KTH Teknik och hälsa

<table>
<tr><td>Kurs:</td><td>HF1006</td></tr>
<tr><td>Moment:</td><td>TEN1, 4hp</td></tr>
<tr><td>Program:</td><td>TIDAA, TIELA, TIMEL</td></tr>
<tr><td>Examinator:</td><td>Maria Shamoun</td></tr>
<tr><td>Jourhavande lärare:</td><td>Maria Shamoun, tel. 08 790 97 12</td></tr>
<tr><td>Datum:
Tid:</td><td>2023-12-20
8:00-12:00</td></tr>
<tr><td>Hjälpmedel:</td><td>Formelblad</td></tr>
<tr><td>Omfattning och betygsgränser:</td><td>
<table>
<tr><th>Del</th><th>Poäng</th><th>Fx</th><th>E</th><th>D</th><th>C</th><th>B</th><th>A</th></tr>
<tr><td>I</td><td>16</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>II</td><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Övrig information:</td><td>Undvik röda pennor. Skriv namn och personnummer på varje papper. Skriv bara på papprets ena sida. Inlämnade uppgifter skall markeras med kryss på försättsbladet. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara väl motiverade, tydliga och lätta att följa. Svaret ska framgå tydligt.
Tentamenslydelsen ska lämnas in tillsammans med lösningarna.

Lycka till!</td></tr>
</table>

<u>Del I:</u> 2p/uppgift **8 uppgifter på totalt 16 poäng**

1) Lös följande ekvation $3z + i\,\bar{z} = \frac{13}{6} + \frac{23}{6}i$.

2) a) Åskådliggör lösningsmängden till följande system av olikheter, i det komplexa talplanet: $\begin{cases} |z| \le 4 \\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

b) Markera $z_0 = -1 + 2i$ i den figur du ritat i uppgift 2a.

3) Finn ekvationen för planet som går genom punkterna A: (2,1,1), B: (-3,0,-4) och C: (4,4,4).

4) En triangel har hörn i punkterna A: (1,0,0), B: (0,2,0) och C: (0,0,5).
Bestäm vinkeln B uttryckt med arccos.

5) Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 9 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 7x - y + 12z = 0 \end{cases}$

6) Invertera följande matris, d.v.s. bestäm A^{-1}: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

7) Bestäm $\det(3A - B)$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

8) Vektorn $\vec{v} = (2, 0, -6)$ är given. Finn en vektor $\vec{u}$, så att $\vec{u}$ är vinkelrät mot $\vec{v}$ och längden av $\vec{u}$ är 10.
Motivera ditt svar tydligt.

<u>Del II:</u> **4 uppgifter på totalt 10 poäng**

9) På en liten gymnasieskola har man tre årskurser på det naturvetenskapliga programmet, med totalt 34 elever. Skolan lägger undan 2000 kr per elev i årskurs 1, 3000 kr per elev i årskurs 2 och 5000 kr per elev i årskurs 3 för studiebesök, vilket blir totalt 104 000 kr. Eleverna har ett frivilligt språktillval som tas av 1/6 av eleverna i årskurs 2 och 1/4 av eleverna i årskurs 3, vilket blir totalt 4 elever.

Bestäm hur många elever som går i respektive årskurs. (2p)

10) Bestäm lösningarna till $z^3 = 64i$. Svara på rektangulär form (a+bi), förenklat så långt som möjligt. (3p)

11) En matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, där a och b är reella tal. En matris $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, där x och y är godtyckliga reella tal. Bestäm A så att $A^2X = A \cdot A \cdot X = X$. (2p)

12) Två punktformiga föremål (A och B) startar samtidigt: Föremål A från punkten (-50, -20,-10), med farten 70 m/s i riktningen (6,3,2), och föremål B från punkten (-30,-30,-10), med farten 48 m/s i riktningen (4,4,2). A och B rör sig i rätlinjiga banor med konstant fart. Alla avstånd mäts i meter.

Avgör vilket av följande tre fall som inträffar:

1) Deras banor har inte någon skärningspunkt, så det finns ingen risk att de kolliderar.
2) Deras banor har en skärningspunkt, men de kommer inte till denna punkt samtidigt, så det blir inte någon kollision.
3) Deras banor har en skärningspunkt och de kommer till denna punkt samtidigt, d.v.s de kommer att kollidera. (3p)

Lösningsförslag med rättningsmall:

Del I: 2p/uppgift

1) Lös följande ekvation $3z + i\,\overline{z} = \frac{13}{6} + \frac{23}{6}i$.

