



Fakultät für Mathematik und Physik  
Institut für Angewandte Mathematik

Diplomarbeit

# Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

von Cornelius Rüther  
Matr.-Nr.: 2517350

9. November 2014

Erstprüfer: Prof. Dr. Gerhard Starke  
Zweitprüfer: Prof. Dr. Peter Wriggers

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	v
Algorithmenverzeichnis	vi
<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1 Hilberträume . . . . .	8
2.2 Variationsformulierung . . . . .	10
2.3 Finite Elemente Methode . . . . .	19
2.3.1 A priori Fehlerabschätzung . . . . .	26
2.4 Adaptive Verfeinerungsstrategien . . . . .	28
2.4.1 A posteriori Fehlerschätzer . . . . .	28
2.4.2 Verfeinerung des Netzes . . . . .	30
2.5 Einführung in die Strukturmechanik . . . . .	31
2.5.1 Kinematik . . . . .	32
2.5.2 Kinetik . . . . .	35
2.5.3 Konstitutive Gleichungen und Prinzipien . . . . .	35
<b>3 Variationsungleichungen</b>	<b>37</b>
3.1 Ein Hindernisproblem . . . . .	37
3.1.1 Variationsformulierung für das Hindernisproblem . . .	38
3.1.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	41
3.1.3 Lösung des Hindernisproblems mittels FEM . . . . .	43
3.2 Kontaktprobleme . . . . .	50
3.2.1 Mathematische Modellierung eines Kontaktproblems .	50
3.2.2 Variationsformulierung des Signorini-Kontaktproblems	54
3.2.3 Lösung des Kontaktproblems mittels FEM . . . . .	59
<b>4 Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme</b>	<b>61</b>
4.1 Herleitung von einem a posteriori hierarchischen Fehlerschätzers	62
4.1.1 Diskretisierung des Defektproblems . . . . .	62

4.1.2	Lokaler Anteil des Fehlerschätzers . . . . .	69
4.1.3	Oszillationsterme . . . . .	74
4.1.4	Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers . . . . .	77
4.1.5	Effektivität des Fehlerschätzers . . . . .	92
4.2	Ein adaptiver Algorithmus . . . . .	94
4.3	Erfüllung einer Saturationseigenschaft . . . . .	95
4.4	Übertragung des Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme . . . .	98
<b>5</b>	<b>Implementierung des Fehlerschätzers in Matlab</b>	<b>99</b>
<b>6</b>	<b>Validierung</b>	<b>100</b>
6.1	Numerisches Beispiel zum Hindernisproblem . . . . .	100
6.2	Numerisches Beispiel zum Kontaktproblem . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>101</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Funktionalanalysis</b>	<b>105</b>
A.1	Sobolev-Räume . . . . .	105
A.2	Optimalitätskriterien . . . . .	107
A.3	Konvergenzbegriffe . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Optimierung</b>	<b>110</b>
B.1	Quadratische Programmierung . . . . .	110
B.2	Active Set-Methode für konvexe QPs . . . . .	111
B.3	Algorithmus . . . . .	115
<b>C</b>	<b>Tensorrechnung</b>	<b>116</b>
<b>D</b>	<b>Quellcode</b>	<b>117</b>
D.1	Implementierung des Fehlerschätzers für das Hindernisproblem	117
	<b>Index</b>	<b>117</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Membran $\Omega$ mit Flächenlast $f$ und Auslenkung $u(x)$ . . . . .	10
2.2	Zulässige und unzulässige Triangulierung (mit hängendem Knoten) . . . . .	22
2.3	Dreiecke für nodale Basen (linear, quadratisch, kubisch) . . .	23
2.4	Triangulierung von $\Omega = [-1, 1]^2$ in 8 Courant-Elemente . . .	24
2.5	Referenzelement $\tilde{T}$ für ein allgemeines Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ . . . .	25
2.6	Verfeinerungen von Dreiecken . . . . .	31
2.7	Konfiguration eines Kontinuums $\mathcal{B}$ . . . . .	32
3.1	Ein Hindernisproblem mit Hindernis $\psi$ , konstanter Streckenlast $f$ und Lösung $u$ . . . . .	38
3.2	Körper $\mathcal{B}^1$ und $\mathcal{B}^2$ mit Randbezeichnungen . . . . .	51
3.3	Kontaktformulierung zwischen zwei Körpern . . . . .	51
4.1	Beispiel eines affinen Hindernisses $\psi$ mit $v \in \mathcal{A}_Q$ in $\mathbb{R}$ . . . .	66
4.2	Dreiecke $T_1$ und $T_2$ mit Einheitsnormalen $\boldsymbol{n}$ . . . . .	71
4.3	Darstellung von $\omega_p$ (grau) und $\mathcal{E}_p$ (abgehende Kanten von $p$ ) für ein beliebiges $\phi_p$ . . . . .	72

# Tabellenverzeichnis

2.1	Ableitungen der nodalen Basisfunktion $\phi_5$ . . . . .	24
-----	--	----

# Algorithmenverzeichnis

4.1	Adaptive Verfeinerungsstrategie für ein Hindernisproblem . .	95
B.1	Active-Set-Methode für konvexe quadratische Probleme . . .	115

# Kapitel 1

## Einleitung

- Thema (worum geht es?) → Fehlerabschätzung → analytische Lösung oftmals nicht bekannt und damit Fehlerschätzer interessant

→ in FEM soll Lösung genauer mit weniger Rechenzeit sein, daraus folgt Anwendung adaptiver Verfahren mit verschiedenen Fehlerschätzern

- Lücke zum neuen (Kontaktproblematik) füllen in dieser Arbeit

→ Übertragung unseres Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme, wie und warum?! → möglicher Grund: Hindernisprobleme beinhalten Kontaktbereiche (später für Kapitel 4 interessant)

wichtig: Vorgehen einer adaptiven Verfeinerungsstrategie mit „solve → estimate → ....“ umschreiben

- Struktur der Arbeit

# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit grundlegender Theorie beschäftigen, die nicht im Anhang aufgeführt, zum Verständnis von den darauffolgenden Kapiteln jedoch notwendig ist.

Dieses Kapitel basiert auf [Bra13], [Sta08], [Ste12b], [Wal11], [Alt12].

### 2.1 Hilberträume

Wir benötigen für die Variationsrechnung Hilberträume und wollen uns daher in diesem Kapitel mit wichtigen Eigenschaften solcher Räume im Allgemeinen beschäftigen. Zunächst führen wir ein, was wir unter einem Hilbertraum verstehen.

**Definition 2.1.** Ein *Hilbertraum* ist ein reeller oder komplexer Vektorraum  $H$  mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$ , der vollständig bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm,  $\|v\|_H^2 := (v, v)_H$  für alle  $v \in H$ , ist, d.h. in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

**Beispiel.** Es sei  $H = \mathbb{R}^n$  und  $(\cdot, \cdot)_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch das Standardskalarprodukt. Dann konvergiert jede Cauchy-Folge in  $H$  bzgl. der durch  $(\cdot, \cdot)_H$  induzierten (euklidischen) Norm (vgl. [Kö00], metrische Räume) und damit ist  $H$  ein Hilbertraum.

Wir wollen die im Folgenden aufgeführten Eigenschaften später auf weniger triviale Räume anwenden, vor allem den Funktionenraum  $H_0^1(\Omega)$  (s. Anhang A Sobolev-Räume). Um alle Aussagen auch allgemein verwenden zu können, sei in diesem Kapitel  $H$  ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und der dazu induzierten Norm  $\|v\|_H^2 = (v, v)_H$  für alle  $v \in H$ .

*Bemerkung.* Für alle  $v, w \in H$  gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$(v, w)_H \leq \|v\|_H \|w\|_H .$$



## 2. Grundlagen

---

Da wir uns in dieser Arbeit mit Variationsproblemen über konvexen abgeschlossenen Mengen beschäftigen werden, sammeln wir zunächst einige Aussagen bzgl. dieser Mengen.

**Satz 2.2** (Approximationssatz). *Es sei  $\emptyset \neq M \subset H$  konvex und abgeschlossen. Dann existiert für alle  $v \in H$  ein  $m_v \in M$  mit*

$$\|v - m_v\| = \text{dist}(v, M) := \inf_{w \in M} \|v - w\|.$$

*Wir nennen  $P_M : H \rightarrow M$  mit  $v \mapsto m_v$  die Projektionen auf  $M$ .*

*Beweis.* Der Beweis ist in [Wal11] Kapitel 7.1 Satz 7.2 zu finden.  $\square$

**Satz 2.3** (Charakterisierung der Projektionen).  *$\emptyset \neq M \subset H$  sei abgeschlossen und konvex und  $v \in H$ . Dann gilt:*

$$m_0 = P_M(v) \iff (m - m_0, v - m_0)_H \leq 0$$

*für alle  $m \in M$ .*

*Beweis.* Es sei o.B.d.A.  $0 \in M$  und  $m_0 = 0$ .

„ $\Rightarrow$ “ Wegen  $0 = P_M(x)$  muss  $\|v - tm\|_H \geq \|v\|_H$  für  $m \in M$  und  $0 \leq t \leq 1$  sein. Dann ist

$$\|v\|_H^2 \leq \|v\|_H^2 - 2t(v, m)_H + t^2\|m\|_H^2 \implies 0 \leq -2t(v, m)_H + \underbrace{t^2\|m\|_H^2}_{\geq 0}.$$

Damit ist  $2(v, m)_H \leq 0$ .

„ $\Leftarrow$ “ Für alle  $m \in M$  ist  $(v, m)_H \leq 0$ . Es folgt

$$\|v\|_H^2 \leq \|v\|_H^2 + \|m\|^2 - 2(v, m)_H = \|v - m\|_H^2.$$

Wegen  $0 \in M$  ist  $\text{dist}(v, M) = \|v\|_H^2$  und damit  $0 = P_M(v)$ .  $\square$

**Satz 2.4.** *Es sei  $\emptyset \neq M \subset H$  konvex und abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\|P_M(v) - P_M(w)\|_H \leq \|v - w\|_H \quad \forall v, w \in H.$$

*Beweis.* Da  $P_M(v), P_M(w) \in M$  für alle  $v, w \in H$  ist, folgt aus Satz 2.3

$$(P_M(w) - P_M(v), v - P_M(v))_H \leq 0, \tag{2.1}$$

$$(P_M(v) - P_M(w), w - P_M(w))_H \leq 0. \tag{2.2}$$

Addieren wir (2.1) und (2.2), so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\geq (P_M(w) - P_M(v), v - P_M(v))_H + (P_M(v) - P_M(w), w - P_M(w))_H \\ &= (P_M(w) - P_M(v), v - w + P_M(w) - P_M(v))_H \\ &= \|P_M(w) - P_M(v)\|_H^2 - (P_M(w) - P_M(v), w - v)_H \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\geq} \|P_M(w) - P_M(v)\|_H^2 - \|P_M(w) - P_M(v)\|_H \|w - v\|_H. \end{aligned}$$

Nach Umstellen der Ungleichung folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.5.** Es sei  $\emptyset \neq M \subset H$  und wir definieren das *orthogonale Komplement* von  $M$  durch

$$M^\perp := \{v \in H \mid v \perp M\} := \{v \in H \mid (v, m)_H = 0 \forall m \in M\}.$$

**Satz 2.6.** Es sei  $M$  ein abgeschlossener Untervektorraum von  $H$ . Dann ist

$$H = M \oplus M^\perp,$$

d.h. jedes  $v \in H$  hat eine eindeutige Zerlegung  $v = v_M + v_{M^\perp}$  mit  $v_M \in M$  und  $v_{M^\perp} \in M^\perp$ .

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [Wal11] Kapitel 7.1 Theorem 7.6.  $\square$

**Korollar 2.7.** Es sei  $\emptyset \neq M \subset H$  ein Untervektorraum. Dann ist  $\bar{M} = H$  genau dann, wenn  $M^\perp = \{0\}$  ist.

*Beweis.* Man kann zeigen, dass  $\overline{\text{span } M} = (M^\perp)^\perp =: M^{\perp\perp}$  ist und dann unter Verwendung von Satz 2.6 die Behauptung folgern. Den kompletten Beweis können wir in [Wal11] Kapitel 7.1 Korollar 7.7 (iii) einsehen.  $\square$

## 2.2 Variationsformulierung

Bevor wir uns mit Variationsproblemen auf konvexen Teilmengen eines Hilbertraumes beschäftigen, wollen wir die Variationsrechnung an einem einfachen Modellproblem ohne Nebenbedingung beschreiben.

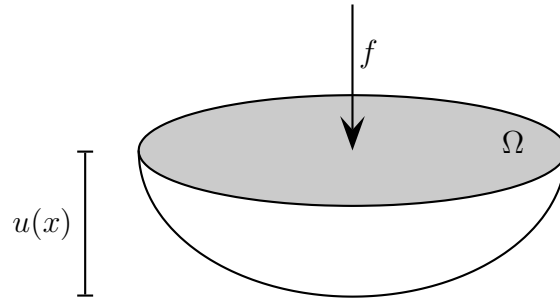


Abbildung 2.1: Membran  $\Omega$  mit Flächenlast  $f$  und Auslenkung  $u(x)$

Wir betrachten als Modellproblem die Auslenkung  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  einer in  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eingespannten Membran unter Krafteinwirkung  $f$ . Mathematisch beschrieben wird dies durch das *Dirichlet-Problem*

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \tag{2.3a}$$

$$u = g \text{ auf } \partial\Omega, \tag{2.3b}$$

dabei ist  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine für die Randwerte von  $u$  gegebene Funktion.

## 2. Grundlagen

---

*Notation.* In der Praxis übliche Dimensionen sind  $d = 2, 3$ . Der Einfachheit halber sei im Folgenden  $d = 2$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein durch ein Polygonzug berandetes Gebiet, den Rand  $\partial\Omega$  bezeichnen wir auch mit  $\Gamma$ .

*Bemerkung.* Sollte  $\Omega$  ein allgemeiner berandetes Gebiet sein, so können wir dieses beliebig genau durch ein polygonales Gebiet approximieren; hierbei entsteht schon bei der Gebietszerlegung ein Fehler.

Diesen Fehler kann man durch Verwendung von *isoparametrischen Elementen* (vgl. [Bra13] Kapitel III, §2, Isoparametrische Elemente) verringern. Dies soll in dieser Arbeit aber nicht weiter vertieft werden.

Es sei  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine für das Dirichlet-Problem zulässige Funktion, d.h. die für (2.3) hinreichend regulär ist und für die  $u_0 = g$  auf  $\Gamma$  gilt. Dann gilt für  $\tilde{u} = u - u_0$

$$-\Delta \tilde{u} = \tilde{f} \text{ in } \Omega, \quad (2.4a)$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ auf } \Gamma \quad (2.4b)$$

mit  $\tilde{f} = f - \Delta u_0$ . Also reicht es aus, sich auf das *homogene Dirichlet-Problem* (2.4) zu beschränken. Im Folgenden betrachten wir somit (2.3) mit  $g \equiv 0$ .

Mit  $H_0^1(\Omega)$  bezeichnen wir, wie in Bemerkung A.8 beschrieben, den Raum der in  $\Omega$  einmal schwach differenzierbaren Funktionen, die am Rand  $\Gamma$  verschwinden im Sinne der Spur. Wählen wir nun ein beliebiges  $v \in H_0^1(\Omega)$ , dann folgt durch Multiplikation von (2.3a) mit  $v$  und Integration über  $\Omega$  die Beziehung

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Wir betrachten nun (2.3a) also nicht mehr punktweise (lokal), sondern im gewichteten Mittel über ganz  $\Omega$  (global). Durch Anwenden der 1. Green'schen Formel (bzw. dem Satz von Gauß) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds}_{=0, \text{ da } v|_{\Gamma}=0} &= \int_{\Omega} f v \, dx \\ \iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Gleichung (2.5) wird als *Variationsgleichung* bezeichnet. Wenn wir die Notationen aus Satz A.5 (b) verwenden, so können wir (2.5) kurz schreiben als

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = (f, v)_0,$$

daher definieren wir die Bilinearform  $a : (H_0^1(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_0$  und  $(f, v) := (f, v)_0$ .

## 2. Grundlagen

---

*Bemerkung.* Wir werden in dieser Arbeit oftmals auch  $a(\cdot, \cdot)$  für eine beliebige Bilinearform  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  verwenden.

**Definition 2.8.** Eine Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$  heißt *schwache Lösung* vom homogenen Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{DP}$$

wenn die Gleichung

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

gilt.

Anschaulich ist eine solche Lösung deshalb schwach, da sie das Problem (DP) nur im gewichteten Mittel löst. Eine schwache Lösung muss das *starke Problem* nicht lösen, da sie beispielsweise die Regularitätsanforderungen an das Problem nicht erfüllen muss.

Wir wollen uns nun die Frage nach der Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung für die Variationsgleichung (2.6) stellen. Diese Frage wollen wir zunächst allgemein für einen beliebigen reellen Hilbertraum  $H$  beantworten. Wie wir nachher im Beweis des zentralen Satzes von Lax-Milgram sehen werden, ist hierfür explizit ein Hilbertraum notwendig.

Zuvor benötigen wir allerdings noch ein paar Definitionen und Eigenschaften für Bilinearformen.

**Definition 2.9.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Die Bilinearform  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig*, falls mit einem  $c > 0$

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

gilt. Sie heißt *H-elliptisch* (oder kurz *elliptisch* oder *koerziv*), falls es ein  $\alpha > 0$  gibt, so dass

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$$

gilt.

Da man die Variationsgleichung (2.6) auch aus der Minimierung eines quadratischen Energiefunktional  $J : (H_0^1(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)$  herleiten kann, wollen wir für ein solches Funktional zuvor einige Eigenschaften sammeln.

**Lemma 2.10.** *Es sei  $H$  ein Hilbertraum. Das Funktional*

$$J : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - F(v),$$

*wobei  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige bilineare koerzive und  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung ist, ist konvex.*

## 2. Grundlagen

---

*Beweis.* Es seien  $u, v \in H$ , dann gilt  $u+t(v-u) = (1-t)u+tv \in H$  (dies gilt auch, wenn wir den Satz auf eine konvexe Teilmenge  $M \subset H$  beschränken). Damit folgt mit  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 J((1-t)u+tv) &= \frac{1}{2}a((1-t)u+tv, (1-t)u+tv) - F((1-t)u+tv) \\
 &= (1-t)J(u) + tJ(v) + \frac{1}{2}a((1-t)u+tv, (1-t)u+tv) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(1-t)a(u, u) - \frac{1}{2}ta(v, v) \\
 &= (1-t)J(u) + tJ(v) + \frac{1}{2}a(u, u) + ta(u, v-u) \\
 &\quad + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u) - \frac{1}{2}(1-t)a(u, u) - \frac{1}{2}ta(v, v) \\
 &= (1-t)J(u) + tJ(v) + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u) \\
 &\quad + \underbrace{ta(u, v) - \frac{1}{2}ta(u, u) - \frac{1}{2}ta(v, v)}_{= -\frac{1}{2}ta(v-u, v-u)} \\
 &= (1-t)J(u) + tJ(v) - \frac{1}{2}t(1-t)\underbrace{a(v-u, v-u)}_{\geq \alpha\|v-u\|_H^2 \geq 0} \\
 &\leq (1-t)J(u) + tJ(v)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.11.** *Sei  $H$  ein Hilbertraum. Das Funktional  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$  aus Lemma 2.10 ist Gâteaux-differenzierbar (s. Definition A.10).*

*Beweis.* Wir rechnen einfach nach, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und verwenden dabei die Bilinearität von  $a$  und Linearität von  $F$ . Seien  $u, v \in H$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_v J(u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u) + t(a(u, v) - F(v)) + \frac{t^2}{2}a(v, v) - J(u)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (a(u, v) - F(v)) + \frac{t}{2}a(v, v) \\
 &= a(u, v) - F(v) < \infty,
 \end{aligned}$$

da  $a$  und  $F$  jeweils stetig sind und daher durch  $\|u\|_H, \|v\|_H$  beschränkt sind. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

## 2. Grundlagen

---

Nun können wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung durch das folgende Theorem zeigen.

**Theorem 2.12** (Lax-Milgram). *Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische, in  $H$  stetige, koerzive Bilinearform. Weiter sei  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges lineares Funktional, d.h.*

$$|F(v)| \leq c \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

mit einer Konstante  $c > 0$ . Dann gibt es eine eindeutige Lösung  $u \in H$ , für die

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H.$$

gilt. Diese minimiert den Ausdruck

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$$

unter allen  $v \in H$ .

*Beweis.* (i) Zunächst zeigen wir die Äquivalenz der beiden oberen Probleme.  
„ $\Rightarrow$ “ Es sei  $u \in H$ , so dass  $a(u, v) = F(v) \forall v \in H$ . Für  $t > 0$  und  $v \in H$  gilt dann

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - F(u + tv) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + t a(u, v) + \frac{t^2}{2}a(v, v) - F(u) - t F(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) + t \underbrace{(a(u, v) - F(v))}_{=0} + \frac{t^2}{2} \underbrace{a(v, v)}_{\substack{\geq 0, \text{ da } a \\ \text{koerziv}}} \\ &> \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = J(u), \end{aligned}$$

also ist  $u = \arg \min_{v \in H} J(v)$ .

„ $\Leftarrow$ “ Es sei  $u \in H$  das Minimum von dem Problem

$$\min_{v \in H} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Da  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  nach Lemma 2.10 ein konvexes Funktional ist und  $J$  nach Lemma 2.11 Gâteaux-differenzierbar, gilt mit Satz A.11 für alle  $v \in H$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_v J(u) = \left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (J(u) + t(a(u, v) - F(v)) + \frac{t^2}{2}a(v, v)) \right|_{t=0} \\ &= a(u, v) - F(v) + t a(v, v) \Big|_{t=0} = a(u, v) - F(v) \end{aligned}$$

## 2. Grundlagen

---

(ii) Eindeutigkeit: Es seien  $u, \tilde{u} \in H$  Lösungen der Variationsungleichung, d.h.

$$a(u, v) = F(v) \wedge a(\tilde{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in H.$$

Damit folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen für alle  $v \in H$

$$a(u, v) = a(\tilde{u}, v) \iff a(u - \tilde{u}, v) = 0. \quad (2.7)$$

Da  $H$  ein Vektorraum ist, gilt auch  $u - \tilde{u} \in H$ . Ersetzen wir also in (2.7)  $v = u - \tilde{u}$ , dann ergibt sich

$$0 = a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \stackrel{a \text{ koerziv}}{\geq} \underbrace{\alpha}_{>0} \|u - \tilde{u}\|_H^2 \geq 0 \implies \|u - \tilde{u}\|_H^2 = 0,$$

also folgt  $u = \tilde{u}$ .

(iii) Existenz: Die Existenz einer Lösung weisen wir über das Funktional nach.

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - F(v) \stackrel{a \text{ koerziv}}{\underset{F \text{ linear}}{\geq}} \frac{1}{2}\alpha\|v\|_H^2 - c\|v\|_H \\ &= \frac{1}{2}\alpha \left( \|v\|_H^2 - \frac{2c}{\alpha}\|v\|_H \right) = \frac{1}{2}\alpha \left( \|v\|_H - \frac{c}{\alpha} \right)^2 - \frac{c^2}{2\alpha} \\ &\geq -\frac{c^2}{2\alpha} \end{aligned}$$

Folglich ist  $J$  nach unten beschränkt. Sei  $\eta := \inf\{J(v) \mid v \in H\}$  und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $J(v_n) \rightarrow \eta$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann folgt mit der Koerzivität von  $a$

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n - v_m\|_H^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) \\ &= a(v_n, v_n) + a(v_m, v_m) - a(v_n, v_m) - a(v_m, v_n) \\ &= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - \underbrace{a(v_n, v_n + v_m) - a(v_m, v_n + v_m)}_{= -a(v_n + v_m, v_n + v_m)} \\ &= 2a(v_n, v_n) - 4F(v_n) + 2a(v_m, v_m) - 4F(v_m) \\ &\quad - a(v_n + v_m, v_n + v_m) + 4F(v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 4a\left(\frac{v_n + v_m}{2}, \frac{v_n + v_m}{2}\right) + 8F\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8\eta \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 4\eta + 4\eta - 8\eta = 0, \end{aligned}$$

d.h.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge. Da  $H$  ein Hilbertraum ist, gilt somit:  
 $\exists u \in H : v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  mit  $J(u) = \eta$ .  $\square$

## 2. Grundlagen

---

Um die allgemeine Aussage aus dem Theorem von Lax-Milgram auf unser Modellproblem (2.6) übertragen zu können, benötigen wir die *Poincaré-Friedrich-Ungleichung*, die auch später noch eine zentrale Rolle für den hierarchischen Fehlerschätzer spielen wird.

**Satz 2.13** (Poincaré-Friedrich-Ungleichung). *Es sei  $\Omega$  in einem  $d$ -dimensionalen Würfel der Kantenlänge  $s > 0$  enthalten. Dann gilt*

$$\|v\|_0 \leq s \|\nabla v\|_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei  $\|\cdot\|_0$  die durch das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_0$  induzierte Norm ist.

*Beweis.* Der Beweis ist in [Bra13] Kapitel II, §1 Sobolev-Räume, Satz 1.5 oder [Sta08] Satz 1.5 zu finden.  $\square$

**Bemerkung 2.14.** Für die Gültigkeit der Poincaré-Friedrich-Ungleichung, muss  $v$  nicht auf ganz  $\Gamma$  gleich Null sein, sondern es reicht aus, dass

$$v \in H_{\Gamma_u}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_u\}$$

ist mit  $\Gamma_u \subset \Gamma$ , wobei mit einem Maß  $\mu$  gilt:  $\mu(\Gamma_u) \neq 0$ , d.h.  $\Gamma_u$  ist keine Nullmenge (vgl. [Bra13] Kapitel II, §1, Bemerkung 1.6).

Jetzt können wir mittels Theorem 2.12 überprüfen, ob Problem (2.6) mit  $a : (H_0^1(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_0$  und  $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(v) := (f, v)$  eine eindeutige Lösung hat. Es seien  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx = \|\nabla v\|_0^2 \\ &\geq \frac{s^2 + 1}{(1 + s)^2} \|\nabla v\|_0^2 \stackrel{\text{Satz 2.13}}{\geq} \frac{1}{(1 + s)^2} (\|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2) \\ &= \frac{1}{(1 + s)^2} \|v\|_1^2. \end{aligned}$$

Damit ist  $a$  mit  $\alpha := \frac{1}{(1+s)^2}$  koerziv. Weiter rechnen wir unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung nach:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \right| \leq \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} |\partial_i u| |\partial_i v| \, dx \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sum_{i=1}^d \left( \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\partial_i v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} |\partial_i v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$



## 2. Grundlagen

---

d.h.  $a$  ist stetig mit  $c := 1$ . Die Symmetrie von  $a$  ist trivial, also bleibt nur noch die Stetigkeit von  $F$  zu zeigen. Es sei  $v \in H_0^1(\Omega)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |(f, v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left( \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla v|^2}_{\geq 0} + |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = c \|v\|_1 \end{aligned}$$

mit  $0 < c := \left( \int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ , wenn  $f \in L_2(\Omega)$  ist. Damit ist  $F$  ein stetiges lineares Funktional und somit existiert nach Theorem 2.12 eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  für die schwache Formulierung des homogenen Dirichlet-Problems.

Weiter minimiert die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  auch das Funktional

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx,$$

welches die gespeicherte Energie der durch die Kraft  $f$  belasteten in  $\Omega$  eingespannten Membran beschreibt.

*Bemerkung.* Die Stetigkeit vom Funktional  $F$  zeigt, dass die Kraft  $f$  aus dem Dirichlet-Problem wenigstens quadratisch integrierbar, also in  $L^2(\Omega)$ , sein muss, damit es eine schwache Lösung geben kann.

*Notation.* (a) Mit  $H'$  bezeichnen wir den Dualraum zum Hilbertraum  $H$ .

(b) Den Dualraum zu  $H^1(\Omega)$  bezeichnen wir mit  $H^{-1}(\Omega)$ .

Als Folgerung aus dem Theorem von Lax-Milgram betrachten wir den nächsten Satz.

**Satz 2.15** (Riesz'scher Darstellungssatz). *Es sei  $H$  ein Hilbertraum mit einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$ . Es sei  $F \in H'$ , dann existiert genau ein  $u \in H$ , so dass*

$$(u, v)_H = F(v) \quad \forall v \in H.$$

*Beweis.* Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Theorem 2.12. Die Abbildung  $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  ist als Skalarprodukt bilinear, symmetrisch und positiv definit, damit auch bzgl. der auf  $H$  durch das Skalarprodukt induzierten Norm  $\|v\|_H := \sqrt{(v, v)_H}$ , koerziv.  $F$  ist als Element des Dualraumes  $H'$  eine lineare stetige Abbildung  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  und damit folgt mit  $a(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_H$  aus dem Theorem von Lax-Milgram die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.16.** *Es sei  $H$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige koerzive Bilinearform. Dann existiert genau ein linearer Operator  $A : H \rightarrow H$ , so dass gilt:*

$$a(u, v) = (Au, v)_H \quad \forall u, v \in H.$$

## 2. Grundlagen

---

*Beweis.* Es sei  $u \in H$  fest, dann ist  $L : H \rightarrow \mathbb{R}, L(v) := a(u, v)$  eine lineare Abbildung, die stetig ist, da

$$|L(v)| = |a(u, v)| \stackrel{\text{stetig}}{\leq} c \|u\|_H \|v\|_H = \tilde{c} \|v\|_H$$

mit  $0 < \tilde{c} := c \|u\|_H$  gilt. Damit folgt nach dem Darstellungssatz von Riesz, dass es ein eindeutiges  $l \in H$  gibt, so dass

$$a(u, v) = L(v) = (l, v)_H \quad \forall v \in H$$

gilt. Da  $u \in H$  jedoch beliebig ist, bleibt zu zeigen, dass es ein eindeutiges  $A : H \rightarrow H$  gibt, so dass  $Au = l$  ist.

Wir zeigen zunächst mithilfe der Bilinearform  $a$ , dass  $A$  linear ist. Es gilt für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $u, v \in H$

$$\begin{aligned} (A(\lambda u + \mu v), w)_H &= a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \\ &= \lambda (Au, w)_H + \mu (Av, w)_H \\ &= (\lambda Au + \mu Av, w)_H \end{aligned}$$

für alle  $w \in H$ . Weiter gilt

$$\|Au\|_H^2 = (Au, Au)_H = a(u, Au) \stackrel{\text{stetig}}{\leq} c \|u\|_H \|Au\|_H,$$

d.h.  $\|Au\|_H \leq c \|u\|_H$  und damit ist nach [Wer11] Satz II.1.2 der Operator  $A$  stetig.

Betrachten wir den Kern von  $A$ , so ergibt sich

$$\ker A := \{v \in H \mid Av = 0\} = \{0\}, \quad (2.8)$$

denn

$$\alpha \|v\|_H^2 \stackrel{\text{koerziv}}{\leq} a(v, v) = (Av, v)_H \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|Av\|_H \|v\|_H$$

und damit gilt  $\|Av\|_H \geq \alpha \|v\|_H$ , d.h.  $Av = 0 \Leftrightarrow v = 0$ . Dies impliziert, dass  $A$  injektiv ist, denn mit  $v_1, v_2 \in H, Av_1 = Av_2$  folgt

$$0 = Av_1 - Av_2 = A(v_1 - v_2) \stackrel{(2.8)}{\implies} v_1 = v_2.$$

Weiter betrachten wir das Bild von  $A$ , d.h.

$$\text{im } A := \{v \in H \mid \exists u \in H : Au = v\} \subset H.$$

Sei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $v_k \in \text{im } A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann folgt, dass für jedes  $v_k$  ein  $u_k \in H$  existiert mit  $Au_k = v_k$ . Es gelte, dass  $Au_k = v_k \rightarrow v \in H$  geht, dann folgt

$$\begin{aligned} \alpha \|u_n - u_m\|_H &\leq \|A(u_n - u_m)\|_H = \|Au_n - Au_m\|_H \\ &= \|v_n - v_m\|_H \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d.h.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$  ist eine Cauchy-Folge und konvergiert daher in  $H$ . Also existiert ein  $u \in H$  mit  $u_n \rightarrow u$ . Mit der Stetigkeit von  $A$  folgt dann

$$v_n = Au_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Au = v,$$

d.h.  $v \in \operatorname{im} A$  und damit ist  $\operatorname{im} A$  abgeschlossen. Wir betrachten nun ein  $v \in H$  mit  $v \perp \operatorname{im} A \subset H$ , dann gilt

$$(Au, v)_H = 0 \quad \forall u \in H.$$

Damit folgt mit  $u = v \in H$  oben eingesetzt

$$0 = (Av, v)_H = a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \implies v = 0.$$

Also besteht der zu  $\operatorname{im} A$  orthogonale Raum nur aus dem Nullelement und mit Korollar 2.7 gilt dann  $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A} = H$ . Damit ist  $A$  bijektiv.

Es seien nun  $0 \neq l \in H$  sowie  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H, H)$  zwei lineare Operatoren mit  $A_1 u = l$  und  $A_2 u = l$ , die nach der obigen Weise konstruiert sind. Dann gilt

$$0 = A_1 u - A_2 u = (A_1 - A_2)u \implies A_1 = A_2,$$

da  $u \neq 0$  und die Summe zweier bijektiver linearer Operatoren wieder bijektiv ist, also ist ein so konstruierter Operator eindeutig.  $\square$

## 2.3 Finite Elemente Methode

Für unser Modellproblem kann man zeigen, dass es für bestimmte Gebiete  $\Omega$  eine exakte, d.h. analytische, Lösung gibt (vgl. [Wal11] Kapitel 5). Diese muss im Allgemeinen nicht für jedes Problem bekannt oder gar berechenbar sein. Daher wollen wir nicht mehr die exakte Lösung von unserer Variationsgleichung (2.6) berechnen, sondern eine Approximation davon, die sogenannte *Galerkin-Approximation*.

Unter dem *Galerkin-Verfahren* verstehen wir, dass wir die Variationsgleichung

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \tag{2.9}$$

nur noch auf einem endlich dimensionalen Unterraum  $V_h \subset H$  lösen wollen, d.h. finde  $u_h \in V_h$ , so dass

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.10}$$

**Satz 2.17.** *Das „Galerkin-Problem“ (2.10) hat eine eindeutige Lösung.*

*Beweis.* Da  $V_h$  als Unterraum von  $H$  auch ein Hilbertraum ist und die Eigenschaften von  $a, F$  weiterhin erfüllt sind, gilt auch hier der Satz von Lax-Milgram, was die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung sichert.  $\square$

## 2. Grundlagen

---

Da  $V_h$  ein endlich dimensionaler Unterraum von  $H$  ist, wird jener von einer endlichen Basis  $\mathcal{B}_h := \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  aufgespannt, d.h. für  $u_h \in V_h$  gilt:

$$\exists! \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N : u_h(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i \phi_i(x). \quad (2.11)$$

Da  $F(\cdot), a(u, \cdot)$  linear sind und alle  $v_h \in V_h$  analog zu oben darstellbar sind, ist (2.10) äquivalent zum Problem

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

mit  $u_h$ , wie in (2.11) dargestellt, eingesetzt ergibt sich

$$a(u_h, \phi_i) = a\left(\sum_{j=1}^N \mu_j \phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1}^N \mu_j a(\phi_j, \phi_i),$$

also

$$\sum_{j=1}^N \mu_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Damit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{\mu} = \mathbf{f}$$

mit  $A = [a(\phi_j, \phi_i)]_{i,j=1}^N$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]_{i=1}^N$  und  $\mathbf{f} = [F(\phi_i)]_{i=1}^N$ . Dieses Gleichungssystem gilt es zu lösen, um die gesuchten Koordinaten  $\mu_i, i = 1, \dots, N$ , bzgl. der Basis  $\mathcal{B}_h$  für die approximierte Lösung  $u_h$  zu finden.

