = \varepsilon]$ ist $\nu(x) = -\frac{x}{|x|} = -\frac{x}{\varepsilon}$ und deshalb

$$
\partial_\nu \varphi(x) = \nabla\varphi(x) \cdot \nu(x) = -\frac{x \cdot \nabla\varphi(x)}{\varepsilon}, \quad |x| = \varepsilon.
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{|x|=\varepsilon} |x|^{2-n} \partial_\nu \varphi \, \mathrm{d}\sigma \right| &\le \varepsilon^{2-n} \int_{|x|=\varepsilon} \underbrace{\frac{|x|}{\varepsilon}}_{=1} |\nabla\varphi(x)| \, \mathrm{d}\sigma \\
&\le \varepsilon^{2-n} \|\nabla\varphi\|_\infty \underbrace{\operatorname{vol}(S_\varepsilon^{n-1})}_{=\omega_n \varepsilon^{n-1}} \\
&= c\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Ferner gilt auf $[|x| = \varepsilon]$:

$$
\partial_\nu |x|^{2-n} = \nabla |x|^{2-n} \cdot \nu(x) = \frac{(2-n)x}{|x|^n} \cdot \frac{-x}{\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n}.
$$

Damit können wir folgern, dass

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} -\varphi \partial_\nu |x|^{2-n} \, \mathrm{d}\sigma &= \lim_{\varepsilon \to 0} (2-n)\varepsilon^{1-n} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} (2-n)\omega_n \underbrace{\frac{1}{\operatorname{vol}(S_\varepsilon^{n-1})} \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \varphi \, \mathrm{d}\sigma}_{\to \varphi(0)},
\end{aligned}
\tag{4.3a}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\operatorname{vol}(S_\varepsilon^{n-1})} \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \varphi \, \mathrm{d}\sigma - \varphi(0) \right| &= \left| \frac{1}{\operatorname{vol}(S_\varepsilon^{n-1})} \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \varphi(x) - \varphi(0) \, \mathrm{d}\sigma \right| \\
&\le \max_{|x| \le \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.
\end{aligned}
\tag{4.3b}
$$

Aus (4.1), (4.2) und (4.3) folgt dann

$$\langle \Delta |x|^{2-m}, \varphi \rangle = \langle (2-n)\omega_n \delta, \varphi \rangle$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. □

Korollar 4.5 (Lösung der inhomogenen Laplace-Gleichung)**.** (a) *Für $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ löst $\mathcal{N} * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die Laplace-Gleichung*

$$-\Delta u = f$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) *Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |\log|y|| \,\mathrm{d}y < \infty \quad \textit{falls } n = 2.}_{\textit{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

Dann ist $\mathcal{N} * f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta(\mathcal{N} * f) = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a) Theorem 3.13 (a).

(b) $n = 2$: Übung.

$n \geq 3$: Für $R > 0$ sei

$$\chi_R(x) := \begin{cases} 1 & , |x| < R \\ 0 & , |x| \geq R \end{cases}.$$

Dann folgt aus Theorem 4.4, dass $\chi_R \mathcal{N} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $(1 - \chi_R)\mathcal{N} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Damit ist

$$\mathcal{N} * f = \underbrace{(\chi_R \mathcal{N}) * f}_{\substack{\in L_1(\mathbb{R}^n) \\ \text{Satz 3.3 (i)}}} + \underbrace{((1-\chi_R)\mathcal{N}) * f}_{\substack{\in L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \\ \text{Satz 3.3 (i)}}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Ferner gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta(N * f), \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{N} * f)(x) \Delta\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(x-y) \Delta\varphi(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(x) \Delta\varphi(x+y) \,\mathrm{d}x = \langle \underbrace{\Delta\mathcal{N}}_{-\delta}, \tau_{-y}\varphi \rangle = -\varphi(y)\,. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit

$$\langle -\Delta(\mathcal{N} * f), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y) \,\mathrm{d}y = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

□

Bemerkung. Korollar 4.5 (b) spiegelt Theorem 3.13 wieder. Allerdings sind weder $\mathcal{N} \in \mathcal{E}'$ noch $f \in \mathcal{E}'$, sodass Theorem 3.13 nicht direkt angewendet werden kann.

4.2 Darstellungsformeln und Folgerungen

Theorem 4.6 (Darstellungsformel). *Beschreibe $\Omega \in C^1$ ein Gebiet und sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann ist für alle $x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} u(x) = & \overbrace{-\int_\Omega \Delta u(y) \mathcal{N}(x-y) \, \mathrm{d}y}^{\textit{Newton-Potential}} \\ & + \int_{\partial\Omega} \Big(\underbrace{\mathcal{N}(x-y)\partial_\nu u(y)}_{\textit{Einfachschicht-Potential}} - \underbrace{u(y)\partial_\nu \mathcal{N}(x-y)}_{\textit{Doppelschicht-Potential}} \Big) \, \mathrm{d}\sigma(y) \end{aligned}$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$ mit $\overline{\mathbb{B}}(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Nach Lemma 4.3 ist $\Delta_y \mathcal{N}(x-y) = 0$ für $y \in \Omega \setminus \overline{\mathbb{B}}(x,\varepsilon)$ beliebig. Wegen der Rotationssymmetrie ist außerdem $\mathcal{N}(x-y) = \mathcal{N}(y-x)$. Mit Hilfe der 2. Greenschen-Formel (Satz 4.1 (iii)) und der Feststellung, dass $\partial(\Omega \setminus \overline{\mathbb{B}}(x,\varepsilon)) = \partial\Omega \cup \partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{\mathbb{B}}(x,\varepsilon)} \mathcal{N}(x-y)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y = & \int_{\partial\Omega} (\mathcal{N}(y-x)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu \mathcal{N}(y-x)) \, \mathrm{d}\sigma(y) \\ & + \int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)} (\mathcal{N}(y-x)\partial_\nu u(y) \\ & \qquad - u(y)\partial_\nu \mathcal{N}(y-x)) \, \mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta u \in C(\bar{\Omega})$ und $\mathcal{N} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\int_{\Omega \setminus \mathbb{B}(x,\varepsilon)} \mathcal{N}(y-x)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \int_\Omega \mathcal{N}(y-x)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Für $|x-y| = \varepsilon$ gilt:

$$\mathcal{N}(y-x) = \left\{ \begin{array}{ll} c \cdot \varepsilon^{2-n} & , n \geq 3 \\ c \cdot \log \varepsilon & , n = 2 \end{array} \right\} = \mathcal{N}(\varepsilon).$$

Nun ist

$$\left| \int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)} \mathcal{N}(y-x)\partial_\nu u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) \right| \leq \|\nabla u\|_\infty \mathcal{N}(\varepsilon) \underbrace{\mathrm{vol}(S_\varepsilon^{n-1})}_{=\omega_n \varepsilon^{n-1}} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.$$

Es ist $\nu(y) = \frac{y-x}{\varepsilon}$ auf $|x-y| = \varepsilon$. $\nu(y)$ zeigt also nach Innen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)} u(y)\partial_\nu \mathcal{N}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma(y) &\underset{\substack{\text{Def. } N\\ \partial_\nu N = \nabla N\cdot\nu}}{=} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\cdot\int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ = \frac{1}{\mathrm{vol}(S_\varepsilon^{n-1})}\int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) &\xrightarrow[\substack{\text{vgl. Beweis zu}\\ \text{Theorem 4.4}}]{\varepsilon\searrow 0} u(x).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Aus (4.1)-(4.4) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.7. (a) Es sei $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$. Dann ist

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y)\mathcal{N}(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

d.h. u ist ein reines Newton Potential. Ist u harmonisch, so ist

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (\mathcal{N}(y-x)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu\mathcal{N}(y-x))\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

(b) Es könnte der Eindruck entstehen, dass das Problem

$$\begin{aligned}-\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega\\ u|_{\partial\Omega} &= f\\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} &= g\end{aligned}$$

durch

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (\mathcal{N}(x-y)g(y) - f(y)\partial_\nu\mathcal{N}(x-y))\,\mathrm{d}\sigma(y), \quad x\in\Omega \tag{$*$}$$

gelöst werden kann. Dies ist jedoch nicht richtig! Man kann im Allgemeinen nur eine beliebige Randbedingung vorgeben. Zum Beispiel hat das Dirichlet-Problem

$$\left|\; -\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f\right.$$

eine eindeutige Lösung (vgl. später). Das heißt, g muss dann gewissen Bedingungen unterliegen.

Lemma 4.8. *Es sei $f\in C(\Omega), x\in\mathbb{R}, r>0$ und $\overline{\mathbb{B}(x,r)}\subset\Omega$. Dann ist*

$$\int_{\mathbb{B}(x,r)} f(y)\,dy = \int_0^r \int_{\partial\mathbb{B}(x,s)} f(y)\,d\sigma(y)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis. Polarkoordinaten. □

Theorem 4.9 (Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch auf Ω, $x \in \Omega, r > 0$ und $\overline{\mathbb{B}(x,r)} \subset \Omega$. Dann ist*

$$u(x) = \underbrace{\frac{1}{\operatorname{vol}(\partial\mathbb{B}(x,r))} \cdot \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)}_{\textit{Sphärisches Mittel}} = \underbrace{\frac{1}{\operatorname{vol}(\mathbb{B}(x,r))} \cdot \int_{\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y}_{\textit{Kugelmittel}}.$$

Beweis. Wir wissen, dass

$$\operatorname{vol}(\partial\mathbb{B}(x,r)) = \omega_n r^{n-1}$$

und

$$\operatorname{vol}(\mathbb{B}(x,r)) = \frac{1}{n}\omega_n r^n$$

ist. Theorem 4.6 mit $\Omega = \mathbb{B}(x,r)$ liefert uns

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \mathcal{N}(x-y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu \mathcal{N}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma(y). \tag{4.5}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \underbrace{\mathcal{N}(x-y)}_{=\mathcal{N}(r)} \partial_\nu u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \mathcal{N}(r) \cdot \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \partial_\nu u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \overset{\Delta u = 0}{\underset{\text{Gauß}}{=}} 0. \tag{4.6}$$

Auf $\partial\mathbb{B}(x,r)$ gilt $\nu(y) = \frac{y-x}{|x-y|}$. Damit zeigt ν nach Außen.

Für $n > 2$ gilt:

$$\partial_\nu \mathcal{N}(x-y) = -\frac{1}{\omega_n}|y-x|^{1-n} = -\frac{r^{1-n}}{\omega_n}, \quad y \in \partial\mathbb{B}(x,r). \tag{4.7}$$

Gleichungen (4.5)-(4.7) liefert uns

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y). \tag{4.8}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{Lemma 4.8}}{=} \int_0^r \int_{\partial\mathbb{B}(x,s)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}s \overset{(4.8)}{=} \int_0^r \omega_n s^{n-1} u(x)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\omega_n r^n}{n} u(x),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 4.10. *Sei $u \in C(\Omega)$ und für alle Kugeln $\overline{\mathbb{B}(x,r)} \subset \Omega$ gelte die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \cdot \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Dann ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und u harmonisch.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{B}(0,1))$ mit $\int_{\mathbb{B}(0,1)} \varphi = 1$ und $\varphi(x) = \Psi(|x|)$ für $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Sei außerdem $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \bar{\mathbb{B}}(x,\varepsilon) \subset \Omega\}$. Mit $x \in \Omega_\varepsilon$ ist dann $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon(x - \cdot)) \Subset \Omega$. Nun ist

$$\begin{aligned}
(u * \varphi_\varepsilon)(x) = \quad & \int_{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} u(x-y) \underbrace{\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}}_{=\varphi_\varepsilon(y)} \,\mathrm{d}y \overset{\bar{y}=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{B}(0,1)} u(x-\varepsilon y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
\overset{\text{Lemma 4.8}}{=} & \int_0^1 \int_{\partial\mathbb{B}(0,s)} u(x-\varepsilon y) \underbrace{\varphi(y)}_{=\Psi(s)} \,\mathrm{d}\sigma(y) ds \\
= \quad & \int_0^1 \Psi(s) \underbrace{\int_{\partial\mathbb{B}(0,s)} u(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}\sigma(y)}_{\substack{\overset{z=x-\varepsilon y}{=} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial\mathbb{B}(x,\varepsilon s)} u(z)\,\mathrm{d}\sigma(z) \\ = \varepsilon^{1-n}\omega_n(\varepsilon s)^{n-1}u(x)}} \,\mathrm{d}s \\
= \quad & \omega_n \int_0^1 \Psi(s)s^{n-1}\,\mathrm{d}s\, u(x)
\end{aligned}$$

die triviale Fortsezung von u. Es folgt nun aus

$$\begin{aligned}
1 = \int_{\mathbb{B}(0,1)} \varphi(y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{Lemma 4.8}}{=} \int_0^1 \int_{\partial\mathbb{B}(0,s)} \underbrace{\varphi(y)}_{=\Psi(s)} \,\mathrm{d}\sigma(y) ds \\
= \int_0^1 \Psi(s) \underbrace{\operatorname{vol}(\partial\mathbb{B}(0,s))}_{=\omega_n s^{n-1}} \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

dass $(u * \varphi_\varepsilon)(x) = u(x)$ mit $x \in \Omega_\varepsilon$ und $u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ ist. Für $\varepsilon > 0$ beliebig, ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Wir nehmen nun an, das u nicht harmonisch ist. Somit existieren ein $x \in \Omega$ und ein $r_0 > 0$ mit $\Delta u(y) > 0 \,\forall\, y \in \mathbb{B}(x, r_0)$. Dann ist

$$u(x) \overset{\text{MWE}}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \overset{y=x+rz}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} u(x+rz)\,\mathrm{d}\sigma(z)$$

unabhängig von $r \in (0, r_0)$. Differentation nach r liefert uns

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}\sigma(z) \\
&\overset{y=x+rz}{=} \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y > 0. \qquad \sharp
\end{aligned}$$

Also ist u harmonisch. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.11. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Aus Theorem 4.9 und Satz 4.10 folgt die Behauptung. □

Theorem 4.12 (Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und reellwertig.*

(a) *Gilt $A := \sup_{x\in\Omega} u(x) < \infty$, so ist entweder $u(x) < A$ für alle $x \in \Omega$ oder $A \equiv u$*

(b) *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ und Ω beschränkt. Dann ist $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Das heißt, Maximum und Minimum werden bei harmonischen Funktionen immer auf dem Rand angenommen.*

Beweis. (a) Sei $\Omega_A = \{x \in \Omega \mid u(x) = A\} = u^{-1}[\{A\}]$. Dann ist Ω_A abgeschlossen in Ω.

Wir wählen nun ein $x_0 \in \Omega_A$ und ein $r > 0$ so, dass für $\bar{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \Omega$ ist. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt $u(y) = A$ für alle $y \in \mathbb{B}(x_0, r)$. Somit ist Ω_A offen in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, muss $\Omega_A = \Omega$ oder $\Omega_A = \emptyset$ sein. Daraus folgt die Behauptung.

(b) Übung. □

Bemerkung 4.13. (a) Analoges gilt für das Minimum mit $u \mapsto -u$.

(b) Sei Ω beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von $\Delta u = 0$ in Ω mit $u|_{\partial\Omega} = g$ und $g \geq 0$. Dann ist $u(x) > 0$ in Ω, falls $g(x_0) > 0$ für $x_0 \in \partial\Omega$ ist.

Beweis. Sei $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \geq 0$. Dann ist $u \geq 0$ in $\bar{\Omega}$. Wir nehmen an, es existiere ein $x_1 \in \Omega$ mit $u(x_1) = 0$. Dann wäre aber $u \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$ nach dem Maximumsprinzip. $\sharp$ □

Korollar 4.14 (Identitätssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u_j \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), j = 1, 2,$ mit*

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 \\ u_1|_{\partial\Omega} &= u_2|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Dann ist $u_1 \equiv u_2$ in $\bar{\Omega}$.

Insbesondere hat $-\Delta u = f$ in Ω höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. Sei $w := u_1 - u_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 \\ w|_{\partial\Omega} &= u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

und $max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0$. Analog verfahren wir für $-w$ und erhalten $w \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$. □

Satz 4.15 (Liouville)**.** *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und harmonisch. Dann ist $u \equiv c = const.$*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $R > |x|$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &\overset{\text{MWE}}{=} \frac{n}{\omega_n R^n} \left| \int_{\mathbb{B}(x,R)} u(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{B}(0,R)} u(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \frac{n\|u\|_\infty}{\omega_n R^n} \left(\int_{\mathbb{B}(x,R)\setminus\mathbb{B}(0,R)} 1\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{B}(0,R)\setminus\mathbb{B}(x,R)} 1\,\mathrm{d}y \right) \\
&\leq \frac{n\|u\|_\infty}{\omega_n R^n} \int_{R-|x|<y<R+|x|} 1\,\mathrm{d}y = \frac{n\|u\|_\infty \omega_n}{\omega_n R^n} \int_{R-|x|}^{R+|x|} r^{n-1}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\|u\|_\infty}{R^n} ((R+|x|)^n - (R-|x|)^n) \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also ist $u(x) = u(0)$ und somit konstant. ☐

Theorem 4.16 (Harnacksche Ungleichung)**.** *Für alle Teilgebiete $\Omega' \Subset \Omega$ existiert ein $c = c(\Omega', \Omega) > 0$, für das gilt:*

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u$$

für alle harmonischen $u \in C^2(\Omega)$ mit $u \geq 0$.

Beweis. (i) Sei $\Omega' = \mathbb{B}(x_0, r) \subset \mathbb{B}(x_0, 4r) \subset \Omega$. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{B}(x_0, r)$. Dann ist $\mathbb{B}(y_1, r) \subset \mathbb{B}(y_2, 3r)$. Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch mit $u \geq 0$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt

$$\begin{aligned}
u(y_1) &= \frac{n}{\omega_n r^n} \cdot \int_{\mathbb{B}(y_1,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \overset{u\geq 0}{\leq} \frac{n3^n}{\omega_n (3r)^n} \cdot \int_{\mathbb{B}(y_2,3r)} u(y)\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{MWE}}{=} 3^n \cdot u(y_2).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sup_{\mathbb{B}(x_0,r)} u \leq 3^n \inf_{\mathbb{B}(x_0,r)} u.$$

(ii) Sei $\Omega' \Subset \Omega$ ein beliebiges Gebiet. Dann existiert ein $r > 0$ mit $r < \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Da $\bar{\Omega}'$ kompakt ist, gilt für $x_1, \ldots, x_m \in \bar{\Omega}'$, dass

$$\bar{\Omega}' \subset \bigcup_{j=1}^{m} \mathbb{B}(x_j, r).$$

Da Ω' zusammenhängend ist, können y_1 und y_2 durch einen Weg über m Punkte in Ω' verbunden werden. Deshalb ist mit Hilfe von (i) $u(y_1) \leq 3^{nm} u(y_2)$. Daraus folgt die Behauptung. ☐

Bemerkung 4.17. Das Maximumprinzip und die Harnacksche Ungleichung gelten für allgemeine elliptische Differentialoperatoren L der Form

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i u$$

mit $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Kapitel 5

Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung

Wir treffen wieder eine Generalvoraussetzung: $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein C^∞-Gebiet.

Dann betrachten wir das Problem

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right. \tag{DP}$$

wobei $f : \Omega \to \mathbb{K}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{K}$ gegeben sind.

Bemerkung 5.1. (a) Ist Ω beschränkt, so hat (DP) nach Korollar 4.14 höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Jedoch bestitzt (DP) nicht immer eine (klassische) Lösung.

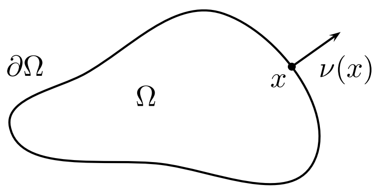

Abbildung 5.1: Neumannproblem

(b) Das Neumannproblem für die Laplace-Gleichung

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}\right. \tag{NP}$$

hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen, denn ist u Lösung, dann ist auch $u + c$ Lösung für alle $c \in \mathbb{K}$. Ist Ω beschränkt und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung, so ist

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma(x) = -\int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}\sigma(x).$$

(c) Abstrakte Lösungen für (DP) und (NP) folgen in Kapitel 7.

Bemerkung 5.2. (a) Um (DP) zu lösen, genügt es die beiden Teilprobleme

$$-\Delta v = f \qquad \text{in } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{A}$$

$$-\Delta w = 0 \qquad \text{in } \Omega, w|_{\partial\Omega} = g \tag{B}$$

zu lösen. Dann ist $u := v + w$.

(b) Die Probleme (A) und (B) sind im wesentlichen äquivalent. Exemplarisch gilt:

- Wenn (A) lösbar und $\tilde{g} \in C^2(\bar{\Omega})$ existiert mit $\tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$, so löse $-\Delta v = -\Delta\tilde{g}$ mit $v|_{\partial\Omega} = 0$. Setze $w := \tilde{g} - v$. Dann ist $-\Delta w = 0$ in Ω mit $w|_{\partial\Omega} = g$.
- Wenn (B) lösbar und $\bar{\Omega}$ kompakt ist, so wähle für $f \in C(\bar{\Omega})$ eine Forsetzung $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann erfüllt nach Korollar 4.5 $\tilde{v} := \mathcal{N} * \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $-\Delta\tilde{v} = \tilde{f}$. Lösen wir nun $-\Delta w = 0$ in Ω mit $w|_{\partial\Omega} = \tilde{v}|_{\partial\Omega}$ und setzen $v := \tilde{v} - w$, so erhalten wir

$$-\Delta v = f \quad \text{in } \Omega\,, \qquad v|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Im Folgenden ist $\mathcal{N}$ immer das Newtonpotential.

Definition. Eine Funktion $G : \Omega \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für Ω, falls

(i) Für alle $x \in \Omega$ ist $G(x, \cdot) - \mathcal{N}(x - \cdot) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch.

(ii) $G(x, y) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$.

Bemerkung 5.3. (a) Es ist $\mathcal{N}(x - \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Für alle $x \in \Omega$ sei $\Psi(x, \cdot) := G(x, \cdot) - \mathcal{N}(x - \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Die Funktion Ψ löst

$$\left|\begin{array}{rl} -\Delta_y \Psi(x, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Psi(x, \cdot) = -\mathcal{N}(x - \cdot) & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

(b) Für alle $x \in \Omega$ per Definition und Lemma 4.3 $-\Delta_y G(x, y) = 0$ für alle $y \in \Omega \setminus \{x\}$, und $G(x, \cdot)$ hat an der Stelle $y = x$ dieselbe Singularität wie $\mathcal{N}(x - \cdot)$.

(c) Ist Ω beschränkt, so gibt es höchstens eine Greensche Funktion.

Beweis. (a) und Korollar 4.14 (Identitätssatz). □

(d) Falls Ω nicht beschränkt ist, so ist (c) im Allgemeinen falsch (z.B. bei $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$.

(e) Wenn Ω beschränkt (und C^∞) ist, so existiert eine (eindeutige) Greensche Funktion (ohne Beweis). Jedoch ist es oft schwierig, diese Greensche Funktion zu finden. Ausnahme ist $\Omega = \mathbb{B}(0,r)$.

Satz 5.4 (Symmetrie)**.** *Sei G eine Greensche Funtkion für Ω. Dann ist*

$$G(x,y) = G(y,x)$$

für alle $x, y \in \Omega$.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $x_1 \neq x_2$ und $B_j := \mathbb{B}(x_j, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Weiter sei $\Omega' = \Omega \setminus (B_1 \cup B_2)$. Dann ist $G(x_j, \cdot) \in C(\bar{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$ und $-\Delta_y G(x_j, y) = 0$ mit $y \in \Omega'$. Satz 4.1 liefert uns

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega'} \Big(\underbrace{G(x_1,y)}_{=0,\ y\in\partial\Omega} \partial_{\nu(y)} G(x_2,y) - \underbrace{G(x_2,y)}_{=0,\ y\in\partial\Omega} \partial_{\nu(y)} G(x_1,y) \Big) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \left(\int\limits_{\partial B_1} + \int\limits_{\partial B_2} \right) (G(x_1,y)\partial_{\nu(y)} G(x_2,y) - G(x_2,y)\partial_{\nu(y)} G(x_1,y)) \mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei ist $G(x_2, \cdot) \in C^1(\mathbb{B}(x_1, \varepsilon))$ und aus Bemerkung 5.3 (b) folgt für $n \geq 3$, dass $|G(x_1,y)| = \varepsilon^{2-n}$ ist. Der Fall $n = 2$ ist Übung.

Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_1} G(x_1,y)\partial_\nu G(x_2,y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \right| &\leq c\varepsilon^{2-n} \overbrace{\max_{y\in\mathbb{B}(x_1,\varepsilon_0)} |\nabla_y G(x_2,y)|}^{\leq c} \underbrace{\mathrm{vol}(\partial B_1)}_{=\omega_n \varepsilon^{n-1}} \\ &\leq c\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{\partial\mathbb{B}_1} G(x_2,y)\partial_\nu \underbrace{G(x_1,y)}_{\substack{G(x_1,y)-\mathcal{N}(x_1,y) \\ +\mathcal{N}(x_1,y)}} \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial\mathbb{B}_1} G(x_2,y)\partial_\nu \mathcal{N}(x_1,y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}(x_1,\varepsilon))} \int_{\partial\mathbb{B}(x_1,\varepsilon)} G(x_2,y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= -G(x_2,x_1)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Analog gelten (5.2) und (5.3) auch für das Integral über $\mathbb{B}_2$. Schließlich folgt mit (5.1)

$$0 = -G(x_2,x_1) + G(x_1,x_2)\,.$$ □

Bemerkung 5.5. (a) Aufgrund von Satz 5.4 definiert man $G(x,y) := 0$, falls $x \in \partial\Omega$ oder $y \in \partial\Omega$. Damit ist $G : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ symmetrisch.

(b) $G(\cdot,y) - \mathcal{N}(\cdot - y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist harmonisch.

Lemma 5.6. *Seien Ω und $\tilde{\Omega}$ zwei beschränkte C^∞-Gebiete mit entsprechenden Greenschen Funktionen G und $\tilde{G}$. Ferner sei $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Dann ist*

$$0 \le \tilde{G}(x,y) \le G(x,y)$$

für $x, y \in \tilde{\Omega}$.

Beweis. Sei $y_0 \in \Omega$. Dann ist $\lim_{x \to y_0} \mathcal{N}(x - y_0) = \infty$ und $G(\cdot, y_0) - \mathcal{N}(\cdot - y_0) \in C(\bar{\Omega})$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$G(x,y_0) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{B}(y_0,\varepsilon)\,. \tag{$*$}$$

Wir definieren $\omega := \Omega \setminus \bar{\mathbb{B}}(y_0,\varepsilon)$. Dann ist per Definition $(*)$ $G(\cdot,y_0) \ge 0$ auf $\partial\omega$ und $-\Delta_x G(\cdot,y_0) = 0$ in ω (Bemerkung 5.5 (b)). Das Maximumprinzip (Theorem 4.12) liefert $G(\cdot,y_0) \ge 0$ in ω und damit $G(x,y_0) \ge 0$ für alle $x, y_0 \in \Omega$.

Sei nun

$$\Phi(x,y) := G(x,y) - \tilde{G}(x,y) = (G(x,y) - \mathcal{N}(x-y)) - (\tilde{G}(x,y) - \mathcal{N}(x-y))$$

für $x, y \in \tilde{\Omega}$. Wir halten $x \in \tilde{\Omega}$ fest. Dann ist $\Phi(x,\cdot)$ harmonisch in $\tilde{\Omega}$. Für alle $y \in \partial\tilde{\Omega}$ gilt

$$\Phi(x,y) = \underbrace{G(x,y)}_{\ge 0} - \underbrace{\tilde{G}(x,y)}_{=0} \ge 0\,.$$

Das Maximum-Prinzip liefert dann

$$\Phi(x,\cdot) \ge 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega}\,.$$ □

Theorem 5.7 (Lösung des Dirichletproblems)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Greenscher Funktion G. Für $f \in C(\bar{\Omega})$ setze*

$$v(x) := \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

für $x \in \Omega$. Dann ist $v \in C^1(\bar{\Omega})$.

