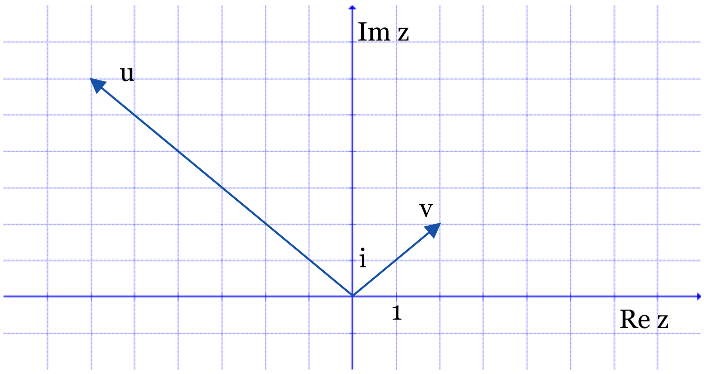
KTH Teknik och hälsa

Kurs:	**HF1006**
Moment:	**TEN1, 4hp**
Program:	TIDAA, TIELA, TIMEL
Examinator:	Maria Shamoun
Jourhavande lärare:	Jonas Stenholm, tel. 08 790 94 50
Datum: Tid:	2022-12-19 8:00-12:00
Hjälpmedel:	Formelblad
Omfattning och betygsgränser:	(se tabell nedan)
Övrig information:	Undvik röda pennor. Skriv **namn** och **personnummer** på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. **Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt.** Tentamenslydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna. **Lycka till!**

Del	Poäng	Fx	E	D	C	B	A
I	12	7	8	8	8	8	8
II	14	0	0	3	6	9	12

Del I: 2p/uppgift

1) För tre komplexa tal u, v och w gäller att $u = v \cdot w$, där u och v är givna i figuren. Bestäm w. Svara på valfri form.



2) Bestäm imaginärdelen (Im z) av $z = \dfrac{6-8i}{-i} + 6e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$

3) Givet är matriserna $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Beräkna $(2B+C)A^T$.

4) Lös ekvationssystemet

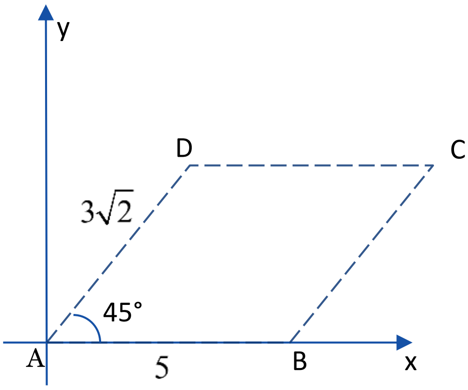
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}.$$

5) Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

6) Låt vektorn $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ där $\vec{a} = (-1,3,-2)$ och $\vec{b} = (2,1,-2)$ och $\vec{v} = (1,1,-3)$. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Del II:

7) Betrakta följande figur (ej skalenlig):



I det tvådimensionella koordinatsystemet ovan finns en parallellogram (i en parallellogram är motstående sidor parallella och lika långa), ABCD, för vilken gäller att längden av AD är $3\sqrt{2}$ längdenheter och av AB 5 längdenheter (se figur).

a) Bestäm koordinaterna för C. (1p)

b) Bestäm vektorn $\vec{BD}$. (1p)

8) Lös följande ekvation: $z^4 = -9$, där z är ett komplext tal.
Svara på rektangulär form ($z = a + bi$). (3p)

9) Betrakta följande ekvationssystem: $\begin{cases} 2x + 6z = 6 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ x + 3y + az = 3 \end{cases}$

För vilka värden på konstanten a finns en unik lösning (exakt en lösning)?
Bestäm denna unika lösning. Förenkla svaret så långt som möjligt. (3p)

10) En matrisekvation är given: $(A - 3E) \cdot X = B$

där $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ och E är enhetsmatrisen.