In den Ingenieurwissenschaften, insbesondere bei kontinuumsmechanischen Problemen, wird  $A$  als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet.

**Bemerkung 2.18.** Ist die Bilinearform  $a$  symmetrisch, so ist es auch die Matrix  $A$ , denn

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = a(\phi_j, \phi_i) = a_{ji}.$$

Außerdem folgt aus der Koerzivität von  $a$ , dass mit  $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N$  gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}^T A \boldsymbol{\nu} &= \sum_{i,j=1}^N \nu_i a_{ij} \nu_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \sum_{j=1}^N a(\phi_i, \phi_j) \nu_j \\ &= \sum_{i=1}^N \nu_i a\left(\phi_i, \sum_{j=1}^N \nu_j \phi_j\right) = a\left(\sum_{i=1}^N \nu_i \phi_i, \sum_{j=1}^N \nu_j \phi_j\right) \\ &= a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_H^2 > 0, \end{aligned}$$

da  $\sum \nu_i \phi_i = v_h \neq 0$  wegen  $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$ . Damit ist  $A$  also positiv definit und es folgt nochmals, dass  $A\boldsymbol{\mu} = \mathbf{f}$  eine eindeutige Lösung hat.

Um eine Basis  $\mathcal{B}_h$  bzgl.  $V_h$  beschreiben zu können, muss das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  in endliche Elemente zerlegt werden. Die Basis  $\mathcal{B}_h$  und damit der Raum  $V_h$  wird dann bzgl. einer Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  beschrieben. Eine gebräuchliche Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  kann durch Dreiecke oder auch Vierecke geschehen. Wir wollen in dieser Arbeit nur Zerlegungen durch Dreiecke betrachten, hierfür führen wir den folgenden Begriff ein (vgl. [Bra13] Seite 58 oder [Sta08] Seite 19).

**Definition 2.19** (Triangulierung). Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein durch einen Polygonzug berandetes Gebiet. Dann heißt eine Zerlegung aus Dreiecken

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$$

*Triangulierung*, wenn gilt:

- (a) Für alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}$  gilt:  $T$  ist abgeschlossen.
- (b) Ganz  $\Omega$  wird durch alle Dreiecke aus  $\mathcal{T}$  überdeckt, d.h.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ .
- (c) Der Schnitt zweier Dreiecke  $T_i \cap T_j$  mit  $i \neq j$  überlappt sich nicht, d.h.  $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$ .

Wir nennen eine Triangulierung *konform* oder *zulässig*, wenn zusätzlich gilt:

- (d) Für jede Kante  $k$  eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  gilt entweder  $k \subset \partial\Omega$  oder  $k = \tilde{k}$  für eine weitere Kante  $\tilde{k}$  eines weiteren Dreiecks  $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ .

Der Radius des Umkreises eines Dreiecks  $T$  wird mit  $h$  bezeichnet und beschreibt die Größe eines Dreiecks. Wenn jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  höchstens einen Radius von  $h$  hat, so schreiben wir  $\mathcal{T}_h$  statt  $\mathcal{T}$ .

**Bemerkung 2.20.** (a) Ein Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  bezeichnen wir auch als (*finites*) *Element*.

- (b) Sollte  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sein, so können wir analog zu Definition 2.19 eine Zerlegung mit Tetraedern definieren.

Für die Netzverfeinerung führen wir zwei unterschiedliche Familien von Zerlegungen ein (vgl. [Bra13] Seite 58).

**Definition 2.21** ((quasi-) uniforme Zerlegung). Eine Familie von Zerlegungen  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt *quasi-uniform*, wenn es eine Zahl  $\kappa > 0$  gibt, so dass jedes  $T \in \mathcal{T}_h$  einen Kreis vom Radius

$$\rho_T \geq \frac{h_T}{\kappa}$$

enthält, wobei  $h_T$  der Radius des Dreiecks  $T$  ist.

Eine Familie von Zerlegungen  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt *uniform*, wenn es eine Zahl  $\kappa > 0$  gibt, so dass jedes  $T \in \mathcal{T}_h$  einen Kreis vom Radius

$$\rho_T \geq \frac{h}{\kappa}$$

enthält, wobei  $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$  ist.

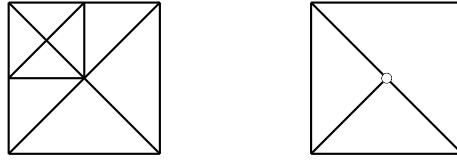


Abbildung 2.2: Zulässige und unzulässige Triangulierung (mit hängendem Knoten)

In der Abbildung 2.2 ist eine quasi-uniforme zulässige Zerlegung und eine unzulässige Zerlegung zu sehen; zweitens ist daher unzulässig, da es Kanten gibt, die weder am Rand liegen, noch mit einer Kante eines anderen Dreiecks übereinstimmt. Die Knoten, die zu diesem Phänomen führen, nennen wir *hängende Knoten*. Dies sind Knoten, die nicht Eckpunkt jedes angrenzenden Dreiecks sind.

**Bemerkung 2.22.** Wie man leicht sehen kann, ist jede uniforme Zerlegung auch quasi-uniform. Umgekehrt gilt dies nicht (s. Abbildung oben).

Allerdings lassen uniforme Zerlegungen keine lokalen Verfeinerungen zu. Da dies für adaptive Verfeinerungsstrategien allerdings ausschlaggebend ist, gehen wir im Folgenden immer von einer quasi-uniformen Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  aus.

Nun wollen wir uns Gedanken über unseren Ansatzraum  $V_h$  machen. Hierfür gibt es, abhängig von der Konstruktion des verwendeten Elements, viele Möglichkeiten – vgl. hierzu auch [Bra13] Kapitel II, §5, Tabelle 2. Wir wollen uns weitestgehend aber nur auf ein Element konzentrieren. Zuvor betrachten wir hierfür ein wichtiges Resultat, wobei noch bemerkt sei, dass eine Funktion  $u$  auf  $\Omega$  bei gegebener Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  eine Eigenschaft stückweise hat, wenn sie auf jedem Element diese Eigenschaft besitzt.

**Satz 2.23.** Sei  $k \geq 1$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein polygonales Gebiet. Eine stückweise beliebig oft differenzierbare Funktion  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  liegt in  $H^k(\Omega)$  genau dann, wenn  $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$  ist.

*Beweis.* Der Beweis ist in [Bra13] Kapitel II, §5, Satz 5.2 zu finden.  $\square$

Der Satz 2.23 rechtfertigt, dass wir für das Modellproblem (2.6) auf einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  einen Ansatzraum  $V_h$  mit stetigen Funktionen  $v \in C^0(\Omega)$  verwendet, da dann auch  $v \in H^1(\Omega)$  gilt. Daher wählen wir

$$V_h := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_m \text{ für } T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

wobei  $\mathcal{P}_m$  der Raum der Polynome vom Grad  $m$  ist. Es stellt sich nun die Frage, wie wir geschickt eine Basis wählen können, um  $V_h$  aufzuspannen. Die einfachste Möglichkeit stellen *nodale Basisfunktionen* dar.

**Definition 2.24** (nodale Basisfunktion). Zu einem Finiten Element Raum  $V_h$  und einer gegebenen Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  sei eine Menge von Punkten  $P$  bekannt mit  $|P| = N$ . Die Menge  $\mathcal{B}_h = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  mit  $\phi_i \in \mathcal{P}_m, i = 1, \dots, N$ , heißt *nodale Basis* (oder *Lagrange-Basis*), wenn

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

für alle  $\phi_i \in \mathcal{B}_h$  und  $x_j \in P$  gilt.

Mit der Menge der vorgegebenen Punkte  $P$  kann durch die Anzahl  $N$  der Grad des zur Interpolation verwendeten Polynoms gesteuert werden.

**Bemerkung 2.25.** Sei  $m \geq 0$ . In einem Dreieck  $T$  seien auf  $m + 1$  Linien  $l = 1 + 2 + \dots + (m + 1)$  Punkte  $z_1, \dots, z_l$  angeordnet (s. Abb. 2.3). Dann gibt es zu jedem  $C^0(T)$  genau ein Polynom  $p$  vom Grad  $m$  mit der Eigenschaft

$$p(z_i) = f(z_i) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

*Beweis.* Der Beweis steht in [Bra13] Kapitel II, §5, Bemerkung 5.4.  $\square$

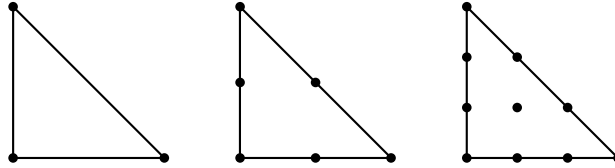


Abbildung 2.3: Dreiecke für nodale Basen (linear, quadratisch, kubisch)

Damit lässt sich für  $V_h$  mit einem beliebigen Polynomgrad  $m$  eine eindeutige nodale Basis finden, die den Raum aufspannt. Im weiteren wollen wir lineare Ansatzfunktionen verwenden. Wir bezeichnen, sofern nicht anders beschrieben, also im Folgenden  $\mathcal{S}_h$  mit

$$\mathcal{S}_h := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \text{ für } T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

also sind in diesem Raum die Eckpunkte der Dreiecke vorgegeben bzw. später im LGS gesucht. Das Galerkin-Verfahren mit dem Ansatzraum  $\mathcal{S}_h$  wird auch Finite-Elemente-Methode (kurz: FEM) genannt.

Wir wollen folgendes Beispiel zur Berechnung von den Matrixeinträgen der Matrix  $A$  betrachten.

**Beispiel 2.26.** Wir betrachten das Variationsproblem (2.10) auf  $\Omega = [-1, 1]^2$  mit  $\mathcal{S}_h$  wie oben eingeführt als den Raum der linearen Ansatzfunktionen auf einer Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  aus 8 *Courant-Elementen*, wie in Abbildung 2.4 zu sehen ist, wobei wir auf die rechte Seite  $F(v_h)$  zunächst noch nicht genauer eingehen möchten.

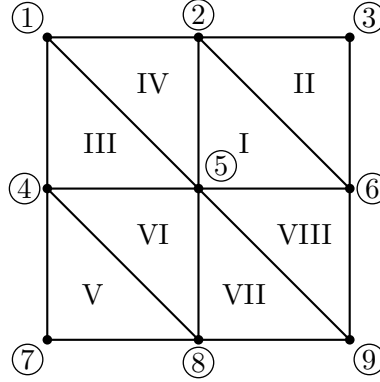


Abbildung 2.4: Triangulierung von  $\Omega = [-1, 1]^2$  in 8 Courant-Elemente

Wir stellen für die nodale Basisfunktion  $\phi_5$  die Einträge in der Steifigkeitsmatrix  $A$  auf. Man rechnet leicht nach, dass

$$\phi_5(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & \text{auf I} \\ 1 + x, & \text{auf III} \\ 1 - y, & \text{auf IV} \\ 1 + x + y, & \text{auf VI} \\ 1 + y, & \text{auf VII} \\ 1 - x, & \text{auf VIII} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\partial_x \phi_5$	-1	0	1	0	0	1	0	-1
$\partial_y \phi_5$	-1	0	0	-1	0	1	1	0

Tabelle 2.1: Ableitungen der nodalen Basisfunktion  $\phi_5$ .

ist und es ergeben sich die Ableitungen aus Tabelle 2.1. Dann gilt

$$\begin{aligned} a(\phi_5, \phi_5) &= \int_{\Omega} \nabla \phi_5 \nabla \phi_5 \, dxdy = \int_{\text{I} \cup \dots \cup \text{VIII}} \underbrace{(\partial_x \phi_5)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(\partial_y \phi_5)^2}_{\geq 0} \, dxdy \\ &= 2 \int_{\text{I} \cup \text{III} \cup \text{IV}} (\partial_x \phi_5)^2 + (\partial_y \phi_5)^2 \, dxdy \\ &= 2 \left( \int_{\text{I} \cup \text{III}} \underbrace{(\partial_x \phi_5)^2}_{=1} \, dxdy + \int_{\text{I} \cup \text{IV}} \underbrace{(\partial_y \phi_5)^2}_{=1} \, dxdy \right) \\ &= 2(\mathcal{A}(\text{I}) + \mathcal{A}(\text{III}) + \mathcal{A}(\text{I}) + \mathcal{A}(\text{IV})) \\ &= 8 \cdot \mathcal{A}(\text{I}) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \end{aligned}$$



## 2. Grundlagen

---

wobei verwendet wurde, dass die Dreiecke kongruent zueinander sind und  $\mathcal{A}(\cdot)$  den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet. Analog können wir auch die übrigen acht nodalen Basisfunktionen aufstellen und damit die Einträge der Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} a(\phi_5, \phi_2) &= a(\phi_5, \phi_4) = a(\phi_5, \phi_6) = a(\phi_5, \phi_8) = -1, \\ a(\phi_5, \phi_1) &= a(\phi_5, \phi_3) = a(\phi_5, \phi_7) = a(\phi_5, \phi_9) = 0 \end{aligned}$$

berechnen. Damit ist der Einteil der Basisfunktion  $\phi_5$  an der Steifigkeitsmatrix  $A$  von der Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei müssen die Einträge aus  $\tilde{A}$  in die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  an die richtige Stelle zugeordnet werden, wie durch die Formel  $a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$  beschrieben wird. Daher nennen wir  $\tilde{A}$  *lokale Steifigkeitsmatrix* bzgl. des Knoten 5.

Dieses Vorgehen müssten wir noch für die übrigen Basisfunktion analog durchführen, um die vollständige Steifigkeitsmatrix  $A$  zu erhalten. Dies soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

Wie man sieht, ist das Vorgehen aus Beispiel 2.26 sehr aufwendig. Außerdem ist es schwer jenes auf diese Weise zu verallgemeinern, damit man es gut implementieren kann, da die Ansatzfunktionen auf das Gitter bezogen von individueller Form sind.

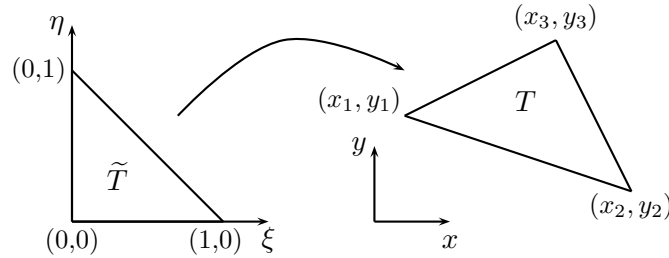


Abbildung 2.5: Referenzelement  $\tilde{T}$  für ein allgemeines Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$

Um die Berechnung der Einträge der Steifigkeitsmatrix  $A$  zu verallgemeinern, betrachten wir das Referenzelement

$$\tilde{T} := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}.$$

Auf diesem können wir dann die Integrale für die Ansatzfunktionen lokal berechnen, um dann die berechneten Werte affin auf ein beliebiges Dreieck  $T$  zu transformieren (s. Abbildung 2.5). Diese auf das Element  $T$  bezogene lokale Steifigkeitsmatrix müssen wir dann durch *global-local node ordering* in die globale Steifigkeitsmatrix  $A$  assemblieren. Die genaue Berechnungsvorschrift für das oben beschriebene Vorgehen wird in Kapitel 5 noch mal genauer hergeleitet.

### 2.3.1 A priori Fehlerabschätzung

Wir wollen nun zeigen, dass durch Netzverfeinerung, d.h. Verkleinern von  $h$ , der Fehler zwischen der exakten Lösung  $u$  und der Galerkin-Approximation  $u_h$  kleiner wird.

**Lemma 2.27.** *Durch  $\|\cdot\|_E : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \|v\|_E := (a(v, v))^{\frac{1}{2}}$  mit einer stetigen koerziven Bilinearform  $a$  wird eine Norm auf  $H_0^1(\Omega)$  definiert.*

*Beweis.* Aus der Stetigkeit und Koerzivität von  $a$  folgt direkt

$$\alpha \|v\|_1^2 \leq \underbrace{a(v, v)}_{=\|v\|_E^2} \leq c \|v\|_1^2. \quad (2.12)$$

Damit ist  $\|\cdot\|_E$  nach oben und unten durch die Norm auf  $H_0^1(\Omega)$  beschränkt und somit eine zu dieser äquivalente Norm.  $\square$

*Bemerkung.* (a) Die Norm  $\|\cdot\|_E$  bezeichnen wir als *Energie-Norm*. Sie gibt für die von uns später in der Strukturmechanik betrachtete Bilinearform die Verzerrungsenergie eines Kontinuums an.

(b) Für die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

mit  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  gilt dann  $\|\cdot\|_E = |\cdot|_1$  (s. Bemerkung A.6).

(c) Auf  $H^1(\Omega)$  wäre  $\|\cdot\|_E$  also nur eine Halbnorm, da konstante Funktionen  $v = c$  auch die Norm  $\|v\|_E = 0$  hätten.

**Satz 2.28.** *Die Galerkin-Approximation  $u_h$  ist die beste Approximation von  $u$  bzgl. der Energie-Norm, also*

$$\|u - u_h\|_E = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

*Beweis.* Zunächst betrachten wir die exakte und approximierten Variationsgleichung (2.9) und (2.10), d.h.

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H, \quad (2.13)$$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.14)$$

Da  $V_h \subset H$  ist, gilt (2.13) auch für alle  $v_h \in V_h$ . Ersetzen wir dies in (2.13) und subtrahieren (2.13) und (2.14), so erhalten wir

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.15)$$

Damit rechnen wir für ein beliebiges  $v \in V_h$  einfach nach:

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\
 &= a(u - u_h, u - v + v - u_h) \\
 &= a(u - u_h, u - v) + \underbrace{a(u - u_h, v - u_h)}_{\substack{\in V_h \\ =0 \text{ wegen (2.14)}}} \\
 &= a(u - u_h, u - v) \\
 &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|u - u_h\|_E \|u - v\|_E
 \end{aligned}$$

und damit folgt nach Division  $\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E$ , was zu zeigen war.  $\square$

*Bemerkung.* Die Gleichung (2.15) drückt aus, dass die Verbindung  $u - u_h$  orthogonal zum Raum  $V_h$  steht und wird daher auch *Galerkin-Orthogonalität* genannt. Diese wird bei Hindernisproblemen im Allgemeinen nicht mehr erfüllt, da diese, wie wir später sehen werden, nicht mehr auf Variationsgleichungen führen.

**Satz 2.29** (Céa). *Der Fehler der Galerkin-Approximation  $u_h$  hat in der  $H^1$ -Norm die Eigenschaft*

$$\|u - u_h\|_1 \leq \tilde{c} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1.$$

*Beweis.* Aus (2.12) und Satz 2.28 folgt

$$\|u - u_h\|_1 \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_E \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_E \leq \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_1.$$

Damit folgt die Behauptung mit  $\tilde{c} := \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$ .  $\square$

Nun kommen wir zum zentralen Satz dieses Unterkapitels, mit dem man direkt die gewünschte Aussage folgern kann. Vergleiche hierzu auch [Bra13] Kapitel II, §6, Satz 6.4.

**Theorem 2.30** (Approximationssatz für Interpolationen). *Es sei  $k \geq 2$  und  $\mathcal{T}_h$  eine quasi-uniforme Triangulierung von  $\Omega$ . Dann gilt für die Interpolation  $I_h$  auf die stetigen, stückweise durch Polynome vom Grad  $k - 1$  gegebenen Funktionen mit einer von  $\Omega, \kappa$  und  $k$  abhängigen Konstanten  $c$  die a priori Fehlerabschätzung*

$$\|u - I_h u\|_m \leq c h^{k-m} |u|_k$$

für  $u \in H^k(\Omega)$  und  $0 \leq m \leq k$ .

*Beweis.* Für den Beweis würden wir noch weitere Ausführungen über affine Transformationen benötigen, die wir hier nicht weiter aufführen wollen. Der komplette Beweis ist in [Bra13] auf Seite 75ff einzusehen.  $\square$

Für  $k = 2$ , also lineare Polynome, und  $m = 1$  (die Norm in  $H^1$ ) gilt dann

$$\|u - I_h u\|_1 \leq ch|u|_2 \quad (2.16)$$

für  $u \in H^2(\Omega)$ .

**Korollar 2.31.** *Für lineare  $C^0$ -Elemente gilt bzgl. der Galerkin-Approximation  $u_h$  die a priori Fehlerschätzung für unser Modellproblem (DP)*

$$\|u - u_h\|_1 \leq \tilde{c}h|u|_2.$$

*Beweis.* Mit Theorem 2.30 und Satz 2.29 folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1 &\leq \left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \leq \left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \|u - I_h u\|_1 \\ &\stackrel{(2.16)}{\leq} \left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} c_2 h |u|_2. \end{aligned}$$

Mit  $u \in H^2(\Omega)$  und  $\tilde{c} := \left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} c_2$  folgt dann die Behauptung.  $\square$

Mit Korollar 2.31 gilt also, dass für  $h \rightarrow 0$  die Galerkin-Approximation  $u_h$  gegen die exakte Lösung  $u$  konvergiert. Es ist also sinnvoll das Netz zu verfeinern, allerdings bringt jede Verfeinerung auch mehr Knoten und damit ein größeres Gleichungssystem mit sich. Daher stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, nur einzelne Teile des Gitters zu verfeinern, womit wir uns im Kapitel 2.4 beschäftigen wollen.

## 2.4 Adaptive Verfeinerungsstrategien

Wir wollen nun betrachten, wie sich das Gitter geschickt verfeinern lässt, so dass die Anzahl der Knoten im Vergleich zur Verringerung des Fehlers hinreichend groß ist. Diese Verfeinerung im  $n$ -ten Schritt geschieht adaptiv in Abhängigkeit des aktuellen Gitters  $\mathcal{T}_{h_n}$  bzw. der aktuellen Lösung  $u_{h_n}$ . Hierbei wird *a posteriori* der Fehler im nächsten Schritt  $\|u - u_{h_{n+1}}\|$  mit dem Fehler im aktuellen  $\|u - u_{h_n}\|$  verglichen und daraus die notwendige Größe der Verfeinerung abgeschätzt. Da die Lösung  $u$  für ein Problem, wie schon beschrieben, nicht bekannt oder berechenbar sein muss, gilt es den oben beschriebenen Fehler zu schätzen. Für solche *a posteriori* Fehlerschätzer gibt es mehrere Ansätze.

### 2.4.1 A posteriori Fehlerschätzer

Wie auch in [Bra13] Kapitel III, §8, Seite 176 genauer beschrieben, gibt es verschiedene Arten von *a posteriori* Fehlerschätzern:

(a) Residuale Schätzer

- (b) Schätzung über ein lokales Neumann-Problem
- (c) Schätzung über ein lokales Dirichlet-Problem
- (d) Schätzung durch Mitteilung
- (e) Hierarchische Schätzer

Als Fehlerschätzer für Hindernis- oder auch Kontaktprobleme sind häufig residuale Schätzer zu finden. Wir wollen uns in dieser Arbeit mit hierarchischen Fehlerschätzern beschäftigen.

Die Idee dabei ist, dass wir den Fehler durch eine genauere Lösung aus einem „besseren“ Ansatzraum abschätzen, in dem Sinne, dass für den Ansatzraum  $V_h$ , in dem die berechnete Lösung  $u_h$  liegt, gilt:

$$V_h \subset W_h \text{ mit } W_h = V_h \oplus Z_h, \quad (2.17)$$

wobei bzgl. der Obermenge  $W_h$  die Lösung  $u_h^W$  genauer ist als  $u_h$ , d.h. die *Saturationseigenschaft*

$$a(u - u_h^W, u - u_h^W) \leq \beta^2 a(u - u_h, u - u_h) \quad (2.18)$$

mit einer Konstanten  $0 \leq \beta < 1$  erfüllt.

**Bemerkung 2.32.** Da wir zur Berechnung unserer Galerkin-Approximation den Raum  $V_h = \mathcal{S}_h$  der linearen Ansatzfunktionen verwenden werden, wählen wir später als Hierarchie

$$W_h = \mathcal{Q}_h := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_2 \text{ für } T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

den Raum der quadratischen Ansatzfunktionen. Daraus lässt sich dann der Raum  $Z_h$  ableiten.

Wir sollen nun aber nicht die exakte (bessere) Approximation  $u_h^W \in W_h$  berechnen, da dies ein zu großer Aufwand wäre, sondern schränken das sogenannte *Defektpproblem* lokal auf die Erweiterung  $Z_h$  ein, d.h.

$$a(u_h^W, z_h) = F(z_h) \quad \forall z_h \in Z_h, \quad (2.19)$$

wobei in (2.19)  $u_h^W$  aufgeteilt werden kann, da  $W_h$  aus direkter Summe von  $V_h, Z_h$  entsteht, d.h.  $u_h^W = u_h + e_h$  mit  $u_h \in V_h, e_h \in Z_h$ . Da die Lösung  $u_h$  in jedem Schritt bekannt ist, lässt sich das lokale Defektpproblem (2.19) schreiben als

$$e_h \in Z_h : \quad a(e_h, z_h) = \underbrace{F(z_h) - a(u_h, z_h)}_{=\tilde{F}(z_h)} \quad \forall z_h \in Z_h. \quad (2.20)$$

Man kann zeigen, dass für die Lösung  $e_h$  aus (2.20) unter der Bedingung (2.18) der Term  $a(e_h, e_h)$  beschränkt ist und daher gibt der auf ein Dreieck  $T$  bezogene lokale Anteil  $\eta_T := a_T(e_h, e_h)^{\frac{1}{2}}$  den hierarchischen Fehlerschätzer an.

Damit lässt sich  $a(e_h, e_h)$  in die lokalen Anteile  $\eta_T$  aufteilen, so dass

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(e_h, e_h) = a(e_h, e_h).$$

Daher verwenden wir als adaptive Strategie: Verfeinere alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$ , deren lokaler Fehleranteil größer gleich dem skalierten Gesamtfehler sind, also

$$\eta_T \geq \sigma \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $\sigma \in (0, 1)$  ist. Wählen wir  $\sigma$  sehr klein, so werden viele Dreiecke verfeinert, da auch kleinere lokale Fehleranteile die Ungleichung erfüllen. Umgekehrt gilt für ein großes  $\sigma$ , dass man viele Adaptionsschritte benötigt, um einen hinreichend kleinen Fehler zu erhalten, da nur wenige Dreiecke pro Verfeinerungsschritt ausgewählt werden.

Die Idee der Hierarchie bzgl. der Räume wollen wir in Kapitel ?? auch auf Variationsprobleme unter Nebenbedingung anwenden, um einen a posteriori Schätzer herzuleiten.

### 2.4.2 Verfeinerung des Netzes

Auf der Grundlage des a posteriori Schätzers müssen die ausgewählten Dreiecke verfeinert werden. Dabei ist es essentiell, dass eine konforme Triangulierung auch konform bleibt, was durch Verwendung von verschiedenen Verfeinerungsmethoden möglich ist (s. Abbildung 2.6).

- (i) *Rote* (*reguläre*) Verfeinerung,
- (ii) *Grüne* Verfeinerung,
- (iii) *Blaue* Verfeinerung.

Bei der regulären Verfeinerung werden die drei Mittelpunkte der Kanten eines Dreiecks miteinander verbunden. Der Vorteil dabei ist, dass die Winkel der entstandenen Dreiecke identisch zu den vorherigen Winkeln sind. Damit bleibt das Verhältnis zwischen dem Radius des Um- zum Innenkreises  $\frac{h_T}{\rho_T}$ , was den Parameter für die Quasi-Uniformität angibt, gleich bleibt.

Beim regulären Verfeinern können allerdings in anliegenden Dreiecken, die bzgl. des a posteriori Fehlerschätzers nicht verfeinert werden müssen, hängende Knoten (vgl. Abbildung 2.2) entstehen, wodurch eine nichtzulässige

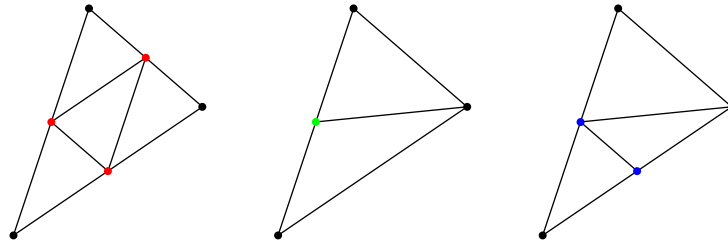


Abbildung 2.6: Verfeinerungen von Dreiecken

Triangulierung entstehen würde. Um die hängenden Knoten zu eliminieren, kann Verfeinerungsmethode (ii) und (iii) verwendet werden.

Bei der grünen Verfeinerung wird der Mittelpunkt genau einer Kante mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden.

Bei der blauen Verfeinerung verbindet man den Mittelpunkt der längsten Kante im Dreieck mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt und einem weiteren Mittelpunkt einer anderen Kante.

Matlab verwendet diese Verfeinerungsstrategien in der Methode *refinemesh*. Diese Methode werden wir bei der Implementierung der numerischen Beispiele auch verwenden und daher wollen wir das Vorgehen von Matlab kurz vorstellen. Ist  $\widetilde{\mathcal{T}}_h$  die Menge der zu verfeinernden Dreiecke, dann werden folgende Schritte durchgeführt:

- (i) Halbiere alle Kanten der ausgewählten Dreiecke  $T \in \widetilde{\mathcal{T}}_h$ .
- (ii) Halbiere jeweils die längste Kante aller Dreiecke, die schon eine geteilte Kante haben.
- (iii) Bilde die neuen Dreiecke nach folgender Strategie:
  - (a) Wenn alle drei Kanten eines Dreiecks geteilt sind, verwende die reguläre (rote) Verfeinerung.
  - (b) Sind genau zwei Seiten halbiert, so verwende die blaue Verfeinerung.
  - (c) Ist genau eine Kante eines Dreiecks halbiert, dann benutze die grüne Verfeinerung.

## 2.5 Einführung in die Strukturmechanik

Um in Kapitel 3.2 Kontaktprobleme bzgl. der Mechanik beschreiben zu können, wollen wir in diesem Kapitel eine kurze Einführung in die Kontinuumsmechanik geben.

**Definition 2.33** (Kontinuum). Ein *Kontinuum* ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , dessen Punkte stetig verteilt sind. Den Punkten werden gewisse Materialeigenschaften zugewiesen.

*Notation.* Wir wollen Vektoren oder vektorwertige (bzw. tensorwertige) Funktionen durch fettgedruckte Buchstaben darstellen (s. auch Anhang D).

### 2.5.1 Kinematik

Um die Kinematik für ein Kontinuum zu beschreiben, betrachten wir dieses in zeitlich abhängigen Zuständen. Dabei unterscheiden wir zwischen den *materiellen Punkten* des Kontinuums, die mit  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  beschrieben werden, und den *räumlichen Punkten*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

**Definition 2.34** (Konfiguration). Eine zu jedem Zeitpunkt  $t$  differenzierbare und stetige Zuordnung  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$  nennen wir *Konfiguration*. Die Konfiguration zum Zeitpunkt  $t = t_0$  nennen wir *Ausgang-* oder *Referenzkonfiguration*, die Konfiguration zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  *aktuelle Konfiguration* oder *Momentankonfiguration*.

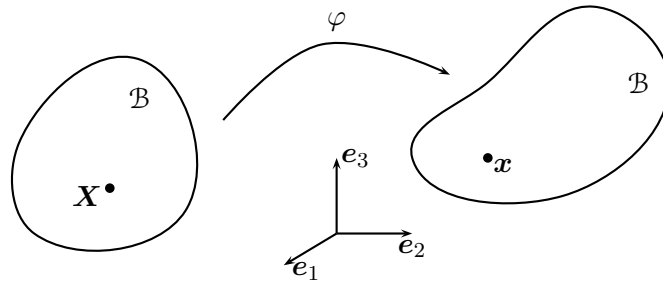


Abbildung 2.7: Konfiguration eines Kontinuums  $\mathcal{B}$

**Bemerkung 2.35.** Wir können der Einfachheit halber zu einem Startzeitpunkt  $t = t_0$  die materiellen Punkte durch die räumlichen Koordinaten der Ausgangskonfiguration  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t_0)$  beschreiben. So liegt der Körper  $\mathcal{B}$  aus Abbildung 2.7 im selben Koordinatensystem.

Damit ist die Bewegung (oder auch Deformation) eines Kontinuums als zeitlich stetige Folge von Konfigurationen  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  zu verstehen. Hierfür gibt es zwei grundlegende Betrachtungsweisen, die *Lagrange'sche* und die *Euler'sche Betrachtungsweise*. Bei der Lagrange'schen Betrachtung ist der Beobachter mit dem materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  verbunden und misst alle Änderungen des Kontinuums an diesem Punkt; jene wird auch *materielle Betrachtungsweise* genannt. Bei der Euler'schen Betrachtungsweise befindet



sich der Beobachter am räumlichen Punkt  $\mathbf{x}$  und misst zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Änderungen am Punkt  $\mathbf{x}$ , die sich durch das Passieren von Teilchen  $\mathbf{X}$  ergeben; jene wird auch *räumliche Betrachtungsweise* genannt.

Um die Deformation eines Körpers  $\mathcal{B}$  nun beschreiben zu können, betrachten wir die Veränderung von Linienelementen  $d\mathbf{x}$  bzgl. der Ausgangs- und Momentankonfiguration. Wir beschreiben den sogenannten *Deformationsgradient*  $\mathbf{F}$  durch den Faktor, der zwischen der Deformation dieser Linienelemente liegt, d.h.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} . \quad (2.21)$$

Damit ergibt sich der Deformationsgradient als

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} , \quad (2.22)$$

dies ist der Gradient bzgl. der materiellen Betrachtung und wird daher auch *materieller Deformationsgradient* genannt. Analog können wir den *räumlichen Deformationsgradienten* erhalten als

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X} . \quad (2.23)$$

Die Deformationsgradienten sind zweistufige Tensoren, die sich jeweils auf die Referenz- und Momentankonfiguration bzgl. der Basen beziehen.

Damit können wir nun die Verzerrung eines Kontinuums mittels des Deformationsgradienten ausdrücken. Um jene zu beschreiben, betrachten wir die Längenänderung zwischen den Linienelementen  $d\mathbf{X}$  und  $d\mathbf{x}$ .

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2 &= (d\mathbf{x})^T d\mathbf{x} - (d\mathbf{X})^T d\mathbf{X} \\ &\stackrel{(2.21)}{=} (d\mathbf{X})^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - (d\mathbf{X})^T d\mathbf{X} \\ &= (d\mathbf{X})^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} , \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{1}$  den zweistufigen Einheitstensor beschreibt. Also lässt sich die Verzerrung bzgl. der Ausgangskonfiguration durch den *Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.24)$$

mit dem *rechten Cauchy-Green-Tensor*  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  beschreiben.

**Bemerkung 2.36.** Dies ist natürlich nur eine Möglichkeit. Wichtig für die Wahl eines Verzerrungsmaßes ist jedoch, dass für reine Translation oder Rotation dieses Null wird.

Daher ist beispielsweise  $\mathbf{F} - \mathbf{1}$  als Verzerrungsmaß unbrauchbar. Der Deformationsgradient lässt sich in Rotation  $\mathbf{R}$  und Streckung  $\mathbf{U}$  durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

aufteilen. Sollten wir nun eine reine Rotation betrachten, so ist  $\mathbf{U} = \mathbf{1}$  und damit  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ , was nicht zwangsläufig der Einheitstensor sein muss.

