Билет 1

Задача о площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, образованную отрезком $[a,b]$ оси OX (основание трапеции), прямыми $x=a,\ x=b$ (на них лежат боковые стороны трапеции) и графиком функции $y=f(x)$. Так как график функции – кривая линия, то такая трапеция называется криволинейноqй.

Устроим разбиение отрезка $[a,b]$ точками. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ отметим точку ς_i. Вычислим $f(\varsigma_i)$. Обозначим ΔS_i - площадь части криволинейной трапеции над отрезком $[x_{i-1},x_i]$, S – площадь всей криволинейной трапеции. Тогда

$$f(x_{i-1})\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < f(x_i)\Delta S_i,\quad \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса выполняется неравенство $m_i \le f(\varsigma_i) \le M_i$, где m_i, M_i - нижняя и верхняя грани функции на отрезке $[x_{i-1},x_i]$. Тогда

$$m_i\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < M_i\Delta S_i,\quad \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой,* суммы $\bar s = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $\bar S = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу.

Будем измельчать разбиение так, чтобы $\max|\Delta x_i| \to 0$. *Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он называется определенным интегралом (по Риману) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a,b]$:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to o} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Если существуют пределы нижней и верхней сумм Дарбу при неограниченном измельчении разбиения, то они называются нижним I_* и верхним I^* интегралами Дарбу.

Теорема существования определенного интеграла.

Если подынтегральная функция y=f(x) непрерывна или кусочно - непрерывна на отрезке [a;b], то определенный интеграл заданной функции существует.

Теорема принимается без доказательств.

Критерий существования определенного интеграла. Для того, чтобы существовал определенный интеграл по Риману $\int_a^b f(x)dx$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны нижний и верхний интегралы Дарбу.

Следствие. *Если определенный интеграл существует как предел интегральных сумм, то он не зависит*

- *от выбора разбиения, лишь бы* $[a,b] = \bigcup [x_{i-1},x_i],\ S([x_{j-1},x_j] \bigcap [x_{i-1},x_i]) = 0$.
- *от выбора отмеченных точек* ς_i *на элементах разбиения*
- *от способа измельчения разбиения, лишь бы* $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Поэтому (*критерий Римана*) для интегрируемости по Риману ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое конкретное разбиение отрезка, на котором $|\bar S - \bar s| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Если функция кусочно непрерывна на отрезке (имеет на нем не более конечного числа разрывов первого рода), то она интегрируема на этом отрезке.

Мы пришли к определенному интегралу от задачи о площади криволинейной трапеции. Если функция принимает на отрезке неотрицательные значения, то *определенный интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции.* В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла.**

Теорема об оценке определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

1. Доказательство. Интегрируя по свойству (Если на отрезке $f(x) \ge g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$. Так как $f(x) \ge g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \ge g(\varsigma_i), \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.) неравенство $m \le f(x) \le M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Пример. $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2,2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2

1) Среди корней характеристического уравнения имеется простая пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$.

Справедливо *утверждение*, которое мы примем без доказательства: *простой паре комплексно сопряженных корней* $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$ *соответствует пара комплексно сопряженных собственных векторов* $\vec u \pm i\vec v$.

Запишем формально соответствующую пару решений:

$$\bar{\bar y}_{1,2} = e^{\gamma \pm i\beta}(\vec u \pm i\vec v) = e^{\gamma x}(\cos\beta \pm i\sin\beta)(\vec u \pm i\vec v) =$$
$$e^{\gamma x}[(\vec u\cos\beta x - \vec v\sin\beta x) \pm i(\vec u\sin\beta x + \vec v\cos\beta x)]$$

Эти решения комплексные. Вместо них мы (по линейности и теоремам о свойствах решений) можем взять решения $\vec y_1 = \frac{1}{2}(\bar{\bar y}_1 + \bar{\bar y}_2) = e^{\gamma x}(\vec u\cos\beta x - \vec v\sin\beta x),\quad \vec y_2 = \frac{1}{2i}(\bar{\bar y}_1 - \bar{\bar y}_2) = e^{\gamma x}(\vec u\sin\beta x + \vec v\cos\beta x)$ Общее решение можно записать в виде:

$$\vec y_{oo} = \ldots + C_1\vec y_1 + C_2\vec y_2 + \ldots$$

Пример.

$$\begin{cases}\dot x = x - y\\ \dot y = x + y\end{cases},\quad A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$[A - \lambda E] = \begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = 0,\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 + i,\quad \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = 0,\quad \vec\alpha^1 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}, \vec\alpha^2 = \begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix},\quad \gamma = 1, \beta = 1,\quad \vec u = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \vec v = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec y^1 = e^t\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right],\quad \vec y^2 = e^t\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t\right],$$

$$\vec y_{oo} = C_1\vec y_1 + C_2\vec y_2 = e^t\begin{bmatrix}-C_1\sin t + C_2\cos t\\ C_1\cos t + C_2\sin t\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}x = e^t(-C_1\sin t + C_2\cos t)\\ y = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)\end{matrix}$$

Билет 2

1 Задача о площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, образованную отрезком $[a,b]$ оси OX (основание трапеции), прямыми $x=a,\ x=b$ (на них лежат боковые стороны трапеции) и графиком функции $y=f(x)$. Так как график функции – кривая линия, то такая трапеция называется криволинейноqй. Устроим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_i, \ldots x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ отметим точку ς_i. Вычислим $f(\varsigma_i)$. Обозначим ΔS_i - площадь части криволинейной трапеции над отрезком $[x_{i-1},x_i]$, S – площадь всей криволинейной трапеции. Тогда

$$f(x_{i-1})\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < f(x_i)\Delta S_i,\quad \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса выполняется неравенство $m_i \le f(\varsigma_i) \le M_i$, где m_i, M_i - нижняя и верхняя грани функции на отрезке $[x_{i-1},x_i]$. Тогда

$$m_i\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < M_i\Delta S_i,\quad \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой,* суммы $\bar s = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $\bar S = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу. Будем измельчать разбиение так, чтобы $\max|\Delta x_i| \to 0$. *Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он называется определенным интегралом (по Риману) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a,b]$:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to o} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Если существуют пределы нижней и верхней сумм Дарбу при неограниченном измельчении разбиения, то они называются нижним I_* и верхним I^* интегралами Дарбу. Теорема существования определенного интеграла.

Если подынтегральная функция y=f(x) непрерывна или кусочно - непрерывна на отрезке [a;b], то определенный интеграл заданной функции существует. Теорема принимается без доказательств.

Критерий существования определенного интеграла. Для того, чтобы существовал определенный интеграл по Риману $\int_a^b f(x)dx$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны нижний и верхний интегралы Дарбу.

Следствие. *Если определенный интеграл существует как предел интегральных сумм, то он не зависит*

- *от выбора разбиения, лишь бы* $[a,b] = \bigcup [x_{i-1},x_i],\ S([x_{j-1},x_j] \bigcap [x_{i-1},x_i]) = 0$.
- *от выбора отмеченных точек* ς_i *на элементах разбиения*
- *от способа измельчения разбиения, лишь бы* $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Поэтому (*критерий Римана*) для интегрируемости по Риману ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое конкретное разбиение отрезка, на котором $|\bar S - \bar s| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. **Теорема**. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Если функция кусочно непрерывна на отрезке (имеет на нем не более конечного числа разрывов первого рода), то она интегрируема на этом отрезке.

Мы пришли к определенному интегралу от задачи о площади криволинейной трапеции. Если функция принимает на отрезке неотрицательные значения, то *определенный интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции.* В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла.**

Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$).Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

2

2) Среди корней характеристического уравнения имеется простая пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$.

Справедливо *утверждение*, которое мы примем без доказательства: *простой паре комплексно сопряженных корней* $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$ *соответствует пара комплексно сопряженных собственных векторов* $\vec u \pm i\vec v$.

Запишем формально соответствующую пару решений:

$$\bar{\bar y}_{1,2} = e^{\gamma \pm i\beta}(\vec u \pm i\vec v) = e^{\gamma x}(\cos\beta \pm i\sin\beta)(\vec u \pm i\vec v) =$$
$$e^{\gamma x}[(\vec u\cos\beta x - \vec v\sin\beta x) \pm i(\vec u\sin\beta x + \vec v\cos\beta x)]$$

Эти решения комплексные. Вместо них мы (по линейности и теоремам о свойствах решений) можем взять решения $\vec y_1 = \frac{1}{2}(\bar{\bar y}_1 + \bar{\bar y}_2) = e^{\gamma x}(\vec u\cos\beta x - \vec v\sin\beta x),\quad \vec y_2 = \frac{1}{2i}(\bar{\bar y}_1 - \bar{\bar y}_2) = e^{\gamma x}(\vec u\sin\beta x + \vec v\cos\beta x)$ Общее решение можно записать в виде:

$$\vec y_{oo} = \ldots + C_1\vec y_1 + C_2\vec y_2 + \ldots$$

Пример.

$$\begin{cases}\dot x = x - y\\ \dot y = x + y\end{cases},\quad A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$[A - \lambda E] = \begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = 0,\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 + i,\quad \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = 0,\quad \vec\alpha^1 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}, \vec\alpha^2 = \begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix},\quad \gamma = 1, \beta = 1,\quad \vec u = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \vec v = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec y^1 = e^t\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right],\quad \vec y^2 = e^t\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t\right],$$

$$\vec y_{oo} = C_1\vec y_1 + C_2\vec y_2 = e^t\begin{bmatrix}-C_1\sin t + C_2\cos t\\ C_1\cos t + C_2\sin t\end{bmatrix}$$

$$x = e^t(-C_1\sin t + C_2\cos t)$$
$$y = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

Билет 3

1**Формула Ньютона – Лейбница.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x)=f(x)$, т.е. $J(x)$ - первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x)=F(x)+C.$ Но $J(a)=0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a)+C=0 \Rightarrow C=-F(a)$. Тогда $J(b)=\int_a^b f(x)dx = F(b)+C = F(b)-F(a)$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Формула Ньютона – Лейбница - это одна из немногих формул - связок, связывающих различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона – Лейбница, то неопределенные интегралы не нашли бы приложения, а определенные интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом исследования процессов. Любой процесс описывается дифференциальными или интегральными уравнениями, а они решаются в интегралах.

