Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Минасян Левон Лерментович

О некоторых решеточных тета-рядах

Курсовая работа студента 3 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Дунин-Барковский Петр Игоревич

Москва 2023

1 Введение

В этой статье мы описываем тета-функции и тета-ряды различных решеток, а также устанавливаем их модулярность относительно различных подгрупп модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$.

Тета-функции применялись для исследования плотностей, различных свойств решеток и упаковок [2].

Интерес к ним возник также в теории суперструн, когда был поднят вопрос о построении специфичных модулярных форм веса 8. Мы показываем, как строить такие, когда размерность аргументов равна 1.

2 Тета-функции

В данной главе мы определим тета-функции Якоби, а также тета-функции с рациональными характеристиками. Получим выражения для рядов тета-функций с полуцелыми характеристиками.

Определение 2.1.
Тета-функцией (Якоби) $\theta(z,\tau)$ называется функция

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(2\pi inz + \pi in^2\tau) \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{C}$ и $\tau \in H = \{\Im\tau > 0\}$ - верхняя полуплоскость.

Часто бывает удобно рассмотреть $z = 0$ и заменить аргумент τ на $q = e^{i\pi\tau}$. В таких случаях будем писать $\theta(q)$ вместо $\theta(0,\tau)$.

Определение 2.2.
Тета-функцией $\theta_{a,b}$ с рациональными характеристиками $a, b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$ называется

$$\theta_{a,b}(z,\tau) = T_a S_b \theta(z,\tau) \tag{2}$$

где T_a, S_b суть преобразования сдвига аргумента z: для $f = f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ при фиксированном $\tau \in H$

$$S_b f(z) = f(z+b) \tag{3}$$

$$T_a f(z) = \exp(\pi ia^2\tau + 2\pi iaz) f(z + a\tau) \tag{4}$$

Легко показать, что S_b и T_a задают однопараметрические семейства преобразований $S_{b_1+b_2} = S_{b_1}S_{b_2}$ и $T_{a_1+a_2} = T_{a_1}T_{a_2}$. Что не менее важно, они не коммутируют между собой:

$$T_a S_b f(z) = T_a f(z+b) = \exp(\pi ia^2\tau + 2\pi ia(z+b)) f(z + a\tau + b) = \exp(2\pi iab) S_b T_a f(z) \tag{5}$$

т.е. $T_a S_b = \exp(2\pi iab) S_b T_a$

Определение 2.3.
Тета-функциями с полуцелыми характеристиками называются 4 функции

$$\begin{aligned} \theta_1(q) &= \theta_{1/2,1/2}(0,\tau) \\ \theta_2(q) &= \theta_{1/2,0}(0,\tau) \\ \theta_3(q) &= \theta_{0,0}(0,\tau) \\ \theta_4(q) &= \theta_{0,1/2}(0,\tau) \end{aligned} \tag{6}$$

где, как и ранее, $q = e^{\pi i\tau}$.

Теорема 2.4.
Имеют место следующие равенства

$$\theta_1(q) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n-1/2}q^{(n+1/2)^2} \tag{7}$$
$$\theta_2(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}$$
$$\theta_3(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$$
$$\theta_4(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2}$$

где, как и ранее, $q = e^{\pi i\tau}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\theta_4(q) = \theta_{0,1/2}(0,\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(2\pi i n(0+\frac{1}{2}) + \pi i n^2\tau\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\exp\left(\pi i n^2\tau\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(q) = \theta_{1/2,0}(0,\tau) &= \exp\left(\pi i(1/2)^2\tau + 2\pi i(1/2)\cdot 0\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(2\pi i n(0+\frac{1}{2}\tau) + \pi i n^2\tau\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i(n^2+n+1/4)\tau\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(q) = \theta_{1/2,1/2}(0,\tau) &= \exp\left(\pi i(1/2)^2\tau + 2\pi i(1/2)\cdot(0+1/2)\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(2\pi i n(0+1/2+\frac{1}{2}\tau) + \pi i n^2\tau\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i(n+1/2)\right)\exp\left(\pi i(n^2+n+1/4)\tau\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n+1/2}q^{(n+1/2)^2}\end{aligned} \tag{10}$$

□

Отныне для удобства $\theta_{0,0}, \theta_{0,1/2}, \theta_{1/2,0}, \theta_{1/2,1/2}$ будем обозначать как $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ соответственно.