Gilt sogar $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ mit $\alpha \in (0,1)$, so ist $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ die eindeutige klassische Lösung von

$$-\Delta v = f \text{ in } \Omega\,, \quad v|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Beweis. Di Benedetto, Gilbarg-Trudinger. □

Theorem 5.8 (Poisson-Formel)**.** *Sei Ω ein C^∞-Gebiet mit Greenscher Funktion G. Für $g \in C(\partial\Omega)$ setzen wir*

$$w(x) := -\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu(y)} G(x,y) g(y) \, \mathrm{d}\sigma(y)$$

für $x \in \Omega$. Dann löst $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ das Problem

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega \,, \quad w|_{\partial\Omega} = g \,.$$

Der Ausdruck $\partial_{\nu(y)} G(x,y)$ heißt Poisson-Kern.

Beweis. Di Benedetto, Gilbarg-Trudinger. □

5.1 Dirichletproblem auf einer Kugel

Im folgenden Abschnitt sei immer $R > 0$ und $\Omega := \mathbb{B}(0,R)$. Wir definieren für $y \in \mathbb{R}^n$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \bar{y} &:= \frac{R^2}{|y|^2} y \,, \quad && y \neq 0 \,, \\ \bar{y} &:= \infty \,, && y = 0 \,. \end{aligned}$$

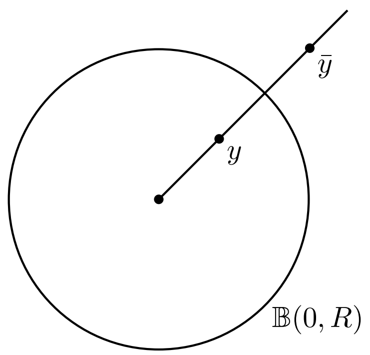

Abbildung 5.2: Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit y und $\bar{y}$ für $R^2 > |y|^2$.

Satz 5.9. *Sei $n \geq 3$ und*

$$G_R(x,y) = \mathcal{N}(x-y) - \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \mathcal{N}(x-\bar{y}) \,, \qquad x,y \in \mathbb{B}(0,R) \,.$$

Dann ist G_R die (eindeutige) Greensche Funktion für $\Omega = \mathbb{B}(0,R)$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}|y|^2|x-\bar{y}|^2 &= |y|^2(|x|^2 - 2\frac{R^2}{|y|^2}xy + \frac{R^4}{|y|^4}|y|^2)\\ &= |y|^2|x|^2 - 2R^2xy + R^4,\end{aligned}$$

also

$$|y||x-\bar{y}| = |x||y-\bar{x}|\,. \tag{5.4}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}\Psi(x,y) &:= G_R(x,y) - \mathcal{N}(x-y)\\ &= -\left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \underbrace{\mathcal{N}(x-\bar{y})}_{\underset{\text{Def.}}{=} c|x-\bar{y}|^{2-n}}\\ &\overset{(5.4)}{=} -\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \mathcal{N}(y-\bar{x})\,.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sei weiter $x \in \mathbb{B}(0,R)$. Dann ist $|\bar{x}| > R$ und wegen Gleichung (5.5) ist $\Psi(x,\cdot) \in C^2(\bar{\mathbb{B}}(0,R))$ mit $\Delta_y \Psi(x,y) = 0$ und $y \in \mathbb{B}(0,R)$.

Sei nun $y \in \partial\mathbb{B}(0,R)$. Dann ist $|y| = R$ und $\bar{y} = y$. Aus der Definition von G_R folgt, dass $\Psi(x,y) = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{B}(0,R)$ und $y \in \partial\mathbb{B}(0,R)$. □

Bemerkung 5.10. Für $n = 2$ ist die Greensche Funktion für $\Omega = \mathbb{B}(0,R)$ definiert durch

$$G_R(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|y| & ,x=0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\log|x-y| - \log\left|\frac{R}{|s|}x - \frac{|x|}{R}y\right|\right) & ,x \neq 0\end{cases}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 5.11. *Sei $n \geq 2$. Dann gilt für den Poissonkern auf $\mathbb{B}(0,R)$:*

$$P(x,y) := \partial_{\nu(y)} G_R(x,y) = \frac{|x|^2 - R^2}{\omega_n R} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$

für $x \in \mathbb{B}(0,R)$ und $y \in \partial\mathbb{B}(0,R)$.

Beweis. $n = 2$: Übung.

$n \geq 3$: Seien $x \in \mathbb{B}(0,R)$ und $y \in \partial\mathbb{B}(0,R)$. Dann ist $\nu(y) = \frac{y}{R}$ und $\bar{y} = y$.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\nu(y)} G_R(x,y) = \frac{y}{R} \cdot \nabla_y G_R(x,y) \\
=&\frac{y}{R}\nabla_y \left(\frac{1}{\omega_n(n-2)}|x-y|^{2-n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{1}{\omega_n(n-2)}|y-\bar{x}|^{2-n} \right) \\
=&\frac{1}{\omega_n R} y \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} + \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \right) \cdot \frac{y-\bar{x}}{|y-|x||^n} \\
=&\frac{1}{\omega_n R} \cdot \frac{1}{|x-y|^n} \underbrace{y \cdot \left(x - y + \frac{|x|^2}{R^2}(x-\bar{x}) \right)}_{\underset{|y|=R}{=}|x|^2-R^2} \\
=&\frac{|x|^2-R^2}{\omega_n R|x-y|^n}.
\end{aligned}
$$

□

Theorem 5.12 (Laplace-Dirichlet-Problem auf $\Omega = \mathbb{B}(0,R)$)**.** *Seien $n \geq 2, R > 0$ und $\Omega = \mathbb{B}(0,R)$.*

(a) *Für $\alpha \in (0,1)$ und $f \in C^\alpha(\bar{\mathbb{B}}(0,R))$ setze*

$$v(x) := \int_{\mathbb{B}(0,R)} G_R(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

für $x \in \mathbb{B}(0,R)$, wobei G_R wie in Satz 5.9 bzw. Bemerkung 5.10. Dann löst $v \in C^2(\mathbb{B}(0,R)) \cap C(\bar{\mathbb{B}}(0,R))$ die Gleichung $-\Delta v = f$ in $\mathbb{B}(0,R)$ mit $v|_{\partial\mathbb{B}(0,R)} = 0$.

(b) *Für $g \in C(\partial\mathbb{B}(0,R))$ sei*

$$w(x) := \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial\mathbb{B}(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \,\mathrm{d}\sigma(y)$$

für $x \in \mathbb{B}(0,R)$. Dann löst $w \in C^2(\mathbb{B}(0,R)) \cap C(\bar{\mathbb{B}}(0,R))$ die Gleichung $-\Delta w = 0$ in $\mathbb{B}(0,R)$ mit $w|_{\partial\mathbb{B}(0,R)} = g$.

Beweis. (a) Theorem 5.7, Satz 5.9, Bemerkung 5.10.

(b) Theorem 5.8, Satz 5.11. □

Bemerkung 5.13. (a) v und w sind eindeutig. (vgl. Korollar 4.14)

(b) Da w harmonisch ist, ist $w \in C^\infty(\mathbb{B}(0,R))$. (vgl. Korollar 4.11)

(c) $u := v + w$ löst $-\Delta u = f$ in $\mathbb{B}(0,R)$ mit $u|_{\partial\mathbb{B}(0,R)} = g$.

Kapitel 6

Sobolevräume

Auch in diesem Kapitel sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Definition. Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$W_p^m(\Omega) := \Big(\{ u \in L_p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \, \forall \, |a| \leq m \}, \|\cdot\|_{W_p^m} \Big)$$

heißt Sobolevraum der Ordnung m. Dabei ist

$$\|u\|_{W_p^m} := \|u\|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wenn $1 \leq p < \infty$. Im Fall $p = \infty$ ist $\|u\|_{W_p^m} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty$.

Bemerkung 6.1. (a) Es ist $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$.

(b) Seien $u \in W_p^m(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \varphi \, \mathrm{d}x &= \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \cdot \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

$v = \partial^\alpha u$ bezeichnen wir dann als schwache Ableitung von u.

Definition. Seien E, F normierte Vektorräume.

(a) Dann ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ genau dann, wenn $T : E \to F$ linear und stetig ist und wir definieren

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|e\|_E = 1} \|T(e)\|_F = \sup_{\substack{e \in E \\ e \neq 0}} \frac{\|T(e)\|_F}{\|e\|_E} \,.$$

Damit ist $\|T(e)\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|e\|_E$, d.h. T ist ein beschränkter Operator.

(b) Wir schreiben $E \hookrightarrow F$, wenn E Untervektorraum von F ist und $i : [e \mapsto e] \in \mathcal{L}(E, F)$ (d.h. es existiert ein $c > 0$, so dass $\|e\|_F \leq c \cdot \|e\|_E$ für alle $e \in E$).

(c) Wir schreiben $E \overset{d}{\hookrightarrow} F$ für $E \hookrightarrow F$ und $E \overset{d}{\subset} F$.

(d) $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ bedeutet $E \hookrightarrow F$ und beschränkte Mengen in E sind relativ kompakt in F, d.h. wenn $\bar{E}$ in F kompakt ist.

Theorem 6.2. *Es seien $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *$W_p^m(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

(b) *$H^m := W_2^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt*

$$(u|v)_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L_2}, \quad u, v \in H^m,$$

wobei

$$(u|v)_{L_2} := \int_\Omega u\bar{v} \, \mathrm{d}x \, .$$

(c) *$W_p^m(\Omega) \hookrightarrow W_p^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq m$.*

(d) *Es ist $\partial^\alpha \in \mathcal{L}(W_p^m(\Omega), W_p^{m-|\alpha|}(\Omega))$ für alle $|\alpha| \leq m$.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.3. *Es seien $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ein Mollifier, so gilt*

$$\varphi_\varepsilon * u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u \quad \text{in} \quad W_p^m(\Omega) \, .$$

(b) *Es ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} W_p^m(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. (a) Satz 3.4 liefert uns, dass $\varphi_\varepsilon * u \to u$ in $L_p(\Omega)$ gilt und

$$\partial^\alpha(\varphi_\varepsilon * u) = \varphi_\varepsilon * \partial^\alpha u \to \partial^\alpha u \quad \text{in} \quad L_p(\Omega)$$

mit $|\alpha| \leq m$. Damit folgt $\varphi_\varepsilon * u \to u$ in $W_p^m(\Omega)$.

(b) Sei $u \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi|_{\mathbb{B}(0,1)} = 1$. Wir definieren

$$u_\varepsilon := \chi(\varepsilon \, \cdot) u \, ,$$

und aus den Sätzen von Lebesgue und Leibniz folgt $u_\varepsilon \in W_p^m(\Omega)$ mit $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} u$ in $W_p^m(\Omega)$ (vgl. Beweis zu Satz 3.4).

Sei $\eta > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^m} < \frac{\eta}{2}$. Aus Satz 6.3 (a) folgt dann, dass ein $\delta > 0$ mit

$$\| \underbrace{\varphi_\varepsilon}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} * u_\varepsilon - u\|_{W_p^m} < \frac{\eta}{2}$$

existiert. □

Definition. Seien $m \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir definieren

$$\langle r_\Omega u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} := \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)}$$

mit der Restriktion $r_\Omega u := u|_\Omega$ für alle $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Es ist $r_\Omega \in \mathcal{L}(W_p^m(\mathbb{R}^n), W_p^m(\Omega))$. Aus Theorem 3.6 folgt, dass $r_\Omega u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Wir schreiben $\Omega \in \text{Ext}^m$, wenn Ω die C^m-Erweiterungseigenschaft hat. Dann existiert ein $e_\Omega \in \mathcal{L}(W_p^k(\Omega), W_p^k(\mathbb{R}^n))$ mit $r_\Omega \circ e_\Omega = \text{id}_{W_p^m(\Omega)}$ für alle $k \in \{0, \ldots, m\}$ und $1 \le p < \infty$.

Bemerkung 6.4. Es sei $\Omega \in \text{Ext}^m$. Dann existiert ein $c = c(\Omega, m) > 0$ mit

$$\|e_\Omega u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} \le c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

für alle $u \in W_p^k(\Omega)$ und

$$\|r_\Omega v\|_{W_p^k(\Omega)} \le \|v\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)}$$

mit $v \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 6.5. *Es sei $\mathbb{R}^n \in Ext^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren*

$$\mathbb{H} := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \in Ext^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Sind nun $\Omega \in C^m$ und $\partial\Omega$ kompakt, dann ist $\Omega \in Ext^m$.

Beweis. Literatur. □

Korollar 6.6. *Sei $\Omega \in Ext^m$. Dann ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} W_p^k(\Omega)$ für $1 \le k \le m$ und $1 \le p < \infty$.*

Speziell gilt: Ist $\Omega \in C^m$ beschränkt, so ist $C^\infty(\bar{\Omega}) \overset{d}{\subset} W_p^k(\Omega)$ für $0 \le k \le m$ und $1 \le p < \infty$.

Beweis. Seien $u \in W_p^k(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $e_\Omega u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 6.3 existiert ein $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|v - e_\Omega u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Dann ist

$$\|r_\Omega v - \underbrace{r_\Omega e_\Omega u}_{=u}\|_{W_p^k(\Omega)} \le \|v - e_\Omega u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon\,.$$

□

Definition. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$. Wir definieren

$$\mathring{W}_p^m(\Omega) := \mathrm{cl}_{W_p^m(\Omega)}\, \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

d.h. der Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$.

Bemerkung 6.7. (a) $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $W_p^m(\Omega)$, also ein Banachraum.

(b) $\mathring{W}_p^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ für $p < \infty$.

Beweis. Satz 6.3. □

Theorem 6.8 (Friedrichsche Ungleichung)**.** *Sei Ω beschränkt und $1 < p < \infty$. Dann existiert ein $c := c(\Omega, p)$ mit*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le c \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$$

für $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$.

Beweis. Sei $R > 0$ so, dass $\Omega \subset [-R, R]^n$ ist. Seien außerdem $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $x = (y, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$u(x) = \int_{-R}^{t} \partial_u u(y, \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

für $x \in \Omega$. Damit ist

$$|u(x)|^p \le \left(\int_{-R}^{t} 1 \cdot |\partial_u u(y, \tau)|\, \mathrm{d}\tau \right)^p \underset{\text{Hölder}}{\overset{1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}{\le}} (2R)^{\frac{p}{p'}} \int_{-R}^{t} |\partial_u u(y, \tau)|^p\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^p\, \mathrm{d}x &\le c \int_{[-R,R]^n} \int_{-R}^{t} |\partial_u u(y, \tau)|^p\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}(y, t) \\ &\underset{\mathrm{d}(y,t)=\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau}{\overset{\text{Fubini}}{\le}} c \cdot 2R \int_\Omega \underbrace{|\partial_u u(x)|^p}_{|\nabla u(x)|^p}\, \mathrm{d}x \le c \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\|u\|_{L_p(\Omega)} \le c \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$ für alle $u \in \mathcal{D}(\Omega) \overset{d}{\subset} \mathring{W}_p^1(\Omega)$. □

Bemerkung 6.9. Die Friedrichsche Ungleichung bleibt richtig, wenn Ω nur in einer Richtung (nicht notwendigerweise in Koordinatenrichtung) beschränkt ist.

Korollar 6.10. *Es sei Ω beschränkt (zumindest in einer Richtung) und $1 < p < \infty$. Dann ist $[u \mapsto \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}]$ eine äquivalente Norm auf $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. Für $p = 2$ definiert $(\nabla u | \nabla v)$ ein normerzeugendes Skalarprodukt auf $\mathring{W}_2^1(\Omega) =: \mathring{H}^1(\Omega)$.*

Beweis. Für alle $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} &\leq \|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} = \|u\|^p_{\mathring{W}_p^1(\Omega)} \\ &\underset{\text{Theorem 6.8}}{\leq} (c(\Omega, p) + 1)\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$ □

Lemma 6.11 (Sobolevsche Ungleichung)**.** *Für $1 \leq p < n$ sei*

$$\frac{1}{p*} := \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

der Sobolev-Exponent mit $p > p$. Dann existiert ein $c := c(n, p) > 0$ mit*

$$\|u\|_{L_{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in W_p^n(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Übung. □

Theorem 6.12 (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Seien $k, m \in \mathbb{N}^*$ mit $k \leq m$ und $1 \leq p, q < \infty$ mit*

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{m-k}{n} > 0. \tag{6.1}$$

Dann gilt:

(a) $\mathring{W}_p^m(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathring{W}_q^k(\Omega)$

(b) *Ist $\Omega \in Ext^m$, so ist $W_p^m(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} W_q^k(\Omega)$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussagen in umgekehrter Reihenfolge.

(b) Sei $\Omega \in \mathrm{Ext}^m$.

(i) Sei $n > p$ und $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p*}$. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W_p^1(\Omega) \arrow[rr, hook] \arrow[d, "e_\Omega"'] & & L_q(\Omega) \\ W_p^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r, hook, "\text{Lemma 6.11}"'] & L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_{p*}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, hook, "p \leq q \leq p*"'] & L_q(\mathbb{R}^n) \arrow[u, "r_\Omega"'] \end{tikzcd}$$

(ii) Sei $k = m-1$ und $u \in W_p^m(\Omega)$. Für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq m-1 = k$ ist $\partial^\alpha u \in W_p^1(\Omega)$. Nach (i) ist $\partial^\alpha u \in L_q(\Omega)$ und es existiert ein $c > 0$ mit

$$\|\partial^\alpha u\|_{L_q(\Omega)} \leq c\|\partial^\alpha u\|_{W_p^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$$

für alle $|\alpha| \leq m-1$. Also ist $W_p^m \hookrightarrow W_p^{m-1}$ für die Bedingungen aus (6.1).

(iii) Sei $k = m - 2$ und damit wegen (6.1) $p < \frac{n}{2}$. Wegen (ii) ist dann

$$\left.\begin{aligned} W_p^m &\hookrightarrow W_r^{m-1} \quad, \frac{1}{p} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ W_r^{m-1} &\hookrightarrow W_p^{m-2} \quad, \frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Nach (6.1) existiert ein r mit (6.2). Es gilt also $W_p^m \hookrightarrow W_q^{m-2}$ für $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2}{n} = \frac{1}{p} - \frac{m-k}{n}$.

Der Rest ergibt sich durch Induktion. Die Dichtheit folgt aus Korollar 6.6.

(a) Sei Ω beliebig und offen in $\mathbb{R}^n$. Es sei

$$\tilde{e}_\Omega := \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung von u in $\mathbb{R}^n$. Es ist $\tilde{e}_\Omega \in \mathcal{L}(W_p^m(\Omega), W_p^m(\mathbb{R}^n))$ und $r_\Omega \circ \tilde{e}_\Omega = \mathrm{id}_{W_p^m(\Omega)}$. Wir nun haben die folgenden Beziehungen:

$$\begin{tikzcd} \mathring{W}_p^m(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{e}_\Omega"'] & W_q^n(\Omega) \\ W_p^m(\mathbb{R}^n) \arrow[r, hook, "(b)"'] & W_q^n(\mathbb{R}^n) \arrow[u, "r_\Omega"'] \end{tikzcd}$$

Damit erhalten wir $\mathring{W}_p^m(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathring{W}_q^k(\Omega)$. $\square$

Theorem 6.13 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sei Ω beschränkt und C^1. Dann gilt*

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega)$$

für $1 \leq p < n$ und $1 \leq q < p*$.

Beweis. Theorem 6.12 und Theorem 6.5 liefern uns $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$.

Sei $B \subset W_p^1(\Omega)$ beschränkt. Dann genügt zu zeigen, dass B relativ kompakt in $L_q(\Omega)$ ist. Mit Theorem 6.5 können wir o.B.d.A. annehmen, dass jedes $u \in B$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist und einen Träger in V mit $U \Subset V = \mathring{V} \Subset \mathbb{R}^n$ hat. Außerdem ist B beschränkt in $W_p^1(\Omega)$.

Sei $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ein Mollifier und $u \in B$, $x \in \Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon * u(x)| &\leq \int_{\varepsilon\mathbb{B}^n} |u(x-y)| \varphi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\ &\underset{z=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{B}^n} |u(x - \varepsilon z)| \varphi(z)\,\mathrm{d}z \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|u\|_{L_1(\Omega)} \\ &\leq c(B)\,, \end{aligned} \tag{6.3}$$

da $W_p^1(V) \hookrightarrow L_p(V) \hookrightarrow L_1(V)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} |\partial_j(\varphi_\varepsilon * u)(x)| &\le \int_{\varepsilon\mathbb{B}^n} |u(x-y)||\underbrace{\partial_j\varphi_\varepsilon(y)}_{\frac{1}{\varepsilon}(\partial_j\varphi)(\frac{y}{\varepsilon})}|\,\mathrm{d}y \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_\infty \|u\|_{L_1(V)} \\ &\le c(B)\varepsilon^{-1}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Der Mittelwertsatz liefert uns

$$|\varphi_\varepsilon * u(x) - \varphi_\varepsilon * u(y)| \underset{(6.4)}{\le} \varepsilon^{-1}c(B)|x-y| \tag{6.5}$$

mit $x, y \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ und $u \in B$.

Wir definieren $B_\varepsilon := \{\varphi_\varepsilon * u \mid u \in B\}$. Nach (6.3), (6.5) und dem Satz von Arzela-Ascoli ist B_ε kompakt in $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L_1(\Omega)$, d.h.

$$B_\varepsilon \text{ ist relativ kompakt in } L_1(\Omega). \tag{6.6}$$

Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(x) - \varphi_\varepsilon * u(x)| &\underset{z=\frac{y}{\varepsilon}}{\le} \int_{\mathbb{B}^n} |u(x) - u(x-\varepsilon z)|\varphi(z)\,\mathrm{d}z \\ &\underset{\text{MWS}}{=} \int_{\mathbb{B}^n} \left| \int_0^1 \nabla u(x - t\varepsilon z)\cdot z\,\mathrm{d}t \right| \varphi(z)\,\mathrm{d}z \\ &\underset{\substack{\text{Cauchy-}\\ \text{Schwartz}}}{\le} \varepsilon\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{B}^n}\int_0^1 |\ \nabla u(\underbrace{x\ -\ t\ \varepsilon\ z}_{\substack{\in V \text{ für } \varepsilon \text{ klein,}\\ x\in\Omega}})|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Also ist

$$\|u - \varphi_\varepsilon * u\|_{L_1(\Omega)} \le c(\varphi)\varepsilon\|\nabla u\|_{L_1(V)}$$

mit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Aus Korollar 6.6 und der Tatsache, dass $r_\Omega\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} W_p^1(\Omega)$ ist, folgt

$$\|u - \varphi_\varepsilon * u\|_{L_1(\Omega)} \le c(\varphi, B)\varepsilon \tag{6.8}$$

für alle $u \in B$.

Sei nun $r > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $c_0(\varphi, B)\varepsilon_0 < \frac{r}{2}$. Aus (6.6) folgt dann, dass $w_1, \ldots, w_l \in B_{\varepsilon_0}$ existieren mit

$$B_{\varepsilon_0} \subset \bigcup_{j=1}^{l} \mathbb{B}_{L_1(\Omega)}\left(w_j, \frac{r}{2}\right). \tag{6.9}$$

Für ein beliebiges $u \in B$ ist wegen (6.8) $\|u - \varphi_{\varepsilon_0} * u\|_{L_1(\Omega)} < \frac{r}{2}$. Mit (6.9) folgt die Existenz eines $j \in \{1, \dots, l\}$ mit $\varphi_{\varepsilon_0} * u \in \mathbb{B}_{L_1(\Omega)}(w_j, \frac{r}{2})$. Also ist auch $u \in \mathbb{B}_{L_1(\Omega)}(w_j, \frac{r}{2})$. Da u beliebig ist, ist

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{l} \mathbb{B}_{L_1(\Omega)}(w_j, r)\,.$$

Da $r > 0$ beliebig war, ist B total beschränkt, also relativ kompakt. Somit ist

$$W_p^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L_1(\Omega)\,. \tag{6.10}$$

Seien nun $1 < q < p*$ und $p < n$. Dann existiert ein $\Theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{1}{q} = \frac{\Theta}{1} + \frac{1-\Theta}{p*}.$$

Die Hölder-Ungleichung liefert damit

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_q(\Omega)} &\le \|u\|_{L_1(\Omega)}^{\Theta} \|u\|_{L_{p*}(\Omega)}^{1-\Theta} \\ &\overset{\text{Lem. 6.11}}{\le} c\|u\|_{L_1(\Omega)}^{\Theta} \underbrace{\|u\|_{L_q(V)}^{1-\Theta}}_{\le c(B)} \\ &\le c(B)\|u\|_{L_1(\Omega)}^{\Theta}\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Aus (6.10), (6.11) und der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung folgt dann $W_p^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L_q(\Omega)$. ☐

Bemerkung 6.14. (a) Es sei Ω beschränkt und C^1. Dann ist $W_p^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L_q(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

Beweis. Aus $p < n$ folgt $p < p*$. $p \ge n(n-\varepsilon)* \nearrow_{\varepsilon \to 0} \infty$ ☐

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist $\mathring{W}_p^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L_p(\Omega)$.

Beweis. (a) + triviale Fortsetzung. ☐

Definition. Es sind für $0 < \nu < 1$

$$BUC^{\nu}(\Omega) := \big\{u : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|u\|_{BUC^{\nu}(\Omega)} < \infty\big\}$$

mit

$$\|u\|_{BUC^{\nu}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\nu}}$$

und

$$BUC^{k+\nu}(\Omega) := \Big\{u \in BUC^k(\Omega) \mid \partial^{\alpha} u \in BUC^{\nu}(\Omega)\,\forall\,|\alpha| \le k\Big\}\,.$$

Theorem 6.15 (Sobolev-Morrey). *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$ und $0 \le \nu \le m - \frac{n}{p}$ mit $\nu < m - \frac{n}{p}$, falls $m - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) $\mathring{W}_p^m(\Omega) \hookrightarrow BUC^\nu(\Omega)$

(ii) *Ist $\Omega \in Ext^m$, dann ist $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow BUC^\nu(\Omega) = BUC^\nu(\bar{\Omega})$.*

Beweis. Adams („Sobolev Spaces"), Triebel. □

Bemerkung. $-\Delta u = f$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$ und für $f \in C(\bar{\Omega})$ gibt es im Allgemeinen keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Deshalb betrachten wir $u \in W_p^2(\Omega)$. Es ergibt sich dabei allerdings die Frage, wie wir $u|_{\partial\Omega} = 0$ interpretieren.

Theorem 6.16 (Spursatz). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und C^2. Dann gilt für $1 < p < \infty$, dass ein $c > 0$ existiert mit*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L_p(\partial\Omega)} \le c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

für alle $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Die Restriktion $[u \mapsto u|_{\partial\Omega}]$ lässt sich also eindeutig stetig zum Spuroperator $\gamma_0 \in \mathcal{L}(W_p^1(\Omega), L_p(\partial\Omega))$ fortsetzen.

Beweis. Sei ν die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ mit $\|\nu(x)\| = 1$ mit $x \in \partial\Omega$. ν kann zu einem C^2-Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$ erweitert werden. Für $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |u|^p \,\mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial\Omega} (|u|^p \nu) \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma \underset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \operatorname{div}(|u|^p \nu) \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(p|u|^{p-1} \cdot |\partial_j u||\nu^j| + |u|^p \cdot |\partial_j \nu^j| \right) \mathrm{d}x \\
&\le c \cdot \left(\|\nu\|_{C^1(\bar{\Omega})} \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(p|u|^{p-1} \cdot |\partial_j u| + |u|^p \right) \mathrm{d}x \right) \\
&\underset{\text{Young}}{\le} c \cdot \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left(|u|^p + |\partial_j u| + |u|^p \right) \mathrm{d}x \,.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L_p(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

für alle $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Mit Korollar 6.6 folgt damit $C^\infty(\bar{\Omega}) \overset{d}{\subset} W_p^1(\Omega)$.

In den Übungen werden wir zeigen, dass eine Erweiterung $\gamma_0 \in \mathcal{L}(W_p^1(\Omega), L_p(\partial\Omega))$ existiert mit $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C\infty(\bar{\Omega})$. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.17. Es seien $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}^*$ und $\Omega \in C^2$ beschränkt. Dann gelten:

(i) Sei
$$\mathring{W}_p^m(\Omega) = \mathrm{cl}_{W_p^m(\Omega)}\, \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \partial^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$$
für alle $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Dann ist
$$\gamma_0(\partial^\alpha u) = 0, \quad \text{für alle } u \in \mathring{W}_p^m(\Omega),\ |\alpha| \leq m-1.$$

(ii) Gauß:
$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma, \text{ für alle } u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{K}^n) = (W_p^1(\Omega))^n.$$

Erinnerung.
$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$
hat im Allgemeinen keine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, falls $f \in C(\Omega)$. Nun muss also $u \in W_p^2(\Omega)$ sein, jedoch stellt sich dann die Frage, wie $u|_{\partial\Omega}$ zu interpretieren ist.