Мы встречались с такими формулами или теоремами – связками. Например, теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой связывает бесконечно малые и пределы. Теорема Ферма и ее следствия – теоремы о средних значениях связывают дифференциальное исчисление и теорию экстремума. В дальнейшем мы тоже будем встречаться с теоремами – связками, они всегда играют фундаментальную роль, например теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса в векторном анализе.

2

Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Система дифференциальных уравнений – это система уравнений относительно независимой переменной x, функций этой переменной и их производных $y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)}$. Система может быть записана в *общем виде*

$$F_1(x,\ y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)})=0$$

....

$$F_n(x,\ y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)})=0$$

Порядок этой системы равен $m_1+\dots+m_n$.

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно разрешить систему уравнений относительно старших производных и записать ее в *каноническом виде:*

$$y_1^{(m_1)} = \varphi_1(x,\ y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1-1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n-1)})$$

....

$$y_n^{(m_n)} = \varphi_1(x,\ y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1-1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n-1)})$$

Задача Коши. *Найти решение системы* $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, *удовлетворяющее заданным начальным условиям* $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$.

Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ *непрерывна по совокупности переменных. Пусть существуют и непрерывны частные производные* $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}, \quad k=1,\dots n, \quad s=1,\dots n$ *Тогда существует и единственно решение задачи Коши.Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно независимой переменной, неизвестной функции и ее производных.* Дифференциальное уравнение *общего вида* выглядит следующим образом:

$F(x, y(x), y'(x), \dots y^n(x))=0$. Здесь x – независимая переменная, y(x) – неизвестная функция.*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.Дифференциальное уравнение n – ого порядка в общем виде записывается так: $F(x, y, y', \dots y^{(n)})=0$.Дифференциальное уравнение n – ого порядка в виде, разрешенном относительно старшей производной, выглядит так:

$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$.*Решением* дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y(x)$, обращающая его в тождество.*Общим решением* дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y=\varphi(x, C_1, \dots C_n)$ такая, что

Билет 41 **Задача о площади криволинейной трапеции.**Рассмотрим криволинейную трапецию, образованную отрезком $[a,b]$ оси OX (основание трапеции), прямыми $x=a,\ x=b$ (на них лежат боковые стороны трапеции) и графиком функции $y=f(x)$. Так как график функции – кривая линия, то такая трапеция называется криволинейноqй. Устроим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a=x_0, x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ отметим точку ς_i. Вычислим $f(\varsigma_i)$. Обозначим ΔS_i - площадь части криволинейной трапеции над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$, S – площадь всей криволинейной трапеции. Тогда

$$f(x_{i-1})\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < f(x_i)\Delta S_i, \quad \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса выполняется неравенство $m_i \le f(\varsigma_i) \le M_i$, где m_i, M_i - нижняя и верхняя грани функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$m_i\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < M_i\Delta S_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$$

Сумма $\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой,* суммы $\bar{s} = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$, $\bar{S} = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу.Будем измельчать разбиение так, чтобы $\max|\Delta x_i| \to 0$. *Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он называется определенным интегралом (по Риману) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a,b]$: $\lim_{\max|\Delta x_i|\to o} \sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$.Если существуют пределы нижней и верхней сумм Дарбу при неограниченном измельчении разбиения, то они называются нижним I_* и верхним I^* интегралами Дарбу.Теорема существования определенного интеграла.Если подынтегральная функция y=f(x) непрерывна или кусочно - непрерывна на отрезке [a;b], то определенный интеграл заданной функции существует. Теорема принимается без доказательств. **Критерий существования определенного интеграла**. Для того, чтобы существовал определенный интеграл по Риману $\int_a^b f(x)dx$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны нижний и верхний интегралы Дарбу.**Следствие.** *Если определенный интеграл существует как предел интегральных сумм, то он не зависит*

\- *от выбора разбиения, лишь бы* $[a,b]=\bigcup [x_{i-1}, x_i], S([x_{j-1}, x_j] \cap [x_{i-1}, x_i])=0$.*от выбора отмеченных точек* ς_i *на элементах разбиения от способа измельчения разбиения, лишь бы* $\max|\Delta x_i| \to 0$. Поэтому (*критерий Римана*) для интегрируемости по Риману ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое конкретное разбиение отрезка, на котором $|\bar{S} - \bar{s}| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.**Теорема**. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке. **Теорема.** Если функция кусочно непрерывна на отрезке (имеет на нем не более конечного числа разрывов первого рода), то она интегрируема на этом отрезке.Мы пришли к определенному интегралу от задачи о площади криволинейной трапеции. Если функция принимает на отрезке неотрицательные значения, то *определенный интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции.* В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла. Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»).**Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$).Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$. Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е.

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

2 Метод вариации произвольной постоянной.

Общее решение однородной системы можно записать в виде $\vec{y}_{oo}(x) = Y(x)\vec{C}$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы, $\vec{C}$ - вектор произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы в том же виде, варьируя вектор произвольных постоянных: $\vec{y}_{он}(x) = Y(x)\vec{C}(x)$. Вычисляем производную и подставляем в уравнение неоднородной системы:

$$\vec{y}'_{он}(x) = Y'(x)\vec{C}(x) + Y(x)\vec{C}'(x),$$

$$\vec{y}'_{он}(x) = Y'(x)\vec{C}(x) + Y(x)\vec{C}'(x) = A(x)Y(x)\vec{C}(x) + \vec{f}(x).$$

Так как фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению однородной системы, то $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Поэтому в предыдущем уравнении (как и всегда в методе вариации) сокращается пара слагаемых. Получаем уравнение

$Y(x)\vec{C}'(x) = \vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица не вырождена ($\det Y(x) = W(x) \ne 0$), то отсюда получаем уравнение для определения вектора $\vec{C}(x)$: $\vec{C}'(x) = Y^{-1}(x)\vec{f}(x)$.

Интегрируя, получаем $\vec{C}(x) = \int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx + \vec{C}_1$

Подставляя в $\vec{y}_{он}$, имеем

$$\vec{y}_{он}(x) = Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx + \vec{C}_1\right) = Y(x)\vec{C}_1 + Y(x)\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx.$$

Здесь в полном соответствии с теоремой о структуре общего решения неоднородной системы первое слагаемое представляет собой общее решение однородной системы, а второе слагаемое – частное решение неоднородной системы.

Билет 5 1 Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку (первого рода).

Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$. В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла.Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися*. Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если сходятся интегралы от функций $f(x)$, $g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x)$, $f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).**1 признак. Теорема.** Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \le g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, $b > a$: $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число). Поэтому $\int_a^b f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0,\ g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$$

$(K-\varepsilon)g(x) < f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x + x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.Пример. $\int_2^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения $\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

2

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка *общего вида* выглядит следующим образом:

$F(x,y(x),y'(x)) = 0$.Предположим, что дифференциальное уравнение удалось разрешить относительно производной: $y'(x) = f(x,y(x))$ или $y' = f(x,\ y)$.Функция $y(x)$ называется **решением дифференциального уравнения первого порядка,** если при подстановке этого решения в уравнение получаем тождество.

$y'(x) \equiv f(x,y(x))$.Функция $y = \varphi(x,c)$ называется **общим решением дифференциального уравнения первого порядка в области** $G(x,y)$, если

- при любой постоянной с функция $\varphi(x,c)$ является решением,
- для любого набора начальных условий $(x_0,y_0)\in G$ существует константа c_0 такая, что $y(x_0,c_0) = \varphi(x_0,c_0) = y_0$, т.е. существует решение из семейства $y = \varphi(x,c)$ (при $c = c_0$), удовлетворяющее этим начальным условиям.*Одной из основных задач является задача отыскания общего решения дифференциального уравнения*

Если зафиксировать постоянную в общем решении, мы получим **частное решение дифференциального уравнения первого порядка. Функция** $\Phi(x,y)$ **называется первым интегралом дифференциального уравнения, если она сохраняет свои значения на его решениях (**$\Phi(x,y)$**=C).**По сути дела, это – закон сохранения (функция $\Phi(x,y)$ сохраняет значения на решениях дифференциального уравнения).**Интегральной кривой** называется график решения дифференциального уравнения.

Одной из основных задач является также **задача Коши** - *задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям* $(x_0,y_0)\in G$ или интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0,y_0)\in G$.**Теорема существования решения задачи Коши.***Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $(x,y)\in G$, *тогда существует хотя бы одно решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям* $(x_0,y_0)\in G$ или *существует хотя бы одна интегральная кривая, проходящая через точку* $(x_0,y_0)\in G$.