Lösning: Låt $z = a + bi$ och $\overline{z} = a - bi$:

$$3\cdot(a+bi) + i\cdot(a-bi) = \frac{13}{6} + \frac{23}{6}i$$

$$(3a+b) + (3b+a)\cdot i = \frac{13}{6} + \frac{23}{6}i$$

Vilket ger ett ekvationssystem: $\begin{cases} 3a + b = \frac{13}{6} \\ 3b + a = \frac{23}{6} \end{cases}$

3*ekv 1 minus ekv 2 ger $8a = \frac{16}{6}$ d.v.s. $a = \frac{2}{6}$. Ekv 1 ger $b = \frac{13}{6} - 3\cdot\frac{2}{6} = \frac{7}{6}$

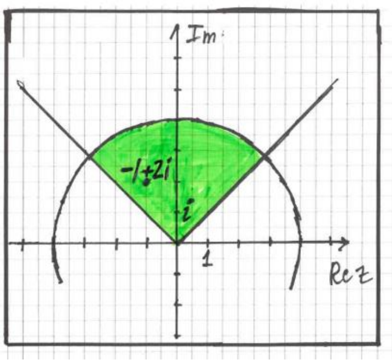
Svar: $z = \frac{2}{6} + \frac{7}{6}\cdot i$

Rättningsmall:
Ställer upp ett korrekt ekvationssystem, 1p.
Allt rätt, 2p.

2) a) Åskådliggör lösningsmängden till följande system av olikheter, i det komplexa talplanet: $\begin{cases} |z| \le 4 \\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

b) Markera $z_0 = -1 + 2i$ i den figur du ritat i uppgift 2a.

Lösning: Lösningsmängden till $|z| \le 4$ är alla z med ett avstånd till origo som är högst 4 l.e., d.v.s. en cirkelskiva runt origo med radien 4.
Lösningsmängden till $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$ är alla z med ett argument mellan $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{3\pi}{4}$, vilket är en utåt obegränsad sektor av talplanet.
Lösningsmängden till systemet är de z som ligger i båda de ovanstående lösningsmängderna,d.v.s. en cirkelsektor (se figur nedan, i vilken även z_0 är markerad).



Rättningsmall:
1 p per deluppgift. Rätt eller fel.

3) Finn ekvationen för planet som går genom punkterna A: (2,1,1), B: (-3,0,-4) och C: (4,4,4).

Lösning: Planets normalvektor ($\vec{n}$) fås med kryssprodukten av två vektorer i planet:

$$\vec{AB} = (-3,0,-4)-(2,1,1) = (-5,-1,-5)$$
$$\vec{AC} = (4,4,4)-(2,1,1) = (2,3,3)$$
$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot\vec{e}_x + 5\cdot\vec{e}_y - 13\cdot\vec{e}_z = (12,\ 5, -13)$$

Planets ekvation är då: $12x+5y-13z+d=0$, för något värde för d.
d bestäms genom insättning av koordinaterna för en punkt (vi väljer A) i planets ekv:

$$12\cdot 2+5\cdot 1-13\cdot 1+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-16$$

Planets ekvation blir då: $12x+5y-13z-16=0$ eller $12x+5y-13z=16$.

Alternativ lösning: Planets ekvation kan också bestämmas på parameterform (t.ex.):

$$P = A + t\cdot AB + s\cdot AC = (2,1,1)+t\cdot(-5,-1,-5)+s\cdot(2,3,3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2-5t+2s \\ y = 1-t+3s \\ z = 1-5t+3s \end{cases}$$

där punkten $\mathrm{P} = (x,y,z)$ är en godtycklig punkt i planet.

<u>Svar</u>: Parameterfritt: $12x+5y-13z=16$
Med parametrar, t.ex. (kan skrivas på flera olika sätt)

$$P = (2,1,1)+t\cdot(-5,-1,-5)+s\cdot(2,3,3) \text{ eller } \begin{cases} x = 2-5t+2s \\ y = 1-t+3s \\ z = 1-5t+3s \end{cases}.$$

Rättningsmall:
Kommer fram till $12x+5y-13z+d=0$, 1p
Allt rätt, 2p.

