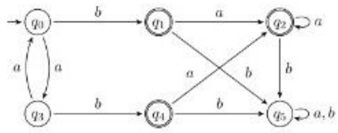
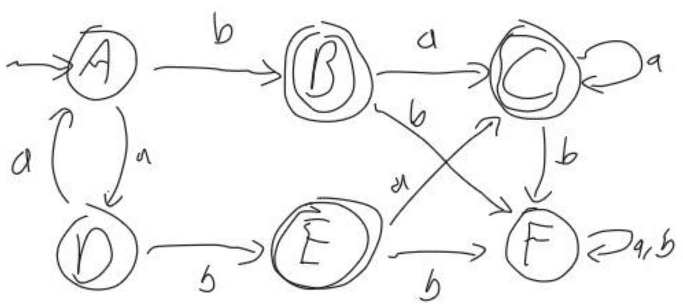
**Aufgabe 5**

Berechnen Sie für folgenden DFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2, q_4\})$ mit $\delta$:




die Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{M}}$, und geben Sie den Quotientenautomaten $\mathcal{M}/_\sim$ an.

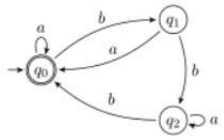



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| F | b | ε | ε | b | ε |
| E | ε | ∅ | ∅ | ε | |
| D | ∅ | ε | ε | | |
| C | ε | ∅ | | | |
| B | ε | | | | |

$\sim = \{(E,B), (B,F), (E,C), \ldots, (A,D), \ldots, (F,B), \ldots\}$

**Aufgabe 1**

Gegeben ist der DFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ mit $\delta$:




Geben Sie einen regulären Ausdruck $\alpha$ an, der die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache repräsentiert, d. h. es gilt $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

**Lemma (Arden):** Aus $\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma$ mit $\epsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$.

$$\alpha_0 \approx a\,\alpha_0 \mid b\,\alpha_1 \mid \varepsilon \qquad (1)$$

$$\alpha_1 \approx b\,\alpha_2 \mid a\,\alpha_0 \qquad (2)$$

$$\alpha_2 \approx a\,\alpha_2 \mid b\,\alpha_0 \qquad (3)$$



(3) $\alpha_2 \approx a^* b\,\alpha_0$ (Arden)

(3) → (2) $\alpha_1 \approx (b a^* b \mid a)\,\alpha_0$; (4)

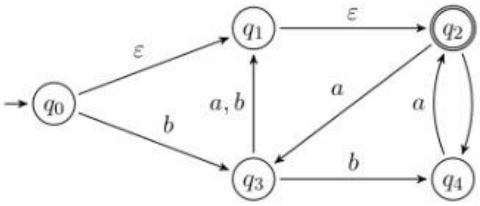
(4) → (1) $\alpha_0 \approx a\,\alpha_0 \mid b\,(b a^* b \mid a)\,\alpha_0 \mid \varepsilon$

$$\equiv (a \mid b\,(b a^* b \mid a))\,\alpha_0 \mid \varepsilon$$

$\alpha_0 \approx \underline{(a \mid b(b a^* b \mid a))^*}$ (Arden)

**Aufgabe 2**

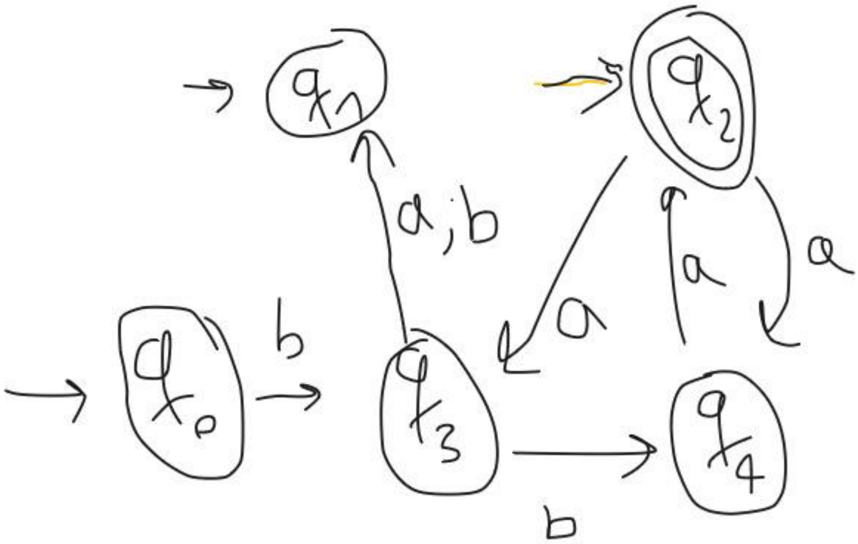
Gegeben ist der $\varepsilon$-NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit $\Delta$:

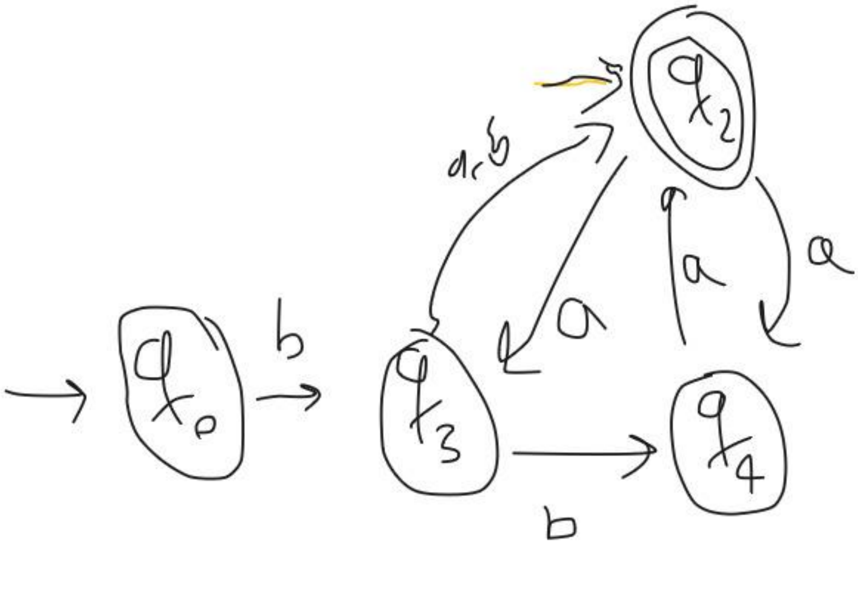



a) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$.

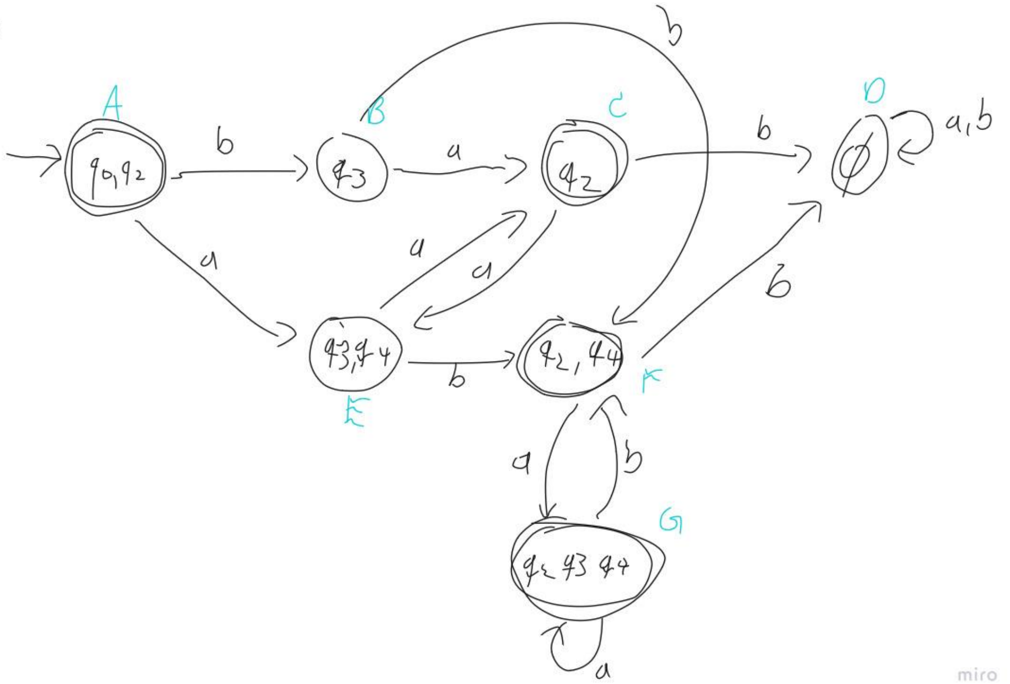
b) Geben Sie den zu $\mathcal{M}'$ reduzierten DFA $\mathcal{M}'_r$ an.