Билет 6 1 **Интеграл с переменным верхним пределом.**Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь. Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x) = \int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет. **Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу** (основная теорема математического анализа)Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x\in[a,b]$. Тогда $J'(x) = f(x)$.Доказательство.

$$J'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{J(x+\Delta x) - J(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx\right) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} =$$

$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0} f(c) = f(x)$.При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)((x+\Delta x) - x),\ c\in(x,\ x+\Delta x)\right)$ и непрерывностью функции $(\lim_{\Delta x\to0} f(c) = f(x))$.

2Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде $\vec{y}' = A\vec{y}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n\end{pmatrix}$ (векторная форма записи)

или

$y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n$ (покоординатная форма записи).Будем искать решение системы в виде

………………………………

$y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n$

$\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{\alpha},\quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$.Подставляя $\vec{y}$ в уравнение системы, получаем

$\lambda e^{\lambda x}\vec{\alpha} = Ae^{\lambda x}\vec{\alpha},\quad e^{\lambda x}(A\vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha}) = 0,\qquad A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$. Получено уравнение для определения соответствующего *собственному значению* λ *собственного вектора* $\vec{\alpha}\ (\vec{\alpha} \ne 0)$ линейного оператора с матрицей А. Система уравнений $A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ или $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0$ имеет ненулевое решение только, когда определитель системы равен нулю, т.е. $|A - \lambda E| = 0$.Это – **характеристическое уравнение** системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В развернутом виде его можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n- го порядка относительно λ. Из основной теоремы высшей алгебры известно, что оно имеет ровно n корней. Часть корней может быть *действительными* корнями, часть - комплексными, но комплексные корни встречаются только *парами комплексно-сопряженных корней*. Это следует из действительности коэффициентов характеристического уравнения и теорем Виета.

3) Рассмотрим случай, когда все *собственные значения* $\lambda_{1,\dots}\lambda_n$ линейного оператора с матрицей А (или все характеристические числа матрицы А, что одно и то же) *действительны и различны.*

Из линейной алгебры известно, что действительным различным собственным значениям $\lambda_{1,\dots}\lambda_n$ соответствуют линейно независимые собственные векторы $\vec{\alpha}^1,\dots,\vec{\alpha}^n$, которые можно определить по собственным значениям из системы уравнений

$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ или $(A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0$.

В развернутом виде эти уравнения для $\lambda_k,\ \vec{\alpha}^k$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_k & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn}-\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^k \\ \dots \\ \alpha_n^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}.$$

Теперь решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами будут $\vec{y}^1 = e^{\lambda_1 x}\vec{\alpha}^1,\dots,\vec{y}^n = e^{\lambda_n x}\vec{\alpha}^n$.

Проверим, что решения являются линейно независимыми. Составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1^1 & \dots & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & \dots & y_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}\exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x) \ne 0$$

, так как векторы $\vec{\alpha}^1,\dots,\vec{\alpha}^n$ линейно независимы и определитель из координат этих векторов отличен от нуля. Так как определитель Вронского отличен от нуля, то полученные решения линейно независимы. Так как этих решений ровно n, то они составляют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение системы линейных однородных уравнений может быть записано в виде

$$\vec{y}_{oo} = C_1\vec{y}_1 + \dots + C_n\vec{y}_n = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x}\vec{\alpha}^k.$$

Билет 7

1

Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку (первого рода). Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a| = |b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла. Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися*. Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся. Если сходятся интегралы от функций* $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах. Пример.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1,$$ интеграл сходится.

Пример. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится. Пример. $\int_0^{+\infty}a^x dx$ сходится при $a<1$ и расходится при $a>1$. Проверьте это. Рассмотрим *интеграл Дирихле* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq1)} \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_1^b = \frac{1}{1-n}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{1-n}-1\right) = \begin{cases}+\infty, & n<1\\ \frac{1}{n-1}, & n>1\end{cases}.$$

При $n=1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty,$$ интеграл расходится.

Итак, несобственный интеграл Дирихле первого рода $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$ сходится при $n>1$, расходится при $n\le1$.

2.

Линейная зависимость и независимость.

Функции $g_1(x), g_2(x),\ldots g_n(x)$ называются *линейно независимыми*, если

$\lambda_1 g_1(x)+\ldots\lambda_n g_n(x)\equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ldots\lambda_n = 0$ (допустима только тривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю). В отличие от линейной независимости векторов здесь тождество линейной комбинации нулю, а не равенство. Это и понятно, так как равенство линейной комбинации нулю должно быть выполнено при любом значении аргумента. Функции $g_1(x), g_2(x),\ldots g_n(x)$ называются *линейно зависимыми*, если существует не нулевой набор констант (не все константы равны нулю) $\lambda_1,\ldots\lambda_n$, такой что $\lambda_1 g_1(x)+\ldots\lambda_n g_n(x)\equiv 0 \quad (\lambda_1^2+\ldots\lambda_n^2\neq 0)$ (существует нетривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю).

Теорема. *Для того чтобы функции были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо из них линейно выражалась через остальные (представлялась в виде их линейной комбинации).* Докажите эту теорему самостоятельно, она доказывается так же, как аналогичная ей теорема о линейной зависимости векторов.

Определитель Вронского. Определитель Вронского для функций $y_1, y_2,\ldots y_n$ вводится как определитель, столбцами которого являются производные этих функций от нулевого (сами функции) до n-1 го порядка.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n\\ y_1' & y_2'\ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если функции* $y_1(x), y_2(x),\ldots y_n(x)$ *линейно зависимы, то* $W(x)\equiv 0$ Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x),\ldots y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например, $y_1(x)\equiv\lambda_2 y_2(x)+\ldots\lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому $y_1^{(k)}(x)\equiv\lambda_2 y_2^{(k)}(x)+\ldots\lambda_n y_n^{(k)}(x),\quad k=1,2,3\ldots(n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.

Теорема. *Для того, чтобы решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W(x)\equiv 0$. Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы. Достаточность. Зафиксируем некоторую точку x_0. Так как $W(x_0)=0$, то столбцы определителя, вычисленные в этой точке, представляют собой линейно зависимые векторы. $\exists k,\ C_1,\ldots C_k\neq 0,\ldots C_n$, что выполнены соотношения

$$C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ky_k(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=0\quad C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ky_k'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=0$$

$$C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ky_k^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0.$$ Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения является его решением, то можно ввести решение вида $y(x)\equiv C_1y_1(x)+\ldots+C_ky_k(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ - линейную комбинацию решений с теми же коэффициентами. Заметим, что при $x=x_0$ это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, это следует из выписанной выше системы уравнений. Но тривиальное решение линейного однородного уравнения тоже удовлетворяет тем же нулевым начальным условиям. Поэтому из теоремы Коши следует, что введенное решение тождественно равно тривиальному, следовательно, $y(x)\equiv C_1y_1(x)+\ldots+C_ky_k(x)+\ldots+C_ny_n(x)\equiv 0,\quad C_k\neq 0$ поэтому решения линейно зависимы.

Билет 8

1

Свойства определенного интеграла.

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, б) однородности $\int\lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Доказательство. Пусть $c\in[a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка c была границей элемента разбиения $(c = x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\varsigma_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Будем измельчать разбиение, сохраняя точку c границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i|\to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int_c^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества). Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет

$\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)(-\Delta x_i) = -\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

4. $\int_a^b c\,dx = b-a$.

$$\int_a^b c dx = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n) = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+\ldots x_n) = c(x_n-x_0) = c(b-a).$$

5. Если на отрезке $f(x)\ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

Так как $f(x)\ge 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\ge 0,\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\ge 0$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

6. Если на отрезке $f(x)\ge g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Так как $f(x)\ge g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\ge g(\varsigma_i),\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\ge\sum_{i=1}^n g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

$$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\Rightarrow-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

8. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

2.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n –го порядка с постоянными коэффициентами. $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny = f(x)$.

Теорема о наложении частных решений. Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x)+y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)+f_2(x)$. Доказательство. Подставим $y_1(x)+y_2(x)$ в неоднородное уравнение: $(y_1(x)+y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x)+y_2(x)) =$

$$(y_1(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x))+$$
$$(y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_2(x)) = f_1(x)+f_2(x).$$

По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x) = y_{оо}(x)+y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

Метод подбора формы частного решения.

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$$y''+py'+qy = f(x)$$

1) *Пусть правая часть представляет собой квазиполином* $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

Ищем частное решение в виде $y_ч(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. Здесь $P_n(x)$ - полином n-ой степени, $Q(x)$ - полином, степень которого надо определить. $y_ч'(x) = Q'(x)e^{\alpha x}+Q(x)\alpha e^{\alpha x}$,

$$y_ч''(x) = Q''(x)e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q(x)\alpha^2e^{\alpha x}.$$

$$y''+py'+qy = e^{\alpha x}\left(Q''(x)+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q(x)\right) = e^{\alpha x}P_n(x)$$

а) Если α - не корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$, и многочлен $Q(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n.

б) Если α - простой корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q = 0,\quad 2\alpha+p\neq 0$. В этом случае многочлен $Q'(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена надо выбирать равной n+1. Однако при дифференцировании $Q(x)$ производная свободного члена (постоянной) равна нулю, *поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x)=xQ_n(x)$.

в) Если α - кратный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0,\quad 2\alpha+p=0$. В этом случае многочлен $Q''(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена $Q(x)$ надо выбирать равной n+2. Однако при двукратном дифференцировании $Q(x)$ производная не только свободного члена равна нулю, но и производная линейного члена равна нулю. *Поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x)=x^2Q_n(x)$.