Wenn wir einen Punkt bzgl. seiner Ausgangs- und Momentankonfiguration vergleichen, so erhalten wir die *Verschiebung*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.25)$$

Damit ergeben sich analog zum materiellen und räumlichen Deformationsgradienten (2.22) und (2.23) mit (2.25) der materielle und räumliche *Verschiebungsgradient*:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{Grad } \mathbf{u} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{1}, \\ \mathbf{h} &= \text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich beispielsweise für den Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor (2.24) bzgl. des materiellen Verschiebungsgradienten die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}((\mathbf{1} + \mathbf{H})^T (\mathbf{1} + \mathbf{H}) - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wenn wir von kleinen Deformationen ausgehen, so ist es sinnvoll für die spätere numerische Berechnung, die nichtlinearen Verzerrungsgrößen (wie in (2.26)) zu linearisieren. Dies können wir mithilfe von Taylor und der Gâteaux-Ableitung (A.1) bewerkstelligen. Für eine vektor- oder tensorwertige Funktion  $\mathbf{A}$  gilt dann

$$\text{lin}(\mathbf{A})_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{A}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u})) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.27)$$

Wenden wir also (2.27) auf den Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor (2.26) an, so erhalten wir die Linearisierung:

$$\begin{aligned} \text{lin}(\mathbf{E})_{\mathbf{X}, \mathbf{u}} &= \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{X})}_{=0} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{E}(\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{u})) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \left( \frac{\partial(\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial(\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \right) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} ((\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{H})^T (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{H}) - \mathbf{1}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{H}^T + \varepsilon \mathbf{H} + \varepsilon^2 \mathbf{H}^T \mathbf{H} - \mathbf{1}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H} + 2\varepsilon \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) =: \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Wir wollen der Einfachheit halber in dieser Arbeit von kleinen Deformationen ausgehen, dann gilt  $\mathbf{H} \approx \mathbf{h} = \nabla \mathbf{u}$ . Damit werden wir also immer die linearisierten Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}) \quad (2.28)$$

verwenden.

### 2.5.2 Kinetik

Da wir von kleinen Deformationen ausgehen, betrachten wir den *Cauchy-Spannungstensor*  $\boldsymbol{\sigma}$ , der die aktuelle Kraft bzgl. der Querschnittsfläche in der Momentankonfiguration setzt. Wie in [Wri06] Kapitel 3.2.2 beschrieben, gilt das *Cauchy-Theorem*, das besagt, dass die Spannung  $\mathbf{t}$  auf einer Schnittfläche eines beliebigen Schnittes im Körper  $\mathcal{B}$  gleich der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  in Normaleinrichtung  $\mathbf{n}$  ist, d.h.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.29)$$

Mit den Bilanzgleichungen für das Momentengleichgewicht kann man herleiten, dass der Cauchy-Spannungstensor symmetrisch ist, also  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$  gilt.

Betrachten wir nun eine Volumenkraft  $\bar{\mathbf{b}}$  und eine Oberflächenlast  $\bar{\mathbf{t}}$ , die auf den Körper  $\mathcal{B}$  wirken, so erhalten wir das (*globale*) Kräftegleichgewicht

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \, dv + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \, da = \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

wobei  $\Omega \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  eine Teilmenge des Kontinuums  $\mathcal{B}$  beschreibt. Mit dem Cauchy-Theorem (2.29) und dem Satz von Gauß lässt sich (2.30) als Integral über  $\Omega$  schreiben durch

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dv = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Die Gleichung (2.31) muss nach dem Schnittprinzip auf jeder Teilmenge  $\Omega$  gelten, was nur erfüllt werden kann, wenn der Integrand Null ist. Damit erhalten wir die sogenannte *starke* oder auch *lokale* Form des Gleichgewichts

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \text{ auf } \Omega. \quad (2.32)$$

Wir wollen in der Arbeit von einem konstanten Wärmefeld ausgehen, sodass wir thermodynamische Prozesse vernachlässigen können.

### 2.5.3 Konstitutive Gleichungen und Prinzipien

Auch für die konstitutiven Gleichungen (Materialannahmen etc.) machen wir uns zu Nutze, dass wir von kleinen Deformationen ausgehen. Wir gehen

## 2. Grundlagen

---

daher von einem linear elastischen Material aus, d.h. dass Spannung und Verzerrung in einem linearen Zusammenhang stehen. Hierfür werden wir in der Arbeit das *Hooke'sche Materialmodell* verwenden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}, \quad (2.33)$$

wobei  $\lambda, \mu$  die *Lamé-Konstanten* darstellen. Dabei handelt es sich um materialabhängige Parameter, die im Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  stehen.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Der Materialtensor  $\mathcal{C}$  ist 4-stufig und mit „:“ ist das doppelt verjüngende Skalarprodukt, das in Anhang C beschrieben wird, gemeint. Es sei bemerkt, dass  $\nu$  gleich dem Schubmodul  $G$  ist.

Da wir in dieser Arbeit immer  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  annehmen wollen, wollen wir an dieser Stelle noch zwei Prinzipien zur Behandlung von dreidimensionalen strukturellen Problemen im  $\mathbb{R}^2$  vorstellen (vgl. [Wri09] Kapitel 5.4.1 und 5.4.2).

Ist beispielsweise die dritte Richtung dünn gegenüber den anderen zwei, so können wir das Prinzip des *ebenen Spannungszustand* verwenden. Hierbei ist die Spannung in der dritten Richtung  $\sigma_{33} = 0$ . Dies impliziert jedoch nicht, dass es in dieser Richtung keine Verzerrung geben muss. Aus dem Hooke'schen Materialgesetz (2.33) errechnen wir nämlich, dass die Verzerrung  $\varepsilon_{33}$  abhängig von  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{22}$  ist.

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Damit lässt sich der Materialtensor  $\mathcal{C}$  als Matrix schreiben, wenn wir die *Voigt-Notation* bzgl. des Spannungs- und Verzerrungstensors verwenden.

Analog erhalten wir den *ebenen Verzerrungszustand*, indem wir die Verzerrung in die dritte Richtung  $\varepsilon_{33} = 0$  setzen. Anschaulich heißt das, dass die dritte Richtung unendlich ausgedehnt ist. Auch hier ergeben sich durch Einsetzen von  $\varepsilon_{33} = 0$  in (2.33) Abhängigkeiten zwischen den Spannungen:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

was einerseits bedeutet, dass die Spannung in der dritten Richtung nicht zwangsläufig Null sein muss und andererseits uns wieder Einträge aus dem Materialtensor  $\mathcal{C}$  eliminieren lässt.

## Kapitel 3

# Variationsungleichungen

Hindernis- und Kontaktprobleme basieren auf der Minimierung von Energiefunktionalen, wie im Theorem von Lax-Milgram (Theorem 2.12) auch schon verwendet wurde. Allerdings minimieren wir diese jetzt nur auf einer Teilmenge der Funktionen aus dem betrachteten Hilbertraum, d.h. wir werden eine Nebenbedingung einführen. Wir wollen in diesem Kapitel die theoretische Grundlage für die Lösung solcher Probleme bilden und eine a priori Fehlerschätzung zwischen exakter und mit der Finiten-Elemente-Methode approximierter Lösung durchführen.

Dieses Kapitel basiert auf [KO88], [Sta11], [Ste12b], [Ste12a], [Wri01], [Wri06], [HHNL80], [Glo08], [Fal74].

### 3.1 Ein Hindernisproblem

Als Modellproblem wollen wir wieder die Auslenkung  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  einer in  $\Omega$  eingespannten Membran betrachten, die mit der Flächenlast  $f$  belastet wird (vgl. auch Abbildung 2.1). Nun wollen wir jedoch die Auslenkung  $u$  durch ein Hindernis  $\psi$  in  $\Omega$  behindern (s. Abbildung 3.1 – die Auslenkung  $u$  der Membran liegt bezogen auf die angedeutete Kurve in der Skizze rotations-symmetrisch zur  $z$ -Achse). Dies führt auf die Minimierung des quadratischen Energiefunktionals

$$\min_{v \in K} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) \quad (3.1)$$

mit  $K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ fast überall in } \Omega\}$ , wobei  $a(\cdot, \cdot), (f, \cdot)$  wie in Kapitel 2.2 definiert sind. Das Funktional  $J$  gibt hierbei anschaulich wieder die in der Membran gespeicherte Energie an.

Der Unterschied zur Minimierung von  $J$  aus dem Theorem von Lax-Milgram liegt nun also darin, dass wir  $J$  nicht über ganz  $H_0^1(\Omega)$  minimieren, sondern nur über eine Teilmenge  $K \subset H_0^1(\Omega)$  (anschaulich alle Auslenkungen  $u$ , die oberhalb des Hindernisses  $\psi$  liegen).

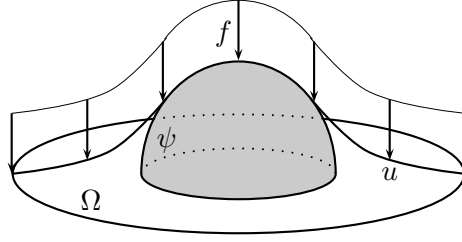


Abbildung 3.1: Ein Hindernisproblem mit Hindernis  $\psi$ , konstanter Streckenlast  $f$  und Lösung  $u$

Wir können nun analog zum Kapitel 2.2 auch für diese Art von Problemen eine Variationsformulierung herleiten.

### 3.1.1 Variationsformulierung für das Hindernisproblem

Um für das Hindernisproblem (3.1) eine äquivalente Variationsformulierung zu erhalten, wollen wir die in Anhang A.2 aufgeführten Optimalitätskriterien verwenden. Hierfür müssen wir zunächst zeigen, dass die oben aufgeführte Menge  $K$  konvex und abgeschlossen in  $H_0^1(\Omega)$  ist.

**Lemma 3.1.** *Die Menge  $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ fast überall in } \Omega\}$  ist eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von  $H_0^1(\Omega)$ .*

*Beweis.* (i) Es seien  $u, v \in K$ , d.h.  $u \geq \psi$  und  $v \geq \psi$  fast überall in  $\Omega$ . Dann gilt für  $t \in [0, 1]$

$$(1 - t)u + tv \geq (1 - t)\psi + t\psi = \psi,$$

somit ist  $(1 - t)u + tv \in K$ , also  $K$  konvex.

(ii) Es sei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  eine konvergente Folge mit  $v_n \rightarrow v$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $H_0^1(\Omega)$  laut Bemerkung A.8 ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(\Omega)$  ist, folgt direkt  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Da weiter  $v_n \geq \psi$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt aus dem Spursatz (vgl. [Bra13] Kapitel II, §3, Satz 3.1), dass auch  $v \geq \psi$  fast überall in  $\Omega$  gilt und damit ist  $v \in K$ , d.h.  $K$  ist abgeschlossen.  $\square$

**Satz 3.2.** *Es sei  $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ fast überall in } \Omega\}$ . Das Minimierungsproblem*

$$\min_{v \in K} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) \quad (3.2)$$

*ist äquivalent zur Variationsungleichung: Finde  $u \in K$ , so dass*

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \quad (3.3)$$

### 3. Variationsungleichungen

---

*Beweis.* Aus Lemma 2.10 folgt, dass  $J$  konvex ist und damit gilt mit Satz A.11, dass  $u \in K$  genau dann eine Lösung von (3.2) ist, wenn

$$\mathcal{D}_{v-u}J(u) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (3.4)$$

gilt. Analog zu der berechneten Gâteaux-Ableitung von  $J$  in Lemma 2.11, gilt

$$\mathcal{D}_{v-u}J(u) = \left. \frac{d}{dt}J(u + t(v-u)) \right|_{t=0} = a(u, v-u) - (f, v-u)$$

und damit folgt mit (3.4) die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.3.** Wie man mit Satz A.11 nachrechnen kann, gilt analog zu Satz 3.2 auch allgemeiner: Es sei  $K \subset H$  eine konvexe Teilmenge eines Hilbertraumes  $H$ . Dann ist

$$\min_{v \in K} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$$

äquivalent zur Variationsungleichung: Finde  $u \in K$ , so dass

$$a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K,$$

wobei  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare stetige Abbildung ist.

Wie wir sehen, erhalten wir durch die Einführung einer Nebenbedingung keine Variationsgleichung mehr wie in Kapitel 2.2, sondern eine Variationsungleichung. Anschaulich liegt dies daran, dass die Veränderung der auf die Membran wirkenden Flächenlast  $f$  nicht zwangsläufig eine Änderung in der Auslenkung  $u$  hervorrufen muss, da diese durch  $\psi$  behindert werden könnte.

Diese Ungleichungsrelation überträgt sich auch auf die äquivalente starke Formulierung des Problems (3.1), die wir auch für das Hindernisproblem, analog zum homogenen Dirichlet-Problem, finden können.

**Satz 3.4** (Starke Formulierung des Hindernisproblems). *Jede Lösung  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  des Problems*

$$\begin{aligned} -\Delta u - f &\geq 0, \\ u - \psi &\geq 0, \\ (u - \psi)(-\Delta u - f) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

*mit  $\psi \in H^1(\Omega)$  erfüllt die Variationsungleichung (3.3). Umgekehrt ist jede Lösung  $u \in H^2(\Omega) \cap K$  von (3.3) auch eine Lösung von (3.5).*

### 3. Variationsungleichungen

---

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  eine Lösung von (3.5), dann gilt für ein beliebiges  $v \in K$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - u) dx &= - \underbrace{\int_{\Omega} \Delta u (v - u) dx}_{\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx - \underbrace{\int_{\Gamma} (v - u) \partial_{\nu} u ds}_{=0}} - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\ &= a(u, v - u) - (f, v - u). \end{aligned}$$

Mit  $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid u = \psi\}$  folgt, dass  $-\Delta u = f$  auf  $\Omega_1 := \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$  gelten muss.

$$\Rightarrow \int_{\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1} \underbrace{(-\Delta u - f)(v - u) dx}_{=0 \text{ auf } \Omega_1} = \int_{\Omega_0} \underbrace{(-\Delta u - f)}_{\geq 0} \underbrace{(v - \psi)}_{\geq 0} dx \geq 0$$

Damit ist  $u$  eine Lösung von (3.3)

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K.$$

„ $\Leftarrow$ “ Es sei  $u \in H^2(\Omega) \cap K$  Lösung von (3.3). Weiter sei  $v \in K$  beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq a(u, v - u) - (f, v - u) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\Omega} -\Delta u (v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - u) dx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wir nehmen an, dass  $-\Delta u - f < 0$  in einem Ball  $B_{r_0} := B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  mit Radius  $r_0$  um  $x_0 \in \Omega$  gilt. Sei weiter  $\chi \in C^\infty(\Omega)$  mit  $\chi = 0$  auf  $\Omega \setminus \bar{B}_{r_0}$ ,  $\rho(r) := \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2 \chi > 0$  und  $v := u + \rho(r) \in K$ , da  $u \in K$  und  $\rho(r) > 0$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - u) dx = \int_{B_{r_0}} \underbrace{(-\Delta u - f)}_{<0} \underbrace{\rho(r)}_{>0} dx < 0,$$

was im Widerspruch zu (3.6) steht. Also muss  $-\Delta u - f \geq 0$  gelten.

Nun nehmen wir an, dass  $-\Delta u - f > 0$  und  $u > \psi$  fast überall in einem Ball  $B_{r_0}$  gilt. Wir betrachten  $v := u + \varepsilon \rho(r)(\psi - u) \in K$  mit  $0 < \varepsilon \leq 1$ , dann folgt

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - u) dx = \varepsilon \int_{B_{r_0}} \underbrace{(-\Delta u - f)}_{>0} \underbrace{\rho(r)}_{>0} \underbrace{(\psi - u)}_{<0} dx < 0,$$



was wiederum im Widerspruch zu (3.6) steht. Damit muss  $u = \psi$  gelten, wenn  $-\Delta u = f$  ist. Es folgt, dass  $u \in H^2(\Omega) \cap K$  eine Lösung von (3.5) ist.  $\square$

#### 3.1.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Wir wollen nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Hindernisproblems (3.2) bzw. der Variationsungleichung (3.3) überprüfen. Hierzu betrachten wir zunächst wieder das allgemeine reelle quadratische Funktional

$$J : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Folgende Voraussetzungen wollen wir für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung stellen.

**Voraussetzung 3.5.** Sei  $H$  ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und der damit induzierten Norm  $\|\cdot\|_H$ . Mit  $H'$  bezeichnen wir den Dualraum zu  $H$ . Weiter sei vorausgesetzt:

- (a)  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine stetige koerzive Bilinearform,
- (b)  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein stetiges lineares Funktional,
- (c)  $K \neq \emptyset$  ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $H$ .

**Theorem 3.6** (Existenz und Eindeutigkeit). *Unter den obigen Voraussetzungen 3.5 hat die Variationsungleichung, finde  $u \in K$ , so dass*

$$a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K \tag{3.7}$$

*ist, genau eine Lösung.*

*Beweis.* (i) Eindeutigkeit: Es seien  $u_1, u_2 \in K$  zwei Lösungen der Variationsungleichung (3.7), d.h.

$$a(u_1, v - u_1) \geq F(v - u_1) \quad \forall v \in K, \tag{3.8}$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq F(v - u_2) \quad \forall v \in K. \tag{3.9}$$

Addieren wir (3.8) und (3.9) miteinander und setzen zuvor  $v = u_2$  in (3.8) und  $v = u_1$  in (3.9), so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq a(u_1, u_2 - u_1) - F(u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) - \underbrace{F(u_1 - u_2)}_{=F(u_2 - u_1)} \\ &= a(u_1, u_2 - u_1) - a(u_2, u_2 - u_1) = -a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \\ &\leq -\alpha \|u_2 - u_1\|_H^2. \end{aligned}$$

Also gilt  $\|u_2 - u_1\|_H^2 \leq 0 \Rightarrow \|u_2 - u_1\|_H^2 = 0$  und damit folgt  $u_1 = u_2$ .

### 3. Variationsungleichungen

---

(ii) Existenz: Aus dem Darstellungssatz von Riesz bzw. das Lemma 2.16 folgt, dass ein  $A \in \mathcal{L}(H, H)$ ,  $l \in H$  existiert, so dass

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (Au, v)_H \quad \forall u, v \in H, \\ F(v) &= (l, v)_H \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} F(v - u) - a(u, v - u) &= (l, v - u)_H - (Au, v - u)_H \\ &= (l - Au, v - u)_H \leq 0. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $\varrho > 0$  und Addition der Null erhalten wir das äquivalente Problem: Finde  $u \in K$ , so dass

$$(u - \varrho(Au - l) - u, v - u)_H \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (3.10)$$

Nach Satz 2.3 ist  $u$  damit das Bild der Projektion von  $u - \varrho(Au - l)$  auf  $K$ , d.h.

$$u = P_K(u - \varrho(Au - l)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $W_\varrho : H \rightarrow K$ ,  $W_\varrho(v) := P_K(v - \varrho(Av - l))$  einen Fixpunkt besitzt. Mit Anwendung von Satz 2.4 und der Koerzivität von  $a$  rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \|W_\varrho(v_1) - W_\varrho(v_2)\|_H^2 &= \|P_K(v_1 - \varrho(Av_1 - l)) - P_K(v_2 - \varrho(Av_2 - l))\|_H^2 \\ &\leq \|v_1 - \varrho(Av_1 - l) - (v_2 - \varrho(Av_2 - l))\|_H^2 \\ &= \|(v_1 - v_2) - \varrho A(v_1 - v_2)\|_H^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|_H^2 + \varrho^2 \|A(v_1 - v_2)\|_H^2 \\ &\quad - \underbrace{\varrho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_H - \varrho(v_1 - v_2, A(v_1 - v_2))_H}_{=2\varrho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_H = 2\varrho a(v_1 - v_2, v_1 - v_2)} \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_H^2 + \varrho^2 \|A\|^2 \|v_1 - v_2\|_H^2 - 2\varrho\alpha \|v_1 - v_2\|_H^2 \\ &= (1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 \|A\|^2) \|v_1 - v_2\|_H^2 \end{aligned}$$

mit  $\|A\| := \sup_{v \in H} \frac{\|Av\|_H}{\|v\|_H}$ . Also ist die Abbildung  $W_\varrho$  eine Kontraktion, wenn gilt

$$1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 \|A\|^2 < 1 \implies 0 < \varrho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}.$$

Nach dem Banach'scher Fixpunktsatz (vgl. [Sto99] Satz 5.2.3) existiert für solch ein  $\varrho$  ein  $u \in H$  mit  $u = W_\varrho(u) = P_K(u - \varrho(Au - l))$ .

Insgesamt gibt es also für das Problem (3.7) genau eine Lösung.  $\square$

**Korollar 3.7.** *Das Problem (3.1) hat eine eindeutige Lösung.*

*Beweis.* Da laut Lemma 3.1 die Menge

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ fast überall in } \Omega\}$$

abgeschlossen und konvex ist,  $F(v) = (f, v)$  ein stetiges lineares Funktional und

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

stetig bilinear und koerziv, sind die Voraussetzungen für Theorem 3.6 erfüllt. Damit hat das Problem, finde  $u \in K$ , so dass

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K, \quad (3.11)$$

genau eine Lösung. Nach Satz 3.2 ist (3.1) äquivalent zu (3.11) und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.8.** Insbesondere hat auch das Problem (3.5) nach Satz 3.4 und Theorem 3.6 eine eindeutige Lösung, wenn  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  ist.

#### 3.1.3 Lösung des Hindernisproblems mittels FEM

Analog zu Kapitel 2.3 können wir nun auch die Variationsungleichung (3.11) mittels FEM lösen. Hierzu betrachten wir (3.11) bzgl. eines endlich dimensionalen Unterraum

$$K_h := \{v_h \in V_h \mid v_h(p) \geq \psi(p) \, \forall p \in \mathcal{N} \cap \Omega\},$$

wobei  $\mathcal{N}$  die Knotenmenge bzgl. der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  bezeichne und  $V_h$  wie oben ein endlich dimensionaler Unterraum eines Hilbertraumes  $H$  ist. Damit ist (3.11) in diskreter Form: Finde  $u_h \in K_h$ , so dass

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h. \quad (3.12)$$

Auch für das diskrete Problem existiert eine eindeutige Lösung, wie sich mithilfe des nächsten Satzes zeigen lässt.

**Satz 3.9** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Es sei  $K \neq \emptyset$  eine kompakte konvexe Teilmenge eines endlich dimensionalen normierten Raumes  $H$  und  $F : K \rightarrow K$  sei stetig. Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt  $v \in K$ .*

*Beweis.* Der Beweis ist in [Wer11] Kapitel 4 Satz 7.15 zu finden.  $\square$

**Theorem 3.10** (Existenz und Eindeutigkeit). *Es gelten die Voraussetzungen 3.5. Das Problem (3.12) hat eine eindeutige Lösung  $u_h \in K_h$ .*

### 3. Variationsungleichungen

---

*Beweis.* Der Beweis ist analog zu Theorem 3.6 zu führen. Wir ersetzen lediglich  $H$  durch  $V_h$  und  $K$  durch  $K_h$  und verwenden im endlich dimensionalen Raum  $V_h$  den Fixpunktsatz von Brouwer.  $\square$

*Bemerkung.* In Kapitel 2.2 von [Sta08] sind die Argumente bzgl. der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (3.11) für den endlich dimensionalen Fall  $K_h$  auch noch einmal im Einzelnen aufgeführt.

Es sei  $\mathcal{B}_h = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  eine nodale Basis von  $V_h$ , d.h. analog zu (2.11) können wir  $u_h$  und  $v_h$  mit Koordinaten  $\mu_i, \nu_i, i = 1, \dots, N$  bzgl.  $\mathcal{B}_h$  ausdrücken. Dann schreiben wir (3.12) als

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i a(\phi_i, \phi_j) (\nu_j - \mu_j) &\geq \sum_{j=1}^N (f, \phi_j) (\nu_j - \mu_j) \\ \iff \boldsymbol{\mu}^T A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) &\geq \mathbf{f}^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

mit  $A = [a(\phi_j, \phi_i)]_{i,j=1}^N$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]_{i=1}^N$ ,  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_i]_{i=1}^N$  und  $\mathbf{f} = [(f, \phi_i)]_{i=1}^N$ . Damit lässt sich die Menge  $K_h$  auch eindeutig durch die Koordinatenvektoren bzgl.  $\mathcal{B}_h$  ausdrücken. Die Menge  $K_h$  ist bzgl.  $V_h$  äquivalent zu

$$K_S := \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N \mid \nu_i \geq \psi(p_i), p_i \in \mathcal{N} \cap \Omega, i = 1, \dots, N\}. \quad (3.13)$$

Im Folgenden schreiben wir  $\boldsymbol{\psi} := [\psi(p_i)]_{i=1}^N$  mit  $p_i \in \mathcal{N} \cap \Omega$ .

*Bemerkung.*  $K_h$  bzw.  $K_S$  sind analog zu  $K$  konvex und abgeschlossen.

Damit erhalten wir aus (3.12) die diskrete Variationsungleichung: Finde  $\boldsymbol{\mu} \in K_S$ , so dass

$$(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in K_S. \quad (3.14)$$

Es fehlt uns nun jedoch die Möglichkeit solch eine Ungleichung, die offensichtlich nicht mehr linear ist, zu lösen. Wir wollen also (3.14) mathematisch äquivalent formulieren, um es das erzeugte Problem lösen zu können.

**Satz 3.11.** *Das Problem (3.14) ist äquivalent zum linearen Komplementaritätsproblem: Bestimme  $\boldsymbol{\mu} \in K_S$ , so dass*

$$A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi}) = 0 \quad (3.15)$$

*gilt.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $\boldsymbol{\mu} \in K_S$  Lösung von (3.14). Wir setzen  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{e}_i \geq \boldsymbol{\psi}$  mit einem beliebigen  $i \in \{1, \dots, N\}$ , wobei  $\mathbf{e}_i$  den  $i$ -te Einheitsvektor bezeichne. Dann gilt

$$0 \leq (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) = (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T \mathbf{e}_i = (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})_i.$$

Da  $i$  beliebig war, folgt  $A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0}$ .

### 3. Variationsungleichungen

---

Wir nun nehmen an, dass ein  $i \in \{1, \dots, N\}$  existiert, so dass  $(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})_i(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi})_i > 0$  ist. Weiter wählen wir

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{i-1} \\ 0 \\ \mu_{i+1} \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{\psi}$$

und damit folgt

$$0 > (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})_i(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu})_i = (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0,$$

was im Widerspruch zu (3.14) steht, daraus folgt die Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “ Es sei  $\boldsymbol{\mu} \in K_S$  Lösung von (3.15). Dann rechnen wir nach, dass für ein beliebiges  $\boldsymbol{\nu} \in K_S$  gilt

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) &= (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \underbrace{(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\psi})}_{\geq 0} - \underbrace{(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi})}_{=0} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 3.12** (Äquivalenz zu quadratischem Programm). *Das Problem (3.14) ist äquivalent zum quadratischen Programm*

$$\min_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N} J(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T A \boldsymbol{\nu} - \mathbf{f}^T \boldsymbol{\nu} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\psi}. \quad (3.16)$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von (3.15) zu (3.16) und dann folgt mit Satz 3.11 die Behauptung.

„ $\Rightarrow$ “ Es sei  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$  Lösung vom Problem (3.15). Dann folgt mit einem beliebigen  $\boldsymbol{\nu} \in K_S$

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\nu}) - J(\boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T A \boldsymbol{\nu} - \mathbf{f}^T \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}^T \boldsymbol{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu})^T A (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu})}_{\geq 0 \text{ wegen Bem. 2.18}} + \boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu} - \mathbf{f}^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) \\ &\geq (A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \underbrace{(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\psi})}_{\geq 0} - \underbrace{(A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi})}_{=0} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

### 3. Variationsungleichungen

---

Somit ist  $\boldsymbol{\mu} \in K_{\mathcal{S}}$  auch Lösung des quadratischen Programms (3.16).

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\boldsymbol{\mu} \in K_{\mathcal{S}}$  Lösung von (3.16), dann gelten nach [NW06] Kapitel 12, Theorem 12.1 für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\psi})$$

die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für den Optimalpunkt  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^*)$

$$\nabla_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla J(\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\lambda}^* = A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\lambda}^* \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (3.17a)$$

$$\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi} \geq \mathbf{0}, \quad (3.17b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}, \quad (3.17c)$$

$$\lambda_i^*(\mu_i - \psi_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (3.17d)$$

Mit (3.17a) gilt also  $\boldsymbol{\lambda}^* = A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f}$  und daher folgt aus (3.17c)

$$A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f} \geq \mathbf{0}.$$

Aus (3.17d) folgt wegen  $(A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f})_i(\mu_i - \psi_i) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, N$  direkt

$$(A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f})^T(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\psi}) = 0.$$

Also ist  $\boldsymbol{\mu} \in K_{\mathcal{S}}$  auch Lösung von (3.15). □

**Bemerkung 3.13.** Analog zu Satz 3.11 und 3.12 können wir durch leichte Abwandlung der Beweise zeigen, dass das quadratische Programm

$$\min_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N} J(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T A \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\nu} \quad \text{s.t.} \quad B\boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\psi} \quad (3.18)$$

mit  $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$  äquivalent ist zur Variationsungleichung: Finde  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$  mit  $B\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\psi}$ , so dass

$$(A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{f})^T(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N \text{ mit } B\boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\psi}. \quad (3.19)$$

Diese Formulierung werden wir später in Kapitel 3.2.3 wiederfinden, wenn wir Kontaktprobleme mittels der Finiten-Elemente-Methode lösen werden.

**Bemerkung 3.14.** Die quadratischen Programme (3.16) und (3.18) haben mit den Voraussetzungen aus Bemerkung 2.18 eine globale Lösung  $\boldsymbol{\mu}$ , wenn diese die KKT-Bedingungen (B.3) erfüllt (vgl. Theorem B.1).

Da wir wegen Bemerkung 2.18 konvexe quadratischen Programme vorliegen haben, können wir diese mit dem in Anhang B.2 vorgestellten Active-Set-Algorithmus lösen. Wie wir später sehen werden, ist es sinnvoll bei der Implementierung auf eine Innere-Punkte-Methode (kurz: IPM) zurückzugreifen.

Es bleibt noch zu prüfen, ob die Lösung der Variationsungleichung für Netzverfeinerung an die exakte Lösung konvergiert. Hierfür wollen wir folgende Voraussetzungen an unsere Ansatzräume stellen.

### 3. Variationsungleichungen

---

**Voraussetzung 3.15.** Gegeben sei ein Parameter  $h \rightarrow 0$ . Weiter seien  $(V_h)_h$  eine Familie aus abgeschlossenen Teilmengen von einem Hilbertraum  $H$ ,  $\emptyset \neq K \subset H$  eine konvexe abgeschlossene Teilmenge und  $(K_h)_h$  eine Familie von abgeschlossenen konvexen nichtleeren Teilmengen von  $H$ , so dass  $K_h \subset V_h$  für alle  $h$ .

Dabei sei  $K_h$  eine Approximation von  $K$  im folgenden Sinne:

- (i) wenn  $(v_h)_h$  eine in  $H$  beschränkte Folge mit  $v_h \in K_h$  ist, dann folgt  $v_h \rightarrow v \in K$ ,
- (ii) es existiert ein  $W \subset H$  mit  $\overline{W} = K$  and ein  $I_h : W \rightarrow K_h$ , so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h v = v$$

stark in  $H$  für alle  $v \in W$  konvergiert.

**Theorem 3.16** (a priori Konvergenz). *Mit den obigen Voraussetzungen für  $K$  und  $(K_h)_h$  gilt für die Lösungen  $u$  von (3.7) und  $u_h$  vom approximierten Problem: Finde  $u_h \in K_h$ , so dass*

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq F(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h, \quad (3.20)$$

der Zusammenhang

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_H = 0.$$

*Beweis.* (i) Abschätzung von  $u_h$ : Es sei  $u_h$  Lösung von (3.20), dann gilt nach einer Umformung für alle  $v_h \in K_h$

$$\begin{aligned} a(u_h, u_h) &\leq a(u_h, v_h) - F(v_h - u_h) \\ &= (Au_h, v_h)_H - (f, v_h - u_h)_H \\ &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \underbrace{\|Au_h\|_H}_{\leq \|A\| \|u_h\|_H} \|v_h\|_H + \|f\|_H \underbrace{\|v_h - u_h\|_H}_{\leq \|v_h\|_H + \|u_h\|_H} \\ &\leq \|A\| \|u_h\|_H \|v_h\|_H + \|f\|_H (\|v_h\|_H + \|u_h\|_H). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Koerzivität folgt dann

$$\alpha \|u_h\|_H^2 \leq \|A\| \|u_h\|_H \|v_h\|_H + \|f\|_H (\|v_h\|_H + \|u_h\|_H). \quad (3.21)$$

Wähle ein festes  $v_0 \in W$ , sodass  $I_h v_0 = v_h \in K_h$  gilt. Aus Voraussetzungen (ii) folgt dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h v_0 = v_0$$

### 3. Variationsungleichungen

---

und daher muss  $v_h$  beschränkt sein, d.h. es existiert ein  $m \in \mathbb{R} : \|v_h\|_H \leq m$  für alle  $h$ . Zusammen mit (3.21) gilt dann

$$\begin{aligned} \|u_h\|_H^2 &\leq \frac{1}{\alpha} (m \|A\| \|u_h\|_H + \|f\|_H (m + \|u_h\|_H)) \\ &= \underbrace{\left( \frac{m}{\alpha} \|A\| + \|f\|_H \right)}_{=: c_1} \|u_h\|_H + \underbrace{\frac{m}{\alpha} \|f\|_H}_{=: c_2} \\ &= c_1 \|u_h\|_H + c_2 \end{aligned}$$

und damit können wir durch quadratischer Ergänzung folgern, dass es ein  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\|u_h\| \leq c$  für alle  $h$ , d.h.  $(u_h)_h$  ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) schwache Konvergenz: Da  $(u_h)_h$  in  $H$  gleichmäßig beschränkt ist, folgt mit Bemerkung A.14 (b), dass es eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{h_j})_{h_j} \in K_{h_j}$  mit einem Grenzwert  $u^*$  in  $H$  gibt, d.h.

$$u_{h_j} \rightharpoonup u^* \in H.$$

Mit den Voraussetzungen (i) für  $(K_h)_h$  folgt direkt  $u^* \in K$ , außerdem ist  $u^*$  nach Bemerkung A.14 (e) eindeutig.

Wir zeigen nun, dass  $u^*$  eine Lösung von (3.7) ist. Für die oben betrachtete Teilfolge gilt

$$a(u_{h_j}, v_{h_j} - u_{h_j}) \geq F(v_{h_j} - u_{h_j}) \quad \forall v_{h_j} \in K_{h_j}. \quad (3.22)$$

Sei  $v \in W$  mit  $v_{h_j} = I_{h_j}v$ . Dann gilt  $v_{h_j} = I_{h_j}v \rightarrow v \in W$  für  $h_j \rightarrow 0$ . Mit (3.22) folgt

$$\begin{aligned} a(u_{h_j}, u_{h_j}) &\leq a(u_{h_j}, v_{h_j}) - F(v_{h_j} - u_{h_j}) \\ &= a(u_{h_j}, I_{h_j}v) - F(v_{h_j} - u_{h_j}) \\ \implies \liminf_{h_j \rightarrow 0} a(u_{h_j}, u_{h_j}) &\leq a(u^*, v) - F(v - u^*). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Weiter schätzen wir durch Bemerkung A.14 (f) nach unten ab

$$\liminf_{h_j \rightarrow 0} a(u_{h_j}, u_{h_j}) = \liminf_{h_j \rightarrow 0} \|u_{h_j}\|_H^2 \geq \|u^*\|_H^2 = a(u^*, u^*). \quad (3.24)$$

Insgesamt folgt also mit (3.23) und (3.24)

$$a(u^*, u^*) \leq \liminf_{h_j \rightarrow 0} a(u_{h_j}, u_{h_j}) \leq a(u^*, v) - F(v - u^*)$$

und damit nach Umformung

$$a(u^*, v - u^*) \geq F(v - u^*) \quad \forall v \in W.$$

Da  $W$  dicht in  $K$  liegt, d.h.  $\overline{W} = K$ , und  $a, F$  stetig sind, erhalten wir

$$a(u^*, v - u^*) \geq F(v - u^*) \quad \forall v \in K$$



### 3. Variationsungleichungen

---

mit  $u^* \in K$ , also ist  $u^* =: u$  Lösung von (3.7). Da  $u$  ein Häufungspunkt von  $(u_h)_h$  bzgl. der schwachen Topologie von  $H$  ist, konvergiert auch die Folge  $(u_h)_h$  schwach gegen  $u$ .