3 Модулярные формы

3.1 Определения и базовые свойства

Определим понятие модулярных форм и докажем базовые утверждения.

Рассмотрим набор проекций

$$\gamma_N : SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{11}$$

Обозначим $\Gamma_N := \ker\gamma_N$. Ясно, что ядра Γ_N таких отображений состоят из матриц $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $a \equiv d \equiv 1(\mod N)$, $b \equiv c \equiv 0(\mod N)$.

Определение 3.1.
Модулярной формой веса k уровня N называется голоморфная функция $f : H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(M1): $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_N$ *верно:*

$$f\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big) = (c\tau + d)^k f(\tau) \tag{12}$$

(M2): $\exists c, d > 0$ *такие, что* $|f(\tau)| \leq c$ *при* $\Im\tau \geq d$

(M3): $\forall s \in \mathbb{Q} \exists c_s, d_s > 0 :$

$$|f(\tau)| \leq \frac{c_s}{|\tau - s|^k} \tag{13}$$

при $|\tau - (s + i \cdot d_s)| \leq d_s$

Модулярные формы веса k уровня N будем обозначать $\mathrm{Mod}_k^{(N)}$.

Введем обозначение $e_\gamma = (c\tau + d)^k$ для $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Вес k будет определяться из контекста.

Утверждение 3.1.
$Mod_k^{(N)}$ образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathrm{Mod}_k^{(N)}$. Тогда $f(\gamma\tau) = e_\gamma(\tau) f(\tau)$ и $g(\gamma\tau) = e_\gamma(\tau) g(\tau)$. Значит,

$$(f + g)(\gamma\tau) = f(\gamma(\tau)) + g(\gamma(\tau)) = e_\gamma(\tau) f(\tau) + e_\gamma(\tau) g(\tau) = e_\gamma(\tau)(f(\tau) + g(\tau)) \tag{14}$$

Проверим $(M2)$:

$$|f(\tau) + g(\tau)| \leq C_f + C_g \quad \text{при} \quad \Im\tau \geq \max(D_f, D_g) \tag{15}$$

где $(C_f, D_f), (C_g, D_g)$ константы из $(M2)$ для f, g.

Проверим $(M3)$. Фиксируем произвольный $s \in \mathbb{Q}$. Тогда для некоторых $c_s^f, d_s^f, c_s^g, d_s^g > 0$:

$$|f(\tau)| \leq \frac{c_s^f}{|\tau - s|^k} \quad \text{при} \quad |\tau - s - i \cdot d_s^f| \leq d_s^f \tag{16}$$

$$|g(\tau)| \leq \frac{c_s^g}{|\tau - s|^k} \quad \text{при} \quad |\tau - s - i \cdot d_s^g| \leq d_s^g \tag{17}$$

Обозначим $c_s := c_s^f + c_s^g, d_s := \min(d_s^f, d_s^g)$. Тогда

$$|f(\tau) + g(\tau)| \leq \frac{c_s}{|\tau - s|^k} \quad \text{при} \quad |\tau - s - i \cdot d_s| \leq d_s \tag{18}$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ все три условия $(M1), (M2), (M3)$, очевидно, выполняются.

$\square$

Теорема 3.2.
$Mod^{(N)}$ образует градуированную алгебру:

$$Mod^{(N)} \stackrel{def}{=} \bigoplus_{k \geq 0} Mod_k^{(N)} \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Mod}_k^{(N)}, g \in \mathrm{Mod}_l^{(N)}$. Достаточно показать, что $fg \in \mathrm{Mod}_{k+l}^{(N)}$.
Условия $(M1), (M2), (M3)$ для $f \cdot g$ проверяются аналогично $f + g$ из утверждения выше. $\square$

Определение 3.3.
Голоморфная функция $f : H \to \mathbb{C}$ называется модулярной формой веса k относительно подгруппы $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$, если она удовлетворяет условию $(M1)$ для всех элементов $\gamma \in \Gamma$.

Утверждение 3.2.

$$e_{\gamma_1\gamma_2}(\tau) = e_{\gamma_1}(\gamma_2(\tau))e_{\gamma_2}(\tau) \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно разделить и умножить левую часть на $e_{\gamma_2(\tau)}$ $\square$

Утверждение 3.3.
Если функция f удовлетворяет условию модулярности $(M1)$ для $\gamma_1, \gamma_2 \in SL_2(Z)$, то она удовлетворяет $(M1)$ и для $\gamma_1\gamma_2$.

