Экзаменационный билет №1

1. Сформулировать свойства определённого интеграла. Доказать свойство аддитивности определённого интеграла.

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

б) однородности $\int \lambda\, f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Пусть $c \in [a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка с была границей элемента разбиения $(c = x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\varsigma_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Будем измельчать разбиение, сохраняя точку с границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i| \to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int_c^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества).

Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)(-\Delta x_i) =$ - $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

5. $\int_a^b c\ dx = b - a$.

$$\int_a^b cdx = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots x_n) =$$
$$c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

6. Если на отрезке $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Так как $f(x)\ge 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\ge 0, \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \ge 0$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

7. Если на отрезке $f(x)\ge g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Так как $f(x)\ge g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\ge g(\varsigma_i), \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

9. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

2. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (случай действительных различных корней).

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ (векторная форма записи)

или

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$ (покоординатная форма записи).

Будем искать решение системы в виде $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Подставляя $\vec{y}$ в уравнение системы, получаем

$\lambda e^{\lambda x}\vec{\alpha} = Ae^{\lambda x}\vec{\alpha}, \quad e^{\lambda x}\left(A\vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha}\right) = 0, \qquad A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$.

Получено уравнение для определения соответствующего *собственному значению* λ *собственного вектора* $\vec{\alpha}$ $(\vec{\alpha} \ne 0)$ линейного оператора с матрицей A. Система уравнений

$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ или $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0$

имеет ненулевое решение только, когда определитель системы равен нулю, т.е.

$|A - \lambda E| = 0$.

Это – **характеристическое уравнение** системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В развернутом виде его можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n- го порядка относительно λ. Из основной теоремы высшей алгебры известно, что оно имеет ровно n корней. Часть корней может быть *действительными* корнями, часть - комплексными, но комплексные корни встречаются только *парами комплексно-сопряженных корней*. Это следует из действительности коэффициентов характеристического уравнения и теорем Виета.

1) Рассмотрим случай, когда все *собственные значения* $\lambda_{1,\dots}\lambda_n$ линейного оператора с матрицей A (или все характеристические числа матрицы A, что одно и то же) *действительны и различны.*

Из линейной алгебры известно, что действительным различным собственным значениям $\lambda_{1,\dots}\lambda_n$ соответствуют линейно независимые собственные векторы $\vec{\alpha}^1,\dots,\vec{\alpha}^n$, которые можно определить по собственным значениям из системы уравнений

$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ или $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0$.

В развернутом виде эти уравнения для $\lambda_{k,}$ $\vec{\alpha}^k$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ \dots \\ \alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами будут

$\vec{y}^1 = e^{\lambda_1 x}\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{y}^n = e^{\lambda_n x}\overline{\alpha}^n$.

Проверим, что решения являются линейно независимыми. Составим определитель Вронского

$W = \begin{vmatrix} y_1^1 & \dots & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & \dots & y_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} \exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x) \neq 0$, так как векторы $\vec{\alpha}^1,\dots,\vec{\alpha}^n$ линейно независимы и определитель из координат этих векторов отличен от нуля. Так как определитель Вронского отличен от нуля, то полученные решения линейно независимы. Так как этих решений ровно n, то они составляют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение системы линейных однородных уравнений может быть записано в виде

$$\vec{y}_{oo} = C_1\vec{y}_1 + \ldots + C_n\vec{y}_n = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}\vec{\alpha}^k .$$

Пример. $\begin{matrix} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{matrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \qquad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha_1^1 = -\alpha_2^1, \quad \vec{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha_1^2 = 4\alpha_2^2, \quad \vec{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_{oo} = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = C_1 e^{-3t} + 4C_2 e^{2t}$$
$$y = -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

2) Рассмотрим случай, когда среди корней характеристического уравнения имеются s простых корней $\lambda_{1,\ldots}\lambda_s$.

Этот случай легко свести к предыдущему. Для каждого собственного значения (характеристического числа) λ_k, отыщем собственный вектор $\vec{\alpha}^k$ из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ \ldots \\ \alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем найдем соответствующие им решения из фундаментальной системы решений $\vec{y}^1 = e^{\lambda_1 x}\vec{\alpha}^1, \ldots, \vec{y}^s = e^{\lambda_n x}\overline{\alpha}^s$ и запишем общее решение в виде

$$\vec{y}_{oo} = \ldots + C_1\vec{y}_1 + \ldots + C_s\vec{y}_s + \ldots .$$

Вся разница с предыдущим случаем в том, что фундаментальная система решений не исчерпывается найденными решениями, есть еще решения, соответствующие другим корням характеристического уравнения.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2\ln(x-2)$, $y = \ln x$ и $y = 0$.

4. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения: $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = i; \lambda = -i.$ Написать общее решение составленного дифференциального уравнения.

Экзаменационный билет №2

1. Доказать теорему об оценке определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m \le f(x) \le M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2. Однородные и неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Доказать основные свойства их решений.

Неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x).$$

Однородную систему линейных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}\,.$$

Все теоремы для линейных систем аналогичны соответствующим теоремам для линейных дифференциальных уравнений высших порядков. Этого и следовало ожидать, так как система дифференциальных уравнений сводится к дифференциальному уравнению высшего порядка.

Теоремы о свойствах решений однородной и неоднородной системы.

Если $\vec{y}_{o1}, \vec{y}_{o2}$- решения однородной системы, то $\vec{y}_{o1} + \vec{y}_{02}, \lambda\vec{y}_{o1}, \lambda\vec{y}_{02}$- решения однородной системы.

Если $\vec{y}_{0,} \vec{y}_{н}$ - решения однородной и неоднородной систем, то $\vec{y}_0 + \vec{y}_н$- решение неоднородной системы.

Если $\vec{y}_{н1}, \vec{y}_{н2}$- решения неоднородной системы, то $\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2}$- решение однородной системы.

Доказательство.

$$\left(\vec{y}_{o1} + \vec{y}_{o2}\right)' = \vec{y}\,'_{01} + \vec{y}\,'_{02} = A(x)\vec{y}_{o1} + A(x)\vec{y}_{02} = A(x)\left(\vec{y}_{01} + \vec{y}_{02}\right),$$

$$\left(\lambda\vec{y}_{01}\right)' = \lambda\vec{y}\,'_{01} = \lambda A(x)\vec{y}_{01} = A(x)\left(\lambda\vec{y}_{01}\right)$$

$$(\vec{y}_0 + \vec{y}_н)' = \vec{y}'_о + \vec{y}'_н = A(x)\vec{y}_0 + A(x)\vec{y}_н + \vec{f}(x) = A(x)(\vec{y}_0 + \vec{y}_н) + \vec{f}(x)$$

$$(\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2})' = \vec{y}'_{н1} - \vec{y}'_{н2} = A(x)\vec{y}_{н1} + \vec{f}(x) - \left(A(x)\vec{y}_{н2} + \vec{f}(x)\right) = A(x)(\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2})$$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = 3 - x^2$ $и$ $y = 1 + x^2$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin^3 3x}$$

Экзаменационный билет №3

1. Сформулировать свойства определённого интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определённого интеграла.

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$,

б) однородности $\int\lambda\, f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества).

4. $\int_a^a f(x)dx=0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

5. $\int_a^b c\;dx=b-a$.

6. Если на отрезке $f(x)\geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

7. Если на отрезке $f(x)\geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$

9. $\int_a^b f(z)dz=\int_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

Теорема об оценке определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m\leq f(x)\leq M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m\leq f(x)\leq M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2. Доказать теорему о структуре общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Общее решение однородной системы представляет собой линейную комбинацию решений фундаментальной системы решений.

$\vec{y}_{oo}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + C_n \vec{y}_n(x)$.

Доказательство. Проверим, что $\vec{y}_{oo}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + C_n \vec{y}_n(x)$ является общим решением, исходя из определения общего решения.

1) $\vec{y}_{oo}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + C_n \vec{y}_n(x)$ - решение однородной системы как линейная комбинация ее решений (теорема о свойствах решений).

2) Зададим произвольные начальные условия $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \ldots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$ и покажем, что можно единственным образом выбрать набор констант $C_1, \ldots C_n$, при котором $\vec{y}_{oo}(x_0) = C_1 \vec{y}_1(x_0) + \ldots + C_n \vec{y}_n(x_0) = \vec{y}_0$. Запишем это соотношение покоординатно как систему уравнений относительно $C_1, \ldots C_n$.

$$C_1 y_{11}(x_0) + \ldots C_n y_{n1}(x_0) = y_{01}$$
$$C_1 y_{12}(x_0) + \ldots C_n y_{n2}(x_0) = y_{02}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1 y_{1n}(x_0) + \ldots C_n y_{nn}(x_0) = y_{0n}$$

Определитель этой системы равен $W(x_0) \ne 0$, так как решения линейно независимы. Поэтому набор констант $C_1, \ldots C_n$ определяется из системы уравнений единственным образом. Теорема доказана.