(iii) starke Konvergenz: Aus der Koerzivität von  $a$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \|u_h - u\|_H^2 \leq a(u_h - u, u_h - u) \\ &\leq a(u_h, u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u), \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei  $u_h$  Lösung vom approximierten Problem (3.20) und  $u$  Lösung vom exakten Problem (3.7) ist. Es sei  $v \in W$  mit  $I_h v = v_h \in K_h$ , dann folgt aus (3.20)

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, I_h v) - F(I_h v - u_h) \quad \forall v \in W. \quad (3.26)$$

Da  $u_h \rightharpoonup u$  in  $H$  und  $I_h v \rightarrow v$  in  $H$  für  $h \rightarrow 0$ , folgt aus (3.25) und (3.26) unter Verwendung von Voraussetzungen (ii)

$$0 \leq \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_H^2 \leq a(u, v - u) - F(v - u) \quad \forall v \in W. \quad (3.27)$$

Da  $a$  und  $F$  stetig sind und  $W$  dicht in  $K$  liegt, gilt (3.27) auch für alle  $v \in K$ . Setzen wir dann also  $v = u$  in (3.27), dann folgt die Behauptung  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_H^2 = 0$ .  $\square$

Es sei  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  ein beliebiger endlich dimensionaler Unterraum von  $H_0^1(\Omega)$  und  $K_h$  wie zu Beginn dieses Kapitels definiert. Dann ist  $K_h \subset V_h$  für alle Parameter  $h$ . Außerdem folgt Voraussetzung 3.15 (i) wegen der Abgeschlossenheit von  $K_h$ . Betrachten wir

$$W := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v > \psi \text{ f.ü. in } \Omega\},$$

so gilt  $\overline{W} = K$  und mit der bekannten Spline-Interpolation folgt dann auch Voraussetzung 3.15 (ii). Damit gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_1 = 0.$$

Es lässt sich folglich auch eine a priori Abschätzung für den Fehler von  $u$  und  $u_h$  machen. Die Herleitung ist detailliert beispielsweise in [Fal74] wiederzufinden.

**Theorem 3.17** (a priori Fehlerabschätzung). *Seien  $u$  und  $u_h$  die Lösungen von (3.7) und (3.20). Dann existiert eine Konstante  $C := C(\Omega, f, \psi)$  unabhängig von  $u$ , so dass*

$$\|u_h - u\|_1 \leq Ch.$$

*Beweis.* Vgl. [Fal74] Theorem 2 bzw. [Ste12b] Theorem 6.4.  $\square$

Damit führt die Netzverfeinerung also zur exakten Lösung der Variationsungleichung (3.11). Inwiefern adaptive Netzverfeinerung hier sinnvoll ist, wollen wir in Kapitel 4 betrachten.

## 3.2 Kontaktprobleme

Das in Kapitel 3.1 vorgestellte Hindernisproblem ist ein Modellproblem zur Minimierung eines Energiefunktionalen unter Nebenbedingung. Kontaktprobleme sind Probleme aus der Strukturmechanik, die auch auf eine solche Problemstellung führen. Daher können wir die Ideen zur Lösung eines Hindernisproblems auf diese Problemstellung übertragen.

### 3.2.1 Mathematische Modellierung eines Kontaktproblems

Zunächst wollen wir mithilfe der in Kapitel 2.5 eingeführten mechanischen Gleichungen ein Kontaktproblem mathematisch modellieren.

**Voraussetzung 3.18.** Wir treffen folgende Annahmen für unser Kontaktmodell:

- (a) Die in Kontakt stehenden Körper sind beschränkt.
- (b) Es liegen kleine Deformationen und linear elastische Materialien vor.
- (c) Wir betrachten ein konstantes Temperaturfeld, d.h. thermodynamische Prozesse werden ausgeschlossen.
- (d) Zu Beginn, also in der Ausgangskonfiguration, gilt für die Spannung und Verzerrung:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}.$$

- (e) Wir gehen von einem reibungslosen Kontakt aus. Dieses Kontaktproblem wird als *Signorini-Kontakt-Problem* bezeichnet.
- (f) Wir gehen von ebenen Problemen aus, d.h.  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Im  $\mathbb{R}^3$  sind alle Resultate analog.

Zur Herleitung der starken Kontaktformulierung wollen wir zwei Körper  $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$  betrachten, welche wegen Voraussetzung 3.18 (a) durch zwei beschränkte Gebiete  $\Omega^1, \Omega^2$  mathematisch beschrieben werden können. Diese Voraussetzung lässt sich auch auf beliebig viele Körper verallgemeinern (vgl. hierfür [CSW99]).

Weiter lassen sich die Ränder  $\Gamma^i = \partial\Omega^i$  von  $\Omega^i, i = 1, 2$ , in drei disjunkte Teile unterteilen (s. Abbildung 3.2):

$\Gamma_u^i$ : Der *Dirichlet-Rand*, oder auch *Verschiebungsrand*, auf dem die Werte von der Verschiebung  $\mathbf{u}$  vorgegeben sind.

$\Gamma_\sigma^i$ : Der *Neumann-Rand*, oder auch *Spannungsrand*, auf dem die Oberflächenlast bzw. -spannung  $\bar{\mathbf{t}}$  vorgegeben ist.

$\Gamma_c^i$ : Der *Kontakttrand*, auf dem die Kontaktbedingungen definiert sind.

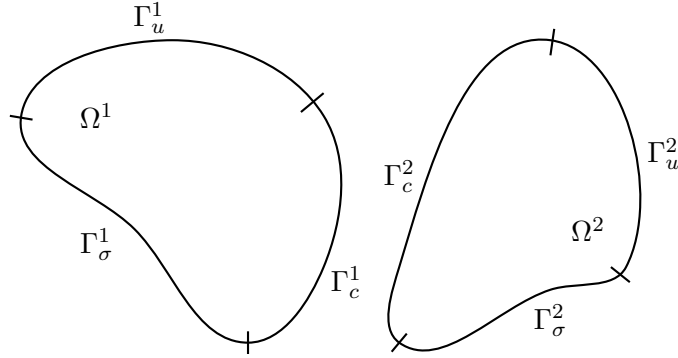


Abbildung 3.2: Körper  $\mathcal{B}^1$  und  $\mathcal{B}^2$  mit Randbezeichnungen

### Kontaktkinematik

Wir wollen zunächst die Kontaktkinematik (wie in [CSW99]) etwas allgemeiner als in [Wri01] oder [Wri06] beschrieben einführen. Für die Formulierung der Kontaktbedingungen werden den Körpern  $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$  die Bezeichnungen *master* und *slave* zugeordnet. Mit *slave* bezeichnen wir dabei die Menge an Punkten, für die überprüft wird, ob sie in die master-Fläche eindringen. Die Zuordnung von *master* und *slave* ist jedoch für das Ergebnis der Kontaktbedingung vollkommen unabhängig. Es sei daher o.B.d.A.  $\mathcal{B}^1$  der *slave*.

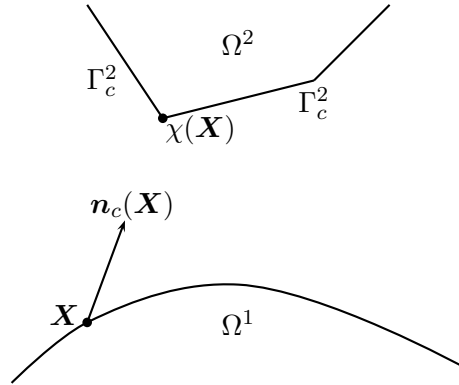


Abbildung 3.3: Kontaktformulierung zwischen zwei Körpern

Für einen gegebenen Punkt  $\mathbf{X} \in \Omega^1$ , bzw.  $\mathbf{X} \in \Gamma_c^1$ , in der Ausgangskonfiguration ist  $\bar{\mathbf{X}} := \chi(\mathbf{X})$  derjenige Punkt aus  $\Gamma^2$ , der minimalsten Abstand zu  $\mathbf{X}$  hat, d.h.

$$\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}\| = \min\{\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \mid \mathbf{Y} \in \Gamma^2\},$$

also ist  $\chi : \Gamma_c^1 \cup \Gamma_c^2 \rightarrow \Gamma^1 \cup \Gamma^2$  eine Abbildung der kleinsten Distanz (s. Abbildung 3.3). Damit definieren wir entsprechend die *kritische Richtung*

### 3. Variationsungleichungen

---

mit Länge 1 als

$$\mathbf{n}_c(\mathbf{X}) := \frac{\chi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}}{\|\chi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\|}, \quad (3.28)$$

wobei im Falle  $\mathbf{X} = \chi(\mathbf{X})$ , d.h. im Falle des Kontaktes, eine beliebige normierte Richtung für  $\mathbf{n}_c(\mathbf{X})$  gesetzt wird. Den Punkt  $\bar{\mathbf{X}}$  nennen wir analog *kritischen Punkt*.

**Bemerkung 3.19.** Der Punkt  $\bar{\mathbf{X}}$  heißt deshalb kritischer Punkt, da er wegen des kleinsten Abstandes zu  $\mathbf{X}$  der wohlmöglich nächste Punkt ist, der mit  $\mathbf{X}$  in Kontakt tritt. Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass die kritische Richtung  $\mathbf{n}_c(\mathbf{X})$  auch existiert, wenn der Rand eines Körpers nicht hinreichend glatt ist.

In den Koordinaten der Momentankonfiguration gilt  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und damit erhalten wir die *Nichtdurchdringungsbedingung*

$$(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_c(\mathbf{X}) \geq 0, \quad (3.29)$$

wobei  $\bar{\mathbf{x}} := \bar{\mathbf{X}} + u(\bar{\mathbf{X}})$  ist. Dies bedeutet, dass die Verbindung der Punkte in der Momentankonfiguration mit der kritischen Richtung einen Winkel  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  einschließen muss, andernfalls läge  $\bar{\mathbf{x}}$  „hinter“  $\mathbf{x}$ , d.h.  $\mathcal{B}^1$  wäre in  $\mathcal{B}^2$  eingedrungen. Aus (3.29) folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_c(\mathbf{X}) = (\bar{\mathbf{X}} + u(\bar{\mathbf{X}}) - \mathbf{X} - u(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_c(\mathbf{X}) \\ &= \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \cdot \frac{\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}}{\|\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|}}_{= \|\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\| =: g} + (u(\bar{\mathbf{X}}) - u(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_c(\mathbf{X}) \\ &= g + (u(\chi(\mathbf{X})) - u(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_c(\mathbf{X}), \end{aligned}$$

was uns Nichtdurchdringungsbedingung bzgl. der Ausgangskonfiguration liefert, wobei wir die Funktion  $g$  auch als *Gap-Funktion* bezeichnen, da sie die Lücke zwischen den Körpern beschreibt.

Aufgrund von Voraussetzung 3.18 (b) gehen wir von kleinen Deformationen aus. Damit gilt unter anderem  $\mathbf{X} \approx \mathbf{x}$ ,  $\nabla_{\mathbf{X}} = \text{Grad}(\cdot) \approx \text{grad}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{x}}$  (vgl. [Alt12] S. 122f). Daher schreiben wir im folgenden immer  $\mathbf{x}$  statt  $\mathbf{X}$ . Insgesamt lässt sich also die Nichtdurchdringungsbedingung schreiben als

$$(\mathbf{u} \circ \chi - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_c + g \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (3.30)$$

wobei  $\Gamma_c := \Gamma_c^1 \cup \Gamma_c^2$  ist.

Der Einfachheit halber wollen wir in dieser Arbeit noch weitere Forderungen an die beiden Körper  $\mathcal{B}^1$  und  $\mathcal{B}^2$  stellen. Wir fordern, dass die Ränder  $\Gamma^i$  hinreichend glatt sind. Daraus folgt, dass (3.30) auch für  $\mathbf{n}_c$  als

### 3. Variationsungleichungen

---

Einheitsnormale von  $\mathcal{B}^1$  gilt. Weiter soll  $\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{0}$  gelten, d.h. falls  $\mathcal{B}^2$  ein Verschiebungsfeld ungleich Null hat, können wir  $\mathbf{u}$  bzgl.  $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$  auch als Relativverschiebung interpretieren.

Im numerischen Beispiel wollen wir später  $\mathcal{B}^1$  als feste Ebene verwenden. Damit reduziert sich (3.30) auf

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - g \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad (3.31)$$

wobei wir auch  $u_n := \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  im Folgenden schreiben werden. Weiter muss auf dem Kontaktrand  $\Gamma_c$  die Normalkraft eine Druckkraft sein oder es herrscht Kräftegleichgewicht, d.h. für  $\sigma_n := \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$ , also die Spannung in Normalenrichtung, gilt

$$\sigma_n \leq 0 \quad \text{auf } \Gamma_c. \quad (3.32)$$

Damit gilt auch, wenn die Kontaktbedingung nicht aktiv ist (also nicht die Gleichheit gilt), so muss Kräftegleichgewicht herrschen, d.h. in (3.32) gilt die Gleichheit. Zusammen erhält man die *Komplementaritätsbedingung*

$$(u_n - g) \sigma_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_c. \quad (3.33)$$

Laut der Voraussetzung (e) betrachten wir Signorini-Kontakt (also keine Reibung) und damit muss die Tangentialkraft auf dem Kontaktrand gleich Null sein, d.h.

$$\boldsymbol{\sigma}_t := \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_c. \quad (3.34)$$

#### Bilanzgleichungen, materialunabhängige Gleichungen

Wie in Kapitel 2.5 eingeführt, gelten auch hier die Gleichung (2.32) des Kräftegleichgewichts. Da wir laut Voraussetzung (b) von kleinen Deformationen ausgehen, gilt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega. \quad (3.35)$$

Weiter gilt nach dem Cauchy-Theorem (2.29), dass die Spannung in Normalenrichtung auf der Oberfläche  $\Gamma$  von  $\Omega$  gleich der von außen angebrachten Spannung  $\bar{\mathbf{t}}$  ist, d.h.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_\sigma, \quad (3.36)$$

also auf dem Neumann-Rand.

#### Konstitutive Gleichungen

Da wir laut Voraussetzung (b) von einem linear elastischen Material und kleinen Deformationen ausgehen, gilt ein linearer Zusammenhang bzgl. der

### 3. Variationsungleichungen

---

Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , d.h. das Hooke'sche-Gesetz (2.33) und wir können den linearisierten Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (vgl. (2.28)) verwenden, d.h. mit einem 4 stufigem Materialtensor  $\mathcal{C} = (c_{ijkl})$  gilt

$$\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega. \quad (3.37)$$

Zusammenfassend lässt sich das Signorini-Kontakt-Problem mit (3.31) bis (3.37) in der starken Formulierung beschreiben durch:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (3.38a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (3.38b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_\sigma \quad (3.38c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (3.38d)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n - g \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ (u_n - g) \sigma_n = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{auf } \Gamma_c \quad (3.38e)$$

An dieser Stelle sei kurz angemerkt, wie sich die Problemstellung (3.38) ändern würde, wenn wir ein Modell mit Reibung betrachten.

**Bemerkung 3.20.** Ein Kontaktmodell mit  $\boldsymbol{\sigma}_t \neq \mathbf{0}$  ist beispielsweise das Modell mit *Tresca-Reibung*. Für dieses Problem wird die letzte Bedingung aus (3.38e) durch die Bedingungen

$$\|\boldsymbol{\sigma}_t\| \leq \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{u}_t + \mathcal{F} \|\mathbf{u}_t\| = 0 \quad (3.39)$$

mit  $\mathbf{u}_t := \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$ , dem tangentialen Anteil des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$ , ersetzt. Hierbei ist  $\mathcal{F} \geq 0$  eine Schranke für die Reibung. Gilt  $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| < \mathcal{F}$ , so folgt aus der zweiten Gleichung von (3.39), dass  $\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$  ist. Also kann  $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$  nur gelten, wenn  $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| = \mathcal{F}$  ist.

Mit  $\mathcal{F} := \mu \sigma_n$  erhalten wir das *Reibungsgesetz von Coulomb*, wobei  $\mu$  den aus der Mechanik bekannten Reibungskoeffizienten darstellt.

Da die Herleitung der zu diesem Problem äquivalenten Variationsungleichung zusätzliche mathematische Resultate erfordert, werden wir uns in der weiteren Herleitung auf das Signorini-Kontakt-Problem beziehen. Außerdem führt solch ein Problem auf eine sogenannte Variationsungleichung 2. Art, deren Lösung wir in dieser Arbeit nicht ausführen wollen.

#### 3.2.2 Variationsformulierung des Signorini-Kontaktproblems

*Erinnerung.* Wegen Voraussetzung 3.18 (f) sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein zweidimensionale Gebiet.

### 3. Variationsungleichungen

---

Wir betrachten das Signorini-Kontakt-Problem (3.38). Um hierfür eine Variationsformulierung herzuleiten, führen wir analog zu  $H_0^1(\Omega)$  den Raum

$$H_{\Gamma_u}^1(\Omega) := \{v \in (H^1(\Omega))^2 \mid v = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u\} \quad (3.40)$$

der Funktionen, die auf dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_u$  gleich Null sind. Weiter sei analog zur Teilmenge  $K \subset H_0^1(\Omega)$  die zu betrachtende Teilmenge von  $H_{\Gamma_u}^1(\Omega)$  definiert durch

$$\mathcal{K} := \{v \in H_{\Gamma_u}^1(\Omega) \mid v_n - g \leq 0 \text{ auf } \Gamma_c\}, \quad (3.41)$$

welche die Funktionen enthält, die die Dirichlet-Rand- und Kontaktbedingungen erfüllen. Die Menge  $\mathcal{K}$  ist analog zu Lemma 3.1 konvex und abgeschlossen (vgl. auch [KO88] Kapitel 6.2 und [CSW99] Proposition 3.2).

Weiter seien  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{K}$ , wobei  $\mathbf{u}$  die Lösung des Signorini-Kontakt-Problems darstellt und  $\mathbf{v}$  (häufig in den Ingenieurwissenschaften als *virtuelle Verschiebung* bezeichnet) eine beliebige Testfunktion ist. Dann gilt, dass

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in (H_{\Gamma_u}^1(\Omega))^2$$

auch eine Testfunktion ist, die wir mit (3.38a) multiplizieren und über  $\Omega$  integrieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} + \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \operatorname{grad} \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \underbrace{\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}_{=\mathbf{w} \cdot \|\mathbf{n}\|^2 \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{w} + \operatorname{grad}^T \mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma}}_{=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})} \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_c} w_n \sigma_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei im zweiten Schritt die Produktregel für die Divergenz (??) und darauf folgend der Integralsatz von Gauß verwendet wurde. Weiter wurde die disjunkte Aufteilung vom Rand  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_c$  benutzt, wobei  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_u$  und  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$  auf  $\Gamma_{\sigma}$  gilt.

Um weiter zu einer Variationsungleichung zu gelangen, betrachten wir das Integral über  $\Gamma_c$ . Dann gilt für den Integranden

$$\begin{aligned} w_n \sigma_n &= (v_n - u_n) \sigma_n \stackrel{+0}{=} (v_n - g + g - u_n) \sigma_n \\ &= (v_n - g) \sigma_n - \underbrace{(u_n - g) \sigma_n}_{=0 \text{ auf } \Gamma_c} \\ &= \underbrace{(v_n - g)}_{\leq 0} \underbrace{\sigma_n}_{\leq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

### 3. Variationsungleichungen

---

Damit ist das Integral größer gleich Null und aus (3.42) folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ \iff \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega &\geq \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.43)$$

Wegen (3.38b) steht die Spannung aus (3.43) im linearen Zusammenhang mit der Verzerrung und kann durch  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$  ausgedrückt werden. Mit der Bilinearform  $a : H_{\Gamma_u}^1 \times H_{\Gamma_u}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  und der Linearform  $F : H_{\Gamma_u}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (3.44a)$$

$$F(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (3.44b)$$

lässt sich (3.43) in der altbekannten Form schreiben: Finde  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ , so dass

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq F(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad (3.45)$$

gilt. Wir stellen folgende Voraussetzungen an den Materialtensor  $\mathcal{C} = (C_{ijkl})$  (vgl. [KO88] Bedingung (5.5)).

**Voraussetzung 3.21.** (a) Es sei  $C_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ . Damit gilt, dass eine Konstante  $M$  existiert, so dass

$$\max_{1 \leq i,j,k,l \leq n} \|C_{ijkl}\|_{0,\infty} \leq M \quad (3.46)$$

gilt.  $\mathcal{C}$  ist also nach oben beschränkt.

(b) Der Materialtensor  $\mathcal{C}$  ist in folgendem Sinne symmetrisch:

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{klij}(\mathbf{x}) = C_{jikl}(\mathbf{x}) \text{ fast überall in } \Omega. \quad (3.47)$$

(c) Es existiert eine Konstante  $m > 0$ , so dass fast überall in  $\Omega$

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq m \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.48)$$

für jedes  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  gilt, d.h. der Materialtensor ist nach unten beschränkt.

*Notation.* (a) Der Parameter  $n$  aus Voraussetzung 3.21 gibt die Dimension des Verzerrungstensors bzw. Spannungstensors an, in unserem Fall also  $n = 2$ .

(b) In Voraussetzung 3.21 (c) wird die *Einstein'sche Summenkonvention* verwendet. Hierbei wird über doppelt vorkommende Indizes summiert, d.h.

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2.$$



### 3. Variationsungleichungen

---

Unter den Voraussetzungen 3.21 lässt sich für die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (3.44a) die Stetigkeit und Koerzivität zeigen, denn:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})}_{=\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})} d\Omega \\
&\stackrel{(3.46)}{\leq} M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \sum_{k,l=1}^2 \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} M \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{k,l=1}^2 \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= M \left( \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{u}|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{v}|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass

$$\sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} (u_{i,j} + \underbrace{u_{j,i}}_{=\partial_i u_j}) = \sum_{i,j=1}^2 u_{i,j}$$

ist. Für die Koerzivität rechnen wir unter Verwendung von Voraussetzung 3.21 (c) nach:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})}_{=\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})} d\Omega \geq m \int_{\Omega} \underbrace{\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})}_{=\sum_{i,j=1}^2 v_{i,j}^2} d\Omega \\
&= m \int_{\Omega} |\text{grad } \mathbf{v}|^2 d\Omega \stackrel{\text{Satz 2.13}}{\geq} c \|\mathbf{v}\|_1^2
\end{aligned}$$

mit einem  $c > 0$ . Die letzte Ungleichung folgt auch aus der zweiten *Korn'schen Ungleichung* (s. [Bra13] Kapitel VI, §3, Satz 3.3). Als letztes berechnen wir für die Linearform  $F(\cdot)$  aus (3.44b) die Stetigkeit nach.

$$\begin{aligned}
|F(\mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \right| \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|\bar{\mathbf{b}}\|_0 \|\mathbf{v}\|_0 + \|\bar{\mathbf{t}}\|_{0,\Gamma_{\sigma}} \|\mathbf{v}\|_{0,\Gamma_{\sigma}} \\
&\stackrel{\text{Theorem A.9}}{\leq} c (\|\bar{\mathbf{b}}\|_0 + \|\bar{\mathbf{t}}\|_{0,\Gamma_c}) \|\mathbf{v}\|_1 \\
&\stackrel{\text{Spursatz}}{\leq}
\end{aligned}$$

Also ist  $F$  unter der Voraussetzung, dass  $\bar{\mathbf{b}} \in (L^2(\Omega))^2$  und  $\bar{\mathbf{t}} \in (L^2(\Gamma_c))^2$  gilt (analog zum Modellproblem aus Kapitel 2.2), stetig. Damit folgt das die Aussage des nächsten Theorems.

### 3. Variationsungleichungen

---

**Theorem 3.22.** *Es sei Voraussetzung 3.21 erfüllt sowie  $\bar{\mathbf{b}} \in (L^2(\Omega))^2$  und  $\bar{\mathbf{t}} \in (L^2(\Gamma_c))^2$ . Dann hat die Variationsungleichung (3.43) bzw. (3.45) eine eindeutige Lösung.*

*Beweis.* Unter den Voraussetzungen ist  $a$  eine stetige koerzive Bilinearform, sowie  $F$  stetig. Weiter ist  $\mathcal{K}$  abgeschlossen und konvex. Dann folgt aus Theorem 3.6 die Behauptung.  $\square$

Wie schon erwähnt gilt auch bei dieser Variationsungleichung die Äquivalenz zu einem Minimierungsproblem eines Energiefunktional.

**Theorem 3.23.** *Es sei  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\mathcal{K}$  wie oben definiert. Die Variationsungleichung (3.45) ist äquivalent zum Minimierungsproblem:*

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) \quad (3.49)$$

mit der Bilinearform  $a$  aus (3.44a) und der Linearform  $F$  aus (3.44b).

*Beweis.* Es sei zu Beginn noch einmal bemerkt, dass  $\mathcal{K}$  konvex und abgeschlossen ist. Da  $a$  stetig und koerziv sowie  $F$  stetig ist, folgt direkt aus Lemma 2.10, dass  $J$  ein konvexes Funktional ist. Außerdem folgt analog zum Beweis von Lemma 2.11, dass  $J$  auch Gâteaux-differenzierbar ist und damit gilt wegen Satz A.11, dass das Minimierungsproblem (3.49) und die Variationsungleichung (3.45) äquivalent sind.  $\square$

**Bemerkung 3.24.** Für das Kontaktproblem mit Tresca-Reibung (s. Bemerkung 3.20) gibt es ein zu (3.49) analoges Energiefunktional. Da durch die Reibung noch Energie entsteht, bzw. verloren geht, ist dieses Funktional noch von der Reibung abhängig. Es ergibt sich dann:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + j(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) \quad (3.50)$$

mit dem Reibungsfunktional

$$j(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \|\mathbf{v}_t\| d\Gamma. \quad (3.51)$$

Wegen des Reibungsfunktional  $j$  ist (3.50) nicht mehr Gâteaux-differenzierbar. Dennoch kann man eine zur Minimierungsaufgabe über (3.50) äquivalente Variationsungleichung herleiten (vgl. [Ste12a]). Eine solche Ungleichung nennen wir Variationsungleichung 2. Art und ist von der Form

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq F(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (3.52)$$

Allerdings ist der Beweis der Existenz einer Lösung für (3.52) mit den in dieser Arbeit aufgeführten Mitteln nicht möglich, weshalb wir vom reibungslosen Fall ausgehen.

### 3.2.3 Lösung des Kontaktproblems mittels FEM

Um die Variationsungleichung (3.45) mittels Finite-Elemente-Methode zu lösen, betrachten wir analog zu  $\mathcal{S}_h$  den Raum der mehrdimensionalen linearen Ansatzfunktionen bzgl. einer quasi-uniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$

$$\mathcal{S}_h := \{\mathbf{v} \in (C^0(\Omega))^2 \mid \mathbf{v}|_T \in \mathcal{P}_1^2 \text{ für } T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}\} \subset H_{\Gamma_u}^1(\Omega). \quad (3.53)$$

Mit einer Basis  $\mathcal{B}_h := \{\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{2N}\}$  von  $\mathcal{S}_h$  lässt sich dann jedes Element  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{S}_h$  als Linearkombination schreiben

$$\mathbf{v}_h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{2N} x_i \boldsymbol{\psi}_i(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \Omega \quad (3.54)$$

für genau ein  $(x_1, \dots, x_{2N})^T =: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ . Betrachten wir analog zu Kapitel 3.1.3 die Variationsgleichung (3.45) diskret, so erhalten wir das Problem: Finde  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{S}_h$ , so dass

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq F(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.55)$$

mit  $\mathcal{K}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{S}_h \mid \mathbf{v}_h(\bar{x}_i) \cdot \mathbf{n} - g(\bar{x}_i) \leq 0 \text{ mit } \bar{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Gamma_c\}$ , d.h. die punktuelle Form (der Nebenbedingung) von  $\mathcal{K}$ . Auch hier stellt  $\mathcal{N}$  (mit  $|\mathcal{N}| = N$ ) wieder die Menge der Knoten dar.

Analog zu  $K_S$  aus (3.13) können wir auch hier bzgl. einer Basis  $\mathcal{B}_h$  die Menge  $\mathcal{K}_h$  äquivalent durch den Koordinatenvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$  ausdrücken, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N} \mid \sum_{j=1}^{2N} x_j \boldsymbol{\psi}_j(\bar{x}_i) \cdot \mathbf{n} - g(\bar{x}_i) \geq 0 \text{ für } \bar{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Gamma_c \right\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N} \mid B\mathbf{x} \geq \mathbf{c}\} \end{aligned}$$

$$\text{mit } B = [-\boldsymbol{\psi}_j(\bar{x}_i) \cdot \mathbf{n}(\bar{x}_i)]_{\bar{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Gamma_c, 1 \leq j \leq 2N}, \mathbf{c} = [-g(\bar{x}_i)]_{\bar{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Gamma_c}.$$

Damit können wir das diskrete Problem in Matrixschreibweise wieder durch Einsetzen der Linearkombination (3.54) in die Variationsungleichung (3.55) erhalten. Finde  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{K}_S$ , so dass

$$(A\mathbf{x}^* - \mathbf{b})^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}_S, \quad (3.56)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}_j) : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}_i) d\Omega \right]_{1 \leq i, j \leq 2N}, \\ \mathbf{b} &= \left[ \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\psi}_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\psi}_i ds \right]_{1 \leq i \leq 2N} \end{aligned}$$

### 3. Variationsungleichungen

---

ist. Aus Bemerkung 3.13 folgt, dass die Variationsungleichung (3.56) äquivalent zu folgendem quadratischen Programm ist:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad B \mathbf{x} \geq \mathbf{c}, \quad (3.57)$$

d.h. da wegen der Koerzivität von  $a$  das Problem (3.57) konvex ist, kann dieses wieder mithilfe des in Anhang B.2 vorgestellten gelöst werden.

**Bemerkung 3.25.** Wir erhalten beim Kontaktproblem im Vergleich zum Hindernisproblem doppelt so große Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{b}$  bzw. eine doppelt so große Matrix  $A$ , da wir an jedem der  $N$  Knoten ein Verschiebungsfeld, d.h. eine Verschiebung in  $x$ - und  $y$ -Richtung, berechnen.

## Kapitel 4

# Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

Die adaptive Netzverfeinerung (s. Kapitel 2.4) ist gerade auch bei Hindernis- und Kontaktproblemen von großem Vorteil. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, führt die Lösung von solchen Problemen auf quadratische Programme, die wir mit zeitaufwändigen Verfahren lösen müssen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass man Variationsungleichungen auch mit anderen Verfahren – häufig üblich ist z.B. die *Penalty-Methode* – lösen kann, die jedoch nicht weniger aufwendig sind.

Um nun eine adaptive Verfeinerungsstrategie herleiten zu können, müssen wir zunächst einen geeigneten Fehlerschätzer für unser Modellproblem (3.1) erhalten. Dabei ist „geeignet“ in dem Sinne zu verstehen, dass der Schätzer unseren echten Fehler nach oben und unten beschränkt. Weiter wollen wir mit dem Fehler a posteriori nach jedem Verfeinerungsschritt den Fehler in der nächsten Verfeinerung abschätzen. Mit diesen Fragestellungen werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen und einen ersten adaptiven Algorithmus sowie die Übertragung auf Kontaktprobleme zeigen.

Es sei bemerkt, dass man als a posteriori Fehlerschätzer für Hindernisprobleme in der Literatur häufig residuale Schätzer wiederfinden kann. Wir wollen uns jedoch hier mit einem hierarchischen Fehlerschätzer beschäftigen, dessen grundlegende Idee auch schon in Kapitel 2.4.1 dargestellt wurde.

Dieses Kapitel basiert größtenteils auf [ZVKG11].

## 4.1 Herleitung von einem a posteriori hierarchischen Fehlerschätzers

Bevor wir uns detailliert der Herleitung eines hierarchischen a posteriori Fehlerschätzers widmen, wollen wir eine Generalvoraussetzung für das gesamte Kapitel 4 stellen.

**Voraussetzung 4.1.** Das Hindernis wird durch eine stückweise lineare stetige Funktion  $\psi$  beschrieben.

Für nichtstetige oder auch glatte Hindernisse sind analoge Aussagen beweisbar, die jedoch schwerer zu zeigen sind. Für einen residualen Schätzer kann man das Vorgehen für glatte Hindernisse auch in [Pag10] finden.

### 4.1.1 Diskretisierung des Defektproblems

Es sei  $\mathcal{B}_h$  eine nodale Basis bzgl. einer quasi-uniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  für  $\mathcal{S}_h$  (s. Kapitel 2.3), dem Raum der stückweise linearen Funktionen über  $\mathcal{T}_h$ . Weiter sei  $K_h$  wie in Kapitel 3.1.3 definiert

$$K_h = \{v_h \in \mathcal{S}_h \mid v_h(p) \geq \psi(p) \forall p \in \mathcal{N} \cap \Omega\},$$

wobei  $\mathcal{N}$  wieder die Menge der Knoten von  $\mathcal{T}_h$  darstellt. Wir betrachten nun wieder die diskrete Variationsungleichung (3.12): Finde  $u_h \in K_h$  mit

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h$$

oder äquivalent die Minimierung des Funktional  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)$  über  $K_h$ , d.h.

$$u_h \in K_h : \quad J(u_h) \leq J(v_h) \quad \forall v_h \in K_h. \quad (4.1)$$

Wegen Voraussetzung 4.1, dass  $\psi$  stückweise linear ist, gilt  $K_h \subset K$ , da die linearen Ansatzfunktionen nicht nur punktuell, sondern auch kontinuierlich die Nebenbedingung erfüllen. Damit ist (3.12) eine konforme Finite-Elemente-Methode; nichtkonforme Finite-Elemente würden z.B. durch ein nichtstetiges Hindernis erzeugt werden. Diese sollen jedoch nicht Teil dieser Arbeit sein.

Wir werden einen a posteriori Fehlerschätzer für den Fehler bzgl. der Funktionswerte der Funktionale  $J(u), J(u_h)$  herleiten. Hierfür gilt

$$J(u_h) - J(u) \geq 0,$$

denn aus den beiden Minimierungsproblemen über  $K$  und  $K_h$  folgt

$$J(u) \leq J(v) \forall v \in K, \quad J(u_h) \leq J(v_h) \forall v_h \in K_h.$$

Da  $K_h \subset K$  gilt, gilt insbesondere  $J(u) \leq J(v_h)$  für alle  $v_h \in K_h$ . Setzen wir  $v_h = u_h$ , so folgt

$$J(u) \leq J(u_h) \iff J(u_h) - J(u) \geq 0.$$

**Bemerkung 4.2.** Gilt  $\psi = -\infty$ , d.h. ist kein Hindernis vorhanden, so folgt

$$\begin{aligned}
 J(u_h) - J(u) &= \frac{1}{2}a(u_h, u_h) - (f, u_h) - \left( \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u) \right) \\
 &= \frac{1}{2}a(u_h, u_h) - (f, u_h) - \frac{1}{2}a(u, u) + (f, u) \\
 &\quad + \overbrace{\left( a(u, u - u_h) - \underbrace{(f, u - u_h)}_{=(f, u) - (f, u_h)} \right)}^{=0} \\
 &= \frac{1}{2}a(u_h, u_h) - \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, u - u_h) \\
 &= \frac{1}{2}a(u_h, u_h) - \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, u) - a(u, u_h) \\
 &= \frac{1}{2}(a(u_h, u_h) + a(u, u) - 2a(u, u_h)) \\
 &= \frac{1}{2}a(u_h - u, u_h - u) = \frac{1}{2}\|u_h - u\|_E^2.
 \end{aligned}$$

Ist nun ein  $\psi > -\infty$  gegeben, dann addieren wir im zweiten Schritt nicht mehr Null, sondern es gilt für den Term

$$a(u, u - u_h) - (f, u - u_h) \leq 0$$

und damit gilt  $J(u_h) - J(u) \geq \frac{1}{2}\|u_h - u\|_E^2$ , d.h. eine obere Schranke des Fehlers im Funktional schätzt auch den Fehler zwischen exakter und approximierter Lösung in der Energienorm ab.

