

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванов

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 2

Интегрирование подстановкой и заменой переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Основными приемами вычисления интегралов являются подстановка и замена переменной.

Теорема (об интегрировании подстановкой).

Пусть функции φ и f определены соответственно на промежутках I_1 и I_2 , φ дифференцируема на I_1 , причем $\varphi(x) \in I_2$ для любого $x \in I_1$. Пусть далее

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

на промежутке I_2 . Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

на промежутке I_1 .

Доказательство.

$$\text{Имеем} \quad (F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

и доказываемое равенство справедливо.

Отметим важный частный случай доказанной теоремы:

если

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

Особенно часто это замечание используется при $b = 0$ или при $a = 1$:

$$\begin{aligned} \int f(ax)dx &= \frac{1}{a}F(ax) + C, \quad a \neq 0; \\ \int f(x+b)dx &= F(x+b) + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C;$$

аналогично

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

При практическом применении доказанной теоремы обычно используют формальный прием, называемый "подведением под знак дифференциала":

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C;$$

в простых случаях вспомогательную переменную $u = \varphi(x)$ не вводят, т.е. сразу пишут

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Имеем

$$I = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} (\operatorname{tg} \frac{x}{2})' dx = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Т.к. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, то отсюда

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C.$$

Теорема (об интегрировании заменой переменной).

Пусть функция φ дифференцируема на промежутке I_1 и взаимно однозначно отображает его на промежуток I_2 , причем $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in I_1$. Пусть, далее, функция f определена на I_2 . Тогда, если на промежутке I_1

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C,$$

то на промежутке I_2

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где $\varphi^{-1}(x)$ - функция, обратная к функции $\varphi(t)$.

Доказательство.

Из условий теоремы следует, что функция $\varphi^{-1}(x)$ дифференцируема, и

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Поэтому

$$(F(\varphi^{-1}(x)))' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Пример. Пусть требуется вычислить

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad -a < x < a, \quad a > 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Нетрудно проверить, что все условия последней теоремы выполнены. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем выражении t на $\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$, получаем

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C.$$

Теорема (об интегрировании по частям).

Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке I , и функция $u' \cdot v$ имеет на этом промежутке первообразную. Тогда

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Доказательство.

Запишем правило дифференцирования произведения:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Отсюда

$$\int u' \cdot v dx = \int ((uv)' - uv') dx = uv - \int u \cdot v' dx.$$

Теорема доказана.

Примеры.

1. Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int b x dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int e^{ax} \sin b x dx.$$

Имеем

$$I_1 = \int e^{ax} \left(\frac{\sin bx}{b} \right)' dx = e^{ax} \cdot \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} I_2;$$

$$I_2 = \int e^{ax} \left(-\frac{\cos bx}{b} \right)' dx = -e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx = -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} I_1.$$

Т.о., для нахождения I_1 и I_2 получаем такую систему:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} I_2, \\ I_2 &= -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} I_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \\ I_2 &= \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь некоторые интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

Пусть
$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad a \neq 0.$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то, обозначив

$$k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{и} \quad u = x + \frac{b}{2a},$$

получим

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 - k^2} = \frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{u - k}{u + k} \right| + C;$$

если же $D < 0$, то $k^2 = -D$, и

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + k^2} = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{u}{k} + C.$$

При $D = 0$ имеем

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{au} + C.$$

Т.о., остается лишь вернуться к прежней переменной x .

Вычисление интеграла I можно свести к вычислению I_1 :

$$I = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \cdot I_1;$$

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} = \ln |ax^2 + bx + c| + C.$$

Аналогично вычисляется и интеграл

$$J = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Вычислим вспомогательный интеграл

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)}} = \int \frac{du}{\sqrt{a(u^2 \pm k^2)}},$$

где $u = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{|b^2 - 4ac|}{4a^2};$

при $D = b^2 - 4ac > 0$ под радикалом в последнем интеграле берется знак "-", а при $D < 0$ - знак "+". В результате дело сводится к вычислению табличных интегралов вида

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} \quad \text{или} \quad \int \frac{du}{|u|} = \pm \int \frac{du}{u};$$

знак перед последним интегралом выбирается в зависимости от расположения промежутка интегрирования относительно нуля.

Вычисление интеграла J сводится к вычислению J_1 :

$$J = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) J_1;$$

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C.$$