KTH Teknik och hälsa

Kurs:	**HF1006**
Moment:	**TEN1, 4 hp**
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Maria Shamoun, 08 790 9712
Datum: Tid:	2023-10-27 8:00-12:00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	see below
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv **namn** och **personnummer** på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. **Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt.** Tentamenlydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna. **Lycka till!**

Del	Poäng	Fx	E	D	C	B	A
I	16	9	10	10	10	10	10
II	10	0	0	2	4	6	8

Del I: 8 uppgifter, 16p.

Är du godkänd på KS1 hoppar du över uppgift 1 och 2.

1. Skriv $z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^5\cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ på formen $a+bi$. 2p

2. Givet är punkterna A(4, -1, 2), B(1, 2, 2) och C(3, 1, 3). 2p

a) Bestäm en ekvation i parameterform för den räta linje som går genom punkterna A och B.

b) Bestäm en ekvation i parameterform för den räta linje som är parallell med vektorn $\overrightarrow{BC}$ och går igenom punkten A.

3. Bestäm Im z då $z=\dfrac{(2-3i)^2}{1-2i}+3i$. 2p

4. Beräkna $AB+3C$ om $A=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}$ och $C=\begin{bmatrix}4 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$. 2p

5. Ange en ekvation för det plan som innehåller linjen genom punkterna A(-2, 4, 1) och B(1, 3, -1) och är parallell med linjen M: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$. 2p

6. Givet är vektorerna $\vec{u}=(1,-2,2)$ och $\vec{v}=(3,-1,-1)$ samt linjen L: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=z$.
Undersök om linjen L och vektorn $\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}$ är vinkelräta. Motivera tydligt! 2p

7. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$. 2p

8. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3x & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3$ 2p

Del II: 4 uppgifter, 10p.

9. För vilka värden på konstanten *a* har ekvationssystemet nedan fler lösningar än $(x, y, z) = (0,0,0)$? Bestäm samtliga lösningar för varje sådant *a*. 2p

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ ay - z = 0 \\ x + az = 0 \end{cases}$$

10. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen X så att $A(X + B)^{-1} = B$. 3p

11. Ekvationen $z^5 - z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 4z - 10 = 0$ har två lösningar $z_1 = 1$ och $z_2 = -1 - i$. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. 3p

12. Planet Π: $x - z = 0$ och sfären S: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 27$ skär varandra i en cirkel. Ange cirkelns radie och medelpunkt. 2p

Lösningsförslag

1. Skriv $z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^5\cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ på formen $a+bi$. 2p

$-1+i\sqrt{3}$ ligger andra kvadranten vilket ger

$$\tan v=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow v=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 5\cdot\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{10\pi}{3}$$

$$\left|-1+i\sqrt{3}\right|^5=\left(\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^5=2^5$$

$$z=2^5\cdot 2\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{10\pi}{3}\right)}=2^6e^{i\left(\frac{11\pi}{3}\right)}=2^6e^{i\left(\frac{6\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)}=2^6e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=64\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=64\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=64\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=64\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=32-i32\sqrt{3}$$

Svar: $z=32-i32\sqrt{3}$

Rättningsmall:

Beräknar $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ eller $\arg(z)$ felaktigt men resten korrekt, 1p.

Korrekt beräkning av $|z|=64$ och $\arg(z)=\frac{11\pi}{3}$ sedan fel, 1p.

Allt rätt, 2p.

2. Givet är punkterna A(4, -1, 2), B(1, 2, 2) och C(3, 1, 3). 2p

a) Bestäm en ekvation i parameterform för den räta linje som går genom punkterna A och B.

Linjens riktningsvektor: $\overrightarrow{AB}=(1-4,2-(-1),2-2)=(-3,3,0)$ går även bra med $\overrightarrow{BA}$.

Linjens ekvation är $(x,y,z)=(4,-1,2)+t(-3,3,0)$ eller $(x,y,z)=(1,2,2)+t(-3,3,0)$

b) Bestäm en ekvation i parameterform för den räta linje som är parallell med vektorn $\overrightarrow{BC}$ och går igenom punkten A.