*Notation.* Um im Folgenden den hierarchischen Split leichter beschreiben zu können, schreiben wir für die Galerkin-Lösung  $u_h$  die Notation  $u_S$ , um auszudrücken, dass diese im linearen Ansatzraum  $\mathcal{S}_h$  liegt. Analog sind die im Weiteren übrigen verwendeten Indizes zu verstehen.

Zudem werden wir die für die Energienorm die Notation

$$a(v, v)^{\frac{1}{2}} = \|v\|$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$ , also ohne Index, verwenden. Auch in diesem Kapitel werden wir wieder  $(u, v) = (u, v)_0$  für alle  $u, v \in H^1(\Omega)$  verwenden.

Zur Herleitung des hierarchischen Fehlerschätzers führen wir die Fehlerfunktion  $e = u - u_S$  ein, die den exakten Fehler angibt. Weiter sei

$$\mathcal{I}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \rho_S(v) \text{ mit } \rho_S(v) = (f, v) - a(u_S, v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

**Bemerkung 4.3.** (a) Die Linearform  $\rho_S$  stellt das Residuum der Variationsgleichung (d.h. ohne Hindernis) dar.

(b) Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein  $v^* \in H_0^1(\Omega)$ , so dass

$$(v^*, v) = \rho_S(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ist. Wir können also  $v^*$  als Lagrange-Multiplikator bzgl. der Nebenbedingung  $v \geq \psi$  interpretieren.

Damit führen wir das Defektproblem für das Hindernisproblem ein, welches der exakte Fehler  $e$  löst.

**Satz 4.4** (Lösung des Defektproblems). *Mit den obigen Bezeichnungen löst die Fehlerfunktion  $e$  folgendes Defektproblem:*

$$e \in \mathcal{A} : \quad \mathcal{I}(e) \leq \mathcal{I}(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}, \quad (4.2)$$

wobei  $\mathcal{A} := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi - u_S\} = -u_S + K$ .

*Beweis.* Es sei  $u$  die Lösung von (3.2) und  $u_S$  die Lösung von (4.1). Dann gilt

$$\begin{aligned} u \in K : \quad & J(u) \leq J(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in K \quad (*) \\ \iff u \in K : \quad & J(u) - J(u_S) \leq J(\tilde{v}) - J(u_S) \quad \forall \tilde{v} \in K. \end{aligned}$$

Wir rechnen für die linke Seite nach, dass gilt

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_S) &= \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u) - \left( \frac{1}{2}a(u_S, u_S) - (f, u_S) \right) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(u_S, u_S) - a(u_S, u_S) - (f, u - u_S) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(u_S, u_S) - a(u_S, u) \\ &\quad - ((f, u - u_S) - a(u_S, u - u_S)) \\ &= \frac{1}{2}a(u - u_S, u - u_S) - \rho_S(u - u_S) \\ &= \frac{1}{2}a(e, e) - \rho_S(e) = \mathcal{I}(e). \end{aligned}$$

Analog gilt für die rechte Seite  $J(\tilde{v}) - J(u_S) = \mathcal{I}(\tilde{v} - u_S)$ . Mit  $v := \tilde{v} - u_S$  gilt  $v \in \mathcal{A}$  und damit ist  $(*)$  äquivalent zu: Finde  $e \in \mathcal{A}$ , so dass

$$\mathcal{I}(e) \leq \mathcal{I}(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}. \quad \square$$

**Korollar 4.5.** *Das Problem (4.2) ist äquivalent zur Variationsungleichung: Finde  $e \in \mathcal{A}$  mit*

$$a(e, v - e) \geq \rho_S(v - e) \quad \forall v \in \mathcal{A}. \quad (4.3)$$



#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

*Beweis.* Analog zu Lemma 3.1 lässt sich zeigen, dass  $\mathcal{A}$  abgeschlossen und konvex ist. Aus Lemma 2.10 und 2.11 folgt, dass  $\mathcal{I}$  konvex und Gâteaux-differenzierbar ist und mit Satz A.11 folgt dann die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung.* (a) Da  $\psi$  stückweise linear ist und  $\psi - u_{\mathcal{S}} \leq 0$  gilt, folgt  $0 \in \mathcal{A}$ , d.h. das „gewünschte“ Ergebnis für den Fehler  $e$  liegt in der für das Defektproblem betrachteten Menge.

(b) Wir werden noch zeigen, dass  $\rho_{\mathcal{S}}$  eine Schlüsselgröße für die a posteriori Abschätzung darstellt.

Die Herleitung des a posteriori Schätzers vollzieht sich jetzt analog zu Kapitel 2.4.1 in zwei Schritten.

- (i) Diskretisiere (4.3) bzgl. einer Erweiterung von  $\mathcal{S}_h$  (hier mit quadratischen Funktionen), so dass  $e$  hinreichend genau approximiert wird.
- (ii) Teile den neuen Raum so auf, dass (4.3) lokal in der Erweiterung exakt gelöst werden kann.

Als Erweiterung von  $\mathcal{S}_h$  betrachten wir einen Raum  $\mathcal{Q}_h$  mit  $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{Q}_h$ , wobei

$$\mathcal{Q}_h := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_2 \text{ für } T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ist, d.h. der Raum der stückweise quadratischen Funktionen über einer quasi-uniformen Zerlegung  $\mathcal{T}_h$ . Damit definieren wir  $\mathcal{N}_{\mathcal{Q}} := \mathcal{N} \cup \{x_E \mid E \in \mathcal{E}\}$ , wobei  $x_E$  den Mittelpunkt der Kante  $E$  bezeichne und  $\mathcal{E}$  somit die Menge aller Kanten ist. Daraus ergibt sich  $\mathcal{A}$  über  $\mathcal{Q}_h$  diskret als

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Q}} := \{v \in \mathcal{Q}_h \mid v(p) \geq \psi(p) - u_{\mathcal{S}}(p) \forall p \in \mathcal{N}_{\mathcal{Q}} \cap \Omega\} \quad (4.4)$$

und im Bezug zu (4.4) erhalten wir somit das diskrete Defektproblem

$$e_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}} : \quad a(e_{\mathcal{Q}}, v - e_{\mathcal{Q}}) \geq \rho_{\mathcal{S}}(v - e_{\mathcal{Q}}) \quad \forall v \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}. \quad (4.5)$$

**Bemerkung 4.6.** Im Allgemeinen gilt hierbei nicht  $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{A}$ . So kann man sich anschaulich eine quadratische Funktion  $v_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$  vorstellen, die allerdings zwischen den übereinstimmenden Werten aufgrund ihrer Krümmung das lineare Hindernis aus  $\mathcal{A}$  durchdringt (vgl. das eindimensionale Beispiel aus Abbildung 4.1).

Als hierarchischen Split des Raumes  $\mathcal{Q}_h$  verwenden wir  $\mathcal{Q}_h = \mathcal{S}_h \oplus \mathcal{V}_h$ , wobei  $\mathcal{V}_h := \{\phi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  der Raum der quadratischen *Bubble-Funktionen* ist, wobei solch eine Bubble-Funktion  $\phi_E$  bzgl. der Eck- und Kantenmittelpunkte eines Dreiecks definiert ist durch

$$\phi_E(p) = \delta_{x_E, p} = \begin{cases} 1, & p = x_E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob  $\mathcal{Q}_h$  wirklich als direkte Summe der beiden Räume  $\mathcal{S}_h$  und  $\mathcal{V}_h$  geschrieben werden kann.

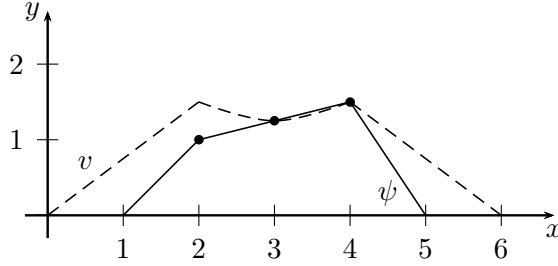


Abbildung 4.1: Beispiel eines affinen Hindernisses  $\psi$  mit  $v \in \mathcal{A}_Q$  in  $\mathbb{R}$

**Satz 4.7.** *Mit den oben verwendeten Notationen gilt  $\mathcal{Q}_h = \mathcal{S}_h \oplus \mathcal{V}_h$ .*

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\mathcal{Q}_h = \mathcal{S}_h \oplus \mathcal{V}_h$  auf dem Referenzdreieck gilt und damit gilt es auch für beliebige Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$ , da ein allgemeines Dreieck  $T$  aus dem Referenzelement  $\tilde{T}$  (vgl. Kapitel 2.3) durch affine Transformation hervorgeht.

Auf dem Referenzelement  $\tilde{T}$  ist  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$  eine Basis von  $\mathcal{S}_h$  mit

$$\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \phi_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \phi_3(\xi, \eta) = \eta$$

und  $\{\phi_4, \phi_5, \phi_6\}$  eine Basis von  $\mathcal{V}_h$  mit

$$\phi_1(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad \phi_2(\xi, \eta) = 4\xi\eta, \quad \phi_3(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta).$$

Damit ist  $\{\phi_1, \dots, \phi_6\}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{Q}_h$ , da jedes Element

$$a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi^2 + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 \in \mathcal{Q}_h$$

als Linearkombination aus den Funktionen beschrieben werden kann ( $\phi_1$  bis  $\phi_6$  enthalten alle vorkommenden Summanden eines Polynom 2. Grades). Außerdem ist leicht nachzurechnen, dass die Funktionen  $\phi_i, i = 1, \dots, 6$ , linear unabhängig sind und damit gilt

$$\mathcal{Q}_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_6\}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt damit auch  $\mathcal{S}_h \cap \mathcal{V}_h = \{0\}$  gilt und damit die Behauptung.  $\square$

Satz 4.7 erlaubt es uns also, jedes Element  $v_Q \in \mathcal{Q}_h$  als  $v_Q = v_S + v_V$  mit  $v_S \in \mathcal{S}_h, v_V \in \mathcal{V}_h$  schreiben zu können. Aus diesem Grund führen wir folgende Bilinearform ein:

$$a_Q(v, w) := a(v_S, w_S) + \sum_{E \in \mathcal{E}} u_V(x_E) w_V(x_E) a(\phi_E, \phi_E) \quad \forall v, w \in \mathcal{Q}_h,$$

welche aufgrund der Eigenschaften der direkten Summe von  $\mathcal{S}_h$  und  $\mathcal{V}_h$  wohldefiniert ist. Dabei erhält man  $a_Q$  durch Entkopplung von  $a$  bzgl. der Räume

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

$\mathcal{S}_h$  und  $\mathcal{V}_h$  und anschließender „Diagonalisierung“ auf  $\mathcal{V}_h$  in dem Sinne, dass wir nur noch die Koordinaten der Elemente  $v, w$  auf  $\mathcal{V}_h$  betrachten, deren Basisfunktionen  $\phi_E$  gleich sind. Wenn wir mittels  $a_Q$  eine Matrix bzgl. der Basisfunktionen  $\phi_E$  mit dem bekannten Muster aus dem Galerkinverfahren aufstellen, ergibt sich eine Diagonalmatrix.

Es ist legitim und sinnvoll mit der im Vergleich zur Bilinearform  $a$  einfacheren Form  $a_Q$  weiterzuarbeiten, was der folgende Satz besagt.

**Satz 4.8.** *Die zu  $a_Q$  assoziierte Energienorm*

$$\|v\|_Q := a_Q(v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in \mathcal{Q}_h$$

*ist äquivalent zur Energienorm  $a(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}} = \|\cdot\|$ , d.h. es gibt Konstanten  $c_1, c_2$  (die insbesondere nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängen), so dass*

$$c_1 \|v\| \leq \|v\|_Q \leq c_2 \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_h.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt aus Theorem 4.1 bzw. Bemerkung 4.3 in [HK92] zusammen mit dem Lemma auf Seite 14 in [DLY89].  $\square$

Deshalb führen wir die approximierte Energie

$$\mathcal{I}_Q(v) := \frac{1}{2} a_Q(v, v) - \rho_S(v), \quad v \in \mathcal{Q}_h \quad (4.6)$$

ein, das damit verbundene Defektproblem ist allerdings noch durch die Nebenbedingung aus  $\mathcal{A}_Q$  mit  $\mathcal{S}_h$  gekoppelt und daher noch nicht alleine auf die Raumerweiterung  $\mathcal{V}_h$  bezogen. Als Abhilfe ignorieren wir einfach die linearen Beiträge in  $\mathcal{A}_Q$  und führen eine echte Teilmenge

$$\mathcal{A}_V := \{v \in \mathcal{V}_h \mid v(x_E) \geq \psi(x_E) - u_S(x_E) \forall E \in \mathcal{E}\} \quad (4.7)$$

von  $\mathcal{A}_Q$  ein. Zusammen mit (4.6) und (4.7) erhalten wir dann das lokale diskrete Defektproblem

$$\varepsilon_V \in \mathcal{A}_V : \quad \mathcal{I}_Q(\varepsilon_V) \leq \mathcal{I}_Q(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}_V \quad (4.8)$$

bzw. die dazu äquivalente Variationsungleichung

$$\varepsilon_V \in \mathcal{A}_V : \quad a_Q(\varepsilon_V, v - \varepsilon_V) \geq \rho_S(v - \varepsilon_V) \quad \forall v \in \mathcal{A}_V. \quad (4.9)$$

**Bemerkung 4.9.** (a) Da  $\psi$  stetig stückweise linear ist und somit  $u_S \geq \psi$  gilt, folgt  $0 \in \mathcal{A}_V$ . Damit ist auch hier die gewünschte Lösung für  $\varepsilon_V$  in  $\mathcal{A}_V$  enthalten

(b) Auch für  $\mathcal{A}_V$  lässt sich mit analogem Vorgehen zu Lemma 3.1 die Konvexität zeigen.

**Lemma 4.10.** *Das Energiefunktional  $\mathcal{I}_Q$  ist konvex.*

*Beweis.* Da  $a$  eine stetige koerzive Bilinearform, werden aufgrund der Konstruktion von  $a_Q$  diese Eigenschaften auch auf  $a_Q$  übertragen. Weiterhin ist leicht zu überprüfen, dass  $\rho_S$  eine stetige Linearform ist. Dann folgt aus Lemma 2.10 direkt die Behauptung.  $\square$

Das lokale diskrete Defektproblem (4.9) ist sogar exakt lösbar. Die Lösung des Problems gibt uns der nächste Satz.

**Satz 4.11.** *Die Lösung von (4.8) bzw. (4.9) ist explizit gegeben durch*

$$\varepsilon_{\mathcal{V}}(x_E) = \frac{\max\{-d_E, \rho_E\}}{\|\phi_E\|} \quad (4.10)$$

wobei

$$d_E = (u_S(x_E) - \psi(x_E))\|\phi_E\| \geq 0, \quad \rho_E = \frac{\rho_S(\phi_E)}{\|\phi_E\|}. \quad (4.11)$$

*Beweis.* Es sei  $M = |\mathcal{E}|$  die Anzahl der Kanten. Zunächst berechnen wir zur besseren Übersicht  $\varepsilon_{\mathcal{V}}(x_E)$  konkret, d.h.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{V}}(x_E) &= \frac{\max\{-d_E, \rho_E\}}{\|\phi_E\|} \\ &= \frac{\max\left\{(\psi(x_E) - u_S(x_E))\|\phi_E\|, \frac{\rho_S(\phi_E)}{\|\phi_E\|}\right\}}{\|\phi_E\|} \\ &= \max\left\{\psi(x_E) - u_S(x_E), \frac{\rho_S(\phi_E)}{\|\phi_E\|^2}\right\} \\ &= \max\left\{\psi(x_E) - u_S(x_E), \frac{1}{\|\phi_E\|^2}((f, \phi_E) - a(u_S, \phi_E))\right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Da  $\varepsilon_{\mathcal{V}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \varepsilon_{\mathcal{V}}(x_E) \phi_E$  ist, können wir (4.8) bzgl. der Basis  $\{\phi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  von  $\mathcal{V}_h$  diskret schreiben als

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M} \frac{1}{2} \mathbf{v}^T D \mathbf{v} - \mathbf{g}^T \mathbf{v} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{v} \geq \boldsymbol{\psi} - \mathbf{u}_S,$$

wobei  $\mathbf{v} = [\varepsilon_{\mathcal{V}}(x_{E_i})]_{1 \leq i \leq M}$ ,  $D = \text{diag}(a(\phi_{E_1}, \phi_{E_1}), \dots, a(\phi_{E_M}, \phi_{E_M}))$ ,  $\mathbf{g} = [(f, \phi_{E_i}) - a(u_S, \phi_{E_i})]_{1 \leq i \leq M}$ ,  $\boldsymbol{\psi} = [\psi(x_{E_i})]_{1 \leq i \leq M}$  und  $\mathbf{u}_S = [u_S(x_{E_i})]_{1 \leq i \leq M}$ . Da  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$  und  $\mathcal{I}_Q$  konvex sind, existiert ein Minimum  $\mathbf{v}^* \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$  von  $\mathcal{I}_Q$ , das die KKT-Bedingungen erfüllt. Damit gilt

$$D\mathbf{v} - \mathbf{g} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (4.13a)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (4.13b)$$

$$\mathbf{v} \geq \boldsymbol{\psi} - \mathbf{u}_S, \quad (4.13c)$$

$$\lambda_i (\mathbf{v} - \boldsymbol{\psi} + \mathbf{u}_S)_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (4.13d)$$

Es sei  $k \in \{1, \dots, M\}$  beliebig.

Fall 1: Gilt  $\lambda_k = 0$ , so folgt aus (4.13a)

$$\varepsilon_{\mathcal{V}}(x_{E_k}) = v_k = \frac{g_k}{a(\phi_{E_k}, \phi_{E_k})} = \frac{1}{\|\phi_{E_k}\|^2} ((f, \phi_{E_k}) - a(u_{\mathcal{S}}, \phi_{E_k})).$$

Fall 2: Gilt  $\lambda_k \neq 0$ , dann folgt wegen (4.13d)

$$\varepsilon_{\mathcal{V}}(x_{E_k}) = v_k = (\boldsymbol{\psi} - \mathbf{u}_{\mathcal{S}})_k = \psi(x_{E_k}) - u_{\mathcal{S}}(x_{E_k}).$$

Insgesamt folgt mit (4.13c) und (4.12) die Behauptung.  $\square$

Als a posteriori Fehlerschätzer werden wir im Folgenden

$$-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}}) = -\frac{1}{2}a_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}}, \varepsilon_{\mathcal{V}}) + \rho_{\mathcal{S}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$$

betrachten und zeigen, dass dieser äquivalent zum Fehler im Funktional  $J(u_{\mathcal{S}}) - J(u)$  ist (vgl. Kapitel 4.1.4 und 4.1.5). Zunächst wollen wir aber eine Einführung der lokalen Anteile des Fehlerschätzers  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  bieten.

#### 4.1.2 Lokaler Anteil des Fehlerschätzers

*Notation.* (a) Wir schreiben im Folgenden „ $\lesssim$ “ statt „ $\leq C$ “, wenn die Konstante  $C$  nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt.

(b) Weiter schreiben wir „ $A \approx B$ “ für „ $A \lesssim B$ “ und „ $B \lesssim A$ “.

Um die lokalen Anteile des Fehlerschätzers herzuleiten, zeigen wir zunächst ein paar Eigenschaften der Fehlerfunktion  $e = u - u_{\mathcal{S}}$ .

**Lemma 4.12.** *Die Fehlerfunktion  $e = u - u_{\mathcal{S}}$  erfüllt die Ungleichungen*

$$\frac{1}{2}\|e\|^2 \leq \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{S}}(e) \leq -\mathcal{I}(e) \leq \rho_{\mathcal{S}}(e). \quad (4.14)$$

*Beweis.* Wir erinnern uns, dass

$$-\mathcal{I}(e) := -\frac{1}{2} \underbrace{a(e, e)}_{\geq 0} + \rho_{\mathcal{S}}(e) \leq \rho_{\mathcal{S}}(e),$$

da  $a$  koerziv ist. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} -\mathcal{I}(e) &= -\frac{1}{2}a(e, e) + \rho_{\mathcal{S}}(e) \\ &= -\frac{1}{2}a(u - u_{\mathcal{S}}, e) + \rho_{\mathcal{S}}(e) \\ &= -\frac{1}{2}a(u, e) \underbrace{\frac{1}{2}a(u_{\mathcal{S}}, e) - \frac{1}{2}(f, e) + \frac{1}{2}(f, e)}_{=-\frac{1}{2}\rho_{\mathcal{S}}(e)} + \rho_{\mathcal{S}}(e) \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{(a(u, u - u_{\mathcal{S}}) - (f, u - u_{\mathcal{S}}))}_{\leq 0} + \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{S}}(e) \geq \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{S}}(e). \end{aligned}$$

Es bleibt also die erste Ungleichung von (4.14) zu zeigen. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho_S(e) &= \frac{1}{2}(f, e) - \frac{1}{2}a(u_S, e) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{(f, u - u_S) - a(u, u - u_S)}_{\geq 0} + a(u - u_S, e)) \\ &\geq \frac{1}{2}a(u - u_S, e) = \frac{1}{2}a(e, e) = \frac{1}{2}\|e\|^2 \end{aligned}$$

gilt, womit (4.14) insgesamt bewiesen ist.  $\square$

**Korollar 4.13.** *Für die Lösungen  $e_Q, \varepsilon_V$  von (4.5) und (4.9) gilt*

$$\frac{1}{2}\|e_Q\|^2 \leq \frac{1}{2}\rho_S(e_Q) \leq -\mathcal{I}_Q(e_Q) \leq \rho_S(e_Q), \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{2}\|\varepsilon_V\|_Q^2 \leq \frac{1}{2}\rho_S(\varepsilon_V) \leq -\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V) \leq \rho_S(\varepsilon_V). \quad (4.16)$$

*Beweis.* Da  $e_Q$  und  $\varepsilon_V$  Lösungen der Variationsungleichungen (4.5) und (4.9) sind, folgt die Behauptung analog zum Beweis von Lemma 4.12.  $\square$

Wegen (4.16) ist also  $\rho_S(\varepsilon_V)$  äquivalent zum Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  und kann daher als Fehlerindikator für  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  verwendet werden, denn wenn wir  $\rho_S$  verkleinern, so wird auch  $-\mathcal{I}_Q$  kleiner. In Kapitel 4.1.4 und 4.1.5 werden wir dann die Äquivalenz von  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  zum exakten Fehler in den Funktionalen  $J(u_S) - J(u) = -\mathcal{I}(e)$  zeigen.

Aus Lemma 4.12 folgt analog, dass der Fehler  $J(u_S) - J(u)$  äquivalent zu  $\rho_S(e)$  ist. Daher werden wir die lokalen Anteile des Fehlerschätzers mittels  $\rho_S(\varepsilon_V)$  berechnen. Es sei  $u_S$  die Lösung von (3.12), dann gilt für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  die Gleichung  $\Delta u_S = 0$ , da  $u_S$  auf jedem  $T$  linear ist. Mit  $\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  berechnen wir daher für alle  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \rho_S(v) &= (f, v) - a(u_S, v) = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_S \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_S \nabla v \, dT \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\partial T} v \partial_{\mathbf{n}} u_S \, ds - \int_T \underbrace{\Delta u_S}_{=0} v \, dT \right) \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v \partial_{\mathbf{n}} u_S \, ds, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei im vorletzten Schritt die 1. Green'sche Formel angewendet wurde und  $\mathbf{n}$  die äußere Einheitsnormale von einem Dreieck  $T$  bezeichnet.

Betrachten wir zwei beliebige Dreiecke  $T_1, T_2$  wie in Abbildung 4.2, wobei  $\mathbf{n}$  hierbei die Einheitsnormale, die von  $T_1$  nach  $T_2$  zeigt, bezeichnet, so können wir die Summe aus (4.17) bzgl. der Menge der Kanten  $\mathcal{E}$  darstellen, da der Rand  $\partial T = E_1 \cup E_2 \cup E_3$  für jedes  $T$  disjunkt in seine Kantenstücke aufgeteilt werden kann.

Dabei sei  $E$  nun die Kante, die  $T_1$  und  $T_2$  zugleich enthalten, d.h.  $\mathbf{n}$  steht rechtwinklig auf  $E$ . Dann gilt, dass die Richtungsableitung  $\partial_{\mathbf{n}} u_{\mathcal{S}}|_{T_2}$  negativ ist bzgl. (4.17) wegen der negativen Orientierung von  $\mathbf{n}$  bzgl.  $T_2$ .

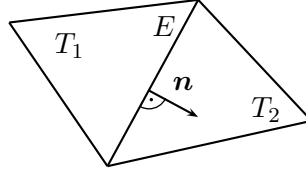


Abbildung 4.2: Dreiecke  $T_1$  und  $T_2$  mit Einheitsnormalen  $\mathbf{n}$

Dies in (4.17) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathcal{S}}(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v \partial_{\mathbf{n}} u_{\mathcal{S}} \, ds \\
 &= \int_{\Omega} f v \, dx - \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E v \underbrace{(\partial_{\mathbf{n}} u_{\mathcal{S}}|_{T_1} - \partial_{\mathbf{n}} u_{\mathcal{S}}|_{T_2})}_{=: -j_E} \, ds \\
 &= \int_{\Omega} f v \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E j_E v \, ds.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Da für die nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_p \mid p \in \mathcal{N} \cap \Omega\}$  von  $\mathcal{S}_h$  die Partition der Eins gilt, also

$$\sum_{p \in \mathcal{N}} \phi_p = 1 \text{ auf ganz } \Omega,$$

lässt sich  $\rho_{\mathcal{S}}$  wie folgt in lokale Anteile aufteilen können:

$$\rho_p(v) := \rho_{\mathcal{S}}(v \phi_p), \quad v \in H^1(\Omega), p \in \mathcal{N}. \tag{4.19}$$

In Lemma 4.14 werden wir zeigen, dass wir den in (4.19) definierten lokalen Anteil von  $\rho_{\mathcal{S}}$  leicht berechnen können, und mit der Aussage aus Korollar 4.15, dass sich der Fehlerindikator  $\rho_{\mathcal{S}}$  auch eindeutig in die lokalen Anteile  $\rho_p$  zerlegen lässt.

**Lemma 4.14.** *Für  $\rho_p$  gilt*

$$\rho_p(v) = \int_{\omega_p} f v \phi_p \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \int_E j_E v \phi_p \, ds, \quad v \in H^1(\Omega)$$

mit  $\omega_p := \text{supp } \phi_p$  und  $\mathcal{E}_p := \{E \in \mathcal{E} \mid E \ni p\}$ , d.h. die Menge der Kanten, in denen  $p$  enthalten ist.

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

*Beweis.* Wir rechnen einfach mit der Definition (4.19) und (4.18) nach, dass für ein beliebiges  $v \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned}\rho_p(v) &= \rho_S(v\phi_p) = \int_{\Omega} f v \phi_p dx + \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E j_E v \phi_p ds \\ &= \int_{\omega_p} f v \phi_p dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \int_E j_E v \phi_p ds,\end{aligned}$$

da  $\phi_p \equiv 0$  auf  $\mathcal{O} := \overline{\Omega \setminus \omega_p}$  und damit auch auf  $\mathcal{F} := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_p$ , da  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$  (vgl. Abbildung 4.3).

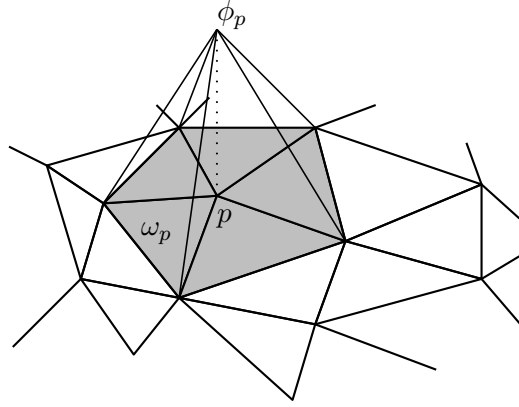


Abbildung 4.3: Darstellung von  $\omega_p$  (grau) und  $\mathcal{E}_p$  (abgehende Kanten von  $p$ ) für ein beliebiges  $\phi_p$

□

**Korollar 4.15.** Der Indikator  $\rho_S$  lässt sich schreiben als

$$\rho_S = \sum_{p \in \mathcal{N}} \rho_p. \quad (4.20)$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 4.14 zusammen mit

$$\Omega = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} \omega_p, \quad \mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} \mathcal{E}_p \quad \text{und} \quad \sum_{p \in \mathcal{N}} \phi_p = 1$$

durch einfaches Nachrechnen.

□

Im unbeschränkten Fall gilt  $\rho_S = 0 \Leftrightarrow e = 0$ , denn zu  $\rho_S = 0$  ist

$$a(e, v) = \rho_S(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

äquivalent. Da  $e \in \mathcal{V}$  ist, folgt wegen der Galerkin-Orthogonalität, dass  $e = 0$  sein muss. Die Umkehrung gilt offensichtlich auch.



Wie wir schon weiter oben beschrieben haben, gilt die Galerkin-Orthogonalität bei Variationsungleichungen gilt im Allgemeinen nicht. Aber aus Lemma 4.12 folgt allgemeiner, falls  $\rho_S(v) \leq 0$  für alle  $v \in \mathcal{A}$  gilt,

$$\frac{1}{2}\|e\|^2 \leq \rho_S(e) \leq 0 \implies \|e\| = 0 \implies e = 0,$$

d.h. aus  $\rho_S = 0$  folgt, dass  $e = 0$  ist. Man kann nun diese globale Eigenschaft auch auf die lokalen Anteile übertragen. Mit  $u_S$  als Lösung von (3.12) gilt für alle  $p \in \mathcal{N} \cap \Omega$ , dass  $v = u_S + \phi_p \geq \psi$ , d.h.  $v \in K_h$ . Daraus folgt mit Einsetzen von  $v$  in (3.12)

$$\begin{aligned} a(u_S, u_S + \phi_p - u_S) &\geq (f, u_S + \phi_p - u_S) \\ \iff 0 &\geq (f, \phi_p) - a(u_S, \phi_p) = \rho_S(\phi_p). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dies bedeutet, dass die lineare Approximation des Fehlers  $e$  gleich Null ist. Falls an einem Punkt  $p$  kein Kontakt zwischen  $u_S$  und  $\psi$  vorliegt, also  $u_S(p) > \psi(p)$  ist, dann können wir ein  $\alpha > 0$  hinreichend klein wählen, sodass  $v = u_S - \alpha\phi_p \in K_h$  liegt. Dann folgt analog durch Einsetzen von  $v$  in (3.12)

$$\begin{aligned} 0 &\geq (f, -\alpha\phi_p) - a(u_S, -\alpha\phi_p) \\ \iff 0 &\leq (f, \phi_p) - a(u_S, \phi_p) = \rho_S(\phi_p) \stackrel{(4.21)}{\leq} 0 \end{aligned}$$

und damit gilt  $\rho_S(\phi_p) = 0$ . Zusammen ergeben sich die (KKT-)Bedingungen

$$\rho_S(\phi_p) \leq 0, \quad \psi(p) - u_S(p) \leq 0, \quad \rho_S(\phi_p)(\psi(p) - u_S(p)) = 0. \quad (4.22)$$

Dies berechtigt zur Definition von Kontakt- und Nichtkontaktpunkten.

**Definition 4.16.** Wir definieren die Mengen von *inneren Kontaktknoten*  $\mathcal{N}^0$  und *Nichtkontaktknoten*  $\mathcal{N}^+$  durch

$$\mathcal{N}^0 := \{p \in \mathcal{N} \cap \Omega \mid u_S(p) = \psi(p)\}, \quad \mathcal{N}^+ := \{p \in \mathcal{N} \cap \Omega \mid u_S(p) > \psi(p)\}.$$

**Bemerkung 4.17.** Die Bedingungen (4.22) können wir auch auf den lokalen Anteil  $\rho_p$  übertragen, damit ergibt sich für alle  $p \in \mathcal{N} \cap \Omega$

$$\rho_p(1) \leq 0, \quad (4.23a)$$

$$u_S(p) > \psi(p) \implies \rho_p(1) = 0, \quad (4.23b)$$

denn  $\rho_p(1) = \rho_S(\phi_p)$ .

Damit ist also die Approximation von  $e$  über  $\mathcal{S}_h$  gleich Null, wenn die lokalen Anteile von  $\rho_S$  kleiner gleich Null sind.

### 4.1.3 Oszillationsterme

In Kapitel 4.1.4 werden wir zeigen, dass  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  eine obere Schranke von  $-\mathcal{I}(e)$  bis auf Terme höherer Ordnung bereitstellen, d.h. Terme, die nicht in  $\mathcal{V}$  enthalten sind. Diese sogenannten *Oszillationsterme* wollen wir daher in diesem Kapitel anschaulich einführen (ohne präzise Beweise).

Wie wir später auch in den numerischen Beispielen sehen werden, bringt eine Verkleinerung der Oszillation auch eine Verringerung des Fehlers mit sich. Daher ist es von Interesse die Oszillationsterme einfach berechnen zu können und auch mit in die adaptive Verfeinerung einzubeziehen.

Wir werden zwei Arten von Oszillationen betrachten und daher die Gesamtoszillation in diese Anteile aufteilen.

$$\text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f) := \left( \text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi)^2 + \text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

**Bemerkung 4.18.** In [ZVKG11] werden die Oszillationsterme (4.24) durch

$$\text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f) = \text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi) + \text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$$

eingeführt. Wir wählen hier absichtlich eine leicht veränderte Darstellung, da diese für die spätere Implementierung bzgl. der lokalen Anteile der Oszillationen von Vorteil ist.

Im unbeschränkten Fall ist die Oszillation nur von  $f$  abhängig (vgl. [MNS00]) und daher wird dabei von „Daten-Oszillation“ gesprochen.

Der Oszillationsterm  $\text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi)$  ist ein Maß für die Oszillation zwischen dem Hindernis  $\psi$  und der Galerkin-Lösung  $u_{\mathcal{S}}$ , d.h.

$$\text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi) := \left( \sum_{p \in \mathcal{N}^{0+}} \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0, \omega_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $\mathcal{N}^{0+} := \{p \in \mathcal{N}^0 \mid u_{\mathcal{S}} > \psi \text{ in } \omega_p \setminus \{p\}\}$  ist, also die Menge der *isolierten Kontaktknoten*, d.h.  $u_{\mathcal{S}}$  ist auf der Menge  $\omega_p$  nur im Punkt  $p$  mit  $\psi$  in Kontakt. Anschaulich stellt  $\text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi)$  deshalb ein Maß für die Hindernisoszillation dar, weil wegen der Linearität von  $u_{\mathcal{S}}, \psi$  folgt, dass eine größere Differenz zwischen  $\psi$  und  $u_{\mathcal{S}}$  auch einen größeren Gradienten  $\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})$  impliziert und damit auch eine größere Oszillation  $\text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi)$ .

Das kontinuierliche Gegenstück zu  $\mathcal{N}^{0+}$  ist die Menge der *isolierten Kontaktpunkte*  $x_c$ , die aufgrund von  $u - \psi > 0$  für alle  $x \in \mathcal{U}(x_c, \varepsilon) \subset \Omega$  mit  $u(x_c) = \psi(x_c)$  alle strikten Minima  $x_c \in \Omega$  von  $u - \psi$  enthält. Daraus folgt, dass  $(\nabla u - \nabla \psi) = 0$  ist für alle isolierten Kontaktpunkte, wenn  $u, \psi$  hinreichend glatt sind.

