Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Angewandte Mathematik

Diplomarbeit

Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

von Cornelius Rüther
Matr.-Nr.: 2517350

1. September 2014

Erstprüfer: Prof. Dr. Gerhard Starke
Zweitprüfer: Prof. Dr. Peter Wriggers

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

- Thema (worum geht es?) → Fehlerabschätzung → analytische Lösung oftmals nicht bekannt und damit Fehlerschätzer interessant

→ in FEM soll Lösung genauer mit weniger Rechenzeit sein, daraus folgt Anwendung adaptiver Verfahren mit verschiedenen Fehlerschätzern

- Lücke zum neuen (Kontaktproblematik) füllen in dieser Arbeit

→ Übertragung unseres Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme, wie und warum?! → möglicher Grund: Hindernisprobleme beinhalten Kontaktbereiche (später für Kapitel 4 interessant)

- Struktur der Arbeit

Kapitel 2

Grundlagen

- FEM → einleitend ansprechen, dass analytische nicht immer lösbar
- Fehlerschätzer → alle aufführen (s. Braess) → damit verbundene adaptive Verfeinerungsstrategien (wie arbeitet Matlab mit Verfeinerung und welche Verfeinerungen gibt es?)
- mathematisches Modell für Hindernisprobleme / Kontaktprobleme

2.1 Variationsformulierung

2.2 Finite Elemente Methode

2.3 Adaptive Verfeinerungsstrategien

2.3.1 A posteriori Fehlerschätzer

2.4 Ein Hindernisproblem

2.4.1 Variationsformulierung für das Hindernisprobleme

2.4.2 Lösung des Hindernisproblems mittels FEM

2.5 Kontaktprobleme

2.5.1 Mathematische Modellierung von Kontaktproblemen

2.5.2 Variationsformulierung für Kontaktprobleme

2.5.3 Lösung des Kontaktproblems mittels FEM

Kapitel 3

Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

- Herleitung des Fehlerschätzers bei Hindernisproblemen (s. Mainpaper)
- Vergleich Hindernisprobleme zu Kontaktproblemen $\rightarrow$ warum gerade dieser Fehlerschätzer bei Hindernis- bzw. Kontaktproblemen

3.1 Herleitung eines a posteriori hierarchischen Fehlerschätzers

3.1.1 Diskretisierung

3.1.2 Lokaler Anteil des Fehlerschätzers

3.1.3 Oszillationsterme

3.1.4 Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers

3.1.5 Effektivität des Fehlerschätzers

3.2 Ein adaptiver Algorithmus

3.3 Erfüllung einer Saturationseigenschaft

Kapitel 4

Übertragung des Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme

Wenn zu wenig, dann in Kapitel 3, dafür allerdings die Überschrift ändern.

Kapitel 5

Implementierung des Fehlerschätzers in Matlab

- Grundlegender Aufbau des Programms
- Gründe warum wo was.
- dokumentierter Quellcode ist im Anhang zu finden

Kapitel 6

Validierung

- numerisches Beispiel (Problemstellung) $\rightarrow$ vielleicht mit Kontakt und nur Hindernis
- Vergleich mit Analytischer Lösung?! (Tabelle mit Ergebnissen) $\rightarrow$ Ergebnisse diskutieren

6.1 Numerisches Beispiel zum Hindernisproblem

6.2 Numerisches Beispiel zum Kontaktproblem

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

- kurz einleiten, worum es ging (Einleitung in einem Absatz zusammenfassen)
- Was ist rausgekommen?!
- Ausblick: Was ist noch offen geblieben, was kann man noch machen...

Literaturverzeichnis

[BCH05] Bartels, S. ; Carstensen, C. ; Hecht, A.: 2D isoparametric FEM in MATLAB / Humboldt-Universität, Berlin. 2005. – Forschungsbericht

[BCH07] Braess, D. ; Carstensen, C. ; Hoppe, R.: Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem. In: *Numerische Mathematik* 107 (2007), S. 455–471

[Bra05] Braess, Dietrich: A Posteriori Error Estimators for Obstacle Problems – Another Look / Faculty of Mathematics, Ruhr-University. 2005. – Forschungsbericht

[Bra13] Braess, Dietrich: *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.* 5. Auflage. Springer-Verlag, 2013

[CSW99] Carstensen, C. ; Scherf, O. ; Wriggers, P.: Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 5, S. 1605–1626

[Joh92] Johnson, Claes: Adaptive finite element methods for the obstacle problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), Nr. 4, S. 483–487

[KZ11] Kornhuber, Ralf ; Zou, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for the discretization error of elliptic obstacle problems. In: *Mathematics of Computation* 80 (2011), Nr. 273, S. 69–88

[Sta08] Starke, Gerhard: Numerik partieller Differentialgleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2008. – Vorlesungsskript

[Sta11] Starke, Gerhard: Variationsungleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2011. – Vorlesungsskript

[Ste12] Stephan, Ernst P.: Numerik partieller Differentialgleichungen I / IFAM - Universität Hannover. 2012. – Vorlesungsskript

[Zou11] Zou, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for an elliptic obstacle problem. In: *Applied Numerical Mathematics* 61 (2011), S. 344–355

[ZVKG11] Zou, Q. ; Veeser, A. ; Kornhuber, R. ; Gräser, C.: Hierarchical error estimates for the energy functional in obstacle problems. In: *Numerische Mathematik* (2011), Nr. 117, S. 653–677

Anhang A

Quellcode

A.1 Implementierung des Fehlerschätzers für das Hindernisproblem