a)



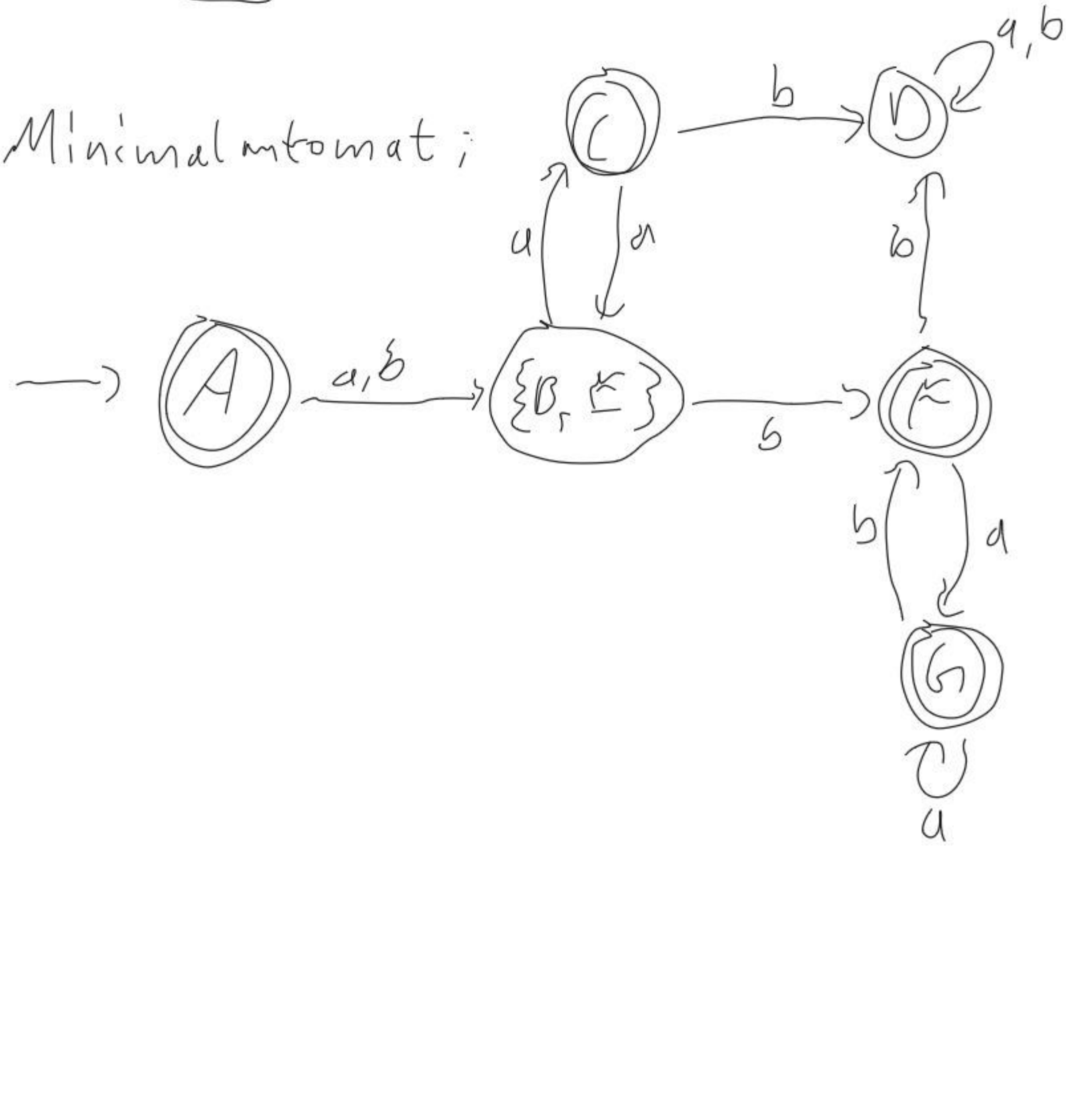
DFA : M'



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G | a | ε | a | ε | ε | b |
| F | a | ε | a | ε | ε | |
| E | ε | ∅ | ε | a | | |
| D | ε | a | ε | | | |
| C | ba | ε | | | | |
| B | ε | | | | | |

$\sim = \{\langle B, E\rangle, \langle E, B\rangle\}$

Minimalautomat:



**Aufgabe 3**

Gegeben ist der reguläre Ausdruck $\alpha = (bb)^*a$.

a) Geben Sie für $\alpha$ die *Nerode*-Rechtskongruenz $\simeq_{L(\alpha)}$ an.

b) Geben Sie einen minimalen DFA $\mathcal{M}$ an mit $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$.