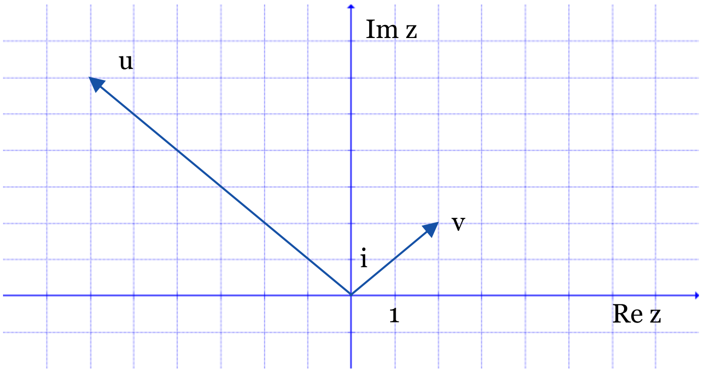
a) Visa, med hjälp av determinant, att koefficientmatrisen (A-3E) är inverterbar. (1p)

b) Bestäm X. (2p)

11) I en tredimensionell rymd finns endast tre objekt: En ljuskälla i P: (1,2,7) med oändlig räckvidd. Ett föremål i punkten Q: (-2,5,0) och en oändlig ogenomskinlig vägg med ekvationen $6x - 2y + z = 5$. Avgör om föremålet i Q träffas av ljuset från ljuskällan i P eller inte. (3p)

Lösningsförslag med rättningsmall:

1) För tre komplexa tal u, v och w gäller att $u = v \cdot w$, där u och v är givna i figuren. Bestäm w. Svara på valfri form.



Figuren används för att bestämma u och v: $u = -6 + 6i$, $v = 2 + 2i$.

Bestämning av w på rektangulär form: $u = v \cdot w \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{u}{v}$

$$w = \frac{-6+6i}{2+2i} = \frac{(-6+6i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-12+12i+12i-12i^2}{4-4i^2} = \frac{24i}{8} = 3i$$

Bestämning av w på polär form:

$\tan(\arg u) = \dfrac{6}{-6} = -1 \quad \Rightarrow \quad \arg u = \arctan(-1) + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$ (andra kvadranten)

$\tan(\arg v) = \dfrac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \arg v = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ (första kvadranten)

$|u| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \qquad |v| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$w = \frac{6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

Svar: $w = 3i$

Rättningsmall:
Felavläst u eller v eller båda, i figur -1p
Allt rätt 2p

2) Bestäm imaginärdelen (Im z) av $z=\dfrac{6-8i}{-i}+6e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$

Det komplexa talet z måste först skrivas på rektangulär form (z = a+bi):

$$z=\frac{6-8i}{-i}+6e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}=\frac{(6-8i)\cdot i}{-i\cdot i}+6\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=6i+8+6\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=6i+8-3+3\sqrt{3}\cdot i=5+\left(6+3\sqrt{3}\right)\cdot i$$

Svar: $\operatorname{Im} z=6+3\sqrt{3}$

Rättningsmall: Korrekt omskrivning till rektangulär form (även om ej fullständigt förenklat) +1p
Allt rätt 2p

3) Givet är matriserna $A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}$ och $C=\begin{bmatrix}1&4\\3&-1\end{bmatrix}$. Beräkna $(2B+C)A^T$.

$$2B+C=2\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&4\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2\\3&3\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$(2B+C)A^T=\begin{bmatrix}9&2\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27&-9+4&9+2\\9&-3+6&3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27&-5&11\\9&3&6\end{bmatrix}$$

Svar: $\begin{bmatrix}27&-5&11\\9&3&6\end{bmatrix}$

Rättningsmall:
Beräknar 2B+C samt rätt transponering av A , 1p.
Allt rätt, 2p.

4) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} ekv1 + ekv2 \\ -3ekv1 + ekv3 \end{Bmatrix} \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -y + 5z = 9 \\ -10y - 2z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{-10ekv2 + ekv3\} \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -y + 5z = 9 \\ -52z = -104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - y - 2z \\ y = 5z - 9 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 1 - 2 \cdot 2 = 3 \\ y = 5 \cdot 2 - 9 = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Svar: x=3, y=1, z=2

Rättningsmall:
Beräknar en av variablerna, 1p.
Allt rätt, 2p.

5) Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (\text{utveckla efter rad1}) = 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 30 - (-6) - 2(18 - (-2)) + 4(-9 - (-5)) = 36 - 40 - 16 = -20$$

Svar: determinanten är -20.