Пример. $y''-y=x+e^x$ $k^2-1=0$, $k_1=1, k_2=-1,\quad y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$f_1(x)=x,\quad (P_n(x)=x, \alpha=0)$, $\alpha=0$ - не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в том же виде, что и правая часть, $y_1=Ax+B,\quad y_1'=A,\quad y_1''=0$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x\cdot -Ax-B=x\Rightarrow B=0,\ A+B=1\quad y_1(x)=-x$.

$f_2(x)=e^x,\quad (P_n(x)=1,\quad \alpha=1)$. Корень $\alpha=1$ содержится один раз среди корней характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $y_2=Dxe^x,\quad y_2'=De^x(1+x),\quad y_2''=De^x(2+x)$.

Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=e^x$. $De^x(2+x-x)=e^x\Rightarrow D=\frac{1}{2}$

$y_2(x)=\frac{1}{2}xe^x$. Суммируя оба частных решения, получаем частное решение неоднородного уравнения для исходной правой части:

$y_{чн}=-x+\frac{1}{2}xe^x$. Общее решение неоднородного уравнения будет

$y_{он}=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{2}xe^x$.

2) Правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x)$ *Если* $\alpha\pm i\beta$ *не корни характеристического уравнения,* то частное решение ищется в том виде, в котором задана правая часть:

$y_ч=e^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$, где $U_m(x), V_m(x)$ - полиномы степени m – максимальной из степеней полиномов $M(x), N(x)$. б) Если $\alpha\pm i\beta$ - *пара корней характеристического уравнения*, то частное решение ищется в виде

$y_ч=xe^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$. Пример. $y''+y=\sin x$

$k^2+1=0,\quad k_{1,2}=\pm i,\quad y_{oo}=C_1\cos x+C_2\sin x$

$f(x)=\sin x,\quad (\alpha=0, \beta=1, M(x), N(x)\quad степени\ 0)$

Пара корней $\alpha\pm i\beta=\pm i$ - пара корней характеристического уравнения.

$y_ч=x(A\cos x+B\sin x)$ $y_ч'=A\cos x+B\sin x-Ax\sin x+Bx\cos x,$

$y_ч''=-2A\sin x+2B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x$

Подставляем в неоднородное уравнение, получаем

$-2A\sin x+2B\cos x=\sin x$, откуда $B=0,\ A=-\frac{1}{2}$ $y_ч=-\frac{1}{2}x\cos x$,

$y_{он}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

Рассмотрим *неоднородное уравнение n-го порядка*, покажем, как в нем применять метод подбора формы частного решения.Здесь ситуация сложнее, так как в характеристическом уравнении n корней, действительные корни и комплексно сопряженные, простые и кратные корни.

1) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$

a) Если α *не является корнем характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч=e^{\alpha x}Q_n(x)$.

b) Если α - *корень характеристического уравнения r-ой кратности*, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч=x^re^{\alpha x}Q_n(x)$.

2) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$f(x)=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x)$

a) Если пара комплексно сопряженных корней *не является корнями характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть

$y_ч=e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x+V_m\sin\beta x)$, где степень m многочленов – максимальная из степеней многочленов $M(x), N(x)$.

b) Если пара комплексно сопряженных корней *является корнями характеристического уравнения r-ой кратности,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$y_ч=x^re^{\alpha x}(U_m\cos\beta x+V_m\sin\beta x)$.

Пример. $y^{(5)}+y''=x+\sin x$ $k^5+k^2=k^2(k+1)(k^2-k+1)=0,\quad k_{1,2}=0, k_3=-1, k_{4,5}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. $f_1(x)=x, (\alpha=0, P_n(x)=x, n=1)$.

$\alpha=0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 2 раза,* поэтому $y_{ч1}=x^2(Ax+B)$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x$, получим $6Ax+2B=x\Rightarrow A=\frac{1}{6}, B=0,\quad y_{ч1}=\frac{1}{6}x^3.$

$f_2(x)=\sin x,\quad (\alpha=0, \beta=1,\quad \alpha\pm i\beta=\pm i)$. Корни $\pm i$ не содержатся в корнях характеристического уравнения, поэтому $y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=\sin x$, получим $(E-D)\cos x-(E+D)\sin x=\sin x,\Rightarrow E-D=0, E+D=1\Rightarrow E=D=\frac{1}{2}$.

$y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. $y_{ч,2}=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. $y_ч=\frac{1}{6}x^{3}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

Пример. $y^{(5)}+y'''=x+\sin x$ $k^5+k^3=k^3(k+i)(k-i)=0,\Rightarrow k_{1,2,3}=0, k_{4,5}=\pm i$

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x$.

$f_1(x)=x, (\alpha=0, P_n(x)=x, n=1)$ $\alpha=0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 3 раза,* поэтому $y_{ч1}=x^3(Ax+B)$.

$f_2(x)=\sin x,\quad (\alpha=0, \beta=1,\quad \alpha\pm i\beta=\pm i)$. Корни $\pm i$ (пара корней) содержатся в корнях характеристического уравнения один раз, поэтому $y_{ч,2}=x(D\cos x+E\sin x)$. Неопределенные коэффициенты определяются, как и выше, подстановкой в уравнение и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x, при sinx, cosx, xsinx, xcosx

Билет 9

1

Свойства определенного интеграла.

1. Свойства линейности
2. а) суперпозиции $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$,

б) однородности $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

3. Свойство аддитивности (по множеству)

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ Доказательство. Пусть $c\in[a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка с была границей элемента разбиения $(c=x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^k f(\varsigma_i)\Delta x_i+\sum_{i=k+1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Будем измельчать разбиение, сохраняя точку с границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i|\to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int_c^b f(x)dx$.

4. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества).

Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет

$\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)(-\Delta x_i)=-\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

5. $\int_a^a f(x)dx=0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

6. $\int_a^b c\,dx=b-a$.

$\int_a^b cdx=c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(\Delta x_1+\Delta x_2+...+\Delta x_n)=c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+...x_n)=c(x_n-x_0)=c(b-a)$.

7. Если на отрезке $f(x)\geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Так как $f(x)\geq 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\geq 0,\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\geq 0$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

8. Если на отрезке $f(x)\geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

Так как $f(x)\geq g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\geq g(\varsigma_i),\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\geq\sum_{i=1}^n g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

9. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\Rightarrow-\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|dx\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$.

10. $\int_a^b f(z)dz=\int_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

2.

Теорема. Существует система из n линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{k1}...\vec{\alpha}^{kq_k}$, удовлетворяющих соотношениям

$$A\vec{\alpha}^{k1}=\lambda_k\vec{\alpha}^{k1}$$
$$A\vec{\alpha}^{k2}=\lambda_k\vec{\alpha}^{k2}+\vec{\alpha}^{k1}$$
$$.................................$$
$$A\vec{\alpha}^{kq_k}=\lambda_k\vec{\alpha}^{kq_k}+\vec{\alpha}^{kq_{k-1}}$$

Векторы $\vec{\alpha}^{k2}...\vec{\alpha}^{kq_k}$ - присоединенные векторы, порожденные собственным вектором $\vec{\alpha}^{k1}$, q_k - кратность корня λ_k, сумма q_k для различных корней λ_k равна n.

Теорема. Каждому корню λ_k соответствует q_k решений вида

$$\vec{y}^{k1}=\vec{\alpha}^{k1}e^{\lambda_k x}$$
$$\vec{y}^{k2}=(\vec{\alpha}^{k2}+x\vec{\alpha}^{k1})e^{\lambda_k x}$$
$$.........................$$
$$\vec{y}^{kq_k}=(\vec{\alpha}^{kq_k}+x\vec{\alpha}^{kq_k-1}+...+\frac{x^{q_k-1}}{(q_k-1)!}\vec{\alpha}^{k1})e^{\lambda_k x}$$

Для каждого кратного корня надо найти присоединенные векторы по первой теореме и построить решения по второй теореме.

Если порядок системы мал, то можно действовать проще.

Пусть матрица $(A-\lambda E)$ для корня, кратности r будет иметь ранг n-r.

Это означает, что для данного корня можно подобрать r линейно независимых собственных векторов и, соответственно, r линейно независимых решений вида $\vec{y}=e^{\lambda x}\vec{\alpha}$ в фундаментальной системе решений.

Билет 10

1

Интеграл с переменным верхним пределом. Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.

Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x)=\int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет. **Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу** (основная теорема математического анализа)Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x \in [a,b]$. Тогда $J'(x)=f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x+\Delta x)-J(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx=f(c)((x+\Delta x)-x),\ c\in(x,\,x+\Delta x)\right)$ и непрерывностью функции $\left(\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x)\right)$.

2.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n –го порядка с постоянными коэффициентами. $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$.

Теорема о наложении частных решений. Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x)+y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)+f_2(x)$. Доказательство. Подставим $y_1(x)+y_2(x)$ в неоднородное уравнение:

$$(y_1(x)+y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x)+y_2(x))=$$
$$(y_1(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x))+$$
$$(y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_2(x))=f_1(x)+f_2(x).$$

По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x)=y_{оо}(x)+y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

Метод подбора формы частного решения.

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$y''+py'+qy=f(x)$ *Пусть правая часть представляет собой квазиполином* $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$. Ищем частное решение в виде $y_ч(x)=Q(x)e^{\alpha x}$. Здесь $P_n(x)$ - полином n-ой степени, $Q(x)$ - полином, степень которого надо определить.

$$y_ч'(x)=Q'(x)e^{\alpha x}+Q(x)\alpha e^{\alpha x},\quad y_ч''(x)=Q''(x)e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q(x)\alpha^2e^{\alpha x}.$$
$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}\left(Q''(x)+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q(x)\right)=e^{\alpha x}P_n(x)$$

а) Если α - не корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$, и многочлен $Q(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n.

