Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 150103	sid.nummer	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) En 2×2 matris A har egenvärdena -1 och 2 samt tillhörande egenvektorer $(2,1)$ respektive $(3,2)$. Bestäm A. (3p)

Lösning: Det finns två egenvektorer, så A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$, där $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $P^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Så $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$

Svar: $A = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$

(b) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] (1)\ (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Svar: Inversen är $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

För vilka högerled $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik, inga, respektive oändligt många lösningar?

Lösning: Låt $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$[A \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 2 & b_1 \\ 5 & 5 & 0 & b_2 \\ -1 & 3 & -4 & b_3 \end{array}\right] (5)\ (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & 10 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 20 & -20 & b_2 + 5b_3 \\ -1 & 3 & -4 & b_3 \end{array}\right] (2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -4 & b_3 \\ 0 & -10 & 10 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 + 2b_1 + b_3 \end{array}\right]$$

Svar:

Systemet har aldrig unik lösning.

Det har oändligt många lösningar om $b_2 + 2b_1 + b_3 = 0$, och det saknar lösning om $b_2 + 2b_1 + b_3 \neq 0$.

Var god vänd!

(d) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathrm{e}_1) = (1, -2)$ och $T(\mathrm{e}_1 - 2\mathrm{e}_2) = (0, 1)$. (3p)
Bestäm matrisen för T i standardbasen.

Lösning: Vi vet att matrisen för T är $[T(e_1)\ T(e_2)]$.

$$T(e_2) = \frac{T(e_1 - 2e_2) - T(e_1)}{-2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Svar: Standardmatrisen för T är $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $2A + XB = X$.

Lösning: $2A + XB = X \iff XB - X = -2A \iff X(B - I) = -2A$

$\iff X = -2A(B-I)^{-1}$.

$B - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (B-I)^{-1} = \frac{1}{0-(-1)}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$X = -2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(f) Bestäm arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $(3, 1)$ och $(2, 2)$. (2p)

Lösning: Arean ges av $\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 2 = 4$.

Svar: 4 a.e.

2. a) Om A är en $m \times n$-matris så är
$\mathrm{Nul}(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$.

b) $\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathbb{R}^5$ och $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$, så $\mathbf{v}_1$ kan inte ligga i $\mathrm{Col}(A)$ och $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ kan inte ligga i $\mathrm{Nul}(A)$. Ligger $\mathbf{v}_1$ i $\mathrm{Nul}(A)$? Vi testar; i så fall är $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{så } \mathbf{v}_1 \in \mathrm{Nul}(A).$$

Om $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ ska ligga i $\mathrm{Col}(A)$ ska $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ och $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_3$ ha lösningar.
Vi testar detta på samma gång:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] (-2)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] (2) \sim \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

Sista raden visar att det saknas lösning för båda ekvationerna.

c) Vi tar den radreducerade A från b) och fortsätter radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (4)\ (-2)\ (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1/3)\ (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basen för kolonnrummet ges av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ dvs
$(1,2,0,1)$, $(1,5,0,4)$, och $(-2,0,-1,4)$.

Lösningen till $A\mathbb{x} = \mathbb{O}$ ges av

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} -3x_3 - 5x_5 \\ x_3 + x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs $(-3,1,1,0,0)$ och $(-5,1,0,1,1)$ är en bas för Nul (A).

3) a. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -9 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (2-\lambda)\big((-2-\lambda)(4-\lambda)+9\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2 \quad \text{dvs } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$

b. $\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$: lös $(A - 2I)\mathbb{x} = \mathbb{O}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\tfrac{1}{4} & 9 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \quad \text{Tag } \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$: lös $(A - I)\mathbb{x} = \mathbb{O}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{dvs} \quad \begin{matrix} 3x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad \text{Tag } \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) A är inte diagonaliserbar, eftersom det bara finns två egenvektorer.

4. a. Kalla den ortogonala basen $\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2$.
Sätt $\mathbb{x}_1 = \mathbb{v}_1$. Då kan vi välja

$$\mathbb{x}_2 = \mathbb{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbb{x}_1}\mathbb{v}_2 = \mathbb{v}_2 - \frac{\mathbb{x}_1 \cdot \mathbb{v}_2}{\mathbb{x}_1 \cdot \mathbb{x}_1}\mathbb{x}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Ta istället } \mathbb{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ON-bas blir $\mathbb{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ och $\mathbb{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2,0)$.

b. $$\mathrm{proj}_{\mathrm{span}(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2)}\mathbb{u} = \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{y}_1}{\mathbb{y}_1 \cdot \mathbb{y}_1}\mathbb{y}_1 + \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{y}_2}{\mathbb{y}_2 \cdot \mathbb{y}_2}\mathbb{y}_2 =$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{9}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 + 3/2 \\ 1/2 + 3/2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c. Avståndet är $\| \mathbb{u} - \mathrm{proj}_{\mathrm{span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}} \| = \| (0,0,0,4) \| =$
$= \underline{\underline{4}}$

Överbetygsdel:

5. Anpassa först andragradskurvan $y = ax^2 + bx + c$ till punkterna. Vi får ekv. systemet

$4a - 2b + c = -1$	motsvarar	$(x,y) = (-2,-1)$
$a - b + c = -1$	"	$(-1,-1)$
$c = 1$	"	$(0,1)$
$a + b + c = -2$	"	$(1,-2)$
$4a + 2b + c = -2$	"	$(2,-2)$

I matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

Minstakvadratlösningen ges av

$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{10} \quad -34 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{7} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/14 \\ 0 & 1 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right]$$

Så andragradskurvan är $-\left(\frac{5x^2}{14} + \frac{3x}{10} + \frac{2}{7}\right) = p(x)$

Nu vill vi hitta det största vertikala avståndet; dvs avståndet i y-led.

x	y	p(x)	y − p(x)
−2	−1	−39/35	4/35
−1	−1	−12/35	−23/35
0	1	−2/7	9/7 = 45/35 ← störst avstånd
1	−2	−33/35	−37/35
2	−2	−81/35	11/35

6. a. Vi har $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$
$= A^2 + AB + BA + B^2$. Men AB är inte nödvändigtvis lika med BA, så det är inte sant.

Motexempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b. Vi vet enligt sats att $\det(A) = 0 \iff$ A:s kolonner är linjärt beroende. När vi bara har två kolonner a_1 och a_2 betyder detta att $c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$, dvs $c_1 a_1 = -c_2 a_2$, och eftersom åtminstone en av c_1 och c_2 (säg c_1) är $\neq 0$ så är då $a_1 = -\frac{c_2}{c_1} a_2$.

Klart!

Alternativt bevis: Sätt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Då är $\det(A) = ad - bc = 0$, dvs $ad = bc$

Fall 1: $b, d \neq 0$. Då är $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sätt detta tal $= k$. Då är $a = k \cdot b$ och $c = k \cdot d$, så $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ och $a_1 = k a_2$.

Fall 2: $b = d = 0$. Då är $a_2 = 0 \cdot a_1$.

Fall 3: $b = 0, d \neq 0$. Då är $ad = 0$, så $a = 0$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} = \frac{c}{d} \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$ dvs $a_1 = \frac{c}{d} a_2$.

Fall 4 $b \neq 0, d = 0$. Som fall 3.

(6.) Falskt. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Då är $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så $\operatorname{rank} A = 1$. Men A har två rader som inte bara innehåller nollor.

(7.) Se boken.