Stellt nun  $\psi$  nur eine lineare Approximation an ein hinreichend glattes Hindernis dar, so folgt mit den Aussagen aus Theorem 3.16 und Theorem 2 in [Zha07], dass wegen der Konvergenz der diskretisierten Ränder für einen

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

isolierter Kontaktknoten  $p \in \mathcal{N}^{0+}$ , der bei Verfeinerung bestehen bleibt, ein für die exakte Lösung  $u$  korrespondierender Kontaktpunkt  $\tilde{p}$  existiert und es gilt

$$\bigcup_{p \in \mathcal{N}^{0+}} \omega_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} \tilde{p}.$$

Sind  $u$  und  $\psi$  also hinreichend glatt, so verschwindet der Oszillationsterm  $\text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi)$  für  $h \rightarrow 0$ .

Der Oszillationsterm  $\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  ist auf zwei Mengen definiert:

$$\mathcal{N}^{++} := \{p \in \mathcal{N}^+ \mid \rho_E \geq -d_E \forall E \in \mathcal{E}_p\}, \quad (4.25)$$

d.h. alle Knoten ohne Kontakt, in denen der Fehler  $\varepsilon_{\mathcal{V}}$  nicht in Kontakt mit dem Hindernis aus  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$  steht (wie in Beweis von Satz 4.11 ersichtlich) und

$$\mathcal{N}^{0-} := \{p \in \mathcal{N}^0 \mid u_{\mathcal{S}} = \psi, f \leq 0 \text{ auf } \omega_p, j_E \leq 0 \forall E \in \mathcal{E}_p\}, \quad (4.26)$$

d.h. die Kontaktknoten mit vollem Kontakt, sodass die Kraft  $f$  eine Drucklast ist und negativer Normalenfluss  $j_E$  herrscht (vgl. auch [SV07] Gleichung (2.11)).

Aus der Nebenbedingung von  $\mathcal{N}^{0-}$  folgt

$$0 \geq f + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} j_E$$

Durch Multiplikation mit geeigneten Testfunktionen  $v$  und Integration über  $\omega_p$  ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\omega_p} f v \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \int_E j_E v \, ds \\ &= \int_{\omega_p} f v \, dx - \int_{\omega_p} \underbrace{\nabla u_{\mathcal{S}}}_{=\nabla \psi} \nabla v \, dx \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\int_{\omega_p} \nabla \psi \nabla v \, dx \geq \int_{\omega_p} f v \, dx. \quad (4.27)$$

Es gilt also mit (4.27) laut Satz 3.4, dass  $-\Delta \psi - f \geq 0$  auf  $\omega_p$  im distributionellem Sinne (vgl. auch [Wal11] Kapitel 3) ist. Dies ist laut Satz 3.4 auch notwendig, damit  $u = \psi$  auf  $\omega_p$  gilt.

Mit den Mengen (4.25) und (4.26) ist der Oszillationsterm  $\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  definiert als

$$\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f) := \left( \sum_{p \in \mathcal{N}^{++}} h_p^2 \|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++})} h_p^2 \|f\|_{0, \omega_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

wobei  $h_p := \max_{E \in \mathcal{E}_p} |E|$  für jedes  $p \in \mathcal{N}$  ist,  $h_p$  ist ein Maß für den Durchmesser von  $\omega_p$ , und  $\bar{f}_p$  den Mittelwert von  $f$  über  $\omega_p$  bezeichne, also

$$\bar{f}_p = \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} f \, dx.$$

Anschaulich kann man die Summanden der ersten Summe als Varianz der Last  $f$  auf  $\omega_p$  interpretieren. Da wir in der Variationsrechnung ein gemitteltes Problem betrachten, ist die erste Summe also ein Maß dafür, auf welchen Teilen von  $\Omega$  die wirkliche Last  $f$  um einen gemittelten Wert oszilliert. Dies impliziert bei starker Oszillation anschaulich, dass eine Verfeinerung in solchen Gebieten, die Lösung genauer machen würde.

In der Menge  $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++})$  sind die inneren Knoten, die keinen vollen Kontakt  $u_{\mathcal{S}} = \psi$  auf  $\omega_p$  haben und für die die Lösung  $\varepsilon_{\mathcal{V}}$  des lokalen Defektproblems keinen Kontakt mit der Nebenbedingung von  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$  hat. Man beachte also, dass in  $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++})$  nur die Kontaktknoten fehlen, die vollen Kontakt haben, und die Nichtkontaktknoten, für die  $\varepsilon_{\mathcal{V}}$  in Kontakt mit dem Hindernis aus  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$  stehen. Diese Menge beschreibt gerade die Randpunkte am Hindernis und  $\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  enthält nur Anteile aus Knoten ohne vollen Kontakt, da für diese die Varianz bzgl. des Lastvektors  $f$  irrelevant wäre, denn hier würde nach Verfeinerung immer noch voller Kontakt herrschen.

*Bemerkung.* Die Oszillationsterme können leicht berechnet bzw. implementiert werden, wie man in Kapitel 5 oder auch Anhang D nachvollziehen kann.

Im unbeschränkten Fall, also  $\psi = -\infty$ , ist  $\varepsilon_{\mathcal{V}}$  nicht im Kontakt mit dem Hindernis für alle Knoten aus  $\mathcal{N}$  und damit gilt  $\mathcal{N}^{++} = \mathcal{N} \cap \Omega$ . Wir rechnen nach, dass dann für die Menge der Randpunkte gilt:

$$\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++}) = \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N} \cap \Omega) = \mathcal{N} \cap \partial\Omega.$$

Also erhalten wir für den Oszillationsterm  $\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  die Form

$$\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f) = \left( \sum_{p \in \mathcal{N} \cap \Omega} h_p^2 \|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N} \cap \partial\Omega} h_p^2 \|f\|_{0, \omega_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

was der Daten-Oszillation aus dem unbeschränkten Fall entspricht. Damit ist der zweite Oszillationsterm aus (4.24) also eine Verallgemeinerung des unbeschränkten Falles. Wenn also der Teil ohne Kontakt bekannt wäre, dann wäre der beschränkte Fall auf dieser Menge von Knoten äquivalent zu einem unbeschränkten Dirichlet-Problem.

#### 4.1.4 Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers

Wir werden in diesem Kapitel eine obere Schranke für den Fehler im Energiefunktional  $-\mathcal{I}(e)$ , die vom hierarchischen Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  abhängt, herleiten. Hierfür sind zunächst Eigenschaften für die Interpolation von  $e$  auf  $\varepsilon_V$  notwendig.

Die Reduktion des Fehlers  $e = u - u_S \in H_0^1(\Omega)$  auf den approximierten Fehler  $\varepsilon_V \in \mathcal{V}$  erhalten wir durch lokale Projektionen für jedes  $p \in \mathcal{N}$  mit

$$\pi_p : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{Q}_p = \text{span}\{\phi_p\} \cup \mathcal{V}_p, \quad \mathcal{V}_p = \text{span}\{\phi_E \mid E \in \mathcal{E}_p\}.$$

Die lokalen Projektionen  $\pi_p$  sind für jedes  $v \in H^1(\Omega)$  aus Dimensionsgründen ( $\dim(\mathcal{Q}_p) = p + 1$ ) eindeutig bestimmt durch

$$\int_E \pi_p v \, ds = \int_E v \, ds \quad \forall E \in \mathcal{E}_p \text{ und } \begin{cases} \int_{\omega_p} \pi_p v \, dx = \int_{\omega_p} v \, dx & , p \in \mathcal{N}^{++} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Zunächst zeigen wir ein Resultat, das uns die Koordinaten für das Bild der lokalen Projektion  $\pi_p$  in einer Basis von  $\mathcal{Q}_p$  liefert.

**Lemma 4.19.** *Es sei  $\pi_p$  die oben beschriebene Projektion. Dann gelten für die Koordinaten bzgl. der Basis  $\{\phi_p\} \cup \{\phi_E \mid E \in \mathcal{E}_p\}$  von*

$$\pi_p v = \alpha_p(v) \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(v) \phi_E$$

die Beziehungen

$$\alpha_p(v) = \begin{cases} \frac{c_p(v)}{c_p(\phi_p)} & , p \in \mathcal{N}^{++} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.29a)$$

$$\alpha_E(v) = \frac{\int_E v \, ds - \alpha_p(v) \int_E \phi_p \, ds}{\int_E \phi_E \, ds}, \quad (4.29b)$$

wobei

$$c_p(v) = \int_{\omega_p} v \, dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \left( \int_E v \, ds \right) \left( \int_{\omega_p} \phi_E \, dx \right) \left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1}$$

Insbesondere gilt  $c_p(\phi_p) = -\frac{1}{6} |\omega_p|$ .

*Beweis.* Für eine bessere Übersicht im Beweis werden wir die Differentialformen  $dx$  und  $ds$  weglassen. Es sei  $v \in H^1(\Omega)$  beliebig. Dann gilt für jede Kante  $E \in \mathcal{E}_p$  mit

$$\pi_p v = \alpha_p(v) \phi_p + \alpha_E(v) \phi_E \in \mathcal{Q}_p$$

nach (4.28), dass

$$\begin{aligned} \int_E v &= \int_E \pi_p v = \int_E \alpha_p(v) \phi_p + \alpha_E(v) \phi_E \\ \implies \alpha_E(v) &= \left( \int_E v - \alpha_p(v) \int_E \phi_p \right) \left( \int_E \phi_E \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wenn  $p \notin \mathcal{N}^{++}$  ist, so gilt  $\pi_p v \in \mathcal{V}_p = \text{span}\{\phi_E \mid E \in \mathcal{E}_p\}$ , d.h.  $\alpha_p(v) = 0$ .

Es sei nun also  $p \in \mathcal{N}^{++}$ . Dann folgt aus der zweiten Eigenschaft von (4.28) und (4.30) für  $\pi_p v = \alpha_p(v) \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(v) \phi_E \in \mathcal{Q}_p$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_p} v &= \int_{\omega_p} \pi_p v = \int_{\omega_p} \alpha_p(v) \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(v) \phi_E \\ &= \alpha_p(v) \int_{\omega_p} \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(v) \int_{\omega_p} \phi_E \\ &= \alpha_p(v) \int_{\omega_p} \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \left( \int_E v - \alpha_p(v) \int_E \phi_p \right) \left( \int_E \phi_E \right)^{-1} \left( \int_{\omega_p} \phi_E \right) \\ &= \alpha_p(v) \underbrace{\left( \int_{\omega_p} \phi_p - \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \left( \int_E \phi_p \right) \left( \int_{\omega_p} \phi_E \right) \left( \int_E \phi_E \right)^{-1} \right)}_{=c_p(\phi_p)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \left( \int_E v \right) \left( \int_{\omega_p} \phi_E \right) \left( \int_E \phi_E \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Nach dem Umformen nach  $\alpha_p(v)$  ergibt sich dann

$$\alpha_p(v) = \frac{c_p(v)}{c_p(\phi_p)}$$

mit dem oben definierten  $c_p(\cdot)$ .

Es bleibt also zu zeigen, dass  $c_p(\phi_p) = -\frac{1}{6} |\omega_p|$ . Hierfür betrachten wir die einzelnen Summanden von  $c_p(\phi_p)$ . Zunächst berechnet das Integral von  $\phi_p$  über  $\omega_p$  das Volumen der von  $\phi_p$  erzeugten Pyramide mit Grundfläche  $|\omega_p|$ , d.h.

$$\int_{\omega_p} \phi_p = \frac{1}{3} |\omega_p|. \quad (4.31)$$

Weiter ist  $\phi_p$  auf jeder Kante  $E \in \mathcal{E}_p$  eine von 1 zu 0 abfallende Gerade und damit ist das Integral über  $E$  gerade der Flächeninhalt vom darüber liegenden Dreieck, also

$$\int_E \phi_p = \frac{1}{2} |E|. \quad (4.32)$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Die letzten beiden Integrale berechnen wir über die Referenzelemente in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^2$  für das Kurven- bzw. Flächenintegral. Die Funktion  $\phi_E$  über eine Kante  $E$  ist eine nach unten geöffnete Parabel. Auf dem Referenzelement  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$  ist dies die Funktion

$$\hat{\phi}_E = 1 - \xi^2$$

und mit einer affinen Transformation  $s : [-1, 1] \rightarrow [a, b] = E$ ,  $s(\xi) = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}$  lässt sich das Referenzelement auf das Element  $E$  abbilden. Damit ergibt sich mit dem Transformationssatz der Integration

$$\int_E \phi_E = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_E = \frac{1}{2} |E| \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} |E|. \quad (4.33)$$

Der letzte Fall ist komplizierter zu beschreiben. Zunächst sei erwähnt, dass  $\text{supp}(\phi_E) = T_i \cup T_j$ ,  $T_i, T_j \subset \omega_p$ ,  $i \neq j$  gilt,  $\phi_E$  also nur auf zwei Dreiecken, die in  $\omega_p$  enthalten sind, ungleich Null ist. Damit wird für jede Kante  $E \in \mathcal{E}_p$  über jedes Dreieck  $T \subset \omega_p$  genau zweimal integriert.

Auf dem Referenzelement

$$\hat{T} := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$$

haben wir die drei Bubble-Funktionen

$$\hat{\phi}_{E_1} = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad \hat{\phi}_{E_2} = 4\xi\eta, \quad \hat{\phi}_{E_3} = 4\eta(1 - \xi - \eta),$$

für die man leicht nachrechnen kann, dass

$$\int_{\hat{T}} \hat{\phi}_{E_1} = \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_{E_2} = \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_{E_3} = \frac{1}{6}$$

gilt. Es sei nun  $J_T$  die Jacobi-Determinante bzgl. einer affinen Transformation  $r : \hat{T} \rightarrow T$ , dann gilt nach Transformationssatz mit einem  $T \subset \text{supp}(\phi_E)$

$$\int_T \phi_E = |J_T| \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_E = \frac{1}{6} |J_T|.$$

Weiter rechnen wir nach, dass

$$|T| = \int_T dx = |J_T| \int_{\hat{T}} dx = \frac{1}{2} |J_T| \implies |J_T| = 2 |T|$$

gilt und damit folgt insgesamt zusammen mit (4.31) bis (4.33)

$$\begin{aligned} c_p(\phi_p) &= \int_{\omega_p} \phi_p - \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \left( \int_E \phi_p \right) \left( \int_{\omega_p} \phi_E \right) \left( \int_E \phi_E \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{3} |\omega_p| - 2 \sum_{T \subset \omega_p} \frac{1}{2} |E| \cdot \frac{1}{6} |J_T| \cdot \frac{3}{2} |E|^{-1} \\ &= \frac{1}{3} |\omega_p| - \sum_{T \subset \omega_p} \frac{1}{2} |T| = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) |\omega_p| \\ &= -\frac{1}{6} |\omega_p|. \end{aligned} \quad \square$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Für das zentrale Lemma in diesem Kapitel benötigen wir noch eine Abschätzung für die Koordinaten der lokalen Projektionen.

**Lemma 4.20.** *Die Koeffizienten in (4.29) erfüllen die Eigenschaft*

$$\max_{\mathcal{Q} \in \{p\} \cup \mathcal{E}_p} |\alpha_{\mathcal{Q}}(v)| \lesssim h_p^{-1}(\|v\|_{0,\omega_p} + h_p \|\nabla v\|_{0,\omega_p}) \quad (4.34)$$

und  $\pi_p$  ist stabil im Sinne von

$$\|\pi_p v\|_{0,\omega_p} \lesssim \|v\|_{0,\omega_p} + h_p \|\nabla v\|_{0,\omega_p}. \quad (4.35)$$

Insbesondere gilt, wenn  $p \notin \mathcal{N}^{++}$  ist, dass für  $\alpha_E(v) = (\int_E v ds) (\int_E \phi_E)^{-1}$  die Eigenschaft gilt:

$$\int_E v ds \geq \int_E (\psi - u_{\mathcal{S}}) ds \implies \alpha_E(v) \gtrsim \psi(x_E) - u_{\mathcal{S}}(x_E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_p. \quad (4.36)$$

*Beweis.* Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und einer Anwendung vom Spursatz (s. Theorem A.9) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_p} v dx \right| &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \underbrace{\left( \int_{\omega_p} dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|\omega_p|^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\omega_p} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h_p \|v\|_{0,\omega_p}, \\ \left| \int_E v ds \right| &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \underbrace{\left( \int_E ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|E|^{\frac{1}{2}} \leq h_p^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\left( \int_E v^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|v\|_{0,E}} \stackrel{\text{Spursatz}}{\lesssim} h_p (h_p^{-1} \|v\|_{0,\omega_p} + \|\nabla v\|_{0,\omega_p}). \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 4.19 können wir für  $\phi_p$  und  $\phi_E$  berechnen, dass die Integrale jeweils über  $E$  sowie  $\omega_p$  von den Gebieten und einer weiteren Konstanten abhängen und damit also „ $\approx h_p$ “ sind. Durch Anwendung der Dreiecksungleichung sowie den eben erwähnten Integralen lässt sich damit berechnen, dass

$$|\alpha_p(v)| \lesssim \|v\|_{0,\omega_p} + h_p \|\nabla v\|_{0,\omega_p}$$

gilt. Dies in (4.29b) eingesetzt, ergibt dann wieder unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der endlichen Integrale von  $\phi_p, \phi_E$  sowie der obigen Abschätzungen die Schranke

$$|\alpha_E(v)| \lesssim h_p^{-1}(\|v\|_{0,\omega_p} + h_p \|\nabla v\|_{0,\omega_p})$$

und damit folgt (4.34).

Die Abschätzung (4.35) folgt direkt aus den Abschätzungen von (4.34) zusammen mit der Koordinatendarstellung

$$\pi_p v = \alpha_p(v) \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(v) \phi_E$$



der lokalen Projektion und vorheriger Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Norm  $\|\pi_p v\|_{0,\omega_p}$ .

Es sei  $P \notin \mathcal{N}^{++}$ . Dann gilt wegen (4.29a)  $\alpha_p(v) = 0$  und damit mit (4.29b)

$$\alpha_E(v) = \left( \int_E v \, ds \right) \left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1}.$$

Da  $\psi$  wegen Voraussetzung 4.1 stückweise linear ist, gilt dies auch für  $\psi - u_S$ , d.h. die Funktion stellt eine Gerade über der Kante  $E$  dar. Mit der Mittelpunktsregel der Quadratur (vgl. [Sto99] Kapitel 3) ergibt sich dann also

$$\int_E (\psi - u_S) \, ds = |E| (\psi(x_E) - u_S(x_E)).$$

Wie wir im Beweis von Lemma 4.19 nachgerechnet haben, gilt  $\int_E \phi_E \, ds = \frac{2}{3}|E|$  und dann ist unter der Voraussetzung von (4.36)

$$\begin{aligned} \psi(x_E) - u_S(x_E) &= \frac{3}{2}|E|^{-1} \int_E (\psi - u_S) \, ds \\ &\lesssim \left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1} \left( \int_E v \, ds \right) \\ &= \alpha_E(v). \end{aligned}$$

□

Jetzt haben wir das komplette Werkzeug, um das zentrale Lemma zum Beweis einer oberen Schranke für  $J(u_S) - J(u)$  bzgl.  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  zu zeigen. Da wir gesehen haben, dass  $-\mathcal{I}(e)$  äquivalent zum Fehlerindikator  $\rho_S(e)$  ist, leiten wir für diesen im folgenden Lemma eine obere Schranke her.

**Lemma 4.21.** *Es sei Voraussetzung 4.1 erfüllt. Dann gilt*

$$\rho_S(e) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E| + \text{osc}(u_S, \psi, f)^2 \quad (4.37)$$

mit  $\rho_E$  wie in (4.11),  $\text{osc}(u_S, \psi, f)$  wie in (4.24) und  $\eta_E = |\varepsilon_V(x_E)| \|\phi_E\|$ .

*Beweis.* Die Idee des Beweises beruht auf Gleichung (4.20); damit können wir den Indikator in die lokalen Anteile bzgl. der Punkte  $p \in \mathcal{N}$  aufteilen, d.h.

$$\rho_S(e) = \sum_{p \in \mathcal{N}} \rho_p(e). \quad (4.38)$$

Hierbei ist die Abschätzung der lokalen Anteile  $\rho_p(e)$  abhängig von einer Anwendung der Poincaré-Friedrichsungleichung (Satz 2.13), die auf die *verallgemeinerte Poincaré-Friedrichs-Ungleichung* (vgl. auch [Rud91])

$$\|v - c\|_{0,\omega_p} \lesssim h_p \|\nabla v\|_{0,\omega_p} \quad (4.39)$$

mit einer Konstanten  $c$  und  $v \in H^1(\Omega)$ , so dass  $v = c$  auf einer Menge  $\Gamma \subset \partial\omega_p$  mit einem Maß  $\mu(\Gamma) \neq 0$  gilt, führt. Da (4.39) von  $p \in \mathcal{N}$  abhängt, werden wir sehen, dass die Anwendung von der Poincaré-Friedrich-Ungleichung vom Typ des Knotens  $p$  abhängt. Deshalb betrachten wir die disjunkte Vereinigung

$$\begin{aligned} & \overbrace{\mathcal{N}^{++} \cup (\mathcal{N}^+ \setminus \mathcal{N}^{++})}^{=\mathcal{N}^+} \cup (\mathcal{N} \cap \partial\Omega) \cup \overbrace{(\mathcal{N}^0 \setminus (\mathcal{N}^{0+} \cup \mathcal{N}^{0-})) \cup \mathcal{N}^{0+} \cup \mathcal{N}^{0-}}^{=\mathcal{N}^0} \\ &= \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0 \cup (\mathcal{N} \cap \partial\Omega) = (\mathcal{N} \cap \Omega) \cup (\mathcal{N} \cap \partial\Omega) = \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Wir wollen im Folgenden die in (4.40) aufgeführten Fälle chronologisch abarbeiten.

*Fall 1:* Es sei  $p \in \mathcal{N}^{++}$ . Wir behaupten, dass

$$\rho_p(e) \lesssim \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f - \bar{f}_p\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p} \quad (4.41)$$

gilt, wobei  $\mathcal{E}_p^+ = \{E \in \mathcal{E}_p \mid \rho_E \geq -d_E\}$ . Da  $p \in \mathcal{N}^{++}$  ist, gilt für alle  $E \in \mathcal{E}_p$  die Ungleichung  $\rho_E \geq -d_E$  ist, d.h.  $\mathcal{E}_p^+ = \mathcal{E}_p$ . Wir setzen

$$w = (e - c)\phi_p, \quad c = \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} e \, dx.$$

Da  $\mathcal{N}^{++} \subset \mathcal{N}^+ \cap \Omega$  ist, d.h.  $u_S(p) > \psi(p)$  ist, gilt

$$\rho_p(c) = c \rho_p(1) \stackrel{(4.23b)}{=} c \cdot 0 = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_p(e) &= \rho_p(e) - \rho_p(c) = \rho_p(e - c) \stackrel{\text{Lem. 4.14}}{=} \int_{\omega_p} f w \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \int_E j_E w \, ds \\ &\stackrel{+0}{=} \int_{\omega_p} f \pi_p w \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \underbrace{\int_E j_E \pi_p w \, ds}_{\stackrel{(4.28)}{=} \int_E j_E w \, ds} + \int_{\omega_p} f(w - \pi_p w) \, dx \\ &= \rho_S(\pi_p w) + \int_{\omega_p} f(w - \pi_p w) \, dx - \underbrace{\bar{f}_p \int_{\omega_p} (w - \pi_p w) \, dx}_{=0 \text{ wegen (4.28)}} \\ &= \rho_S(\pi_p w) + \int_{\omega_p} (f - \bar{f}_p)(w - \pi_p w) \, dx \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\| + \|f - \bar{f}_p\|_{0,\omega_p} \|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

wobei im letzten Schritt zusätzlich zur Cauchy-Schwarz-Ungleichung im zweiten Summanden noch angewendet wurde, dass

$$\begin{aligned}
\rho_S(\pi_p w) &= \rho_S \left( \alpha_p(w) \phi_p + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \phi_E \right) \\
&= \alpha_p(w) \underbrace{\rho_S(\phi_p)}_{=\rho_p(1)=0} \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \underbrace{\rho_S(\phi_E)}_{\stackrel{(4.11)}{=} \rho_E \|\phi_E\|} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\|
\end{aligned}$$

ist. Da  $\|\phi_p\|_{\infty, \omega_p} \leq 1$ , gilt mit der Poincaré-Friedrich-Ungleichung (4.39)

$$\|w\|_{0, \omega_p} = \|(e - c)\phi_p\|_{0, \omega_p} \leq \|e - c\|_{0, \omega_p} \lesssim h_p \|\nabla e\|_{0, \omega_p}, \quad (4.43)$$

wobei die erste Ungleichung aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt. Es sei weiterhin darauf hingewiesen, dass  $\|\nabla \phi_p\|_{\infty, \omega_p} \lesssim h_p^{-1}$ , da die Steigung der Hutfunktion nur von der Form von  $\omega_p$  abhängt. Damit erhalten wir dann durch Anwenden von (4.34) für alle  $E \in \mathcal{E}_p$

$$\begin{aligned}
|\alpha_E(w)| &\lesssim h_p^{-1} (\|w\|_{0, \omega_p} + h_p \|\nabla w\|_{0, \omega_p}) \\
&= h_p^{-1} (\|(e - c)\phi_p\|_{0, \omega_p} + h_p \|\nabla((e - c)\phi_p)\|_{0, \omega_p}) \\
&\leq h_p^{-1} (h_p \|\nabla e\|_{0, \omega_p} + h_p \underbrace{\|\nabla(e - c)\phi_p\|_{0, \omega_p}}_{=\nabla e}) \\
&\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|\nabla e\|_{0, \omega_p} + \|\nabla e \phi_p\|_{0, \omega_p} + \|(e - c)\nabla \phi_p\|_{0, \omega_p} \\
&\stackrel{(4.43)}{\lesssim} 2 \|\nabla e\|_{0, \omega_p} + h_p^{-1} \|e - c\|_{0, \omega_p} \lesssim \|\nabla e\|_{0, \omega_p}.
\end{aligned} \quad (4.44)$$

Über das Referenzelement  $\hat{T}$  kann man zeigen, dass

$$\|\phi_E\| = a(\phi_E, \phi_E)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_E \nabla \phi_E \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{8}{3} (|J_{T_1}| + |J_{T_2}|) \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \tilde{c},$$

da die Jacobi-Determinanten  $J_{T_1}, J_{T_2}$  (wobei  $E \subset T_i, i = 1, 2$  gilt) endlich sind, jedoch von der Form von  $\omega_p$  abhängen. Damit gilt

$$\|\nabla e\|_{0, \omega_p} \approx \|\phi_E\|^{-1} \|\nabla e\|_{0, \omega_p}. \quad (4.45)$$

Analog folgt mit Anwendung von (4.35) und (4.43), dass gilt:

$$\begin{aligned}
\|w - \pi_p w\|_{0, \omega_p} &\stackrel{\Delta \neq}{\leq} \|w\|_{0, \omega_p} + \|\pi_p w\|_{0, \omega_p} \\
&\lesssim h_p \|\nabla e\|_{0, \omega_p} + \|w\|_{0, \omega_p} + h_p \|\nabla e\|_{0, \omega_p} \lesssim h_p \|\nabla e\|_{0, \omega_p}
\end{aligned} \quad (4.46)$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Setzen wir (4.44) bis (4.46) in (4.42), so folgt nach Ausklammern von  $\|\nabla e\|_{0,\omega_p}$  die Behauptung (4.41) mit  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^+$ .

*Fall 2:* Es sei  $p \in \mathcal{N}^+ \setminus \mathcal{N}^{++}$ . Wir behaupten, dass gilt:

$$\rho_p(e) \lesssim \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p}. \quad (4.47)$$

Auch hier können wir analog zu (4.42) eine Ungleichung herleiten, wobei die zweite Addition der Null nicht gilt, da  $p \notin \mathcal{N}^{++}$ . Damit erhalten wir die Aussage

$$\rho_p(e) \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\| + \|f\|_{0,\omega_p} \|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p}, \quad (4.48)$$

wobei wir hier

$$w = (e - c)\phi_p, \quad c = \min \left\{ \left( \int_E e \phi_p ds \right) \left( \int_E \phi_p ds \right)^{-1} \mid E \in \mathcal{E}_p \right\} \quad (4.49)$$

setzen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \alpha_E(w) &= \left( \int_E w ds \right) \left( \int_E \phi_E ds \right)^{-1} = \left( \int_E (e - c)\phi_p ds \right) \left( \int_E \phi_E ds \right)^{-1} \\ &= \left( \int_E e \phi_p ds - c \int_E \phi_p ds \right) \left( \int_E \phi_E ds \right)^{-1} \\ &\stackrel{(4.49)}{\geq} \frac{\int_E e \phi_p ds - \left( \int_E e \phi_p ds \right) \left( \int_E \phi_p ds \right)^{-1} \left( \int_E \phi_p ds \right)}{\int_E \phi_E ds} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass für die Kanten  $E \in \mathcal{E}_p$  mit  $\rho_E < -d_E \leq 0$

$$\alpha_E(w) \rho_E \leq 0$$

gilt. Ersetzen wir dies in (4.48), so folgt (4.47) insgesamt mit denselben Abschätzungen aus (4.44), (4.45) und (4.46).

*Fall 3:* Sei  $p \in \mathcal{N} \cap \partial\Omega$ . Wir behaupten für diesen Fall, dass

$$\rho_p(e) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p^0} d_E |\rho_E| + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p} \quad (4.50)$$

mit  $\mathcal{E}_p^0 = \mathcal{E}_p \setminus \mathcal{E}_p^+ = \{E \in \mathcal{E}_p \mid \rho_E < -d_E\}$ . Auch hier betrachten wir die Ungleichung (4.48), wobei wir dieses Mal  $w = e\phi_p$  setzen, d.h. mit der obigen Wahl  $c = 0$  setzen. In diesem Fall kann kein anderes  $c$  gewählt werden, da

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

wir wegen  $p \notin \Omega$  nicht direkt  $\rho_p(c) = 0$  aus (4.23b) folgern können. Da  $p \in \partial\Omega$  ist, gilt mindestens auf einer Kante  $E \in \mathcal{E}_p$  von  $\partial\omega_p$

$$e = u - u_S = 0.$$

Damit ist  $e$  auf einer Teilmenge, vom Maße ungleich Null, des Randes gleich Null und wir können daher die allgemeine Poincaré-Friedrich-Ungleichung (4.39) anwenden. Damit erhalten wir die Anteile von  $E \in \mathcal{E}_p^+$  durch die Abschätzungen (4.44), (4.45) und (4.46). Um die Anteile für die Kanten  $E \in \mathcal{E}_p^0$  zu erhalten, betrachten wir

$$\begin{aligned} u_S + w &= u_S + e\phi_p = u_S + (u - u_S)\phi_p \\ &= \underbrace{(1 - \phi_p)}_{\in[0,1]} u_S + \underbrace{\phi_p}_{\in[0,1]} u \\ &\geq (1 - \phi_p)\psi + \phi_p\psi = \psi. \end{aligned}$$

Da die Ungleichung punktweise gilt, folgt auch

$$\int_E w \, ds \geq \int_E \psi - u_S \, ds \xrightarrow{(4.36)} \alpha_E(w) \gtrsim \psi(x_E) - u_S(x_E) \stackrel{(4.11)}{=} -d_E \|\phi_E\|^{-1}$$

und daher gilt  $\alpha_E(w) \lesssim d_E \|\phi_E\|^{-1}$ . Alle Aussagen ersetzt in (4.48) ergeben dann die Behauptung.

*Fall 4:* Sei  $p \in \mathcal{N}^0 \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{0+})$ . Wir behaupten, dass

$$\rho_p(e) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p^0} d_E |\rho_E| + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p} \quad (4.51)$$

gilt. Um dies zu zeigen, spalten wir den Fehler  $e = e^+ + e^-$  auf mit  $e^+ := \max\{e, 0\}$  und  $e^- := \min\{e, 0\}$ . Damit lässt sich der lokale Anteil des Indikators  $\rho_S$  schreiben als

$$\rho_p(e) = \rho_p(e^+ + e^-) = \rho_p(e^+) + \rho_p(e^-). \quad (4.52)$$

Wir betrachten zunächst  $\rho_p(e^+)$  und setzen analog zum Fall 2

$$w = (e^+ - c)\phi_p, \quad c = \min \left\{ \left( \int_E e^+ \phi_p \, ds \right) \left( \int_E \phi_p \, ds \right)^{-1} \mid E \in \mathcal{E}_p \right\}. \quad (4.53)$$

Da  $e^+ \geq 0$  ist, gilt auch  $c \geq 0$ . Wegen  $\mathcal{N}^0 \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{0+}) \subset \mathcal{N} \cap \Omega$  gilt nach (4.23a)  $\rho_p(1) \leq 0$ , also analog zu Fall 2

$$\begin{aligned} \rho_p(e^+) &\leq \rho_p(e^+) - \underbrace{c \rho_p(1)}_{\leq 0} = \rho_p(e^+ - c) \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\| + \|f\|_{0,\omega_p} \|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Die Aussagen (4.53), (4.54) sind identisch zu denen aus Fall 2, wenn wir  $e = e^+$  setzen. Damit folgt mit  $\|\nabla e^+\|_{0,\omega_p} \leq \|\nabla e\|_{0,\omega_p}$  und denselben Argumenten wie in Fall 2, dass

$$\rho_p(e^+) \lesssim \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p}. \quad (4.55)$$

Wir betrachten nun  $\rho_p(e^-)$ . Analog zu Fall 3 setzen wir  $w = (e^- - c)\phi_p$ ,  $c = 0$  und leiten damit wieder die obere Schranke

$$\rho_p(e^-) \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\| + \|f\|_{0,\omega_p} \|w - \pi_p\|_{0,\omega_p} \quad (4.56)$$

her. Weiter gilt punktweise

$$\begin{aligned} w = e^- \phi_p &\geq e^- = \min\{e, 0\} = \min\{u - u_{\mathcal{S}}, 0\} \\ &\geq \min\{\underbrace{\psi - u_{\mathcal{S}}}_{\leq 0}, 0\} = \psi - u_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

und damit auch die Aussage über  $E \in \mathcal{E}_p$  integriert; also folgt aus (4.36)

$$0 \geq \alpha_E(w) \gtrsim \psi(x_E) - u_{\mathcal{S}}(x_E) = -d_E \|\phi_E\|^{-1} \quad \forall E \in \mathcal{E}_p. \quad (4.57)$$

Damit folgt speziell für alle  $E \in \mathcal{E}_p^0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\alpha_E(w) \rho_E \|\phi_E\|| &= |\alpha_E(w)| |\rho_E| \|\phi_E\| \\ &\stackrel{(4.57)}{\lesssim} d_E \|\phi_E\|^{-1} |\rho_E| \|\phi_E\| = d_E |\rho_E|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Nun bleiben noch die oberen Schranken von  $|\alpha_E(w)|$  für  $E \in \mathcal{E}_p^+$  und  $\|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p}$  zu zeigen. Da  $p \notin \mathcal{N}^{0+}$ , also kein isolierter Knoten ist, gibt es mindestens eine Kante  $E \in \mathcal{E}_p$ , so dass  $u_{\mathcal{S}} = \psi$  gilt. Damit folgt

$$0 = \psi - u_{\mathcal{S}} \leq e^- = \min\{e, 0\} \leq 0 \implies e^- = 0 \text{ auf } E.$$

Wie in Fall 3 ist damit die allgemeine Poincaré-Friedrich-Ungleichung anwendbar und wir können die Aussagen (4.44), (4.45) und (4.46) mit Anwendung von  $\|\nabla e^-\|_{0,\omega_p} \leq \|\nabla e\|_{0,\omega_p}$  zeigen. Insgesamt folgt dann mit (4.58)

$$\rho_p(e^-) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p^0} d_E |\rho_E| + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla e\|_{0,\omega_p}. \quad (4.59)$$

Zusammen mit (4.52), (4.55) und (4.59) folgt dann die Behauptung (4.51).

