Диффурики.

ДУ. I-го порядка.

Типы.

(I.) ДУ с разделяющимися переменными. (РП)

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad // *, /$$

(II.) Однородные ДУ.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

($M(x,y)$ и $N(x,y)$ - одного порядка!)

или: $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$

(III) Линейные ДУ. $y' + P(x)y = Q(x)$

а) Линейные однородные ДУ ($Q(x) = 0$)

$$y' + P(x)\,y = 0$$

б) Линейные неоднородные ДУ ($Q(x) \neq 0$)

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

(IV.) Уравнение Бернулли.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad P(x) \neq Q(x)$$

Способы решения ДУ.

I ДУ с разделяющимися переменными.

$$y' = f(x)g(y)$$

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

Процесс разделения переменных:

2. $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

! проверить: $y = y_0 : g(y) = 0$ решение?

II Однородные ДУ.

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

1. Замена: $t(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y = t(x) \cdot x\ ; y' = t + xt'$

2. Подставим: $t + xt' = f(t)$

$$xt' = f(t) - t \text{ - ДУ с РП.}$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

! проверить: $t = t_0 : f(t) - t = 0$ - решение?
$x = 0$ - решение?

3. Сделать обратную замену.

III Линейные ДУ.

а) ОЛДУ: $y' + P(x)y = 0$

1. $y' = -P(x)y$ — ДУ с РП.

...

б) НЛДУ: $y' + P(x)y = Q(x)$

Два метода решения:

1. <u>Метод вариации произвольной постоянной.</u>

<u>(Метод Лагранжа)</u>

1. Решаем ОЛДУ, соответствующее данному НЛДУ. Получаем решение $y_{одн} = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$

2. Решение НЛДУ ищем в таком же виде: $y_н = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ (1)

3. Находим $y_н'$ и подставляем в ДУ, находим $C(x)$ и подставляем в (1).

2. Метод Бернулли. $(x'+P(y)x=Q(y))$ (1)

1. Ищем решение ДУ в виде:

$$x_y = u_y \cdot v_y \; (2) \Rightarrow \quad x' = u'v + uv' \; (3)$$

2. (2) и (3) $\to$ (1): $\underbrace{u'v}_{1} + \underbrace{uv'}_{2} + \underbrace{P(y)\cdot uv}_{3} = Q(y)$

3. Группируем 1 с 3 либо 2 с 3:

$$u'v + u\underbrace{(v' + P(y)v)}_{4} = Q(y) \quad (4)$$

4. Пусть множитель (4) будет равен нулю:

$v' + P(y)v = 0$ – ДУ с РП.

Находим v.

5. Подставляем найденное v в (4):

$u'v + 0 = Q(y)$ – ДУ с РП.

Находим u.

6. Найденные u и v подставляем в (2).

• При разделении переменных не забывайте проверять знаменатель на наличие решений.

IV. Уравнения Бернулли.

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\, y^n$$

Три метода решения.

1. Метод Лагранжа
2. Метод Бернулли.
3. Сведение к линейному.

3. Сведение к линейному.

1. Если $n>0$, то $y=0$ – решение!
2. Делим обе части уравнения на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x)$$

3. Замена: $y^{1-n} = z(x) \Rightarrow z' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{(1-n)} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1-n} z' + P(x)\, z = Q(x)}_{\text{НЛДУ}}$$

4. Далее метод Лагранжа / Бернулли.

ДУ, допускающие понижение порядка. $(F(x,y,y',y'')=0)$

I. ДУ, явно не содержащие y.

$F(x,y',y'')=0$

Порядок таких ур-ий можно понизить, сделав замену: $y'=P(x) \Rightarrow y''=P'(x)$.

$\Rightarrow$ порядок ур-я понижается на 1. $\Rightarrow$

$F(x,P,P')=0$. – ДУ 1^го порядка относит. P.

Затем решить ДУ: $y'=P(x)$ (РП).

II. ДУ явно не содержащие x.

т.е. $F(y,y',y'')=0$

Замена: $y'=P(y) \to$ ~~$P(y(x))$~~

$y''=P'_y \cdot y'_x = P'P$.

Тогда: $F(y,P,P'P)=0$

Сделать 2 задачи со стенда.

Решение ЛОДУ 2° порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + py' + qy = 0$$

Решение ищем в виде: $y = e^{kx}$

1. $y' = ke^{kx}$

   $y'' = k^2 e^{kx}$

2. $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \;\; \Big|: e^{kx}$

   $k^2 + pk + q = 0$

Далее $3^и$ случая:

1. $k_1 \neq k_2$. Тогда ФСР: $\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \end{cases}$

   и $y_{о.одн.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2. $k_1 = k_2 \in Q \Rightarrow$ ФСР: $\begin{cases} y_1 = e^{kx} \\ y_2 = x^1 e^{kx} \\ (и\; y_3 = x^2 e^{kx}) \end{cases}$

   и $y_{\substack{общ. \\ однор}} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$

3. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (комплексно-сопряженные корни)

$\Rightarrow$ ФСР: $\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$; $y_{\substack{общ. \\ одн.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Решение систем путем сведения к ДУ 2° порядка.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) & (1) \\ \dot{y} = g(t, x, y) & (2) \end{cases}$$

① Дифференцируем (1) в силу уравнений (1), (2):

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\dot{y}}$$

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g \qquad (3)$$

② Из (1) выражаем $y = y(t, x, \dot{x})$ и подставляем в (3); таким образом получаем ДУ 2° порядка относительно фун-ии $x(t)$

③ Находим $x = x(t, C_1, C_2)$, затем из (1) находим $y = y(t, C_1, C_2)$.

Ответ: $\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases}$

Метод подбора для НеЛДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Th. $y_{\text{общ. неод.}} = y_{\text{общ. однор.}} + y_{\text{частное неодн.}}$

2 Метода нахождения $y_{\text{ч.н.}}$

1. $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x) \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{ax} \cdot Q_n(x)$,

где r - кратность корня a характеристического уравнения ОЛДУ ($k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$)

$Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos\beta x + Q_m(x) \sin\beta x)$

$\Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x}(M_k(x) \cos\beta x + N_k(x) \sin\beta x)$,

где $k = \max(n, m)$

r - кратность корня $(\underline{\alpha \pm \beta i})$ хар. ур-я.

Теория +

Диффуры Семинар. 21.05.13г.

Метод Лагранжа (вариации произв. постоянной) для НЛДУ $n^{го}$ порядка

$$a_1 y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_1(x) y' + P_0(x) y = f(x)$$

Чтобы использовать метод Лагранжа нужно, чтобы $a_1 = 1$.

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$$

$$y_{о.о.} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

$P_i(x)$ - непрерывная ф-я

Метод Лагранжа заключается в том, что $y_{о.н.}$ мы ищем в виде $y_{о.о.}$ но C_i - неизвестные ф-ии от x. т.е. $y_{о.н.} = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ - - - - - - - - - \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Теория +

Восстановление общего решения ОЛДУ по известному $y_{ч.}$

$n=2$ $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Пусть известно частное решение $y = y_1(x)$

Тогда: $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}$ -

решение ОЛДУ л.н.з. с y_1.

Тогда $y_{о.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2$

<u>Внимание</u> эта фор-ла только для приведенного ур-е! $a_1 = 1$.