$\overrightarrow{BC}=(3-1,1-2,3-2)=(2,-1,1)$

Linjens ekvation är $(x,y,z)=(4,-1,2)+t(2,-1,1)$

Rättningsmall:

a) och b) Rätt eller fel

3. Bestäm Im z då $z=\frac{(2-3i)^2}{1-2i}+3i$. 2p

$$z=\frac{(2-3i)^2}{1-2i}+3i=\frac{4-12i+9i^2}{1-2i}+3i=\frac{(-5-12i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+3i=\frac{-5-10i-12i-24i^2}{1-4i^2}+3i=$$

$$=\frac{19-22i}{1+4}+3i=\frac{19}{5}-i\frac{22}{5}+i\frac{15}{5}=\frac{19}{5}-i\frac{7}{5}$$

Svar: $\operatorname{Im} z=-\frac{7}{5}$

Rättningsmall: Förenklar kvoten till $\frac{19-22i}{5}$, därefter fel. 1p

Svarar med $\operatorname{Im} z=-\frac{7}{5}\cdot i$ -1p

Allt rätt, 2p.

4. Beräkna $AB+3C$ om $A=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}$ och $C=\begin{bmatrix}4 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$. 2p

$$AB=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 3\\-10 & -2\end{bmatrix}$$

$$AB+3C=\begin{bmatrix}15 & 3\\-10 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+3\cdot 4 & 3+3\cdot(-1)\\-10+3\cdot 0 & -2+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27 & 0\\-10 & 1\end{bmatrix}$$

Rättningsmall: Korrekt matrisprodukt AB, därefter fel. 1p

Allt rätt 2p

5. Ange en ekvation för det plan som innehåller linjen genom punkterna

A(-2, 4, 1) och B(1, 3, -1) och är parallell med linjen M: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$. 2p

Vektorn $\overrightarrow{AB}=(1-(-2),3-4,-1-1)=(3,-1,-2)$ och riktningsvektorn $\vec{v}=(2,2,-2)$ för linjen M ligger i planet. Normalvektorn $\vec{n}$ fås av:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z}\\3 & -1 & -2\\-2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\overrightarrow{e_x}\begin{vmatrix}-1 & -2\\2 & -2\end{vmatrix}-\overrightarrow{e_y}\begin{vmatrix}3 & -2\\-2 & -2\end{vmatrix}+\overrightarrow{e_z}\begin{vmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=(2-(-4),-(-6-4),6-2)=(6,10,4)=2(3,5,2)$$

Planets ekvation: $3x+5y+2z+D=0$

Insättning av en punkt som ligger i planet: $3\cdot(-2)+5\cdot 4+2\cdot 1+D=0\Leftrightarrow D=-16$

Svar: $3x+5y+2z-16=0$

Rättningsmall:
Finner ekvationen $3x+5y+2z+D=0$, 1p
Allt rätt, 2p.

6. Givet är vektorerna $\vec{u}=(1,-2,2)$ och $\vec{v}=(3,-1,-1)$ samt linjen L: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=z$.
Undersök om linjen L och vektorn $\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}$ är vinkelräta. Motivera tydligt! 2p

Vektorn $\vec{w}$ och linjens riktningsvektor $\vec{v}$ är vinkelräta om $\vec{w}\circ\vec{v}=0$.

Från linjens ekvation $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ fås vektorn $\vec{v}=(-2,3,1)$.

$$\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}=3(1,-2,2)-(3,-1,-1)=(3-3,-6+1,6+1)=(0,-5,7)$$

$$\vec{w}\circ\vec{v}=(0,-5,7)\circ(-2,3,1)=0\cdot(-2)+(-5)\cdot3+7\cdot1=-8\neq0$$

Svar: nej de är inte vinkelräta.

Rättningsmall:
Vektorn $\vec{w}$ fel eller läser av riktningsvektorn för linjen fel men resten korrekt, 1p.
Beräknar skalärprodukten $\vec{w}\circ\vec{v}=-8$ (ett enkelt räknefel ok), 1p.
Beräknar skalärprodukten med motivering, 2p.

7. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$. 2p

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} ekv1 \\ -2ekv1+ekv2 \\ -3ekv1+ekv3 \end{matrix}\right\} \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} ekv1 \\ ekv2 \\ -3ekv2+2ekv3 \end{matrix}\right\} \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ -z=-3 \end{cases}$$

$z=3$ ger $2y-7z=-17 \;\Rightarrow\; y=\frac{-17+7z}{2}=\frac{-17+7\cdot3}{2}=2 \;\Rightarrow$

$$x+y+2z=9 \;\Rightarrow\; x=9-y-2z=9-2-2\cdot3=1$$

Svar: $x=1$, $y=2$ och $z=3$.

Rättningsmall: Korrekt radreducering till trappstegsform samt en obekant korrekt bestämd 1p

Allt rätt 2p

8. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3x & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3$. 2p

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3x & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (\text{utvecklar efter rad } 3) = -(-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3x \end{vmatrix} =$$

$$2(2-3)+4(6x-(-1)) = -2+24x+4 = 2+24x$$

Löser ekvationen $2+24x=3 \iff 24x=1 \iff x=\frac{1}{24}$

Svar: $x=\frac{1}{24}$

Rättningsmall: Korrekt determinantberäkning till $\det A = 2+24x$, därefter fel. 1p

Allt rätt 2p

9. För vilka värden på konstanten *a* har ekvationssystemet nedan fler lösningar än $(x,y,z)=(0,0,0)$? Bestäm samtliga lösningar för varje sådant *a*. 2p

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ ay-z=0 \\ x + az=0 \end{cases}$$

Beräknar determinanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} \text{utveckling av} \\ \text{determinanten} \\ \text{längs kolonn } 1 \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1+2a$$

Om $-1+2a=0 \iff a=\frac{1}{2}$ fås fler lösningar till ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ \frac{y}{2}-z=0 \\ x + \frac{z}{2}=0 \end{cases} \iff \left\{\begin{matrix} -2ekv2+ekv1 \\ 2ekv2 \\ ekv3 \end{matrix}\right\} \begin{cases} 0=0 \\ y-2z=0 \\ x + \frac{z}{2}=0 \end{cases}$$

Sätter $z=t \Rightarrow y=2z=2t \Rightarrow x=-\frac{z}{2}=-\frac{t}{2}$

Svar: $a=\frac{1}{2}$ ger $(x,y,z)=t\left(-\frac{1}{2},2,1\right)$ eller $(x,y,z)=t(-1,4,2)$

Rättningsmall: Bestämt rätt värde för a. 1p

Allt rätt 2p

10. Låt $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ och $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen X så att

$A(X+B)^{-1}=B$. 3p

$$A(X+B)^{-1}(X+B)=B(X+B) \Leftrightarrow A=B(X+B) \Leftrightarrow A=BX+B^2 \Leftrightarrow B^{-1}(A-B^2)=B^{-1}BX$$
$$\Leftrightarrow B^{-1}A-B=X$$

Inversen till B fås genom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Därmed har vi att

$$X=B^{-1}A-B$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rättningsmall:
Fel löst ekvation $X=\ldots$ av alla typer, 0p.
Korrekt ekvation $X=B^{-1}A-B$ och beräknad matris X men med ett litet fel på B^{-1}, 1p.
Korrekt ekvation $X=B^{-1}A-B$ och korrekt beräknad B^{-1} men sedan fel, 2p.
Allt korrekt, 3p.

11. Ekvationen $z^5 - z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 4z - 10 = 0$ har två lösningar $z_1 = 1$ och $z_2 = -1 - i$. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. 3p

Låt $p(z) = z^5 - z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 4z - 10$. Eftersom polynomet $p(z)$ har reella koefficienter är konjugatet av en lösning till $p(z) = 0$ också en lösning. En tredje lösning till ekvationen ges därför av $z_3 = -1 + i$.

Faktorsatsen ger att $(z - z_1)$, $(z - z_2)$ och $(z - z_3)$ är faktorer till $p(z)$. Därför är även

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z-1)(z-(-1-i))(z-(-1+i)) = (z-1)((z+1)+i)((z+1)-i) =$$
$$= (z-1)((z+1)^2 - i^2) = (z-1)(z^2 + 2z + 1 + 1) = (z-1)(z^2 + 2z + 2) = z^3 + 2z^2 + 2z - z^2 - 2z - 2 =$$
$$= z^3 + z^2 - 2$$

en faktor till $p(z)$.

Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{c|c}
z^2 - 2z + 5 & \\
\hline
z^5 - z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 4z - 10 & z^3 + z^2 - 2 \\
-(z^5 + z^4 - 2z^2) & \\
\hline
-2z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z - 10 & \\
-(-2z^4 - 2z^3 + 4z) & \\
\hline
5z^3 + 5z^2 - 10 & \\
-(5z^3 + 5z^2 - 10) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Så $p(z) = (z^3 + z^2 - 2)(z^2 - 2z + 5)$

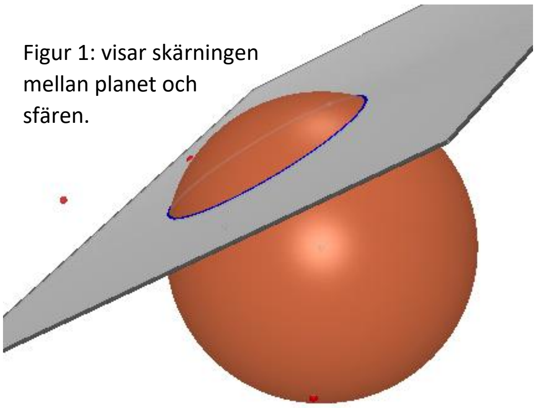
Ekvationens övriga lösningar ges därför (nollproduktregeln) av $z^2 - 2z + 5 = 0$ som har lösningen $z = 1 \pm 2i$.

Svar: Ekvationens samtliga lösningar ges av $z_1 = 1$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = 1 + 2i$ och $z_5 = 1 - 2i$.

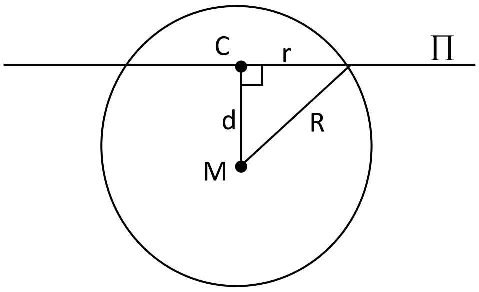
Rättningsmall: Bestämt nämnaren ($z^3 + z^2 - 2$) i polynomdivisionen (därefter fel) 1p
Utför dessutom en korrekt polynomdivision (därefter fel) 2p
Allt rätt 3p

12. Planet Π: $x-z=0$ och sfären S: $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=27$ skär varandra i en cirkel. Ange cirkelns radie och medelpunkt. 2p

Planets normalvektor $\vec{n}=(1,0,-1)$. Sfären medelpunkt $M=(2,-1,0)$ och sfärens $R=\sqrt{27}$



Figur 1: visar skärningen mellan planet och sfären.



Figur 2: visar sfären och planet från sidan.

I figur 2 är C=cirkelns medelpunkten, r=cirkelns radie och d=avståndet mellan punkten C och M.

Punkten C:s koordinater bestäms genom att beräkna skärningspunkten mellan planet Π och linjen genom punkten M och har riktningsvektorn $\vec{n}$:
Linjens ekvation är $(x,y,z)=(2,-1,0)+t(1,0,-1)$
Insättning i planets ekvation ger: $2+t-(-t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-1$
Punkten C: koordinater är: $(x,y,z)=(2+(-1),-1,(-1)\cdot(-1))=(1,-1,1)$
Cirkelns radie r bestäms med hjälp av den rätvinkliga triangeln.
Börjar med att beräkna avståndet d:

$$d(M,C)=\sqrt{(2-1)^2+(-1-(-1))^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

Pythagorassats ger: $d^2+r^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{27-2}=\sqrt{25}=5$

Svar: Cirkelns radie är 5 och medelpunkten $(1,-1,1)$.

Rättningsmall:
Bestämmer medelpunkten i cirkeln, 1p.
Allt korrekt, 2p.