**2 Теория**

При аналитическом решении собственные числа матрицы находятся из решения уравнения

D(λ) = 0, (2.3.4)

где D(λ) = det(A – λE) – характеристический полином матрицы. После этого, согласно (2.3.1), можно найти собственные вектора, решая СЛАУ

(A – λE)x = 0. (2.3.5)

**Вычисление собственных чисел методом Данилевского**

В данной практической работе для поиска собственных чисел и векторов мы будем использовать метод Данилевского. Суть его состоит в том, что исходная матрица A преобразуется в подобную ей матрицу Фробениуса P, имеющую следующий вид:

Делается это при помощи следующего преобразования подобия:

(2.3.6)

где

Таким образом, можно последовательно находить n–1 матрицу :

(2.3.7)

А можно найти матрицы S (прямую и обратную) и затем сразу вычислить P по формуле (2.3.6). Такой способ эффективнее, т.к. не нужно хранить множество матриц M, произведение которых еще понадобятся для вычисления собственных векторов.

Матрицы M строятся следующим образом:

(2.3.8)

(2.3.9)

Несложно доказать, что у подобных матриц собственные числа совпадают. Далее для матрицы P строится характеристический полином

D(λ) = det(P – λE) = . (2.3.10)

Это полином степени n. Очевидно, что он имеет n корней . Некоторые из них могут быть кратными, при этом выполняется соотношение (2.3.2). Необходимо не только найти все корни полинома, но и определить их кратность (см. п. 2.3.1.3).

**Вычисление собственных векторов методом Данилевского**

Далее для каждого собственного числа вычисляется соответствующий ему собственный вектор. Собственные вектора у подобных матриц не совпадают. Если yi – это собственный вектор матрицы P, соответствующий собственному числу λi , то

. (2.3.11)

При этом собственный вектор матрицы P выглядит следующим образом:

(2.3.12)

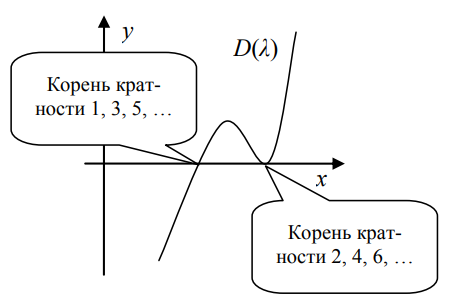
Определение кратности собственных числе и векторов

При поиске кратных корней возникают некоторые сложности. Дело в том, что если кратность корня четная, то в этой точке наблюдается экстремум (минимум или максимум) характеристического полинома, а если нечетная – то полином просто меняет знак. Пример приведен на рис. 2.3.1.

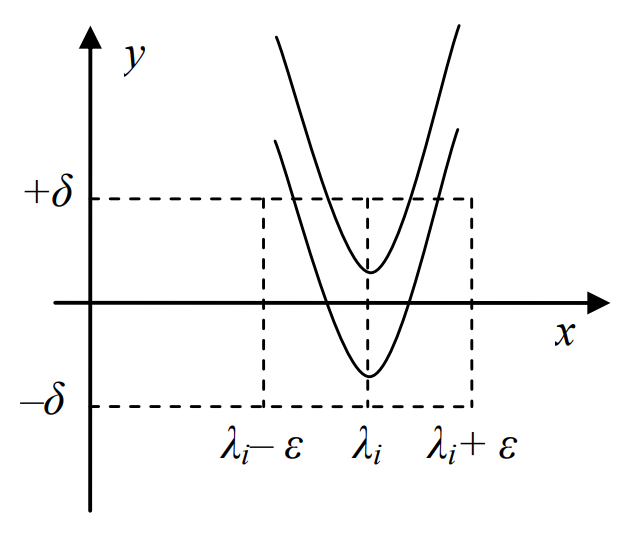
Согласно определению [1], корень уравнения ξ имеет кратность k, если не только функция в точке ξ принимает нулевое значение, но и k –1 ее производных:

. (2.3.13)

При i = 0 имеем саму функцию. Таким образом, получаем k нулей функции и ее производных.

Рисунок 2.3.1: Поведение характеристического полинома

Учитывая погрешности вычислений на ЭВМ, при четной кратности корня характеристический полином может пройти либо выше, либо ниже нулевой отметки (рис. 2.3.2).

Рисунок 2.3.2: Погрешности при вычислении собственных чисел

Здесь ε и δ – достаточно малые числа. Т.о., программа может либо вообще не найти корня, либо найти сразу два. Поэтому договоримся считать корнем любое число , для которого | f ()| < δ. При этом, если два корня расположены близко друг к другу (т.е. ), то корнем следует считать только один из них, либо за корень принять число, расположенное между ними:

. (2.3.14)

Поиск собственных чисел продолжается до тех пор, пока не будут найдены все, т.е. пока не выполнится условие (2.3.2).