Lösningar till tenta i MVE275

27/10 2015 Elin Götmark

1. Se separat papper på slutet.

2. a. $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ är en bas för underrummet W om $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ är linjärt oberoende och $\mathrm{Span}\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\} = W$.

b. Vi tillämpar Gram-Schmidt metoden.

Sätt $\mathbb{b}_1 = \mathbb{v}_1$.

$$\mathbb{v}_2 - \frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{v}_2}{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_1} \cdot \mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-6}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Vi sätter $\mathbb{b}_2 = (6, -5, 3, 10)$.

$$\mathbb{v}_3 - \frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{v}_3}{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_1} \cdot \mathbb{b}_1 - \frac{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{v}_3}{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{b}_2} \cdot \mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{16}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-34}{170} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -35 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -32 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Detta betyder att $\mathbb{v}_3$ ligger i $\mathrm{Span}\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$, så $\mathbb{b}_1$ och $\mathbb{b}_2$ bildar en OG-bas för W.

c. Det ortogonala komplementet $W^\perp$ till ett underrum W är mängden av alla vektorer som är ortogonala mot alla vektorer i W.

(d) Vi kan komplettera basen $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ i b) till en OG-bas $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3, \mathbb{b}_4$ för $\mathbb{R}^4$. Då bildar $\mathbb{b}_3, \mathbb{b}_4$ en bas för $W^\perp$, så $\dim(W^\perp) = 2$.

(3.) (a.) Vi räknar ut egenvärdena genom att titta på nollställena till $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Så egenvärdena är $\lambda_{1,2} = 1$ och $\lambda_3 = 3$.

(b.) $\underline{\lambda = 1}$: $A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi kan välja $\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\underline{\lambda = 3}$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi kan välja $\mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c.) Ja, A är diagonaliserbar.

$$A = PDP^{-1} \quad \text{där} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi räknar ut P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Så $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(4.) (a.) Vi behöver hitta bilderna av standard-vektorerna e_1, e_2, e_3.

Om $v_1 = (0,0,2)$, $v_2 = (0,1,1)$ och $v_3 = (-1,2,0)$,

så är
$$e_1 = -v_3 + 2v_2 - v_1$$
$$e_2 = v_2 - \tfrac{1}{2}v_1$$
$$e_3 = \tfrac{1}{2}v_1.$$

Så $T(e_1) = -T(v_3) + 2T(v_2) - T(v_1) =$
$= (5,-2,0) + (6,-2,2, + (-4,0,2) = (7,-4,4)$

$T(e_2) = T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_1) = (3,-1,1) - (2,0,-1) =$
$= (1,-1,2)$

$T(e_3) = \frac{1}{2}T(v_1) = (2,0,-1).$

Alltså är avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b.) Detta ges av $|\det(A)|$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-8+4) - (-7+4) = -8+3 = -5$$

Så parallellepipedens volym blir 8 ggr större.

(c.) Nej. Alla linjära avbildningar avbildar $\mathbf{0}$ på $\mathbf{0}$, vilket denna inte gör.

(5.) (a) Koordinaterna till p_1, p_2, p_3 i standardbasen $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$ är

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vi testar om dessa är linjärt oberoende.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -8 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & -32 \end{bmatrix} -5 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Så vektorerna är linj. ob. och $\{p_1, p_2, p_3\}$ är en bas, eftersom $\dim(\mathbb{P}^2) = 3$.

(b.) Vi måste ta fram $T(p_1), T(p_2), T(p_3)$.

$$T(p_1) = -1 + 4 - (1-t) = t + 2$$

$$T(p_2) = 2 + 16t + 1 + 2(1-t) + 8(1-t)^2 = 8t^2 - 2t + 13$$

$T(p_3) = 1 + 10t + (1-t) + 5(1-t)^2 = 5t^2 - t + 7$

Nu måste vi hitta dessa vektorers koordinater i basen i a), kalla den $\mathcal{B}$. Detta får vi genom att lösa