Доказательство. Запишем условие $(M1)$ для γ_1 и γ_2:

$$f(\gamma_1(\tau)) = e_{\gamma_1}(\tau)f(\tau) \tag{21}$$

$$f(\gamma_2(\tau)) = e_{\gamma_2}(\tau)f(\tau) \tag{22}$$

Сразу следует нужное равенство:

$$f(\gamma_1(\gamma_2(\tau))) = e_{\gamma_1}(\gamma_2(\tau))f(\gamma_2(\tau)) = e_{\gamma_1}(\gamma_2(\tau))e_{\gamma_2}(\tau)f(\tau) = e_{\gamma_1\gamma_2}(\tau)f(\tau) \tag{23}$$

$\square$

Следствие 3.1.
Функция f модулярна относительно $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет $(M1)$ для генераторов Γ.

3.2 Действие $SL_2(\mathbb{Z})$ на тета-функции

Выведем вспомогательное функциональное уравнение, которое в дальнейшем поможет нам установить модулярность тета-функций.

Теорема 3.4.
Для тета-функции $\theta(z, \tau)$ и любого набора целых $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$, ab и cd четны, верны следующие функциональные равенства:

(F1):

$$\theta\Big(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big) = \zeta(c\tau + d)^{1/2} \exp\big(\frac{\pi i c z^2}{c\tau + d}\big)\theta(z, \tau) \tag{24}$$

где $\zeta^8 = 1$ и ζ определяется в зависимости от четности c, d:

1. *c четно, d нечетно*

$$\zeta = i^{(d-1)/2} \cdot \Big(\frac{c}{|d|}\Big) \tag{25}$$

2. c нечетно, d четно

$$\zeta = \exp\left(-\pi i c/4\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) \tag{26}$$

где $\left(\frac{x}{y}\right)$ *– символ Якоби для x, y.*

Доказательство. При $c = 0$ равенство, очевидно, выполняется: $d = \pm 1, a = \pm 1$. Отныне будем считать $c > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(y, \tau) = \exp(\pi i c(c\tau + d)y^2)\theta((c\tau + d)y, \tau) \tag{27}$$

Она будет периодичной относительно сдвигов $y \mapsto y + 1$ и квазипериодичной относительно сдвига $y \mapsto y + (a\tau + b)/(c\tau + d)$:

$$\Psi(y + \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \exp(-\pi i \frac{a\tau + b}{c\tau + d} - 2\pi i y) \cdot \Psi(y, \tau) \tag{28}$$

$$\Psi(y, \tau) = \phi(\tau)\theta(y, (a\tau + b)/(c\tau + d)) \tag{29}$$

где $\phi(\tau)$ – некоторая неизвестная функция. Оба эти равенства показать нетрудно, см. [1] §7.

$$\theta(z, \tau) = \phi(\tau)\exp(-\pi i c z^2/(c\tau + d))\theta(z/(c\tau + d), ()) \tag{30}$$

Проинтегрируем обе части нижнего равенства по y на отрезке $[0, 1]$:

$$\int_{[0,1]} \Psi(y, \tau)dy = \phi(\tau) \cdot \int_{[0,1]} \theta(y, (a\tau + b)/(c\tau + d)) = \phi(\tau) \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \int_{[0,1]} \exp(\pi i c(c\tau + d)y^2)\theta((c\tau + d)y, \tau)dy \qquad (32) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi i n^2 d/c) \int_{[0,1]} \exp(\pi i(cy + n)^2(\tau + d/c))dy \\ &= \sum_{n=1\ldots c} \exp(-\pi i n^2 d/c) \int_{\mathbb{R}} \exp(\pi i c^2 y^2(\tau + d/c))dy \int_{\mathbb{R}} (\pi i c^2 y^2(\tau + d/c))dy = |\tau = it - d/c| \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi c^2 y^2 t)dy = |u = ct^{1/2}y| = \frac{1}{ct^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2)du = \frac{1}{ct^{1/2}} \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \frac{1}{c \cdot ((\tau + d/c)/i)^{1/2}} \sum_{n=1..c} \exp(-\pi i n^2 d/c) \qquad (33) \\ &= \frac{1}{c\tau + d}\zeta \qquad (34) \end{aligned}$$