Следствие. Общее решение однородной системы можно записать в виде

$$\vec{y}_{oo}(x) = Y(x)\vec{C}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ ,,, \\ C_n \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу части кривой $y = 1 - x^2$, расположенной над осью Ох.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

Экзаменационный билет №4

1. Определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.

Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$. В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла.

Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися.* Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся.*

Если сходятся интегралы от функций $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1$, интеграл сходится.

Пример. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится.

Пример. $\int_{0}^{+\infty} a^x dx$ сходится при $a<1$ и расходится при $a>1$. Проверьте это.

Рассмотрим *интеграл Дирихле* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq1)} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_1^b = \frac{1}{1-n}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-n}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & n<1 \\ \dfrac{1}{n-1}, & n>1 \end{cases}.$$

При $n=1$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$, интеграл расходится.

Итак, *несобственный интеграл Дирихле первого рода* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n>1$, *расходится при* $n\le 1$.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

1 признак. Теорема. Пусть при $x>a$ выполнено неравенство $0<f(x)\le g(x)$.

Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b], b > a$,

$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b.

Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число).

Поэтому $\int_a^b f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$

$(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x + x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int_2^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения $\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

2. Доказать теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Общее решение неоднородной системы равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

$\vec{y}_{он}(x)=\vec{y}_{оо}(x)+\vec{y}_{чн}(x)$

Доказательство. 1) $\vec{y}_{он}(x)=\vec{y}_{оо}(x)+\vec{y}_{чн}(x)$ - решение неоднородной системы по теореме о свойствах решений.

2) Зададим произвольные начальные условия $\vec{y}_{он}(x_0)=\vec{y}_0$. Выберем какое-либо частное решение неоднородное системы $\vec{y}_{чн}(x)$и вычислим для него начальные условия в x_0 $\vec{y}_{чн}(x_0)$. Составим систему уравнений $\vec{y}_{оо}(x_0)=\vec{y}_{он}(x_0)-\vec{y}_{чн}(x_0)=\vec{u}$ и запишем ее покоординатно.

$C_1 y_{11}(x_0)+...+C_n y_{n1}(x_0)=u_1$

....

$C_1 y_{1n}(x_0)+...+C_n y_{nn}(x_0)=u_n$

Определитель этой системы – определитель Вронского, он не равен нулю, так как составлен из линейно независимых решений, составляющих фундаментальную систему решений. Следовательно, набор констант из этой системы уравнений определяется однозначно. Теорема доказана.

3. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Оу плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = 1 + x^2$ $y = 5$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^3 x}$$

Экзаменац. билет № 5

1.Определение несобственного интеграла от неограниченной функции на конечном отрезке интегрирования. Сформулировать признаки сходимости таких интегралов .

Несобственные интегралы от разрывной функции по конечному промежутку (второго рода).

Функция может терпеть разрыв на левом конце отрезка $[a,b]$, на правом конце или в некоторой внутренней точке с отрезка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= a, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= b, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= $c\in(a,b)$, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ называется $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (интегралы в правой части определены выше).

Если указанные пределы существуют и конечны, то интегралы называются *сходящимися*, если предел бесконечен или не существует вообще, то интеграл *расходится.*

Если сходятся интегралы от функций $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{1}\frac{1}{x^2}dx =$

$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\delta}^{1}\right)$ Интеграл расходится, так как пределы в правой части равенства бесконечны.

Заметим, если здесь формально применить формулу Ньютона-Лейбница (она неприменима, т.к. функция разрывна), получим ответ 2. Еще раз убеждаемся, что теоремы следует применять, внимательно проверяя условия их применимости.

1 признак. Теорема. Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \le g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, $b > a$,

$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b.

Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$= I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$= I (I – конечное число).

Поэтому $\int_a^b f(x)dx$- монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$

$(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x+x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int_2^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения $\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

2.Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

$$y'+a(x)y=b(x)$$

Существует два метода решения линейного уравнения: метод вариации произвольной постоянной и метод подстановки.

При решении **методом вариации произвольной постоянной** сначала решают однородное уравнение (с нулевой правой частью)

$$y'+a(x)y=0$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y}=-a(x)dx,\quad y=Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Затем варьируют произвольную постоянную, полагая $C=C(x)$.

$$y'=C'(x)e^{-\int a(x)dx}-C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$$C'e^{-\int a(x)dx}-Ca(x)e^{-\int a(x)dx}+Ca(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x).$$

При вариации произвольной постоянной здесь обязательно должны сократиться два члена, в этом идея метода.

$C' = b(x)e^{\int a(x)dx}, \quad C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C$, где C – произвольная постоянная.

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} + C\right) = Ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Видно, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это справедливо не только для линейных уравнений первого порядка, но и для линейных уравнений высших порядков, и для линейных систем. Там подобное утверждение называется теоремой о структуре общего решения неоднородного уравнения или системы.

Замечание. Решая уравнение методом вариации, обязательно приводите его к виду $y' + a(x)y = b(x)$ (если при y' стоит коэффициент, то делить на него обязательно), иначе метод вариации даст ошибку.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x - 2,\ y = 3e^{-x}\ и\ x = 0.$

4.Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = -16x^2 + 4$$

Экзаменац. билет № 6

1.Доказать теорему о среднем для определённого интеграла.

Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$).

Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим

$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

2.Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений, их применение и нахождение.

Задача Коши.

Найти решение системы $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$.

Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть функция $\vec{f}(x, \vec{y})$непрерывна по совокупности переменных. Пусть существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}, \quad k = 1,...n, \quad s = 1,...n$

Тогда существует и единственно решение задачи Коши.

Первые интегралы.

Пусть выполнены условия теоремы Коши. Рассмотрим решение задачи Коши $\vec{y}(x, x_0)$ при заданных начальных условиях $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. По теореме Коши оно существует и единственно. Это решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}_0)$можно представить себе как некоторую интегральную кривую, соединяющие точки $(x_0, \vec{y}_0)$, $(x, \vec{y})$.

Если в качестве начальных условий выбрать $\vec{y}(x) = \vec{y}$, то по теореме Коши через эту точку проходит та же единственная интегральная кривая, ее уравнение можно записать в виде $\vec{y}_0 = \vec{\phi}(x_0, x, \vec{y})$. Зафиксируем x_0, обозначим $\vec{C} = \vec{y}_0$, получим соотношение $\vec{\phi}(x, \vec{y}) = \vec{C}$ – **общий интеграл** *системы дифференциальных уравнений (векторное соотношение).* **Первый интеграл** *системы дифференциальных уравнений – скалярная составляющая общего интеграла.* **Общий интеграл** *системы дифференциальных уравнений – векторная функция, сохраняющая свое значение на решениях системы.* **Первый интеграл** *системы дифференциальных уравнений – скалярная функция, сохраняющая свое значение на решениях системы.*

Знание одного первого интеграла позволяет понизить порядок системы на единицу. Знание общего интеграла дает общее решение системы, если только можно разрешить уравнение $\vec{\phi}(x, \vec{y}) = \vec{C}$ относительно $\vec{y}$.

Производной скалярной функции в силу системы называется

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_k} f_k .$$

Скалярная функция $\phi(x, y_{1,\dots} y_n)$ является первым интегралом, если

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_k} f_k = 0 .$$

3.Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружности $r = 1$и одновременно внутри лемнискаты $r^2 = 2\cos 2\varphi.$

4.Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y = x + \cos 2x.$

Экзаменац. билет № 7

1.Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла.

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x) = f(x)$, т.е. $J(x)$- первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x) = F(x) + C.$ Но $J(a) = 0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$. Тогда $J(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2.Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка**

$$y'' + py' + qy = 0\,.$$

Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Подставляя y в дифференциальное уравнение, получим

$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$ Так как $e^{kx} \neq 0,$ то имеем

$k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение.* Решая его, получим корни

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Возможно три случая:

1) k_1, k_2 *действительны и различны,*

2) $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

3) $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *действительных, различных корней* получаем решения

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

Для того, чтобы доказать, что решения составляют фундаментальную систему решений и *общее решение записывается в виде*

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

надо проверить линейную независимость y_1, y_2. Составим определитель Вронского

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_1 - k_2)e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0$, так как

$k_1 \neq k_2$.

Заметим, что для уравнения второго порядка проверять линейную независимость можно проще. Надо показать, что $\frac{y_1}{y_2} \neq m - const$. Тогда столбцы определителя Вронского линейно независимы и $W \neq 0$. В нашем случае $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ при $k_1 \neq k_2$.

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $x = y^2 - 2y + 1$ и $x = 1$.

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y \cdot y'' + (y')^2 = (y')^3$ при начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Экзаменац. билет № 8

1.Интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.

Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.

Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x)=\int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа)

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x\in[a,b]$. Тогда $J'(x)=f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x+\Delta x)-J(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x}f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx=f(c)((x+\Delta x)-x),\, c\in(x,\, x+\Delta x)\right)$и непрерывностью функции $(\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x))$.