б) Если α - простой корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0,\quad 2\alpha+p\neq 0$. В этом случае многочлен $Q'(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена надо выбирать равной n+1. Однако при дифференцировании $Q(x)$ производная свободного члена (постоянной) равна нулю, *поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x)=xQ_n(x)$.

в) Если α - кратный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0,\quad 2\alpha+p=0$. В этом случае многочлен $Q''(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена $Q(x)$ надо выбирать равной n+2. Однако при двукратном дифференцировании $Q(x)$ производная не только свободного члена равна нулю, но и производная линейного члена равна нулю. *Поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x)=x^2Q_n(x)$.

Пример. $y''-y=x+e^x$ $\quad k^2-1=0$, $\quad k_1=1,k_2=-1,\quad y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$f_1(x)=x,\quad (P_n(x)=x,\alpha=0)$. $\alpha=0$ - не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в том же виде, что и правая часть, $y_1=Ax+B,\quad y_1'=A,\quad y_1''=0$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x$. $\quad -Ax-B=x\Rightarrow B=0,\ A+B=1\quad y_1(x)=-x$.

$f_2(x)=e^x,\quad (P_n(x)=1,\quad \alpha=1)$. Корень $\alpha=1$ содержится один раз среди корней характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $y_2=Dxe^x,\quad y_2'=De^x(1+x),\quad y_2''=De^x(2+x)$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=e^x$. $De^x(2+x-x)=e^x\Rightarrow D=\frac{1}{2}$ $\ y_2(x)=\frac{1}{2}xe^x$. Суммируя оба частных решения, получаем частное решение неоднородного уравнения для исходной правой части: $y_{чн}=-x+\frac{1}{2}xe^x$.

Общее решение неоднородного уравнения будет $y_{он}=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{2}xe^x$.

2) Правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x)$

а) *Если* $\alpha\pm i\beta$ *не корни характеристического уравнения,* то частное решение ищется в том виде, в котором задана правая часть:

$y_ч=e^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$,

где $U_m(x),V_m(x)$ - полиномы степени m – максимальной из степеней полиномов $M(x),N(x)$.

б) Если $\alpha\pm i\beta$ *- пара корней характеристического уравнения*, то частное решение ищется в виде

$y_ч=xe^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$.

Пример. $y''+y=\sin x$ $\quad k^2+1=0,\quad k_{1,2}=\pm i,\quad y_{oo}=C_1\cos x+C_2\sin x$

$f(x)=\sin x,\quad (\alpha=0,\beta=1,M(x),N(x)\quad \textit{степени}\ 0)$ Пара корней $\alpha\pm i\beta=\pm i$ - пара корней характеристического уравнения. $y_ч=x(A\cos x+B\sin x)$,

$$y_ч'=A\cos x+B\sin x-Ax\sin x+Bx\cos x,$$
$$y_ч''=-2A\sin x+2B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x$$

Подставляем в неоднородное уравнение, получаем $-2A\sin x+2B\cos x=\sin x$, откуда $B=0,\ A=-\frac{1}{2}$

$y_ч=-\frac{1}{2}x\cos x$, $\quad y_{он}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ Рассмотрим *неоднородное уравнение n-го порядка*, покажем, как в нем применять метод подбора формы частного решения. Здесь ситуация сложнее, так как в характеристическом уравнении n корней, действительные корни и комплексно сопряженные, простые и кратные корни.

3) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$

c) Если α *не является корнем характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч=e^{\alpha x}Q_n(x)$.

d) Если α *- корень характеристического уравнения r-ой кратности*, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч=x^re^{\alpha x}Q_n(x)$.

4) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$f(x)=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x)$

а) Если пара комплексно сопряженных корней *не является корнями характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть

$y_ч=e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x+V_m\sin\beta x)$, где степень m многочленов – максимальная из степеней многочленов $M(x),N(x)$.

c) Если пара комплексно сопряженных корней *является корнями характеристического уравнения r-ой кратности,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$y_ч=x^re^{\alpha x}(U_m\cos\beta x+V_m\sin\beta x)$. Пример. $\quad y^{(5)}+y''=x+\sin x$

$k^5+k^2=k^2(k+1)(k^2-k+1)=0,\quad k_{1,2}=0,k_3=-1,k_{4,5}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. $\quad f_1(x)=x,(\alpha=0,\ P_n(x)=x,\ n=1)$.

$\alpha=0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 2 раза,* поэтому $y_{ч1}=x^2(Ax+B)$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x$, получим

$6Ax+2B=x\Rightarrow A=\frac{1}{6},\ B=0,\quad y_{ч1}=\frac{1}{6}x^3.$

$f_2(x)=\sin x,\quad (\alpha=0,\beta=1,\quad \alpha\pm i\beta=\pm i)$. Корни $\pm i$ не содержатся в корнях характеристического уравнения, поэтому $y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=\sin x$, получим

$(E-D)\cos x-(E+D)\sin x=\sin x,\Rightarrow E-D=0,E+D=1\Rightarrow E=D=\frac{1}{2}$.

$y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. $\quad y_{ч,2}=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. $\quad y_ч=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. Пример.

$y^{(5)}+y'''=x+\sin x\qquad k^5+k^3=k^3(k+i)(k-i)=0,\Rightarrow k_{1,2,3}=0,\ k_{4,5}=\pm i$

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x$. $\quad f_1(x)=x,(\alpha=0,\ P_n(x)=x,\ n=1)\quad \alpha=0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 3 раза,* поэтому $y_{ч1}=x^3(Ax+B)$.

$f_2(x)=\sin x,\quad (\alpha=0,\beta=1,\quad \alpha\pm i\beta=\pm i)$. Корни $\pm i$ (пара корней) содержатся в корнях характеристического уравнения один раз, поэтому $y_{ч,2}=x(D\cos x+E\sin x)$. Неопределенные коэффициенты определяются, как и выше, подстановкой в уравнение и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x, при sinx, cosx, xsinx, xcosx

Билет 11

1

Формула Ньютона – Лейбница. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x)=f(x)$, т.е. $J(x)$ - первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x)=F(x)+C$. Но $J(a)=0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a)+C=0 \Rightarrow C=-F(a)$. Тогда $J(b)=\int_a^b f(x)dx = F(b)+C=F(b)-F(a)$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ Формула Ньютона – Лейбница - это одна из немногих формул - связок, связывающих различные разделы математики воедино.

2.

Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы. $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$.

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ является общим решениям (удовлетворяет пунктам определения общего решения)

1. $y_{oo}(x)$ - решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.

2. Зададим произвольные начальные условия $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1,\ldots C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

$$y_{oo}(x_0)=C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0.$$

$$y_{oo}'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_0'.$$

$$y_{oo}''(x_0)=C_1y_1''(x_0)+\ldots+C_ny_n''(x_0)=y_0''.$$

....

$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1,\ldots C_n$. Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1,\ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом. Следовательно, $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ - общее решение. *Замечание.* Определитель Вронского (как всякий определитель) представляет собой ориентированный n – мерный объем, натянутый на векторы решений фундаментальной системы решений.

Формула Остроградского – Лиувилля. Рассмотрим линейное однородное уравнение $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$. Определитель Вронского можно вычислить по *формуле Остроградского – Лиувилля*

$W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Вывод формулы Остроградского – Лиувилля. Известна формула для производной определителя

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \ldots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n1}' & a_{n2}' & a_{nn}' \end{vmatrix}.$$

Вычислим

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_1 & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_n \end{vmatrix} =$$

$$0+\ldots+0+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_0}W(x).\quad \frac{dW(x)}{W(x)}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}.\quad W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

.

Замечание. В формуле Остроградского – Лиувилля участвуют только коэффициенты при двух старших производных.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка. $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x), y_2(x)$ - два частных решения $a_0(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=0$, $a_0(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=0$. Умножим первое уравнение на y2, а второе на y1 и вычтем первое уравнение из второго.

$$a_0(x)\left(y_1y_2''-y_2y_1''\right)+a_1(x)\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)=0.$$

Так как $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$, то $W'(x)=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''$ = $y_1y_2''-y_2y_1''$. Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x)+a_1(x)W(x)=0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

Формула для построения второго частного решения по известному (построение фундаментальной системы).

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$ Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x)\neq 0$

$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Отсюда $\frac{y_2}{y_1}=\int C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx+C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем C=1, C 1=0, получим $y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx$.

Билет 12

1

Свойства определенного интеграла.

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

б) однородности $\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ Доказательство. Пусть $c\in[a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка с была границей элемента разбиения $(c=x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^k f(\varsigma_i)\Delta x_i+\sum_{i=k+1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Будем измельчать разбиение, сохраняя точку с границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i|\to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int_c^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества). Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет

$\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)(-\Delta x_i)=-\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^a f(x)dx=0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

5. $\int_a^b c\,dx=b-a$.

$$\int_a^b cdx=c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n)=c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+\ldots x_n)=$$

$$c(x_n-x_0)=c(b-a).$$

6. Если на отрезке $f(x)\geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. Так как $f(x)\geq 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\geq 0,\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\geq 0$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

7. Если на отрезке $f(x)\geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$. Так как $f(x)\geq g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i)\geq g(\varsigma_i),\Rightarrow\sum_{i=1}^n f(\varsigma_i)\Delta x_i\geq\sum_{i=1}^n g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\Rightarrow-\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|dx\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx.$$

9. $\int_a^b f(z)dz=\int_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

2

Метод вариации произвольной постоянной.