4) En triangel har hörn i punkterna A: (1,0,0), B: (0,2,0) och C: (0,0,5).
Bestäm vinkeln B uttryckt med arccos.

Lösning: Använd följande formel: $\vec{u}\circ\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$\overrightarrow{BA}=(1,0,0)-(0,2,0)=(1,-2,0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}=(0,0,5)-(0,2,0)=(0,-2,5)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{(1,-2,0)\circ(0,-2,5)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+5^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}$$

Vinkeln B är då, uttryckt med arccos: $\theta=\arccos\dfrac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}$

<u>Svar</u>: $\theta=\arccos\dfrac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}$

Rättningsmall:
Beräknar fel vinkel, 0p.
Beräknar cos B korrekt, 1p.
Allt rätt, 2p.

5) Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases}3x-3y+6z=9\\2x+y+3z=5\\7x-y+12z=0\end{cases}$

Lösning: Vi använder totalmatris.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-3&6&9\\2&1&3&5\\7&-1&12&0\end{array}\right]\qquad -\frac{2}{3}\cdot\text{rad 1+rad 2} \text{ och } -\frac{7}{3}\cdot\text{rad 1+rad 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-3&6&9\\0&3&-1&-1\\0&6&-2&-21\end{array}\right]\qquad \frac{1}{2}\cdot\text{rad 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-3&6&9\\0&3&-1&-1\\0&3&-1&-21/2\end{array}\right]\qquad \text{rad 3-rad 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-3&6&9\\0&3&-1&-1\\0&0&0&-19/2\end{array}\right]$$

Rad 3 tolkas så här: $0x+0y+0z=0=-\dfrac{19}{2}$, vilket är en alltid falsk ekvation.

Detta innebär att ekvationssystemet saknar lösningar!

Svar: Detta ekvationssystem saknar lösningar.

Rättningsmall:

Korrekt trappstegsformat ekvationssystem eller totalmatris men inget svar, 0p.

Korrekt trappstegsformat ekvationssystem eller totalmatris men felaktig tolkning av sista raden, 1p.

Allt rätt, 2p.

6) Invertera följande matris, d.v.s. bestäm A^{-1}: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$.

Lösning: Jacobis metod: $\left[A \middle| E\right]$ radreduceras till $\left[E \middle| B\right]$. Då är $B=A^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \qquad -2\cdot\text{rad }1+\text{rad }2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \qquad \frac{1}{2}\cdot\text{rad }2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \qquad \text{rad }2+\text{ rad }3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -5 & -1 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right] \qquad -\frac{1}{5}\cdot\text{rad }3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\end{array}\right] \qquad 3\cdot\text{rad }3+\text{rad }2 \qquad -4\cdot\text{rad }3+\text{rad }1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{8}{10}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{6}{10}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10}\end{array}\right]$$ Klart! Enhetsmatrisen står till vänster och inversen till höger

Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{8}{10} \\ -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{8}{10} \\ -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Rättningsmall:
Använder formeln för beräkning av inversen till 2x2-matris, 0p.
-1p för varje räknefel.

7) Bestäm $\det(3A-B)$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösning: Determinanten för en 2x2 matris $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är $\det \mathrm{M} = ad - bc$

$$\det(3A-B) = \det\left(3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 9 - 4 \cdot (-8) = 59$$

<u>Svar</u>: $\det(3A-B) = 59$

Rättningsmall:
Beräknar endast matrisen 3A-B, 0p.
Får fram värdet determinanten 59 men fortsätter att räkna tex beräknar A^{-1}, 1p.
Allt rätt, 2p.

8) Vektorn $\vec{v} = (2, 0, -6)$ är given. Finn en vektor $\vec{u}$, så att $\vec{u}$ är vinkelrät mot $\vec{v}$ och längden av $\vec{u}$ är 10.
Motivera ditt svar tydligt.

Lösning: Antag att $\vec{u} = (a, b, c)$.
$\vec{u}$ är vinkelrät mot $\vec{v}$ om $\vec{u} \circ \vec{v} = (a, b, c) \circ (2, 0, -6) = 2a - 6c = 0$
Vilket ger att $a = 3c$
Längden av $\vec{u}$ är 10 innebär att $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 10$ eller $a^2 + b^2 + c^2 = 100$
Insättning av $a = 3c$ ger $b^2 + 10c^2 = 100$

Det finns ett oändligt antal möjliga $\vec{u}$. Vi kan välja vilken vektor vi vill av dessa.
Den kanske enklaste möjliga vektorn är $\vec{u} = (0,10,0)$ som fås då $c = 0$ och $b = 10$.