2.Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Задача Коши:*Найти решение системы* $\vec{y}'=\vec{f}(x,\vec{y})$*, удовлетворяющее заданным начальным условиям* $\vec{y}_0=\vec{y}(x_0)$.

Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть функция $\vec{f}(x,\vec{y})$*непрерывна по совокупности переменных. Пусть существуют и непрерывны частные производные* $\frac{\partial f_k}{\partial y_s},\quad k=1,...n,\quad s=1,...n$

Тогда существует и единственно решение задачи Коши.

3.Фигура, ограниченная линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=x$, вращается вокруг оси Ox. Вычислить площадь всей поверхности полученного тела.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$

Экзаменац. билет № 9

1.Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x), y = f_2(x)$ и прямыми $x = a, x = b, (a < b)$, если $f_1(x) \le f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Мы пришли к понятию определенного интеграла от задачи о площади криволинейной трапеции (фактически, используя метод интегральных сумм). Если функция $f(x)$ принимает только неотрицательные значения, то площадь $S(x)$под графиком функции на отрезке [a, b] может быть вычислена с помощью определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Заметим, что $dS(x) = f(x)dx$ поэтому здесь можно увидеть и метод дифференциалов.

Но функция может на некотором отрезке принимать и отрицательные значения, тогда интеграл по этому отрезку будет давать отрицательную площадь, что противоречит определению площади.

Можно вычислять площадь по формуле S=$\int_a^b |f(x)|dx$. Это равносильно изменению знака функции в тех областях, в которых она принимает отрицательные значения.

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, а снизу графиком функции $g(x)$, то *можно пользоваться формулой S=*$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, так как $f(x) \ge g(x)$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми x=0, x=2 и графиками функций $y=x^2$, $y=x^3$.

Заметим, что на интервале (0,1) выполнено неравенство $x^2 > x^3$, а при $x > 1$ выполнено неравенство $x^3 > x^2$. Поэтому

$$S = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx + \int_1^2 \left(x^3 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

2.Нахождение общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.(...Н Е Т...)

Метод вариации произвольной постоянной для линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка. $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$. ($y^{(n)} = -Ly + f(x)$).

Здесь обозначено $L = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$, заметим, если y- решение однородного уравнения, то $y^{(n)} = -Ly$.

Заметим, всегда, применяя метод вариации, надо делить на коэффициент при старшей производной, т.е. приводить уравнение.

Пусть найдено решение однородного уравнения

$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

Варьируем произвольные постоянные, ищем решение неоднородного уравнения в виде

$y_{он}(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$.

Дифференцируем это соотношение

$y_{он}{}'(x) = C_1{}'(x) y_1(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n(x) + C_1(x) y_1'(x) + \ldots + C_n(x) y_n'(x)$.

Потребуем, чтобы

$C_1{}'(x) y_1(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n(x) = 0$.,

тогда $y_{он}{}'(x) = C_1(x) y_1'(x) + \ldots + C_n(x) y_n'(x)$.

Дифференцируем еще раз

$y_{он}{}''(x) = C_1{}'(x) y_1'(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n'(x) + C_1 y_1''(x) + \ldots C_n y_n''$.

Потребуем, чтобы

$C_1{}'(x) y_1{}'(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n{}'(x) = 0$.,

тогда $y_{он}{}''(x) = C_1(x) y_1''(x) + \ldots + C_n(x) y_n''(x)$.

Вновь дифференцируем и т.д., в результате, после n-2 дифференцирования получим

$C_1{}'(x) y_1{}^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n{}^{(n-2)}(x) = 0$.

$y_{он}{}^{(n-1)}(x) = C_1(x) y_1^{(n--1)}(x) + \ldots + C_n(x) y_n^{(n-1)}(x)$.

Дифференцируем и подставляем

$y_{он}{}^{(n)}(x) = C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1{}'(x) y_1{}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n{}^{(n-1)}(x)$.

в неоднородное уравнение $(y^n) = -Ly + f(x)$.

$C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1{}'(x) y_1{}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n{}^{(n-1)}(x) = -L(C_1 y_1 + \ldots C_n y_n) + f(x)$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ - решения однородного уравнения, то $y_k^{(n)} = -Ly_k = 0, k = 1, \ldots n$.

Получим $C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Это – последнее уравнение системы для определения варьированных констант. Соберем все уравнения в *систему для определения констант*.

$C_1{}'(x) y_1(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n(x) = 0$.,

$C_1{}'(x) y_1{}'(x) + \ldots + C_n{}'(x) y_n{}'(x) = 0$.,

....

$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Так как определитель системы – определитель Вронского, не равный нулю в силу линейной независимости решений, то функции $C_1(x), \ldots C_n(x)$ определяются из этой системы однозначно.

Теперь общее решение неоднородного уравнения определяется по формуле $y_{он}(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$.

3.Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3 + x\sin x + \sqrt{x}}$.

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(y')^2 - yy'' = y^2 y'$ при начальных условиях $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.

Экзаменац. билет № 10

1.Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела по площадям параллельных сечений.(!!!БРАТЬ В ЛЕКЦИИ!!!)

Пусть требуется вычислить объем некоторого тела V по известным площадям сечений $S(x)$ этого тела плоскостями, перпендикулярными прямой OX, проведенными через любую точку x отрезка [a, b] прямой OX.

Применим метод дифференциалов. Считая элементарный объем dV, над отрезком $[x, x+dx]$ объемом прямого кругового цилиндра с площадью основания $S(x)$ и высотой dx, получим $\Delta V \approx dV = S(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2.Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для дифференциального уравнения первого порядка. Особые точки и особые решения дифференциальное уравнения первого порядка.

Теорема существования решения задачи Коши.

Пусть функция $f(x,y)$ *непрерывна в области* $(x,y) \in G$ *, тогда существует хотя бы одно решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям* $(x_0, y_0) \in G$ или *существует хотя бы одна интегральная кривая, проходящая через точку* $(x_0, y_0) \in G$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Пусть функция $f(x,y)$ *непрерывна в области* $(x,y) \in G$ *и удовлетворяет в этой области одному из трех условий:*

A: функция $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *:*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|,$$

B: существует и ограничена частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$,

D: существует и непрерывна частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Заметим, что из условия D следует условие B., а из условия B следует условие A. Поэтому класс функций, удовлетворяющих условию A, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию B, а класс функций, удовлетворяющих условию B, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию C. Условие A проверить трудно, а условие B или условие D проверить гораздо легче.

Если в какой-либо точке $(x,y) \in G$ решение дифференциального уравнения не существует (через точку не проходит интегральная кривая), то в ней разрывна функция $f(x,y)$.

Если через какую-либо точку проходят две или более интегральных кривых, то функция $f(x,y)$ непрерывна в этой точке, но ни одно из условий A, B, D не выполнено в ней.

Пример. Найти общее и частное решение уравнения $y' = y$.

Очевидно, что общее решение будет $y = Ce^x$. Так как правая часть непрерывна и удовлетворяет условию D, то через любую точку конечной плоскости OXY проходит единственная интегральная кривая.

Для заданных начальных условий $(x_0, y_0) \in G$ существует константа $C_0 = y_0 e^{-x_0}$, такая что $y_0 = C_0 e^{x_0} = (y_0 e^{-x_0}) e^{x_0}$.

Понятие об особых точках и особых решениях дифференциального уравнения первого порядка.

Точка (x, y) называется *не особой точкой* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$, если существует ее окрестность, что через каждую точку этой окрестности проходит единственная интегральная кривая.

Все прочие точки называются *особыми точками* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$.

Особым решением называется решение, все точки (x, y) которого – особые.

Пример. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим общее решение $y = (x - C)^3$ и решение, не принадлежащее этому семейству – тривиальное решение $y \equiv 0$.

Каждая точка оси OX – особая, так как через нее проходят как тривиальное решение, так и частное решение из семейства $y = (x - C)^3$.

$y \equiv 0$ - особое решение.

Пример. $y' = \sqrt{y}$

Заметим, что $y' = \sqrt{y} \geq 0$. Общее решение $y = \frac{1}{4}(x - C)^2, x \geq C$ (иначе $y' < 0$). Кроме того, $y \equiv 0$ - тоже решение. $y \equiv 0$ - особое решение.

Заметим, что на особом решении не выполняются условия теоремы Коши, гарантирующие единственность. В самом деле, в том и другом примерах $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ терпят разрыв при $y \equiv 0$.

3.Вычислить длину дуги кривой $y = a\ln(a^2 - x^2)$ от точки $x_1 = 0$ до точки $x_2 = a/2$.

4.Найти частное решение дифференциальное уравнения $y'' + y' - 6y = 2\sin x$ удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Экзаменац. билет № 11

1.Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела вращения. (!!!БРАТЬ В ЛЕКЦИИ!!!)