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Fall 5: Es sei nun  $p \in \mathcal{N}^{0+}$ . Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned} \rho_p(e) &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p^0} d_E |\rho_E| \\ &+ \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) (\|\nabla e\|_{0,\omega_p} + \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

gilt. Wie in Fall 4 verwenden wir die Aufteilung des Indikators nach Gleichung (4.52). Mit genau demselben Vorgehen wie in Fall 4 können wir für  $\rho_p(e^+)$  zeigen, dass die Abschätzung (4.55) gilt. Für  $\rho_p(e^-)$  können die Aussagen (4.56) bis (4.58) wie in Fall 4 gezeigt werden. Es bleiben also auch hier noch die oberen Schranken von  $|\alpha_E(w)|$  für  $E \in \mathcal{E}_p^+$  und  $\|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p}$  zu zeigen.

Wir erinnern uns, dass  $\psi - u_{\mathcal{S}} \leq e^- \leq w \leq 0$  gilt und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \alpha_E(w) = \left( \int_E w \, ds \right) \left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1} \\ &\geq \left( \int_E \psi - u_{\mathcal{S}} \, ds \right) \left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1} \\ &= \alpha_E(\psi - u_{\mathcal{S}}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus (4.61) folgt

$$\begin{aligned} |\alpha_E(w)| \|\phi_E\| &\leq |\alpha_E(\psi - u_{\mathcal{S}})| \|\phi_E\| \\ &= \left| \left( \int_E \psi - u_{\mathcal{S}} \, ds \right) \underbrace{\left( \int_E \phi_E \, ds \right)^{-1}}_{\lesssim h_p^{-1}} \right| \cdot \underbrace{\left( \int_{\omega_p} \nabla \phi_E \nabla \phi_E \, dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\lesssim h_p^{\frac{1}{2}}} \\ &\lesssim h_p^{-\frac{1}{2}} \left| \int_E \psi - u_{\mathcal{S}} \, ds \right| \stackrel{\text{C.S.}}{\lesssim} h_p^{-\frac{1}{2}} \|\psi - u_{\mathcal{S}}\|_{0,E} \\ &\lesssim \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

wobei im letzten Schritt eine *skalierte* Version der Poincaré-Friedrich-Ungleichung<sup>1</sup> verwendet wurde, die darauf basiert, dass  $(\psi - u_{\mathcal{S}})(p) = 0$  und  $\psi - u_{\mathcal{S}}$  linear ist wegen Voraussetzung 4.1. Wegen  $\psi - u_{\mathcal{S}} \leq w$  folgt auch, dass

$$\|w\|_{0,\omega_p} \leq \|\psi - u_{\mathcal{S}}\|_{0,\omega_p} \lesssim h_p \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}, \quad (4.63)$$

---

<sup>1</sup>Anschaulich können wir uns dies folgendermaßen vorstellen: Da  $\psi - u_{\mathcal{S}}$  linear und am Punkt  $p$  gleich ist, ist der Gradient  $\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}}) = \text{const.}$  Damit kann man mit dieser Konstanten als Höhe mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die beiden Normen gegenseitig abschätzen, wobei diese Ungleichung abhängig von einer Konstanten  $c$  ist, die wiederum nur von der Form von  $\omega_p$  bzw.  $E$  abhängt.

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

wobei in (4.63) im letzten Schritt wegen  $(\psi - u_{\mathcal{S}})(p) = 0$  wieder die skalierte Version der Poincaré-Friedrich-Ungleichung verwendet wurde. Aus (4.62) folgern wir unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\pi_p w\|_{0,\omega_p} &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_p} |\alpha_E(w)| \|\phi_E\|_{0,\omega_p} \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p} |\alpha_E(w)| h_p \underbrace{\|\nabla \phi_E\|_{0,\omega_p}}_{=\|\phi_E\|} \\ &\lesssim h_p \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Also folgt aus (4.63) und (4.64) insgesamt

$$\|w - \pi_p w\|_{0,\omega_p} \leq \|w\|_{0,\omega_p} + \|\pi_p w\|_{0,\omega_p} \lesssim h_p \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}. \quad (4.65)$$

Setzen wir nun für die Kanten  $E \in \mathcal{E}_p^0$  die Abschätzung (4.58) und für die Kanten  $E \in \mathcal{E}_p^+$  die Ungleichungen (4.62) und (4.65) in die Bedingung (4.56) ein, so erhalten wir die Aussage

$$\rho_p(e^-) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p^0} d_E |\rho_E| + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0,\omega_p} \right) \|\nabla(\psi - u_{\mathcal{S}})\|_{0,\omega_p}. \quad (4.66)$$

Damit folgt mit der Aufteilung (4.52) und den Abschätzungen (4.55) und (4.66) die Behauptung.

*Fall 6:* Es sei  $p \in \mathcal{N}^{0-}$ . In diesem Fall haben wir vollen Kontakt, also  $u_{\mathcal{S}} = \psi$  auf  $\omega_p$  und daher gilt

$$e = u - u_{\mathcal{S}} = u - \psi \geq 0 \text{ auf ganz } \omega_p.$$

Weiter gelten für alle  $p \in \mathcal{N}^{0-}$  die Eigenschaften  $f \leq 0$  auf  $\omega_p$  und  $j_E \leq 0$  für alle  $E \in \mathcal{E}_p$ . Daher rechnen wir leicht nach, dass gilt:

$$\rho_p(e) = \rho_{\mathcal{S}}(e\phi_p) = \int_{\omega_p} \underbrace{fe\phi_p}_{\leq 0} dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \int_E \underbrace{j_E e\phi_p}_{\leq 0} ds \leq 0. \quad (4.67)$$

Bevor wir die sechs Fälle zusammenführen, machen wir uns klar, dass

$$\begin{aligned} &(\mathcal{N}^+ \setminus \mathcal{N}^{++}) \cup (\mathcal{N} \cap \partial\Omega) \cup \overbrace{(\mathcal{N}^0 \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{0+}))}^{=\mathcal{N}^0 \setminus \mathcal{N}^{0-}} \cup \mathcal{N}^{0+} \\ &= (\mathcal{N} \cap \Omega) \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++}) \cup (\mathcal{N} \cap \partial\Omega) = \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++}) \end{aligned}$$



gilt. Verwenden wir nun die sechs gezeigten Fälle, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \rho_S(e) &= \sum_{p \in \mathcal{N}} \rho_p(e) \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}^0} d_E |\rho_E| + \sum_{p \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^{0-}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| \right) \|\nabla e\|_{0, \omega_p} \\
 &\quad + \sum_{p \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++})} h_p \|f\|_{0, \omega_p} \|\nabla e\|_{0, \omega_p} + \sum_{p \in \mathcal{N}^{++}} h_p \|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p} \|\nabla e\|_{0, \omega_p} \\
 &\quad + \sum_{p \in \mathcal{N}^{0+}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_p^+} |\rho_E| + h_p \|f\|_{0, \omega_p} \right) \|\nabla(\psi - u_S)\|_{0, \omega_p}.
 \end{aligned}$$

Damit folgt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass mit einer Konstante  $C > 0$ , die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt, gilt:

$$\begin{aligned}
 C\rho_S(e) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}^0} d_E |\rho_E| + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}^+} |\rho_E|^2 + \sum_{p \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}^{0-} \cup \mathcal{N}^{++})} h_p^2 \|f\|_{0, \omega_p}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p \in \mathcal{N}^{++}} h_p^2 \|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla e\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N}^{0+}} \|\nabla(\psi - u_S)\|_{0, \omega_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}^0} d_E |\rho_E| \\
 &\quad + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}^+} |\rho_E|^2 + \text{osc}_2(u_S, \psi, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla e\|_{0, \Omega}^2 + \text{osc}_1(u_S, \psi)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}^0} d_E |\rho_E| \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}^+} |\rho_E|^2 + \text{osc}_2(u_S, \psi, f)^2 \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \left( \|\nabla e\|_{0, \Omega}^2 + \text{osc}_1(u_S, \psi)^2 \right),
 \end{aligned}$$

wobei wir als letztes die Ungleichung von Young mit einem  $\varepsilon > 0$  verwendet haben und

$$\mathcal{E}^0 = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} \mathcal{E}_p^0, \quad \mathcal{E}^+ = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} \mathcal{E}_p^+.$$

Wählen wir  $\varepsilon \leq C$ , so ergibt sich nach leichtem Umstellen der Ungleichung

$$\begin{aligned}
 c(\varepsilon)\rho_S(e) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}^+} |\rho_E|^2 + \text{osc}_2(u_S, \psi, f)^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \text{osc}_1(u_S, f)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}^0} d_E |\rho_E|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \eta_E |\rho_E| \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\right) (\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2 + \text{osc}_1(u_{\mathcal{S}}, f)^2) \\
&\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_p} \eta_E |\rho_E| + \text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2
\end{aligned}$$

mit  $c(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon}$  und  $\eta_E$  wie in (4.11) definiert. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Mit dem Lemma 4.21 und der Äquivalenz des a posteriori Fehlerschätzers  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  zum Fehlerindikator  $\rho_{\mathcal{S}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  folgt das gewünschte Resultat für unseren Fehlerschätzer im nächsten Theorem.

**Theorem 4.22.** *Es sei Voraussetzung 4.1 für  $\psi$  erfüllt. Dann ist der hierarchische Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  eine obere Schranke für den Fehler im Energiefunktional bis auf Addition von Oszillationstermen und einer Konstante  $C$ , die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt, d.h.*

$$J(u_{\mathcal{S}}) - J(u) \lesssim -\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}}) + \text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2. \quad (4.68)$$

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt durch Lemma 4.12 und 4.21, denn

$$\begin{aligned}
J(u_{\mathcal{S}}) - J(u) &= -\mathcal{I}(e) \leq \rho_{\mathcal{S}}(e) \\
&\lesssim \underbrace{\sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E|}_{=\rho_{\mathcal{S}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})} + \text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2 \\
&\leq 2 \cdot (-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})) + \text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2 \\
&\leq 2 \cdot (-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})) + \text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2
\end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.  $\square$

An der Abschätzung (4.68) können wir sehen, dass es sinnvoll ist, nicht nur den hierarchischen Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  von einem Verfeinerungsschritt zum nächsten zu verringern, sondern auch zu fordern, dass die Oszillationsterme  $\text{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  kleiner werden. Daher wollen wir in unserem Algorithmus später für einen adaptiven Verfeinerungsschritt diese Forderung mit verwenden, dass die Oszillationsterme aus (4.24) verringert werden.

Wie wir in Bemerkung 4.2 gesehen haben, gibt eine obere Schranke vom Fehler der Funktionswerte des Energiefunktionals  $J$  auch eine obere Schranke für den exakten Fehler bzgl. der Energienorm an.

**Theorem 4.23.** *Es sei die Voraussetzung 4.1 für  $\psi$  erfüllt. Dann liefert die Lösung vom lokalisierten Defektprobem (4.9) eine obere Schranke für den exakten Fehler*

$$\|u - u_S\| \lesssim \left( \sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E| \right)^{\frac{1}{2}} + \text{osc}(u_S, \psi, f) \quad (4.69)$$

bis auf Oszillationsterme, wie in (4.24) definiert, und einer Konstante, die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt.

*Beweis.* Mit Lemma 4.12 und 4.21 folgt direkt

$$\|u - u_S\|^2 \leq 2\rho_S(e) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E| + \text{osc}(u_S, \psi, f)^2.$$

Nach Wurzel ziehen und Verwendung der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung.  $\square$

Wir wollen noch ein Resultat liefern, was die Forderung an die Verringerung der Oszillationsterme in jedem Verfeinerungsschritt begründet. Hierbei handelt es sich um ein analoges Resultat zu Lemma 3.8 aus [MNS00].

**Lemma 4.24.** *Es sei  $0 < \gamma < 1$  ein Parameter, der die Reduktion der Größe des Dreiecks bei Verfeinerung wiedergibt. Weiter sei  $0 < \hat{\theta} < 1$  gegeben und eine Menge an Punkten  $\hat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ , die die zu verfeinernden Dreiecke anzeigen, gegeben, so dass*

$$\text{osc}(u_S, \psi, f, \hat{\mathcal{N}}) \geq \hat{\theta} \text{osc}(u_S, \psi, f, \mathcal{N}).$$

Dann existiert ein  $\hat{\alpha} \in (0, 1)$ , so dass

$$\text{osc}(u_S, \psi, f, \tilde{\mathcal{N}}) \leq \hat{\alpha} \text{osc}(u_S, \psi, f, \mathcal{N}), \quad (4.70)$$

wobei  $\tilde{\mathcal{N}}$  die Menge an Punkten nach Verfeinerung der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  bzgl. der Punkte  $\hat{\mathcal{N}}$  ist.

*Beweis.* Es sei  $T \in \mathcal{T}_h$  ein Element, das Teilmenge von einem  $\omega_p$  ist. Da

$$\bar{f}_p = \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} f \, dx \text{ bzw. } \bar{f}_T := \frac{1}{|T|} \int_T f \, dx$$

$L^2$ -Projektionen von  $f$  auf den Raum der stückweise konstanten Funktionen über  $\omega_p$  bzw.  $T$  sind, gilt

$$\|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p} \leq \|f - \bar{f}_T\|_{0, T}.$$

Weiter können wir auch mit einem Kontraktionsparameter  $\beta > 0$  zeigen, dass gilt:

$$\|f - \bar{f}_p\|_{0, \omega_p} \geq \beta \|f - \bar{f}_T\|_{0, T}.$$

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

Analoge Aussagen ergeben sich für  $\|f\|_{0,\omega_p}$  und  $\|f\|_{0,T}$ . Damit lässt sich der Oszillationsterm  $\text{osc}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)$  äquivalent beschreiben durch

$$\widetilde{\text{osc}}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f, \mathcal{T}_h) = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h^1} h_T^2 \|f - \bar{f}_T\|_{0,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^2} h_T^2 \|f\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $\mathcal{T}_h^i, i = 1, 2$  die Menge der Dreiecke ist, über die die Summanden des Oszillationsterms berechnet werden sollen, und  $h_T$  wie gewohnt der Radius des Dreiecks ist.

Es sei nun  $\hat{\mathcal{T}}_H^i, i = 1, 2$  die zu verfeinernde Menge an größeren Elementen. Da  $h_T \leq \gamma h_{\hat{T}}$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{osc}}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f, \mathcal{T}_h)^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^1} h_T^2 \|f - \bar{f}_T\|_{0,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^2} h_T^2 \|f\|_{0,T}^2 \\ &\leq \gamma^2 \left( \sum_{\hat{T} \in \hat{\mathcal{T}}_H^1} h_{\hat{T}}^2 \|f - \bar{f}_{\hat{T}}\|_{0,\hat{T}}^2 + \sum_{\hat{T} \in \hat{\mathcal{T}}_H^2} h_{\hat{T}}^2 \|f\|_{0,\hat{T}}^2 \right) \\ &\quad + \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \hat{\mathcal{T}}_H^1} h_T^2 \|f - \bar{f}_T\|_{0,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \hat{\mathcal{T}}_H^2} h_T^2 \|f\|_{0,T}^2 \right) \\ &\stackrel{+0}{=} \underbrace{(\gamma^2 - 1)}_{\leq 0} \underbrace{\widetilde{\text{osc}}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f, \hat{\mathcal{T}}_H)^2}_{\geq 0} + \widetilde{\text{osc}}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f, \mathcal{T}_H)^2 \\ &\leq \tilde{\alpha} \widetilde{\text{osc}}_2(u_{\mathcal{S}}, \psi, f, \mathcal{T}_H)^2. \end{aligned}$$

Eine analoge Aussage ergibt sich auch für  $\widetilde{\text{osc}}_1(u_{\mathcal{S}}, \psi, \mathcal{T}_h)$ . Wegen der Äquivalenz der Darstellung von  $\widetilde{\text{osc}}_1, \widetilde{\text{osc}}_2$  zu den Oszillationstermen (4.24), folgt die Behauptung (4.70).  $\square$

##### 4.1.5 Effektivität des Fehlerschätzers

Der Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  ist für den exakten Fehler des Energiefunktionals auch effektiv, d.h. wir werden zeigen, dass der hierarchische Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  auch eine untere Schranke für  $-\mathcal{I}(e) = J(u_{\mathcal{S}}) - J(u)$  ist.

**Theorem 4.25.** *Das Hindernis  $\psi$  sei stückweise linear und stetig. Dann ist der hierarchische a posteriori Fehlerschätzer  $\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}})$  auch eine untere Schranke für den Fehler im Energiefunktional im Sinne von*

$$-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}}) \leq 6(J(u_{\mathcal{S}}) - J(u)). \quad (4.71)$$

*Beweis.* Zunächst folgt mit (4.16)

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V) &\leq \rho_S(\varepsilon_V) = \rho_S \left( \sum_{E \in \mathcal{E}} \varepsilon_V(x_E) \phi_E \right) \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \varepsilon_V(x_E) \rho_S(\phi_E) \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E|
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

mit  $\eta_E = |\varepsilon_V(x_E)| \cdot \|\phi_E\|$  und  $\rho_E = \frac{\rho_S(\phi_E)}{\|\phi_E\|}$ , wobei man zeigen kann, dass  $\text{sign}(\varepsilon_V(x_E)) = \text{sign}(\rho_S(\phi_E))$  gilt. Weiter sollte man erwähnen, dass (4.72) äquivalent ist zu [SV07] Gleichung (2.16).

Das weitere Vorgehen ist ähnlich zum Beweis von Theorem 3.2 aus [SV07]. Es sei

$$\varphi = \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \beta_E \phi_E$$

eine Linearkombination aus Bubble-Funktionen. Dann lässt sich  $u_S + \varphi$  auf jedem  $T \in \mathcal{T}_h$  durch eine Konvexkombination aus  $v_E := u_S + \beta_E \phi_E, E \in \mathcal{E}$  schreiben, d.h.

$$(u_S + \varphi)|_T = \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}, E \subset T} v_E|_T.$$

Da  $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \frac{1}{2}|x|^2$  konvex ist, rechnen wir mit den obigen Bezeichnungen schnell nach, dass gilt

$$\begin{aligned}
 J(u_S + \varphi) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla(u_S + \varphi)|^2 - f(u_S + \varphi) dx \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{2} |\nabla(u_S + \varphi)|_T|^2 - f(u_S + \varphi)|_T dx \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}, E \subset T} \nabla v_E|_T \right) \right|^2 - f \left( \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}, E \subset T} v_E|_T \right) dx \\
 &\leq \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}, E \subset T} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{2} |\nabla v_E|_T|^2 - f v_E|_T dx.
 \end{aligned}$$

Da wir drei Kanten pro Dreieck  $T$  haben, gilt analog die Gleichung

$$J(u_S) = \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}, E \subset T} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{2} |\nabla u_S|^2 - f u_S dx.$$

Durch Subtraktion der letzten beiden Terme und einigen Umformungen ergibt sich dann

$$J(u_S) - J(u_S + \varphi) \geq \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} (J(u_S) - J(u_S + \beta_E \phi_E)). \tag{4.73}$$

Wir rechnen nach, dass für alle  $E \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} J(u_S + \beta_E \phi_E) &= \frac{1}{2} a(u_S + \beta_E \phi_E, u_S + \beta_E \phi_E) - (f, u_S + \beta_E \phi_E) \\ &= J(u_S) + \frac{1}{2} a(\beta_E \phi_E, \beta_E \phi_E) - ((f, \beta_E \phi_E) - a(u_S, \beta_E \phi_E)) \\ &= J(u_S) + \mathcal{I}(\beta_E \phi_E) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist das Minimieren von  $J(u_S + \beta_E \phi_E)$ , so dass  $\beta_E \geq -d_E$ , mit  $d_E$  wie oben definiert, äquivalent ist zum Problem:

$$\min_{\beta_E \geq -d_E} \mathcal{I}(\beta_E \phi_E),$$

was den nächsten Schritt legitimiert. Wir setzen nun  $\beta_E = \varepsilon_V(x_E)$ , dann gilt, dass  $u_S + \beta_E \phi_E \in K$  ist für alle  $E \in \mathcal{E}$  und damit aufgrund der Konvexität von  $K$  auch  $u_S + \varphi \in K$ . Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} J(u_S) - J(u) &\geq J(u_S) - J(u_S + \varphi) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} (J(u_S) - J(u_S + \beta_E \phi_E)) = \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} -\mathcal{I}(\beta_E \phi_E) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \left( \rho_S(\beta_E \phi_E) - \frac{1}{2} a(\beta_E \phi_E, \beta_E \phi_E) \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \left( \beta_E \rho_S(\phi_E) - \frac{1}{2} \beta_E^2 a(\phi_E, \phi_E) \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \left( \frac{\max\{-d_E, \rho_E\}}{\|\phi_E\|} \rho_S(\phi_E) - \frac{1}{2} \frac{\max\{-d_E, \rho_E\}^2}{\|\phi_E\|^2} \|\phi_E\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \left( \underbrace{\max\{-d_E, \rho_E\} \rho_E}_{=\eta_E |\rho_E|} - \frac{1}{2} \underbrace{\max\{-d_E, \rho_E\}^2}_{\geq \eta_E |\rho_E|} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{E \in \mathcal{E}} \frac{1}{2} \eta_E |\rho_E| = \frac{1}{6} \sum_{E \in \mathcal{E}} \eta_E |\rho_E|. \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.72) folgt dann die Behauptung.  $\square$

## 4.2 Ein adaptiver Algorithmus

Mit den Resultaten aus Kapitel 4.1 können wir nun einen implementierbaren Algorithmus für eine adaptive Verfeinerung angeben.

Mittels Theorem 4.22 bildet der hierarchische a posteriori Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_V)$  eine obere Schranke für den exakten Fehler  $J(u_S) - J(u)$  (und wegen Theorem 4.25 auch eine untere), d.h. dass die Verringerung unseres Schätzers auch eine Verkleinerung des Fehlers mit sich führt. Aufgrund

von Korollar 4.13 ist außerdem der Fehlerschätzer  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_V)$  äquivalent zum Fehlerindikator  $\rho_S(\varepsilon_V)$ , den wir durch Lemma 4.14 in seine lokalen Anteile bzgl. der einzelnen Knoten aufteilen können. Daher werden wir diesen im Algorithmus zur Verringerung des Fehlerschätzers verwenden.

Zuletzt bleibt noch aus, dass auch die Oszillationsterme in der oberen Schranke von Theorem 4.22 enthalten sind. Diese sollten sich also in einem Verfeinerungsschritt nicht vergrößern. Diese Forderung können wir mittels Lemma 4.24 erfüllen.

Insgesamt ergibt sich damit folgender adaptiver Algorithmus.

---

**Algorithm 4.1** Adaptive Verfeinerungsstrategie für ein Hindernisproblem

---

Gegeben sei ein initiales Gitter  $\mathcal{T}_0$ . Wir setzen  $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_0$ .

- 1: Berechne die Galerkin-Lösung  $u_S$  von (3.12) über der Zerlegung  $\mathcal{T}_n$ .
- 2: Berechne die Lösung  $\varepsilon_V$  vom lokalen Defektproblem (4.9) mittels (4.10).
- 3: Berechne die lokalen Anteile  $\rho_p$  des Fehlerindikators  $\rho_S$  mit Lemma 4.14 für alle  $p \in \mathcal{N}$ . Damit auch

$$\rho_S = \sum_{p \in \mathcal{N}} \rho_p.$$

4:

---

### 4.3 Erfüllung einer Saturationseigenschaft

In Kapitel 2.4, in dem wir adaptive Verfeinerungsstrategien für Variationsgleichungen beschrieben haben, musste für den hierarchischen Fehlerschätzer eine Saturationseigenschaft erfüllt werden. Dies ist hier nicht benötigt worden, dennoch wird eine solche äquivalente Eigenschaft erfüllt. Wir wollen daher in diesem Kapitel zeigen, dass das für die quadratische Finite-Element-Approximation  $u_Q$  mit

$$u_Q \in K_Q : \quad a(u_Q, v - u_Q) \geq (f, v - u_Q) \quad \forall v \in K_Q, \quad (4.74)$$

wobei  $K_Q = \{v \in \mathcal{Q} \mid v(p) \geq \psi(p) \forall p \in \mathcal{N}_Q \cap \Omega\}$  ist, die Saturationseigenschaft

$$J(u_Q) - J(u) \leq \alpha(J(u_S) - J(u)) \quad (4.75)$$

mit  $\alpha \in (0, 1)$  erfüllt, wenn die Oszillationsterme  $\text{osc}(u_S, \psi, f)$  relativ klein sind. Hierfür werden wir zunächst die Äquivalenz zu einer Ungleichung abhängig von  $-\mathcal{I}(e_Q)$  zeigen, um dann aufgrund der Äquivalenz von  $-\mathcal{I}(e_Q)$  zum hierarchischen Fehlerschätzer das gewünschte Resultat zu erhalten.

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

**Lemma 4.26.** *Es sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt die Saturationseigenschaft (4.75) genau dann, wenn gilt:*

$$J(u_S) - J(u) \leq \frac{-\mathcal{I}(e_Q)}{1 - \alpha}. \quad (4.76)$$

*Beweis.* Es sei  $e_Q$  Lösung von Problem (4.5) bzw.  $u_Q$  Lösung von (4.74), damit gilt  $u_Q = u_S + e_Q$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & -\mathcal{I}(e_Q) + (J(u_Q) - J(u)) \\ &= \rho_S(e_Q) - \frac{1}{2}a(e_Q, e_Q) + \frac{1}{2}a(u_Q, u_Q) - (f, u_Q) - J(u) \\ &= (f, e_Q) - a(u_S, e_Q) + a(u_S, u_Q) - \frac{1}{2}a(u_S, u_S) - (f, u_Q) - J(u) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(u_S, u_S) - (f, u_S) - J(u)}_{=J(u_S)} - J(u) = J(u_S) - J(u). \end{aligned}$$

Damit folgt, wenn (4.75) gilt,

$$\begin{aligned} J(u_S) - J(u) &= -\mathcal{I}(e_Q) + (J(u_Q) - J(u)) \\ &\leq -\mathcal{I}(e_Q) + \alpha(J(u_S) - J(u)) \end{aligned}$$

und mit Umformung nach  $J(u_S) - J(u)$  folgt (4.76). Analog folgt, wenn (4.76) gilt:

$$(1 - \alpha)(J(u_S) - J(u)) \leq -\mathcal{I}(e_Q) = J(u_S) - J(u_Q)$$

und damit folgt nach leichter Umformung (4.75).  $\square$

**Lemma 4.27.** *Es gilt*

$$\mathcal{I}(e_Q) \lesssim \mathcal{I}_Q(\varepsilon_Q) \leq \mathcal{I}_Q(\varepsilon_V) \leq 0. \quad (4.77)$$

*Beweis.* Es bezeichne  $\varepsilon_Q$  die Lösung des Minimierungsproblems: Finde  $\varepsilon_Q \in \mathcal{A}_Q$ , so dass

$$\mathcal{I}_Q(\varepsilon_Q) \leq \mathcal{I}_Q(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}_Q. \quad (4.78)$$

Weiter sei  $\varepsilon_V \in \mathcal{A}_V$  die Lösung von (4.8). Da  $0 \in \mathcal{A}_V \subset \mathcal{A}_Q$  liegt, folgt durch Einsetzen von  $\varepsilon_V$  in die obige Gleichung bzw.  $v = 0$  in (4.8) die Behauptung

$$\mathcal{I}_Q(\varepsilon_Q) \leq \mathcal{I}_Q(\varepsilon_V) \leq 0.$$

Analog zu Lemma 4.12 bzw. Korollar 4.13 gilt auch für  $\varepsilon_Q$  die Ungleichung  $-\mathcal{I}_Q(\varepsilon_Q) \leq \rho_S(\varepsilon_Q)$ . Gilt nun  $\rho_S(\varepsilon_Q) \lesssim \rho_S(e_Q)$ , so folgt mit (4.16)

$$\mathcal{I}(e_Q) \leq -\frac{1}{2}\rho_S(e_Q) \lesssim -\rho_S(\varepsilon_Q) \leq \mathcal{I}_Q(\varepsilon_Q).$$



Es bleibt also  $\rho_S(\varepsilon_Q) \lesssim \rho_S(e_Q)$  zu zeigen. Setzen wir  $v = \varepsilon_Q \in \mathcal{A}_Q$  in Problem (4.5) ein und verwenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, sowie die für  $\varepsilon_Q$  zu (4.15) und (4.16) analogen Aussagen, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_S(\varepsilon_Q - e_Q) &\leq a(e_Q, \varepsilon_Q - e_Q) \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|e_Q\| \|\varepsilon_Q - e_Q\| \\ &\leq \rho_S(e_Q)^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_Q - e_Q\|. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Da  $e_Q, \varepsilon_Q \in \mathcal{A}_Q$  Lösungen von (4.5) bzw. (4.78) sind, folgt aus den dazugehörigen Variationsungleichungen

$$-a(e_Q, \varepsilon_Q - e_Q) \leq \rho_S(e_Q - \varepsilon_Q) \leq a_Q(\varepsilon_Q, e_Q - \varepsilon_Q). \quad (4.80)$$

Dann folgt wegen der Äquivalenz von  $\|\cdot\|_Q$  und  $\|\cdot\|$  (vgl. Satz 4.8), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (4.80) die obere Schranke

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_Q - e_Q\|^2 &= a(\varepsilon_Q - e_Q, \varepsilon_Q - e_Q) \\ &= a(\varepsilon_Q, \varepsilon_Q - e_Q) - a(e_Q, \varepsilon_Q - e_Q) \\ &\stackrel{(4.80)}{\leq} a(\varepsilon_Q, \varepsilon_Q - e_Q) + a_Q(\varepsilon_Q, e_Q - \varepsilon_Q) \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|\varepsilon_Q\| \|\varepsilon_Q - e_Q\| + \|\varepsilon_Q\|_Q \|e_Q - \varepsilon_Q\|_Q \\ &\stackrel{\text{Satz 4.8}}{\lesssim} \|\varepsilon_Q\|_Q \|\varepsilon_Q - e_Q\|. \end{aligned}$$

Mit Division durch  $\|\varepsilon_Q - e_Q\|$  erhalten wir dann

$$\|\varepsilon_Q - e_Q\| \lesssim \|\varepsilon_Q\|_Q \leq \rho_S(\varepsilon_Q)^{\frac{1}{2}},$$

wobei wir im letzten Schritt wieder für  $\varepsilon_Q$  die zu (4.15) äquivalente Aussage verwendet haben. Setzen wir dies in (4.79) ein, so erhalten wir

$$\rho_S(\varepsilon_Q - e_Q) \leq c \rho_S(e_Q)^{\frac{1}{2}} \rho_S(\varepsilon_Q)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \frac{C^2}{2} \rho_S(e_Q) + \frac{1}{2} \rho_S(\varepsilon_Q)$$

mit einer Konstanten  $C > 0$ , die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Nach Anwendung der Linearität von  $\rho_S$  auf der linken Seite und Umformung nach  $\rho_S(\varepsilon_Q)$  folgt die Behauptung durch

$$\rho_S(\varepsilon_Q) \leq (2 + c^2) \rho_S(e_Q) \lesssim \rho_S(e_Q). \quad \square$$

**Theorem 4.28.** *Es gibt Konstanten  $c > 0$  und  $\alpha \in (0, 1)$ , die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt, so dass kleine Oszillation im Sinne von*

$$\text{osc}(u_S, \psi, f)^2 \leq c(J(u_S) - J(u)) \quad (4.81)$$

*die Saturationseigenschaft (4.75)*

$$J(u_Q) - J(u) \leq \alpha(J(u_S) - J(u))$$

*impliziert.*

#### 4. Ein hierarchischer Fehlerschätzer für Hindernisprobleme

---

*Beweis.* Mit Theorem 4.22 und Lemma 4.27 folgt, dass es zwei Konstanten  $c_1, c_2$  gibt, die nur von der Quasi-Uniformität von  $\mathcal{T}_h$  abhängen, so dass

$$\begin{aligned} J(u_{\mathcal{S}}) - J(u) &\leq -c_1 \mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\varepsilon_{\mathcal{V}}) + c_2 \operatorname{osc}(u_{\mathcal{S}}, \psi, f)^2 \\ &\stackrel{(4.81)}{\lesssim} -c_1 \mathcal{I}(e_{\mathcal{Q}}) + c_2 c (J(u_{\mathcal{S}}) - J(u)). \end{aligned}$$

Wir formen die letzte Aussage nach dem Fehler im Energiefunktional um, so dass

$$J(u_{\mathcal{S}}) - J(u) \lesssim \frac{-\mathcal{I}(e_{\mathcal{Q}})}{\frac{1-c_2c}{c_1}}$$

ist und damit gilt für  $1 - \alpha = \frac{1-c_2c}{c_1}$ , dass

$$c = \frac{1 - c_1(1 - \alpha)}{c_2}$$

sein muss. Setzen wir nun  $c_1 \geq 1$ , so gilt für  $\alpha \in \left(\frac{c_1-1}{c_1}, 1\right) \subset (0, 1)$ , damit  $c > 0$  ist. Damit sind die Voraussetzungen aus Lemma 4.26 erfüllt und somit folgt die Behauptung (4.75).  $\square$

#### 4.4 Übertragung des Fehlerschätzers auf Kontaktprobleme

•

## Kapitel 5

# Implementierung des Fehlerschätzers in Matlab

- Grundlegender Aufbau des Programms
- Gründe warum wo was.
- Warum Verwendung von Sparse, IPM und large scale?
- Berechnung der einzelnen lokalen Element-Steifigkeitsmatrizen bzw. Element-Vektoren (siehe hierfür auch die Berechnung für den Vektor  $\rho_S$  – hier ist die Berechnung durch lokalen Vektoren auch schneller gemacht worden).
- Anmerkungen: Wie verfeinert refinemesh in Matlab eigentlich? (siehe auch Bachelorarbeit von Christina)
- dokumentierter Quellcode ist im Anhang zu finden

# Kapitel 6

## Validierung

- numerisches Beispiel (Problemstellung) → vielleicht mit Kontakt und nur Hindernis
- Vergleich mit Analytischer Lösung?! (Tabelle mit Ergebnissen) → Ergebnisse diskutieren

### 6.1 Numerisches Beispiel zum Hindernisproblem

- numerisches Beispiel aus [SV07] oder auch [BCH07]

### 6.2 Numerisches Beispiel zum Kontaktproblem

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

- kurz einleiten, worum es ging (Einleitung in einem Absatz zusammenfassen)
- Was ist rausgekommen?!
- Ausblick: Was ist noch offen geblieben, was kann man noch machen...  
In dieser Arbeit linearisierte Verzerrung verwendet; kann verallgemeinert werden durch allgemeine Verzerrungstensoren (bzgl. der jeweiligen Konfiguration).

