

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ "ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА"

1к, 2 сем., ф-т ИУ, РЛ

Вариант 1. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить меньшую из площадей, содержащуюся между линиями: $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 = 6y$.

Задача 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY петли кривой $x = at^2$; $y = a \left(t - \frac{t^3}{3} \right)$.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $\rho = 4(1 - \cos \varphi)$ от точки $A(0; 0)$ до точки пересечения с прямой $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси OY : $4x^2 + y^2 = 4$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Вариант 2. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную линией: $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, лежащую ниже полярной оси.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды: $\begin{cases} x = 7(t - \sin t) \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$.

Задача 3. Найти длину петли кривой: $x = t^2$; $y = t - \frac{1}{3}t^3$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой $y = \frac{x^3}{3}$ для $-2 \leq x \leq 2$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

Вариант 3. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью OX .

Задача 2. Найти объем тела, полученного от вращения линии $y = \sqrt{x}e^{-x^2}$ вокруг своей асимптоты.

Задача 3. Найти длину дуги всей кривой: $x = 5 \cos^3 \frac{t}{4}$; $y = 5 \sin^3 \frac{t}{4}$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$.

Вариант 4. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача – 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $(x - 2)(y + 3) = 6$ и $x + y = 6$.

Задача 2. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $y = b$; $y = -b$.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $\rho = 5\varphi$, отсекаемую окружностью $\rho = 10\pi$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = t^2$; $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$.

Вариант 5. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача – 2 балла)

Задача 1. Прямая $X = -2$ делит площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой, на две части. Найти ту площадь, для которой $x \geq -2$.

Задача 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $x = 2$, $y = \arcsin \frac{x}{2}$ и касательной к этой кривой в начале координат.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $\rho = a \sec^3 \frac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $x = t^3/3$; $y = 4 - (t^2/2)$, между точками ее пересечения с осями координат.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1 + x^4}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

Вариант 6. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача – 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь, заключенную между линиями: $x^2 + y^2 = 4$; $y^2 = 4(1 + x)$, $x = 2$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{x+6}{x+3}$; $y = 2 - x$ вращается вокруг оси OX . Найти объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $\rho = -4\varphi$, отсекаемую окружностью $\rho = 8\pi$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси OY .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x + 2} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sqrt{x^3}} dx$.

Вариант 7. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, расположенной внутри окружности $\rho = \sin \varphi$ и вне окружности $\rho = \cos \varphi$.

Задача 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x + 1$; $y = e^{2x} - 1$; $x = 0$.

Задача 3. Найти периметр фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 3$, касательной к ней в т. $x = 4$ и осью OY .

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY дуги кривой $x = t^2$; $y = \frac{1}{3}t(t^2 - 3)$, заключенной между точками ее пересечения с осью OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \arcsin \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^8 x}$.

Вариант 8. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти большую из площадей, ограниченных циклоидой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, осью OX и параболой $y^2 = -\frac{16}{\pi}(x - 3\pi)$.

Задача 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $y = 3x^2 - 12x$ и прямой $y = -6$.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой $y = e^{-x/2}$ для $x \geq 0$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Вариант 9. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти всю площадь, ограниченную кривой $x = a \cos^3 t$; $y = b \sin^3 t$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $x = 0$, $y = e^x$; $y = 1 + 2e^{-x}$ вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину спирали $\rho = e^{a\varphi}$, находящейся внутри круга $\rho = 1$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^5 + 5x + 2}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_1^3 \frac{x^5 + 3x + 1}{\sqrt[5]{(x^3 - 1)^2}} dx$.

Вариант 10. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти меньшую из площадей, ограниченных линиями: $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0$; $2x^2 - 20x - 3y + 32 = 0$.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY петли кривой $x = t - \frac{t^3}{3}$, $y = t^2$.

Задача 3. Найти длину всей кривой $\rho = 9(1 + \cos \varphi)$.

Задача 4. Вычислить площадь, образованную вращением параболы $y^2 = \frac{R^2}{H}x$ вокруг оси OX , отсекаемой прямой $x = H$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{x^5 + 2x + 4}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^3} dx$.