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси ОХ.*

Тогда $S(x)=\pi y^2(x),\quad V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$.

Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси ОУ*, если функция задана в виде $x=x(y)$, можно вычислить по формуле $V=\int\limits_c^d x^2(y)dy$.

Если функция задана в виде $y=y(x)$ *и требуется определить объем тела вращения вокруг оси ОУ*, то формулу для вычисления объема можно получить следующим образом.

$$\Delta V(x)=V(x+dx)-V(x)=\pi y^2(x+dx)-\pi y^2(x)=\pi\left((y(x)+dy)^2-y^2(x)\right)=$$
$$\pi\left(y^2(x)+2y(x)dy+dy^2-y^2(x)\right)=2\pi xy(x)dx+\pi dy^2.$$

Переходя к дифференциалу и пренебрегая квадратичными членами, имеем $dV(x)=2\pi y^2(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем $V=2\pi\int\limits_a^b xydx$.

Пример. Вычислить объем шара $x^2+y^2=R^2$.

$$V=\int\limits_{-R}^{R}\pi y^2(x)dx=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi R^2 2R-\pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2.Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.

Линейное уравнение. $y'+a(x)y=b(x)$

Существует два метода решения линейного уравнения: метод вариации произвольной постоянной и метод подстановки.

Метод вариации произвольной постоянной будет встречаться нам часто: при решении неоднородных линейных уравнений высшего порядка, при решении неоднородных систем линейных уравнений. Его надо знать твердо.

При решении **методом вариации произвольной постоянной** сначала решают однородное уравнение (с нулевой правой частью)

$$y'+a(x)y=0$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y}=-a(x)dx,\quad y=Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Затем варьируют произвольную постоянную, полагая $C=C(x)$.

$$y'=C'(x)e^{-\int a(x)dx}-C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$$C'e^{-\int a(x)dx}-Ca(x)e^{-\int a(x)dx}+Ca(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x).$$

При вариации произвольной постоянной здесь обязательно должны сократиться два члена, в этом идея метода.

$C' = b(x)e^{\int a(x)dx}$, $C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C$, где C – произвольная постоянная.

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} + C\right) = Ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Видно, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это справедливо не только для линейных уравнений первого порядка, но и для линейных уравнений высших порядков, и для линейных систем. Там подобное утверждение называется теоремой о структуре общего решения неоднородного уравнения или системы.

Замечание. Решая уравнение методом вариации, обязательно приводите его к виду $y' + a(x)y = b(x)$ (если при y' стоит коэффициент, то делить на него обязательно), иначе метод вариации даст ошибку.

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 1 + 2e^{-x}$ и $x = 0$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} - 5x^2$.

Экзаменац. билет № 12

1.Определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.

Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку (первого рода).

Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx$. В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла.

Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися.* Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся.*

Если сходятся интегралы от функций $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda\, f(x),\ f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{b} = 1$, интеграл сходится.

Пример. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится.

Пример. $\int_{0}^{+\infty} a^x dx$ сходится при $a<1$ и расходится при $a>1$. Проверьте это.

Рассмотрим *интеграл Дирихле* $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx \underset{(n\neq1)}{=} \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_{1}^{b} = \frac{1}{1-n}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-n}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & n<1\\ \dfrac{1}{n-1}, & n>1\end{cases}.$$

При $n=1$ $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$, интеграл расходится.

Итак, *несобственный интеграл Дирихле первого рода* $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n>1$, *расходится при* $n\le 1$.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

1 признак. Теорема. Пусть при $x>a$ выполнено неравенство $0<f(x)\le g(x)$.

Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b], b > a$,

$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b.

Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$= I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$= I (I – конечное число).

Поэтому $\int_a^b f(x)dx$- монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*.

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$

$(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x+x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения

$\int\limits_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

2.Вывести формулу Остроградского-Леувилля.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$$

Определитель Вронского можно вычислить по *формуле Остроградского – Лиувилля*

$$W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Вывод формулы Остроградского – Лиувилля.

Известна формула для производной определителя

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}'\dots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, \\ a_{n1}' & a_{n2}' & a_{nn}' \end{vmatrix}.$$

Вычислим $\dfrac{dW(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\ldots+$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)}-\ldots-\dfrac{a_n}{a_0}y_1 & \ldots & -\dfrac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}-\ldots-\dfrac{a_n}{a_0}y_n \end{vmatrix}=$$

$$0+\ldots+0+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} & \ldots & -\dfrac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=-\frac{a_1}{a_0}W(x).$$

$\dfrac{dW(x)}{W(x)}=-\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$.

Замечание. В формуле Остроградского – Лиувилля участвуют только коэффициенты при двух старших производных.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка.

$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x), y_2(x)$ - два частных решения

$a_0(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=0$. , $a_0(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=0$. Умножим первое уравнение на y_2, а второе на y_1 и вычтем первое уравнение из второго.

$a_0(x)\left(y_1y_2''-y_2y_1''\right)+a_1(x)\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)=0$.

Так как $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$, то $W'(x)=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''$ = $y_1y_2''-y_2y_1''$.

Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x)+a_1(x)W(x)=0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

3.Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=2\sqrt{x}$, отсечённой прямой $x=4$.

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $xy''-y'=x^2\cos x$.

Экзаменац. билет № 13

1.Доказать теорему о среднем для определённого интеграла.

Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c\in[a,b]$, что $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$).

Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M=\sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m=\inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим $m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c\in[a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

2.Доказать теоремы о свойствах частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x).$$

Теорема о наложении частных решений.

Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x)+y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)+f_2(x)$.

Доказательство. Подставим $y_1(x)+y_2(x)$ в неоднородное уравнение:

$$(y_1(x)+y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)}+...+a_n(x)(y_1(x)+y_2(x))=$$
$$(y_1(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)}+...+a_n(x)(y_1(x))+(y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)}+...+a_n(x)(y_2(x))=f_1(x)+f_2(x).$$

По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x)=y_{оо}(x)+y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

Метод подбора формы частного решения.

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$y'' + py' + qy = f(x)$

1) *Пусть правая часть представляет собой квазиполином* $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

Ищем частное решение в виде $y_ч(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. Здесь $P_n(x)$ - полином n-ой степени, $Q(x)$- полином, степень которого надо определить.

$y_ч{}'(x) = Q'(x)e^{\alpha x} + Q(x)\alpha e^{\alpha x}$, $y_ч{}''(x) = Q''(x)e^{\alpha x} + Q'(x)\alpha e^{\alpha x} + Q'(x)\alpha e^{\alpha x} + Q(x)\alpha^2 e^{\alpha x}$.

$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left(Q''(x) + (2\alpha + p)Q' + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q(x)\right) = e^{\alpha x}P_n(x)$

а) Если α - не корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, и многочлен $Q(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n.

б) Если α - простой корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p \neq 0$. В этом случае многочлен $Q'(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена надо выбирать равной n+1. Однако при дифференцировании $Q(x)$ производная свободного члена (постоянной) равна нулю, *поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x) = xQ_n(x)$.

в) Если α - кратный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p = 0$. В этом случае многочлен $Q''(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена $Q(x)$ надо выбирать равной n+2. Однако при двукратном дифференцировании $Q(x)$ производная не только свободного члена равна нулю, но и производная линейного члена равна нулю. *Поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x) = x^2Q_n(x)$.

Пример. $y'' - y = x + e^x$

$k^2 - 1 = 0$, $k_1 = 1, k_2 = -1, \quad y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{-x}$

$f_1(x) = x, \quad (P_n(x) = x, \alpha = 0), \quad \alpha = 0$ - не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в том же виде, что и правая часть, $y_1 = Ax + B, \quad y_1{}' = A, \quad y_1{}'' = 0$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x) = x$.

$-Ax - B = x \Rightarrow B = 0, A + B = 1$

$y_1(x) = -x$.

$f_2(x) = e^x, \quad (P_n(x) = 1, \quad \alpha = 1)$. Корень $\alpha = 1$ содержится один раз среди корней характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $y_2 = Dxe^x, \quad y_2{}' = De^x(1 + x), \quad y_2{}'' = De^x(2 + x)$.

Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x) = e^x$.

$De^x(2 + x - x) = e^x \Rightarrow D = \frac{1}{2}$

$y_2(x) = \frac{1}{2}xe^x$.

Суммируя оба частных решения, получаем частное решение неоднородного уравнения для исходной правой части:

$y_{чн} = -x + \frac{1}{2}xe^x$.

Общее решение неоднородного уравнения будет

$$y_{он} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x + \frac{1}{2} x e^x .$$

2) Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}\left(M(x)\cos \beta x + N(x)\sin \beta x\right)$

а) *Если* $\alpha \pm i\beta$ *не корни характеристического уравнения,* то частное решение ищется в том виде, в котором задана правая часть:

$$y_ч = e^{\alpha x}\left(U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x\right),$$

где $U_m(x), V_m(x)$ - полиномы степени m – максимальной из степеней полиномов $M(x), N(x)$.