где $\zeta^8 = 1$

Индукцией по |c| нетрудно показать, что ζ равен в точности тому, о чем говорится в утверждении, см. [1] §7. □

Следствие 3.2.

$$\theta_{00}(z,\tau+1)=\theta_{01}(z,\tau) \tag{35}$$
$$\theta_{01}(z,\tau+1)=\theta_{00}(z,\tau) \tag{36}$$
$$\theta_{10}(z,\tau+1)=\exp(\pi i/4)\theta_{10}(z,\tau) \tag{37}$$
$$\theta_{11}(z,\tau+1)=\exp(\pi i/4)\theta_{11}(z,\tau) \tag{38}$$

$$\theta_{00}(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi iz^2/\tau)\theta_{00}(z,\tau) \tag{39}$$
$$\theta_{01}(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi iz^2/\tau)\theta_{10}(z,\tau) \tag{40}$$
$$\theta_{10}(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi iz^2/\tau)\theta_{01}(z,\tau) \tag{41}$$
$$\theta_{11}(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=-(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi iz^2/\tau)\theta_{11}(z,\tau) \tag{42}$$

Доказательство. Формулы слева получаются прямой подстановкой в соответствующий ряд. Формулы справа получаются подстановкой в уравнение (F1). □

3.3 Другое действие $SL_2(\mathbb{Z})$ на модулярные формы

До этого мы рассматривали действие $SL_2(\mathbb{Z})$ на голоморфных функциях $f:H\to\mathbb{C}$ в виде дробно-линейного преобразования аргумента. Оно "портило"f в том смысле, что если $f(\tau)$ была модулярной формой, то $f(\gamma(\tau))=(c\tau+d)^k f(\tau)$, вообще говоря, модулярной формой уже не являлась.

Для произвольного $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_N$, $f\in \mathrm{Mod}_k^{(N)}$ рассмотрим

$$[f(\tau)]^\gamma=e_\gamma^{-1}(\tau)f(\gamma\tau) \tag{43}$$

Утверждение 3.4.
$[f(\tau)]^\gamma$ *будет модулярной формой того же веса и уровня, что и* $f(\tau)\in Mod_k^{(N)}$.

Утверждение 3.5.

$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\alpha=\theta_{01}^2(0,\tau) \tag{44}$$
$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\alpha=\theta_{00}^2(0,\tau) \tag{45}$$
$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\alpha=i\theta_{10}^2(0,\tau) \tag{46}$$

$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\beta=-i\theta_{00}^2(0,\tau) \tag{47}$$
$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\beta=-i\theta_{10}^2(0,\tau) \tag{48}$$
$$[\theta_{00}^2(0,\tau)]^\beta=-i\theta_{01}^2(0,\tau) \tag{49}$$

Доказательство. Достаточно подставить $z=0$ в нужные уравнения утверждения 6.5. □

3.4 Как строить модулярные формы с помощью тета-функций

Установим факт модулярности тета-функций, а также покажем, как построить функцию, модулярную относительно всей $SL_2(\mathbb{Z})$.

Утверждение 3.6.
Квадраты $\theta_{00}(z=0,\tau)^2,\theta_{01}(z=0,\tau)^2,\theta_{10}(z=0,\tau)^2$ *тета-констант являются модулярными формами веса* 1 *уровня* 4.

Доказательство. Из равенства $(F1)$ для тета-константы $\theta_{00}(0,\tau)$ следует:

$$\theta_{00}\Big(0,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)^2=\zeta^2(c\tau+d)\theta_{00}(0,\tau)^2 \tag{50}$$

и в силу $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_4$ можно заключить $\zeta = \pm 1$.

Теперь, в силу равенств из утверждения выше, $\theta_{01}(0,\tau), \theta_{10}(0,\tau)$ являются модулярными формами того же веса и уровня, что и $\theta_{00}(0,\tau)$.