$$c_1\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{osv.}$$

$[T(p_1)]_{\mathcal{E}}$ där $\mathcal{E}$ är standardbasen

Vi löser alla dessa på en gång:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 1 & 0 & 2 & 13 & 7\\-1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -1\\0 & 8 & 5 & 0 & 8 & 5\end{array}\right] 4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 9 & 4 & 5 & 5 & 3\\-1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -1\\0 & 8 & 5 & 0 & 8 & 5\end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 1\\0 & 9 & 4 & 5 & 5 & 3\\0 & 8 & 5 & 0 & 8 & 5\end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 1\\0 & 1 & -1 & 5 & -3 & -2\\0 & 8 & 5 & 0 & 8 & 5\end{array}\right] (-8) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 1\\0 & 1 & -1 & 5 & -3 & -2\\0 & 0 & 13 & -40 & 32 & 21\end{array}\right] \begin{matrix}2\\ \frac{1}{13}\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 9 & -4 & -3\\0 & 1 & -1 & 5 & -3 & -2\\0 & 0 & 1 & -\frac{40}{13} & \frac{32}{13} & \frac{21}{13}\end{array}\right] 1 \; 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{37}{13} & \frac{12}{13} & \frac{2}{13}\\0 & 1 & 0 & \frac{25}{13} & -\frac{7}{13} & -\frac{5}{13}\\0 & 0 & 1 & -\frac{40}{13} & \frac{32}{13} & \frac{21}{13}\end{array}\right]$$

Alltså är avbildningsmatrisen $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}37 & 12 & 2\\25 & -7 & -5\\-40 & 32 & 21\end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$.

6. a) Nej, det är falskt. Om $\overbrace{A}^{\text{t ex}} = [1 \;\; 1]$, $B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ så är $(AB)^T = \left([1 \;\; 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)^T = [1]^T = [1]$, men

$A^TB^T = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[1 \;\; 1] = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

b) Sant. Vi vet att $\dim(\mathrm{Nul}(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A)) = 7$, och eftersom de båda är heltal kan de inte vara lika.

c. Falskt. T ex $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar med $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, men den är inte inverterbar eftersom $\det(A) = 0$.

7. a. Se sid 148 i boken.

b. Se sid 338 i boken.

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 150824	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorn ($u =$) $(4, -1, -5)$ en linjärkombination av vektorerna ($v_1 =$) $(3, 1, -2)$ och ($v_2 =$) $(-1, 2, 4)$? (2p)

Lösning: I så fall är $u = av_1 + bv_2$. Vi vill hitta a och b.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 & 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 8 & -7 \end{array}\right] \left(-\tfrac{1}{7}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -7 \end{array}\right] -8 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sista raden säger att $0 = 1$ alltså är ekvationssystemet inte lösbart.

Svar: Nej

(b) Ge ett exempel på en 3×3-matris A som är ~~vars kolumner bildar en~~ ortogonal, dvs $A^TA = I$ ~~mängd~~. Matrisen ska inte vara diagonal. (2p)

Lösning: T ex $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Kolonnerna är ortogonala och har längd 1, men matrisen är inte diagonal.

Svar: ....

(c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

och $\mathbf{b} = (2, a)$. För vilka värden på a har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik lösning, inga lösningar, respektive oändligt många lösningar? Kan alla de fallen inträffa?

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & a \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a+6 \end{array}\right]$$

Om $a+6=0$, dvs $a=-6$, har systemet oändligt många lösningar. Om $a \neq -6$ har systemet ingen lösning. Systemet kan inte ha unik lösning.

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Bestäm baser för kolonrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 10x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{matrix}$$

En bas för kolonnrummet ges av $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

— " — nollrummet — " — $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (genom att välja $x_3 = 1$.)

Svar: ....

(e) Bestäm koordinaterna för vektorn $(2, -1)$ i basen $\mathbf{b_1} = (1, -2)$, $\mathbf{b_2} = (0, -1)$. (2p)

Lösning:

Vi vill hitta c_1 och c_2 så att $c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Alltså är koordinatena $c_1 = 2$, $c_2 = -3$.

Svar: ....

(f) En 2×2-matris A har egenvärdena -1 och ~~2~~ 1 med egenvektorer $(1, 3)$ respektive $(-1, 1)$. Räkna ut ~~A^5~~ A^{100}. (3p)

Lösning: Vi diagonaliserar A och får

$A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och

$$P^{-1} = \frac{1}{1-(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{100} = \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 1^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{100} = PD^{100}P^{-1} = PIP^{-1} =$$

$$= PP^{-1} = \underline{\underline{I}}.$$

Svar: ....