KTH Teknik och hälsa

Kurs:	**HF1006**
Moment:	**TEN1, 4 hp**
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Jonas Stenholm, tel. 08 790 9450
Datum: Tid:	2022-10-24 14:00-18:00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	see table below
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv **namn** och **personnummer** på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. **Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt.** Tentamenlydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna. **Lycka till!**

Del	Poäng	Fx	E	D	C	B	A
I	12	7	8	8	8	8	8
II	14	0	0	3	6	9	12

Del I: 2p/uppgift

Är du godkänd på KS1 hoppar du över uppgift 1 och 2.

1. De komplexa talen $z = 2 + 3i$ och $w = 5i$ är givna.

   a) Bestäm $\frac{w}{z}$. Svara på formen $a + bi$.

   b) Beräkna $\overline{w - z}$.

2. Beräkna $(-2+2i)\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$ och svara i formen $a+bi$.

3. Låt $\vec{a} = \vec{v} - 2\vec{u}$ där $\vec{v} = (8,7)$ och $\vec{u} = (3,5)$ och $\vec{b} = (2,-1)$. Beräkna vinkeln mellan $\vec{a}$ *och* $\vec{b}$. Svara med arccos.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $A^{-1}B$.

5. Betrakta linjen $L: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t \\ z = 1+2t \end{cases}$ och punkten P(1, 2, -1). Ange ekvationen för det plan som innehåller linjen L och punkten P.

6. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y + z + 8 = 0 \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

Del II:

7. (2p) Givet i ett ON–system är sfären K: $x^2+y^2+z^2+2x+4y=20$ och planet $\Pi: x+y+z-3=0$. Bestäm avståndet från sfärens medelpunkt till planet Π.

8. (3p) Bestäm belopp och ett argument för det komplexa talet $\left(-1-i\right)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{-5}\cdot i^{101}$.

9. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -3 & 6\end{bmatrix}$.

10. (3p) Ange för vilka värden på parametrarna a och b, som nedanstående ekvationssystemet är lösbart, och lös ekvationssystemet i de fall då lösningar finns.

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ 2x + 3ay + 7z = 2 \\ x + 2ay + (a+3)z = b+1 \end{cases}$$

11. (3p) Betrakta punkterna A(1, 3, 0), B(3, -1, 2) och C(0, 0, 1). Bestäm koordinaterna för P så att CP blir höjden i pyramiden ABCP och pyramidens volym blir 20 v.e. (två olika fall för punkten P).

Lösningsförslag med *Preliminär rättningsmall*

1. De komplexa talen $z = 2 + 3i$ och $w = 5i$ är givna.
   a) Bestäm $\frac{w}{z}$. Svara på formen $a + bi$.
   b) Beräkna $\overline{w - z}$.

a) $\frac{w}{z} = \frac{5i}{2+3i} = \frac{5i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10i+15}{4+9} = \frac{15}{13} + \frac{10i}{13}$

b) $\overline{w-z} = \overline{5i-(2+3i)} = \overline{5i-2-3i} = \overline{-2+2i} = -2-2i$

Rättningsmall:
a) Allt rätt, 1p.
b) Allt rätt, 1p.

2. Beräkna $(-2+2i)\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$ och svara i formen $a+bi$.

$$(-2+2i)\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} = (-2+2i)\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = (-2+2i)\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= (-2+2i)\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1+i\sqrt{3}+i-i^2\sqrt{3} = \sqrt{3}-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Rättningsmall:

Kommer fram till $\sqrt{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}\right)}$ eller liknande (ej möjligt härifrån omvandla till $a+bi$), 0p

$\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$, 0p

Kommer fram till $(-2+2i)\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 1p.

Allt rätt, 2p.

3. Låt $\vec{a} = \vec{v} - 2\vec{u}$ där $\vec{v} = (8,7)$ och $\vec{u} = (3,5)$ och $\vec{b} = (2,-1)$. Beräkna vinkeln mellan $\vec{a}$ *och* $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \vec{v} - 2\vec{u} = (8,7) - 2(3,5) = (8-6, 7-10) = (2,-3)$$

Bestämmer vinkeln med hjälp av skalärprodukten:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow (2,-3)\circ(2,-1) = \sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\cos\alpha$$

$$4+3 = \sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

Rättningsmall:

Använder $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$ eller $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, 0p

Kommer fram till $4+3 = \sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$, 1p.