Svar: En av ett oändligt antal möjliga $\vec{u}$ är $(0,10,0)$.

Rättningsmall:
Bestämmer en vektor $\vec{u}$ samt visar att den är vinkelrät mot $\vec{v}$, 1p.
Allt rätt, 2p.

9) På en liten gymnasieskola har man tre årskurser på det naturvetenskapliga programmet, med totalt 34 elever. Skolan lägger undan 2000 kr per elev i årskurs 1, 3000 kr per elev i årskurs 2 och 5000 kr per elev i årskurs 3 för studiebesök, vilket blir totalt 104 000 kr. Eleverna har ett frivilligt språktillval som tas av 1/6 av eleverna i årskurs 2 och 1/4 av eleverna i årskurs 3, vilket blir totalt 4 elever.

Bestäm hur många elever som går i respektive årskurs. (2p)

Lösning: Låt x vara antalet elever i årskurs 1, y antalet elever i årskurs 2 och z antalet elever i årskurs 3. Då kan man ställa upp följande ekvationssystem utgående från uppgiftstexten:

$$\begin{cases} x + y + z = 34 & \text{(totala antalet elever)} \\ 2000x + 3000y + 5000z = 104000 & \text{(studiebesök)} \\ \frac{1}{6} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot z = 4 & \text{(språktillval)} \end{cases}$$

Totalmatris: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 34 \\ 2000 & 3000 & 5000 & 104000 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 4 \end{array}\right]$ rad 2/1000 och $12 \cdot$ rad 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 104 \\ 0 & 2 & 3 & 48 \end{array}\right] \quad -2 \cdot \text{rad 1+rad 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 34 \\ 0 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 2 & 3 & 48 \end{array}\right] \quad -2 \cdot \text{rad 2+rad 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 34 \\ 0 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{array}\right]$$

Rad 3 ger: $-3z = -24 \quad \Rightarrow \quad z = 8$

Återsubstitution: $y + 3 \cdot 8 = 36 \quad \Rightarrow \quad y = 12$ samt $x = 34 - 12 - 8 = 14$

Svar: Det finns 14 elever i årskurs 1, 12 elever i årskurs 2 och 8 elever i årskurs 3.

Rättningsmall:
Ekvationssystem med tre korrekta ekvationer samt försöker lösa systemet, 1p.
Allt rätt, 2p.

10) Bestäm lösningarna till $z^3 = 64i$. Svara på rektangulär form (a+bi), förenklat så långt som möjligt. (3p)

Lösning: Skriv ekvationen på polär form ($z = r\cdot(\cos v + i\sin v)$) och

$$64i = 64\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})).$$

$$(r\cdot(\cos v + i\sin v))^3 = 64\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

Detta ger att: $\begin{cases} r^3 = 64 \\ 3v = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \end{cases}$ eller $\begin{cases} r = 4 \\ v = \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Ekvationen har tre olika lösningar som fås för tre olika, på varandra följande n-värden. Vi sätter in n = 0, 1 och 2:

$$\begin{cases} z_1 = 4\cdot(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 4\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} + 2i \\ z_2 = 4\cdot(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 4\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) = -2\sqrt{3} + 2i \\ z_3 = 4\cdot(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = 4\cdot(0 + i\cdot(-1)) = -4i \end{cases}$$

<u>Svar</u>: Ekvationen har tre lösningar: $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ och $z_3 = -4i$.

Rättningsmall:
Kommer fram till korrekt belopp r och argument v (utan period) samt en lösning, 1p.
Alla tre lösningar på polärform, 2p.
Allt rätt, 3p.

