von letzter Woche:

(f) $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Satz (Pumping-Lemma):
Für jede reguläre Sprache **L** gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in$ **L** mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in$ **L**.

nicht regulär,

Beweis mit Pumping Lemma

wähle $x = 0^n 1 0^{1+n} \in L_f$ $\quad |x| = 2n+2 \geq 2$

↳ w kann gepumpt werden

↳ Zerlegung

$x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$

$uv = 0^m \quad 1 \leq m \leq n$

$v = 0^l \quad 1 \leq l \leq m$

Pumpen mit $k=2$

$$uv^2w = (0^{m-l})(0^{2l})(0^{n-m})(1 0^{1+n})$$

$$= 0^{m+l} 0^{n-m} 1 0^{1+n} = 0^{n+l} 1 0^{1+n} \notin L_f$$

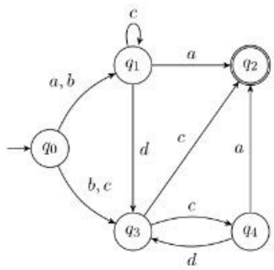
(da $n+l+1 > n+1$)

L_f erfüllt somit nicht das Pumping Lemma

→ nicht regulär

Aufgabe 1

Gegeben ist der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit δ:



a) Geben Sie für jedes $z \in \{bc, adc, cda, bcdc, acdc\}$ alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $u, w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ an, sodass für alle $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in L(\mathcal{M})$. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Ermitteln Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $z \in L(\mathcal{M})$ mit $|z| \geq n$ gilt, dass eine Zerlegung $z = uvw$ mit $u, w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ und $|uv| \leq n$ existiert, sodass für alle $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in L(\mathcal{M})$.

a) bc: keine Zerlegung möglich

adc: keine Zerlegung möglich

cda: $\notin L(\mathcal{M})$

bcdc: $u = b$, $v = cd$, $w = c$ | $u = b$, $v = c$, $w = dc$ | $u = bc$, $v = dc$, $w = \varepsilon$

acdc: $u = a$, $v = c$, $w = dc$

miro

b) $n=2,3$ nicht möglich, siehe a)

$n=4$ nicht möglich, da z.B.

$w = bdca$ nicht gepumpt werden kann

$n=6$ z.B. gültig, da M nur 5 Zustände hat und somit bei jedem Wort $w \in L(M)$ mit $|w|=6$ mindestens 1 Zustand zweimal besucht werden muss

Aufgabe 2

Gegeben ist das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Welche der folgenden Sprachen L_j über Σ ist regulär? Beweisen Sie Ihre jeweilige Antwort.

a) $L_1 = \{a^i b^i \mid 1 \leq i \leq 15\}$

b) $L_2 = \{a^n b^m a^{n \cdot m} \mid n, m \geq 0\}$

a) L_1 ist regulär, da endlich

b)

> **Satz (Myhill & Nerode):**
> Eine Sprache **L** ist genau dann regulär, wenn $\simeq_L$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$ $m \neq n$

Für jedes 3 Tupel (m, n, k) ergeben sich 2 Wörter

$w_1 = a^m b^k$ $\quad w_2 = a^n b^k$

$[w_1]_\simeq \neq [w_2]_\simeq$, da für $w = a^{m \cdot k}$

ist $w_1 w \in L_2$ aber $w_2 w \notin L_2$ (da $n \neq m$)

Alle unterschiedliche Tupel (m, n, k) führen zu unterschiedlichen $\simeq$-Klassen.