Allt rätt, 2p.

4. Låt $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ och $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Beräkna $A^{-1}B$.

$$[A \mid I]=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]=(rad1+rad2)\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 1\end{array}\right]=(rad2-3rad1)\left[\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 6 & 1 & 1\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}rad1\\ \frac{1}{6}rad2\end{pmatrix}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right]=\left[I \mid A^{-1}\right]$$

$$A^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4+2 & 4-2 & -4-2\\ 1-1 & 1+1 & -1+1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 2 & -6\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

Rättningsmall:

Rätt A^{-1}, 1p.

Allt rätt, 2p.

5. Betrakta linjen $L:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+3t\\ z=1+2t\end{cases}$ och punkten P(1, 2, -1). Ange ekvationen för det plan som innehåller linjen L och punkten P.

Bestämmer två vektorer i planet. Den ena vektorn är linjens riktningsvektor $\vec{v}=(2,3,2)$ och den andra fås genom en punkt Q på linjen och punkten P:

En punkt på linjen då tex t=0 ger $Q=(1+2\cdot 0,1+3\cdot 0,1+2\cdot 0)=(1,1,1)\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(0,-1,2)$

Bestämmer planets normalvektor med vektorprodukten:

$$\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{PQ}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=(6+2,0-4,-2-0)=(8,-4,-2)=2(4,-2,-1)$$

Godtycklig punkt i planet R(x,y,z) vilket ger vektorn $\overrightarrow{PR}=(x-1,y-2,z+1)$. $\vec{n}$ och $\overrightarrow{PR}$ är vinkelräta vilket innebär att skalärprodukten då är noll, dvs

$$(4,-2,-1)\circ(x-1,y-2,z+1)=0\Leftrightarrow 4(x-1)-2(y-2)-(z+1)=0\Leftrightarrow 4x-2y-z-1=0$$

Rättningsmall:

Kommer fram $4x-2y-z+d=0$, 1p.

Allt rätt, 2p.

6. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x-y+z+8=0 \\ 3x-y+2z+3=0 \end{cases}$.

Tre obekanta och två ekvationer ger en parameterlösning. Trappstegsformar

systemet: $\begin{cases} 2x-y+z+8=0 \\ 3x-y+2z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{-3ekv1+2ekv2\} \begin{cases} 2x-y+z+8=0 \\ \quad\; y+z-18=0 \end{cases}$

Den fria variabeln kan vara y eller z:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-8+y-z}{2} \\ y=18-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-8+18-t-t}{2} \\ y=18-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-t \\ y=18-t \\ z=t \end{cases}$$

Eller

$$\begin{cases} x=\dfrac{-8+y-z}{2} \\ y=t \\ z=18-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-8+t-(18-t)}{2} \\ y=t \\ z=18-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13+t \\ y=t \\ z=18-t \end{cases}$$

Rättningsmall:

Parameterlösning med korrekt metod, 2p

Del II:

7. (2p) Givet i ett ON–system är sfären K: $x^2+y^2+z^2+2x+4y=20$ och planet $\Pi: x+y+z-3=0$. Bestäm avståndet från sfärens medelpunkt till planet Π.

Hittar sfärens medelpunkt genom att kvadratkomplettera sfärens ekvation:

$x^2+y^2+z^2+2x+4y=20 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=20+1^2+2^2$ vilket ger medelpunkten M(-1, -2, 0).

Avståndet från punkten M till planet beräknas med formeln från formelbladet:

$$d=\frac{|-1-2+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Svar: Avståndet är $2\sqrt{3}$.

Rättningsmall:

Bestämmer medelpunkten, 1p

Allt rätt, 2p

8. (3p) Bestäm belopp och ett argument för det komplexa talet

$z=(-1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{-5}\cdot i^{101}$.