б) Если $\alpha \pm i\beta$ - *пара корней характеристического уравнения*, то частное решение ищется в виде

$$y_ч = x e^{\alpha x}\left(U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x\right),$$

Пример. $y'' + y = \sin x$

$$k^2 + 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm i, \quad y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$f(x) = \sin x, \quad \left(\alpha = 0, \beta = 1, M(x), N(x) \quad степени\ 0\right)$$

Пара корней $\alpha \pm i\beta = \pm i$ - пара корней характеристического уравнения.

$$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_ч' = A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x,$$

$$y_ч'' = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$$

Подставляем в неоднородное уравнение, получаем

$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$, откуда $B = 0,\ A = -\frac{1}{2}$

$y_ч = -\frac{1}{2}x\cos x$, $y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

Рассмотрим *неоднородное уравнение n-го порядка*, покажем, как в нем применять метод подбора формы частного решения.

Здесь ситуация сложнее, так как в характеристическом уравнении n корней, действительные корни и комплексно сопряженные, простые и кратные корни.

1) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

a) Если α *не является корнем характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч = e^{\alpha x} Q_n(x)$.

b) Если α - *корень характеристического уравнения r-ой кратно*сти, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$.

2) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(M(x)\cos \beta x + N(x)\sin \beta x\right)$$

а) Если пара комплексно сопряженных корней *не является корнями характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть

$y_ч = e^{\alpha x}\left(U_m \cos\beta x + V_m \sin\beta x\right)$, где степень m многочленов – максимальная из степеней многочленов $M(x), N(x)$.

b) Если пара комплексно сопряженных корней *является корнями характеристического уравнения r-ой кратности,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде
$y_ч = x^r e^{\alpha x}\left(U_m \cos\beta x + V_m \sin\beta x\right)$.

Пример. $y^{(5)} + y'' = x + \sin x$

$$k^5 + k^2 = k^2(k+1)(k^2 - k + 1) = 0, \quad k_{1,2} = 0,\ k_3 = -1,\ k_{4,5} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

$f_1(x) = x, (\alpha = 0,\ P_n(x) = x,\ n = 1)$. $\alpha = 0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 2 раза,* поэтому $y_{ч1} = x^2(Ax + B)$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x) = x$, получим $6Ax + 2B = x \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = 0, \quad y_{ч1} = \frac{1}{6}x^3$.

$f_2(x) = \sin x, \quad (\alpha = 0, \beta = 1, \quad \alpha \pm i\beta = \pm i)$. Корни $\pm i$ не содержатся в корнях характеристического уравнения, поэтому $y_{ч,2} = D\cos x + E\sin x$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x) = \sin x$, получим $(E - D)\cos x - (E + D)\sin x = \sin x, \Rightarrow E - D = 0, E + D = 1 \Rightarrow E = D = \frac{1}{2}$.

$y_{ч,2} = D\cos x + E\sin x$. $y_{ч,2} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

$y_ч = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Пример. $y^{(5)} + y''' = x + \sin x$

$k^5 + k^3 = k^3(k + i)(k - i) = 0, \Rightarrow k_{1,2,3} = 0,\ k_{4,5} = \pm i$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

$f_1(x) = x, (\alpha = 0,\ P_n(x) = x,\ n = 1)$ $\alpha = 0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 3 раза,* поэтому $y_{ч1} = x^3(Ax + B)$.

$f_2(x) = \sin x, \quad (\alpha = 0, \beta = 1, \quad \alpha \pm i\beta = \pm i)$. Корни $\pm i$ (пара корней) содержатся в корнях характеристического уравнения один раз, поэтому $y_{ч,2} = x(D\cos x + E\sin x)$. Неопределенные коэффициенты определяются, как и выше, подстановкой в уравнение и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x, при sinx, cosx, xsinx, xcosx.

3.Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^4 + x^3 + x\ln x}$.

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $xy'' + y' = \ln x$ при начальных условиях $y(1) = 1,\ y'(1) = 1$.

Экзаменац. билет № 14

1.Определение несобственного интеграла от неограниченной функции на конечном промежутке интегрирования. Сформулировать признаки сходимости таких интегралов.

2.Нахождение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка.

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x), y_2(x)$ - два частных решения

$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$. , $a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$. Умножим первое уравнение на y_2, а второе на y_1 и вычтем первое уравнение из второго.

$$a_0(x)\left(y_1y_2'' - y_2y_1''\right) + a_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = 0.$$

Так как $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$, то $W'(x) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$ = $y_1y_2'' - y_2y_1''$.

Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

Формула для построения второго частного решения по известному (построение фундаментальной системы).

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x) \neq 0$

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Отсюда $\dfrac{y_2}{y_1} = \int C\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx + C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем C=1, C 1=0, получим $y_2 = y_1\int \dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx$.

3.Вычислить длину всей кардиоиды $r = 4(1 - \cos\varphi)$.

4.Найти общее решение системы: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$

Экзаменац. билет № 15

1.Доказать теорему об оценке определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m \le f(x) \le M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2.Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского. Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Линейная зависимость и независимость.

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ (допустима только тривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю). В отличие от линейной независимости векторов здесь тождество линейной комбинации нулю, а не равенство. Это и понятно, так как равенство линейной комбинации нулю должно быть выполнено при любом значении аргумента.

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно зависимыми,* если существует не нулевой набор констант (не все константы равны нулю) $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, такой что $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0$ $(\lambda_1^2 + \ldots \lambda_n^2 \ne 0)$ (существует нетривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю).

Теорема. *Для того чтобы функции были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо из них линейно выражалась через остальные (представлялась в виде их линейной комбинации).*

Докажите эту теорему самостоятельно, она доказывается так же, как аналогичная ей теорема о линейной зависимости векторов.

Определитель Вронского.

Определитель Вронского для функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ вводится как определитель, столбцами которого являются производные этих функций от нулевого (сами функции) до n-1 го порядка.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\cdots & y_n \\ y_1' & y_2'\cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *линейно зависимы, то* $W(x)\equiv 0$

Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например,

$y_1(x)\equiv \lambda_2 y_2(x)+\ldots\lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому

$y_1^{(k)}(x)\equiv \lambda_2 y_2^{(k)}(x)+\ldots\lambda_n y_n^{(k)}(x), \quad k=1,2,3\ldots(n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.

Теорема. *Для того, чтобы решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W(x)\equiv 0$.

Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы.

Достаточность. Зафиксируем некоторую точку x_0. Так как $W(x_0)=0$, то столбцы определителя, вычисленные в этой точке, представляют собой линейно зависимые векторы.

$\exists k, C_1,\ldots C_k\neq 0,\ldots C_n$, что выполнены соотношения

$$C_1 y_1(x_0)+\ldots+C_k y_k(x_0)+\ldots+C_n y_n(x_0)=0$$
$$C_1 y_1'(x_0)+\ldots+C_k y_k'(x_0)+\ldots+C_n y_n'(x_0)=0$$
$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_k y_k^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения является его решением, то можно ввести решение вида

$y(x)\equiv C_1 y_1(x)+\ldots+C_k y_k(x)+\ldots+C_n y_n(x)$ - линейную комбинацию решений с теми же коэффициентами.

Заметим, что при $x=x_0$ это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, это следует из выписанной выше системы уравнений. Но тривиальное решение линейного однородного уравнения тоже удовлетворяет тем же нулевым начальным условиям. Поэтому из теоремы Коши следует, что введенное решение тождественно равно тривиальному, следовательно,

$y(x)\equiv C_1 y_1(x)+\ldots+C_k y_k(x)+\ldots+C_n y_n(x)\equiv 0, \quad C_k\neq 0$,

поэтому решения линейно зависимы.

Следствие. *Если определитель Вронского, построенный на решениях линейного однородного уравнения, обращается в нуль хотя бы в одной точке, то он тождественно равен нулю.*

Доказательство. Если $W(x_0)=0$, то решения линейно зависимы, следовательно, $W(x)\equiv 0$.

Теорема. *1. Для линейной зависимости решений необходимо и достаточно* $W(x) \equiv 0$ (или $W(x_0) = 0$).

2. *Для линейной независимости решений необходимо и достаточно* $W(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из доказанной выше теоремы и следствия. Второе утверждение легко доказывается от противного.

Пусть решения линейно независимы. Если $W(x_0) = 0$, то решения линейно зависимы. Противоречие. Следовательно, $W(x_0) \neq 0 \ \forall x_0$.

Пусть $W(x_0) \neq 0$. Если решения линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$, следовательно, $W(x_0) = 0$, противоречие. Поэтому решения линейно независимы.

Следствие. *Обращение определителя Вронского в нуль хотя бы в одной точке является критерием линейной зависимости решений линейного однородного уравнения.*

Отличие определителя Вронского от нуля является критерием линейной независимости решений линейного однородного уравнения.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - x^2$ *и* $y = 2x$.

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $y'' - 2y' + y = e^x + 1$.