Более того, пространство $\langle \theta_{00}^2(0,\tau), \theta_{01}^2(0,\tau), \theta_{10}^2(0,\tau) \rangle \subset \mathrm{Mod}_1^{(4)}$ $SL_2(\mathbb{Z})$-инвариантно, поэтому для проверки условий ограниченности $(M2), (M3)$ в $s \in \mathbb{Q} \cup \infty$ достаточно ограниченности всех трех функций вблизи $s = \infty$, т.к. всегда можно найти подходящее преобразование $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ т.ч. $\gamma(s) = \infty$.

$$
\begin{aligned}
|\theta_{00}(0,\tau)| = |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi i n^2 \cdot \Im\tau) \\
= 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\pi i \cdot \Im\tau)^{n^2}
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\pi i \cdot \Im\tau)^{n^2} \leq \frac{t}{1-t} = O(t) \quad \text{при} \quad \Im\tau \to \infty, \tag{52}
$$

где $t = \exp(-\pi i \cdot \Im\tau) \to 0$ при $\Im\tau \to \infty$.

Точно так же, как и для θ_{00} получаем ограниченность при $\Im\tau \to \infty$:

$$
\theta_{01}(0,\tau) = 1 + O(\exp(-\pi\Im\tau)) \tag{53}
$$

$$
\theta_{10}(0,\tau) = O(\exp(-\pi\Im\tau)) \tag{54}
$$

□

Утверждение 3.7.
$\theta_{00}^8(0,\tau) + \theta_{01}^8(0,\tau) + \theta_{10}^8(0,\tau)$ *является модулярной формой веса 4 относительно всей модулярной группы* $SL_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. По-прежнему, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ – генераторы $SL_2(\mathbb{Z})$.

Из утверждения выше: $\theta_{00}^8(0,\alpha\tau) = \theta_{01}^8(0,\tau)$, $\theta_{01}^8(0,\alpha\tau) = \theta_{00}^8(0,\tau)$, $\theta_{00}^8(0,\alpha\tau) = \theta_{01}^8(0,\tau)$, а также:

$$
\theta_{00}^8(0,\beta\tau) = \Big(\theta_{00}^2(0,\beta\tau)\Big)^4 = \Big(-i\tau\theta_{00}^2(0,\tau)\Big)^4 = \tau^4\theta_{00}^8(0,\tau). \tag{55}
$$

Аналогично $\theta_{01}^8(0,\beta\tau) = \tau^4\theta_{10}^8(0,\tau)$ и $\theta_{00}^8(0,\beta\tau) = \tau^4\theta_{10}^8(0,\tau)$.

Значит,

$$
\theta_{00}^8(0,\beta\tau) + \theta_{01}^8(0,\beta\tau) + \theta_{10}^8(0,\beta\tau) = \tau^4(\theta_{00}^8(0,\tau) + \theta_{01}^8(0,\tau) + \theta_{10}^8(0,\tau)) \tag{56}
$$

□

4 Решеточные тета-ряды

Определим решеточные тета-ряды и для некоторых решеток выразим их тета-ряды через тета-функции с полуцелыми характеристиками.

Определение 4.1.
Решеточным тета-рядом для целочисленной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ называется функция

$$\theta_\Lambda(q) = \sum_{x \in \Lambda} q^{x \cdot x} \tag{57}$$

где $x \cdot y$ означает скалярное произведение в смысле $\sum_i x_i y_i$. Мы будем обозначать $N(x) = x \cdot x$.

Например, для решетки $\Lambda = \mathbb{Z}$ соответствующий тета-ряд $\theta_\mathbb{Z}$ будет равен

$$\theta_\mathbb{Z}(q) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} q^{x \cdot x} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i x^2 \tau) = \theta_{00}(0, \tau) \tag{58}$$

Утверждение 4.1.
$\Lambda \subset \mathbb{R}^k, \Omega \subset \mathbb{R}^l$. *Тогда тета-ряд решетки $\Lambda \oplus \Omega \subset \mathbb{R}^{k+l}$ есть произведение тета-рядов решеток Λ и Ω.*

Доказательство. Заметим, что если $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in \Lambda, x_2 \in \Omega$, то $x \cdot x = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2$. Тогда

$$\sum_{x \in \Lambda \oplus \Omega} q^{x \cdot x} = \sum_{x_1 \in \Omega, x_2 \in \Lambda} q^{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2} = \sum_{x_1 \in \Omega} q^{x_1 \cdot x_1} \cdot \sum_{x_2 \in \Omega} q^{x_2 \cdot x_2} \tag{59}$$

□

Утверждение 4.2.

$$\theta_{\mathbb{Z}^n} = \theta_\mathbb{Z}^n = \theta_{00}^n(0, \tau) \tag{60}$$