Die Idee ist nun
$$u \overset{!}{\in} \mathring{W}_p^2 = \{u \in W_p^2 \mid \gamma_0 u = 0\}$$
und wenn $f \in L_p(\Omega)$, dann existiert genau ein $u \in \mathring{W}_p^2(\Omega)$ für $-\Delta u = f(u)$.

Definition. Es sei $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty, 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

(a) Eine Folge (u_j) in L_p konvergiert schwach gegen $u \in L_p(\Omega)$
$$\begin{aligned} &:\Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u \text{ in } L_p(\Omega) \\ &:\Longleftrightarrow \forall\, v \in L_{p'}(\Omega) : \int_\Omega u_j v\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x \text{ in } \mathbb{K}\,. \end{aligned}$$

(b) Eine Folge $(u_j) \in W_p^m(\Omega)$ konvergiert schwach gegen $u \in W_p^m(\Omega)$
$$\begin{aligned} &:\Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u \text{ in } W_p^m(\Omega) \\ &:\Longleftrightarrow \partial^\alpha u_j \rightharpoonup \partial^\alpha u \text{ in } L_p(\Omega)\,\forall\,|\alpha| \leq m\,. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.18. Man kann „schwache Konvergenz“ (bzw. „schwache Topologie“) für allgemeine (z.B. Banach-/lokal konvexe Räume) definieren (s. z.B. Rudin). Wir haben in der Definition benutzt, dass gilt
$$(L_p(\Omega))' := \mathcal{L}(L_p(\Omega), \mathbb{K})\,, \quad (L_p(\Omega))' \cong L_{p'}(\Omega)\,,$$
denn ist $v \in L_{p'}(\Omega)$, so ist
$$\langle v, u\rangle := \int_\Omega vu\,\mathrm{d}x\,, \quad u \in L_p(\Omega)$$
und damit folgt mit Hölder, dass $\langle v, \cdot\,\rangle \in \mathcal{L}(L_p(\Omega), \mathbb{K})$ gilt.

Speziell gilt also $(L_2(\Omega))' \cong L_2(\Omega)$.

Bemerkung 6.19. Sei $1 \leq p < \infty, m \in \mathbb{N}$, dann ist:

(a) Ist $u_j \to u$ in $W_p^m(\Omega)$, dann folgt $u_j \rightharpoonup u$ in $W_p^m(\Omega)$, d.h. „starke Konvergenz ist stärker als schwache Konvergenz“.

Beweis. $\forall\, v \in L_{p'}(\Omega), |\alpha| \leq m$ gilt

$$\left| \int_\Omega (\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u) v \,\mathrm{d}x \right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|v\|_{L_{p'}(\Omega)} \|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \longrightarrow 0\,.$$

□

(b) Sei $1 < p < \infty, (u_j) \subset W_p^m(\Omega)$ beschränkt (bzgl. $\|\cdot\|_{W_p^m}$), dann folgt, dass eine Teilfolge $(u_{j'})$ und ein $u \in W_p^m(\Omega)$ existiert, so dass $u_j \rightharpoonup u$ in $W_p^m(\Omega)$, d.h. beschränkte Folgen sind relativ schwach kompakt.

Beweis. Vgl. Rudin. □

(c) Sei $M \subset W_p^m(\Omega)$ konvex und abgeschlossen (bzgl. $\|\cdot\|_{W_p^m}$), sowie $(u_j) \in M$ mit $u_j \rightharpoonup u$ in $W_p^m(\Omega)$, dann ist $u \in M$, d.h. „abgeschlossene konvexe Mengen sind schwach abgeschlossen“ (Theorem von Mazun; ohne Beweis, vgl. Rudin).

(d) Es sei $u_j \rightharpoonup u$ in $W_m^p(\Omega)$, dann folgt (u_j) ist beschränkt in $W_p^m(\Omega)$ (bzgl. $\|\cdot\|_{W_p^m}$), d.h. „schwach konvergente Folgen sind beschränkt“.

Beweis. Theorem von Mackey, vgl. Rudin. □

(e) $u_j \rightharpoonup u$ in $W_p^m(\Omega), u_j \rightharpoonup v$ in $W_p^m(\Omega)$, dann gilt $u = v$, d.h. „Grenzwerte von schwach konvergenten Folgen sind eindeutig“.

Beweis. Aus Theorem 3.6 folgt die Behauptung. □

(f) Sei $u_j \rightharpoonup u$ in $W_p^m(\Omega)$, dann folgt $\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq \liminf \|u_j\|_{W_p^m(\Omega)}$.

Kapitel 7

Hilbertraummethoden und schwache Lösungen

Unser Ziel ist es, elliptische Gleichungen wie

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

für nicht-reguläre f in allgemeinen Gebieten zu lösen.

7.1 Hilberträume und die Sätze von Riesz und Lax-Milgram

Als Generalvoraussetzung für dieses Kapitel sei $H = (H, (\cdot|\cdot))$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum mit $\|x\|^2 = (x|x)$.

Bemerkung 7.1. Für alle $x, y \in H$ gilt die Parallelogrammgleichung

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2$$

und die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Satz 7.2 (Approximationssatz)**.** *Es sei $\emptyset \neq M \subset H$ konvex und abgeschlossen. Dann existiert für alle $x \in H$ ein $m_x \in M$ mit*

$$\|x - m_x\| = \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\| .$$

Wir nennen $P_M : H \to M$ mit $x \mapsto m_x$ die Projektionen auf M.

Beweis. Seien $x \in H$ und $\alpha := \operatorname{dist}(x, M)$. Dann existiert für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $m_j \in M$ mit $\|x - m_j\| \leq \alpha + \frac{1}{j}$. Bemerkung 7.1 liefert uns dann

$$\begin{aligned} 2(\|x - m_j\|^2 + \|x - m_k\|^2) &= 4 \left\| \frac{m_j + m_k}{2} - x \right\|^2 + \|m_j - m_k\|^2 \\ &\geq 4\alpha^2 + \|m_j - m_k\|^2 . \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\|m_j - m_k\|^2 \leq 2\|x - m_j\|^2 + 2\|x - m_k\|^2 - 4\alpha^2 \xrightarrow{j,k\to\infty} 0 \,.$$

Also existiert wegen der Chauchy-Schwartzschen Ungleichung und der Abgeschlossenheit von M ein $m \in M$ mit $m_j \to m$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $m, n \in M$ mit $\|x - m\| = \alpha = \|x - n\|$. Weil $M \cap \bar{\mathbb{B}}(x, \alpha)$ konvex ist, liegt $\frac{m+n}{2} \in M \cap \bar{\mathbb{B}}(x, \alpha)$. Damit ist $\left\| \frac{m+n}{2} - x \right\| = \alpha$. Bemerkung 7.1 liefert uns

$$\|m - n\|^2 = 2 \cdot \|x - m\|^2 + 2 \cdot \|x - n\|^2 - 4 \cdot \left\| \frac{m+n}{2} - x \right\|^2 = 0 \,,$$

und damit $m = n$. □

Bemerkung. Satz 7.2 ist falsch in allgemeinen Banachräumen.

Satz 7.3 (Charakterisierung der Projektionen)**.** *$\emptyset \neq M \subset H$ sei abgeschlossen und konvex und $x \in H$. Dann gilt:*

$$m_0 = P_M(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}(m - m_0 | x - m_0) \leq 0$$

für alle $m \in M$.

Beweis. O.B.d.A. sei $0 \in M$ und $m_0 = 0$.

„$\Rightarrow$“ Wegen $0 = P_M(x)$ muss $\|x - tm\| \geq \|x\|$ für $m \in M$ und $0 \leq t \leq 1$ sein. Dann ist

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2t \cdot \operatorname{Re}(x|m) + t^2 \|m\|^2.$$

Damit ist $2 \operatorname{Re}(x|m) \leq 0$.

„$\Leftarrow$“ Für alle $m \in M$ ist $\operatorname{Re}(x|m) \leq 0$. Es folgt

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \|m\|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(m|x) = \|x - m\|^2.$$

Wegen $0 \in M$ ist $\operatorname{dist}(x, M) = \|x\|^2$ und damit $0 = P_M(x)$. □

Bemerkung 7.4. (a) Das Minimierungsproblem auf einer konvexen Menge ist

$$\|x - P_M(x)\| \stackrel{!}{=} \inf_{m \in M} \|x - m\| \,.$$

(b) Die Variationsgleichung (vgl. später) ist

$$\mathrm{Re}(m - P_M(x)|x - P_M(x)) \le 0, \quad \text{für alle } m \in M\,.$$

Korollar 7.5. *Es sei M ein abgeschlossener Untervektorraum von H und $x \in H$. Dann gilt:*

$$m_0 = P_M(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x - m_0 \perp M \quad \Longleftrightarrow \quad (x - m_0|m) = 0$$

für alle $m \in M$.

Beweis. Für alle $m \in M$ ist $m_0 = P_M(x)$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}(m - m_0|x - m_0) \le 0$. Da M ein Untervektorraum ist, ist auch $\mathrm{Re}(m|x - m_0) \le 0$. Da dies auch für $-m$ gilt, ist $\mathrm{Re}(m|x - m_0) = 0$. Also ist die Behauptung für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dafür ersetzen wir m durch $im \in M$ und erhalten

$$\mathrm{Re}(x|x - m_0) = 0, \quad \forall\, m \in M \iff \mathrm{Im}(m|x - m_0) = 0, \quad \forall\, m \in M\,.$$

Also ist $(m|x - m_0) = 0$ für alle $m \in M$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Definition. Es sei $\emptyset \neq A \subset H$ und wir definieren das orthogonale Komplement von A durch

$$A^\perp := \{x \in H \mid x \perp A\} := \{x \in H \mid (x|a) = 0 \,\forall\, a \in A\}\,.$$

Theorem 7.6. *Es sei M ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Dann ist*

$$H = M \oplus M^\perp,$$

d.h. jedes $x \in H$ hat eine eindeutige Zerlegung $x = x_M + x_{M^\perp}$ mit $x_M \in M$ und $x_{M^\perp} \in M^\perp$.

Beweis. Für alle $x \in H$ gilt

$$x = \underbrace{P_M(x)}_{\underset{\text{Satz 7.2}}{\in} M} + \underbrace{(x - P_M(x))}_{\underset{\text{Korollar 7.5}}{\in} M^\perp} \in M + M^\perp.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen sei $x = a + b$ mit $a \in M$ und $b \in M^\perp$. Dann ist

$$0 = a - P_M(x) + b - (x - P_M(x))\,.$$

Sei nun $c := a - P_M(x) \in M$. Es ist dann aber auch $c = (x - P_M(x)) - b \in M^\perp$, und somit $c \in M \cap M^\perp$. Dann ist $(c|c) = 0 = \|c\|^2$, also $c = 0$. □

Korollar 7.7. *Für $0 \neq A \subset H$ gilt:*

(i) $A^\perp$ *ist abgeschlossener Untervektorraum von* H*.*

(ii) $\overline{\operatorname{span} A} = (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}$.

(iii) *Es ist* A *ein Untervektorraum. Dann ist* $\bar{A} = H$ *genau dann wenn* $A^\perp = \{0\}$*.*

Beweis. (i)
$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \ker(\,\cdot\,|a)$$
ist abgeschlossener Untervektorraum.

(ii) Es ist klar, dass $A \subset A^{\perp\perp}$, da $(a|b) = 0$ für alle $b \in A^\perp$, $a \in A$. Wegen (i) ist $A^{\perp\perp}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H, ist also ein Hilbertraum.

Sei $B := \overline{\operatorname{span} A}$. Dann ist wegen $A \subset A^{\perp\perp}$, B auch abgeschlossener Untervektorraum von $A^{\perp\perp}$. Nach Theorem 7.6 ist
$$A^{\perp\perp} = B \oplus B^\perp.$$
Außerdem ist
$$B^\perp \subset A^\perp \cap A^{\perp\perp} = \{0\}\,,$$
denn $A \subset B$. Diese beiden Aussagen führen zu $A^{\perp\perp} = B$.

(iii) A sei Untervektorraum. Dann gilt laut Theorem 7.6:
$$A^\perp \oplus A^{\perp\perp} = A^\perp \oplus \bar{A}\,.$$
□

Theorem 7.8 (Riesz)**.** *Für alle* $f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}) =: H'$ *existiert genau ein* $J(f) \in H$ *mit*
$$f(x) = (x|J(f)), \quad x \in H.$$
Ferner gilt $\|J(f)\| = \|f\|_{H'}$*.*

Beweis. O.B.d.A. sei $f \neq 0$. Dann ist $\ker(f) \neq H$ und dach Korollar 7.7 (iii) existiert ein $y \in \ker(f)^\perp$ mit $\|y\| = 1$. Für alle $x \in H$ ist $f(x)y - f(y)x \in \ker(f)$. Damit ist $(f(x)y - f(y)x|y) = 0$. Somit ist
$$f(x) = f(x)(y|y) = (f(y)x|y) = (x|\overline{f(y)}y)$$
für alle $x \in H$.

Wir setzen $J(f) := \overline{f(y)}y \in H \setminus \{0\}$. Es ist
$$\|f\|_{H'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(J(f))|}{\|J(f)\|} = \frac{|(J(f)|J(f))|}{\|J(f)\|} = \|J(f)\|$$

und
$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(x|J(f))| \\ &\le \|x\|\|J(f)\|, \quad x \in H.\end{aligned}$$

Damit ist $\|f\|_{H'} \le \|J(f)\|$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen sei $f = (\,\cdot\,|y_1) = (\,\cdot\,|y_2)$. Dann ist $(x|y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in H$. Mit $x = y_1 - y_2$ ist $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, d.h. $y_1 = y_2$. □

Bemerkung 7.9. (a) E sei ein normierter Vektorraum. Dann bezeichnen wir mit $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ den (topologischen) Dualraum von E.

(b) $J : H' \to H$ mit $f \mapsto J(f)$ ist ein konjugiert linearer (d.h. $J(f + \alpha g) = J(f) + \overline{\alpha} J(g)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g \in H'$) isometrischer Isomorphismus. Damit lässt sich H' mit H identifizieren.

(c) Ist Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, dann ist wegen (b) $(L_2(\Omega))' \cong L_2(\Omega)$.

Theorem 7.10 (Lax-Milgram)**.** *Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform, d.h. für alle $x \in H$ sind $a(\,\cdot\,, x)$ und $\overline{a(x,\,\cdot\,)}$ linear (sesquilinear), es existiert ein $c > 0$ mit*

$$a(x, y) \le c\|x\|\|y\|, \quad \textit{für alle } x, y \in H \qquad (\textit{stetig})$$

und es existiert ein $\alpha > 0$ mit

$$\operatorname{Re} a(x, x) \ge \alpha\|x\|^2, \quad \textit{für alle } x \in H. \qquad (\textit{koerziv})$$

Dann existiert für alle $f \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ genau ein $u_f \in H$ mit

$$f(x) = a(x, u_f), \quad \textit{für alle } x \in H.$$

Ferner ist $\|u_f\|_H \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'}$.

Beweis. Sei $u \in H$ beliebig. Dann ist $[x \mapsto a(x, u)] \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}) = H'$. Nach Theorem 7.8 existiert dann genau ein $Su \in H$ mit

$$a(x, u) = (x|Su), \quad x \in H \quad \text{und} \quad \|Su\| = \|a(\cdot, u)\|_H \underset{\text{stetig}}{\le} c\|u\|_H\,. \tag{7.1}$$

Sei $S : H \to H$ mit $u \mapsto Su$. Wegen Bemerkung 7.9 (b) ist S linear, also $S \in \mathcal{L}(H, H) = \mathcal{L}(H)$.

Nun ist
$$\begin{aligned}\alpha\|u\|^2 &\underset{\text{koerziv}}{\le} \operatorname{Re} a(u, u) \le |a(u, u)| = (u|Su) \\ &\underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\le} \|u\|\|Su\|.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Somit ist $\|Su\| \ge \alpha\|u\|$.

Sei (u_j) eine Folge in H mit $Su_j \to v$ in H. Dann ist

$$\|u_j - u_k\| \underset{(7.2)}{\le} \frac{1}{\alpha}\|Su_j - Su_k\| \xrightarrow{j,k\to\infty} 0.$$

Da (u_j) eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $u \in H$ mit $u_j \to u$ in H. Da S stetig ist, gilt $Su_j \to Su$ und $Su_j \to v$. Also ist $v = Su \in \operatorname{im}(S)$. Somit ist $M := \operatorname{im}(S)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Nach Theorem 7.6 ist dann $H = M \oplus M^\perp$.

Sei $w \in M^\perp$. Dann ist $0 = |(w|Sw)| = |a(w,w)| \geq \alpha \|w\|^2$, da a koerziv ist. Es muss dann $w = 0$ bzw. $M^\perp = \{0\}$ sein. Aus Korollar 7.7 (iii) folgt $H = \bar{M}$. Da M abgeschlossen ist, gilt außerdem $M = \bar{M}$. Somit ist $S \in \mathcal{L}(H)$ bijektiv.

Sei $f \in H'$ beliebig. Dan existert laut Theorem 7.8 genau ein $J(f) \in H$ mit $f(x) = (x|J(f))$ für $x \in H$. Wir setzen $u_f := S^{-1}J(f) \in H$. Dann ist

$$a(x, u_f) \overset{(7.1)}{=} (x|Su_f) = (x|J(f)) = f(x) \in H.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen sei $a(x, y_1) = a(x, y_2)$ für alle $x \in H$. Mit $x := y_1 - y_2$ erhalten wir $a(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$. Da a koerziv ist, muss $y_1 - y_2 = 0$ bzw. $y_1 = y_2$ sein.

Ferner ist

$$\|u_f\| = \|S^{-1}J(f)\| \overset{(7.2)}{\leq} \frac{1}{\alpha}\|J(f)\| \overset{\text{Riesz}}{=} \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'}.$$

$\square$

Orthonormalbasen

Wir setzen nun voraus, dass $\dim H = \infty$ ist.

Definition. Sei $\Phi \subset H$.

(i) Φ heißt Orthogonalsystem (OS), wenn $\phi \perp \psi$ für alle $\phi, \psi \in \Phi$ und $\phi \neq \psi$.

(ii) Φ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn Φ ein Orthogonalsystem und $\|\phi\| = 1$ für alle $\phi \in \Phi$.

(iii) Φ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn Φ ein Orthonormalsystem und $\Phi^\perp = \{0\}$ ist.

Lemma 7.11. *Sei $\Phi := \{\phi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ein Orthogonalsystem. Dann gilt:*

(i) $\Phi \setminus \{0\}$ *ist linear unabhängig.*

(ii) $\sum \phi_j$ *konvergiert in H genau dann, wenn $\sum \|\phi_j\|^2 < \infty$ ist. Dann ist $\|\sum \phi_j\|^2 = \sum \|\phi_j\|^2$ eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.*

Beweis. (i) Seien $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\left\| \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j \middle| \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k \right) = \sum_{j,k=0}^{m} \alpha_j \overline{\alpha_k} \underbrace{(\phi_j|\phi_k)}_{=\delta_{jk}} = \sum_{j=0}^{m} |\alpha_j|^2.$$

(ii) Mit $S_N := \sum_{j\le N} \phi_j$ erhalten wir

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{j=M+1}^{N} \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=M+1}^{N} \|\phi_j\|^2.$$

□

Definition. Sei $\Phi := \{\phi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$. $(x|\phi_j)$ heißt Fourierkoeffizient von x bezüglich ϕ_j. $\sum_j (x|\phi_j)\phi_j$ heißt Fourierreihe von x bezüglich Φ.

Theorem 7.12. *Sei $\Phi := \{\phi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt:*

(a) *Für alle $x \in H$ konvergiert die Fourierreihe $\sum (x|\phi_j)\phi_j$ unbedingt. Ferner gilt für $N := \operatorname{span} \Phi = \Phi^{\perp\perp}$:*

$$P_N(x) = \sum (x|\phi_j)\phi_j \, .$$

(b) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Φ ist eine Orthonormalbasis.*

(ii) *Für alle $x \in H$ gilt: $x = \sum (x|\phi_j)\phi_j$.*

(iii) *Für alle $x \in H$ gilt: $\|x\|^2 = \sum |(x|\phi_j)|^2$.*

Beweis. (a)

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\| x - \sum_{j\le N} (x|\phi_j)\phi_j \right\|^2 \\ &\underset{\text{ONS}}{=} \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{j\le N} \underbrace{\overline{(x|\phi_j)}(x|\phi_j)}_{=|(x|\phi_j)|^2} + \sum_{j,k\le N} \underbrace{(x|\phi_j)\overline{(x|\phi_k)}}_{\underset{j=k}{=}|(x|\phi_j)|^2} \underbrace{(\phi_j|\phi_k)}_{\delta_{jk}} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j\le N} |(x|\phi_j)|^2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{j\le N} |(x|\phi_j)|^2 \le \|x\|^2, \quad \text{für alle } N.$$

Also konvergiert $\sum(x|\phi_j)\phi_j$ für alle $x \in H$. Für alle $\phi_k \in \Phi$ gilt

$$\Big(\sum(x|\phi_j)\phi_j - x\Big|\phi_k\Big) = \sum(x|\phi_j)\underbrace{(\phi_j|\phi_k)}_{\delta_{jk}} - (x|\phi_k) = 0\,.$$

Mit Korollar 7.5 folgt

$$P_N(x) = \sum(x|\phi_j)\phi_j$$

und damit die unbedingte Konvergenz.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii) Für alle $\phi_k \in \Phi$ ist

$$\Big(\underbrace{x - \sum(x|\phi_j)\phi_j}_{=:y}\Big|\phi_k\Big) = 0\,.$$

Damit ist $y \in \Phi^\perp = \{0\}$, da $\Phi^\perp$ eine Orthonormalbasis ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in \Phi^\perp$. Dann ist $(x|\phi_j) = 0$ für alle j. Wegen (ii) ist dann $x = 0$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Es gilt

$$\Big\|x - \sum(x|\phi_j)\phi_j\Big\|^2 \underset{\substack{\text{ONS}\\ \text{vgl. (a)}}}{=} \|x\|^2 - \sum|(x|\phi_j)|^2,$$

damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 7.13. Jeder Hilbert-Raum besitzt eine Orthonormalbasis. Allerdings muss diese nicht notwendigerweise abzählbar sein. Jedes Orthonormalsystem kann zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden (Gram-Schmidt). Es gilt: hat H genau dann eine abzählbare Orthonormalbasis, wenn H separabel ist, d.h. es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge (z.B. ist $L_s(\Omega)$ separabel). Lemma 7.11 bzw. Theorem 7.12 gelten auch dann, wenn Φ nicht abzählbar ist.

7.2 Schwache Lösungen des Laplace-Dirichlet-Problems

Wir setzen voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^2-Gebiet ist.

Wir betrachten das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega,\\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

mit $f \in C(\bar\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Eine klassische Lösung u liegt in $C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$.

Bemerkung 7.14. (a) Für $n \geq 2$ hat das Dirichlet-Problem im Allgemeinen keine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Beweis. Sei $n = 2, \Omega := \frac{1}{2}\mathbb{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f(x) := \begin{cases} \frac{-x_1 x_2}{|x|^2} \left(\frac{4}{\log|x|} - \frac{1}{(\log|x|)^2} \right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Dann ist $f \in C(\bar{\Omega})$. Weiter sei $u := x_1 x_2 (\log|\log|x|| - \log\log 2)$ mit $x \in \Omega$. Dann ist $u \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0, \partial_j u \in C(\Omega), \partial_j^2 u \in C(\bar{\Omega})$ und $-\Delta u = f$ in Ω. Jedoch ist

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 u(x) &= \log|\log|x|| - \log\log 2 - \left(\frac{x_1 x_2}{|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\log|x|^2} + \frac{2}{\log|x|} \right) \\ &= \log|\log|x|| + O(1). \end{aligned}$$

Also ist $\partial_1 \partial_2 u \notin C(\Omega)$, d.h. $u \notin C^2(\Omega)$.

Annahme: Es existiere ein $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $-\Delta v = f$ in Ω und $v|_{\partial\Omega} = 0$. Es sei $w := u - v$. Da w harmonisch ist, ist $-\Delta w = 0$ in Ω mit $w|_{\partial\Omega} = 0$ und $w \in C^\infty(\Omega)$. Damit ist

$$0 = \int w \underbrace{\Delta w}_{=0} \, \mathrm{d}x \underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{=0} \partial_\nu w \, \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

Somit ist $|\nabla w|^2 = 0$ in Ω und damit $w \equiv \text{const}$. Also ist $u = v \in C^2(\Omega)$. Dies ist ein Widerspruch. □

(b) Abhilfemöglichkeiten:

(i) Verlange mehr Regularität: $a > 0$, $f \in C^\infty(\Omega)$. Ist $\Omega \in C^3$, so existiert dann genau eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Das ist die „klassische“ oder „Schaudersche Theorie“.

(ii) Distributionelle Lösungen: $-\Delta u = f$ in $D'(\Omega)$. Dann ist $u = \mathcal{N} * f$ mit dem Newtonpotential $\mathcal{N}$ und es ist $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Es ergibt sich aber das Problem, wie $u|_{\partial\Omega}$ zu interpretieren ist.

(iii) Variationeller Zugang:
Es sei $f \in L_1(\Omega)$ und $u(x)$ sei die Auslenkung einer homogenen elastischen Membran unter dem Einfluss der Kraftdichte f, wobei für $f \equiv 0$ gerade Ω ausgefüllt wird. Die Membran sei fest eingespannt auf $\partial\Omega$. Wir nehmen an, dass die innere Spannungsenergie E proportional zum Flächenzuwachs ist. Der Flächeninhalt ist

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, \mathrm{d}x \,.$$

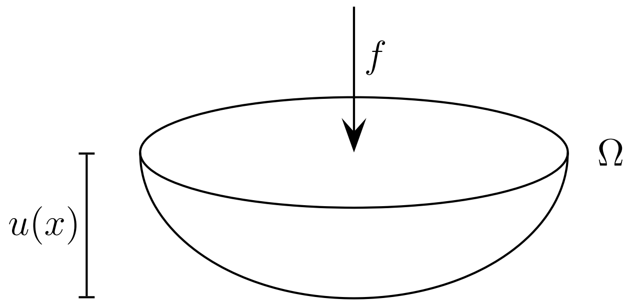

Abbildung 7.1: Membran

Damit ist

$$E = c \cdot \int_\Omega (\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nun ist $\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \sigma(\xi)$ mit $\xi \to 0$ (mit Taylor für $\sqrt{x}$ in $x_0 = 1$). Also gilt für kleine Auslenkungen

$$E \approx \frac{c}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Außerdem ist

$$E_{\text{pot}} = c \cdot \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f \cdot u\right)\,\mathrm{d}x.$$

Es ergibt sich das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in C^1(\Omega)$ mit $u(\partial\Omega) = 0$ und

$$\begin{gathered} J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f \cdot u\right)\,\mathrm{d}x \le J(v)\,, \\ \forall\, v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ mit } v|_{\partial\Omega} = 0\,. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Wir machen nun folgende Annahme: u sei eine Lösung des Variationsproblems und $M := \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Für alle $v \in M$ sei $\varphi(t) := J(u + tv)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann hat $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $t = 0$ ein Minimum, d.h. $\dot{\varphi}(0) = 0$. Wegen $|\nabla(u + tv)|^2 = |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla v + t^2 \cdot |\nabla v|^2$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= J(u + tv) \\ &= J(u) + t \cdot \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\,\mathrm{d}x + \frac{t^2}{2} \cdot \int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Wegen

$$0 = \dot{\varphi}(0) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, v \in C^1(\bar{\Omega})\,, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

ist

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x \quad \forall\, v \in C^1(\bar{\Omega}), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{7.5}$$

Andererseits folgt aus (7.4), dass $u \in M$ Lösung von (7.5) ist. Damit ist u auch Lösung von (7.3).
Wir nehmen nun an, dass u eine Lösung von (7.3) mit $u \in C^2(\bar{\Omega})$ sei. Dann ist

$$\nabla u \cdot \nabla v = \operatorname{div}(v \cdot \nabla u) - v \cdot \Delta u \tag{7.6}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x \\ &\underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{v}_{=0} \partial_\nu u\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega v \Delta u\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned} \tag{7.7}$$

für alle $v \in M$. Also ist

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)v\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in M \subset \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Mit Theorem 3.6 ist dann

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ mit } f \in L_1(\Omega)\,,$$

d.h. $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ist eine klassische Lösung.
Andererseits ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Dann gilt für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \cdot v\,\mathrm{d}x \underset{\text{Gauß, (7.6)}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x\,,$$

d.h. u löst (7.5), also (7.3).