Nerode-Rechtskongruenz $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:
$u \simeq_{\mathbf{L}} v$ genau dann, wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $uw \in \mathbf{L}$ gdw. $vw \in \mathbf{L}$.

$[\varepsilon]$, $[b]$, $[a]$

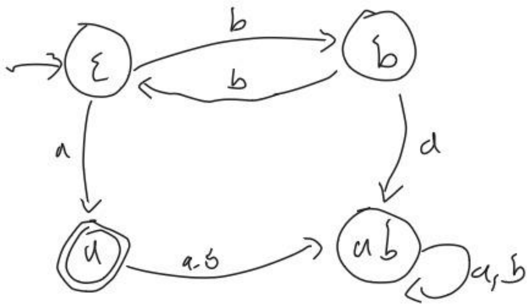
$[\varepsilon]_{\simeq L(\alpha)} = \{\varepsilon, bb, bbbb, \ldots\} = \{b^{2n} \mid n \geq 0\}$

$[b]_{\simeq L(\alpha)} = \{b, bbb, bbbbb \ldots\} = \{b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$

$[a]_{\simeq L(\alpha)} = \{a, bba, bbbba \ldots\} = \{b^{2n}a \mid n \geq 0\}$

$[ab]_{\simeq L(\alpha)} = \{b^{2n}aw \mid n \geq 0 \ w \in (a,b)^+\} \cup \{b^{2n+1}aw \mid n \geq 0 \ w \in (a,b)^*\}$

b)



**Aufgabe 4**

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_a = \{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$

(b) $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$

(c) $L_c = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0$ ist gerade und $|w|_1$ ist durch 3 teilbar$\}$

(d) $L_d =$ Menge aller $w \in \{0,1\}^*$, so daß auf jede Null eine Eins folgt.

(e) $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$

(f) $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

a)

> **Satz (Myhill & Nerode):**
> Eine Sprache **L** ist genau dann regulär, wenn $\simeq_L$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

$L_a = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Jedes Wort $w_1$ hat mögliche Suffix

$w_2 w_2^R w_1^R \quad \forall w_2 \in \{0,1\}$

Daher wenn $w_1 \neq w_2$ dann $[w_1]_{\simeq L_a} \neq [w_2]_{\simeq L_a}$

da $w_1 w_1^R \in L_a$ aber $w_1 w_2^R \notin L_a$

Es gibt unendlich viele Wörter in $\{0,1\}^*$,

also gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen

$\rightarrow L_a$ ist nicht regulär

miro

b) $L_b = \{a^n b^m b^n : n, m \geq 0\}$

$L_b \cap \underbrace{\{a^n b^k : n, k \geq 0\}}_{\text{offensichtlich regulär}} = \underbrace{\{a^n b^n \mid n \geq 0\}}_{\text{nicht regulär}}$

$\hookrightarrow L_b$ nicht regulär (Abschlusseigenschaft)

miro

**Satz (Pumping-Lemma):**
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in \mathbf{L}$ mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in \mathbf{L}$.

e) $L_e = \{ 0^{n^2} \mid n \geq 0 \}$

Pumping-Zahl $n$

dann gibt es Wort $x = 0^{n^2}$ $\quad |x| = n^2 > n$

Für jede Zerlegung $\quad x = uvw$ gilt $|uv| \leq n \quad |v| \geq 1$

Und Es muss geben $uv^2w \in L_e$

$n^2 = |x| = |uvw| < |uv^2w| = |uvw| + |v| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

aber $n \leq n^2 < |uv^2w| < (n+1)^2$ also $|uv^2w|$

keine Quadratzahl

und somit nicht in $L_e$ $\rightarrow$ Widerspruch zum P.-Lemma