Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Angewandte Mathematik

Diplomarbeit

Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

von Cornelius Rüther
Matr.-Nr.: 2517350

3. September 2014

Erstprüfer: Prof. Dr. Gerhard Starke
Zweitprüfer: Prof. Dr. Peter Wriggers

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

- Thema (worum geht es?) → Fehlerabschätzung → analytische Lösung oftmals nicht bekannt und damit Fehlerschätzer interessant

→ in FEM soll Lösung genauer mit weniger Rechenzeit sein, daraus folgt Anwendung adaptiver Verfahren mit verschiedenen Fehlerschätzern

- Lücke zum neuen (Kontaktproblematik) füllen in dieser Arbeit

→ Übertragung unseres Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme, wie und warum?! → möglicher Grund: Hindernisprobleme beinhalten Kontaktbereiche (später für Kapitel 4 interessant)

- Struktur der Arbeit

Kapitel 2

Grundlagen

- FEM $\rightarrow$ einleitend ansprechen, dass analytische nicht immer lösbar
- Fehlerschätzer $\rightarrow$ alle aufführen (s. Braess) $\rightarrow$ damit verbundene adaptive Verfeinerungsstrategien (wie arbeitet Matlab mit Verfeinerung und welche Verfeinerungen gibt es?)
- mathematisches Modell für Hindernisprobleme / Kontaktprobleme

2.1 Variationsformulierung

- Was ist eine schwache Form einer PDE? Am Standardbeispiel $\Delta u = f$ in $\Omega, u = g$ auf $\partial\Omega$. (Herleitung auch über das Funktional $\rightarrow$ auch für später beim Hindernisproblem wichtig)
- Warum gibt es eine Lösung? (Lax-Milgram $\rightarrow$ auch Riesz aufführen, da in dem Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von $a(u, v-u) \geq f(v-u)$ erwähnt wird)

2.2 Finite Elemente Methode

- Was ist Galerkin-Approximation und warum gibt es eine Lösung (hier ist Lax-Milgram auch anwendbar (warum?))
- Der für uns verwendete Finite Element Raum wird eingeführt (lineare Funktionen).
- Was ist eine Triangulierung (vgl. Braess auf Seite 58)?
- local-global node ordering zur Effizienzsteigerung

2.3 Adaptive Verfeinerungsstrategien

2.3.1 A posteriori Fehlerschätzer

2.4 Ein Hindernisproblem

2.4.1 Variationsformulierung für das Hindernisprobleme

2.4.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

- Kapitel 3 in [KO88] mit Theorem 3.1-3.4 (**Beweis vgl. NPDE I von Stephan Seite 39**, auch in Solution of Variational Inequalities in Mechanics (Theorem 1.1 Seite 4))

2.4.3 Lösung des Hindernisproblems mittels FEM

- Analog zum vorherigen Kapitel kann man auch im $\mathbb{R}^n$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter bestimmten Voraussetzungen zeigen. (vgl. Vug Skript Kapitel 2) $\Rightarrow$ Beachte hierfür auch den Fixpunktsatz von Brouwer.

2.5 Einführung in die Strukturmechanik

- Beschreibung der Kinematik: Referenz- bzw. Ausgangskonfiguration, Deformationsgradient, Verzerrungsmaße (Konti-Buch)
- Lineararisierung der Verzerrungsmaße für unseren Fall (kleine Deformationen) mittels "Taylor"(siehe auch Gateaux-Ableitung - Seite 24 Konti Skript):
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u})$$
- Kinetik: Kräftegleichgewicht und äußere Kontaktlast
- Konzepte für ebene Spannungs- bzw. Verzerrungszustände
- Konstitutive Modelle (vor allem Materialgesetze) $\Rightarrow$ Hier vor allem Hooke:
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\mathrm{tr}\ \boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}\,,$$
wobei λ, μ die Lamé-Konstanten sind (Materialabhängige Parameter). $\Rightarrow$ Hier noch mal den Zusammengang von Konstanten zu E, ν aufzeigen.
- falls Tensorrechnungen konkret benötigt werden, können diese im Anhang dargelegt werden

2.6 Kontaktprobleme

2.6.1 Mathematische Modellierung von Kontaktproblemen

- Starke Formulierung (s. Wriggers Paper) für Kontaktproblem mit Signorini-Kontakt (ohne Reibung).

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \text{ in } \Omega \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0} \text{ in } \Omega \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \text{ auf } \Gamma_N \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ auf } \Gamma_D \tag{2.4}$$

$$(\boldsymbol{u} \circ \chi - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}_c + g \geq 0 \text{ auf } \Gamma_C \tag{2.5}$$

  sowie auf Γ_C muss $\sigma_n \leq 0$ (Normalenkraft $\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})$), $\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{0}$ (keine Tangentialkraft, da keine Reibung – $\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \sigma_n \boldsymbol{n}$) und $((\boldsymbol{u} \circ \chi - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}_c + g)\sigma_n = 0$, d.h. wenn kein Kontakt ist, ist die Normalkraft in den Punkten Null, also herrscht Kräftegleichgewicht.

- Anreißen von Kontaktproblem mit Tresca-Reibung (vgl. Numerik für Kontaktmechanik von Stephan und Vug von Starke) $\Rightarrow$ Herleitung der Variationsungleichung durch Ableitung nicht mehr möglich, da Reibungspotential nicht mehr differenzierbar.

2.6.2 Variationsformulierung für Kontaktprobleme

- Minimierung von Energiefunktional (vgl. [KO88] Seite 112 unten) mit $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$:

$$E(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - f(u) \text{ mit}$$

$$a(u,u) = \int_\Omega \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, d\Omega,\; f(u) = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\, d\Gamma$$

  unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} - g \leq 0$ auf Γ_C (siehe Vug Skript), bzw. $(\boldsymbol{u} \circ \chi - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}_c + g \geq 0$ auf Γ_C (etwas allgemeiner, vgl. Wriggers Paper).