Definition. u heißt schwache Lösung des Laplace-Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{LDP}$$

genau dann, wenn $u \in \mathring{H}^1(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \varphi\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Bemerkung 7.15. (a)

$$\delta J(u)v := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (J(u+tv) - J(v))$$

heißt erste Variation von J im Punkt u in Richtung v. Damit ist

$$\delta J(u)v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\, \mathrm{d}x\,.$$

Es gilt: $\delta J(u)\varphi = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ genau dann, wenn u eine schwache Lösung von (LDP) ist. Das Minimieren des Funktionals $J : M \to \mathbb{R}$ heißt Dirichletsches Prinzip.

Beweis. Bemerkung 7.14 (b) (iii). □

(b)
- Ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine schwache Lösung von (LDP), dann ist u eine klassische Lösung.
- Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung, dann ist u schwache Lösung.

Beweis. Siehe auch Bemerkung 7.14 (b) (iii). □

(c) Ist u schwache Lösung von (LDP), dann ist u distributionelle Lösung von $-\Delta u = f$ (d.h. in $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Beweis. Definition der distributionellen Ableitung. □

(d) Ist $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, so folgt aus Bemerkung 6.17 (i) dass $\mathrm{spur}(\gamma_0 u) = 0$ (d.h. u erfüllt die Randbedingungen $u|_{\partial\Omega} = 0$ im Sinne der Spur).

Wir verfolgen nun folgende Strategie: (zum Lösen elliptischer Probleme)

(1) Konstruiere schwache Lösung.

(2) Regularität $\to$ Klassische Lösung (z.B. $u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, $-\Delta u = f$ in $L_p(\Omega)$).

Theorem 7.16. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt (in einer Richtung). Dann existiert für alle $f \in L_2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ von $-\Delta u = f$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$.*

Beweis. Aus Korollar 6.10 folgt, dass $(u, v) \mapsto (\nabla u|\nabla v)_{L_2}$ ein äquivalentes Skalarprodukt auf $\mathring{H}^1(\Omega)$ definiert. Sei $F(v) := (v|\bar{f})_{L_2(\Omega)}$ mit $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ für $f \in L_2(\Omega)$ fest. Nun ist $F : \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{K}$ linear und es gilt

$$\begin{aligned}|F(v)| &\le \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\bar{f}\|_{L_2(\Omega)} \\ &\le c \cdot \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|v\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Also ist $F \in \mathcal{L}(\mathring{H}^1(\Omega), \mathbb{K}) = \mathring{H}^1(\Omega)'$. Nach Theorem 7.8 existiert genau ein $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ mit $F(v) = (u|v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = (\nabla v|\nabla u)_{L_2(\Omega)}$ für alle $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Wegen $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \bar{u} \, \mathrm{d}x = (\nabla v|\nabla u)_{L_2} &= F(v) = (v|f)_{L_2} \\ &= \int_\Omega f \bar{v} \, \mathrm{d}x, \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_\Omega \nabla \bar{v} \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla f \, \mathrm{d}x, \quad \text{für alle } \bar{v} \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

□

Bemerkung 7.17. (a) Theorem 7.16 bleibt richtig für $f \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

(b) Regularität: Man kann folgendes zeigen für die schwache Lösung u:

- Sind $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$, dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$, d.h. u ist eine klassische Lösung.
- Speziell: Ist $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so ist $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Literatur: Evans, Jost.

(c) $C^1(\bar{\Omega})$ ist kein Hilbertraum, d.h. Riesz ist nicht anwendbar.

7.3 Lineare elliptische Differentialoperatoren 2. Ordnung

Im folgenden setzen wir voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt ist und für $a_{jk} = a_{kj} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, $b_j, c \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ist

$$A(x, D)u := -\sum_{j,k=1}^n \partial_k (a_{jk}(x) \partial_j u) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x) u\,.$$

Für Elliptizität muss ein $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi^j \xi^k \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \,\forall\, x \in \bar{\Omega}$$

existieren.

Beachte: $a(x) := [a_{jk}(x)]_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetisch und $b(x) := [b_j(x)]_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Weiter ist

$$A(x, D)u := \underbrace{-\operatorname{div}(a(x) \cdot \nabla u)}_{\text{„Hauptteil“}} + \underbrace{b(x) \cdot \nabla u}_{\text{„Transport“}} + c(x) u\,.$$

Für die Elliptizität muss $a(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \bar{\Omega}$ gelten. D.h. a ist positiv definit.

$A(\cdot, D)$ ist ein gleichmäßig stark elliptischer linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Hauptteil in Divergenzform.

Seien $a_{jk} = \delta_{jk}$, $b_j \equiv 0$ und $c \equiv 0$. Dann ist $A(x, D) = -\Delta$.

Im Folgenden nehmen wir an, u sei eine „glatte" Lösung (d.h. zum Beispiel sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ oder $u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$). Dann ist für alle $v \in D(\Omega)$

$$\int_\Omega \bar{f} v \,\mathrm{d}x = \bar{\lambda} \int \bar{u} \cdot v \,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega v \cdot \operatorname{div}(a(x)\nabla \bar{u}) \,\mathrm{d}x}_{\underset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \nabla v \cdot a(x) \nabla \bar{u} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} 0} + \int_\Omega v b(x) \cdot \nabla \bar{u} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v c(x) \bar{u} \,\mathrm{d}x \,,$$

d.h.

$$\bar{\lambda}(v|u)_{L_2} + (\nabla u | a(\cdot)\nabla u)_{L_2} + (v|b(\cdot) \cdot \nabla u + cu)_{L_2} = (v|f)_{L_2}$$

für alle $v \in D(\Omega)$ mit $(v|\omega)_{L_2} := \int_\Omega v\bar{\omega} \,\mathrm{d}x$.

Definition. Es gelten die obigen Voraussetzungen und weiter seien $u, v \in H^1(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} a(v,u) &:= (\nabla v | a(\cdot) \cdot \nabla u)_{L_2} + (v|b(\cdot) \cdot \nabla u + cu)_{L_2} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \int_\Omega \partial_j v \, a_{jk}(x) \partial_k \bar{u} \,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^n \int_\Omega v \, b_j(x) \partial_j \bar{u} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v \, c(x) u \,\mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

Speziell ist für $a_{jk} = \delta_{jk}$, $c \equiv 0$ und $b \equiv 0$

$$a(v,u) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \bar{u} \,\mathrm{d}x \,,$$

und wir definieren

$$a_\lambda(v,u) := a(v,u) + \bar{\lambda}(v|u)_{L_2} \,.$$

7.3.1 Dirichletproblem

Definition. Sei $f \in L_2(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann heißt u „schwache Lösung" von

$$(\lambda + A(\,\cdot\,, D))u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \,, \tag{DP}$$

wenn $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ mit $a_\lambda(v,u) = (v|f)_{L_2(\Omega)}$ für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Beachte: ist $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, so ist $\operatorname{spur} \gamma_0 u = 0$.

Im Folgenden verwenden wir die Notationen $c^+ := \max\{c, 0\}$, $c^- := \max\{-c, 0\} \geq 0$ und $c = c^+ - c^-$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Theorem 7.18. *Es gelten die obigen Voraussetzungen und es sei $f \in L_2(\Omega)$. Dann ist für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq \|c^-\|_\infty + \frac{1}{2\alpha}\|b\|_\infty^2$ besitzt* (DP) *eine eindeutige schwache Lösung $u = u(f)$. Ferner ist $[f \mapsto u(f)] \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), \mathring{H}^1(\Omega))$.*

Beweis. Mit der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}|a_\lambda(v,u)| &\leq \|a\|_\infty \|\nabla v\|_{L_2} \|\nabla u\|_{L_2} + \|b\|_\infty \|v\|_{L_2} + \|\nabla u\|_{L_2} \\ &\quad + \|c\|_\infty \|v\|_{L_2} \|u\|_{L_2} + |\lambda| \|v\|_{L_2} \|u\|_{L_2} \\ &\lesssim \|u\|_{\mathring{H}^1} \|v\|_{\mathring{H}^1}.\end{aligned}$$

Also ist $a_\lambda : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{K}$ eine stetige Sesquilinearform für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ferner ist für $u = u_1 + iu_2$

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n \operatorname{Re} a_{jk} \partial_k \bar{u} \partial_j u &\underset{a_{jk}\in\mathbb{R}}{=} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\partial_k u_1 \partial_j u_1 + \partial_k u_2 \partial_j u_2) \\ &\underset{\text{elliptisch}}{\geq} \alpha|\nabla u_1|^2 + \alpha|\nabla u_2|^2 - \alpha|\nabla u|^2.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_\lambda(u,u) &= \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Re}(\partial_j u | a_{jk} \partial_k u)_2 + \operatorname{Re}(u | b \cdot \nabla u)_2 + \operatorname{Re}(u | (\lambda + c)u)_2 \\ &\underset{(7.8)}{\geq} \alpha\|\nabla u\|_{L_2}^2 - \underbrace{\|b\|_\infty \|u\|_{L_2} \|\nabla u\|_{L_2}}_{\underset{\text{Young}}{=} \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2\alpha}\|b\|_\infty^2 \|u\|_{L_2}^2} + (\operatorname{Re}\lambda - \|c^-\|_\infty)\|u\|_{L_2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha\|\nabla u\|_{L_2}^2 - \left(\frac{1}{2\alpha}\|b\|_\infty^2 + \|c^-\|_\infty - \operatorname{Re}\lambda\right)\|u\|^2.\end{aligned}$$

Korollar 6.10 liefert uns nun

$$\operatorname{Re} a_\lambda(u,u) \geq \frac{1}{2}\alpha\|\nabla u\|_{L_2}^2 \geq c_1\|u\|_{L_2}^2$$

mit $c_1 > 0$ für alle $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Damit ist $a_\lambda : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{K}$ koerziv. Ferner ist $(\,\cdot\,|f)_{L_2} \in \mathcal{L}(\mathring{H}^1(\Omega), \mathbb{K}) = (\mathring{H}^1(\Omega))'$.

Mit Theorem 7.10 folgt dann die Behauptung. □

Beispiel. Das Problem

$$(\lambda - \Delta)u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial u} = 0$$

hat für alle $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ eine eindeutige schwache Lösung.

7.3.2 Neumannproblem

Es sei $\nu_a(x) := a(x)\nu(x)$ mit $a = [a_{jk}]$. Dann ist

$$\nu_a \cdot \nu \geq \alpha|\nu|^2 = \alpha > 0\,,$$

d.h. ν_a ist nirgends tangential an $\partial\Omega$. $\partial_{\nu_a} u := \nabla u \cdot \nu_a$ wird „Konormalenableitung“ genannt.

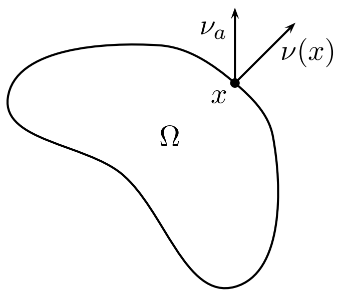

Abbildung 7.2: Konormalenableitung

Definition. Es sei $f \in L_2(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann heißt u schwache Lösung des Neumannproblems

$$(\lambda - A(\,\cdot\,, D))u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_{\nu_a} u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{NP}$$

genau dann, wenn $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ und $a_\lambda(v, u) = (v|f)_{L_2}$ für alle $v \in H^1(\Omega)$.

Theorem 7.19. *Es gelten die obigen Voraussetzungen und es sei $f \in L_2(\Omega)$. Dann besitzt das Problem* (NP) *für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \|c^-\|_\infty + \frac{1}{2\alpha}\|b\|_\infty^2$ eine eindeutige schwache Lösung $u = u(f)$. Ferner ist $[f \mapsto u(f)] \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H^1(\Omega))$.*

Beweis. Vgl. Beweis zu Theorem 7.18: $a_\lambda : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist eine stetige Sesquilinearform mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_\lambda(u, u) &\geq \frac{1}{2}\alpha\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \underbrace{(\operatorname{Re}\lambda - \|c^-\|_\infty + \frac{1}{2\alpha}\|b\|_\infty^2)}_{=:q>0}\|u\|_{L_2}^2 \\ &\geq \min\{\frac{1}{2}\alpha, q\}(\underbrace{\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2}^2}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2}) \end{aligned}$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$. Damit folgt analog zu Theorem 7.18 die Behauptung. □

Beispiel. Das Problem

$$(\lambda - \Delta)u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_{\nu_a} u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

hat für alle $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und $f \in L_2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung.

Beachte: für $\lambda = 0$ und $f \equiv 0$ ergibt sich das Problem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\,.$$

Dies hat die Lösungen $u = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$.

Bemerkung 7.20. (a) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (bzw. $u \in H^2(\Omega)$ + Randbed.) eine klassische Lösung der Probleme (DP) bzw. (NP). Dann ist u ebenfalls eine schwache Lösung.

Beweis. Übung. □

(b) Die Matrix a habe $C^\infty(\bar{\Omega})$-Koeffizienten und u sei schwache Lösung von (DP) bzw. (NP). Dann ist u auch distributionelle Lösung.

Beweis. Übung. □

(c) Ist u schwache Lösung von (DP) bzw. (NP) und ist $f \in L_2(\Omega)$, so ist $u \in H^2(\Omega)$. Ist $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $C^\infty(\bar{\Omega})$-Koeffizienten von a, so ist $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ auch klassische Lösung.

Beweis. Vgl. Evans. □

Korollar 7.21. *Es gelten die Voraussetzung von Theorem 7.18 bzw. Theorem 7.19 und $u(f)$ sei die entsprechende Lösung. Dann ist $[f \mapsto u(f)] \in \mathcal{K}(L_2(\Omega))$, d.h. $[f \mapsto u(f)] \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)) := \mathcal{L}(L_2(\Omega), L_2(\Omega))$ und beschränkte Mengen (in $L_2(\Omega)$) werden auf relativ kompakte Mengen (in $L_2(\Omega)$) abgebildet.*

Beweis. Es ist

$$\mathring{H}^1(\Omega) \underset{\text{Def.}}{\hookrightarrow} H^1(\Omega) \underset{\text{Bem. 6.14}}{\overset{c}{\hookrightarrow}} L_2(\Omega)$$

und

$$[f \mapsto u(f)] \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H^1(\Omega)) \subset \mathcal{K}(L_2(\Omega), L_2(\Omega)) = \mathcal{K}(L_2(\Omega))\,.$$ □

7.3.3 Variationeller Zugang

Lemma 7.22. *Es sei H ein reeller Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige koerzive Bilinearform, $L \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ und V ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Dann existiert genau ein $u_0 \in V$ mit*

$$a(u_0, \varphi) + a(\varphi, u_0) + L\varphi = 0, \quad \textit{für alle } \varphi \in V.$$

Beweis. $(u, v) \mapsto a(u, v) + a(v, u)$ ist eine stetig, koerziv und bilinear auf dem Hilbertraum V. Nun ist $-L \in V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Die Behauptung folgt dann aus Theorem 7.10 (Lax-Milgram). □

Falls a symmetrisch ist, so ist $a(\varphi, u_0) = -\frac{1}{2}L\varphi$ für alle $\varphi \in V$ (z.B. schwache Lösung von $(\lambda + A)u = f$, falls $b \equiv 0$).

Korollar 7.23 (Dirichletsches Prinzip)**.** *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 7.22 und es sei $J(u) := a(u,u) + Lu$ mit $u \in V$. Dann existiert genau ein $u_0 \in V$ mit $J(u_0) = \inf_{v\in V} J(v)$.*

Beweis. Sei u_0 wie in Lemma 7.22. Dann ist

$$\begin{aligned} J(u_0 + t\varphi) &= J(u_0) + \underbrace{t^2 a(\varphi,\varphi)}_{\geq 0\,(\text{koerziv})} + t(\underbrace{a(u_0,\varphi) + a(\varphi,u_0) + L\varphi}_{=0}) \\ &\geq J(u_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \varphi \in V. \end{aligned}$$

Damit ist u_0 ein Minimum.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $v_0 \in V$ ebenfalls Minimum. Dann ist

$$0 = \frac{d}{dt} J(v_0 + t\varphi)\bigg|_{t=0} = a(v_0,\varphi) + a(\varphi, v_0) + L\varphi\,.$$

Aus Lemma 7.22 folgt dann, dass $v_0 = u_0$ ist. □

Theorem 7.24. *Es seien H ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ stetig, koerziv und bilinear, $L \in H'$ und $J(v) := a(v,v) + L(v)$ für $v \in H$. Außerdem sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Unterverktorräumen von H mit $V_n \subset V_{n+1}$ und*

$$\forall\, v \in H\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, v_n \in V_n : \|v - v_n\| < \delta\,.$$

Sei nun $u_n \in V_n$ die eindeutige Lösung von $J(u) = \inf_{v\in V_n} J(v)$ gemäß Korollar 7.23. Dann existiert ein $u_* \in H$ mit $u_n \to u_*$ in H und u_* löst das Variationsproblem $J(u_*) = \inf_{v\in H} J(v)$.

Beweis. (i) Für alle $v \in H$ gilt

$$\begin{aligned} J(v) &= a(v,v) + Lv \\ &\geq \alpha\|v\|^2 - \|L\|_{H'}\|v\| \\ &\geq -\frac{\|L\|_{H'}^2}{4\alpha}\,. \end{aligned}$$

Also ist J nach unten beschränkt.

(ii) Sei $\kappa := \inf_{v\in H} J(v) \in \mathbb{R}$. Wir nehmen nun an, es existiere ein $\varepsilon > 0$ mit $J(u_n) \geq \kappa + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $u_0 \in H$ mit $J(u_0) < \kappa + \frac{\varepsilon}{2}$. Da J stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|J(u_0) - J(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $v \in H$

mit $\|v - u_0\| < \delta$. Damit existieren nach Voraussetzung ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $v_n \in V_n$ mit $\|v_n - u_0\| < \delta$. Also ist

$$\begin{aligned} J(v_n) &\leq |J(v_n) - J(u_0)| + J(u_0) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \kappa + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq J(u_n)\,, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Somit gilt $J(u_n) \to \kappa$ und ist eine Minimalfolge.

(iii) (u_n) ist eine Cauchy-Folge, denn

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \frac{1}{4} \|u_n - u_m\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= \frac{1}{2} J(u_n) + \frac{1}{2} J(u_m) - J\left(\frac{u_m - u_n}{2}\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

Damit existiert ein $u_* \in H$ mit $u_n \to u_*$. Da J stetig ist, ist $J(u_*) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \kappa \leq J(v)$ für alle $v \in H$. □

Bemerkung. Theorem 7.24 liefert eine konstruktive Methode zur approximativen Lösung des Variationsproblems $J(u) = \inf_{v\in H} J(v)$, wenn die (endliche-dimensionalen) Untervektorräume V_n geeignet gewählt werden (z.B. Polynome).

Ist $\{\varphi_1^n, \dots, \varphi_{N_n}^n\}$ eine Basis von V_n, so genügt es die endlich vielen Gleichungen $a(u_n, \varphi_j^n) + a(\varphi_j^n, u_n) + L\varphi_j^n = 0, j = 1, \dots, N_n$ zu lösen (vgl. Lemma 7.22).

Beachte. Die Dirichletformen a_λ aus Theorem 7.18 bzw. Theorem 7.19 erfüllen die Bedingungen von Theorem 7.24.

7.4 Schwache Lösungen für nichtlineare Probleme

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^∞ ist, sowie $g \in C(\partial\Omega)$ und eine Lagrangefunktion $L \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ist.

Notation. Für die Lagrangefunktion notieren wir $L = L(p, z, x), (p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$, sowie $L_p = (L_{p_1}, L_{p_2}, \dots, L_{p_n})$ für die partiellen Ableitungen (analog für L_z, L_x).

Wir betrachten das Variationsproblem

$$J(u) := \int_\Omega L(\nabla u(x), u(x), x)\, \mathrm{d}x \longrightarrow \min$$

für $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $u|_{\partial\Omega} = g$, dabei ist J ein Energiefunktional.

Euler-Lagrange-Gleichung

Es sei $V := \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$. Wir nehmen an, $\exists\, u \in V : J(u) = \inf_{v\in V} J(v)$, dann folgt

$$\forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega) : u + tv \in V\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Wir betrachten die 1. Variation von J im Punkt u in Richtung v definiert als

$$\delta J(u)v := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(J(u+tv) - J(u)),$$

dann ist $\delta J(u)v = 0\, \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (bzw. $\varphi_v'(0) = 0$ mit $\varphi(t) := J(u+tv)$), wenn u ein Minimum von J auf V ist, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega L(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\substack{u,v,\\ L\in C^\infty}}{=} \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(\nabla u + t\nabla v, u+tv, x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n L_{p_j}(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x) v_{x_j} + L_z(\nabla u + t\nabla v, u+tv, x) v \Big)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
0 = \varphi_v'(0) &= \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n L_{p_j}(\nabla u, u, x) v_{x_j} + L_z(\nabla u, u, x) v \Big)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\substack{\text{part. Int.}\\ v|_{\partial\Omega}=0}}{=} \int_\Omega \Big(-\sum_{j=1}^n (L_{p_j}(\nabla u, u, x))_{x_j} + L_z(\nabla u, u, x)\Big) v\,\mathrm{d}x \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt aus Theorem 3.6

$$-\sum_{j=1}^n (L_{p_j}(\nabla u, u, x))_{x_j} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \text{ in } \Omega\,, \tag{ELG}$$

d.h. falls $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ das Energiefunktional J minimiert, so erfüllt u die Euler-Lagrange-Gleichung.

Beispiel 7.25. (a) Wir betrachten

$$L(p, z, x) := \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) p_j p_k - z f(x)$$

mit $a_{jk} = a_{kj}$. Dann folgt

$$L_{p_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} p_k\,, \quad L_z = -f(x)$$

und das Energiefunktional J lautet

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \partial_j u \partial_k u - u(x) f(x) \Big) \, \mathrm{d}x \,.$$

Damit ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$- \sum_{j,k=1}^n \partial_j (a_{jk}(x) \partial_k u) = f \text{ in } \Omega \,.$$

Speziell gilt dann also für $a_{jk} = \delta_{jk}$

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \Big) \, \mathrm{d}x \,,$$

damit ergibt sich als Euler-Lagrange-Gleichung die Laplace-Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω (vgl. Abschnitt 7.2).

(b) Sei nun

$$L(p,z,x) := \frac{1}{2}|p|^2 - F(z) \,, \quad F(z) := \int_0^z f(r) \, \mathrm{d}r \,.$$

Dann ist das Energiefunktional

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \Big) \, \mathrm{d}x \,.$$

Damit folgt die Euler-Lagrange-Gleichung $-\Delta u = f(u)$ in Ω, also erhalten wir eine semilineare Laplace-Gleichung, d.h. diese ist nicht lösbar mit Lax-Milgram, da f von u abhängt.

(c) Mit $L(p,z,x) = \sqrt{1 + |p|^2}$ ergibt sich

$$J(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, \mathrm{d}x \,,$$

d.h. J berechnet die Fläche des Graphen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (also wird das u mit minimaler Oberfläche gesucht). Damit erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\underbrace{- \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\frac{\partial_j u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)}_{\text{Krümmung}} = 0 \text{ in } \Omega \,.$$

Lemma 7.26. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar, sowie $\varphi_j, \varphi \in L_\infty(X)$, $\varphi_j \to \varphi$ gleichmäßig auf X. Sei weiter $1 \leq q < \infty, \omega_j, \omega \in L_q(X), \omega_j \to \omega$ in $L_q(X)$, dann folgt*

$$\int_X \varphi_j \omega_j \, \mathrm{d}x \longrightarrow \int_X \varphi \omega \, \mathrm{d}x \,.$$

Beweis. Wegen $\omega_j \to \omega$ in $L_q(X)$ folgt aus Bemerkung 6.19 (a)

$$\sup_j \|\omega_j\|_{L_q(X)} < \infty .$$

Da X beschränkt ist, ist $L_q(X) \hookrightarrow L_1(X)$ und damit $\|\omega_j\|_{L_1(X)} \leq c < \infty \,\forall\, j \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\left| \int_X \varphi_j \omega_j \,\mathrm{d}x - \int_X \varphi\omega \,\mathrm{d}x \right| \leq \overbrace{\|\varphi_j - \varphi\|_{L_\infty(X)}}^{\longrightarrow 0} \overbrace{\|\omega\|_{L_1(X)}}^{\leq c} + \underbrace{\left| \int_X \varphi(\omega_j - \omega) \,\mathrm{d}x \right|}_{\longrightarrow 0} .$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 7.27. *Sei $1 < q < \infty$ und L nach unten beschränkt. Weiter sei $L(\,\cdot\,, z, x)$ konvex für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Dann folgt $f : W_q^1(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ ist schwach folgenunterhalbstetig, d.h.*

$$J(u) \leq \liminf_{j\to\infty} J(u_j) \quad \forall \textit{ Folgen } (u_j) \textit{ in } W_q^1(\Omega) \textit{ mit } u_j \longrightarrow u \textit{ in } W_q^1(\Omega) .$$

Beweis. Sei $u_j \in W_q^1(\Omega), u_j \rightharpoonup u$ in $W_q^1(\Omega)$, d.h. $u_j \rightharpoonup u, \partial_k u_j \rightharpoonup \partial_k u$ in $L_q(\Omega) \,\forall\, k = 1, \ldots, n$. Wir setzen $\kappa := \liminf_{j\to\infty} J(u_j)$. Wir wählen eine Teilfolge, so dass o.B.d.A. $\kappa = \lim_{j\to\infty} J(u_j)$. Wegen der schwachen Konvergenz und Bemerkung 6.19 (d) ist (u_j) beschränkt in $W_q^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega)$ (wegen Bemerkung 6.14 und Redlich Konarachov). Aufgrund von Bemerkung 6.19 (e) sind schwache Grenzwerte eindeutig und mit der Wahl einer Teilfolge gilt dann auch

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } L_q(\Omega) \text{ (fast überall)} . \tag{7.9}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt nach Egoroff (Maßtheorie),

$$\exists \text{ messbare Menge } E_\varepsilon \text{ mit } \lambda_n(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon, u_j \to u \text{ glm. auf } E_\varepsilon . \tag{7.10}$$

Wir definieren $F_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid |u(x)| + |\nabla u(x)| < \frac{1}{\varepsilon}\}$

$$\Longrightarrow F_\varepsilon \text{ messbare Menge mit } \lambda_n(\Omega \setminus F_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 . \tag{7.11}$$

Setze $G_\varepsilon := E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$.

$$\overset{(7.10),(7.11)}{\Longrightarrow} 0 \leq \lambda_n(\Omega \setminus G_\varepsilon) \leq \lambda_n(\Omega \setminus E_\varepsilon) + \lambda_n(\Omega \setminus F_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} 0 \tag{7.12}$$

Sei L nach unten beschränkt, dann folgt o.B.d.A. $L \geq 0$ (sonst $\tilde{L} := L + \beta, \beta \gg 0$). Da $L(\,\cdot\, z, x)$ konvex ist, folgt

$$L(p_1, z, x) \geq L(p_2, z, x) + L_p(p_2, z, x) \cdot (p_1 - p_2) \quad \forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2, \; (z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \tag{$*$}$$

$$\Longrightarrow \quad J(u_j) = \int_\Omega L(\nabla u_j, u_j, x)\,\mathrm{d}x \overset{L\geq 0}{\geq} \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_j, u, x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{konvex},(*)}{\geq} \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_j, x)\,\mathrm{d}x + \int_{G_\varepsilon} L_p(\nabla u, u_j, x) \cdot (\nabla u_j - \nabla u)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.13}$$

Da L stetig ist, folgt mit (7.10), (7.11)

$$L(\nabla u(x), u_j(x), x) \longrightarrow L(\nabla u(x), u(x), x) \quad \forall\, x \in G_\varepsilon\,,$$
$$|L(\nabla u(x), u_j(x), x)| \leq c(\varepsilon) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, x \in G_\varepsilon$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_j, x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.14}$$

Analog erhalten wir $L_p(\nabla u(x), u_j(x), x) \to L_p(\nabla u(x), u(x), x)$ gleichmäßig bzgl. $x \in G_\varepsilon$. Wegen der schwachen Konvergenz gilt $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ in $L_q(G_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$.

$$\overset{\text{Lemma 7.26}}{\Longrightarrow} \int_{G_\varepsilon} \underbrace{L_p(\nabla u, u_j, x)}_{\text{konv. glm.}} \cdot \underbrace{(\nabla u_j - \nabla u)}_{\rightharpoonup 0}\,\mathrm{d}x \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.15}$$

$$\overset{(7.13)-(7.15)}{\Longrightarrow} \kappa = \lim_{j\to\infty} J(u_j) \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\varepsilon>0}{\Longrightarrow} \liminf_j J(u_j) = \kappa \geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \underbrace{\chi_{G_\varepsilon}(x) L(\nabla u, u, x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x$$
$$\underset{\text{Faton}}{\overset{\text{Lemma v.}}{\geq}} l \int_\Omega \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_{G_\varepsilon}(x)}_{\to \chi_\Omega(x)} L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$$
$$= J(u) \qquad \square$$

Notation. Wir schreiben

$$W := \{u \in W_q^1(\Omega) \mid \gamma_0 u = g\}\,,$$

wobei γ_0 der Spuroperator ist. Man beachte, dass $W = \mathring{W}_q^1(\Omega)$ ist, wenn $g \equiv 0$ (dies folgt aus Bemerkung 6.17).