Börjar med att bestämma beloppet:

$$\left.\begin{aligned}&|-1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\&\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2\\&|i|=1\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad |z|=|-1-i|^{10}\cdot\left|\sqrt{3}+i\right|^{-5}\cdot|i|^{101}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\cdot 2^{-5}\cdot 1^{101}=$$

$$=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^5\cdot 2^{-5}\cdot 1=2^0\cdot 1=1$$

Med $i^{101}=\left(i^4\right)^{50}\cdot i=1^{50}\cdot i=i$ kan z förenklas till:

$$z=(-1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{-5}\cdot i^{101}=(-1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{-5}\cdot i$$

Beräknar arg z:

$$\arg(-1-i)=\left\{\begin{matrix}\text{i tredje kvadranten,}\\ \pi\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}\end{matrix}\right\}=\pi+\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$$\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\left\{\begin{matrix}\text{i första kvadranten,}\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\arg z=10\arg(-1-i)+(-5)\arg\left(\sqrt{3}+i\right)+\arg(i)=10\cdot\frac{5\pi}{4}-5\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{50\pi\cdot 3-5\pi\cdot 2+6\pi}{12}=$$

$$=\frac{146\pi}{12}=\frac{73\pi}{6}=\frac{72\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

Svar: $|z|=1$ och $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$.

Rättningsmall:

Rätt belopp och argument till de tre faktorerna, 1p

Rätt beräknad $|z|$ eller arg z, 2p

Allt rätt, 3p

9. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -3 & 6\end{bmatrix}$.

Söker egenvärden λ och egenvektorer $\vec{v}$ som uppfyller ekvationen $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$.
$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

Löser ekvationen $\det(A-\lambda I)=0$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -3 & 6\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-\lambda & 3\\ -3 & 6-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-4-\lambda & 3\\ -3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(-4-\lambda)(6-\lambda)+9=\lambda^2-2\lambda-15=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=5\\ \lambda_2=-3\end{cases}$$

Löser det homogena ekvationssystemet $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ för egenvärdena $\lambda=5$ och $\lambda=-3$.

Fall 1: $\lambda=5$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-4-5 & 3 & 0\\ -3 & 6-5 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}-9 & 3 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{array}\right]\sim\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}rad1\\ -\frac{1}{3}rad1+rad2\end{pmatrix}\left[\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=0\\ y=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\ y=3t\end{cases}$$

Ger egenvektorn $\vec{v_1}=t\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},t\neq 0$

Fall 2: $\lambda=-3$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-4+3 & 3 & 0\\ -3 & 6+3 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ -3 & 9 & 0\end{array}\right]\sim(-3rad1+rad2)\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x+3y=0\\ y=s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3s\\ y=s\end{cases}$$

Ger egenvektorn $\vec{v_2}=s\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix},s\neq 0$.

Svar: Till egenvärdet 5 hör egenvektorn $\vec{v}=t(1,3)$ och till egenvärdet -3 hör egenvektorn $\vec{v}=s(3,1)$.

Rättningsmall:
Rätt egenvärden, 1p
En av egenvektorerna koorrekt, 2p
Allt rätt, 3p

10. (3p) Ange för vilka värden på parametrarna a och b, som nedanstående ekvationssystemet är lösbart, och lös ekvationssystemet i de fall då lösningar finns.

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ 2x + 3ay + 7z = 2 \\ x + 2ay + (a+3)z = b+1 \end{cases}$$

Skapar en totalmatris och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 7 & 2 \\ 1 & 3a & a+3 & b+1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} -2rad1 + rad2 \\ -1rad1 + rad3 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & a & a+1 & b \end{array}\right] \sim (-rad2 + rad3) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & b \end{array}\right]$$

Beräknar determinanten av koefficientmatrisen $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-2)$.

Om determinanten är noll saknar systemet lösning eller har en parameterlösning.

$a(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $a = 2$. Undersöker systemet för $a = 0$ och $a = 2$.

Fall 1: $a = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & b \end{array}\right]$$

systemet har en parameterlösning där y är den fria variabeln

för $a = 0$ och $b = 0$ med lösningen $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ men saknar lösning för $a = 0$ och $b \neq 0$

eftersom $3z = 0$ och $-2z = b$ saknar en gemensam lösning.

Fall 2: $a = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

saknar lösning för $a = 2$ och $b \neq 0$ men har en

parameterlösning om $a = 2$ och $b = 0$ som är $\begin{cases} x = 1 - 2\cdot(-3t) - 2\cdot 2t = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Om determinanten är $\neq 0$ har systemet en entydig lösning, dvs för $a \neq 0$ och $a \neq 2$.

