

Задачи для подготовки к рубежному контролю

«Определённый интеграл»

*Теоретические вопросы*

*Вопросы, оцениваемые в 1 балл*

- 1) Сформулировать определение первообразной.
- 2) Сформулировать определение неопределённого интеграла.
- 3) Сформулировать определение определённого интеграла.
- 4) Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.
- 5) Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.
- 6) Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.
- 7) Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 8) Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 9) Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 10) Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
- 11) Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
- 12) Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

*Вопросы, оцениваемые в 3 балла*

- 1) Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла.
- 2) Сформулировать и доказать теорему о среднем.
- 3) Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.
- 4) Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница.
- 5) Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле.
- 6) Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.
- 7) Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.
- 8) Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.
- 9) Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ .
- 10) Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции  $y = f(x)$ , отсечённой прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

## Задачи для подготовки

### 1. Задачи на вычисление площадей плоских фигур (3 балла)

- 1.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $y = -\sqrt{x} + 2$  и осью  $Ox$ . Сделать чертёж.
- 1.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ . Сделать чертёж.
- 1.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$  и лучами  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Сделать чертёж.

### 2. Задачи на вычисление объёмов тел (3 балла)

- 2.1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 4z^2 - 1$ ,  $z = 1$ . Сделать чертёж.
- 2.2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = 2y^2$ ,  $x^2 + z^2 = 8$ . Сделать чертёж.
- 2.3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $y^2 + z^2 = x$ ,  $y^2 + z^2 = (x - 2)^2$  и содержащего точку  $M(1, 0, 0)$ . Сделать чертёж.
- 2.4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = y^2 + 4$ ,  $x^2 + z^2 = 5y^2$ . Сделать чертёж.
- 2.5. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ ,  $x^2 + y^2 = (z - 3)^2 - 1$ . Сделать чертёж.
- 2.6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = e^{-2x} - 1$ ,  $y = e^{-x} + 1$  и  $x = 0$ . Сделать чертёж.
- 2.7. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$  и  $y = 2$ . Сделать чертёж.
- 2.8. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой  $x = at^2$ ,  $y = a \ln t$  ( $a > 0$ ) и осями координат, вокруг оси  $Ox$ . Сделать чертёж.
- 2.9. Найти объём тела, образованного вращением кривой  $r = a \sin^2 \varphi$  вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

### 3. Задачи на вычисление длин дуг и площадей поверхностей вращения (2 балла)

- 3.1. Найти длину дуги кривой  $y = x^2$  от точки  $(-1, 1)$  до точки  $(1, 1)$ . Сделать чертёж.
- 3.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ . Сделать чертёж.

### 4. Задачи исследования на сходимость несобственных интегралов (2 балла)

- 4.1. Исследовать на сходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx$ .
- 4.2. Исследовать на сходимость  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$ .

## Образец билета рубежного контроля (теория)

### Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2016, ИиДУ, модуль 1, РК1 (теория)

1. Сформулировать определение первообразной. (1 балл)
2. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом. (3 балла)

min = 2, max = 4

## Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

### Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2016, ИиДУ, модуль 1, РК1 (задачи)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $y = -\sqrt{x+2}$  и осью  $Ox$ . Сделать чертёж. (3 балла)
2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = 2y^2$ ,  $x^2 + z^2 = 8$ . Сделать чертёж. (3 балла)
3. Найти длину дуги кривой  $y = x^2$  от точки  $(-1, 1)$  до точки  $(1, 1)$ . Сделать чертёж. (2 балла)
4. Исследовать на сходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx$ . (2 балла)
5. Исследовать на сходимость  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$ . (2 балла)

min = 8, max = 12

### Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2016, ИиДУ, модуль 1, РК1 (задачи)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$  и лучами  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Сделать чертёж. (3 балла)
2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = y^2 + 4$ ,  $x^2 + z^2 = 5y^2$ . Сделать чертёж. (3 балла)
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ . Сделать чертёж. (2 балла)
4. Исследовать на сходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x\sqrt{x} + 3} dx$ . (2 балла)
5. Исследовать на сходимость  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx$ . (2 балла)

min = 8, max = 12