Man kann zeigen: Ist g genügend glatt, z.B. $g \in C^1(\partial\Omega)$, so ist $W \neq \emptyset$ (hierzu: γ_0 surjektiv auf „geeigneten“ Räumen).

Theorem 7.28 (Existenz von Minima)**.** *Sei $1 < q < \infty$ und $W \neq \emptyset$. Ferner sei $L(\,\cdot, z, x)$ konvex für $(z, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ und erfülle die Koerzivitätsbedingung*

$$L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \bar{\Omega}$$

für $\alpha > 0, \beta \geq 0$. Dann folgt, dass J ein Minimum auf W annimmt, d.h. $\exists\, u_* \in W$ mit $J(u_*) = \inf_{w\in W} J(w)$.

Beweis. Ohne Beweis (siehe ungeteXtes Skript). □

Bemerkung 7.29. Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 7.28.

(a) Gilt ferner, dass $L = L(p, x)$ unabhängig von z ist und genügt L der Elliptizitätsbedingung (mit $\alpha \geq 0$)

$$\sum_{j,k=1}^{n} L_{p_j p_k}(p, x)\xi^j \xi^k \geq \alpha|\xi|^2, \quad p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \bar{\Omega}\,,$$

so ist das Minimum u_* eindeutig. (ohne Beweis)

(b) Genügt L den Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |L(p, z, x)| &\leq c(1 + |p|^q + |z|^q) \\ |L_p(p, z, x)| + |L_z(p, z, x)| &\leq c(1 + |p|^{q-1} + |z|^{q-1}) \end{aligned}$$

für alle $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \bar{\Omega}$, so ist das Minimum u_* von J auf W eine schwache Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\sum_{j=1}^{n}(L_{p_j}(\nabla u, u, x))_{x_j} + L_z(\nabla u, u, x) = 0\,, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

in dem Sinne, dass

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} L_{p_j}(\nabla u, u, x)v_{x_j} + L_z(\nabla u, u, x)v\right) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, v \in \mathring{W}_q^1(\Omega)\,.$$

Beweis. Übung (vgl. die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen und verwende die Wachstumsbedingungen). □

Beispiel 7.30. (a) Semilineare Laplacegleichung: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_q(\mathbb{R})$ und

$$F(z) := \int_0^z f(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Wir betrachen $L(p, z, x) := \frac{1}{2}|p|^2 - F(z)$, damit ergibt sich das Energiefunktional

$$J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right) \mathrm{d}x\,,$$

dann folgt mit Theorem 7.28 und Bemerkung 7.29 (b)

$$\exists\, u_* \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : J(u_*) = \inf_{v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)} J(v)$$

und u_* ist schwache Lösung von $-\Delta u = f(u)$ in $\Omega, u|_{\partial\Omega} = 0$.

(b) Wir betrachten

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= \frac{1}{2}\frac{h'(u)}{h(u)}u_x^2\,, \quad x \in (0,1) =: \Omega \\ u(0) &= g_0\,, \quad u(1) = g_1 \end{aligned} \tag{$*$}$$

mit $g_0, g_1 \in \mathbb{R}, h \in C^1(\mathbb{R}), h' \in L_\infty(\mathbb{R}), h(z) \geq \alpha > 0, z \in \mathbb{R}$. Dann ist $L(p,z,x) := h(z)p^2$ und damit folgt

$$L_p(p,z,x) = 2h(z)p\,, \quad L_z = h'(z)p^2\,.$$

Wir erhalten mit Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= -(2h(u)u_x)_x + h'(u)u_x^2 \\ &= -2h'(u)u_x^2 - 2h(u)u_{xx} + h'(u)u_x^2 \end{aligned}$$

und nach Umformen folgt die DGL aus $(*)$. Mit den Voraussetzungen gilt, dass L koerziv ($q = 2$) und konvex in p ist.

$$\overset{\text{Theorem 7.28}}{\Longrightarrow} \exists\, u \in W := \{w \in W_2^1((0,1)) \mid w(0) = g_0, w(1) = g_1\} \neq \emptyset \\ \text{mit } J(u) = \inf_W J$$

Mit Sobolev-Morrey (Theorem 6.15) und $n = 1$ ist

$$W_2^1((0,1)) \hookrightarrow BUC((0,1)) \overset{!}{=} C([0,1])\,. \tag{7.16}$$

Man beachte, dass Bemerkung 7.29 (b) hier nicht angewendet werden kann, da die Wachstumsbedingungen nicht erfüllt sind (z.B. L_z ist quadratisch in p).

Behauptung. u ist schwache Lösung von $(*)$.

Beweis. Sei $v \in \mathring{W}_2^1((0,1))$ beliebig, $\varphi(t) := f(u+tv), t \in \mathbb{R}$. Für $|t| \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(0)) &= \int_0^1 \frac{1}{t}(h(u+tv)(u_x+tv_x)^2 - h(u)u_x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \underbrace{\frac{h(u+tv) - h(u)}{t}(u_x+tv_x)^2}_{\overset{t\to 0}{\longrightarrow} h'(u)vu_x^2 \text{ punktweise}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^1 \underbrace{h/(u)\frac{(u_x+tv_x)^2 - u_x^2}{t}}_{\overset{t\to 0}{\longrightarrow} h(u)2u_xv_x \text{ punktweise}}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Dann folgt aus Hölder und (7.16), dass die Integranden Majoranten in $L_1((0,1))$ besitzen und damit gilt

$$\underbrace{\frac{1}{t}(\varphi(t)-\varphi(0))}_{\longrightarrow \varphi'(0)} \xrightarrow{\text{Lebesgue}} \int_0^1 h'(u)u_x^2 v \,\mathrm{d}x + \int_0^1 2h(u)u_x v_x \,\mathrm{d}x\,.$$

Da u ein Minimum von f ist, folgt $\varphi'(0)=0$ und somit

$$0 = \int_0^1 (h'(u)u_x^2 v + 2h(u)u_x v_x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,,$$

d.h. u ist schwache Lösung von $(*)$. □

Man kann sogar zeigen, dass $u \in C^\infty((0,1))$, d.h. u ist klassische Lösung von $(*)$.

7.5 Eigenwertprobleme

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Problem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,,$$

d.h. $(-\lambda - \Delta)u = 0, u|_{\partial\Omega}= 0$. Jede Lösung $u \not\equiv 0$ ist eine Eigenfunktion von $-\Delta_D$ und λ ist Eigenwert von $-\Delta_D$.

Notation. Mit $-\Delta_D$ bezeichnen wir den Laplace-Operator mit Dirichlet-Nebenbedingung.

Ziel. Wir wollen Eigenwerte des Laplace-Operators bestimmen.

Wegen Theorem 7.18 gilt für alle Eigenwerte λ, dass $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Abstrakt erhalten wir

$$Au = \mu u$$

mit $\mu := \frac{1}{\lambda}, A := (-\Delta_D)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ kompakt und beschränkt (vgl. Theorem 7.18 und Korrolar 7.21), d.h. man sucht Eigenwerte und Eigenfunktionen von einem kompakten, beschränkten Operator in einem Hilbertraum.

Als Generalvoraussetzung soll gelten, dass $(H, (\,\cdot\,|\,\cdot\,))$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum (oder Komplexifizierung) ist und $A \in \mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H,H)$.

Definition. $\mu \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A :\Longleftrightarrow \exists\, \varphi \in H \setminus \{0\} : A\varphi = \mu\varphi$ (beachte: $|\mu| \leq \|A\|$). Dann heißt φ Eigenvektor.

A heißt symmetrisch $:\Longleftrightarrow (Ax|y) = (x|Ay)\, \forall\, x, y \in H$.

Beispiel 7.31. (a) Eine symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ definierten symmetrische kompakte Abbildungen auf $H = \mathbb{C}^n$.

(b) Integraloperatoren: Es sei $H := L_2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$ („Kern“) reelwertig und symmetrisch, d.h. $K(x,y) = K(y,x)$ $\forall\, x, y \in \Omega \times \Omega$.

$$(Af)(x) := \int_\Omega \underbrace{K(x,y)}_{\text{Greensche Fkt.}} f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega, f \in L_2(\Omega)$$

Dann folgt, $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ ist symmetrisch und kompakt.

Beweis. Übung. ☐

Satz 7.32. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch, dann folgt: Alle Eigenwerte sind reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in H \setminus \{0\}$ mit $A\varphi = \lambda\varphi, A\psi = \mu\psi$. Dann gilt

$$\lambda(\varphi|\psi) = (\lambda\varphi|\psi) = (A\varphi|\psi) \overset{\text{symm.}}{=} (\varphi|A\psi) = (\varphi|\mu\psi) = \bar{\mu}(\varphi|\psi)\,,$$

d.h. wenn $\varphi = \psi$ ist, so gilt $\lambda = \bar{\lambda}$ und bei $\lambda \neq \mu$ ist $\varphi \perp \psi$. Damit folgt die Behauptung. ☐

Satz 7.33. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch, dann folgt*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|\,.$$

Beweis. (i) Sei $d := \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)|$. Für alle $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt wegen Cauchy-Schwarz

$$|(Ax|y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\| = \|A\|\,,$$

also gilt $d \leq \|A\|$. Sei (x_n) eine Folge mit $\|x_n\| = 1, \|Ax_n\| \to \|A\|$. Sei o.B.d.A. $A \neq 0$,

$$y_n := \frac{1}{\|Ax_n\|} Ax_n \Longrightarrow \|y_n\| = 1\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} d &\geq |(Ax_n|y_n)| \\ &= \frac{1}{\|Ax_n\|}\|Ax_n\|^2 \\ &= \|Ax_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|A\|\,, \end{aligned}$$

d.h. $d = \|A\|$.

(ii) Es gilt mit Cauchy-Schwarz (analog zu oben)

$$r := \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)| \leq \|A\| \,.$$

Man beachte, dass

$$\begin{aligned} 4(Ax|y) &\overset{\text{symm.}}{=} (A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y) \\ &= 4|(Ax|y)| \\ &\leq |(A(x+y)|x+y)| + |(A(x-y)|x-y)| \\ &\leq r\|x+y\|^2 + r\|x-y\|^2 \\ &= 2r(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

gilt, daraus folgt $d \leq r$ und damit gilt mit (i)

$$\|A\| = d \leq r \leq \|A\| \,. \qquad \square$$

Satz 7.34. *$A \in \mathcal{L}(H)$ sei symmetrisch und kompakt, dann gilt, $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ist Eigenwert von A.*

Beweis. Wegen Satz 7.33 gilt, es existiert eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $|(Ax_n|x_n)| \to \|A\|$. Wähle o.B.d.A. eine Teilfolge von (x_n), dann

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : (Ax_n|x_n) \longrightarrow \lambda \,, \quad |\lambda| = \|A\| \,.$$

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(Ax_n|\lambda x_n) + \|\lambda x_n\|^2 \\ &\leq \underbrace{\|A\|^2}_{=|\lambda|^2} - 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\underbrace{(Ax_n|x_n)}_{\to\lambda} + |\lambda|^2 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$Ax_n - \lambda x_n \longrightarrow 0 \,. \tag{7.17}$$

Da (x_n) eine beschränkte Folge, A kompakter Operator ist und wegen der gewählten Teilfolge folgt o.B.d.A., dass (Ax_n) konvergiert.

$$\overset{(7.17)}{\Longrightarrow} \exists\, x \in H : x_n \longrightarrow x \,, \quad \|x\| = 1$$

Da A stetig ist, folgt $Ax_n - \lambda x_n \to Ax - \lambda x$, also $Ax = \lambda x$, d.h. λ ist Eigenwert. Wegen Satz 7.32 ist $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\lambda \in \{-\|A\|, \|A\|\}$. $\square$

Theorem 7.35. *Es sei $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch, kompakt, sowie H separabel. Dann gilt:*

(i) *A hat abzählbar viele Eigenwerte (μ_j) mit 0 als einzig möglichen Häufungspunkt.*

(ii) *Jeder Eigenwert* $\mu_j \neq 0$ *hat endliche Vielfachheit, d.h.* $\dim(\ker(A - \mu_j)) < \infty$ *(somit: o.B.d.A.* $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots \geq 0$*).*

(iii) *Die zugehörigen normierten Eigenvektoren* $\{\varphi_j\}$ *(gemäß Vielfachheit) bilden eine ONB von* H*.*

(iv) $\forall\, x \in H : Ax = \sum_j \mu_j (x|\varphi_j)\varphi_j$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $A \neq 0$. (Satz 7.34) Sei $0 \neq \mu_1 \in \{\|A\|, -\|A\|\}$ ein Eigenwert mit Eigenvektor $\varphi_1 \in H \setminus \{0\}, \|\varphi_1\| = 1$. Dann ist $H_2 := \{\varphi_1\}^T$ ein abgeschlossener Unterraum von H, also ein Hilbertraum.

$$\forall\, x \in H_2 : (Ax|\varphi_1) \overset{A \text{ symm.}}{=} (x|A\varphi_1) = \mu_1(x|\varphi_1) = 0$$

Daraus folgt, $Ax \in H_2 \forall\, x \in H_2 \Longrightarrow A_2 := A|_{H_2} \in \mathcal{L}(H_2)$ ist symmetrisch. Da H_2 abgeschlossen in H und A kompakt ist, folgt $A_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ symmetrisch. Daraus folgt aus Satz 7.34 und Induktion, dass Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \neq 0$ existieren (nicht notwendigerweise verschieden) mit zugehörigen paarweise verschiedenen Eigenvektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \|\varphi_j\| = 1$. Dann ist $H_{j+1} := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^\perp$ abgeschlossener Untervektorraum, also Hilbertraum. Weiter ist $A_{j+1} := A|_{H_{j+1}} \in \mathcal{L}(H_{j+1}), 1 \leq j \leq n$ und $|\mu_j| = \|A_j\|_{\mathcal{L}(H_j)}, 1 \leq j \leq n+1$.

<u>1. Fall:</u> Die Folge (μ_j) bricht ab, d.h. $\mu_{n+1} = 0$. Dann gilt $A_{n+1} = 0$ und Null ist ein Eigenwert von A (mit möglicherweise unendlicher Vielfachheit). Dann ist $H_{n+1} \subset \ker(A)$ abgeschlossener Unterraum von H, also separabler Hilbertraum. Damit folgt mit Bemerkung 7.13, H_{j+1} besitzt eine abzählbare ONB $\{\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots\}$, also

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots\} \text{ ist ONB von } H.$$

<u>2. Fall:</u> Die Folge (μ_j) bricht nie ab, d.h. $\mu_j \neq 0 \,\forall\, j \in \mathbb{N}$. Da A kompakt ist, hat (Ax_j) eine kompakte Teilfolge.

$$\begin{aligned} \|A\varphi_j - A\varphi_k\|^2 &= \|A\varphi_j\|^2 - 2\operatorname{Re}(A\varphi_j|A\varphi_k) + \|A\varphi_k\|^2 \\ &\overset{\text{EW}\in\mathbb{R}}{=} |\mu_j|^2 + |\mu_k|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mu_j \longrightarrow 0 \Longrightarrow \forall\, \mu_j \neq 0 : \mu_j \text{ hat endliche Vielfachheit,}$$

daraus folgt 0 ist einzig möglicher Häufungspunkt.

Sei $x \in H$ beliebig und

$$x_n := x - \sum_{j=1}^{n} (x|\varphi_j)\varphi_j \in H_{n+1} = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^\perp.$$

(Denn: $(\varphi_l|x_n) = (\varphi_l|x) - (\varphi_l|x) = 0$.) Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|Ax_n\| &= \|A_{n+1}x_n\|_{H_{n+1}} \\ &\leq \|A_{n+1}\|_{\mathcal{L}(H_{n+1})} \underbrace{\|x_n\|_{H_{n+1}}}_{=\|x_n\|} \\ &= |\mu_{n+1}|\|x_n\| \overset{\text{Def.}}{\leq} |\mu_{n+1}|\|x\|\,.\end{aligned}$$

Mit $\mu_j \to 0$ gilt dann $Ax_n \to 0$,

$$\Longrightarrow: Ax = \sum_j \mu_j(x|\varphi_j)\varphi_j \quad \forall\, x \in H\,. \tag{7.18}$$

Behauptung. $\Phi := \{\varphi_j\}$ ist ONB in $N := (\ker A)^\perp$.

Aus Korollar 7.7 folgt, dass N abgeschlossener Unterraum von H, also Hilbertraum, ist.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \ker A : (\varphi_j|x) \quad &= \frac{1}{\mu_j}(\mu_j\varphi_j|x) = \frac{1}{\mu_j}(A\varphi_j|x) \\ &\overset{A\text{ symm.}}{=} \frac{1}{\mu_j}(\varphi_j|\underbrace{Ax}_{=0}) = 0\,,\end{aligned}$$

d.h. $\varphi_j \perp \ker A\,\forall\, j$, damit ist $\Phi \subset N$.

Sei $x \in \Phi^\perp = \{x \in N \mid x \perp \Phi\}$.

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow (x|\varphi_j) = 0\,\forall\, j \overset{(7.18)}{\Longrightarrow} x \in \ker A \\ &\Longrightarrow: x \in \ker A \cup (\ker A)^\perp = \{0\} \Longrightarrow: \Phi^\perp = \{0\}\,,\end{aligned}$$

somit ist Φ ONB in $N = (\ker A)^\perp$.

$\ker A$ ist ein separabler Hilbertraum, daher folgt aus Bemerkung 7.13, dass eine abzählbare ONB von $\ker A$ existiert. Daraus folgt, $\Phi = \{\varphi_j\}$ lässt sich zu einer ONB von $H = (\ker A)^\perp \otimes \ker A$ ergänzen. □

Anwendung auf den Laplace-Operator

Voraussetzungen: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet und C^∞. G sei die Greensche Funktion für Ω (vgl. Bemerkung 5.3 (d)).

Wir definieren

$$(Af)(x) := \int_\Omega G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega, f \in L_2(\Omega)\,.$$

Aus Theorem 5.7 folgt dann, ist $f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \alpha > 0$, so ist $u := Af \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ die eindeutige Lösung von $-\Delta u = f$ in $\Omega, u|_{\partial\Omega} = 0$.

Lemma 7.36. *Sei $n \in \{2,3\}$ und A wie oben definiert. Dann ist $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ symmetrisch und kompakt.*

Beweis. Sei $R > 0 : \Omega \subset \mathbb{B}(0,R)$. Sei G_R die Greensche Funktion für $\mathbb{B}(0,R)$ (vgl. Satz 5.9, Bemerkung 5.10).

$$\overset{\text{Lemma 5.6}}{\Longrightarrow} 0 \leq G(x,y) \leq G_R(x,y)\,, \quad (x,y) \in \Omega \times \Omega \tag{7.19}$$

Weiter folgt aus Satz 5.9 und Bemerkung 5.10, dass G_R eine Singularität hat von der Form

$$\begin{cases} \log|x-y| & \text{falls } n = 2 \\ |x-y|^{-n+2} & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}.$$

In Polarkoordinaten folgt $G_R \in L_2(\mathbb{B}(0,R) \times \mathbb{B}(0,R))$ und damit mit (7.19) $G \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Wegen Satz 5.4 gilt, G ist symmetrisch und insgesamt folgt dann mit Beispiel 7.31 (b) $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ symmetrisch und kompakt. □

Lemma 7.37. *Sei $n = 2,3, A$ wie oben, dann folgt $Af \in C(\bar{\Omega})\,\forall\, f \in L_2(\Omega)$.*

Beweis. Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R}), 0 \leq \eta \leq 1, \eta(t) = 0, t \leq 1$ und $\eta(t) = 1, t \geq 2$.

Sei $f \in L_2(\Omega)$ fest,

$$\omega_\varepsilon(x) := \int_\Omega G(x,y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega\,,$$

daraus folgt $\omega_\varepsilon \in C(\bar{\Omega})\,\forall\, \varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned} |(Af)(x) - \omega_\varepsilon(x)| &\leq \int_\Omega G(x,y)\left|1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{CS}}{\leq} \|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_\Omega G(x,y)^2 \left|1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right|^2 \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_{[|x-y|\leq 2\varepsilon]} G(x,y)^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sei $n = 3 : G(x,\,\cdot\,) = G(x,\,\cdot\,) - \mathcal{N}(x - \cdot) + \mathcal{N}(x - \cdot)$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow: \int_{[|x-y|\leq 2\varepsilon]} G(x,y)^2\,\mathrm{d}y &\leq c \int_{[|x-.y|\leq 2\varepsilon]} \frac{1}{|x-y|^2}\,\mathrm{d}y \\ &= c\int_{\mathbb{B}(0,2\varepsilon)} \frac{1}{|y|^2}\,\mathrm{d}y = c\int_0^{2\varepsilon} r^{-2}r^{3-1} \\ &= 2c\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |(Af)(x) - \omega_\varepsilon(x)| \leq c_1\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Somit ist $\omega_\varepsilon \in C(\bar{\Omega}), \omega_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} Af$ gleichmäßig in $\bar{\Omega}$. Da Af ein gleichmäßiger Grenzwert einer stetigen Funktion ist, folgt $Af \in C(\bar{\Omega})$. Analog gilt dies für $n = 2$. □

Theorem 7.38 (Eigenwerte des Laplace-Dirichlet-Operators)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes C^∞-Gebiet, $n = 2, 3$. Dann besitzt das Eigenwertproblem*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \textit{in}\ \Omega\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

eine Folge (λ_k) positiver Eigenwerte $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit und die zugehörigen (in $L_2(\Omega)$ normierten) Eigenfunktionen $\{\varphi_n\}$ sind aus $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ und bilden eine ONB von $L_2(\Omega)$.

Ferner: $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}}\varphi_k\right\}$ ist eine ONB in $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Beweis. Die Idee ist, dass wir $A = (-\Delta_D)^{-1}$ betrachten. Wegen Theorem 7.35 und Lemma 7.36 folgt ($L_2(\Omega)$ separabel), es existiert eine ONB $\{\varphi_j\}$ von $L_2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen mit zugehörigen Eigenwerten $\mu_j \neq 0$ des Operators A, definiert durch

$$(Af)(x) := \int_\Omega G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad f \in L_2(\Omega), x \in \Omega$$

und $\mu_j \to 0$. Man beachte, dass aus $A\varphi_j = \mu_j\varphi_j$ folgt

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \varphi_j = \frac{1}{\mu_j}A\varphi_j \in C(\bar{\Omega})\\
&\overset{\text{Theorem 5.7}}{\Longrightarrow} \varphi_j = \frac{1}{\mu_j}A\varphi_j \in C^1(\bar{\Omega}) \qquad \text{(impliziert Hölder-stetig)}\\
&\overset{\text{Theorem 5.7}}{\Longrightarrow} \varphi_j \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})
\end{aligned}$$

löst

$$\begin{aligned}
-\Delta\varphi_j &= \frac{1}{\mu_j}\varphi_j \quad \text{in}\ \Omega\,,\\
\varphi_j|_{\partial\Omega} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Setze $\lambda_j := \frac{1}{\mu_j}$, dann folgt $|\lambda_j| \xrightarrow{j\to\infty} \infty$. Wegen Theorem 7.16 wissen wir, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein kann. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\lambda_j \underbrace{(\varphi_j|\varphi_j)}_{=1} &\overset{(7.20)}{=} -\int_\Omega \underbrace{\Delta\varphi_j\bar{\varphi}_j}_{\substack{=\operatorname{div}(\bar{\varphi}_j\nabla\varphi_j)\\ -\nabla\varphi_j\nabla\bar{\varphi}_j}}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \underbrace{-\int_{\partial\Omega}\underbrace{\bar{\varphi}_j}_{\overset{(7.20)}{=}0}\nabla\varphi_j\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma(x)}_{=0} + \underbrace{\int_\Omega|\nabla\varphi_j|^2\,\mathrm{d}x}_{>0}\,,
\end{aligned}$$

daraus folgt, $\lambda_j > 0 \,\forall\, j \geq 1$, also o.B.d.A. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \to \infty$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}}\varphi_k\right\}$ eine ONB von $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\varphi_j|\varphi_k)_{\mathring{W}_2^1} &= \underbrace{(\varphi_j|\varphi_k)_{L_2}}_{=\delta_{jk}} + (\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_k)_{L_2} \\
&= \delta_{jk} + \int_\Omega \nabla\varphi_j \overline{\nabla\varphi_k}\,\mathrm{d}x \\
&= \delta_{jk} - \int_\Omega \underbrace{\Delta\varphi_j}_{\overset{(7.20)}{=} -\lambda_j\varphi_j} \bar{\varphi}_k\,\mathrm{d}x \\
&= \delta_{jk} + \lambda_j \underbrace{(\varphi_j|\varphi_k)_{L_2}}_{=\delta_{jk}} = (1+\lambda_j)\delta_{jk}\,,
\end{aligned}
$$

d.h. $\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j}}\varphi_j\right\}$ ist ONS in $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Sei $g \in (\mathrm{span}\{\varphi_j \mid j \geq 1\})^\perp$ in $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, d.h. $g \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ und $(g|\varphi_j)_{\mathring{W}_2^1} = 0 \,\forall\, j \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow: 0 &= (g|\varphi_j)_{L_2} + \underbrace{(\nabla g|\nabla\varphi_j)_{L_2}}_{= \int_\Omega \nabla g \overline{\nabla\varphi_j}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_\Omega g \underbrace{\Delta\bar{\varphi}_j}_{=-\lambda_j\bar{\varphi}_j}} \\
\Longrightarrow: 0 &= (g|\varphi_j)_{L_2} + \lambda_j (g|\varphi_j)_{L_2} \\
&= \underbrace{(1+\lambda_j)}_{>0}(g|\varphi_j)_{L_2} \\
\Longrightarrow (g|\varphi_j)_{L_2} &= 0 \quad \forall\, j \geq 1 \underset{\text{in } L_2(\Omega)}{\overset{\{\varphi_j\}\text{ ONB}}{\Longrightarrow}} g = 0\,,
\end{aligned}
$$

d.h. $(\mathrm{span}\{\varphi_j\})^\perp = \{0\}$ in $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. $\square$

Bemerkung 7.39. (a) Theorem 7.38 gilt auch für $n \neq 2, 3$.

Beweis. E. Di Benedetto. $\square$

(b) $\lambda_1 > 0$ heißt Haupteigenwert von $-\Delta_D$. Es gilt

(i) λ_1 ist einfach (d.h. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$),

(ii) $\lambda_1^{-1} = \sup_{\|\varphi\|_{L_2}=1} |(A\varphi|\varphi)|$ und die zugehörige Eigenfunktion φ_1 ist strikt positiv, d.h. $\varphi_1(x) > 0, x \in \Omega, \varphi_1(x) = 0, x \in \partial\Omega$.

