2 Теория

При аналитическом решении собственные числа матрицы находятся из решения уравнения

$$D(\lambda) = 0, \quad (2.3.4)$$

где $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ – характеристический полином матрицы. После этого, согласно (2.3.1), можно найти собственные вектора, решая СЛАУ

$$(A - \lambda E)x = 0. \quad (2.3.5)$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

В данной практической работе для поиска собственных чисел и векторов мы будем использовать метод Данилевского. Суть его состоит в том, что исходная матрица A преобразуется в подобную ей матрицу Фробениуса P, имеющую следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n \\ 1\ 0 \cdots\ 0\ \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\ \cdots \\ 0\ 0\ 0\ \ 1\ \ 0 \end{pmatrix}$$

Делается это при помощи следующего преобразования подобия:

$$P = S^{-1}AS, \quad (2.3.6)$$

где $S = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1, S^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{n-1}^{-1}$.

Таким образом, можно последовательно находить n–1 матрицу $A^{(k)}$:

$$A^{(k)} = M_{n-k}^{-1}A^{(k-1)}M_{n-1}, k = 1,2,\dots,n-1 \quad (2.3.7)$$

$$A^{(0)} = A, P = A^{(n-1)}.$$

А можно найти матрицы S (прямую и обратную) и затем сразу вычислить P по формуле (2.3.6). Такой способ эффективнее, т.к. не нужно хранить множество матриц M, произведение которых еще понадобятся для вычисления собственных векторов.

Матрицы M строятся следующим образом:

$$M_k = \left\{ \begin{array}{c} m_{ij} = e_{ij}, i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,n, i \neq k; \\ m_{kj} = -\frac{a_{k+1,j}^{(n-k-1)}}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}, j = 1,2,\dots,n, j \neq k; \\ m_{kk} = \frac{1}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}. \end{array} \right\} \quad (2.3.8)$$

$$M_k^{-1} = \left\{ \begin{array}{c} m_{ij} = e_{ij}, i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,n, i \neq k; \\ m_{kj} = a_{k+1,j}^{(n-k-1)}, j = 1,2,\dots,n. \end{array} \right\} \quad (2.3.9)$$

Несложно доказать, что у подобных матриц собственные числа совпадают. Далее для матрицы P строится характеристический полином

$$D(\lambda) = \det(P - \lambda E) = (-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n]. \quad (2.3.10)$$

Это полином степени n. Очевидно, что он имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Некоторые из них могут быть кратными, при этом выполняется соотношение (2.3.2). Необходимо не только найти все корни полинома, но и определить их кратность (см. п. 2.3.1.3).

Вычисление собственных векторов методом Данилевского

Далее для каждого собственного числа вычисляется соответствующий ему собственный вектор. Собственные вектора у подобных матриц не совпадают. Если yi – это собственный вектор матрицы P, соответствующий собственному числу λi , то

$$x_i = Sy_i, i = 1,2,\dots,n. \qquad (2.3.11)$$

При этом собственный вектор матрицы P выглядит следующим образом:

$$y_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \dots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.3.12)$$

Определение кратности собственных числе и векторов

При поиске кратных корней возникают некоторые сложности. Дело в том, что если кратность корня четная, то в этой точке наблюдается экстремум (минимум или максимум) характеристического полинома, а если нечетная – то полином просто меняет знак. Пример приведен на рис. 2.3.1.

Согласно определению [1], корень уравнения ξ имеет кратность k, если не только функция в точке ξ принимает нулевое значение, но и k –1 ее производных:

$$f^{(i)}(\xi) = 0, i = 0,1,2,\dots,k-1.. \qquad (2.3.13)$$

При i = 0 имеем саму функцию. Таким образом, получаем k нулей функции и ее производных.