Экзаменац. билет № 16

1.Доказать теорему о среднем для определённого интеграла.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c\in[a,b]$, что $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$).

Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M=\sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m=\inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим

$m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c\in[a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

2.Определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения. (!!!НЕ ТОЧНО!!!)

Теорема. *Размерность пространства решений линейного однородного уравнения n-ого порядка равна n.*

Доказательство.

1. Покажем, что существуют n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Рассмотрим решения $y_1(x), y_2(x),\ldots y_n(x)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$y_1(x_0)=1,\ y_2(x_0)=0,\ldots y_n(x_0)=0,$$
$$y_1'(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ldots y_n(x_0)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0,\ldots y_n^{(n-1)}(x_0)=1,$$

Такие решения существуют. В самом деле, по теореме Коши через точку $x_0, y_{0,} y_0', y_0'', \dots y_n^{(n-1)}$ проходит единственная интегральная кривая – решение. Через точку $(x_0, 1, 0, 0, \dots 0)$ проходит решение $y_1(x)$, через точку $(x_0, 0, 1, 0, \dots 0)$ - решение $y_2(x)$, через точку $(x_0, 0, 0, 0, \dots 1)$ - решение $y_n(x)$.

Эти решения линейно независимы, так как $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 1\dots & 0 \\ 0 & 0\dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

2. Покажем, что любое решение линейного однородного уравнения линейно выражается через эти решения (является их линейной комбинацией).

Рассмотрим два решения. Одно - произвольное решение $y(x)$ с начальными условиями $\left(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}\right)$. Справедливо соотношение

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0)$$

$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0)$$

....

$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0)$, где

$C_1 = y_0, C_2 = y_0' \dots C_n = y_0^{(n-1)}$.

Второе решение – это линейная комбинация решений $y_1(x), \dots y_n(x)$ с теми же коэффициентами $\hat{y}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

Вычисляя начальные условия в точке x_0 для решения $\hat{y}(x)$, убеждаемся, что они совпадают с начальными условиями для решения $y(x)$. Следовательно, по теореме Коши, произвольное решение $y(x)$ представляется в виде линейной комбинации линейно независимых решений $y_1(x), \dots y_n(x)$ $(y(x) \equiv \hat{y}(x))$.

Таким, образом, существует n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка, и произвольное решение линейно выражается через эти решения . Поэтому размерность пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка равна n. $(\dim I = n)$.

Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка представляют собой *базис пространства решений* или **фундаментальную систему решений.**

3.При каких значениях β сходится интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = xe^{5x}$.

Экзаменац. билет № 17

1.Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.

Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.

Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x)=\int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа)

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x\in[a,b]$. Тогда $J'(x)=f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x+\Delta x)-J(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx=f(c)((x+\Delta x)-x),\ c\in(x,\ x+\Delta x)\right)$и непрерывностью функции $\left(\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x)\right)$.

2.Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в случае действительных различных корней характеристического уравнения (с выводом).

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка**

$$y''+py'+qy=0.$$

Будем искать его решение в виде $y=e^{kx}$. Подставляя y в дифференциальное уравнение, получим

$e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0.$ Так как $e^{kx}\neq 0,$ то имеем

$k^2+pk+q=0$ – *характеристическое уравнение*. Решая его, получим корни

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Возможно три случая:

1) k_1,k_2 *действительны и различны,*

2) $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

3) $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *действительных, различных корней* получаем решения $y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$.

Для того, чтобы доказать, что решения составляют фундаментальную систему решений и *общее решение записывается в виде*

$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$,

надо проверить линейную независимость y_1, y_2. Составим определитель Вронского

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_1 - k_2) e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$, так как $k_1 \neq k_2$.

Заметим, что для уравнения второго порядка проверять линейную независимость можно проще. Надо показать, что $\dfrac{y_1}{y_2} \neq m - const$. Тогда столбцы определителя Вронского линейно независимы и $W \neq 0$. В нашем случае $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ при $k_1 \neq k_2$.

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линией $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс.

4.Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$

Экзаменац. билет № 18

1.Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла.

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x) = f(x)$, т.е. $J(x)$- первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x) = F(x) + C.$ Но $J(a) = 0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$. Тогда $J(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа)

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x \in [a,b]$. Тогда $J'(x) = f(x)$.

2.Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных кратных корней характеристического уравнения (с выводом).

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка**

$$y'' + py' + qy = 0 .$$

Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Подставляя y в дифференциальное уравнение, получим

$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$ Так как $e^{kx} \neq 0,$ то имеем

$k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение*. Решая его, получим корни

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} .$$

Возможно три случая:

1) k_1, k_2 *действительны и различны,*

2) $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

3) $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *кратного действительного корня* $k_1 = k_2 = k$ одно из решений можно выбрать в форме $y_1 = e^{kx}$.

Второе решение будем выбирать в виде $y_2 = u(x)e^{kx}$. Подставим в дифференциальное уравнение, чтобы определить $u(x)$.

$$y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx} = e^{kx}(u' + ku), \quad y_2'' = e^{kx}\left(u'' + ku' + ku' + k^2u\right) = e^{kx}\left(u'' + 2ku' + k^2u\right),$$
$$e^{kx}\left(u'' + 2ku' + k^2u + p(u' + ku) + qu\right) = e^{kx}\left(u'' + u'(p + 2k) + u\left(k^2 + pk + q\right)\right) = 0$$

Так как k - корень характеристического уравнения, то $k^2 + pk + q = 0$. Так как k еще и кратный корень, то по теореме Виета $k_1 + k_2 = k + k = 2k = -p$. Поэтому $p + 2k = 0$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'' = 0$, отсюда $u(x) = ax + b$. Выберем $a = 1, b = 0$, получим $u(x) = x$.

Следовательно, $y_2 = u(x)e^{kx} = xe^{kx}$. Решения y_1, y_2 линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq m$.

Поэтому *общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратного корня можно записать по формуле*

$$y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линией $4x^2 + y^2 = 4$

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $xy'' - y' = x^2 e^x$ при начальных условиях $y(0) = 0,\ y'(1) = e$.

Экзаменац. билет № 19

1.Доказать теорему об оценке модуля определённого интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m \le f(x) \le M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2.Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка**

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Подставляя y в дифференциальное уравнение, получим

$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$ Так как $e^{kx} \ne 0,$ то имеем

$k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение.* Решая его, получим корни

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Возможно три случая:

1) k_1, k_2 *действительны и различны,*

2) $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

3) $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *комплексно сопряженных корней* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, применяя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z,$ получим комплексно сопряженные решения $\hat{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),\ \ \hat{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$. Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения тоже является решением, то

$y_1 = \frac{1}{2}(\hat{y}_1 + \hat{y}_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями. Они линейно независимы, так как $\frac{y_1}{y_2} = ctg\beta x \neq 0$.

Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней можно записать по формуле

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

3.Вычислить длину дуги кривой $r = 5(1+\cos\varphi)$.

4.Найти общее решение системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$

Экзаменац. билет № 20

1.Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b \ (a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела вращения. (!!!БРАТЬ В ЛЕКЦИИ!!!)

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси OX.*

Тогда $S(x) = \pi y^2(x), \quad V = \pi \int\limits_a^b y^2(x)dx$.

2.Доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема. *Размерность пространства решений линейного однородного уравнения n-ого порядка равна n.*

Доказательство.

1. Покажем, что существуют n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Рассмотрим решения $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$y_1(x_0) = 1,\ y_2(x_0) = 0, \ldots y_n(x_0) = 0,$$
$$y_1'(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1, \ldots y_n(x_0) = 0,$$

....

$$y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \ldots y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$$

Такие решения существуют. В самом деле, по теореме Коши через точку $x_0, y_{0,}\, y_0', y_0'', \ldots y_n^{(n-1)}$ проходит единственная интегральная кривая – решение. Через точку $(x_0, 1, 0, 0, \ldots 0)$ проходит решение $y_1(x)$, через точку $(x_0, 0, 1, 0, \ldots 0)$ - решение $y_2(x)$, через точку $(x_0, 0, 0, 0, \ldots 1)$ - решение $y_n(x)$.

Эти решения линейно независимы, так как $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

2. Покажем, что любое решение линейного однородного уравнения линейно выражается через эти решения (является их линейной комбинацией).

Рассмотрим два решения. Одно - произвольное решение $y(x)$ с начальными условиями $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}\right)$. Справедливо соотношение

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0)$$
$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0)$$

....

$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0)$, где

$C_1 = y_0, C_2 = y_0' \ldots C_n = y_0^{(n-1)}$.

Второе решение – это линейная комбинация решений $y_1(x), \ldots y_n(x)$ с теми же коэффициентами $\hat{y}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

Вычисляя начальные условия в точке x_0 для решения $\hat{y}(x)$, убеждаемся, что они совпадают с начальными условиями для решения $y(x)$. Следовательно, по теореме Коши, произвольное решение $y(x)$ представляется в виде линейной комбинации линейно независимых решений $y_1(x),\ldots y_n(x)$ $\left(y(x) \equiv \hat{y}(x)\right)$.