Fall 3: $a \neq 0$ eller $a \neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - ay - 2z \\ y = -\dfrac{3z}{a} \\ z = \dfrac{b}{a-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{3b}{a-2} - \dfrac{2b}{a-2} = 1 + \dfrac{b}{a-2} \\ y = -\dfrac{3b}{a(a-2)} \\ z = \dfrac{b}{a-2} \end{cases}$$

Rättningsmall:
Resonerat kring a och b med tydlig motivering men ingen lösning till de olika fallen, 1p
Resonerat fullständigt kring ett av fallen med lösning, 1p
Resonerat fullständigt kring två av fallen med lösningar, 2p
Allt rätt, 3p

11. (3p) Betrakta punkterna A(1, 3, 0), B(3, -1, 2) och C(0, 0, 1). Bestäm koordinaterna för P så att CP blir höjden i pyramiden ABCP och pyramidens volym blir 20 v.e. (två olika fall till punkten P)

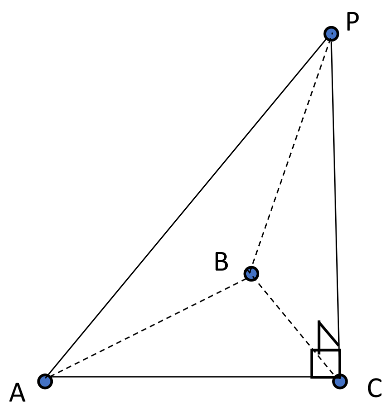
A(1, 3, 0), B(3, -1, 2) och C(0, 0, 1)

Väljer koordinaterna till punkten P till (x, y,z)

Eftersom CP är höjden innebär det att CP vinkelrät mot triangeln ABC, dvs

$\overrightarrow{CP} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ och $\overrightarrow{CP} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ (och $\overrightarrow{CP} \circ \overrightarrow{BC} = 0$).

Volymen är 20 vilket ger $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CP} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}\right)\right| = 20$



Två möjliga fall där det andra fallet är en spegling av P i planet ABC: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PC}$.

Fall 1:

$\overrightarrow{CP} = (x, y, z-1)$
$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-3, z)$
$\overrightarrow{AB} = (2, -4, 2)$
$\overrightarrow{AC} = (-1, -3, 1)$

$$\left|\overrightarrow{AP}\circ\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right| = 6\cdot 20 \Rightarrow \left\|\begin{matrix} x & y & z-1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{matrix}\right\| = 120$$

$$\left|x(-4+6) - y(2+2) + (z-1)(-6-4)\right| = \left|2x-4y-10z+10\right| = 120$$

$$2x-4y-10z+10 = 120 \text{ eller } -(2x-4y-10z+10) = 120$$

Utgår från det positiva uttrycket dvs

Ekv1: $2x-4y-10z+10=120 \Leftrightarrow x-2y-5z=55$

$\overrightarrow{CP}\circ\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x,y,z-1)\circ(2,-4,2) = 2x-4y+2z-2 = 2x-4y+2z-2 = 0$

Ekv2: $2x-4y+2z-2=0 \Leftrightarrow x-2y+z=1$

$\overrightarrow{CP}\circ\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (x,y,z-1)\circ(-1,-3,1) = -x-3y+z-1 = -x-3y+z-1 = 0$

Ekv3: $-x-3y+z-1=0 \Leftrightarrow x+3y-z=-1$

Löser ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x-2y-5z=55 \\ x-2y+z=1 \\ x+3y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -ekv1+ekv2 \\ -ekv1+ekv3 \end{Bmatrix} \begin{cases} x-2y-5z=55 \\ 6z=-54 \\ 5y+4z=-56 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 55+2y+5z = 55+2\cdot(-4)+5\cdot(-9) = 2 \\ z=-9 \\ y = \dfrac{-56-4z}{5} = \dfrac{-56-4\cdot(-9)}{5} = -4 \end{cases}$$

Fall 2: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PC} = (2,-4,-9) + 2(-2,4,1+9) = (-2,4,11)$

Svar: P(2, -4, -9) eller P(-2, 4, 11)

Rättningsmall:

Anger volymen med $V = \left|\overrightarrow{AP}\circ\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right)\right| = 20$ samt lösningsmetoden är korrekt för en punkt, 1p.

Tre korrekta ekvationer men en felberäkning vid lösningen av systemet, 1p.
Bestämmer koordinaterna till en punkt P, 2p.
Allt rätt, 3p.