Доказательство. □

Определение 4.2.
Усредненный тета-ряд решетки Λ склеенной по векторам $u_l, l = 1...s$

$$\eth = \cup_{l=0}^{s} (u_l + \Lambda) \tag{61}$$

$$\theta_\eth(q) = \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{x \in \Lambda} q^{N(x + u_l - u_k)} = \theta_\Lambda(q) + \frac{2}{s} \sum_{l<k} \sum_{x \in \Lambda} q^{N(x + u_l - u_k)} \tag{62}$$

Определение 4.3.
$D_n = \{x \in \mathbb{Z}^n | \sum_i x_i = 0(\mod 2)\}$

Лемма 4.1.
Тета-ряд решетки D_n равен

$$\frac{1}{2} \cdot (\theta_3^n(q) + \theta_4^n(q)) \tag{63}$$

Доказательство. Сначала индукцией по n покажем, что если a_k – коэффициент при q^k у ряда $\theta_3^n(q)$, то у ряда $\theta_4^n(q)$ коэффициент при q^k равен $(-1)^k a_k$.

База $n = 1$ сразу следует из определения. Обозначим $\theta_3(q) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q^k$.

Шаг индукции: $\theta_3^{n-1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k, \quad \theta_4^{n-1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k q^k$

$$\theta_3^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big) q^k \tag{64}$$

$$\theta_4^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j a_j (-1)^{k-j} b_{k-j}\Big) q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big)(-1)^k q^k \tag{65}$$

Теперь рассмотрим произвольный $x \in \mathbb{Z}^n$. Очевидно, что $\sum x_i = 0 \mod 2 \iff \sum x_i^2 = 0 \mod 2$. Это означает, что тета-ряд D_n есть тета-ряд $\mathbb{Z}^n$ с вычтенными нечетными степенями, что в точности равно

$$1/2 \cdot (\theta_3^n(q) + \theta_4^n(q)) \tag{66}$$

□

Лемма 4.2.
Тета-ряд решетки $(1/2, ..., 1/2) + D_n$ *равен* $\frac{1}{2} \cdot \theta_2^n(q)$

Доказательство. Рассмотрим множество векторов $x \in D^n$ т.ч. $\sum_i (x_i + 1/2)^2 = k$. Покажем, что оно биективно множеству $y \in \mathbb{Z}^n$ т.ч. $\sum_i y_i = 1 \mod 2$ и $\sum_i (y_i + 1/2)^2 = k$.

Отображение $\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = (-x_1 - 1, x_2, ..., x_n)$ является искомой биекцией:

$$(-x_1 - 1 + 1/2) = (-x_1 - 1/2) = (x_1 + 1/2)^2 \implies \phi(x) \cdot \phi(x) = x \cdot x = k \tag{67}$$

Если $x \neq \xi$, то $\exists i$ т.ч. $x_i \neq \xi_i$ и тогда очевидно $\phi(x)_i \neq \phi(\xi)_i$.

Пусть y т.ч. $\sum_i y_i = 1 \mod 2$. Тогда взяв $x = (-y_1 - 1, y_2, ..., y_n) \in D_n$, получим $\phi(x) = y$.

В силу конечности множества $\{x \in D_n | (x + (\frac{1}{2}^n)) \cdot (x + (\frac{1}{2}^n)) = k\}$ мы получили, что

$$\begin{aligned} \#\{x \in \mathbb{Z}^n | N(x + (\frac{1}{2}^n)) = k\} &= \#\{x \in \mathbb{Z}^n | \sum_{x_i} = 0 \mod 2, N(x + (\frac{1}{2}^n)) = k\} \\ &+ \#\{x \in \mathbb{Z}^n | \sum_{x_i} = 1 \mod 2, N(x + (\frac{1}{2}^n)) = k\} \\ &= 2 \cdot \#\{x \in D_n | N(x + (\frac{1}{2}^n)) = k\} \end{aligned} \tag{68}$$

Где в левой части стоит коэффициент перед q^k в разложении $\theta_2^n(q)$ (или тета-ряда $\mathbb{Z}^n$), а в правой части удвоенный коэффициент перед q^k в разложении тета-ряда решетки $D_n + (1/2, ..., 1/2)$, что и требовалось. □