Rättningsmall:
Teckenfel vid beräkning av determinanterna av 2x2-matris, 0p.
Missar teckenskiftningen vid utveckling efter rad eller kolonn, 0p.
Vid användning av sarrus regel förväxlar de positiva termerna med de negativa, 0p.
Allt rätt, 2p.

6) Låt vektorn $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ där $\vec{a} = (-1,3,-2)$ och $\vec{b} = (2,1,-2)$ och $\vec{v} = (1,1,-3)$. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} = (-1,3,-2) - 2(2,1,-2) = (-5,1,2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3-2, 2-15, -5-1) = (-5,-13,-6)$$

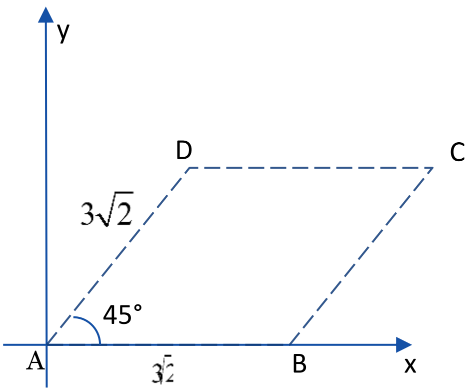
Svar: vektor som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är $(-5,-13,-6)$ eller $(5,13,6)$.

Rättningsmall:

Bestämmer $\vec{u}$ och ställer upp kryssprodukt av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, 1p.

Allt rätt, 2p.

7) Betrakta följande figur (ej skalenlig):



I det tvådimensionella koordinatsystemet ovan finns en parallellogram (i en parallellogram är motstående sidor parallella och lika långa), ABCD, för vilken gäller att längden av AD är $3\sqrt{2}$ längdenheter och av AB 5 längdenheter (se figur).

a) Bestäm koordinaterna för C.

b) Bestäm vektorn $\vec{BD}$.

a) Koordinaterna för C ges av vektorn $\vec{AC}$, eftersom A ligger i koordinatsystemets origo. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ (sista steget kan göras då ABCD är en parallellogram)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (5,0) + (3\sqrt{2} \cdot \cos 45°,\ 3\sqrt{2} \cdot \sin 45°) = (5,0) + (3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},\ 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (5,0) + (3,\ 3) = (8,3)$$

b) $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = (3,3) - (5,0) = (-2,3)$

Svar: a) (8,3) b) (-2,3)

Rättningsmall: a) och b), allt rätt 1p

8) Lös följande ekvation: $z^4 = -9$, där z är ett komplext tal.
Svara på rektangulär form ($z = a + bi$).

Skriv ekvationen på potensform (eller polär form): $z = re^{iv}$ och $-9 = 9e^{i\cdot\pi}$

$$\left(re^{iv}\right)^4 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad r^4 e^{i\cdot 4v} = 9e^{i\cdot\pi}$$

Vilket ger: $\begin{cases} r^4 = 9 \\ 4v = \pi + n\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 9^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} \\ v = \dfrac{\pi}{4} + n\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, där n är ett godtyckligt heltal.

Eftersom ekvationen är av fjärde graden finns det endast fyra <u>olika</u> lösningar, vilka fås genom att t.ex. sätta n=0,1,2,3 :

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\cdot(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{3}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ z_1 = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+1\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{3}\cdot(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}) = \sqrt{3}\cdot(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ z_2 = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{3}\cdot(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}) = \sqrt{3}\cdot(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ z_3 = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{3}\cdot(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}) = \sqrt{3}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Svar: $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Rättningsmall: Ställer upp korrekta ekvationer för r och v 1p
Korrekt lösning, men svarar i polär form eller potensform 2p
Allt rätt 3p

9) Betrakta följande ekvationssystem: $\begin{cases} 2x + 6z = 6 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ x + 3y + az = 3 \end{cases}$

För vilka värden på konstanten a finns en unik lösning?
Bestäm denna unika lösning. Förenkla svaret så långt som möjligt.