$\hookrightarrow$ nach Myhill-Nerode nicht regulär.

nf

miro

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Grammatik

$$G_0 = (\{S,T,U,V,R\},\{a,b\},\{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow aSb, S \longrightarrow T, S \longrightarrow R, T \longrightarrow bbT, T \longrightarrow U,$$
$$U \longrightarrow aaU, U \longrightarrow bbT, V \longrightarrow bSa, R \longrightarrow \varepsilon, R \longrightarrow bSa\}, S)\ .$$

a) Konstruieren Sie eine zu G_0 äquivalente Grammatik G_1, die (außer $S' \longrightarrow \varepsilon$ für Startsymbol S') keine weiteren Regeln der Form $A \longrightarrow \varepsilon$ für ein Nichtterminalsymbol A enthält. Erweitern Sie dazu, wenn nötig, die Grammatik G_0 um ein neues Startsymbol S' und entsprechende Regeln.

b) Geben Sie zu G_1 eine äquivalente Grammatik G_2 an, die keine Kettenregeln, also Produktionen der Form $A \longrightarrow B$ mit Nichtterminalsymbolen A, B, enthält.

c) Geben Sie eine Grammatik G_3 in Chomsky-Normalform an mit $L(G_3) = L(G_2) \setminus \{\varepsilon\}$.

Eine kontextfreie Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ ist in Chomsky-Normalform (CNF), wenn alle ihre Produktionsregeln eine der beiden folgenden Formen haben:

$\mathsf{A} \to \mathsf{BC}$ (mit $\mathsf{B}, \mathsf{C} \in V$) oder $\mathsf{A} \to \mathsf{c}$ (mit $\mathsf{c} \in \Sigma$)

a) T, U nicht terminierend

V ist unerreichbar

$G_0' (\{S, R\}, \{a, b\}, P_0', S\})$

$P_0' = S \to \varepsilon, \ R \to \varepsilon$

$S \to aSb, \ R \to bSa$

$S \to R$

ε-Entfernen

$G_1' (\{S', S, R\}, \{a, b), P_1', S'\}$

$P_1' = S' \rightarrow S,$

$S' \rightarrow \varepsilon,$

$S \rightarrow aSb,$

$S \rightarrow R,$

$R \rightarrow bSa,$

$S \rightarrow ab,$

$R \rightarrow ba$

b) $G_2 = (\{S', S, R\}, \{a, b\}, P_2, S'\}$

b) $G_2 = (\{S', S, R\}, \{a, b\}, P_2, S')$

$P_2 =$ $\cancel{S' \to S}$, $S' \to aSb$,

$S' \to \varepsilon$, $S' \to ab$,

$S \to aSb$, $S' \to bSa$,

$\cancel{S \to R}$, $S' \to ba$,

$R \to bSa$, $S \to bSa$,

$S \to ab$, $S \to ba$,

$R \to ba$

c) CNF:

$G_3 = (\{S', S, R, X_a, X_b, C_a, C_b\} \{a, b\}, P_3, S')$

$P_3 : \{X_a \to a$, $X_b \to b$

$C_a \to S X_a$, $C_b \to S X_b$,

$S' \to X_a C_b$, $S' \to X_a X_b$, $S' \to X_b C_a$, $S' \to X_b X_a$

$S' \to \varepsilon$

$S \to X_a C_b$, $S \to X_a X_b$, $S \to X_b C_a$, $S \to X_b X_a$,

$R \to X_b C_a$, $R \to X_b X_a\}$

Aufgabe 5

Gegeben ist folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, X, M, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow AX, S \longrightarrow AB, X \longrightarrow MB, M \longrightarrow AB, M \longrightarrow AX, A \longrightarrow a,$
$B \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}$.

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die folgenden Wörter w_i zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

a) $w_1 = aaabba$

b) $w_2 = aabbaa$

a)

	a	a	a	b	b	a
a	A,B	S,M	X	S,M	X	M,S
a		A,B	S,M	X	S,M	X
a			A,B	S,M	X	∅
b				B	∅	∅
b					B	∅
a						A,B

$\Longrightarrow w_1 \in L(G)$, da $S \in V_{1,6}$

b)

	a	a	b	b	a	a
a	A,B	S,M	X	S,M	X	∅
a		A,B	S,M	X	∅	∅
b			B	∅	∅	∅
b				B	∅	∅
a					A,B	S,M
a						A,B

$\Longrightarrow w_2 \notin L(G)$, da $S \notin V_{1,6}$