# Literaturverzeichnis

- [Alt12] ALTENBACH, Holm: *Kontinuumsmechanik*. 2. Auflage. Springer, 2012
- [BCH05] BARTELS, S. ; CARSTENSEN, C. ; HECHT, A.: 2D isoparametric FEM in MATLAB / Humboldt-Universität, Berlin. 2005. – Forschungsbericht
- [BCH07] BRAESS, D. ; CARSTENSEN, C. ; HOPPE, R.: Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem. In: *Numerische Mathematik* 107 (2007), S. 455–471
- [Bra05] BRAESS, Dietrich: A Posteriori Error Estimators for Obstacle Problems – Another Look / Faculty of Mathematics, Ruhr-University. 2005. – Forschungsbericht
- [Bra13] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 5. Auflage. Springer-Verlag, 2013
- [CSW99] CARSTENSEN, C. ; SCHERF, O. ; WRIGGERS, P.: Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 5, S. 1605–1626
- [DLY89] DEUFLHARD, P. ; LEINEN, P. ; YSERENTANT, H.: Concepts of an Adaptive Hierarchical Finite Element Code. In: *Impact of Computing in Science and Engineering* 1 (1989), S. 3–35
- [Fal74] FALK, Richard S.: Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. In: *Math. Comp.* 28 (1974), S. 963–971
- [Glo08] GLOWINSKI, Roland: *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Reprint. Springer, 2008
- [GRT09] GÖPFERT, A. ; RIEDRICH, T. ; TAMMER, C.: *Angewandte Funktionalanalysis*. Vieweg und Teubner, 2009

- [HH80] HASLINGER, J. ; HLAVÁČEK, I.: Contact between elastic bodies. I. Continuous problems. In: *Apl. Mat.* 25 (1980), S. 324–347
- [HHNL80] HLAVÁČEK, I. ; HASLINGER, J. ; NECAS, J. ; LOVÍSEK, J.: *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. 9. Auflage. Springer, 1980
- [HK92] HOPPE, R. ; KORNHUBER, R.: Adaptive Multilevel-Methods for Obstacle Problems. In: *Preprint SC 91-16* (1992), April
- [Joh92] JOHNSON, Claes: Adaptive finite element methods for the obstacle problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), Nr. 4, S. 483–487
- [KO88] KIKUCHI, N. ; ODEN, J.T.: *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, 1988
- [KZ11] KORNHUBER, Ralf ; ZOU, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for the discretization error of elliptic obstacle problems. In: *Mathematics of Computation* 80 (2011), Nr. 273, S. 69–88
- [Kö00] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 2*. 5. Auflage. Springer, 2000
- [MNS00] MORIN, P. ; NOCHETTO, R.H. ; SIEBERT, K.G.: Data Oscillation and convergence of adaptive FEM. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), Nr. 2, S. 466–488
- [NW06] NOCEDAL, Jorge ; WRIGHT, Stephen J.: *Numerical Optimization*. 2. ed. New York, NY : Springer, 2006
- [Pag10] PAGE, M.: Schätzerreduktion und Konvergenz adaptiver FEM für Hindernisprobleme / Universität Wien. 2010. – Masterarbeit
- [QSS02] QUARTERONI, A. ; SACCO, R. ; SALERI, F.: *Numerische Mathematik 2*. 1. Auflage. Springer, 2002
- [Rud91] RUDIN, Walter: *Functional Analysis*. 2. Auflage. McGraw-Hill, 1991
- [Sta08] STARKE, Gerhard: Numerik partieller Differentialgleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2008. – Vorlesungsskript
- [Sta11] STARKE, Gerhard: Variationsungleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2011. – Vorlesungsskript
- [Ste12a] STEPHAN, Ernst P.: Contact Problems – Numerical Analysis and Implementation / IFAM - Universität Hannover. 2012. – Vorlesungsskript

- [Ste12b] STEPHAN, Ernst P.: Numerik partieller Differentialgleichungen I / IFAM - Universität Hannover. 2012. – Vorlesungsskript
- [Sto99] STOER, Josef: *Numerische Mathematik I*. 8. Auflage. Springer, 1999
- [SV07] SIEBERT, K.G. ; VEESER, A.: A Unilaterally Constrained Quadratic Minimization with Adaptive Finite Elements. In: *SIAM J. Optim.* 18 (2007), Nr. 1, S. 260–289
- [Wal11] WALKER, Christoph: Partielle Differentialgleichungen / IFAM - Universität Hannover. 2011. – Vorlesungsskript
- [Wer11] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 7. Auflage. Springer, 2011
- [Wri01] WRIGGERS, Peter: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. 5. Auflage. Springer, 2001
- [Wri06] WRIGGERS, Peter: *Computational Contact Mechanics*. 2. Auflage. Springer, 2006
- [Wri09] WRIGGERS, Peter: Finite-Elemente-Methode / IKM - Universität Hannover. 2009. – Vorlesungsskript
- [Zha07] ZHANG, Yongmin: Convergence of free boundaries in discrete obstacle problems. In: *Numerische Mathematik* (2007), Nr. 106, S. 157–164
- [Zou11] ZOU, Qingsong: Efficient and reliable hierarchical error estimates for an elliptic obstacle problem. In: *Applied Numerical Mathematics* 61 (2011), S. 344–355
- [ZVKG11] ZOU, Q. ; VEESER, A. ; KORNHUBER, R. ; GRÄSER, C.: Hierarchical error estimates for the energy functional in obstacle problems. In: *Numerische Mathematik* (2011), Nr. 117, S. 653–677



## Anhang A

# Funktionalanalysis

### A.1 Sobolev-Räume

Sei im Weiteren  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wir definieren den Sobolev-Raum allgemein wie folgt (vgl. [Bra13] Kapitel II, §2 und [Wal11] Kapitel 6).

**Definition A.1.** Seien  $1 \leq p \leq \infty$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Die Menge

$$W_p^m(\Omega) := \left( \{u \in L_p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}, \|\cdot\|_{W_p^m} \right)$$

heißt *Sobolev-Raum* der Ordnung  $m$ . Dabei ist

$$\|u\|_{W_p^m} := \|u\|_{W_p^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wenn  $1 \leq p < \infty$ . Im Fall  $p = \infty$  ist  $\|u\|_{W_p^m} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty$ .

Weiterhin bezeichne  $L_p(\Omega)$  den *Lebesgue-Raum*, d.h. den Raum der messbaren Funktionen, deren  $p$ -te Potenz Lebesgue-integrierbar über  $\Omega$  ist, d.h.

$$L_p(\Omega) := \left( \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ messbar}, \|u\|_{L_p} < \infty\}, \|\cdot\|_{L_p} \right),$$

wobei  $\|u\|_{L_p} := \|u\|_{L_p(\Omega)} = \|u\|_{W_p^0}$ .

**Definition A.2.** Der Raum

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega\}$$

heißt der *Raum der Testfunktionen*, wobei  $K \subset\subset \Omega \Leftrightarrow \bar{K} \subset \Omega$  kompakt.

**Bemerkung A.3.** Seien  $u \in W_p^m(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  und  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq m$ . Dann bezeichnen wir  $v = \partial^\alpha u$  als *schwache Ableitung* von  $u$ , wenn gilt

$$\int_{\Omega} v \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \cdot \partial^\alpha \varphi \, dx.$$

**Beispiel A.4.** Es sei  $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$  und  $u(x) = |x| \in L_2(\Omega)$ . Betrachten wir  $v(x) = \text{sign}(x)$ , so ergibt sich für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \cdot \varphi \, dx &= \int_{-1}^0 -1 \cdot \varphi(x) \, dx + \int_0^1 1 \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= -x\varphi(x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -x\varphi'(x) \, dx + x\varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x\varphi'(x) \, dx \\ &= - \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) \, dx = (-1)^1 \int_{\Omega} u \cdot \varphi' \, dx, \end{aligned}$$

da  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ . Also ist  $v = \partial u$  und somit  $u \in W_2^1(\Omega)$ . Analog kann man nachrechnen, dass

$$\int_{\Omega} v \cdot \varphi' \, dx = -2\varphi(0)$$

ist und somit  $u$  nicht zweimal schwach ableitbar ist, d.h.  $u \notin W_2^2(\Omega)$ .

Wir wollen in der Theorie der Finiten Elemente Methode vor allem Sobolev-Räume über dem Raum  $L_2(\Omega)$  betrachten, daher ist folgender Satz essentiell.

**Satz A.5.** Es seien  $1 \leq p \leq \infty$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- (a)  $W_p^m(\Omega)$  ist ein Banachraum.
- (b)  $H^m(\Omega) := W_2^m(\Omega)$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_m := (u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

wobei

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv \, dx.$$

**Bemerkung A.6.** (a) Die Norm auf  $H^m(\Omega)$  ergibt sich analog zur Norm des allgemeinen Sobolev-Raumes durch das Skalarprodukt, d.h.  $\|u\|_m := \|u\|_{H^m(\Omega)} := \|u\|_{W_2^m}$ .

- (b) Analog dazu definieren wir die Halbnorm  $|\cdot|_m$  auf  $H^m$  wie folgt:

$$|u|_m := |u|_{H^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definition A.7.** Der Raum  $H_0^m(\Omega)$  ist die Vervollständigung von  $\mathcal{D}(\Omega)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_m$ .

**Bemerkung A.8.** Die Funktionen  $u \in H_0^m(\Omega)$  können als die Funktionen  $u \in H^m(\Omega)$  mit  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  aufgefasst werden. Weiter ist  $H_0^m(\Omega)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H^m(\Omega)$  (vgl. auch [Wal11] Bemerkung 6.7).

**Theorem A.9** (Spursatz). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $C^2$ . Dann gilt für  $1 < p < \infty$ , dass ein  $c > 0$  existiert mit*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

für alle  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Die Restriktion  $[u \mapsto u|_{\partial\Omega}]$  lässt sich also eindeutig stetig zum Spuroperator  $\gamma_0 \in \mathcal{L}(W_p^1(\Omega), L_p(\partial\Omega))$  fortsetzen.

## A.2 Optimalitätskriterien

Zunächst definieren wir einen verallgemeinerten Begriff der Richtungsableitung, der auch auf unendlich dimensionalen Vektorräumen existiert.

**Definition A.10.** Es seien  $V$  ein Vektorraum,  $M \subset V$  und  $W$  ein normierter Raum, sowie  $F : M \rightarrow W$  eine Abbildung,  $x_0 \in M$  und  $v \in V$ . Dann heißt  $F$  *Gâteaux-differenzierbar* (bzw. in Richtung  $v$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar), falls es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $[x_0 - \varepsilon v, x_0 + \varepsilon v] \subset M$  gibt und der Grenzwert

$$\mathcal{D}_v F(x_0) := \left. \frac{d}{dt} F(x_0 + tv) \right|_{t=0} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} \quad (\text{A.1})$$

in  $W$  existiert.  $\mathcal{D}_v F(x_0)$  heißt dann *Gâteaux-Ableitung* von  $F$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$ .

Falls wir nur  $[x_0, x_0 + \varepsilon v] \subset M$  voraussetzen, so können wir in (A.1)  $\lim_{t \rightarrow 0}$  durch  $\lim_{t \rightarrow +0}$  ersetzen. Dann nennen wir (A.1) die *rechtsseitige Gâteaux-Ableitung* und bezeichnen diese mit  $\mathcal{D}_v^+ F(x_0)$ .

Für die Variationsrechnung sind folgende zwei Sätze für uns von besonderer Bedeutung.

**Satz A.11.** (Charakterisierungssatz der konvexen Optimierung) *Es seien  $M \subset V$  eine konvexe Menge,  $V$  ein Vektorraum und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Funktional. Dann gilt für  $x_0, x \in M$ :*

*$x_0$  ist Lösung von  $\min_{x \in M} F(x)$  genau dann, wenn für alle  $x \in M$  gilt*

$$\mathcal{D}_{x-x_0}^+ F(x_0) \geq 0.$$

*Beweis.* Siehe [GRT09], Kapitel 3.3.3, Satz 3.34. □

**Satz A.12.** Es sei  $U \subset V$  ein (Unter-)Vektorraum,  $V$  ein Vektorraum und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Gâteaux-differenzierbare konvexe Funktion. Dann ist  $x_0 \in U$  genau dann Lösung von  $\min_{x \in U} F(x)$ , wenn für alle  $u \in U$  gilt

$$\mathcal{D}_u F(x_0) = 0.$$

*Beweis.* Siehe [GRT09], Kapitel 3.3.3, Satz 3.35. □

### A.3 Konvergenzbegriffe

**Definition A.13.** Es sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ .

(a) Eine Folge  $(u_j)$  in  $L_p$  konvergiert schwach gegen  $u \in L_p(\Omega)$

$$\begin{aligned} &: \Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u \text{ in } L_p(\Omega) \\ &: \Longleftrightarrow \forall v \in L_{p'}(\Omega) : \int_{\Omega} u_j v \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} u v \, dx \text{ in } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

(b) Eine Folge  $(u_j) \in W_p^m(\Omega)$  konvergiert schwach gegen  $u \in W_p^m(\Omega)$

$$\begin{aligned} &: \Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u \text{ in } W_p^m(\Omega) \\ &: \Longleftrightarrow \partial^\alpha u_j \rightharpoonup \partial^\alpha u \text{ in } L_p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

**Bemerkung A.14.** Sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , dann ist:

(a) Ist  $u_j \rightarrow u$  in  $W_p^m(\Omega)$ , dann folgt  $u_j \rightharpoonup u$  in  $W_p^m(\Omega)$ , d.h. „starke Konvergenz ist stärker als schwache Konvergenz“.

*Beweis.*  $\forall v \in L_{p'}(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$  gilt

$$\left| \int_{\Omega} (\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u) v \, dx \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|v\|_{L_{p'}(\Omega)} \|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \longrightarrow 0. \quad \square$$

(b) Sei  $1 < p < \infty$ ,  $(u_j) \subset W_p^m(\Omega)$  beschränkt (bzgl.  $\|\cdot\|_{W_p^m}$ ), dann folgt, dass eine Teilfolge  $(u_{j'})$  und ein  $u \in W_p^m(\Omega)$  existiert, so dass  $u_{j'} \rightharpoonup u$  in  $W_p^m(\Omega)$ , d.h. „beschränkte Folgen sind relativ schwach kompakt“.

*Beweis.* Vgl. [Rud91]. □

(c) Es sei  $M \subset W_p^m(\Omega)$  konvex und abgeschlossen (bzgl.  $\|\cdot\|_{W_p^m}$ ), sowie  $(u_j) \subset M$  mit  $u_j \rightharpoonup u$  in  $W_p^m(\Omega)$ , dann ist  $u \in M$ , d.h. „abgeschlossene konvexe Mengen sind schwach abgeschlossen“ (Theorem von Mazur; ohne Beweis, vgl. [Rud91]).

- (d) Es sei  $u_j \rightharpoonup u$  in  $W_m^p(\Omega)$ , dann folgt  $(u_j)$  ist beschränkt in  $W_p^m(\Omega)$  (bzgl.  $\|\cdot\|_{W_p^m}$ ), d.h. „schwach konvergente Folgen sind beschränkt“.

*Beweis.* Theorem von Mackey, vgl. [Rud91].  $\square$

- (e)  $u_j \rightharpoonup u$  in  $W_p^m(\Omega)$ ,  $u_j \rightharpoonup v$  in  $W_p^m(\Omega)$ , dann gilt  $u = v$ , d.h. „Grenzwerte von schwach konvergenten Folgen sind eindeutig“.

*Beweis.* Aus dem Hauptsatz der Variationsrechnung folgt die Behauptung.  $\square$

- (f) Sei  $u_j \rightharpoonup u$  in  $W_p^m(\Omega)$ , dann folgt  $\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq \liminf \|u_j\|_{W_p^m(\Omega)}$ .

**Theorem A.15.** *In einem reflexiven Raum  $V$ , d.h. der Bidualraum  $V''$  ist isomorph zu  $V$ , besitzt jede beschränkte Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine schwach konvergente Teilfolge  $(v_{n_j})$ .*

*Beweis.* Der Beweis befindet sich in [Wer11] Kapitel III, Theorem 3.7.  $\square$

**Bemerkung A.16.** Jeder Hilbertraum  $H$  ist reflexiv.

*Beweis.* Dies folgt aus dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.15).  $\square$

## Anhang B

# Optimierung

### B.1 Quadratische Programmierung

Um im folgenden die Idee des Algorithmus zu verstehen, führen wir zunächst grundlegende Begriffe ein. Ein quadratisches Problem mit Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen ist von der Form

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T G \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{c} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E}, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{I}$  die Indexmengen der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen darstellen und  $\mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ , sowie  $G$  eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix ist, welche die Hesse-Matrix des Problems darstellt. Damit ist die Hesse-Matrix konstant und daher das Problem konvex, wenn  $G$  positiv semidefinit ist. (Ist  $G$  positiv definit, so nennen wir das Problem strikt konvex. Wenn  $G$  indefinit ist, ist (B.1) „nicht konvex“.)

Da sonst das quadratische Problem (und damit der Active-Set Algorithmus) zu kompliziert wird, betrachten wir hier nur den konvexen Fall. Für diesen Fall können wir leicht zeigen, dass eine Lösung  $\mathbf{x}^*$ , die die Bedingungen 1. Ordnung erfüllt, auch globale Lösung des Problems ist (s. Theorem ??). Anschaulich kann es im indefiniten Fall mehrere optimale Punkte geben, die voneinander getrennt liegen, d.h. die Menge der optimalen Punkte ist nicht zusammenhängend, wodurch das Auffinden des globalen Minimums erschwert wird.

Die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung sind die KKT-Bedingungen und können hier angewendet werden, da die Restriktionen und die Zielfunktion stetig differenzierbar sind. Die Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$  für das quadratische Problem ist

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T G \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{c} - \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \lambda_i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i). \tag{B.2}$$

Damit ergeben sich – vgl. [NW06], Theorem 12.1 – mit der Menge der aktiven Nebenbedingungen  $\mathcal{A}(\mathbf{x}^*) = \{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I} : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$  die KKT-Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= G\mathbf{x}^* + \mathbf{c} - \sum_{i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* \mathbf{a}_i = 0, \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* &= b_i, \quad \forall i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*), \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* &\geq b_i, \quad \forall i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}(\mathbf{x}^*), \\ \lambda_i^* &\geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \cap \mathcal{A}(\mathbf{x}^*). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Hierbei ist  $\mathbf{x}^*$  Lösung von (B.1) und erfüllt die LICQ-Bedingung;  $\boldsymbol{\lambda}^*$  ist dazugehöriger optimaler Lagrange-Multiplikator. In (B.3) wird die Komplementaritätsbedingung  $\lambda_i^* c_i(\mathbf{x}^*) = 0$  impliziert durch  $\lambda_i^* = 0 \forall i \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ .

**Theorem B.1.** *Wenn  $\mathbf{x}^*$  die Bedingungen (B.3) erfüllt mit  $\lambda_i^*, i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$  und  $G$  ist positiv semidefinit, dann ist  $\mathbf{x}^*$  eine globale Lösung von (B.1).*

*Beweis.* Wenn  $\mathbf{x}$  ein beliebiger weiterer zulässiger Punkt für (1.1) ist, gelten die Restriktionen  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, i \in \mathcal{E}$ , sowie  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, i \in \mathcal{I} \cap \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$  für  $\mathbf{x}$  und damit gilt zusammen mit der ersten Bedingung von (B.3), dass

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (G\mathbf{x}^* + \mathbf{c}) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \underbrace{\lambda_i^* \mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{\geq 0} + \sum_{i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \cap \mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* \mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Dann drücken wir  $q(\mathbf{x})$  durch  $q(\mathbf{x}^*)$  aus und wenden die obere Ungleichung sowie die positive Semidefinitheit für  $G$  an, um zu zeigen, dass  $q(\mathbf{x}) \geq q(\mathbf{x}^*)$  ist. Damit ist  $\mathbf{x}^*$  globale Lösung des quadratischen Problems.  $\square$

Daher ist im positiv semidefiniten Fall gesichert, dass ein optimaler Punkt auch gleichzeitig globale Lösung ist.

## B.2 Active Set-Methode für konvexe QPs

Wenn wir eine Lösung  $\mathbf{x}^*$  für das Problem (B.1) kennen, so ist auch die Menge der aktiven Nebenbedingungen  $\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$  bekannt und wir können (B.1) vereinfachen zum Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \quad q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T G \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{c}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*). \tag{B.4}$$

Dieses könnten wir dann beispielsweise mit direkten Verfahren wie der Schur-Komplement-Methode oder der Nullraum-Methode lösen. Natürlich ist die optimale Lösung zu Beginn noch nicht bekannt und damit auch nicht die aktiven Restriktionen. Jedoch können wir diese Idee für die Active-Set-Methode verwenden.

Das Hauptziel der Active-Set-Methode ist, die Menge der aktiven Restriktionen bzgl. der optimalen Lösung zu finden, wobei wir hier die primale

Variante betrachten wollen, in der die Approximierte  $\mathbf{x}_k$  zulässig bzgl. des primalen Problems ist.

Die Grundidee ist, ein quadratisches Teilproblem zu lösen, bei dem wir bestimmte Nebenbedingungen aus Problem (B.1) bzgl.  $\mathcal{I}$  als aktiv annehmen. Die dadurch beschriebene Indexmenge der aktiven Restriktionen für  $\mathbf{x}_k$  im  $k$ -ten Schritt heißt *working set* und kann wie folgt beschrieben werden

$$\mathcal{W}_k = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k = b_i, i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}, \mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}.$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass die Nebenbedingungen in  $\mathcal{W}_k$  die LICQ-Bedingung erfüllen, selbst wenn diese bezogen auf alle Nebenbedingungen an der Stelle  $\mathbf{x}_k$  nicht erfüllt wird.

Wir betrachten nun den  $k$ -ten Schritt mit der Approximierten  $\mathbf{x}_k$  und dem working set  $\mathcal{W}_k$ . Wir berechnen die neue Iterierte  $\mathbf{x}_{k+1}$ , indem wir eine Richtung  $\mathbf{p}$  finden, in der wir unter den Nebenbedingungen  $\mathcal{W}_k$  die Funktion  $q$  minimieren. Hierfür betrachten wir  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}$  und setzen  $\mathbf{x}_{k+1}$  in  $q$  ein:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}_{k+1}) &= q(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \mathbf{p})^T G(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}) + (\mathbf{x}_k + \mathbf{p})^T \mathbf{c} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T G \mathbf{x}_k + \underbrace{\mathbf{x}_k^T G \mathbf{p}}_{\text{da } G \text{ symm.}} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T G \mathbf{p} + \mathbf{x}_k^T \mathbf{c} + \mathbf{p}^T \mathbf{c} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T G \mathbf{p} + \mathbf{g}_k^T \mathbf{p} + \rho_k, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{g}_k = G \mathbf{x}_k + \mathbf{c}$  und  $\rho_k = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T G \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^T \mathbf{c}$ . Da wir den Parameter  $\mathbf{p}$  so wählen wollen, so dass  $q(\mathbf{x}_{k+1})$  minimal wird, ist der Term  $\rho_k$  bzgl. des Problems konstant und kann somit für die Lösung jenes weggelassen werden. Da weiterhin auch  $\mathbf{x}_{k+1}$  die aktiven Nebenbedingungen  $\mathcal{W}_k$  erfüllen soll, gilt

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{p} = \mathbf{a}_i^T (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \underbrace{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{k+1}}_{=b_i} - \underbrace{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k}_{=b_i} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{W}_k.$$

Zusammengefasst müssen wir also im  $k$ -ten Schritt das Teilproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{p}^T G \mathbf{p} + \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i^T \mathbf{p} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{W}_k \end{aligned} \tag{B.5}$$

lösen. Die Lösung im  $k$ -ten Schritt von (B.5) bezeichnen wir mit  $\mathbf{p}_k$ . Umgekehrt gilt damit, analog zur obigen Rechnung, natürlich auch, dass für alle  $i \in \mathcal{W}_k$  die Restriktion aktiv bleibt für  $\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k$  mit beliebigem  $\alpha$ . Da  $G$  positiv definit ist, kann (B.5) nun – wie schon bei (B.4) erwähnt – mit Schur-Komplement-Methode oder Nullraum-Methode gelöst werden.

Wie wir schon wissen, ist die neue Iterierte  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k$  bzgl.  $\mathcal{W}_k$  immer noch zulässig. Nun müssen wir jedoch feststellen, ob diese Iterierte



auch alle übrigen Restriktionen mit  $i \notin \mathcal{W}_k$  erfüllt. Ist dies der Fall, so setzen wir  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k$ , ansonsten suchen wir das größtmögliche  $\alpha_k \in [0, 1]$ , so dass

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

zulässig bleibt. Hierfür betrachten wir zwei Fälle.

Fall 1: Gilt für ein  $i \notin \mathcal{W}_k$ , dass  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k \geq 0$  ist, so folgt

$$\mathbf{a}_i^T (\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k + \underbrace{\alpha_k \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k}_{\geq 0} \geq \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k \geq b_i,$$

da  $\alpha_k \geq 0$ , d.h. für diese Nebenbedingungen müssen wir für die Wahl von  $\alpha_k$  nichts beachten.

Fall 2: Existiert ein  $i \notin \mathcal{W}_k$ , für das  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k < 0$  ist, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_i^T (\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \geq b_i \\ \iff & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k \geq b_i \\ \iff & \alpha_k \underbrace{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k}_{< 0} \geq b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k \\ \iff & \alpha_k \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k}. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Damit folgt mit (B.6) und den vorherigen Überlegungen, dass zusammengefasst

$$\alpha_k = \min \left\{ 1, \min_{i \notin \mathcal{W}_k, \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k < 0} \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k} \right\} \tag{B.7}$$

gilt. Eine Restriktion  $i \notin \mathcal{W}_k$ , für die das Minimum für  $\alpha_k$  angenommen wird, nennen wir *blocking constraint*; diese muss nicht eindeutig sein, da wir beispielsweise anschaulich auch von einer Ecke geblockt werden können. Ist  $\alpha_k = 1$ , so werden alle Restriktion außerhalb vom working set mit dem Schritt  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k$  erfüllt, d.h. es gibt keine blocking constraint. Gibt es eine Nebenbedingung  $j \notin \mathcal{W}_k$ , die aktiv ist, obwohl sie nicht zum working set gehört, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \min \left\{ 1, \min_{i \notin \mathcal{W}_k, \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k < 0} \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_k} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{b_j - b_j}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Es sei  $j \notin \mathcal{W}_k$  nun ein Index einer blocking constraint. Dann ist

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k = \mathbf{x}_k + \frac{b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \mathbf{p}_k.$$

Setzen wir  $\mathbf{x}_{k+1}$  in die  $j$ -te Restriktion ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{a}_j^T \left( \mathbf{x}_k + \frac{b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \mathbf{p}_k \right) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k + \frac{b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \cdot \cancel{\mathbf{a}_j^T \mathbf{p}_k} \\ &= \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k + b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_k = b_j, \end{aligned}$$

d.h. die blocking constraint ist für die neue Iterierte  $\mathbf{x}_{k+1}$  nach Konstruktion aktiv. Daher setzen wir als neues working set  $\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k \cup \{j\}$ .

Das oben beschriebene Vorgehen wiederholen wir so lange, bis wir das working set  $\hat{\mathcal{W}}$  mit dem Minimum des quadratischen Problems  $\hat{\mathbf{x}}$  gefunden haben. Dies ist leicht zu erkennen, da wir (B.1) auf  $\mathcal{W}_k$  nicht weiter minimieren können, sobald es keinen Schritt  $\mathbf{p}$  gibt, in dessen Richtung wir  $q$  verringern können, d.h. wenn  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  die Lösung für das Teilproblem (B.5) ist. Dann ist der optimale Punkt  $\hat{\mathbf{x}}$  bzgl. des working sets  $\hat{\mathcal{W}} \subset \mathcal{A}(\hat{\mathbf{x}})$  gefunden.

Wir müssen jetzt überprüfen, ob  $\hat{\mathbf{x}}$  die KKT-Bedingungen erfüllt. Wir wissen, dass für  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  die KKT-Bedingungen für (B.5)

$$\begin{pmatrix} G & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{p} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{g}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{pmatrix}$$

mit  $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{c} + G\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{h}} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$  und  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  erfüllt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= \hat{\mathbf{g}} \iff \sum_{i \in \hat{\mathcal{W}}} \mathbf{a}_i \hat{\lambda}_i = G\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}, \\ \mathbf{0} &= \hat{\mathbf{h}} \iff A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

wobei  $A$  die Gradienten  $\mathbf{a}_i^T$  der aktiven Restriktionen  $\hat{\mathcal{W}}$  zeilenweise enthält. Damit werden die ersten beiden KKT-Bedingungen aus (B.3) erfüllt. Da die Schrittweite  $\alpha_k$  mit (B.6) so gewählt ist, dass die übrigen Restriktionen erfüllt bleiben, gilt auch die dritte Bedingung aus (B.3). Es bleibt zu überprüfen, ob die Lagrange-Multiplikatoren  $\hat{\lambda}_i \geq 0$  sind.

Gilt  $\hat{\lambda}_i \geq 0$  für alle  $i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$ , so sind alle KKT-Bedingungen erfüllt und damit  $\mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{x}}$ . Existiert allerdings ein  $j \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$ , so dass  $\hat{\lambda}_j < 0$  ist, so können wir den Wert von  $q$  noch weiter verringern, indem wir die  $j$ -te Restriktion wegfällen lassen (vgl. [NW06], Kapitel 12.3). Dies zeigt das folgende Theorem.

**Theorem B.2.** *Der Punkt  $\hat{\mathbf{x}}$  erfülle die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung für das Teilproblem (B.5) auf  $\hat{\mathcal{W}}$ . Weiter seien die Gradienten  $\mathbf{a}_i, i \in$*

$\hat{\mathcal{W}}$ , linear unabhängig (LICQ) und es gebe einen Index  $j \in \mathcal{W}$  mit  $\hat{\lambda}_j < 0$ .  
Es sei  $\mathbf{p}$  die Lösung vom Teilproblem (B.5) ohne die Restriktion  $j$ , d.h.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{p}^T G \mathbf{p} + (G \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^T \mathbf{p}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_i^T \mathbf{p} = 0, \quad \forall i \in \hat{\mathcal{W}} \setminus \{j\}. \end{aligned}$$

Dann ist  $\mathbf{p}$  eine zulässige Richtung für die Nebenbedingung  $j$ , d.h.  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{p} \geq 0$ .  
Weiterhin gilt sogar  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{p} > 0$  und  $\mathbf{p}$  ist eine Abstiegsrichtung für  $q$ , wenn  $\mathbf{p}$  die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung erfüllt.

Da wir zeigen können, dass der erzielte Abstieg für  $q$  durch das Weglassen einer Nebenbedingung mit negativem Lagrange-Multiplikator  $\lambda_i$  proportional zu  $|\lambda_i|$  ist, eliminieren wir gerade die Restriktion mit kleinstem Lagrange-Multiplikator. Es kann allerdings sein, dass der folgende zu berechnende Schritt  $\mathbf{p}$  aufgrund einer blocking constraint kurz ist, wodurch nicht garantiert ist, dass  $q$  den größtmöglichen Abstieg erfährt.

### B.3 Algorithmus

---

**Algorithm B.1** Active-Set-Methode für konvexe quadratische Probleme

---

Gegeben sei ein zulässiger Startpunkt  $\mathbf{x}_0$  für (B.1) und definiere  $\mathcal{W}_0$  z.B. mit allen aktiven Restriktionen bzgl.  $\mathbf{x}_0$ .

```

for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
  Löse (B.5) zur Berechnung von  $\mathbf{p}_k$ ;
  if  $\mathbf{p}_k = \mathbf{0}$  then
    Berechne die Lagrange-Multiplikatoren mittels (2.5a)
    und setze  $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$ ;
    if  $\hat{\lambda}_i \geq 0 \forall i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$  then
      stop mit der Lösung  $\mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{x}}$ ;
    else
       $j \leftarrow \arg \min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$ ;
       $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k$ ,  $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$ ;
    end if
  else ( $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{0}$ )
    Berechne  $\alpha_k$  mit (B.7);
     $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ ;
    if  $\alpha_k < 1$  (blocking constraint existiert) then
      Bestimme blocking constraint  $j$  und setze  $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \cup \{j\}$ 
    else
       $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k$ 
    end if
  end if
end for

```

---

## Anhang C

# Tensorrechnung

hier auch ein paar Integralsätze!  
Produktregel für die Divergenz

## Anhang D

# Quellcode

### D.1 Implementierung des Fehlerschätzers für das Hindernisproblem

# Index

- (quasi-) uniforme Zerlegung, 20
- Poincaré-Friedrich-Ungleichung
  - verallgemeinerte, 79
- a posteriori Fehlerschätzer, 27
- Active-Set-Algorithmus, 59
- aktuelle Konfiguration, 31
- Approximationssatz, 8
- Approximationssatz für Interpolationen, 26
- Ausgangskonfiguration, 31, 49, 51
- Betrachtungsweise
  - Euler'sche, 31
  - Lagrange'sche, 31
  - materielle, 31, 32
  - räumliche, 32
- Bilinearform
  - elliptisch, 11
  - koerziv, 11
  - stetig, 11
- Bubble-Funktion, 64
- Cauchy-Folge, 7
- Cauchy-Green-Tensor
  - rechter, 32
- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 7, 15
- Cauchy-Spannungstensor, 34
- Cauchy-Theorem, 52
- Coulomb-Reibung, 53
- Courant-Element, 22
- Defektproblem, 28, 63
  - lokales, 66
- Deformationsgradient, 32
  - materiell, 33
  - räumlich, 33
- Dirichlet-Problem, 9, 10
  - homogenes, 10, 11, 38
- Dirichlet-Problem, 75
- ebener Verzerrungszustand, 35
- Einstein'sche Summenkonvention, 55
- Elastizitätsmodul, 35
- Energie-Norm, 25
- Fehlerindikator, 69, 70, 79
- Finite-Elemente-Methode, 22
- Fixpunktsatz von Brouwer, 42
- Gâteaux-Ableitung, 33, 104
  - rechtsseitig, 104
- Gâteaux-differenzierbar, 57, 64, 104, 105
- Galerkin-Approximation, 18, 25, 26, 28
- Galerkin-Orthogonalität, 26, 71, 72
- Galerkin-Verfahren, 18, 22
- Gap-Funktion, 51
- global-local node ordering, 24
- hängender Knoten, 21
- Hilbertraum, 7
- Hindernisproblem, 49
- homogenes Dirichlet-Problem, 11
- Hooke'sche-Gesetz, 53
- Hooke'sches Materialmodell, 35
- isoparametrisches Element, 10
- Komplementaritätsbedingung, 52
- Konfiguration, 31
  - aktuelle, 31
  - Ausgangs-, 31

- Momentan-, 31
- Referenz-, 31
- Kontaktknoten, 72
- Kontaktproblem, 49
- Kontaktrand, 52
- Kontinuum, 31
- Korn'sche Ungleichung, 56
- kritische Richtung, 50
- kritischer Punkt, 51
  
- Lagrange-Basis, 22
- Lamé-Konstanten, 35
- Lax-Milgram, 13, 15, 16, 36
- Lebesgue-Raum, 102
- lineares Komplementaritätsproblem, 43
- lokale Steifigkeitsmatrix, 24
  
- master, 50
- materielle Punkte, 31
- Matlab
  - refinemesh, 30
- Momentankonfiguration, 31, 51
  
- Nichtdurchdringungsbedingung, 51
- Nichtkontaktknoten, 72
- nodale Basis, 22
- nodale Basisfunktion, 21, 22
  
- orthogonales Komplement, 9
- Oszillation, 73
- Oszillationsterme, 73, 75, 88
  
- Penalty-Methode, 60
- Poincaré-Friedrich-Ungleichung, 15, 79–81, 83–86, 115
- Projektionen, 8
  
- quadratisches Programm, 44
  
- räumliche Punkte, 31
- Randbedingungen
  - Dirichlet, 49
  - Dirichlet-Rand, 54
  - Kontakt, 49
  - Neumann, 49, 52
  
- Raum der Testfunktionen, 102
- Referenzkonfiguration, 31
- reflexiver Raum, 106
- Reibungsfunktional, 57
- Riesz'scher Darstellungssatz, 16
  
- Saturationseigenschaft, 28
- Satz von Gauß, 34, 54
- Schubmodul, 35
- schwache Ableitung, 102
- schwache Lösung, 11
- Signorini-Kontakt, 49, 52–54
- slave, 50
- Sobolev-Raum, 7, 102
- Spannung, 49, 52
- Spannungsrand, 49
- Spline-Interpolation, 48
- Spursatz, 104
- starkes Problem, 11
- Steifigkeitsmatrix, 19
  
- Tresca-Reibung, 53, 57
- Triangulierung, 20
  - konform, 20, 29
  - quasi-uniform, 20, 26
  - uniform, 20
  - zulässig, 20
  
- Ungleichungen
  - Poincaré, 79
- Variationsgleichung, 10
- Verfeinerung
  - blau, 29, 30
  - grün, 29, 30
  - regulär, 29
  - rot, 29
- Verschiebung, 33
- Verschiebungsgradient
  - materiell, 33
  - räumlich, 33
- Verschiebungsrand, 49
- Verzerrung, 49
- Verzerrungstensor
  - Green-Lagrange, 32, 33

## *Index*

---

virtuelle Verschiebung, 54  
Voigt-Notation, 35