(c) Neumannproblem: $-\Delta u = \lambda u$ in $\Omega, \partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$ hat Eigenwerte

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty$$

mit Eigenfunktionen $\varphi_j \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Es gilt $\varphi_1 = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$.

(d) Theorem 7.38 gilt für allgemeine Operatoren der Form

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial(a_{jk}(x)\partial_k u)$$

mit $a_{jk}(x) = a_{kj}(x) > 0, x \in \bar{\Omega}$, d.h. L ist gleichmäßig elliptisch.

Kapitel 8

Fouriertransformation

Motivation. Fouriertransformation überführt eine partielle Differentialgleichung in algebraische Gleichungen (auf $\mathbb{R}^n$). Die Lösung dieser wird dann wieder zurücktransformiert.

Definition. Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot x_j$ mit $\xi, x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

die Fouriertransformation von f.

Bemerkung. Aus dem Satz von Lebesgue folgt, dass $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Satz 8.1. *Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) *Faltungssatz:* $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}$.

(b) *Für die Translation $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ gilt: $(\widehat{\tau_a f})(\xi) = e^{-ia\cdot\xi} \hat{f}(\xi)$ mit $\xi, a \in \mathbb{R}^n$.*

(c) $(\widehat{e^{ia\cdot x} f})(\xi) = (\tau_a \hat{f})(\xi)$ *mit $a, \xi \in \mathbb{R}^n$.*

(d) *Sei $(\sigma_t f)(x) := f(tx)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ eine Dilatation. Dann ist*

$$\mathcal{F} \circ \sigma_t = t^{-n} \sigma_{\frac{1}{t}} \circ \mathcal{F}.$$

Beweis. (a) Wir rechnen einfach nach.

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \, e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&\underset{z=x-y}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-iz\cdot\xi} \, \mathrm{d}z \, e^{-iy\cdot\xi} \, \mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

(b) Übung.

(c) Übung.

(d) Auch hier rechnen wir nach, dass gilt

$$\begin{aligned}
(\widehat{\sigma_t f})(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(tx) e^{-i\xi\cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&\underset{z=tx}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\xi\cdot\frac{z}{t}} t^{-n} \, \mathrm{d}z \\
&= t^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \,.
\end{aligned}$$

□

Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C_0(X) := \{u \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0 \, \exists K = \bar{K} \Subset X, |u(x)| < \varepsilon \, \forall x \in X \backslash K\}$. Ist $u \in C_0(X)$, so sagen wir „u verschwindet im Unendlichen".

Bemerkung 8.2. $C_0(X)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von

$$(BUC(X), \|\cdot\|_\infty) \,,$$

also selbst ein Banachraum.

Beweis. Übung. □

Theorem 8.3 (Riemann-Lebesgue)**.** $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n))$.

Beweis. (i) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, dann folgt mit Lebesgue $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\begin{aligned}
&|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Longrightarrow &\|\mathcal{F}f\|_{BUC(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\
\Longrightarrow &\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}^n), BUC(\mathbb{R}^n))
\end{aligned}$$

(ii) Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $(1 - \Delta_x) e^{-\xi x} = (1 + |\xi|^2) e^{-\xi x}$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow: \hat{f}(\xi) &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1 + |\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{(1 - \Delta_x) \underbrace{e^{-\xi x}}_{\in L_{1,\mathrm{loc}}}}_{\in L_{1,\mathrm{loc}}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1 + |\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \Delta_x) f(x) e^{-\xi x} \, \mathrm{d}x \\
\Longrightarrow |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1 + |\xi|^2} \|(1 - \Delta_x) f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0 \text{ gleichmäßig.}
\end{aligned}$$

Daraus folgt (per Definition), $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ beliebig.

$$\overset{\mathcal{D}\overset{d}{\subset} L_1}{\underset{\text{Satz 3.4}}{\Longrightarrow}} \exists\, f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : f_j \longrightarrow f \quad \text{in } L_1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longrightarrow: |\hat{f}(\xi)| \leq \underbrace{|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_j(\xi)|}_{\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \underbrace{\|f - f_j\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 0}} + \underbrace{|\hat{f}(\xi)|}_{\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0 \text{ glm.}}$$

$$\Longrightarrow |\hat{f}(\xi)| \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0 \text{ gleichmäßig, d.h. } \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)\,. \qquad \square$$

Bemerkung. Die Einsfunktion $\mathbb{1}$ kann nicht Fouriertransformation einer L_1-Funktion sein.

Definition. Für alle $k, m \in \mathbb{N}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$q_{k,m}(\varphi) := \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,$$
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid q_{k,m}(\varphi) < \infty\, \forall\, k, m \in \mathbb{N}\}$$

als den (Schwartzschen) Raum der schnell fallenden Funktionen. Als Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\Longleftrightarrow q_{k,m}(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\, k, m \in \mathbb{N}\,.$$

Bemerkung. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist später geeigneter Raum für Fouriertransformation.

Bemerkung 8.4. (a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Untervektorraum von $BUC^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jedes $q_{k,m}$ ist eine Norm auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist kein normierter Vektorraum.)

(b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollständiger metrischer Raum, wenn er versehen ist mit der (Topologie-erzeugenden) Metrik

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k,m=0}^{\infty} 2^{-(k+m)} \frac{q_{k,m}(\varphi - \psi)}{1 + q_{k,m}(\varphi - \psi)}\,.$$

(c) Es ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\subset} L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$.

(i) $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \varphi_j \to \varphi$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$

Notation. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Ferner gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} C_0(\mathbb{R}^n)$.

(d) Wir setzen
$$r_{k,m}(\varphi) := \max_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| \le k}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|\,,$$
daraus folgt für alle $k, m \in \mathbb{N}$
$$\exists\, c = c(k,m) > 0 : \frac{1}{c} r_{k,m}(\varphi) \le q_{k,m}(\varphi) \le c r_{k,m}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,$$
d.h. $\{r_{k,m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$ erzeugt die Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff r_{k,m}(\varphi_j - \varphi) \to 0 \,\forall\, k, m \in \mathbb{N}$.

(e) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $q_{k,m}(\partial^\alpha \varphi) \le q_{k,m+|\alpha|}(\varphi) \,\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a)-(e) Übung. □

Notation. $D_j := \frac{1}{i}\partial_j, 1 \le j \le n$.

Satz 8.5. *Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) $(\widehat{x^\alpha \varphi})(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.

(b) $(\widehat{D^\alpha \varphi})(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.

(c) $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, *d.h.* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *linear und* $\mathcal{F}\varphi_j \to \mathcal{F}\varphi$ *in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \,\forall\, \varphi_j \to \varphi$ *in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a) Es ist $D_\xi^\alpha e^{-i\xi x} = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha e^{-i\xi x}$ und $|x^\alpha| \le |x|^{|\alpha|}$.
$$\begin{aligned} \Longrightarrow: |D_\xi^\alpha e^{-i\xi x} \varphi(x)| &\le |x|^{|\alpha|}(1 + |^|2)^n |\varphi(x)| \frac{1}{(1+|x|^2)^n} \\ &\le \underbrace{q_{n+|\alpha|,0}(\varphi)}_{<\infty, \varphi \in \mathcal{S}} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} \in L_1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$
Es folgt die Differenzierbarkeit unter dem Parameterintegral und damit $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n), D_\xi^\alpha \hat{\varphi} = (-1)^{|\alpha|}(\widehat{x^\alpha \varphi})$.

(b) Im vorletzten Schritt wenden wir Fubini und partielle Integration an, wobei jedes Randintegral verschwindet, da φ schnellfallend ist.
$$\begin{aligned} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \xi^\alpha e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \varphi(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \\ &= (\widehat{D^\alpha \varphi})(\xi) \end{aligned}$$

(c) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(x) &\overset{(a)}{=} (-1)^{|\alpha|}\xi^\beta(\widehat{x^\alpha\varphi})(\xi) \overset{(b)}{=} (-1)^{|\alpha|}(\widehat{D^\beta(x^\alpha\varphi)})(\xi) \\
\Longrightarrow |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi(x))|(1+|x|^2)^n \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^n} \\
&\leq c q_{n+|\alpha|,|\beta|}(\varphi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^n}}_{<\infty} \\
&\leq c q_{n+m,k}(\varphi) \qquad \forall\, |\alpha| \leq m, |\beta| \leq k, \xi \in \mathbb{R}^n \\
\Longrightarrow r_{k,m}(\hat{\varphi}) &\leq c q_{n+m,k}(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\, \forall\, k, m \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}$$

mit Bemerkung 8.4 (d) folgt dann die Behauptung. ☐

Lemma 8.6. $e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}}$ *ist Eigenfunktion von* $\mathcal{F}$ *mit Eigenwert* 1*, d.h.*

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}}\right) = e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}}.$$

Beweis. Es gilt $e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}}\right)(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-i\xi_j x_j}\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \\
&= \prod_{j=1}^n \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-i\xi_j x_j}\,\mathrm{d}x_j\right].
\end{aligned}$$

Sei $n = 1. \varphi(x) := x^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \varphi'(x) = -x\varphi(x) \Longrightarrow D\varphi(x) = -\frac{1}{i}x\varphi(x)\,. \tag{8.1}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\hat{\varphi}' = D\hat{\varphi} &\overset{\text{Satz 8.5(a)}}{=} -(\widehat{x\varphi}) \overset{(8.1)}{=} i(\widehat{D\varphi}) \overset{\text{Satz 8.5(b)}}{=} i\xi\widehat{\varphi} \\
\Longrightarrow \hat{\varphi}' = -\xi\hat{\varphi} &\Longrightarrow \hat{\varphi}(\xi) = ce^{-\frac{\xi}{2}} \\
c = \hat{\varphi}(0) &= (2\pi)\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

☐

Theorem 8.7. *Es sei* $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ *bijektiv und für alle* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *gelte:*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \hat{\varphi}(-x) = (\mathcal{F}\varphi)(-x)\,.
\end{aligned}$$

Speziell gilt: $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

Beweis.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\cdot\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi$$

Beachte: $[(y,\xi)\mapsto e^{i\xi(x-y)}\varphi(y)]\notin L_1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Fubini darf deshalb nicht angewendet werden.

Wir verwenden deshalb folgenden Trick: $\forall\,\varphi,\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $x\in\mathbb{R}^n$ gelte

$$[(y,\xi)\mapsto e^{i\cdot\xi(x-y)}\varphi(y)\phi(\xi)]\in L_1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi &\underset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)}\varphi(y)\phi(\xi)\,\mathrm{d}(y,\xi)\\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\hat{\phi}(y-x)\,\mathrm{d}y \\ &\underset{z:=y-x}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(z+x)\hat{\phi}(z)\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Für alle $\varepsilon>0$ und $x\in\mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x}\hat{\varphi}(\xi)\phi(\varepsilon\xi)\,\mathrm{d}\xi \underset{\text{Satz 8.1(d)}}{\overset{(8.2)}{=}} \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+\varepsilon y)\hat{\phi}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Lassen wir nun ε gegen 0 gehen, so ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Lebesgue

$$\phi(0)\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Betrachte $\phi := e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist wegen Lemma 8.6 $\hat{\phi}=\phi$ und mit Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,.$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi(x)\\ &\Longrightarrow \varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (\mathcal{F}\hat{\varphi})(-x)\,,\quad x\in\mathbb{R}^n\\ &\Longrightarrow: \varphi = \check{\hat{\varphi}}\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\end{aligned}$$

d.h. Fouriertransformation und Spiegelung kommutieren. Setze $\widetilde{\mathcal{F}}\varphi := \check{\hat{\varphi}}$, dann folgt $\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}, \widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$.

$$\Longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}.$$

□

Korollar 8.8 (Parsevalsche Formeln)**.** *Für alle $\varphi,\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\hat{\phi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\bar{\phi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\bar{\hat{\phi}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Speziell gilt: $\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{\varphi}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$

Beweis. (i) (8.2) im Beweis zu Theorem 8.7 mit $x = 0$.

(ii) Wir rechnen nach unter Verwendung von (i)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\bar{\phi}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\widehat{\mathcal{F}^{-1}\bar{\phi}})\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\mathcal{F}^{-1}\bar{\phi}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\bar{\hat{\phi}}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

□

Theorem 8.9 (Plancherel)**.** *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem isometrischen Isomorphismus $\widetilde{\mathcal{F}} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ ist linear, bijektiv und es gilt*

$$(\widetilde{\mathcal{F}}f|\widetilde{\mathcal{F}}g)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (f|g)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \textit{für alle } f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

und $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}$. (Notation: $\mathcal{F} := \widetilde{\mathcal{F}}$.)

Beweis. Es sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann existiert ein $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \to f$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Korollar 8.8 liefert uns dann

$$\|\hat{f}_j\|_2 = \|f_j\|_2\,,$$

also ist f_j eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt, es muss ein $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ existieren, mit $f_j \to g$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\mathcal{F}f := g$.

Man kann nachrechnen, dass $(f \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}f = g) : L_2 \to L_2$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Speziell ist g unabhängig von der Folge (f_j). □

Bemerkung. Also folgt aus Theorem 8.9, dass die Fouriertransformation bijektiv ist und invertierbar (bis auf Spiegelung).

Definition. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{K})$ ist der Raum der temperierten Distributionen, d.h. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt genau dann, wenn $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ linear ist, und $\langle T, \varphi_j\rangle_{\mathcal{S}} = T(\varphi_j) \to T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}}$ für alle Folgen $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 8.10. (a) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Bemerkung 8.4 (c) liefert dann $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $T|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ linear.

Sei $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann geht $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und für $T \in \mathcal{S}'$ geht $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{K}$. □

(b) Seien $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ und

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.3}$$

Dann folgt, $\langle f, \cdot \rangle_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Übung. □

Sei $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\langle f, \cdot \rangle_{\mathcal{S}} = \langle g, \cdot \rangle_{\mathcal{S}} \overset{\text{Theorem 3.6}}{\underset{\mathcal{D}\subset\mathcal{S}}{\iff}} f = g\,.$$

Also: Wegen (8.3) kann $L_p(\mathbb{R}^n)$ als Unterraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. Insbesondere gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Korollar 8.8 (i) motiviert zu folgender Definition.

Definition. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} := \langle T, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte von T.

Bemerkung 8.11. Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist ebenfalls $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und stimmt mit der ursprünglichen Fouriertransformation überein, wenn gilt

$$T \in L_1(\mathbb{R}^n) \cup L_2(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Definition. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} := \langle T, \check{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

die Spiegelung. Wegen $(\varphi \mapsto \check{\varphi}) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ ist $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 8.12. *Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $T \mapsto \hat{T}$ linear, bijektiv und es gilt $\mathcal{F}^{-1}T = (\mathcal{F}T)^{\check{}} = \mathcal{F}\check{T}$ für alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{F}_* T := \mathcal{F}\check{T}$ mit $T \in \mathcal{S}'$. Dann folgt aus der Definition, dass $\mathcal{F}_* : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ linear ist und es gilt

$$\langle \mathcal{F}_*\mathcal{F}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}T, \check{\hat{\varphi}}\rangle_{\mathcal{S}} = \langle T, \hat{\check{\hat{\varphi}}}\rangle_{\mathcal{S}} \overset{\text{Theorem 8.7}}{=} \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Damit folgt per Definition $\mathcal{F}_*\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$. Analog gilt dies auch für $\mathcal{F}\mathcal{F}_* = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$. Daraus folgt $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}^{-1}$. ☐

Beispiel 8.13. Wir betrachten die Dirac-Delta-Distribution $\langle \delta, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} := \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (Übung!) und es gilt

$$\begin{aligned}\langle \hat{\delta}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} &= \langle \delta, \hat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}} = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\underset{\text{Bem. 8.10(b)}}{\overset{\mathbb{1}\in L_\infty(\mathbb{R}^n)}{=}} \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathbb{1}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.\end{aligned}$$

Dann folgt per Definition $\hat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathbb{1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{\delta}$ ist eine reguläre Distribution.

Andererseits ist mit Theorem 8.12

$$\delta = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\delta) = \mathcal{F}\Big(\check{\hat{\delta}}\Big) = \mathcal{F}(\hat{\delta}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}\mathbb{1}\,,$$

d.h. $\hat{\mathbb{1}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\delta$.

Definition. Es sei $a \in \mathcal{O}_M := \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} :\Longleftrightarrow a \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n\, \exists\, c_\alpha, m_\alpha > 0 : \\ |\partial^\alpha a(x)| \le c_\alpha(1+|x|^2)^{m_\alpha},\ x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

d.h. a ist langsam wachsend. Die Elemente von $\mathcal{O}_M$ heißen Multiplikationsoperatoren.

Satz 8.14. (a) *Es sei*

$$\langle a, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} := \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), a \in \mathcal{O}_M\,,$$

dann folgt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}_M \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) *Für alle* $a \in \mathcal{O}_M : a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,\forall\, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,\forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \langle aT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} := \langle T, a\varphi\rangle_{\mathcal{S}}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. (a) Es gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}_M$. Weiter rechnen wir nach, dass gilt

$$\begin{aligned}|\langle a, \varphi\rangle_{\mathcal{S}}| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |a(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le c_0 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{m_0+1}|\varphi(x)| \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^m} \\ &\le c_0 q_{m_0+n,0}(\varphi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^m}}_{<\infty}\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt $\langle a, \cdot \rangle_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $a \in \mathcal{O}_M$, dann folgt mit Leibniz

$$\begin{array}{l} a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ q_{k,m}(a\varphi) \le c_\alpha q_{k+m,m}(\varphi) \end{array} . \tag{8.4}$$

Aus (8.4) folgt $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,\forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ☐

Bemerkung 8.15. Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt (vgl. früher) $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{S}}\,\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\underset{\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}}{\overset{\text{Bem. 8.4(c)}}{\Longrightarrow}} \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Korollar 8.16. *Für alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt*

$$\widehat{D^\alpha T} = \xi^\alpha \hat{T}\,, \quad \widehat{x^\alpha T} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{T}\,.$$

Beweis. Es ist $(x \mapsto x^\alpha) \in \mathcal{O}_M$. Aus Satz 8.14 (b) und Theorem 8.12 folgt dann $x^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\xi^\alpha \hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,\forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D^\alpha T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} &\overset{\text{Def.}\mathcal{F}}{=} \langle D^\alpha T, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}} \\ &\overset{\text{Bem. 8.15}}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}} \\ &\overset{\text{Satz 8.5}}{=} \langle T, \widehat{\xi^\alpha \varphi} \rangle_{\mathcal{S}} \\ &= \langle \xi^\alpha \hat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

und daraus folgt $\widehat{D^\alpha T} = \xi^\alpha \hat{T}$. Der Rest ist analog. ☐

Theorem 8.17. *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}, p(x) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha x^\alpha$ (Polynom in $x_1, \dots, x_n$), dann ist*

$$p(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten der Ordnung m und es folgt per Definition

$$\begin{aligned} &p(D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ linear,} \\ &p(D) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ linear} \end{aligned}$$

und $p(D)u = \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\mathcal{F}u), u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (speziell: $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Beweis. Es ist klar, dass $p \in \mathcal{O}_M$ ist. Aus Satz 8.14, Bemerkung 8.4 (e) folgt

$$\begin{aligned} &p(D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ und} \\ &p(D) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ linear.} \end{aligned}$$

Weiter rechnen wir nach

$$\begin{aligned}
p(D)u &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(D^\alpha u) \\
&\overset{\text{Kor. 8.16}}{=} \sum_{|\alpha|} a_\alpha \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \hat{u}) \\
&\underset{\text{Thm. 8.12}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}\text{ linear}}{=}} \mathcal{F}^{-1}\underbrace{\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha\, \hat{u}\Big)}_{=p(\xi)} = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\underbrace{(\underbrace{p(\xi)}_{\in\mathcal{O}_M}\underbrace{\mathcal{F}u}_{\in\mathcal{S}'})}_{\in\mathcal{S}'}}_{\in\mathcal{S}'} \quad \forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.18. (a) $p(x) = \sum_{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha$ heißt Symbol des Differentialoperators $p(D)$.

(b) Sei $a \in \mathcal{O}_M$, dann gilt mit Satz 8.14, Theorem 8.12 und Theorem 8.7, $a(D) := \mathcal{F}^{-1}a(\xi)\mathcal{F}$ definiert Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $a(D)$ heißt Pseudodifferentialoperator mit Symbol a.

Beispiel 8.19. (a) Lösungen linearer Differentialoperatoren: Sei

$$p(x) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha$$

mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Wir betrachten

$$p(D)u = f \text{ mit } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.5}$$

Annahme: Es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (8.5), d.h.

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathcal{F}\text{ bijektiv}}{\iff} \widehat{p(D)u} = \hat{f} \\
&\overset{\text{Theorem 8.17}}{\iff} p(\xi)\hat{u} = \hat{f}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir hiermit eine algebraische Gleichung (keine DGL) gegeben haben.

Annahme: Sei $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_M$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow: \hat{u} = \frac{1}{p(\xi)}\hat{f} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
&\overset{\mathcal{F}\text{ bij.}}{\iff} u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{p(\xi)}\mathcal{F}f\right), \text{ d.h.} \\
&\qquad u = \frac{1}{p}(D)f = p^{-1}(D)f \text{ (vgl. Bemerkung 8.18 (b))} \\
&\qquad\;\; = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{p(\xi)}\mathcal{F}f\right)
\end{aligned}$$

ist die Lösung von (8.5) für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Man beachte, dass aus $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt: $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Wir betrachten konkret das Problem

$$(1-\Delta)u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{8.6}$$

Damit folgt per Definition mit $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$

$$\begin{aligned} p(D) = 1 - \Delta &= 1 - \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n D_j^2, \end{aligned}$$

d.h. $p(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 1 + |\xi|^2$ ist Symbol von $1 - \Delta$. Dann folgt (Übung!)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{1+|\cdot|^2} \in \mathcal{O}_M \\ \Longrightarrow (1-\Delta)^{-1} &= \mathcal{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{-1}\mathcal{F}, \end{aligned}$$

d.h. $u := \mathcal{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ ist Lösung von (8.6) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,\forall\, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Man beachte, dass auch hier aus $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt: $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) Fundamentallösungen (vgl. Kapitel 4, Newtonpotential): Es sei $p(x)$ wie oben und $p(D)$ besitze eine Fundamentallösung $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (wir wissen: Fundamentallösung existiert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, vgl. Malgrange-Ehrenpreis, Bemerkung 3.11, d.h. $p(D)K = \delta$).

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Thm. 8.17}}{\Longrightarrow} p(\xi)\hat{K} = \hat{\delta} \overset{\text{Bsp. 8.13}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathbb{1} \\ &\Longrightarrow \quad K = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\frac{1}{p} \qquad \text{falls } \frac{1}{p} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Konkret erhalten wir:

(i) $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{-1}$ ist Fundamentallösung von $1-\Delta$.

(ii) $p(D) = -\Delta$.

Beweis. (i) Vergleiche (a) aus Beispiel 8.19, es gilt

$$p(D)K = \delta \Longrightarrow K = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\frac{1}{p}, \quad p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

(ii) Vergleiche Skript. □

Kapitel 9

Wellengleichung

Wir betrachten in diesem Kapitel die homogene Wellengleichung in Ω

$$\underbrace{\partial_t^2 u}_{\substack{\text{Beschleu-}\\\text{nigung}}} - \underbrace{\Delta_x u}_{\text{Kraft}} = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \Omega$$

mit $u = u(t,x)$.

Hintergrund: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein elastisches Medium und $u(t,x)$ die Ausrenkung des Mediums in einer festen Richtung zur Zeit t am Ort x.

Als Randbedingung kann z.B. durch $u(t,x) = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega$ gegeben sein. Die Wellengleichung ist ein Prototyp einer hyperbolischen Gleichung.

9.1 Wellengleichung auf $\Omega = \mathbb{R}^n$

Theorem 9.1. *Sei $u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ Lösung der homogenen Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0\,, \quad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner sei $(t_0, x_0) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$ mit $u(0,x) = 0 = \partial_t u(0,x)$ auf $|x - x_0| \leq t_0$. Dann folgt $u \equiv 0$ auf dem Kegel $K := \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$. Störungen außerhalb von $\{(0,x) \mid |x - x_0| \leq t_0\}$ (zur Zeit $t = 0$)

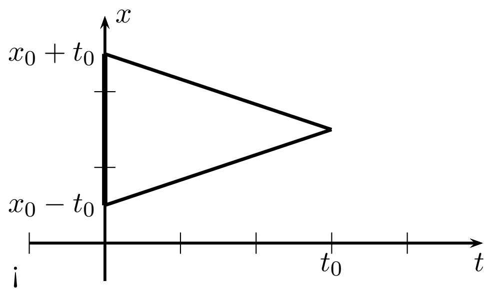

Abbildung 9.1: Kegel

haben keinen Einfluss auf die Lösung innerhalb des Kegels K (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit).

Beweis. Es sei o.B.d.A. u reellwertig. Wir definieren

$$B_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq t_0 - t\} = \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(x_0, t_0 - t)$$

und betrachten das Energiepotential

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B_t} \left((\partial_t^2 u)^2 + |\nabla_x u|^2\right) \mathrm{d}x \,.$$

Man kann zeigen, dass gilt (s. Skript)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{\mathbb{B}(x_0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\mathbb{B}(x_0,r)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \,. \tag{9.1}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &\overset{(9.1)}{=} \int_{B_t} (\partial_t^2 u\, \partial_t u + \underbrace{\nabla u\, \partial_t u}_{\substack{= \mathrm{div}_x(\partial_t u \nabla u) \\ - \partial_t u \Delta_x u}}) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{\partial B_t} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{B_t} \partial_t u\, (\underbrace{\partial_t^2 u - \Delta_x u}_{=0})\,\mathrm{d}x + \int_{\partial B_t} \partial_t u\, \partial_\nu u\,\mathrm{d}\sigma(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B_t} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\right) \mathrm{d}\sigma(x) \,.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Man beachte, dass gilt

$$|\partial_t u\, \partial_\nu u| \overset{\text{C.S.}}{\leq} |\partial_t u|\, |\nabla u| \leq \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \,. \tag{9.3}$$

Dann folgt aus (9.2) und (9.3)

$$\begin{aligned}
&\dot{E}(t) \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq E(t) \leq E(0) = 0 \,, \quad 0 \leq t \leq t_0 \\
&\Longrightarrow \partial_t u \equiv 0 \,, \quad \nabla_x u \equiv 0 \quad \text{in } K \\
&\Longrightarrow u \equiv \text{const.} \quad \text{in } K \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} u \equiv 0 \quad \text{in } K
\end{aligned}$$

□

Die Wellengleichung im 1-dimensionalen Fall

Wir betrachten $u_{tt} - u_{xx} = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, daraus folgt per Definition der Wellenoperator

$$0 = Lu := (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u \,.$$

Wir zerlegen also diesen in zwei Gleichungen 1. Ordnung

$$v := (\partial_t + \partial_x)u \tag{9.4}$$

$$0 = (\partial_t - \partial_x)v \tag{9.5}$$

und aus (9.5) erhalten wir mit Charakteristiken

$$v(t,x) = f(x+t) \quad \text{mit } f \in C^1(\mathbb{R}) \tag{9.6}$$

$$\overset{(9.4)}{\Longrightarrow} (\partial_t + \partial_x)u(t,x) = f(x+t)\,. \tag{9.7}$$

Verwenden wir wiederum Charakteristiken, so erhalten wir: Sei $x = \xi + t, w_\xi := u(t, \xi + t)$, dann folgt aus (9.7) $\dot{w}_\xi(t) = f(\xi + 2t)$. Sei $F \in C^2(\mathbb{R})$ mit $F' = \frac{1}{2}f$. Dann folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\xi + 2t) = f(\xi + 2t)\,,$$

also $w_\xi(t) = F(\xi + 2t) + G(\xi)$ mit $G(\xi)$ geeignet gewählt.

$$\overset{x=\xi+t}{\Longrightarrow} u(t,x) = \underbrace{F(x+t)}_{\text{Welle nach links}} + \underbrace{G(x-t)}_{\text{Welle nach rechts}}\,, \tag{9.8}$$

dabei ist u also eine Überlagerung von Wellen. Jede Funktion u mit $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ beliebig ist Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung. F und G sind willkürlich, d.h. es lassen sich also zwei Bedingungen zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung vorschreiben.

