Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für reguläre Ausdrücke r, s und t ($r \equiv s$ bedeutet $L(r) = L(s)$):

a) $r \mid s \equiv s \mid r$

b) $(r \mid s) \mid t \equiv r \mid (s \mid t)$

c) $(rs)t \equiv r(st)$

d) $r(s \mid t) \equiv rs \mid rt$

e) $\emptyset^* \equiv \varepsilon$

f) $(r^*)^* \equiv r^*$

g) $r^* \equiv rr^* \mid \varepsilon$

h) $(\varepsilon \mid r)^* \equiv r^*$

Die Sprache $\mathbf{L}(\alpha)$ eines regulären Ausdrucks α ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\emptyset) &= \emptyset \\
\mathbf{L}(\epsilon) &= \{\epsilon\} \\
\mathbf{L}(a) &= \{a\} \text{ für jedes } a \in \Sigma \\
\mathbf{L}((\alpha\beta)) &= \mathbf{L}(\alpha) \circ \mathbf{L}(\beta) \\
\mathbf{L}((\alpha \mid \beta)) &= \mathbf{L}(\alpha) \cup \mathbf{L}(\beta) \\
\mathbf{L}((\alpha)^*) &= \mathbf{L}(\alpha)^*
\end{aligned}$$

a) $$L(r|s) \equiv L(r) \cup L(s)$$
$$\equiv L(s) \cup L(r)$$
$$\equiv L(s|r)$$

b) $$L((r|s)|t) \equiv L(r|s) \cup L(t)$$
$$\equiv L(r) \cup L(s) \cup L(t)$$
$$\equiv L(r) \cup L(s|t)$$
$$\equiv L(r|(s|t));$$

c) $$L((rs)t) \equiv L(rs) \circ L(t)$$
$$\equiv L(r) \circ L(s) \circ L(t)$$
$$\equiv L(r) \circ L(st)$$
$$\equiv L(r(st)) \quad \square$$

d) $$L(r(s|t)) \equiv L(r) \circ L(s|t) \equiv L(r) \circ (L(s) \cup L(t))$$
$$\equiv L(r) \circ L(s) \cup L(r) \circ L(t)$$
$$\equiv L(rs|rt) \quad \square$$

e) $$L(\emptyset^*) = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \emptyset^2 \cup \dots$$
$$= \{\varepsilon\} \cup \emptyset = \{\varepsilon\}.$$

f) $L((r^*)^*) \equiv L(r^*)^* \equiv (L(r)^*)^* \overset{Ü1/A2\,d)}{\equiv} L(r)^* \equiv L(r^*)$ □

g) $L(rr^*|\varepsilon) \equiv L(r)\circ L(r)^* \cup \{\varepsilon\} \equiv L(r)^+ \cup \{\varepsilon\} \equiv L(r)^* \equiv L(r^*)$

h) $L((\varepsilon|r)^*) \equiv L(\varepsilon|r)^* \equiv (\{\varepsilon\} \cup L(r))^* \overset{Ü1/A2\,d)}{\equiv} L(r)^* \equiv L(r^*)$

Aufgabe 3

Geben Sie zu jedem der regulären Ausdrücke r_i einen NFA $\mathcal{M}_i$ mit $L(\mathcal{M}_i) = L(r_i)$ an.