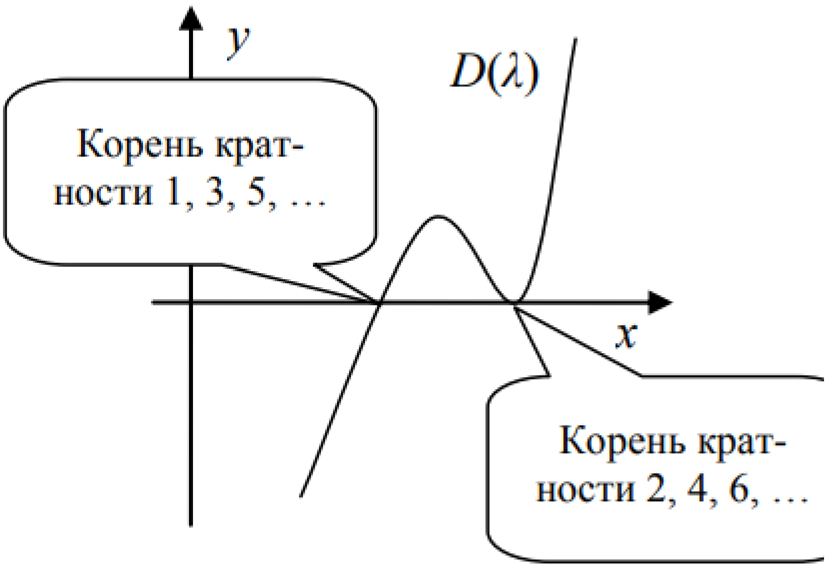

Рисунок 2.3.1: Поведение характеристического полинома

Учитывая погрешности вычислений на ЭВМ, при четной кратности корня характеристический полином может пройти либо выше, либо ниже нулевой отметки (рис. 2.3.2).

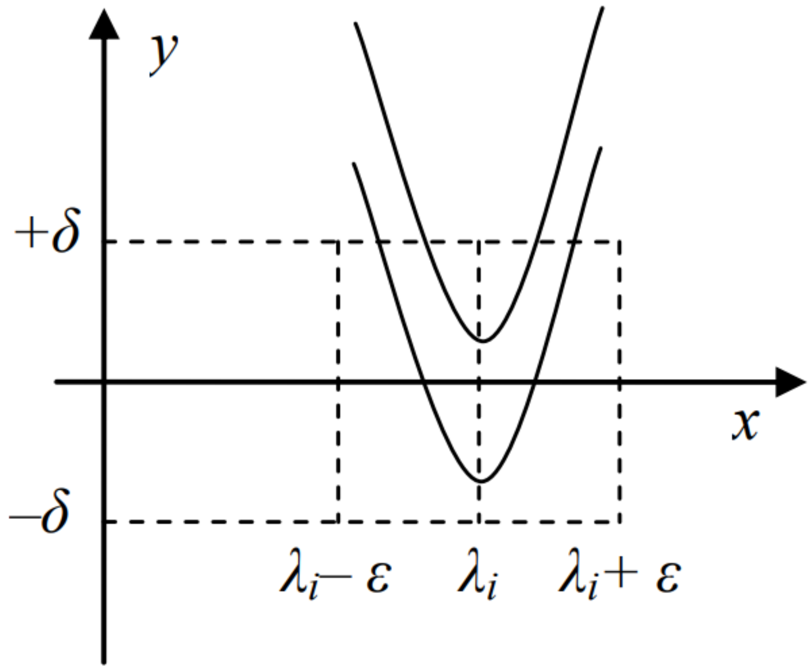

Рисунок 2.3.2: Погрешности при вычислении собственных чисел

Здесь ε и δ – достаточно малые числа. Т.о., программа может либо вообще не найти корня, либо найти сразу два. Поэтому договоримся считать корнем любое число λ_i, для которого | f (λ_i)| < δ. При этом, если два корня λ_{i1}иλ_{i2} расположены близко друг к другу (т.е. $|\lambda_{i1} - \lambda_{i2}| < 2\varepsilon$), то корнем следует считать только один из них, либо за корень принять число, расположенное между ними:

$$\lambda_i = (\lambda_{i1} + \lambda_{i2})/2. \qquad (2.3.14)$$

Поиск собственных чисел продолжается до тех пор, пока не будут найдены все, т.е. пока не выполнится условие (2.3.2).