Das Cauchy-Problem für die 1-dimensionale Wellengleichung

Wir betrachten das Cauchy-Problem in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0\,, && t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= \varphi(x)\,, && x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(0,x) &= \psi(x)\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ fest gegeben. Wegen (9.8) gilt $F(x) + G(x) = \varphi(x)$ und $F'(x) - G'(x) = \psi(x)$, also bleibt folgendes System zu lösen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s + c \\ G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s - c \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Theorem 9.2. *Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist die eindeutige C^2-Lösung des Cauchy-Problems für die eindimensionale Wellengleichung gegeben durch*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Beweis. Existenz: Nachrechnen. Eindeutigkeit: s.o. □

Bemerkung 9.3. (a) u ist im Punkt (t, x) durch die Werte von φ und ψ auf $[x-t, x+t]$ bestimmt (vgl. Theorem 9.1/Wärmeleitungsgleichung in Kapitel 10).

(b) Die Lösung u ist nicht regulärer als der Anfangswert φ (keine Regularisierung wie z.B. bei Wärmeleitungsgleichung/vgl. auch Bemerkung 10.7).

(c) Für die Eindeutigkeit müssen $u|_{t=0}$ und $\partial_t u|_{t=0}$ vorgeschrieben werden.

Höhere Dimensionen

Die Idee hier ist ähnlich wie bei der Laplacegleichung: Mittelwertbildung reduziert die Wellengleichung für $n > 1$ auf Darbouxgleichung (hyperbolische Gleichung, 1-dimensional $\rightsquigarrow$ 1-dimensionale Wellengleichung).

Definition. Wir definieren das sphärische Mittel mit $\omega_n := \mathrm{vol}(\partial\mathbb{B}(x,1))$, $\mathrm{vol}(\partial\mathbb{B}(x,r)) = r^{n-1}\omega_n, \varphi \in C(\mathbb{R}^n), r > 0, x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} M_\varphi(x,r) :=& \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \varphi(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ =& \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \varphi(x+ry)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,. \end{aligned}$$

Satz 9.4 (Darbouxgleichung)**.** *Für $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_\varphi(x,r) = \Delta_x M_\varphi(x,r)\,, \quad r \neq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Es sei o.B.d.A. $r > 0$. Dann gilt mit y als äußere Einheitsnormale

$$\begin{aligned} \partial_r M_\varphi(x,r) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \nabla_y\varphi(x+ry)y\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{B}(0,1)} (\Delta_y)(x+ry)r\,\mathrm{d}y \\ &\overset{z:=ry}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\mathbb{B}(0,1)} \Delta\varphi(x+z)\,\mathrm{d}z \\ &\overset{\substack{\text{Polar-}\\\text{koord.}}}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_0^r\int_{|y|=1} \Delta\varphi(x+\rho y)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \partial_r[r^{n-1}\partial_r M_\varphi(x,r)] &= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} \Delta_x\varphi(x+ry)r^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} r^{n-1}\Delta_x M_\varphi(x,r) \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\partial_r(r^{n-1}\partial_r) = r^{n-1}\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}r^{n-1}\partial_r$ gilt und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 9.5. *Sei $u = u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ und $M_u(t,x,r) := M_{u(t,\cdot)}(x,r)$ aus sphärischen Mittel von $u(t,\cdot)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *u löst die Wellengleichung $\partial_t^2 - \Delta_x u = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) $\left[\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right] M_u(t,x,r) = \partial_t^2 M_u(t,x,r), t > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beweis. Es gilt $\partial_t^2 M_u = M_{\partial_t^2 u}$ und $\Delta_x Mu = M_{\Delta_x u}$ und mit Satz 9.4 folgt dann die Behauptung. $\square$

Lösung der Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Wir nehmen an $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ ist Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_x u &= 0\,, \qquad & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) &= \varphi(x)\,, & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(0,x) &= \psi(x)\,, & x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Wir setzen $W(t,r) := M_u(t,x,r)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ fest.

$$\stackrel{\text{Kor. 9.5}}{\Longrightarrow} \begin{cases} W_{tt} = W_{rr} + \dfrac{2}{r} W_r \\ W(0,r) = M_u(0,x,r) = M_\varphi(x,r) \\ W_t(0,r) = \partial_t M_u(0,x,r) = M_\psi(x,r) \end{cases}$$

Setze $V(t,r) := r\,W(t,r)$, dann folgt $V_{tt} = r(W_{rr} + \frac{2}{r}W_r) = V_{rr}$, d.h. V löst die 1-dimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{rr} = 0\,, \quad t > 0, r \in \mathbb{R} \\ V(0,r) = rM_\varphi(x,r) \\ V_t(0,r) = rM_\psi(x,r) \end{cases}.$$

Dann folgt aus Theorem 9.2

$$\begin{aligned} V(t,r) =& \frac{1}{2}\left[(r+t)M_\varphi(x,r+t) + (r-t)M_\psi(x,r-t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} sM_\varphi(x,s)\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Aus der Definition von M_u und u stetig folgt

$$\lim_{r\to 0^+} M_u(t,x,r) = u(t,x) \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned}
\overset{V=rM_u}{\Longrightarrow} u(t,x) &\overset{(9.10)}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r} V(t,r) \\
&\overset{(9.9)}{=} \partial_t(tM_\varphi(t,x)) + tM_\psi(x,t) \\
&= M_\varphi(t,x) + tM_\varphi(t,x) + t\partial_t \underbrace{\frac{1}{\omega_3}\int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \varphi(x+ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)}_{=M_\varphi(t,x)} \\
&= M_\varphi(t,x) + tM_\psi(t,x) + \frac{t}{\omega_3}\int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \nabla\varphi(x+ty)y\,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&= M_\varphi(t,x) + tM_\psi(t,x) + \frac{1}{t\omega_3}\int_{\partial\mathbb{B}(x,t)} \nabla\varphi(\bar{y})\cdot\frac{\bar{y}-x}{t}\,\mathrm{d}\sigma(\bar{y})
\end{aligned}$$

Somit gilt, jede C^2-Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung lässt sich schreiben als

$$u(t,x) = \frac{1}{t^2\omega_3}\int_{\partial\mathbb{B}(x,t)} [\varphi(y) + t\psi(y) + \nabla\varphi(y)\cdot(y-x)]\,\mathrm{d}\sigma(y)\,,$$

wobei $\omega_3 = 4\pi$ ist. Dies nennen wir die Kirchhoffsche Formel.

Theorem 9.6. *Sei $n = 3, \varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann wird die eindeutige Lösung $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ für das Cauchy-Problem der 3-dimensionalen Wellengleichung*

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0\,, &\qquad t>0, x\in\mathbb{R}^3 \\
u(0,x) = \varphi(x)\,, &\quad x\in\mathbb{R}^3 \\
\partial_t u(0,x) = \psi(x)\,, &\quad x\in\mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

durch die Kirchhoffsche Formel gegeben.

Beweis. Existenz: Nachrechnen (Darbeoux, Kapitel 5).
Eindeutigkeit: Siehe oben. □

Bemerkung 9.7. Lösungen der Wellengleichung (Prototyp für hyperbolische Gleichungen) können für strikt positive Zeiten weniger regulär sein als die Anfangswerte (im Gegensatz zu parabolischen Gleichungen wie z.B. die Wärmeleitungsgleichung, vgl. nächstes Kapitel), d.h. beispielsweise $\varphi \in C^k, \psi \in C^{k-1} \Longrightarrow u \in C^{k-1}$ (Regularitätsverlust).

Lösung der Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$

Problem: Es gibt keine Transformation, die die 2-dimensionale Gleichung auf eine 1-dimensionale reduziert.

Ausweg: Wir betrachten das 2-dimensionale Problem als 3-dimensionales, in dem wir $x_3 := 0$ setzen (in der Kirchhoffschen Formel).

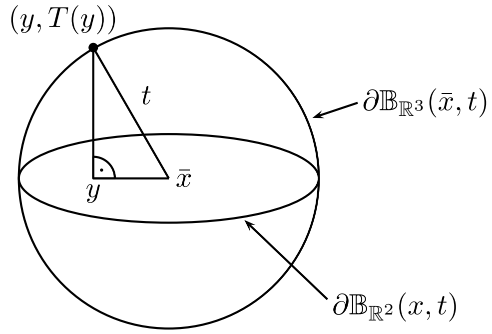

Abbildung 9.2: Transformation vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$

Es sei $\bar{x} := (x_1, x_2, 0)$ mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, beachte

$$\int_{\partial\mathbb{B}_{\mathbb{R}^3}(\bar{x},t)} h(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \underset{T(y):=\sqrt{t^2-|x-y|^2}}{\overset{\text{Transformation}}{=}} 2\int_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}(x,t)} h(y)\sqrt{1+|\nabla yT(y)|^2}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,.$$

Daraus folgt mit Nachrechnen (vgl. Kirchhoffsche Formel), dass die Lösung der 2-dimensionalen Wellengleichung wie folgt lautet:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi t^2}\int_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}(x,t)} \frac{t\varphi(y) + t^2\psi(y) + t\nabla\varphi(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Dies ist die Poisson-Formel.

Bemerkung 9.8. (a) Die Wellengleichung lässt sich in beliebigen Dimensionen $n > 3$ lösen (Fallunterscheidung: $n \in 2\mathbb{N}+1$ bzw. $n \in 2\mathbb{N}$, vgl. Evans).

(b) Für $n = 1, 3$ (bzw. allgemein $n \in 2\mathbb{N}+1$) hängt die Lösung $u(t,x)$ nur von den Anfangsdaten φ, ψ auf der Oberfläche $\partial\mathbb{B}(x,t)$ ab. (Huygens-Prinzip)

Für $n = 2$ (bzw. allgemein $n \in 2\mathbb{N}$) hängt $u(t,x)$ von den Anfangsdaten φ, ψ auf ganz $\mathbb{B}(x,t)$ ab.

Cauchy-Problem für die inhomogene Wellengleichung

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_x u &= f(t,x)\,, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(0,x) &= \psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{IW}$$

Sei u_1 Lösung für $f \equiv 0$ (vgl. vorher) und u_2 Lösung für $\varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$. Dann folgt $u_1 + u_2 =: u$ löst (IW).

Satz 9.9. *Sei* $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$*. Für* $s > 0$ *sei* $v = v(s,t,x)$ *die* C^2*-Lösung von*

$$\partial_t^2 v - \Delta_x v = 0\,, \quad v(s,0,x) = 0\,, \quad \partial_t v(s,0,x) = f(s,x)\,.$$

Dann löst

$$u_2(t,x) := \int_0^t v(s, t-s, x)\,\mathrm{d}s$$

das Problem (IW) *für* $\varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$.

Beweis. Es gilt $u_2(0,x) = 0$.

$$\partial_t u_2(t,x) = \underbrace{v(t,0,x)}_{=0} + \int_0^t \partial_t v(s,t-s,x)\,\mathrm{d}s \tag{9.11}$$

Dann folgt $\partial_t u_2(0,x) = 0$.

$$\begin{aligned} \overset{(9.11)}{\Longrightarrow} \partial_t^2 u_2(t,x) &= \underbrace{\partial_t v(t,0,x)}_{=f(t,x)} + \int_0^t \underbrace{\partial_t^2 v(s,t-s,x)}_{=\Delta_x v(s,t-s,x)}\,\mathrm{d}s \\ &= f(t,x) + \Delta_x u_2(t,x) \end{aligned}$$

□

9.2 Wellengleichung auf beschränktem Gebiet Ω

Idee: Wir wollen versuchen die Wellengleichung auf einem beschränkten Gebiet durch Variablenseparation zu lösen, d.h. $u(t,x) = w(t)v(x)$.

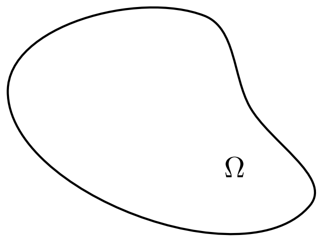

Abbildung 9.3: Beschränktes C^∞-Gebiet Ω

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet. Wir betrachten das Cauchy-Problem für die homogene Wellengleichung in Ω.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_x u &= 0\,, \quad t > 0, x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0\,, \quad t > 0, x \in \partial\Omega \quad \text{Dirichletrandbedinung} \\ \left.\begin{aligned} u(0,x) &= u^0(x)\,, \quad x \in \Omega \\ \partial_t u(0,x) &= u^1(x)\,, \quad x \in \Omega \end{aligned}\right\} &\text{ Anfangswerte} \end{aligned}$$

Abstrakte Formulierung: Wir definieren $A : \mathring{W}_2^2(\Omega) \to L_2(\Omega), W \mapsto -\Delta_x W$. Daraus folgt $A \in \mathcal{L}(\mathring{W}_2^2(\Omega), L_2(\Omega))$.

Man beachte, dass die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ wird in den Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A) = \mathring{W}_2^2(\Omega)$ (vgl. Kapitel 6: $\gamma_0\omega = 0 \,\forall\, \omega \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$).

Wir betrachten die abstrakte Wellengleichung mit $\dot{u} := \partial_t u, \ddot{u} := \partial_{tt} u$ als Gleichung im Hilbertraum $H = L_2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + Au &= 0\,, \quad t > 0 \\ u(0) &= u^0 \\ \dot{u}(0) &= u^1 \end{aligned}$$

mit (gesuchter) Funktion $u \in C^2([0,\infty), H), u(t) \in \mathrm{dom}(A) = \mathring{W}_2^2(\Omega)$. Somit haben wir eine gewöhnliche Differentialgleichung im Hilbertraum $H = L_2(\Omega)$.

Voraussetzungen. (a) H ist ein seperabler, komplexer Hilbertraum mit $\dim H = \infty$, Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$.

(b) $\mathrm{dom}(A)$ ist Unterraum von $H, A \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(A), H)$.

(c) A ist selbstadjungierter Operator (Notation: $A = A^*$), d.h. $(Au|v) = (u|Av) \,\forall\, u, v \in \mathrm{dom}(A)$.

(d) A ist abgeschlossenen (Notation: $A \in \mathcal{A}(H)$), d.h. $\forall$ Folgen (u_n) in $\mathrm{dom}(A)$ mit $u_n \to u$ in H und $Au_n \to v$ in H gilt: $u \in \mathrm{dom}(A)$ und $Au = v$.

(e) Es existiert eine Orthonormalbasis $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ in H bestehend aus Eigenvektoren aus A mit entsprechenden Eigenwerten $\{\lambda_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, d.h. $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ und $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$.

Beispiel 9.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet.

(a) Sei $H := L_2(\Omega), \mathrm{dom}(A) := \mathring{W}_2^2(\Omega), Aw := -\Delta_x w, w \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass die obigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Beweis. Es ist noch zu zeigen, dass $A \in \mathcal{A}(L_2(\Omega))$. Es ist $A = A^*$, da mit Gauß gilt

$$\int_\Omega -\Delta_x u\bar{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(-\Delta_x \bar{v})\,\mathrm{d}x \quad \forall\, u, v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)\,.$$

Wegen Theorem 7.38, Bemerkung 7.39 müssen wir nur zeigen, dass $A \in \mathcal{A}(H)$. Seien $w_j \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ mit $w_j \to w$ in $L_2(\Omega), -\Delta_x w_j \to v$ in $L_2(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass $w \in \mathring{W}_2^2(\Omega), -\Delta_x w = v$.

Es ist $\mathring{W}_2^2(\Omega) = \mathrm{cl}_{W_2^2(\Omega)}\, \mathcal{D}(\Omega)$ und es sei $\tilde{e}_\Omega$ die triviale Fortsetzung.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \tilde{e}_\Omega \in \mathcal{L}(\mathring{W}_2^2(\Omega), W_2^2(\Omega)), W_2^2(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Thm. ??}}{\cong} H^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Longrightarrow: \tilde{w}_j := \tilde{e}_\Omega w_j \longrightarrow \tilde{e}_\Omega w =: \tilde{w} \text{ in } L_2(\mathbb{R}^n) \\
&\quad - \Delta_x \tilde{w}_j \longrightarrow \tilde{e}_\Omega v =: \tilde{v} \text{ in } L_2(\mathbb{R}^n) \\
&\Longrightarrow (1-\Delta_x)\tilde{w}_j \longrightarrow \tilde{w} + \tilde{v} \text{ in } L_2(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

mit Fouriertransformation und Plancherel folgt

$$
\begin{aligned}
&\quad 1-\Delta_x \in \mathcal{L}(W_2^2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)) \text{ mit Inversen} \\
&\quad (1-\Delta_x)^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \\
&\Longrightarrow \underbrace{\tilde{w}_j}_{\substack{\longrightarrow \tilde{w} \\ \text{in } L_2(\mathbb{R}^n)}} \longrightarrow (1-\Delta_x)^{-1}(\tilde{w}+\tilde{v}) \text{ in } W_2^2(\mathbb{R}^n) \qquad (9.12) \\
&\Longrightarrow (1-\Delta_x)^{-1}\tilde{w} + \tilde{v} = \tilde{w} \in H^2(\mathbb{R}^n) = W_2^2(\Omega), \text{ da } L_2 \text{ Hausdorffsch} \\
&\Longrightarrow (1-\Delta_x)\tilde{w} = \tilde{w} + \tilde{v} \qquad (9.13) \\
&\quad - \Delta_x \tilde{w} = \tilde{v} \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

Aus Fouriertransformation und Plancherel folgt mit Theorem **??**, dass $1-\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Also gilt

$$
\begin{aligned}
&w = r_\Omega \tilde{w} \overset{(9.13)}{\in} W_2^2(\Omega) \text{ (vgl. Beweis von Theorem 6.12)} \\
&- \Delta w \overset{(9.14)}{=} v \text{ (also } Aw = v) \\
&\left.\begin{aligned} &\overset{(9.12)}{\Longrightarrow} w_j = r_\Omega \tilde{w}_j \longrightarrow r_\Omega \tilde{w} = w \text{ in } W_2^2(\Omega) \\ &\quad w_j \in \mathring{W}_2^2(\Omega), \mathring{W}_2^2(\Omega) \text{ abg. UVR von } W_2^2(\Omega) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow w \in \mathring{W}_2^2(\Omega)\,,
\end{aligned}
$$

d.h. $w \in \mathrm{dom}(A)$. □

(b) Sei $H := L_2(\Omega), \mathrm{dom}(A) := \{w \in W_2^2(\Omega) \mid \partial_j w = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, Aw := -\Delta_x w$. Daraus folgt, dass die Generalvoraussetzungen von oben erfüllt sind (ohne Beweis).

Produktansatz für „wellenförmige“ Lösungen

Es sei $0 \neq v \in H, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ mit $u(t) := w(t)v$ (Separation der Variablen). Dann ist der Ansatz: $u_{tt} = u_{xx}, u = w(t)g(x)$, damit erhalten wir

$$w_{tt}g = wg_{xx} \Longrightarrow \frac{w_{tt}}{w} = \frac{g_{xx}}{g} = \lambda\,,$$

also zwei Eigenwertprobleme. (Diesen Ansatz verallgemeinern wir in Banachräumen.)

Es sei $u(t)$ Lösung von

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0 \text{ (in } H)\\
\overset{\text{formal}}{\Longrightarrow}\ &\ddot{w}(t)v + w(t)Av = 0\\
\Longleftrightarrow\ &Av = -\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)}v \quad \forall\, t > 0\\
&-\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} \equiv \text{const.} = \lambda \in \mathbb{C}\,.
\end{aligned}$$

Somit ist folgendes Problem zu lösen.

$$\left|\begin{aligned}
&-\ddot{w} = \lambda w\,, \quad t > 0\\
&Av = \lambda v\,, \quad \text{also } \lambda = \lambda_j \text{ für ein } j \in \mathbb{N}, v = \varphi_j
\end{aligned}\right.$$

Aus der gewöhnlichen Differentialgleichung folgt $w_j(\,\cdot\,,\alpha_j,\beta_j)$ mit $\alpha_j,\beta_j \in \mathbb{R}$ und

$$w_j(\,\cdot\,,\alpha_j,\beta_j) = \begin{cases} \alpha_j e^{t\sqrt{|\lambda_j|}} + \beta_j e^{-t\sqrt{|\lambda_j|}} & ,\lambda_j < 0\\ \alpha_j + t\beta_j & ,\lambda_j = 0\\ \alpha_j \cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \beta_j \sin(\sqrt{\lambda_j}t) & ,\lambda_j > 0 \end{cases}.$$

Dann ist $u_j(t) := w_j(t,\alpha_j,\beta_j)\varphi_j$ eine Lösung von $\ddot{u} + Au = 0$.

Bemerkung. Für $\lambda_j > 0$ heißt u_j Eigenschwingung mit der Eigenfrequenz $v_j = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2\pi}$.

Als Ansatz wählen wir nun

$$u(t) := \sum u_j(t,\alpha_j,\beta_j)\varphi_j$$

ist Lösung von

$$\begin{aligned}
\ddot{u} + Au &= 0\\
u(0) &= u^0\,,\\
\dot{u}(0) &= u^1\,.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow u^0 = u(0) &= \sum_j w_j(0,\alpha_j,\beta_j)\varphi_j\\
u^1 = \dot{u}(0) &= \sum_j \dot{w}_j(0,\alpha_j,\beta_j)\varphi_j\\
\overset{\text{ONB}}{\Longrightarrow} (u^0|\varphi_j) &= w_j(0,\alpha_j,\beta_j)\,,\\
(u^1|\varphi_j) &= \dot{w}_j(0,\alpha_j,\beta_j) \quad \forall\, j
\end{aligned}$$

Löse das lineare Gleichungssystem für $t = 0$ (indem wir in die gewöhnliche DGL einsetzen)

$$\Longrightarrow \alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{2}(u^0|\varphi_j) + \frac{1}{2\sqrt{|\lambda_j|}}(u^1|\varphi_j) & ,\lambda_j < 0 \\ (u^0|\varphi_j) & ,\lambda_j \geq 0 \end{cases}$$
$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2}(u^0|\varphi_j) - \frac{1}{2\sqrt{|\lambda_j|}}(u^1|\varphi_j) & ,\lambda_j < 0 \\ (u^1|\varphi_j) & ,\lambda_j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(u^1|\varphi_j) & ,\lambda_j > 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

Formal gilt: (9.15) besitzt eine eindeutige Lösung. Sie wird durch

$$u(t) = \sum_j w_j(t, \alpha_j, \beta_j)\varphi_j$$

mit α_j, β_j aus (9.16) gegeben. Hierbei tritt jedoch das Problem auf, ob die Reihe überhaupt absolut konvergiert.

Definition. Für alle $s \geq 0$ definieren wir

$$H_A^s := \left(\left\{ x \in H \mid \sum_j |\lambda_j|^{2s} |(x|\varphi_j)|^2 < \infty \right\}, (\cdot|\cdot)_{H_A^s} \right)$$

mit $(x|y)_{H_A^s} := (x|y) + \sum\limits_j |\lambda_j|^{2s} (x|\varphi_j)\overline{(y|\varphi_j)}$.

Satz 9.11. *Für alle $s \geq 0$ gilt:*

(i) H_A^s *ist ein Hilbert-Raum,* $\mathring{H}_A^s = H$.

(ii) *Für* $0 \leq t \leq s$ *gilt:* $H_A^s \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^t$.

(iii) $A \in \mathcal{L}(H_A^{s+1}, H_A^s)$.

Beweis. Siehe Skript. □

Korollar 9.12. $\mathrm{dom}(A) = H_A^1$ *und* $Ax = \sum_j \lambda_j (x|\varphi_j)\varphi_j$, $\forall\, x \in \mathrm{dom}(A)$.

Beweis. Aus Satz 9.11 folgt $H_A^1 \subset \mathrm{dom}(A)$. Sei $x \in \mathrm{dom}(A)$, dann folgt $Ax \in H$.

$$\overset{\text{ONB}}{\Longrightarrow} Ax = \sum_j (Ax|\varphi_j)\varphi_j \overset{A=A^*}{=} \sum_j \lambda_j (x|\varphi_j)\varphi_j \tag{9.17}$$

$$\overset{\text{ONB}}{\Longrightarrow} \|x\|_{H_A^1}^2 = \|x\|^2 + \sum_j |\lambda_j|^2 |(x|\varphi_j)|^2 \overset{(9.17)}{=} \|x\|^2 + \|Ax\|^2 < \infty\,,$$

d.h. $x \in H_A^1$. □

Theorem 9.13. *Es gelte die Generalvoraussetzung von oben (Voraussetzungen). Dann gilt: Für alle* $(u^0, u^1) \in H_A^1 \times H_A^{\frac{1}{2}}$ $\exists!$ *Lösung* u *des Anfangswertproblems*

$$\ddot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0, u(0) = u^0, \dot{u}(0) = u^1$$

und es gilt

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H_A^1) \cap C^1\Big(\mathbb{R}^+, H_A^{\frac{1}{2}}\Big) \cap C^2(\mathbb{R}^+, H)\,.$$

Sie wird gegeben durch die Reihe

$$u(t) = \sum_j w_j(t)\varphi_j$$

mit $t > 0$ *(oder* $t \in \mathbb{R}$*) mit* $\ddot{w}_j + \lambda_j w_j = 0, w_j(0) = (u^0|\varphi_j), \dot{w}_j(0) = (u^1|\varphi_j)\,\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Kapitel 10

Wärmeleitungsgleichung

10.1 Die Wärmeleitungsgleichung auf dem $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten das folgende Problem.

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_x u = 0\,, \qquad & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

mit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (Anfangsverteilung) gegeben und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (Verteilung von bspw. Wärme oder Individuen im Raum) gesucht.

Die Wärmeleitungsgleichung ist ein Prototyp einer parabolischen Gleichung. Wir nehmen an $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), u$ sei Lösung von (10.1) mit $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_t \hat{u}(t,\cdot) = \widehat{\partial_t u}(t,\cdot)$.

Man wende nun Fouriertransformation auf (10.1) an.

$$\Longrightarrow \partial_t u + |\xi|^2 \hat{u} = 0\,, \quad \hat{u}(0,\cdot) = \hat{\varphi}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit ξ als Parameter.

$$\Longrightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi)\,, t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$$

mit $e^{-t|\cdot|^2} \in \mathcal{O}_M \,\forall\, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow u(t,\cdot) &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{e^{-t|\cdot|^2}}_{=\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}e^{-t|\cdot|^2})} \hat{\varphi}\Big) \\ &\overset{\text{Faltungssatz}}{\underset{\text{Satz 8.1}}{=}} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}\Big(e^{-t|\cdot|^2}\Big)}_{=:K_t(\cdot)} * \varphi \end{aligned}$$

K_t heißt Gaußkern (Wärmeleitungskern), wobei

$$K_t \overset{\substack{\text{Thm. 8.7,} \\ \text{Satz 8.1,} \\ \text{Lemma 8.6}}}{=} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\,, \quad t > 0\,.$$

Dann ist $u(t,\cdot) = K_t * \varphi, t > 0, K_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,\forall\, t > 0$. Die Existenz und Eindeutigkeit folgt, wenn φ schnellfallend.

Lemma 10.1. *(i) $\forall\, t > 0, 1 \leq p \leq \infty : \|K_t\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = p^{-\frac{n}{2}}(4\pi t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-1)}$.*

(ii) $\forall\, t > 0, 1 \leq q, r \leq \infty : (f \mapsto K_t * f) \in \mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^n), L_r(\mathbb{R}^n))$ und

$$\|K_t *\|_{\mathcal{L}(L_q,L_r)} \leq c(q,r)t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

mit $c(q,q) = 1$.

Beweis. (i) Wir rechnen nach mit Transformation

$$\begin{aligned} z &:= \sqrt{\frac{p}{2t}}x \Longrightarrow \mathrm{d}x = \left(\frac{p}{2t}\right)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{d}z\,. \\ \|K_t\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} &= (4\pi t)^{-\frac{np}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{p|x|^2}{4t}}\,\mathrm{d}x \\ &= (4\pi t)^{-\frac{np}{2}} \left(\frac{p}{2t}\right)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|z|^2}{2}}\,\mathrm{d}z}_{\substack{=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}(e^{-\frac{|\cdot|^2}{2}})(0) \\ =(2\pi)^{\frac{n}{2}}\ \text{(Lem. 8.6)}}} \end{aligned}$$

(ii) Die Behauptung folgt aus (i) und Young (Lemma 3.1). ☐

Theorem 10.2. *Sei $1 \leq p < \infty, \varphi \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n), u(t,x) := (K_t * \varphi)(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt (per Definition)*

(i) $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ ist Lösung von $\partial_t u - \Delta_x u = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $u(t,\cdot) \xrightarrow{t\to 0^+} \varphi$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\varphi \in BC(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow u \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n), u(0,\cdot) = \varphi$.