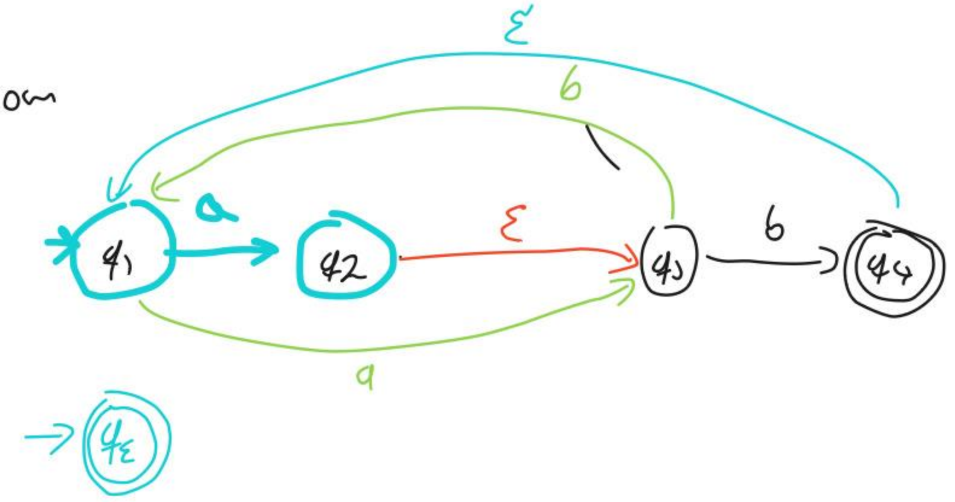
a) $r_1 = (ab)^*$

b) $r_2 = a(b \mid c)a^* \mid a^*$

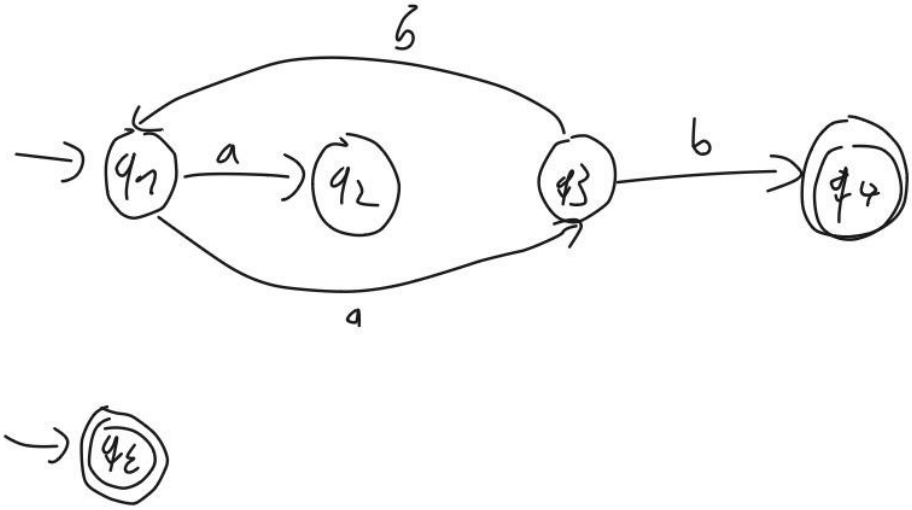
Wenden Sie dabei jeweils den *kompositionellen Ansatz* sowie den *expliziten Ansatz zur Konstruktion von NFAs* aus der Vorlesung an.

kom

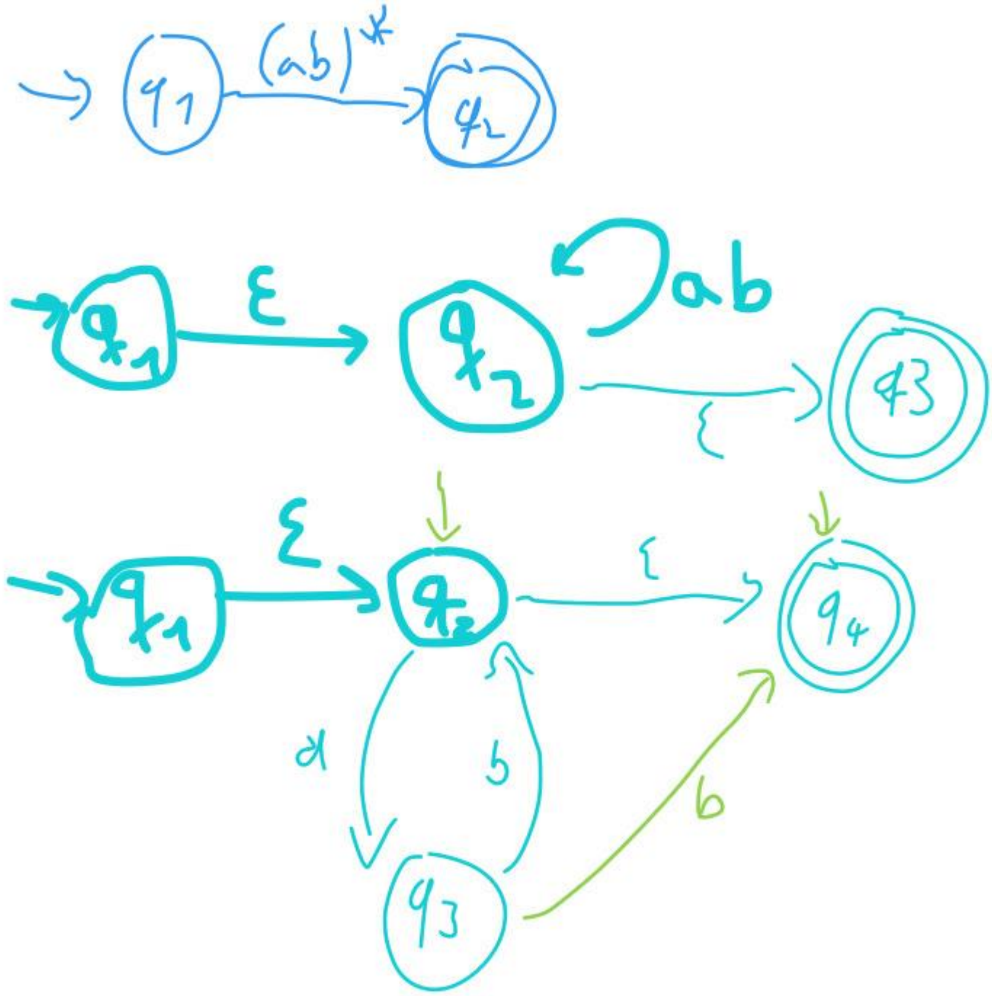
a)