Таким, образом, существует n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка, и произвольное решение линейно выражается через эти решения . Поэтому размерность пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка равна n. $(\dim I = n)$.

Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка представляют собой *базис пространства решений* или **фундаментальную систему решений.**

3.Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctgx}{x(x^2+1)} dx$.

4.Найти общее решение системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

Экзаменац. билет № 21

1.Определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.

Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx ,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx ,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$. В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла.

Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися.* Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся.*

Если сходятся интегралы от функций $f(x), g(x)$, то сходятся интегралы от функций $\lambda\, f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1$, интеграл сходится.

Пример. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится.

Пример. $\int_{0}^{+\infty} a^x dx$ сходится при $a<1$ и расходится при $a>1$. Проверьте это.

Рассмотрим *интеграл Дирихле* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq1)} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-n} x^{1-n}\Big|_1^b = \frac{1}{1-n}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-n} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & n<1 \\ \dfrac{1}{n-1}, & n>1 \end{cases}.$$

При $n=1$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$, интеграл расходится.

Итак, *несобственный интеграл Дирихле первого рода* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n>1$, *расходится при* $n\le 1$.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

1 признак. Теорема. Пусть при $x>a$ выполнено неравенство $0<f(x)\le g(x)$.

Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b], b > a$,

$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b.

Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число).

Поэтому $\int_a^b f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$

$(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x+x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int_2^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения $\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

2.Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно старшей производной, и задача Коши для него. Сведение этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в общем виде записывается так:

$F\left(x,y,y',...y^{(n)}\right)=0$.

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в виде, разрешенном относительно старшей производной, выглядит так:

$y^{(n)}=f\left(x,y,y'...y^{(n-1)}\right)$.

Решением дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y(x)$, обращающая его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y=\varphi(x,C_1,...C_n)$ такая, что

1) при любом наборе констант $C_1...C_n$ эта функция является решением,
2) для любого набора начальных условий из области существования решения $\left(x_0,y_0,y_0',...y_0^{(n-1)}\right)\in G$ найдется набор констант $C_1...C_n$, при котором функция

$y=\varphi(x, C_1, \ldots C_n)$ удовлетворяет заданным начальным условиям, т.е. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0, \ldots y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения n – ого порядка *зависит ровно от n констант.*

Частным решением дифференциального уравнения n – ого порядка называется какое-либо из решений, входящих в общее решение (при конкретном выборе констант).

Общим интегралом дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $\Phi(x, y, C_1, \ldots C_n)$, сохраняющая свои значения на решениях дифференциального уравнения.

Интегральной кривой называется график частного решения.

Общее решение представляет собой совокупность интегральных кривых.

Обычно рассматривается одна из трех задач:

1) *Найти общее решение* дифференциального уравнения n – ого порядка,
2) *Задача Коши* – найти частное решение дифференциального уравнения n – ого порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям,
3) *Краевая задача* – найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, одна часть которых задана в точке x_0, а другая часть в точке x_1.

Теорема Коши *(существования и единственности решения задачи Коши для* дифференциального уравнения n – ого порядка $y^{(n)}=f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$).

Пусть функция $f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные по переменным $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в некоторой области $G\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right)$.

Тогда для любой внутренней точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}\right) \in G$ существует единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим начальным условиям, т.е. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0, \ldots y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$

(через любую внутреннюю точку $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}\right) \in G$ проходит единственная интегральная кривая).

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y''=f(x,y,y')$. Область существования и единственности решения $G \in R^3(x,y,y')$ заполнена непересекающимися интегральными кривыми. Через любую точку $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая. Однако через «точку» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ проходит бесконечно много интегральных кривых, все они различаются значениями y'_0. Заметим, что в $R^3(x,y,y')$ «точка» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ представляет собой прямую $x=x_0$, $y=y_0$.

Теорема. Любое дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной, можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-ого порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$. Обозначим $y_0(x) = y(x), y_0'(x) = y_1, y_1'(x) = y_2, \ldots y_{n-2}' = y_{n-1}$. Дифференциальное уравнение n-ого порядка удалось свести к системе n дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
& y_0'(x) = y_1, \\
& y_1'(x) = y_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y_{n-2}' = y_{n-1} \\
& y_{n-1}' = f(x, y_0, y_1 \ldots y_{n-1})
\end{aligned}
$$

Применяя эту теорему, можно от канонического вида системы дифференциальных уравнений перейти к системе дифференциальных уравнений первого порядка - *нормальному виду системы.*

$$
\begin{aligned}
& y_{10}(x) = y_1(x) \\
& \qquad y_{10}' = y_{11} \\
& \qquad y_{11}' = y_{12} \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad y_{1,m_1-1}' = f_1\left(x, y_{10}, \ldots y_{1\,m_1-1}, \ldots. y_{n0}, \ldots y_{n\,m_n-1}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y_{n\,0}(x) = y_n(x) \\
& \qquad y_{n\,0}' = y_{n\,1} \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad y_{n\,m_n-1}' = f_n\left(x, y_{10}, \ldots y_{1\,m_1-1}, \ldots y_{n\,0}, \ldots y_{n\,m_n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Получена система из $m_1 + \ldots m_n$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Удобнее *нормальную систему дифференциальных уравнений* (систему в нормальной форме) записывать в виде:

$$
\begin{aligned}
& y_1' = f_1(x, y_1, \ldots y_n) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\textit{покоординатная форма}) \\
& y_n' = f_n(x, y_1, \ldots y_n)
\end{aligned}
$$

или в виде

$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, где $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$ (*векторная форма*).

Пример. $\begin{matrix} y_1'' = \sin y_1' \cos y_2' \\ y_2'' = x y_1 + y_2' \end{matrix}$ Эти уравнения сводятся к нормальной системе

($y_{10} = y_1$)

$$y_{10}' = y_{11}$$

$$y_{11}' = \sin y_{11} \cos y_{21}$$

$(y_{20} = y_2)$

$$y_{20}' = y_{21}$$

$$y_{21}' = xy_{10} + y_{21}$$

Оказывается, не только дифференциальное уравнение n- ого порядка сводится к системе n дифференциальных уравнений первого порядка – нормальной системе, но и нормальная система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

3.Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+4}$, $y = 2 - \sqrt{x}$ *и* $y = 0$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 10e^x + 6x - 2$.

Экзаменац. билет № 22

1.Доказать теорему о среднем значении интеграла.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$).

Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим

$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

2.Доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения линейного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

$y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$.

Доказательство. Покажем, что $y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$ - общее решение неоднородного уравнения.

1. $y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$ - решение неоднородного уравнения как сумма решений однородного и неоднородного уравнений (теоремы о свойствах решений).
2. Зададим произвольные начальные условия x_0, $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$. Вычислим начальные условия для выбранного частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}(x_0), y_{чн}'(x_0), \dots y_{чн}^{(m-1)}(x_0)$. Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант:

$$y_{оо}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0).$$
$$y_{оо}'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{чн}'(x_0).$$

$$y_{oo}''(x_0)=C_1y_1''(x_0)+\ldots+C_ny_n''(x_0)=y_0''-y_{чн}''(x_0).$$

....

$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}-y_{чн}^{(n-1)}.$$

Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1,\ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом. Следовательно, $y_{он}(x)=y_{чн}(x)+y_{oo}(x)$ - общее решение неоднородного уравнения.

3.Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $r=1-\cos\varphi$ и $r=\frac{1}{2}$ (внутри кардиоиды и вне окружности).

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''=\dfrac{y'}{x}-\dfrac{1}{2y'}$ при начальных условиях $y(1)=\frac{2}{3}$, $y'(1)=1$.

Экзаменац. билет № 23

1.Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.

Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.

Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x)=\int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа)

Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x\in[a,b]$. Тогда $J'(x)=f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x+\Delta x)-J(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x}f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx=f(c)((x+\Delta x)-x),\ c\in(x,\ x+\Delta x)\right)$и непрерывностью функции $\left(\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x)\right)$.

2.Доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы.

$y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$.

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ является общим решениям (удовлетворяет пунктам определения общего решения)

1. $y_{oo}(x)$ - решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.
2. Зададим произвольные начальные условия $y_0,y_0',\ldots y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1,\ldots C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

$y_{oo}(x_0)=C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0$.

$$y_{oo}'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_0'.$$
$$y_{oo}''(x_0)=C_1y_1''(x_0)+\ldots+C_ny_n''(x_0)=y_0''.$$
....
$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1,\ldots C_n$. Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1,\ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом.

Следовательно, $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ - общее решение.

Замечание. Определитель Вронского (как всякий определитель) представляет собой ориентированный n – мерный объем, натянутый на векторы решений фундаментальной системы решений.

3.Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^2 \frac{arctg\, xdx}{x(x^2-1)}$.