Vilka a som ger en unik lösning kan bestämmas m.h.a. koefficientmatrisens determinant (detta kan också bestämmas vid en direkt lösning av ekvationssystemet):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = +2\cdot(-1)\cdot a + 0\cdot 4\cdot 1 + 6\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot 3 - 0\cdot 3\cdot a - 6\cdot(-1)\cdot 1 = -2a + 36$$

Unik lösning då determinanten ej är noll, d.v.s. då: $-2a+36 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 18$

Bestäm den unika lösningen (som förstås beror på värdet av a) med hjälp av en totalmatris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & a & 3 \end{array}\right] \quad -\frac{3}{2}\cdot \text{rad1+rad2}, \text{ samt } -\frac{1}{2}\cdot \text{rad1+rad3 ger:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & a-3 & 0 \end{array}\right] \quad -1\cdot \text{rad2 och därefter -3}\cdot\text{rad2+rad3 ger:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & a-18 & -21 \end{array}\right]$$

Sista raden ger att $(a-18)\cdot z = -21 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{-21}{a-18} = \dfrac{21}{18-a}$

Rad 2 ger att $y = 7-5z = 7-5\cdot\dfrac{21}{18-a} = \dfrac{7\cdot(18-a)}{18-a} - \dfrac{105}{18-a} = \dfrac{21-7a}{18-a}$

Rad 1 ger att $2x = 6-6z \quad \Leftrightarrow \quad x = 3-3z = 3-3\cdot\dfrac{21}{18-a} = \dfrac{3\cdot(18-a)}{18-a} - \dfrac{63}{18-a} = \dfrac{-9-3a}{18-a}$

(Här ser man också att $a \neq 18$, för att lösningen ska vara definierad)

Svar: Unik lösning om $a \neq 18$.

Lösningen är: $\begin{cases} x = \dfrac{-9-3a}{18-a} \\ y = \dfrac{21-7a}{18-a} \\ z = \dfrac{21}{18-a} \end{cases}$

Rättningsmall: korrekt villkor för a med motivering, för unik lösning +1p
Korrekt lösning av ekvationssystem, men något räknefel +1p
Allt rätt 3p

10) En matrisekvation är given: $\left(A-3E\right)\cdot X=B$

där $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ och E är enhetsmatrisen.

a) Visa, med hjälp av determinant, att koefficientmatrisen (A-3E) är inverterbar.
b) Bestäm X.

a) Koefficientmatrisen bestäms: $A-3E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Denna matris är inverterbar, om och endast om, dess determinant är skild från noll.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)+0\cdot1\cdot3+1\cdot(-2)\cdot0-(1)\cdot1\cdot0-0\cdot(-2)\cdot(-4)-1\cdot(-3)\cdot3=$$

$$=(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)-1\cdot(-3)\cdot3=-12+9=-3\neq0$$

Determinanten skild från noll, d.v.s koefficientmatrisen är inverterbar.

b) $\left(A-3E\right)\cdot X=B \quad\Leftrightarrow\quad \left(A-3E\right)^{-1}\cdot\left(A-3E\right)\cdot X=\left(A-3E\right)^{-1}\cdot B \quad\Leftrightarrow\quad X=\left(A-3E\right)^{-1}\cdot B$

Bestämning av $\left(A-3E\right)^{-1}$: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $(-1)\cdot\mathrm{rad}1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; 2\cdot\mathrm{rad}1+\mathrm{rad}2,\ (-3)\cdot\mathrm{rad}1+\mathrm{rad}3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \; (-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{rad}\,2,\ (-1)\cdot\mathrm{rad}\,3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right] \; (-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{rad}\,3+\mathrm{rad}\ 2,\ \mathrm{rad}\,3+\mathrm{rad}1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Enhetsmatrisen står till vänster om strecket, alltså står $(A-3E)^{-1}$ till höger om strecket.

Beräkning av X: $X=(A-3E)^{-1}\cdot B$, d.v.s $X=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Svar: a) Inverterbar, ty determinanten är skild från noll (-3). b) $X=\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Rättningsmall: Om koefficientmatrisen felbestäms så att den får fel typ så blir det 0 poäng på hela uppgiften, annars gäller följande:
Deluppgift a) korrekt determinantbestämning och tolkning ger 1p även om koefficientmatrisen blev felaktigt bestämd. Om en felaktig koefficientmatris ger en determinant som är 0, ger detta ändå 1 poäng, om studenten visar förståelse att något blivit fel.
Deluppgift b) Felaktigt bestämd koefficientmatris, A-3E -1p
Felaktig invertering -1p
Löst ut X felaktigt -1p
Felaktig multiplikation, invers(A-3E)*B -1p

11) I en tredimensionell rymd finns endast tre objekt: En ljuskälla i P: (1,2,7) med oändlig räckvidd. Ett föremål i punkten Q: (-2,5,0) och en oändlig ogenomskinlig vägg med ekvationen $6x-2y+z=5$. Avgör om föremålet i Q träffas av ljuset från ljuskällan i P eller inte.