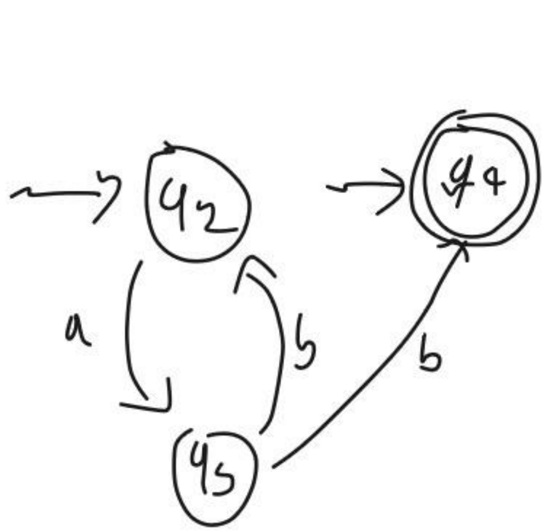
Nach ε-Elimi



explizit:



Nach ε-Elim



b) $a(b|c)a^* \mid a^*$

on NFAs

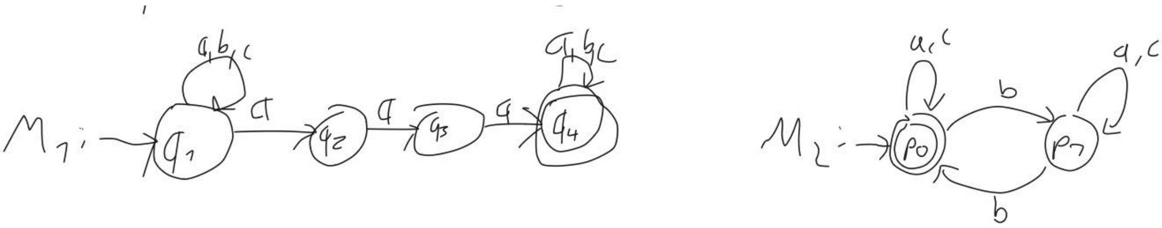
Aufgabe 4

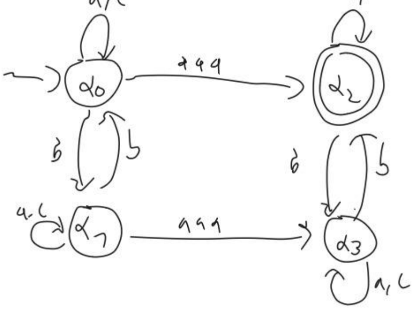
Entwickeln Sie für die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ einen regulären Ausdruck r mit $L = L(r)$. Für alle Wörter $w \in L$ gilt:

- w enthält aaa.
- w endet mit c.
- Die Anzahl der b in w ist gerade.

$$L(\alpha) = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält aaa und gerade b's} \}$$

$$= \underbrace{\{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ „aaa"} \}}_{L_1} \cap \underbrace{\{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ „gerade b's"} \}}_{L_2}$$





$\alpha_0 = (a|c)\alpha_0 \mid aaa\alpha_2 \mid b\alpha_1$

$\alpha_1 = (a|c)\alpha_1 \mid aaa\alpha_3 \mid b\alpha_0$

$\alpha_2 = (a|c)\alpha_2 \mid b\alpha_3 \mid \varepsilon$

$\alpha_3 = b\alpha_2 \mid (a|c)\alpha_3$

Lemma (Arden): Aus $\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma$ mit $\epsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$.

Arden: $\alpha_3 \equiv (a|c)^* b \alpha_2$

Einsetzen: $\alpha_2 \equiv (a|c) \alpha_2 \mid b (a|c)^* b \alpha_2 \mid \varepsilon$

$\alpha_2 \equiv (a|c|b(a|c)^*b) \alpha_2 \mid \varepsilon$

Arden: $\alpha_2 \equiv (a|c|b(a|c)^*b)^*$

Einsetzen: $\alpha_3 \equiv (a|c)^* b \; (a|c|b(a|c)^*b)^*$

$\alpha_1 \equiv (a|c)\alpha_1 \mid aaa\alpha_3 \mid b\alpha_0$

Arden $\alpha_1 \equiv (a|c)^*(aaa\alpha_3 \mid b\alpha_0)$

Einsetzen: $\alpha_0 \equiv (a|c)\alpha_0 \mid aaa\alpha_2 \mid b\alpha_1$

$\alpha_0 \equiv (a|c)\alpha_0 \mid aaa\alpha_2 \mid b(a|c)^*(aaa\alpha_3 \mid b\alpha_0)$

$\equiv (a|c|b(a|c)^*b)\alpha_0 \mid aaa\alpha_2 \mid b(a|c)^*(aaa\alpha_3)$

Arden: $\alpha_0 \equiv (a|c|b(a|c)^*b)^*(aaa\alpha_2 \mid b(a|c)^*(aaa\alpha_3))$

Einsetzen: $\alpha_0 \equiv (a|c|b(a|c)^*b)^*(aaa(a|c|b(a|c)^*b)^* \mid b(a|c)^*(aaa(a|c)^* b \; (a|c|b(a|c)^*b)^*))$

$\alpha = \alpha_0 c$