Вариант 11. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти меньшую из площадей, ограниченных линиями: $\rho = 1 + \cos \varphi$; $x + 2y = 2$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями: $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ и $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$ вращается вокруг оси OY . Вычислить объем получающегося тела вращения.

Задача 3. Найти периметр большей из фигур, ограниченных циклоидой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, осью OX и параболой $y^2 = -\frac{16}{\pi}(x - 3\pi)$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной полуволны синусоиды $y = \sin \frac{x}{2}$, вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3(x + \operatorname{arctg} x)} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt[5]{1 + x^4} - 1} dx$.

Вариант 12. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь, ограниченную линиями: $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ и $x^2 = -a(y - a)$.

Задача 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x$, $y = 1 + 2e^{-x}$, $x = 0$.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $x^2 + 2x - y = 0$, отсекаемую от нее осью абсцисс.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3(x - \sin x)} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_e^{e^2} \frac{x \ln x}{(x - e)^2} dx$.

Вариант 13. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\rho = \sqrt{6} \cos \varphi$ и $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$ и расположенной внутри каждой из них.

Задача 2. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью OX , вокруг OY .

Задача 3. Найти длину дуги кривой $x^2 + y^2 = 4$, отсекаемую кривой $xy = 1$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, полученную вращением кривой $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$ вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{e^{3/x} - 1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$.

Вариант 14. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 3$, касательной к ней в точке $x = 4$ и осью OY .

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{x+1}{x-3}$, $x = 4$, $x = 6$, $y = 1$ вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$.

Вариант 15. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь одного лепестка кривой $\rho = 4 \sin^2 \varphi$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = x$ и $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$), вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, расположенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, полученную вращением той части астроиды $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$, для которой $x \leq -1$, вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_{0.1}^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{1-x}} dx$.

Вариант 16. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$ и осью OX .

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Задача 3. Найти длину всей кривой $\rho = a(1 - \sin \varphi)$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ вокруг оси OX ($0 \leq t \leq \pi/2$).

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$.

Вариант 17. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$ и окружностью $\rho = 1$, и расположенной вне окружности.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 2 - \ln x$ и осью OX .

Задача 3. Вычислить длину дуги линии $y = \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$ между точками, ординаты которых равны нулю.

Задача 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX той части астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, для которой $y \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \cos(1/x)}{x} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_2^3 \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{x^5(x-2)}}$.

Вариант 18. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь петли кривой: $x = 2t - t^2$; $y = 2t^2 - t^3$.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = 1 + \sin x$ (между двумя соседними точками касания этой линии с осью OX).

Задача 3. Найти длину всей кривой: $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $9x^2 + y^2 = 9$ вокруг оси OY .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{(2x+1) \sin(1/2x)}{\sqrt[5]{x^6 + 3x - 2}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Вариант 19. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ и кардиоидой $\rho = 1 - \cos \varphi$ и расположенной вне кардиоиды.

Задача 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX петли кривой $x = at^2, y = a(t - (t^3/3))$.

Задача 3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 3x + 1} \cdot \ln x}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^4}}$.

Вариант 20. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь петли кривой $x = t^2, y = \frac{1}{3}t(3 - t^2)$.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $x = 4, y = \ln x$ и касательной к этой кривой в точке пересечения ее с осью OX .

Задача 3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Задача 4. Окружность $\rho = 2r \sin \varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^2 \frac{\sin^2 x}{(2 - x)^2} dx$.

Вариант 21. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь, лежащую в 1-ом квадранте и ограниченную линиями: $y^2 = 4x; x^2 = 4y; x^2 + y^2 = 5$ (внутри круга).

Задача 2. Фигура, ограниченная линией $y = \arcsin x$ и прямой $y = \frac{\pi}{2}x$ вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. На циклоиде $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1 : 3.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $9x^2 + y^2 = 9$ вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_4^{+\infty} \frac{2 - 3 \sin x}{x^3 + x} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^2 \frac{\ln(\sqrt[4]{x} + 1)}{e^{\operatorname{tg} x} - 1} dx$.

Вариант 22. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь кривой $\rho = 2a \cos 3\varphi$, лежащую вне круга $\rho = a$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{x+6}{x+3}$ и $y = 2-x$, вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела, которое при этом получается.