- Herleitung auch über starke Formulierung möglich, vgl. Stephan – Kontaktprobleme.

- Herleitung der Variationsformulierung: Finde $\boldsymbol{u} \in K$: $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \geq f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\, \forall\, \boldsymbol{v} \in K$ (s. auch Wriggers Paper) analog zum Hindernisproblem (nicht mehr ausführlich, wenn oben schon ausführlich).

- [KO88] Seite 113 für Bedingung für die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung des Problems (hierfür wird Korn's Ungleichung benötigt $\Rightarrow$ vielleicht Anhang?).

2.6.3 Lösung des Kontaktproblems mittels FEM

- Beschreibe das diskrete Problem, was man bekommt mit: Finde $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^N$ mit $B\boldsymbol{x}^* \geq c$, so dass

  $$(A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \geq 0 \, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \text{ mit } B\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}\,,$$

  wobei

  $$A = \left[\int_\Omega \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Psi}_i)\, d\Omega\right]_{1 \leq i,j \leq N}, \, \boldsymbol{b} = \left[\int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i \, ds\right]_{1 \leq i \leq N}$$
  $$B = [(\boldsymbol{\Psi}_j(\chi(\boldsymbol{x}_i)) - \boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x}_i)) \cdot \boldsymbol{n}_c(\boldsymbol{x}_i)]_{\boldsymbol{x}_i \in \Gamma_c, 1 \leq j \leq N}, \, c = [-g(\boldsymbol{x}_i)]_{\boldsymbol{x}_i \in \Gamma_c}$$

  Dieses Problem ist (wie vorher schon gezeigt) äquivalent zu einem quadratischen Problem

  $$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \text{ s.t. } B\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}\,,$$

  d.h. Lösbarkeit des quadratischen Programms sollte auch gezeigt sein (vgl. Vug Skript oder auch nichtlineare Optimierung).

Kapitel 3

Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

- Herleitung des Fehlerschätzers bei Hindernisproblemen (s. Mainpaper)
- Vergleich Hindernisprobleme zu Kontaktproblemen $\rightarrow$ warum gerade dieser Fehlerschätzer bei Hindernis- bzw. Kontaktproblemen

3.1 Herleitung eines a posteriori hierarchischen Fehlerschätzers

3.1.1 Diskretisierung

3.1.2 Lokaler Anteil des Fehlerschätzers

3.1.3 Oszillationsterme

3.1.4 Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers

3.1.5 Effektivität des Fehlerschätzers

3.2 Ein adaptiver Algorithmus

3.3 Erfüllung einer Saturationseigenschaft

Kapitel 4

Übertragung des Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme

Wenn zu wenig, dann in Kapitel 3, dafür allerdings die Überschrift ändern.

Kapitel 5

Implementierung des Fehlerschätzers in Matlab

- Grundlegender Aufbau des Programms
- Gründe warum wo was.
- dokumentierter Quellcode ist im Anhang zu finden

Kapitel 6

Validierung

- numerisches Beispiel (Problemstellung) → vielleicht mit Kontakt und nur Hindernis
- Vergleich mit Analytischer Lösung?! (Tabelle mit Ergebnissen) → Ergebnisse diskutieren

6.1 Numerisches Beispiel zum Hindernisproblem

6.2 Numerisches Beispiel zum Kontaktproblem

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

- kurz einleiten, worum es ging (Einleitung in einem Absatz zusammenfassen)
- Was ist rausgekommen?!
- Ausblick: Was ist noch offen geblieben, was kann man noch machen...

Literaturverzeichnis

[BCH05] Bartels, S. ; Carstensen, C. ; Hecht, A.: 2D isoparametric FEM in MATLAB / Humboldt-Universität, Berlin. 2005. – Forschungsbericht

[BCH07] Braess, D. ; Carstensen, C. ; Hoppe, R.: Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem. In: *Numerische Mathematik* 107 (2007), S. 455–471

[Bra05] Braess, Dietrich: A Posteriori Error Estimators for Obstacle Problems – Another Look / Faculty of Mathematics, Ruhr-University. 2005. – Forschungsbericht

[Bra13] Braess, Dietrich: *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.* 5. Auflage. Springer-Verlag, 2013

[CSW99] Carstensen, C. ; Scherf, O. ; Wriggers, P.: Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 5, S. 1605–1626

[Joh92] Johnson, Claes: Adaptive finite element methods for the obstacle problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), Nr. 4, S. 483–487

[KO88] Kikuchi, N. ; Oden, J.T.: *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods.* SIAM, 1988

[KZ11] Kornhuber, Ralf ; Zou, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for the discretization error of elliptic obstacle problems. In: *Mathematics of Computation* 80 (2011), Nr. 273, S. 69–88

[Sta08] Starke, Gerhard: Numerik partieller Differentialgleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2008. – Vorlesungsskript

[Sta11] Starke, Gerhard: Variationsungleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2011. – Vorlesungsskript

[Ste12] Stephan, Ernst P.: Numerik partieller Differentialgleichungen I / IFAM - Universität Hannover. 2012. – Vorlesungsskript

[Zou11] Zou, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for an elliptic obstacle problem. In: *Applied Numerical Mathematics* 61 (2011), S. 344–355

[ZVKG11] Zou, Q. ; Veeser, A. ; Kornhuber, R. ; Gräser, C.: Hierarchical error estimates for the energy functional in obstacle problems. In: *Numerische Mathematik* (2011), Nr. 117, S. 653–677

Anhang A

Quellcode

A.1 Implementierung des Fehlerschätzers für das Hindernisproblem