

1. Сформулировать определение первообразной

Функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$ в промежутке X , если $F(x)$ дифференцируема в этом промежутке и для любого $x \in X$ значение производной $F'(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x) \forall x \in X$

2. Сформулировать определение неопределённого интеграла

Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке называют неопределённым интегралом от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx$. При этом символ \int называют знаком интеграла, $f(x)$ -подынтегральной функцией, $f(x)dx$ -подынтегральным выражением, x -переменной интегрирования.

3. Сформулировать определение определённого интеграла

Определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют предел I интегральных сумм, при стремлении максимального шага разбиения этого отрезка к нулю. Определённый интеграл обозначают $I = \int_a^b f(x)dx$

4. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$. Тогда в полуинтервале $[a, +\infty)$ определена функция $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ как определённый интеграл с переменным верхним пределом

5. Сформулировать определение несобственного интеграла 1 рода

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \rightarrow +\infty$ называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ первого рода и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

6. Сформулировать определение несобственного интеграла 2 рода

Пусть функция $f(x)$ определена в полуинтервале $[a, b)$ и неограничена при $x \rightarrow b$. Предел функции $\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ при $\eta \rightarrow b - 0$ называют несобственным интегралом функции $f(x)$ второго рода и обозначают $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^\eta f(x)dx$

7. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1 рода

Если существует и конечен предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \rightarrow +\infty$, то данный несобственный интеграл называют сходящимся

8. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1 рода

Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ сходится и интеграл по этому промежутку от функции $|f(x)|$, то первый интеграл называют сходящимся абсолютно и говорят об абсолютной сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку.

9. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1 рода

Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ сходится, а интеграл от функции $|f(x)|$ по этому промежутку расходится, то первый интеграл называют сходящимся условно.

10. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2 рода

Если существует и конечен предел функции $\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ при $\eta \rightarrow b - 0$, то данный несобственный интеграл называют сходящимся

11. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2 рода

Если несобственный интеграл от неограниченной при $x \rightarrow b - 0$ функции по промежутку $[a, b)$ сходится и сходится интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый интеграл называют сходящимся абсолютно.

12. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2 рода

Если несобственный интеграл от неограниченной при $x \rightarrow b - 0$ функции по промежутку $[a, b)$ сходится, а интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый интеграл называют сходящимся условно.

1. Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла

Теорема: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а также $m \leq f(x) \leq M$ и $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Тогда $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство: По условию $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$. Умножая все части этого неравенства на $g(x) \geq 0$, получаем $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Так как определённый интеграл линеен и при $f(x) \geq g(x) \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, то справедливость условия теоремы очевидна.

2. Сформулировать и доказать теорему о среднем

Теорема: Если определённая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на нём первообразную $F(x)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Доказательство: Согласно определению первообразной, $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, т.е. функция $F(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, и можно записать $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$, где $c \in (a, b)$.

3. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом

Теорема: Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в некоторой точке x этого отрезка. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство: Достаточно доказать что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right) = 0$ (*). Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части равенства; имеем $\left| \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \left(\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} * \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \right|$. Так как по условию функция f непрерывна в точке x , то для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что при любом $t, |t - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$. Поэтому для указанных $t \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} * |\Delta x|$. Окончательно, $\left| \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} * \frac{\varepsilon}{2} * |\Delta x| < \varepsilon$, если $|\Delta x| < \delta$. Это означает справедливость (*).

4. Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Доказательство: Одной из первообразных функции $f(x)$ является $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; две первообразные функции $f(x)$ различаются не более чем на константу, т.е. $\Phi(x) - F(x) = C$. Подставляя сюда $x = a$ получаем что $C = \Phi(a)$, поэтому $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x=b$ получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

5. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям и определённом интеграле

Теорема: Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда $\int_a^b u(x)v'(x) dx = (u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

Доказательство: Рассмотрим функцию $F(x) = u(x)v(x) - \int_a^x u'(t)v(t) dt$. Имеем $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$. Следовательно, функция $F(x)$ – первообразная для $u(x)v'(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем что $\int_a^b u(x)v'(x) dx = F(x)|_a^b = (u(x)v(x) - \int_a^x u'(t)v(t) dt)|_a^b = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$. Теорема доказана.

6. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1 рода

Теорема: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, причём $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq a$. Тогда если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а если расходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

Доказательство: Пусть сходится несобственный интеграл от функции $g(x)$, тогда существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = c < +\infty$. Поскольку по условию теоремы $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, +\infty)$, то $\int_a^b g(x) dx \leq c \forall b \geq a$. Согласно условию теоремы и свойству 8 определённого интеграла, $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq c$. Так как $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, +\infty)$, то функция $\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$ монотонно возрастает и ограничена сверху значением c . Следовательно, такая функция имеет предел, и $\lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \leq c$, что означает сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Второе утверждение теоремы доказывается от противного. Предположим, что интеграл от функции $g(x)$ сходится. Но тогда, как только что было доказано, сходится и интеграл от функции $f(x)$, что противоречит условию теоремы.

7. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1 рода

Теорема: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ и положительны при $x \geq a$. Если существует конечный положительный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся

Доказательство: В теореме содержатся четыре утверждения. Докажем лишь одно из них: если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$. Возьмём $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, тогда при всех $x > \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$. Так как $A - \varepsilon = \frac{A}{2}$, то при всех указанных x выполняется неравенство $\frac{A}{2} g(x) < f(x)$. На основании теоремы о признаке сравнения получаем, что сходится интеграл $\int_{\delta(\varepsilon)}^{+\infty} g(x) dx$, а тогда сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

8. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1 рода

Теорема: Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство: Для любого $x \geq a$ $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. Т.к. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ по условию сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx$. Следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$. Но тогда сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Теорема доказана.

9. Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\phi = \alpha, \phi = \beta$ и кривой $r = r(\phi)$.

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Предположив, что $r = r(\phi)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке, напомним неравенство $\frac{1}{2} r_i^2(\eta_i) \Delta \phi \leq S_i \leq \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta \phi_i$, где S_i – площадь криволинейного сектора, отвечающего изменению ϕ на отрезке $[\phi_{i-1}, \phi_i]$; $r(\eta_i)$ и $r(\xi_i)$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $r(\phi)$ на указанном частичном отрезке разбиения. Предполагаем дополнительно, что $r(\phi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Суммируя неравенства по $i=1, 2, \dots, n$ получим, что для площади S рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенство $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\eta_i) \Delta \phi \leq S \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\xi_i) \Delta \phi_i$. Переходя здесь к пределу при $\max_i \Delta \phi_i \rightarrow 0$, получаем требуемую формулу: $S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\phi) d\phi$.

10. Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$

Производная переменной длины дуги вычисляется по формуле: $S'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Т.к. одной из первообразных функции из правой части этого равенства является $F(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$, то отсюда, поскольку $F(a)=0$, следует равенство $S(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$. Поэтому для длины всей кривой имеем формулу $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Если кривая Γ задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то, беря x в качестве параметра, получаем формулу $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.