4.Найти частное решение дифференциального уравнения $yy''=1+(y')^2$ при начальных условиях $y(-2)=1,\ y'(-2)=0$.

Экзаменац. билет № 24

1.Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела по площадям параллельных сечений.(!!!СМ. В ЛЕКЦИИ!!!)

Пусть требуется вычислить объем некоторого тела V по известным площадям сечений $S(x)$ этого тела плоскостями, перпендикулярными прямой OX, проведенными через любую точку x отрезка [a, b] прямой OX.

Применим метод дифференциалов. Считая элементарный объем dV, над отрезком $[x, x+dx]$ объемом прямого кругового цилиндра с площадью основания $S(x)$ и высотой dx, получим $\Delta V \approx dV = S(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2.Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского и его свойства.

Линейная зависимость и независимость.

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ (допустима только тривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю). В отличие от линейной независимости векторов здесь тождество линейной комбинации нулю, а не равенство. Это и понятно, так как равенство линейной комбинации нулю должно быть выполнено при любом значении аргумента.

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно зависимыми,* если существует не нулевой набор констант (не все константы равны нулю) $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, такой что $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \ \ (\lambda_1^2 + \ldots \lambda_n^2 \neq 0)$ (существует нетривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю).

Теорема. *Для того чтобы функции были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо из них линейно выражалась через остальные (представлялась в виде их линейной комбинации).*

Докажите эту теорему самостоятельно, она доказывается так же, как аналогичная ей теорема о линейной зависимости векторов.

Определитель Вронского.

Определитель Вронского для функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ вводится как определитель, столбцами которого являются производные этих функций от нулевого (сами функции) до n-1 го порядка.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *линейно зависимы, то* $W(x) \equiv 0$

Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например,

$y_1(x) \equiv \lambda_2 y_2(x) + \dots \lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому

$y_1^{(k)}(x) \equiv \lambda_2 y_2^{(k)}(x) + \dots \lambda_n y_n^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3\dots(n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.

Теорема. *Для того, чтобы решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W(x) \equiv 0$.

Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы.

Достаточность. Зафиксируем некоторую точку x_0. Так как $W(x_0) = 0$, то столбцы определителя, вычисленные в этой точке, представляют собой линейно зависимые векторы.

$\exists k, C_1, \dots C_k \neq 0, \dots C_n$, что выполнены соотношения

$$C_1 y_1(x_0) + \dots + C_k y_k(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0$$
$$C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_k y_k'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0$$
$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_k y_k^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения является его решением, то можно ввести решение вида

$y(x) \equiv C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) + \dots + C_n y_n(x)$ - линейную комбинацию решений с теми же коэффициентами.

Заметим, что при $x = x_0$ это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, это следует из выписанной выше системы уравнений. Но тривиальное решение линейного однородного уравнения тоже удовлетворяет тем же нулевым начальным условиям. Поэтому из теоремы Коши следует, что введенное решение тождественно равно тривиальному, следовательно,

$$y(x) \equiv C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) + \dots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad C_k \neq 0,$$

поэтому решения линейно зависимы.

Следствие. *Если определитель Вронского, построенный на решениях линейного однородного уравнения, обращается в нуль хотя бы в одной точке, то он тождественно равен нулю.*

Доказательство. Если $W(x_0) = 0$, то решения линейно зависимы, следовательно, $W(x) \equiv 0$.

Теорема. *1. Для линейной зависимости решений необходимо и достаточно* $W(x) \equiv 0$ (или $W(x_0) = 0$).

2. *Для линейной независимости решений необходимо и достаточно* $W(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из доказанной выше теоремы и следствия. Второе утверждение легко доказывается от противного.

Пусть решения линейно независимы. Если $W(x_0)=0$, то решения линейно зависимы. Противоречие. Следовательно, $W(x_0)\neq 0\ \forall x_0$.

Пусть $W(x_0)\neq 0$. Если решения линейно зависимы, то $W(x)\equiv 0$, следовательно, $W(x_0)=0$, противоречие. Поэтому решения линейно независимы.

Следствие. *Обращение определителя Вронского в нуль хотя бы в одной точке является критерием линейной зависимости решений линейного однородного уравнения.*

Отличие определителя Вронского от нуля является критерием линейной независимости решений линейного однородного уравнения.

3.Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

4.Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2xy'y'' = 1 + (y')^2$ при начальных условиях $y(1)=0,\ y'(1)=1$.

Экзаменац. билет № 25

1.Фигура S ограничена лучами $\varphi=\alpha, \varphi=\beta\ (0\le\alpha\le\beta\le 2\pi)$ и кривой $r=f(\varphi)$, где r и φ - полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади фигуры S.

Пусть график функции задан в полярной системе координат и мы хотим вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2$ и графиком функции $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат.

Здесь можно использовать метод интегральных сумм, вычисляя площадь криволинейного сектора как предел суммы площадей элементарных секторов, в которых график функции заменен дугой окружности $S=\lim_{\max(\Delta\varphi_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2(\varsigma_i)}{2}\Delta\varphi_i$.

Можно использовать и метод дифференциалов: $\Delta S\approx dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi,\quad S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$.

Рассуждать можно так. Заменяя элементарный криволинейный сектор, соответствующий центральному углу $d\varphi$ круговым сектором, имеем пропорцию $\begin{array}{l}2\pi\Leftrightarrow\pi\rho^2\\ d\varphi\Leftrightarrow dS.\end{array}$ Отсюда $dS=\frac{\pi\rho^2 d\varphi}{2\pi}=\frac{\rho^2}{2}d\varphi$. Интегрируя и используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем $S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$.

Пример. Вычислим площадь круга (проверим формулу). Полагаем $\rho\equiv R$. Площадь круга равна $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\varphi=\frac{1}{2}R^2 2\pi=\pi R^2$.

Пример. Вычислим площадь, ограниченную кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

$$S=2\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=a^2\frac{3}{2}\pi+0+0=\frac{3}{2}\pi a^2$$

2.Интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

1) *Уравнение не содержит явно y*, его вид $F(x,y',y'')=0$ или $y''=f(x,y')$.

Здесь применяется подстановка $y'=p(x), y''=p'(x)$ - *вводится новая функция* $y'=p(x)$ *старой переменной.* Уравнение сводится к уравнению первого порядка $p'=f(x,p)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''x\ln x=y'$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(e)=0, y'(e)=1$.

$p'x\ln x=p,\quad \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x},\quad p=C_1\ln x,\quad y'=C_1\ln x,\quad y=C_1(x\ln x-x)+C_2$ - общее решение. Найдем частное решение. $y'(e)=C_1\ln e=C_1=1,\quad y(e)=e\ln e-e+C_2=e-e+C_2=C_2=0$. Частное решение $y=x\ln x-x$.

2) *Уравнение не содержит явно x*, его вид $F(y,y',y'')=0$ или $y''=f(y,y')$.

Здесь применяется подстановка $y' = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'(y)p(y)$ - *вводится новая функция* $y' = p(y)$ *новой переменной.* Уравнение сводится к уравнению первого порядка $pp' = f(y, p)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = y'(1) = 1$.

$ypp' + p^2 = 0$

Либо $p \equiv 0 \Rightarrow y = C$ - *решение*, либо $yp' + p = 0,\ ydp = -pdy,\quad p = \frac{C_1}{y}$,

$ydy = C_1dx,\quad \frac{y^2}{2} = C_1x + C_2$ - общее решение.

Найдем частное решение. $y'(1) = C_1 = 1,\quad y(1) = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = 1 + C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 - \frac{1}{2}$,

$y^2 = 2x - 1$ - частное решение.

2) *Однородное уравнение относительно* y, y', y''.

Уравнение называется однородным относительно y, y', y'', если при замене $y \to ky,\ y' \to ky',\ y'' \to ky''$ уравнение не изменится.

Здесь применяется подстановка $y' = yz(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $xyy'' - x(y')^2 = yy'$

$y' = yz,\quad y'' = y'z + z'y = yz^2 + z'y,\quad xy(yz^2 + yz') - xy^2z^2 = y^2z,$

$xy^2z' = y^2z,\qquad y \equiv 0$ - *решение.* $xz' = z,\qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},\quad z = C_1x,\quad y' = yC_1x$,

$\frac{dy}{y} = C_1x,\quad y = C_2e^{C_1\frac{1}{2}x^2}$ - общее решение.

3) Уравнения, обе части которых являются полными производными каких-либо функций.

<u>Пример</u>. $yy'' = (y')^2$.

Запишем уравнение в виде $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y},\quad (\ln y')' = (\ln y)',\quad \ln y' = \ln y + C,$

$y' = C_1y,\quad \frac{dy}{y} = C_1dx,\quad \ln y = C_1x + C_2,\quad y = C_3e^{C_1x}.$

3.Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln(x+1),\ y = -5$ и $x = 0$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 13y = 4\cos 3x$.