Om föremålet i Q träffas av ljuset från ljuskällan i P beror enbart av huruvida P och Q befinner sig på samma sida eller på olika sidor om den ogenomskinliga väggen. Eftersom ljuskällan har oändlig räckvidd spelar avståndet mellan P och Q ingen roll.

Lösningsmetod 1:

Välj en godtycklig punkt i väggen (det givna planet), t.ex. A: (0,0,5). Bilda vektorerna AP och AQ:

$\vec{AP}=(1,2,7)-(0,0,5)=(1,2,2)$

$\vec{AQ}=(-2,5,0)-(0,0,5)=(-2,5,-5)$

Väggens normalvektor är $\vec{n}=(6,-2,1)$

Låt v_P (v_Q) vara vinkeln mellan $\overrightarrow{AP}$ ($\overrightarrow{AQ}$) och normalvektorn. Om cos v_P (v_Q) = 0 så är v_P (v_Q) = 90°och P (Q) ligger i planet. Om cos v_P (v_Q) > 0 så är v_P (v_Q) < 90° och P (Q) ligger på den sida om planet som normalvektorn pekar mot. Om cos v_P (v_Q) < 0 så är v_P (v_Q) > 90° och P (Q) ligger på den andra sidan om planet. Detta betyder att <u>P och Q ligger på samma sida om planet</u> om cos v_P och cos v_Q har <u>samma tecken</u>, annars ligger de på olika sidor om planet.

Skalärprodukten används: $\cos v_P = \dfrac{\overrightarrow{AP}\circ\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{(1,2,2)\circ(6,-2,1)}{|(1,2,2)|\cdot|(6,-2,1)|} = \dfrac{4}{3\sqrt{41}} > 0$

$$\cos v_Q = \frac{\overrightarrow{AQ}\circ\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(-2,5,-5)\circ(6,-2,1)}{|(-2,5,-5)|\cdot|(6,-2,1)|} = \frac{-27}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{41}} < 0$$

Cos v_P och cos v_Q har olika tecken, d.v.s. P och Q befinner sig på olika sidor om planet (väggen) och därför träffas inte Q av ljusstrålarna från P.

Lösningsmetod 2 (Alternativ lösning):

Bilda istället linjen genom Q och P, med startpunkt i Q och QP som riktningsvektor:

$$L = Q + t\cdot\overrightarrow{QP} = (-2,5,0) + t\cdot((1,2,7)-(-2,5,0)) = (-2,5,0) + t\cdot(3,-3,7) = \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 5-3t \\ z = 7t \end{cases}$$

Ljusstrålen från P går längs denna räta linje till Q. Om linjen skär planet (väggen) mellan P och Q så ligger de på olika sidor om planet, annars ligger de på samma sida om planet. Insättning av t = 0 i linjens ekvation ger punkten Q. Insättning av t = 1 i linjens ekvation ger punkten P. Parametervärdet (t-värdet) på linjen för skärningspunkten med planet bestäms. Om 0<t<1 så skär linjen planet mellan P och Q, annars skär linjen inte planet mellan P och Q.

Linjens ekvation på parameterform sättes in i planets ekvation:

$$6x - 2y + z = 6\cdot(-2+3t) - 2\cdot(5-3t) + 7t = -22 + 31t = 5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{27}{31}$$

Eftersom $0 < t < 1$ så skär linjen planet mellan P och Q, d.v.s P och Q ligger på olika sidor om planet och därför når ej ljusstrålen från P fram till Q.

Svar: Q träffas ej av ljusstrålen från P.

Rättningsmall: Börjar på en väl motiverad, korrekt lösningsmetod, men gör något större algebraiskt fel 1p
Löser med väl motiverad, korrekt metod, men gör något räknefel 2p
Allt rätt 3p