Общее решение однородной системы можно записать в виде $\vec{y}_{oo}(x)=Y(x)\vec{C}$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы, $\vec{C}$ - вектор произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы в том же виде, варьируя вектор произвольных постоянных: $\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\vec{C}(x)$. Вычисляем производную и подставляем в уравнение неоднородной системы: $\vec{y}_{он}'(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)$.

$\vec{y}_{он}'(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)=A(x)Y(x)\vec{C}(x)+\vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению однородной системы, то $Y'(x)=A(x)Y(x)$. Поэтому в предыдущем уравнении (как и всегда в методе вариации) сокращается пара слагаемых. Получаем уравнение $Y(x)\vec{C}'(x)=\vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица не выпрождена ($\det Y(x)=W(x)\neq 0$), то отсюда получаем уравнение для определения вектора $\vec{C}(x)$:

$\vec{C}'(x)=Y^{-1}(x)\vec{f}(x)$. Интегрируя, получаем $\vec{C}(x)=\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1$ (здесь предполагается, что при вычислении интеграла вектор констант не добавляется, он уже добавлен в виде вектора $\vec{C}_1$).Подставляя в $\vec{y}_{он}$, имеем

$\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1\right)=Y(x)\vec{C}_1+Y(x)\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx$ Здесь в полном соответствии с теоремой о структуре общего решения неоднородной системы первое слагаемое представляет собой общее решение однородной системы, а второе слагаемое – частное решение неоднородной системы.

Билет 13

1

Свойства определенного интеграла.

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

б) однородности $\int \lambda\, f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Доказательство. Пусть $c \in [a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка с была границей элемента разбиения $(c = x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\varsigma_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$.

Будем измельчать разбиение, сохраняя точку с границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i| \to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int\limits_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int\limits_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int\limits_c^b f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества). Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)(-\Delta x_i) = -\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

5. $\int\limits_a^b c\, dx = b - a$.

$$\int\limits_a^b c dx = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots x_n) =$$
$$c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

6. Если на отрезке $f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$. Так как $f(x) \ge 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \ge 0, \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \ge 0$. Переходя к пределу, получим $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

7. Если на отрезке $f(x) \ge g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$. Так как $f(x) \ge g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \ge g(\varsigma_i), \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{n} g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Rightarrow -\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

9. $\int\limits_a^b f(z)dz = \int\limits_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

Теорема об оценке определенного интеграла. Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m \le f(x) \le M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2}dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \le e^{-x^2} \le 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

2.
Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы. $y_{oo}(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$.

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $y_{oo}(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ является общим решениям (удовлетворяет пунктам определения общего решения)

3. $y_{oo}(x)$ - решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.

4. Зададим произвольные начальные условия $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1, \ldots C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

$$y_{oo}(x_0) = C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0.$$
$$y_{oo}'(x_0) = C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = y_0'.$$
$$y_{oo}''(x_0) = C_1y_1''(x_0) + \ldots + C_ny_n''(x_0) = y_0''.$$
....
$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0) = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1, \ldots C_n$. Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x), \ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1, \ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом.Следовательно, $y_{oo}(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ - общее решение.

Формула Остроградского – Лиувилля. Рассмотрим линейное однородное уравнение $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$.

Определитель Вронского можно вычислить по *формуле Остроградского – Лиувилля*

$W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Вывод формулы Остроградского – Лиувилля.

Известна формула для производной определителя

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \ldots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычислим

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} - \ldots - \frac{a_n}{a_0}y_1 & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)} - \ldots - \frac{a_n}{a_0}y_n \end{vmatrix} =$$

$$0+\ldots+0+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_0}W(x).$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)},\quad W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Замечание. В формуле Остроградского – Лиувилля участвуют только коэффициенты при двух старших производных.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка. $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x), y_2(x)$ - два частных решения $a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$, $a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$. Умножим первое уравнение на y_2, а второе на y_1 и вычтем первое уравнение из второго. $a_0(x)\left(y_1y_2'' - y_2y_1''\right) + a_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = 0$.

Так как $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$, то $W'(x) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$. Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

Формула для построения второго частного решения по известному

(построение фундаментальной системы). $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$.

Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x) \ne 0$ $\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$.

Отсюда $\frac{y_2}{y_1} = \int C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx + C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем C=1, C $_1$=0, получим $y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx$.

Билет 14 1**Несобственные интегралы от разрывной функции по конечному промежутку (второго рода).**

Функция может терпеть разрыв на левом конце отрезка [a,b], на правом конце или в некоторой внутренней точке с отрезка.Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] за исключением точки x= a, тогда несобственным интегралом второго рода от функции f(x) по отрезку [a,b] $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] за исключением точки x= b, тогда несобственным интегралом второго рода от функции f(x) по отрезку [a,b] $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] за исключением точки x=(a,b), тогда несобственным интегралом второго рода от функции f(x) по отрезку [a,b] называется $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (интегралы в правой части определены выше).Если указанные пределы существуют и конечны, то интегралы называются *сходящимися*, если предел бесконечен или не существует вообще, то интеграл *расходится. Если сходятся интегралы от функций* $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{1}\frac{1}{x^2}dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\delta}^{1}\right)$$

Интеграл расходится, так как пределы в правой части равенства бесконечны.Заметим, если здесь формально применить формулу Ньютона-Лейбница (она неприменима, т.к. функция разрывна), получим ответ 2. Еще раз убеждаемся, что теоремы следует применять, внимательно проверяя условия их применимости.Рассмотрим *несобственный интеграл Дирихле второго рода* $\int_0^b \frac{1}{x^n}dx$.

$$\int_0^b \frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq 1)} \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_{\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-n}\left(b^{1-n} - \lim_{\varepsilon\to +0}\varepsilon^{1-n}\right) = \begin{cases} -\infty, & n>1 \\ \dfrac{b^{1-n}}{1-n}, & n<1 \end{cases}.$$

При n=1 $\int_0^b \frac{1}{x^n}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln b - \ln\varepsilon) = +\infty$, интеграл расходится. Итак, *несобственный интеграл Дирихле второго рода* $\int_0^b \frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n<1$, *расходится при* $n \geq 1$. *Замечание.* Интегралы Дирихле первого и второго рода расходятся при n=1. При n>1 интеграл Дирихле первого рода сходится, а интеграл Дирихле второго рода расходится. При n<1 интеграл Дирихле первого рода расходится, а интеграл Дирихле второго рода сходится.Признаки сравнения интегралов остаются верными и для интегралов второго рода. Эталонами сравнения служат обычно интегралы Дирихле и интегралы от показательной функции.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов). **1 признак. Теорема.** Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \leq g(x)$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a,b], b>a$: $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число). Поэтому $\int_a^b f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = J \leq I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*. Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана. Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.**2 признак сравнения. Теорема.** Пусть при x>a $f(x)>0, g(x)>0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x>\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K+\varepsilon \Rightarrow$$

$(K-\varepsilon)g(x) < f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$.Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

2 **Теоремы о свойствах решений.**

1) *сумма или разность решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения,*
2) *разность решений неоднородного уравнения есть решение однородного уравнения,*
3) *сумма решений однородного и неоднородного уравнений есть решение неоднородного уравнения.*

Докажем эти теоремы.

1) $L(y_{o1}+y_{o2}) = Ly_{o1} + Ly_{o2} = 0$

2) $L(y_{н1}-y_{н2}) = Ly_{н1} - Ly_{н2} = f(x) - f(x) = 0$

3) $L(y_o + y_н) = Ly_o + Ly_н = 0 + f(x) = f(x)$.

Билет 15

1

Интеграл с переменным верхним пределом.

Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x) = \int_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа)Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x \in [a,b]$. Тогда $J'(x) = f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x+\Delta x) - J(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)((x+\Delta x) - x),\ c\in(x, x+\Delta x)\right)$ и непрерывностью функции $\left(\lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)\right)$.

2.

В случае *кратного действительного корня* $k_1 = k_2 = k$ одно из решений можно выбрать в форме $y_1 = e^{kx}$. Второе решение будем выбирать в виде $y_2 = u(x)e^{kx}$. Подставим в дифференциальное уравнение, чтобы определить $u(x)$.

$$y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx} = e^{kx}(u' + ku),$$

$$y_2'' = e^{kx}(u'' + ku' + ku' + k^2u) = e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u),$$

$$e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u + p(u' + ku) + qu) = e^{kx}(u'' + u'(p+2k) + u(k^2 + pk + q)) = 0$$

Так как k - корень характеристического уравнения, то $k^2 + pk + q = 0$. Так как k еще и кратный корень, то по теореме Виета $k_1 + k_2 = k + k = 2k = -p$. Поэтому $p + 2k = 0$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'' = 0$, отсюда $u(x) = ax + b$. Выберем $a = 1, b = 0$, получим $u(x) = x$. Следовательно, $y_2 = u(x)e^{kx} = xe^{kx}$. Решения y_1, y_2 линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq m$. Поэтому *общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратного корня можно записать по формуле*

$$y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2x).$$

Билет 16

1 **Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку (первого рода).** Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла. Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися*. Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся.*

Если сходятся интегралы от функций $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1$, интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится.

Признаки сравнения несобственных интегралов (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

1 признак. Теорема. Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \le g(x)$.

Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, $b > a$, $0 \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{b} g(x)dx \le \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число). Поэтому $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = J \le I,$$

т.е. интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.* Пусть теперь $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

2 признак сравнения. Теорема. Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K+\varepsilon \Rightarrow$$

$$(K-\varepsilon)g(x) < f(x) < (K+\varepsilon)g(x).$$

Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Пусть интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана. Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции. Пример. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+\cos^3 x + x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения

$\int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x}dx$.

2.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка** $y'' + py' + qy = 0$. Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Подставляя y в дифференциальное уравнение, получим $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$ Так как $e^{kx} \ne 0,$ то имеем $k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение*. Решая его, получим корни $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Возможно три случая:

1) k_1, k_2 *действительны и различны,*

2) $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

3) $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *действительных, различных корней* получаем решения

$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$.

Для того, чтобы доказать, что решения составляют фундаментальную систему решений и *общее решение записывается в виде* $y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, надо проверить линейную независимость y_1, y_2. Составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_1 - k_2)e^{(k_1+k_2)x} \ne 0,$$

так как $k_1 \ne k_2$. Заметим, что для уравнения второго порядка проверять линейную независимость можно проще. Надо показать, что $\frac{y_1}{y_2} \ne m - const$. Тогда столбцы определителя Вронского линейно независимы и $W \ne 0$. В нашем случае $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ при $k_1 \ne k_2$. В случае *комплексно сопряженных корней* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, применяя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z,$ получим комплексно сопряженные решения $\widehat{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\quad \widehat{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения тоже является решением, то $y_1 = \frac{1}{2}(\widehat{y}_1 + \widehat{y}_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями. Они линейно независимы, так как $\frac{y_1}{y_2} = ctg\beta x \ne 0$. *Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней можно записать по формуле* $y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

В случае *кратного действительного корня* $k_1 = k_2 = k$ одно из решений можно выбрать в форме $y_1 = e^{kx}$. Второе решение будем выбирать в виде $y_2 = u(x)e^{kx}$. Подставим в дифференциальное уравнение, чтобы определить $u(x)$. $y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx} = e^{kx}(u' + ku),\quad y_2'' = e^{kx}(u'' + ku' + ku' + k^2u) = e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u)$, $e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2u + p(u' + ku) + qu) = e^{kx}(u'' + u'(p + 2k) + u(k^2 + pk + q)) = 0$ Так как k - корень характеристического уравнения, то $k^2 + pk + q = 0$. Так как k еще и кратный корень, то по теореме Виета $k_1 + k_2 = k + k = 2k = -p$. Поэтому $p + 2k = 0$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'' = 0$, отсюда $u(x) = ax + b$. Выберем $a = 1, b = 0$, получим $u(x) = x$. Следовательно, $y_2 = u(x)e^{kx} = xe^{kx}$. Решения y_1, y_2 линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \ne m$. Поэтому *общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратного корня можно записать по формуле* $y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$.

Примеры. 1) $y'' - y = 0,\ k^2 - 1 = 0,\ k_{1,2} = \pm 1,\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\quad y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2) $y'' - 5y' + 6y = 0,\quad k^2 - 5k + 6 = 0,\ k_1 = 2,\ k_2 = 3,\quad y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Билет 17

1

. Фигура ограничена графиком функции, заданной в полярной системе координат.

Пусть график функции задан в полярной системе координат и мы хотим вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ и графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат. Здесь можно использовать метод интегральных сумм, вычисляя площадь криволинейного сектора как предел суммы площадей элементарных секторов, в которых график функции заменен дугой окружности $S = \lim_{\max(\Delta\varphi_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2(\varsigma_i)}{2}\Delta\varphi_i$. Можно использовать и метод дифференциалов: $\Delta S \approx dS = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi,\quad S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$. Рассуждать можно так. Заменяя элементарный криволинейный сектор, соответствующий центральному углу $d\varphi$ круговым сектором, имеем пропорцию $2\pi \Leftrightarrow \pi\rho^2$. $d\varphi \Leftrightarrow dS.$ Отсюда $dS = \frac{\pi\rho^2 d\varphi}{2\pi} = \frac{\rho^2}{2}d\varphi$. Интегрируя и используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем $S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$. Пример. Вычислим площадь круга (проверим формулу). Полагаем $\rho \equiv R$. Площадь круга равна $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{1}{2}R^2 2\pi = \pi R^2$. Пример. Вычислим площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

$$S = 2\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int\limits_{0}^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\frac{3}{2}\pi + 0 + 0 = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Билет 18**1Формула Ньютона – Лейбница.**Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x) = f(x)$, т.е. $J(x)$ - первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x) = F(x) + C$. Но $J(a) = 0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$. Тогда $J(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n –го порядка с постоянными коэффициентами.
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$. **Теорема о наложении частных решений.** Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$. Доказательство. Подставим $y_1(x) + y_2(x)$ в неоднородное уравнение:

$$(y_1(x)+y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1(x)+y_2(x)) =$$
$$(y_1(x))^{(n)} + a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1(x)) +$$
$$(y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_2(x)) = f_1(x) + f_2(x).$$

По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x) = y_{оо}(x) + y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

Метод подбора формы частного решения.*Рассмотрим сначала уравнение второго порядка* $y'' + py' + qy = f(x)$

2) *Пусть правая часть представляет собой квазиполином* $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$. Ищем частное решение в виде $y_ч(x) = Q(x)e^{\alpha x}$. Здесь $P_n(x)$ - полином n-ой степени, $Q(x)$ - полином, степень которого надо определить.

$$y_ч'(x) = Q'(x)e^{\alpha x} + Q(x)\alpha e^{\alpha x},$$
$$y_ч''(x) = Q''(x)e^{\alpha x} + Q'(x)\alpha e^{\alpha x} + Q'(x)\alpha e^{\alpha x} + Q(x)\alpha^2 e^{\alpha x}.$$
$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(Q''(x) + (2\alpha + p)Q' + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q(x)) = e^{\alpha x}P_n(x)$$

а) Если а - не корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, и многочлен $Q(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n.

б) Если а - простой корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p \neq 0$. В этом случае многочлен $Q'(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена надо выбирать равной n+1. Однако при дифференцировании $Q(x)$ производная свободного члена (постоянной) равна нулю, *поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x) = xQ_n(x)$.

в) Если α - кратный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p = 0$. В этом случае многочлен $Q''(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена $Q(x)$ надо выбирать равной n+2. Однако при двукратном дифференцировании $Q(x)$ производная не только свободного члена равна нулю, но и производная линейного члена равна нулю. *Поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x) = x^2 Q_n(x)$.

Пример. $y'' - y = x + e^x$ $\quad k^2 - 1 = 0$, $\quad k_1 = 1, k_2 = -1, \quad y_{оо} = C_1e^x + C_2e^{-x}$

$f_1(x) = x, \quad (P_n(x) = x, \alpha = 0)$. $\alpha = 0$ - не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в том же виде, что и правая часть, $y_1 = Ax + B, \quad y_1' = A, \quad y_1'' = 0$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x) = x$. $-Ax - B = x \Rightarrow B = 0, A + B = 1 \quad y_1(x) = -x$.

$f_2(x) = e^x, \quad (P_n(x) = 1, \quad \alpha = 1)$. Корень $\alpha = 1$ содержится один раз среди корней характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $y_2 = Dxe^x, \quad y_2' = De^x(1+x), \quad y_2'' = De^x(2+x)$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x) = e^x$. $De^x(2 + x - x) = e^x \Rightarrow D = \frac{1}{2}$

$y_2(x) = \frac{1}{2}xe^x$.

Суммируя оба частных решения, получаем частное решение неоднородного уравнения для исходной правой части: $y_{чн} = -x + \frac{1}{2}xe^x$. Общее решение неоднородного уравнения будет $y_{он} = C_1e^x + C_2e^{-x} - x + \frac{1}{2}xe^x$.

2) Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x)$

b) *Если* $\alpha \pm i\beta$ *не корни характеристического уравнения,* то частное решение ищется в том виде, в котором задана правая часть:

$$y_ч = e^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x),$$

где $U_m(x), V_m(x)$ - полиномы степени m – максимальной из степеней полиномов $M(x), N(x)$.

б) Если $\alpha \pm i\beta$ - *пара корней характеристического уравнения*, то частное решение ищется в виде

$$y_ч = xe^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x).$$

Рассмотрим *неоднородное уравнение n-го порядка*, покажем, как в нем применять метод подбора формы частного решения.Здесь ситуация сложнее, так как в характеристическом уравнении n корней, действительные корни и комплексно сопряженные, простые и кратные корни.

5) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

e) Если α *не является корнем характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч = e^{\alpha x}Q_n(x)$.

f) Если α - *корень характеристического уравнения r-ой кратности*, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$.

6) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x)$$

а) Если пара комплексно сопряженных корней *не является корнями характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть

$y_ч = e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x + V_m\sin\beta x)$, где степень m многочленов – максимальная из степеней многочленов $M(x), N(x)$.

d) Если пара комплексно сопряженных корней *является корнями характеристического уравнения r-ой кратности,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_ч = x^r e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x + V_m\sin\beta x).$$

Билет 19

1 **Вычисление длины дуги.**Для того, чтобы получить формулы для вычисления длины дуги, вспомним выведенные в 1 семестре формулы для дифференциала длины дуги. *Если дуга представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции* $y = f(x)$, дифференциал длины дуги можно вычислить по формуле

$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$. Поэтому $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$ *Если гладкая дуга задана параметрически* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$. Поэтому $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$.