11) En matris $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, där a och b är reella tal. En matris $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, där x och y är godtyckliga reella tal. Bestäm A så att $A^2X = A\cdot A\cdot X = X$. (2p)

Lösning:

$$V.L := A^2X = A\cdot A\cdot X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ax+by \\ bx+ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot(ax+by)+b\cdot(bx+ay) \\ b\cdot(ax+by)+a\cdot(bx+ay) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a^2+b^2)\cdot x + 2aby \\ 2abx + (a^2+b^2)\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H.L.$$

För att vänster och höger led ska kunna vara lika för godtyckliga X måste följande gälla:

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Nollproduktmetoden ger att det finns två fall:

1) $a=0$ och $b=\pm 1$ (två olika lösningar)
2) $b=0$ och $a=\pm 1$ (två olika lösningar)

Detta ger alltså fyra möjliga matriser, A:

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: Fyra möjliga matriser:

$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $A_4=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Rättningsmall:
Kommer fram till ekvationerna $a^2+b^2=1$ och $2ab=0$ samt anger en matris A, 1p.
Allt rätt, 3p.

12) Två punktformiga föremål (A och B) startar samtidigt: Föremål A från punkten (-50, -20,-10), med farten 70 m/s i riktningen (6,3,2), och föremål B från punkten (-30,-30,-10), med farten 48 m/s i riktningen (4,4,2). A och B rör sig i rätlinjiga banor med konstant fart. Alla avstånd mäts i meter.

Avgör vilket av följande tre fall som inträffar:

1) Deras banor har inte någon skärningspunkt, så det finns ingen risk att de kolliderar.
2) Deras banor har en skärningspunkt, men de kommer inte till denna punkt samtidigt, så det blir inte någon kollision.
3) Deras banor har en skärningspunkt och de kommer till denna punkt samtidigt, d.v.s de kommer att kollidera. (3p)

Lösning: Vi ställer upp linjens ekvation på parameterform för de båda föremålens banor. Vi använder tiden som parameter i båda ekvationerna, men ger parametrarna olika beteckningar. Då kan vi avgöra om banorna skär varandra och om föremålen kommer samtidigt till skärningspunkten.

Det gäller att vardera föremålets momentana position ges av $P = P_0 + \vec{v} \cdot t$, där P_0 är startpunkten, $\vec{v}$ är den konstanta hastighetsvektorn och t är tiden räknad från det ögonblick föremålet befinner sig i P_0.

Hastighetsvektorer: $\vec{v}_A$ ska ha längden 70 och riktningen (6,3,2).

$|(6,3,2)| = \sqrt{6^2+3^2+2^2} = 7$. Då är $\vec{v}_A = 10 \cdot (6,3,2) = (60,30,20)$

$\vec{v}_B$ ska ha längden 48 och riktningen (4,4,2).

$|(4,4,2)| = \sqrt{4^2+4^2+2^2} = 6$. Då är $\vec{v}_B = 8 \cdot (4,4,2) = (32,32,16)$

Föremålens banor på parameterform:

$$P_A = P_{0A} + \vec{v}_A \cdot t_A = (-50,-20,-10) + (60,30,20) \cdot t_A = \begin{cases} x = -50 + 60t_A \\ y = -20 + 30t_A \\ z = -10 + 20t_A \end{cases}$$

$$P_B = P_{0B} + \vec{v}_B \cdot t_B = (-30,-30,-10) + (32,32,16) \cdot t_B = \begin{cases} x = -30 + 32t_B \\ y = -30 + 32t_B \\ z = -10 + 16t_B \end{cases}$$

Vi sätter $P_A = P_B$: $\begin{cases} -50 + 60t_A = -30 + 32t_B \\ -20 + 30t_A = -30 + 32t_B \\ -10 + 20t_A = -10 + 16t_B \end{cases}$

De två första ekvationerna ger $-50 + 60t_A = -20 + 30t_A \quad \Rightarrow \quad t_A = 1\text{s}$

$-50 + 60t_A = -30 + 32t_B$ ger $t_B = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} = 1{,}25\text{s}$

Dessa värden satisfierar också ekvationen för z.

Insättning av parametervärden ger alltså en skärningspunkt i (10,10,10) dit A kommer efter 1 sekund och B kommer efter 1,25 sekunder.

<u>Svar</u>: Alternativ 2 är rätt, deras banor har en skärningspunkt, men de kommer inte till denna punkt samtidigt, så det blir inte någon kollision.

Rättningsmall:

Tar ej hänsyn till hastigheterna 70 m/s och 48m/s (vilket ger fel enhet vid uppställning av linjerna), 0p.

Kommer fram till korrekta hastighetsvektor, v_A och v_B, 1p.

Bestämmer tiderna t_A och t_B, 2p.

Allt rätt, 3p.