Теорема 4.4.
Тета-ряд решетки

$$D_n^+ = D_n \cup (D_n + (\frac{1}{2}^n)) \tag{69}$$

равен

$$\frac{1}{2} \cdot (\theta_2^n(q) + \theta_3^n(q) + \theta_4^n(q)) \tag{70}$$

Доказательство. По определению,

$$\theta_{D_n^+}(q) = \theta_{D_n}(q) + \sum_{x \in D_n} q^{N(x + (\frac{1}{2}^n))} = \theta_{D_n} + \theta_{D_n + (\frac{1}{2}^n)} \tag{71}$$

□

5 Тета-ряды как модулярные формы

Покажем, относительно каких подгрупп $SL_2(\mathbb{Z})$ тета-ряды решеток $\mathbb{Z}^{16}, \mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+, D_{16}^+$, интересных с точки зрения теории суперструн, будут модулярными формами:

Теорема 5.1.
Тета-ряды решеток $\mathbb{Z}^{16}, \mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$ будут модулярными формами веса 8 относительно подгруппы $\Gamma_2 \subset SL_2(\mathbb{Z})$.
Тета-ряд решетки D_{16}^+ будет модулярной формой веса 8 относительно всей $SL_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Для начала рассмотрим действие $\gamma \in \Gamma_2$ на тета-ряд решетки $\mathbb{Z}^2$:

$$\theta_{\mathbb{Z}^2}(\gamma(\tau)) = \theta_{00}^2(0, \gamma(\tau)) = \zeta^2 e_\gamma(\tau)\theta_{00}^2(0, \gamma(\tau)) \tag{72}$$

где $\zeta^8 = 1$, $e_\gamma(\tau) = c\tau + d$. Отсюда сразу вытекает требуемое равенство для тета-ряда $\mathbb{Z}^{16}$.

Для решетки D_{16}^+ модулярность тета-ряда относительно всей $SL_2(\mathbb{Z})$ очевидна в силу доказанного нами равенства:

$$\theta_{D_{16}^+} = \frac{1}{2}(\theta_{00}^{16}(0, \tau) + \theta_{01}^{16}(0, \tau) + \theta_{10}^{16}(0, \tau)) \tag{73}$$

Его вес равен 8, потому что каждый из весов $\theta_{00}^2, \theta_{01}^2, \theta_{10}^2$ равен 2.

Теперь займемся решеткой $\mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$. Ее тета-ряд равен $\theta_{\mathbb{Z}^4} \cdot \theta_{D_{12}^+} = \theta_{00}^4 \cdot (\theta_{00}^{12} + \theta_{01}^{12} + \theta_{10}^{12})$. Посмотрим, как $\gamma \in \Gamma_2$ действует на нем:

$$\begin{gathered}\theta_{\mathbb{Z}^4}(\gamma(\tau)) \cdot \theta_{D_{12}^+}(\gamma(\tau)) = \\ \zeta^4 e_\gamma(\tau)\theta_{00}^4(\tau) \cdot (\zeta^{12} e_\gamma^3(\tau)\theta_{00}^{12}(0, \tau) + \zeta^{12} e_\gamma^3(\tau)\theta_{01}^{12}(0, \tau) + \zeta^{12} e_\gamma^3(\tau)\theta_{10}^{12}(0, \tau))\end{gathered} \tag{74}$$

где $\zeta^8 = 1$ и $e_\gamma(\tau) = (c\tau + d)^2$.

Окончательно получаем:

$$\theta_{\mathbb{Z}^4}(\gamma(\tau)) \cdot \theta_{D_{12}^+}(\gamma(\tau)) = e_\gamma^4(\tau) \cdot \theta_{00}^4 \cdot (\theta_{00}^{12} + \theta_{01}^{12} + \theta_{10}^{12}) \tag{75}$$

□

6 Открытые вопросы

1. Верно ли, что любая параболическая форма веса $n \geq 3$ равна полиному степени $2n$ от функций $\theta_{a,b}(0, \tau)$? (*Параболической формой* называется модулярная форма, у которой в разложении по степеням $q = e^{\pi i \tau}$ свободный член равен 0)

2. Можно ли записать модулярные формы $\theta_{a,b}(0, n\tau)$ в виде

$$\frac{\text{квадратичный полином от} \quad \theta_{c,d}}{\text{линейная комбинация} \quad \theta_{c,d}} \quad ? \tag{76}$$

Список литературы

[1] Д. Мамфорд. *Лекции о тета-функциях.*

[2] Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковки шаров, решетки и группы.*