

**Вопросы для подготовки к экзамену по математическому анализу
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ**
(в квадратных скобках указаны номера лекций по календарному плану,
см. **Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу //**
электронный ресурс <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ma/MAall.pdf>)

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности. [Л. 4]
2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [Л. 4]
3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [Л. 5]
4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [Л. 5]
5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [Л. 5]
6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [Л. 5]
7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [Л. 6]
8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [Л. 6]
9. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Л. 6]
10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [Л. 7]
11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [Л. 7]
12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [Л. 7]
13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [Л. 8]
14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [Л. 8]
15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [Л. 8]
16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [Л. 9]
17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [Л. 9]
18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [Л. 9]
19. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функции $y = \sin x$. [Л. 9]
20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [Л. 10]
21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. [Л. 9]
22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [Л. 10]
23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [Л. 11]
24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [Л. 11]
25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [Л. 11]
26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [Л. 11]
27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [Л. 11]
28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [Л. 11]
29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [Л. 12]
30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [Л. 13]
31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [Л. 13]

32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [Л. 13]
33. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [Л. 13]
34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [Л. 13]
35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [Л. 13]
36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [Л. 14]
38. Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
39. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
40. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
41. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
42. Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1 + x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [Л. 15]
44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]
45. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]
46. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции. [Л. 15]
47. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной). [Л. 15]
48. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной). [Л. 15]
49. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [Л. 16]
50. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [Л. 16]
51. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [Л. 16]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. В частности, требуется знание следующих определений: предела последовательности [Л. 4]; предела функции (определения по Коши и по Гейне) [Л. 5]; окрестности и ε -окрестности точки $x \in \mathbb{R}$ [Л. 2]; окрестностей $+\infty$, $-\infty$ и ∞ [Л. 2]; сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, монотонной, фундаментальной последовательностей [Л. 3, 4]; бесконечно малой и бесконечно большой функций [Л. 7]; бесконечно малых функций: одного порядка, несравнимых, эквивалентных [Л. 8]; порядка малости [Л. 8]; порядка роста [Л. 8]; приращения функции [Л. 9]; непрерывной функции в точке (эквивалентные определения) [Л. 9]; непрерывной функции на интервале, на отрезке [Л. 9]; точек разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [Л. 9]; наклонной асимптоты [Л. 10]; производной функции в точке [Л. 11]; односторонней (левой или правой) производной функции [Л. 11]; дифференцируемой функции [Л. 11]; дифференциала первого порядка [Л. 12]; производной n -го порядка [Л. 12]; дифференциала n -го порядка [Л. 12]; возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [Л. 15]; строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстремума [Л. 15]; стационарной и критической точек [Л. 15]; выпуклости (вверх или вниз) графика функции на промежутке [Л. 16]; точки перегиба графика функции [Л. 16].

Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

**Задачи для подготовки к экзамену
по математическому анализу
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ**

На экзамене студенту выдаётся две задачи, каждая на одну из следующих тем: «пределы», «сравнение бесконечно больших и бесконечно малых», «непрерывность и точки разрыва», «геометрические приложения производной и формула Тейлора», «исследование функций». При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Вычислить предел:

1.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \cos n + \frac{5n}{3n+7} \right)$; **1.2.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$; **1.3.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x}}$;
1.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$; **1.5.** $\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x-\alpha}{2}$; **1.6.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{x^3}$;
1.7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$; **1.8.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; **1.9.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x-7) \cdot (\ln(3x+5) - \ln(3x-1)))$;
1.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arccos x \right)^{\frac{1}{e^{3x}-1}}$; **1.11.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$; **1.13.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{2011} x}{x^{2011}}$;
1.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^7 + 4x^4 + 1}{(x-2)^3(4x+5)^2(3x-1)^2}$; **1.14.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x^4 + x^2) + e^{x^2} - \cos 2x}{\ln(1+2x^2)}$;
1.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7x^2 + \cos 5x + \operatorname{arctg} x^5 + e^{-x^2}}{\sqrt{x^4 + 8x^3}}.$

2. Доказать, что предел не существует:

2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; **2.2.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$; **2.3.** $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x.$

3. Выделить главную часть б.м. функции или б.б. функции:

3.1. $f(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$ при $x \rightarrow 0$; **3.2.** $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ при $x \rightarrow 0$;
3.3. $f(x) = \sqrt{\lg x}$ при $x \rightarrow 1$; **3.4.** $f(x) = (2x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ при $x \rightarrow \infty$.

4. Определить порядок малости $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$ относительно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

5. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

5.1. $f(x) = 2^{\frac{x}{9-x^2}}$; **5.2.** $f(x) = \frac{1}{x \ln |x-1|}$; **5.3.** $f(x) = \frac{5^{1/x} - 1}{5^{1/x} + 1}$;
5.4. $f(x) = (2+x) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{(2-x)(1-x^2)}$; **5.5.** $f(x) = \frac{|2+x|}{\arcsin(2+x)}$;
5.6. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\pi-x}, & x \geq 0; \end{cases}$ **5.7.** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}, & x < 1, \\ 2^{1/x}, & 1 \leq x < 2, \\ \sqrt{2}, & x \geq 2. \end{cases}$

6. Найти y'' , если функция $y = f(x)$ задана

6.1. неявно: $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; **6.2.** параметрически: $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

7. Составить уравнение касательной к линии $y = x^2 + 4x$, которая параллельна прямой $y - 2x = 0$.

8. В каких точках нормаль к кривой $x^2 - 2x + y^2 = 0$ параллельна оси OY ?

9. Вычислить пределы по правилу Лопиталя – Бернулли:

9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x};$

9.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x};$

9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$

10. Используя разложения функций по формуле Маклорена, вычислить предел:

10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x};$

10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - 4e^{-x^2/2} + 4}{x^3(e^x - 1)};$

10.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{(3^x - 1)^3}.$

11. Функцию $f(x)$ разложить по целым степеням x , ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x .

11.1. $f(x) = e^{x^2-1};$

11.2. $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right);$

11.3. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1-x};$

11.4. $f(x) = \ln \frac{3+x}{1-x^2};$

11.5. $f(x) = x\sqrt[3]{8-x^2};$

11.6. $f(x) = x\sqrt{1-x^2} - \cos x \cdot \ln(1+x).$

12. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 4$ по степеням $x - 2$.

13. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt[3]{12x - 4x^3}$ и интервалы монотонности.

14. Найти интервалы выпуклости графика функции $y = x - \operatorname{arctg} 5x$ и точки перегиба.

15. Построить график функции $y = \frac{x}{x^2 - 4}$, определить асимптоты, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, направление выпуклости графика функции и точки перегиба.

16. Найти интервалы возрастания, убывания, точки экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{|x^2 - 1|}.$

Образец билета

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 0.

по курсу Математического анализа, 1-й курс, 1-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ.

1. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. (6 баллов)

2. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. (6 баллов)

3. Задача из комплекта № 1. (6 баллов)

4. Задача из комплекта № 4. (6 баллов)

5. Дополнительные вопросы экзаменатора. (6 баллов)