Beweis. Erinnerung:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

(i) Sei $[(t,x) \mapsto K_t(x)] \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Dann folgt wegen der Differenzierbarkeit von Parameterintegralen, dass $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Nachrechnen: $(\partial_t - \Delta_x)K_t(x) = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Longrightarrow (\partial_t - \Delta_x)u \overset{\text{vgl. Kapitel 3}}{=} ((\partial_t - \Delta_x)K_t) * \varphi = 0$$

(ii) Aus Lemma 10.1 folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x) = 1\,, \quad t > 0\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot) - \varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
=\;& \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x-y) - \varphi(x))(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|}{4t}}\,\mathrm{d}y \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
\overset{z:=\frac{y}{\sqrt{t}}}{=}\;& \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x-\sqrt{t}z) - \varphi(x)) e^{-\frac{|z|^2}{4}}\,\mathrm{d}z (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
\leq\;& c \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\|\varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{\xrightarrow{t\to 0} 0} e^{-\frac{|z|^2}{4}}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[t\to 0^+]{\text{Lebesgue}} 0\,,
\end{aligned}$$

weil wir eine L_1-Majorante gibt: $|\cdot| \leq 2\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4}} \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Sei $\varphi \in BC(\mathbb{R}^n)$. Mit derselben Transformation wie in (ii) folgt

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varphi(x-\sqrt{t}z) e^{-\frac{|z|^2}{4}}}_{|\cdot| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-\frac{|z|^2}{4}} \in L_1(\mathbb{R}^n)} \,\mathrm{d}z (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \\
&\xrightarrow[t\to 0^+]{\text{Lebesgue}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-\frac{|z|^2}{4}}\,\mathrm{d}z (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \\
&= \varphi(x) \text{ (wegen Lemma 8.6)},
\end{aligned}$$

d.h. u kann in $t = 0$ stetig fortgesetzt werden. □

Damit hat man die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ gelöst.

Bemerkung 10.3.

$$u(t,x) = (K_t * \varphi)(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,\mathrm{d}y$$

(a) Regularisierung: $u(0,\cdot) := \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ (Regularisierungsgewinn).

(b) Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$u(0,\cdot) = \varphi \text{ mit } \varphi \geq 0, \varphi \not\equiv 0 \Longrightarrow u(t,x) > 0\,\forall\, t > 0\,\forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. die Temperatur ist zu jeder Zeit $t > 0$ an jedem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ strikt positiv im Gegensatz zur Wellengleichung.

(c) Die Temperatur u wird im Raumpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ von den Anfangswerten in allen (noch so weit entfernten) Punkten y beeinflusst (obwohl der Einfluss exponentiell abnimmt mit zunehmender Distanz).

(d) Maximumsprinzip: $\inf \varphi \leq u(t,x) \leq \sup \varphi, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

(e) Eindeutigkeit: Das Anfangswertproblem (10.1) besitzt höchstens eine Lösung u mit

$$|u(t,x)| \leq M e^{\alpha |x|^2}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

mit $\alpha, M > 0$.

Speziell: $\varphi \in BC(\mathbb{R}^n) \overset{\text{(d)}}{\Longrightarrow}$ Lösung von Theorem 10.2 ist eindeutig.

Beweis. Jost. □

Satz 10.4. *Sei* $1 \leq p < \infty, \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $u(t,\cdot) := K_t * \varphi, t > 0$. *Dann folgt*

$$\exists c \in \mathbb{K} : u(t,x) \xrightarrow{t \to \infty} c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c = 0$ *ist, falls* $\operatorname{supp} \varphi \Subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \operatorname{supp} \varphi \Subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{S}} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \,\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow |u(t,x)| \leq \underbrace{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{S})^2}{4t}}}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0} \underbrace{\int_{\mathcal{S}} |\varphi(y)| \,\mathrm{d}y}_{<\infty} .$$

Für φ allgemein gilt

$$|u(t,x) - u(t-z)| \leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}} \right| \mathrm{d}y}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0 \quad \forall\, x,z \in \mathbb{R}^n} .$$

□

Theorem 10.5. *Es sei* $1 \leq p < \infty, U(t) * \varphi := K_t * \varphi, t > 0$ *und* $U(0)\varphi := \varphi$. *Dann gilt:*

(i) $\forall\, t \geq 0 : U(t) \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)), \|U(t)\|_{\mathcal{L}(L_p)} \leq 1$, *d.h.* U *ist eine Kontraktion, und* $U(0) = id_{L_p}$.

(ii) $\forall\, t, s \geq 0 : U(t+s) = U(t)U(s)$ *(kommutieren!).*

(iii) $\forall\, \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n) : U(t)\varphi \xrightarrow{t \to 0^+} \varphi$ *in* $L_p(\mathbb{R}^n)$, *d.h.* U *ist stark stetig.*

Das heißt zusammen, $\{U(t) \mid t \geq 0\}$ *ist eine stark stetige Kontraktionsgruppe auf* $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (i) Lemma 10.1.

(ii) Übung (nachrechnen).

(iii) Theorem 10.2 (ii). □

Korollar 10.6. *Sei* $1 \leq p < \infty, \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *dann folgt*

$$U(\cdot)\varphi \in C([0,\infty), L_p(\mathbb{R}^n)) .$$

Beweis. Es sei o.B.d.A. $t > 0$ ($t = 0$ folgt direkt aus Theorem 10.5 (iii)), dann ist

$$\forall\, t, h > 0 : U(t+h)\varphi = U(h)U(t)\varphi \xrightarrow[\text{Thm.10.5 (iii)}]{h \to 0^+ \text{ in } L_p} U(t)\varphi .$$

Sei $0 < h < t$, dann folgt

$$\begin{aligned} \|U(t-h)\varphi - U(t)\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\overset{\text{Thm.10.5(ii)}}{=} \|U(t-h)(\varphi - U(h)\varphi)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\overset{\text{Thm.10.5(i)}}{\leq} \|\varphi - U(h)\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\text{Thm.10.5 (iii)}]{h \to 0^+} 0 . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.7 (inhomogener Fall). Wir betrachten

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_x u &= f(t,x)\,, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= \varphi(x) \\ \underset{\text{trafo}}{\overset{\text{Fourier-}}{\Longrightarrow}} \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} &= \hat{f}(t,\cdot) \\ \hat{u}(0,\cdot) &= \hat{\varphi} . \end{aligned}$$

Dann folgt nach Lösen der gewöhnlichen DGL mit Parameter ξ und dem Anfangswert von $\mathcal{F}^{-1}$

$$u(t,\cdot) = K_t * \varphi + \int_0^t K_{t-s} * f(s,\cdot)\,\mathrm{d}s$$

mit der Notation aus Theorem 10.5:

$$u(t) = U(t)\varphi + \int_0^t U(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geq 0$$

heißt Variation-der-Konstanten-Formel.

10.2 Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet Ω

Als Generalveraussetzung fordern wir, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^∞-Gebiet ist. Wir betrachten zunächst das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_x u &= 0\,, && t > 0, x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0\,, && t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0,x) &= u^0(x)\,, && x \in \Omega \end{aligned}\right| \tag{10.2}$$

Abstrakte Formulierung (vgl. Wellengleichung):

$$A : \mathring{W}_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)\,, \quad w \mapsto -\Delta_x w$$

Dann ist (10.2) äquivalent zu

$$\dot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0\,, \qquad u(0) = u^0 \text{ in } L_2(\Omega)$$

und dabei handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung im Hilbertraum.

Voraussetzungen. (a) H ist ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum mit $\dim H = \infty$, Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$.

(b) $\mathrm{Dom}(A)$ ist Unterraum von $H, A \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(A), H) \cap \mathcal{A}(H), A^* = A$.

(c) Es existiert eine ONB $\{\varphi_j\}$ von H bestehend aus Eigenvektoren von A mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$.

Diese Voraussetzungen sind mit dem oberen Operator bei (10.2) erfüllt. Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\dot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0\,, \qquad u(0) = u^0 \text{ in } H$$

mit $u^0 \in H$ gegeben und $u : (0,\infty) \to \mathrm{dom}(A)$ gesucht.

Idee: Produktsatz $u(t) = w(t)v, w(t) \in \mathbb{C}, v \in \mathrm{dom}(A)$. (Im eindimensionalen ist die Idee analog zur Wellengleichung.)

Notation. H_A^s ist wie in Kapitel 9 definiert. Weiterhin definieren wir

$$H_A^\infty := \bigcap_{s\geq 0} H_A^s$$

und $f \in C^\infty(J, H_A^\infty) :\Longleftrightarrow f \in C^\infty(J, H_A^s)\,\forall\, s \geq 0$.

Theorem 10.8. *Es gelten die Voraussetzungen von oben. Dann gilt, $\forall\, u^0 \in H\ \exists!$ Lösung $u \in C^\infty((0,\infty), H_A^\infty) \cap C([0,\infty), H)$ von*

$$\dot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0\,, \qquad u(0) = u^0. \tag{CP}$$

Sie wird gegeben durch die Reihe

$$u(t) = \sum_j e^{-\lambda_j t}(u^0|\varphi_j)\varphi_j\,, \quad t \geq 0\,. \tag{10.3}$$

Bemerkung. Regularisierung bzgl. x:

$$u^0 \in H = H_A^0 \Longrightarrow \forall\, t > 0 : u(t) \in \bigcap_{s \geq 0} H_A^s\,.$$

Beweis. Sei $u^0 \in H$ beliebig, definiere u wie in (10.3). Dann folgt

$$u(0) = \sum_j (u^0|\varphi_j)\varphi_j \overset{\text{ONB}}{=} u^0.$$

Aus $\lambda_j \nearrow \infty$ folgt o.B.d.A. $\lambda_j > 0\,\forall\, j$. Für $t \geq \varepsilon > 0, s > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_j \lambda_j^{2s} e^{-\lambda_j t} |(u^0|\varphi_j)|^2 &\leq \sum_j \underbrace{\lambda_j^{2s} e^{-\lambda_j \varepsilon}}_{\leq c_s} |(u^0|\varphi_j)|^2 \\ &\leq c_s \sum_j |(u^0|\varphi_j)|^2 \overset{\text{ONB}}{=} c_s \|u^0\|^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Aus Weierstraß und der ONB folgt: Die Reihe $u(t)$ konvergiert absolut und lokal gleichmäßig bzgl. $t \geq \varepsilon > 0$ in H_A^s, $\forall\, s > 0$.

Die Summanden sind stetig in t:

$$\Longrightarrow u \in C((0,\infty), H_A^s) \quad \forall\, s \geq 0\,.$$

Mit $s = 0$ ist dies analog: $C([0,\infty), H)$. Analog oben: Die gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_j (-\lambda_j) e^{-\lambda_j t} (u^0|\varphi_j)\varphi_j$$

konvergiert absolut und lokal gleichmäßig bzgl. $t \geq \varepsilon > 0$ in H_A^s.

Mit dem Satz über die gliedweise Differentiation von Reihen ist $u \in C^1((0,\infty), H_A^s)$ und

$$\dot{u}(t) = \sum_j (-\lambda_j) e^{-\lambda_j t} (u^0|\varphi_j)\varphi_j\,, \quad t > 0\,\forall\, s \geq 0$$

folgt induktiv $u \in C^\infty((0,\infty), H_A^s)\,\forall\, s \geq 0$ und damit $u \in C^\infty((0,\infty), H_A^\infty)$.

Ferner: $u(t) \in H_A^1 = \operatorname{dom}(A), t > 0$ (vgl. Korollar 9.12) und

$$Au(t) = \sum_j e^{\lambda_j t} (u^0|\varphi_j) \underbrace{A\varphi_j}_{=\lambda_j \varphi_j} = -\dot{u}(t)\,, \quad t > 0\,.$$

Daraus folgt per Definition die Existenz und Regularität. Zur Eindeutigkeit: Es sei $\dot{w} + Aw = 0, t > 0, w(0) = 0$ mit $w = u - v$, wobei u, v zwei Lösungen von (CP) sind. Dann folgt

$$0 = (\dot{w}(t)|\varphi_j) + (Aw(t)|\varphi_j) \underset{\lambda_j \in \mathbb{R}}{\overset{A=A^*}{=}} (\dot{w}(t) + \lambda_j w(t)|\varphi_j) \quad \forall\, j\,.$$

Setze $\alpha_j(\cdot) := (w(\cdot)|\varphi_j) \in C^1((0,\infty),\mathbb{C})$.

$$\Longrightarrow: \dot{\alpha}_j + \lambda_j \alpha_j = 0\,, \qquad t > 0\,, \quad \alpha_j(0) = 0 \overset{\text{gew. DGL}}{\Longrightarrow} \alpha_j \equiv 0\,,$$

jedoch ist

$$w(t) \overset{\text{ONB}}{=} \sum_j \underbrace{(w(t)|\varphi_j)}_{\alpha_j(t)=0} \varphi_j = 0\,.$$

□

Korollar 10.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet. Dann folgt, für alle $u^0 \in L_2(\Omega)\, \exists!\ u \in C^\infty((0,\infty), \mathring{W}_2^2(\Omega)) \cap C([0,\infty), L_2(\Omega))$ für die Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_x u &= 0\,, \qquad t > 0, x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0\,, \qquad t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0,x) &= u^0(x)\,, \quad\ x \in \Omega\,. \end{aligned}$$

Beweis. Theorem 10.8, Beispiel 9.10 (a), Theorem 7.38, Bemerkung 7.39. □

Bemerkung. Es gilt $u \in C^\infty((0,\infty), C^\infty(\bar{\Omega}))$.

Bemerkung 10.10. Eine analoge Aussage gilt für die Neumannrandbedingungen

$$\partial_\nu u(t,x) = 0\,, \quad t > 0, x \in \partial\Omega$$

bzw. für allgemeine gleichmäßige elliptische Differentialpoeratoren zweiter Ordnung

$$\partial_t u - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\partial_j \partial_k u + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u + c(x) u = 0$$

mit $a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \geq \alpha > 0\, \forall\, x \in \bar{\Omega}$.

Theorem 10.11. *Es gelten die Voraussetzungen von oben. Sei*

$$e^{-tA}u^0 := u(t) = \sum_j e^{-\lambda_j t}(u^0|\varphi_j)\varphi_j\,, \quad t \geq 0, u^0 \in H$$

die eindeutige Lösung von (CP) $\dot{u} + Au = 0, t > 0, u^0 = u(0)$. *Dann ist* $\{e^{-tA} \mid t \geq 0\}$ *eine starkstetige Halbgruppe auf H, d.h. es gelten*

(i) $\forall\, t \geq 0 : e^{-tA} \in \mathcal{L}(H), e^{-0A} = id_H$.

(ii) $\forall\, t, s \geq 0 : e^{-sA}e^{-tA} = e^{-(t+s)A}$.

(iii) $\forall\, u^0 \in H : e^{-tA}u^0 \xrightarrow{t \to 0^+} u^0$ *in H.*

Ferner gelten folgende Eigenschaften:

(iv) $\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{-\lambda_1 t}, t \geq 0.$

(v) $(t \mapsto e^{-tA}u^0) \in C^\infty((0,\infty), H) \,\forall\, u^0 \in H$ *(d.h. die Halbgruppe ist analytisch) mit*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-tA}u^0 = -Ae^{-tA}u^0.$$

Beweis. (i) Es ist klar, dass $e^{-tA} :\to H$ linear ist $\forall\, t \geq 0$.

$$\|e^{-tA}u^0\|^2 \overset{\text{ONB}}{=} \sum_j e^{-2\lambda_j t} |(u^0|\varphi_j)|^2 \leq e^{-2\lambda_j t} \underbrace{\sum_j |(u^0|\varphi_j)|^2}_{=\|u^0\|^2}$$

$$\Longrightarrow e^{-tA} \in \mathcal{L}(H)\,, \quad \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0$$

Und damit ist klar, dass $e^{-0A}u^0 = u^0$ ist.

(ii) Wir rechnen einfach nach.

$$\begin{aligned} e^{-sA}e^{-tA}u^0 &= \sum_j e^{-\lambda_j s}(\underbrace{e^{-tA}u^0}_{=\sum_k e^{-\lambda_k t}(u^0|\varphi_k)\varphi_k} |\varphi_j)\varphi_j \\ &= \sum_{j,k} e^{-\lambda_j s} e^{-\lambda_k t}(u^0|\varphi_k)\underbrace{(\varphi_k|\varphi_j)}_{=\delta_{jk}}\varphi_j \\ &\overset{\text{ONB}}{=} \sum_j e^{-\lambda_j(s+t)}(u^0|\varphi_j)\varphi_j \\ &= e^{-(t+s)A}u^0 \end{aligned}$$

(iii) Vgl. Theorem 10.8.

(iv) Siehe (i).

(v) Theorem 10.8. □

Halbgruppen: Wir betrachten $\dot{u}+Au = 0, t > 0, u(0) = u^0$ als gewöhnliche DGL in Banachraum E mit $A \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(A), E), \mathrm{dom}(A)$ Unterraum von $E, u^0 \in E$ gegeben und $u : (0,\infty) \to \mathrm{dom}(A)$ ist gesucht.

$$\ddot{w} + \mathbb{A}w = 0\,, \quad u := \begin{pmatrix} w \\ \dot{w} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{u} + Au = 0$$

Korollar 10.12. *Es gilt* $\mathrm{dom}(A) = H_A^1$ *und*

$$Ax = \sum_j \lambda_j (x|\varphi_j)\varphi_j \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(A)\,.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Theorem 10.11 folgt $H_A^1 \subset \operatorname{dom}(A)$. Es sei $x \in \operatorname{dom}(A)$, dann ist $Ax \in H$.

$$\overset{\text{ONB}}{\Longrightarrow} Ax = \sum_j (Ax|\varphi_j)\varphi_j \underset{A=A^*}{=} \sum_j \lambda_j (x|\varphi_j)\varphi_j \tag{10.4}$$

$$\overset{\text{ONB}}{\Longrightarrow} \|x\|^2_{H_A^1} = \|x\|^2 + \sum_j |\lambda_j|^2 |(x|\varphi_j)|^2 \underset{(10.4)}{=} \|x\|^2 + \|Ax\|^2 < \infty\,,$$

d.h. $x \in H_A^1$. □

Theorem 10.13. *Es seien die Voraussetzungen von oben erfüllt. Dann gilt,* $\forall\,(u^0, u^1) \in H_A^1 \times H_A^{\frac{1}{2}}\ \exists!$ *Lösung u des Anfangswertproblems*

$$\ddot{u} + Au = 0\,, \quad t > 0\,, \qquad u(0) = u^0\,, \quad \dot{u}(0) = u^1$$

und es gilt

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H_A^1) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H_A^{\frac{1}{2}}) \cap C^2(\mathbb{R}^+, H)\,.$$

Sie wird gegeben durch

$$u(t) = \sum_j w_j(t)\varphi_j\,, \quad t \geq 0 \ (\textit{oder } t \in \mathbb{R})$$

mit $\ddot{w}_j + \lambda_j w_j = 0, w_j(0) = (u^0|\varphi_j), \dot{w}_j(0) = (u^1|\varphi_j), j \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Existenz und Regularität: Setze

$$u(t) := \sum_j w_j(t)\varphi_j\,, \quad u_1(t) := \sum_j \dot{w}_j(t)\varphi_j\,, \quad u_2(t) := \sum_j \ddot{w}_j(t)\varphi_j\,.$$

Die Konvergenz wegen der ONB genau dann, wenn

$$\sum_j |w_j(t)|^2 < \infty\,, \quad \sum_j |\dot{w}_j(t)|^2 < \infty\,, \quad \sum_j |\ddot{w}_j(t)|^2 < \infty\,.$$

Es sei o.B.d.A. $\lambda_j \geq 1\,\forall\, j$, dann folgt

$$\Longrightarrow w_j(t) = (u^0|\varphi_j)\cos(t\sqrt{\lambda_j}) + (u^1|\varphi_j)\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(t\sqrt{\lambda_j})$$

$$|w_j(t)|^2 \leq 2|(u^0|\varphi_j)|^2 + 2\frac{1}{\lambda_j}|(u^1|\varphi_j)|^2 \tag{10.5}$$

$$\Longrightarrow \sum_j |w_j(t)|^2 \underset{\lambda_j \geq 1}{\leq} 2\|u^0\|^2 + 2\|u^1\|^2 < \infty \quad \forall\, t\,.$$

Also folgt mit Weierstraß, dass $\sum_j w_j(\cdot)\varphi_j$ konvergiert absolut und gleichmäßig bzgl. t in H. Aus $w_j(\cdot)\varphi \in C(\mathbb{R}, H)$ folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz, dass

$$u = \sum_j w_j(\cdot)\varphi \in C(\mathbb{R}, H)\,.$$

Mit $(u(t)|\varphi_j) = w_j(t)\,\forall\, j, t$ folgt

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{H^1_A} &= \|u(t)\|^2 + \sum_j |\lambda_j|^2 |w_j(t)|^2 \\ &\underset{(10.5)}{\leq} \|u(t)\|^2 + 2\|u^0\|^2_{H^1_A} + 2\|u^1\|^2_{H_A^{\frac{1}{2}}} < \infty \quad \forall\, t\end{aligned}$$

und damit ist mit Weierstraß $u \in C(\mathbb{R}, H^1_A)$. Dann ist

$$u(0) = \sum_j w_j(0)\varphi_j = \sum_j (u^0|\varphi_j)\varphi_j \underset{\text{ONB}}{=} u^0 .$$

Analog: $u_1 \in C(\mathbb{R}, H_A^{\frac{1}{2}}), u_1(0) = u^1$ und $u_2 \in C(\mathbb{R}, H)$. Da $H^1_A \hookrightarrow H_A^{\frac{1}{2}}$, folgt

$$u = \sum_j w_j(\cdot)\varphi_j \in C^1(\mathbb{R}, H_A^{\frac{1}{2}}) \text{ und}$$

$$\dot{u} = \left(\sum_j w_j\varphi_j\right)^{\cdot} = \sum_j \dot{w}_j\varphi_j = u_1$$

mit dem Satz über gliedweise Differentiation von Reihen. Analog: $u \in C^2(\mathbb{R}, H)$ und $\ddot{u} = u_2$. Ferner gilt

$$u(t) \in H^1_A \underset{\text{Kor.10.12}}{=} \text{dom}(A)$$

und $A \in \mathcal{L}(\text{dom}(A), H)$. Damit ist

$$\begin{aligned}Au(t) = A\sum_j w_j(t)\varphi_j &= \sum_j w_j(t)\lambda_j\varphi_j \\ &= -\sum_j \ddot{w}_j(t)\varphi_j = -\ddot{u}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$\ddot{u} + Au = 0, u(0) = u^0, \dot{u}(0) = u^1. \tag{10.6}$$

(ii) Eindeutigkeit: Es seien u, v Lösungen von (10.6), dann löst $w := u - v$ das Problem

$$\begin{aligned}&\ddot{w} + Aw = 0\,, \qquad w(0) = 0\,, \quad \dot{w}(0) = 0 \\ \Longrightarrow\ &0 = (\ddot{w}(t)|\varphi_j) + (Aw(t)|\varphi_j) \underset{A=A^*}{=} (\ddot{w}(t) + \lambda_j w(t)|\varphi_j)\,.\end{aligned} \tag{10.7}$$

Setze $\alpha_j := (w_j(\cdot)|\varphi_j) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d.h. $\ddot{\alpha}_j = (\ddot{w}_j|\varphi_j)$.

$$\begin{aligned}&\underset{(10.7)}{\Longrightarrow} \ddot{\alpha}_j + \lambda_j\alpha_j = 0\,, \qquad \alpha_j(0) = 0\,, \quad \dot{\alpha}_j(0) = 0 \\ &\underset{\text{Eind.g.DGL}}{\Longrightarrow} \alpha_j \equiv 0\,,\end{aligned}$$

jedoch gilt $w(t) \underset{\text{ONB}}{=} \sum_j \alpha_j(t)\varphi_j = 0$, also ist $u = v$. $\square$

Korollar 10.14. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet. Dann folgt, $\forall\, (u^0, u^1) \in \mathring{W}_2^2(\Omega) \times \mathring{W}_2^1(\Omega)$ besitzt*

$$\left.\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta_x u &= 0\,, \quad t > 0, x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0\,, \quad t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0,x) &= u^0(x)\,, \quad x \in \Omega \\ \partial_t u(0,x) &= u^1(x)\,, \quad x \in \Omega \end{aligned}\right|$$

eine eindeutige Lösung $u \in C(\mathbb{R}^+, \mathring{W}_2^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathring{W}_2^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L_2(\Omega))$.

Beweis. Es sei $H := L_2(\Omega), \mathrm{dom}(A) := \mathring{W}_2^2(\Omega), Aw := -\Delta_x w$, dann folgt aus Bemerkung 10.10 (a), Theorem 10.13, Theorem 7.38 und Bemerkung 7.39: Es genügt zu zeigen, dass $H_A^{\frac{1}{2}} \doteq \mathring{W}_2^1(\Omega)$ bzgl. der ONB $\{\varphi_j\}$ in $L_2(\Omega)$ mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_j \to \infty$. Man beachte

$$\Phi_j := \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j}} \varphi_j \Longrightarrow \{\Phi_j\} \text{ ONB von } \mathring{W}_2^1(\Omega)\,. \tag{10.8}$$

Vergleiche Beweis zu Theorem 7.38: Es folgt mit Gauß

$$\begin{aligned} (w|\varphi_j)_{\mathring{W}_2^1} &= (1+\lambda_j)(w|\varphi_j)_{L_2} \\ &= (w|\varphi_j)_{L_2} + (\nabla w|\nabla\varphi_j)_{L_2} \quad \forall\, w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Sei $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega) = \mathrm{dom}(A) \overset{\text{Kor.10.12}}{=} H_A^1 \hookrightarrow \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap H_A^{\frac{1}{2}}$.

$$\|w\|^2_{\mathring{W}_2^1} \underset{\text{Parseval}}{\overset{(10.8)}{=}} \sum_j |(w|\Phi_j)_{\mathring{W}_2^1}|^2 \underset{\text{Def.}\Phi_j}{\overset{(10.9)}{=}} \sum_j (1+\lambda_j)|(w|\varphi_j)_{L_2}|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \|w\|^2_{H_A^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{dom}(A), \|\cdot\|_{\mathring{W}_2^1}) \doteq (\mathrm{dom}(A), \|\cdot\|_{H_A^{\frac{1}{2}}}) \tag{10.10}$$

Sei $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ beliebig, $\mathring{W}_2^2 = \mathrm{dom}(A) \overset{d}{\subset} \mathring{W}_2^1$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \exists\, w_j \in \mathrm{dom}(A) : w_j \longrightarrow w \text{ in } \mathring{W}_2^1 \hookrightarrow L_2 = H \\ &\overset{(10.10)}{\Longrightarrow} \quad (w_j) \text{ ist Cauchy-Folge in } H_A^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{H_A^{\frac{1}{2}}\text{ vollst.}}{\overset{\text{Thm.10.11}}{\Longrightarrow}} \exists\, z \in H_A^{\frac{1}{2}} : w_j \longrightarrow z \text{ in } H_A^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow H = L_2 \\ &\Longrightarrow \quad w = z \in H_A^{\frac{1}{2}}\,, \end{aligned}$$

d.h. $\mathring{W}_2^1(\Omega) \subset H_A^{\frac{1}{2}}$, analog $H_A^{\frac{1}{2}} \subset \mathring{W}_2^1(\Omega)$ und mit (10.10) folgt die Behauptung für „$\doteq$“. □

Literaturverzeichnis

[1] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

[2] W. Arendt, K. Urban. *Partielle Differentialgleichungen.* Spektrum Akademischer Verlag 2010.

[3] J. Jost. *Partielle Differentialgleichungen.* Springer 1998.

[4] D. Gilbarg, N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer.

Index