Задача 3. Найти длину петли кривой $x = t^2, y = t \cdot (\frac{1}{3} - t^2)$.

Задача 4. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$, вращается вокруг оси OX . Найти площадь поверхности вращения.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2 - 1} + 7x^3} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}$.

Вариант 23. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = a \cos \varphi$ и $\rho = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ и расположенной внутри каждой из них.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \arcsin x; y = \frac{\pi}{2}x$ вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Дана астроида $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ и точка на ней $A(a, 0), B(0, a)$. Найти на дуге AB такую т. M , чтобы длина дуги AM составляла четверть длины дуги AB .

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY кривой $x = y^3/3$ для $-2 \leq y \leq 2$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^2 \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1} dx$.

Вариант 24. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и $\rho = 1$ и расположенной внутри каждой из них.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{16}{x^2 + 4x + 8}$ и $y = 2$ вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину петли кривой $x = t - \frac{1}{3} \cdot t^3; y = t^2$.

Задача 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением части кривой $y^2 = 4 + x$ (при $x \leq 2$) вокруг оси OX .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2\sqrt{x}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Вариант 25. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти всю площадь, ограниченную кривой: $\rho = a(1 + \sin \varphi)$.

Задача 2. Фигура, ограниченная гиперболой $y = \frac{5-x}{x-1}$ и прямой $y = 5 - x$ вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Найти длину дуги кривой $x = a(3 \cos t - \cos 3t)$, $y = a(3 \sin t - \sin 3t)$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

Задача 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX той части кривой $y = e^{-x/2}$, для которой $x \geq 0$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1+x\sqrt{x}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_1^3 \frac{(3x+4)}{x^3 \sqrt[3]{\ln x}} dx$.

Вариант 26. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 6 \cos \varphi$ и $\rho = 3\sqrt{2}$ и расположенной вне второй из них.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями: $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$, вращается вокруг оси OY . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить длину дуги, отсекаемую осью ординат от кривой: $y^2 + 2y - x = 0$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = \frac{t}{3} \cdot (t^2 - 3)$; $y = t^2$ вокруг оси OY .

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 27. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь петли кривой: $x = \frac{1}{3}t(3 - t^2)$, $y = t^2$.

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси OX .

Задача 3. Вычислить длину дуги линии $x = \frac{1}{3} \cdot (3 - y)\sqrt{y}$ между точками, абсциссы которых равны 0.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением меньшей части кривой $\rho = 2a \sin \varphi$, отсекаемой лучами $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ вокруг полярной оси.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{3 + \arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}} dx$.

Задача 6. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{(1-x)^2} dx$.

Вариант 28. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Вычислить площадь петли кривой: $x = t^2 - 1$; $y = t^3 - t$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \sqrt{3}$ вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $x^2 = \frac{2}{3} \cdot (y - 1)^3$, заключенной внутри параболы $x^2 = \frac{y}{3}$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Задача 5. Исследовать на сходимость:
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6 + 3} \operatorname{arctg}(1 + x^2)}.$$

Задача 6. Исследовать на сходимость:
$$\int_0^1 \frac{2 + \sin x}{(x - 1)^2} dx.$$

Вариант 29. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ и $\rho = 1 + \cos \varphi$ и расположенной внутри каждой из них.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$ вращается вокруг оси OX . Найти объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $5x^3 = y^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY дуги кривой $x^2 = 4 + y$, отсекаемой прямой $y = 2$.

Задача 5. Исследовать на сходимость:
$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right) dx.$$

Задача 6. Исследовать на сходимость:
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 2)^2(x^2 + 4x + 3)} \cdot \ln(3 - x)}.$$

Вариант 30. (1, 2, 4, 5, 6 задачи – 1 балл; 3 задача - 2 балла)

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a \cos 3\varphi$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями $y = 2 \sin x$ и ветвью тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$, проходящей через начало координат, вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x - 3)$ между точками, ординаты которых равны нулю.

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX той части кривой $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, для которой $x \geq \frac{a}{8}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость:
$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

Задача 6. Исследовать на сходимость:
$$\int_0^1 \frac{(5x + 2)}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}} dx.$$