Если дуга задана в полярной системе координат, то $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$. Поэтому $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$. Пример. Вычислить длину дуги графика функции $y = \ln\sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + ctg^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$ $\quad l = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right| = -\ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|$. Пример. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

$$l = 2a\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi =$$
$$2\sqrt{2}a\int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a$$

2.

Линейная зависимость и независимость.Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ (допустима только тривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю). В отличие от линейной независимости векторов здесь тождество линейной комбинации нулю, а не равенство. Это и понятно, так как равенство линейной комбинации нулю должно быть выполнено при любом значении аргумента. Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно зависимыми,* если существует не нулевой набор констант (не все константы равны нулю) $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, такой что $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \quad (\lambda_1^2 + \ldots \lambda_n^2 \neq 0)$ (существует нетривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю).

Теорема. *Для того чтобы функции были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо из них линейно выражалась через остальные (представлялась в виде их линейной комбинации).*Докажите эту теорему самостоятельно, она доказывается так же, как аналогичная ей теорема о линейной зависимости векторов.

Определитель Вронского.Определитель Вронского для функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ вводится как определитель, столбцами которого являются производные этих функций от нулевого (сами функции) до n-1 го порядка.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n \\ y_1' & y_2'\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

.**Теорема**. *Если функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *линейно зависимы, то* $W(x) \equiv 0$

Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например,

$y_1(x) \equiv \lambda_2 y_2(x) + \ldots \lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому $y_1^{(k)}(x) \equiv \lambda_2 y_2^{(k)}(x) + \ldots \lambda_n y_n^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3\ldots(n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.**Теорема.** *Для того, чтобы решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W(x) \equiv 0$. Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы.Достаточность. Зафиксируем некоторую точку x_0. Так как $W(x_0) = 0$, то столбцы определителя, вычисленные в этой точке, представляют собой линейно зависимые векторы. $\exists k, C_1, \ldots C_k \neq 0, \ldots C_n$, что выполнены соотношения

$$C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_k y_k(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0$$
$$C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_k y_k'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0$$
$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_k y_k^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения является его решением, то можно ввести решение вида $y(x) \equiv C_1 y_1(x) + \ldots + C_k y_k(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ - линейную комбинацию решений с теми же коэффициентами. Заметим, что при $x = x_0$ это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, это следует из выписанной выше системы уравнений. Но тривиальное решение линейного однородного уравнения тоже удовлетворяет тем же нулевым начальным условиям. Поэтому из теоремы Коши следует, что введенное решение тождественно равно тривиальному, следовательно, $y(x) \equiv C_1 y_1(x) + \ldots + C_k y_k(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad C_k \neq 0$, поэтому решения линейно зависимы.

Билет 20 1 **Несобственные интегралы от разрывной функции по конечному промежутку (второго рода).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= a, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= b, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= $c\in(a,b)$, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ называется $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (интегралы в правой части определены выше). Если указанные пределы существуют и конечны, то интегралы называются *сходящимися*, если предел бесконечен или не существует вообще, то интеграл *расходится*. *Если сходятся интегралы от функций* $f(x), g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda f(x), f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах. **Признаки сравнения несобственных интегралов** (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

1 признак. Теорема. Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \le g(x)$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b],\ b > a$, $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ = I (I – конечное число). Поэтому $\int_a^b f(x)dx$ - монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*.

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.**2 признак сравнения. Теорема.** Пусть при x>a $f(x) > 0,\ g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow$
$(K-\varepsilon)g(x) < f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

2.**Теорема о наложении частных решений.**Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x)+y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)+f_2(x)$.Доказательство. Подставим $y_1(x)+y_2(x)$ в неоднородное уравнение:

$$(y_1(x)+y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1(x)+y_2(x)) =$$
$$(y_1(x))^{(n)} + a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1(x)) +$$

$(y_2(x))^{(n)} + a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_2(x)) = f_1(x)+f_2(x)$.По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x) = y_{oo}(x) + y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

Билет 21

1. 1 *Вычисление объемов тел вращения.*

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси OX.*

Тогда $S(x) = \pi y^2(x),\quad V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$.Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси OY*, если функция задана в виде $x = x(y)$, можно вычислить по формуле $V = \int_c^d x^2(y)dy$.

Если функция задана в виде $y = y(x)$ *и требуется определить объем тела вращения вокруг оси OY*, то формулу для вычисления объема можно получить следующим образом.

$$\Delta V(x) = V(x+dx) - V(x) = \pi y^2(x+dx) - \pi y^2(x) = \pi\left((y(x)+dy)^2 - y^2(x)\right) =$$
$$\pi\left(y^2(x) + 2y(x)dy + dy^2 - y^2(x)\right) = 2\pi xy(x)dx + \pi dy^2.$$

Переходя к дифференциалу и пренебрегая квадратичными членами, имеем $dV(x) = 2\pi y^2(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем $V = 2\pi\int_a^b xydx$.Пример. Вычислить объем шара $x^2 + y^2 = R^2$.

$$V = \int_{-R}^{R}\pi y^2(x)dx = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi R^2 2R - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2.

Теорема. Существует система из n линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{k1}\ldots\vec{\alpha}^{kq_k}$, удовлетворяющих соотношениям .

$$A\vec{\alpha}^{k1} = \lambda_k\vec{\alpha}^{k1}$$
$$A\vec{\alpha}^{k2} = \lambda_k\vec{\alpha}^{k2} + \vec{\alpha}^{k1}$$
....
$$A\vec{\alpha}^{kq_k} = \lambda_k\vec{\alpha}^{kq_k} + \vec{\alpha}^{kq_{k-1}}$$

Векторы $\vec{\alpha}^{k2}\ldots\vec{\alpha}^{kq_k}$ - присоединенные векторы, порожденные собственным вектором $\vec{\alpha}^{k1}$, q_k - кратность корня λ_k, сумма q_k для различных корней λ_k равна n. **Теорема.** Каждому корню λ_k соответствует q_k решений вида

$$\vec{y}^{k1} = \vec{\alpha}^{k1}e^{\lambda_k x}$$
$$\vec{y}^{k2} = (\vec{\alpha}^{k2} + x\vec{\alpha}^{k1})e^{\lambda_k x}$$
....
$$\vec{y}^{kq_k} = (\vec{\alpha}^{kq_k} + x\vec{\alpha}^{kq_k-1} + \ldots + \frac{x^{q_k-1}}{(q_k-1)!}\vec{\alpha}^{k1})e^{\lambda_k x}$$

Для каждого кратного корня надо найти присоединенные векторы по первой теореме и построить решения по второй теореме.Если порядок системы мал, то можно действовать проще. Пусть матрица $(A - \lambda E)$ для корня, кратности r будет иметь ранг n-r. Это означает, что для данного корня можно подобрать r линейно независимых собственных векторов и, соответственно, r линейно независимых решений вида $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{\alpha}$ в фундаментальной системе решений.

Билет 22

1 **Вычисление длины дуги.**

Для того, чтобы получить формулы для вычисления длины дуги, вспомним выведенные в 1 семестре формулы для дифференциала длины дуги. *Если дуга представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции* $y = f(x)$, дифференциал длины дуги можно вычислить по формуле $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$. Поэтому $l = \int_a^b\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$ *Если гладкая дуга задана параметрически* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}$, то $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$. Поэтому $l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$. *Если дуга задана в полярной системе координат*, то $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$. Поэтому $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$.

Пример. Вычислить длину дуги графика функции $y = \ln\sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + ctg^2 x} = \frac{1}{\sin x}$. $l = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right| = -\ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|$.

2.

В случае *кратного действительного корня* $k_1 = k_2 = k$ одно из решений можно выбрать в форме $y_1 = e^{kx}$. Второе решение будем выбирать в виде $y_2 = u(x)e^{kx}$. Подставим в дифференциальное уравнение, чтобы определить $u(x)$.

$$y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx} = e^{kx}(u' + ku),\quad y_2'' = e^{kx}\left(u'' + ku' + ku' + k^2u\right) = e^{kx}\left(u'' + 2ku' + k^2u\right),$$
$$e^{kx}\left(u'' + 2ku' + k^2u + p(u' + ku) + qu\right) = e^{kx}\left(u'' + u'(p + 2k) + u\left(k^2 + pk + q\right)\right) = 0$$

Так как k - корень характеристического уравнения, то $k^2 + pk + q = 0$. Так как k еще и кратный корень, то по теореме Виета $k_1 + k_2 = k + k = 2k = -p$. Поэтому $p + 2k = 0$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'' = 0$, отсюда $u(x) = ax + b$. Выберем $a = 1, b = 0$, получим $u(x) = x$. Следовательно, $y_2 = u(x)e^{kx} = xe^{kx}$. Решения y_1, y_2 линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \ne m$. Поэтому *общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратного корня можно записать по формуле* $y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2x)$.

Билет 23

1 *Вычисление объемов тел вращения.*

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси OX.*

Тогда $S(x)=\pi y^2(x),\quad V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$. Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси OY*, если функция задана в виде $x=x(y)$, можно вычислить по формуле $V=\int\limits_c^d x^2(y)dy$.

Если функция задана в виде $y=y(x)$ *и требуется определить объем тела вращения вокруг оси OY*, то формулу для вычисления объема можно получить следующим образом.

$$\Delta V(x)=V(x+dx)-V(x)=\pi y^2(x+dx)-\pi y^2(x)=\pi\left((y(x)+dy)^2-y^2(x)\right)=$$
$$\pi\left(y^2(x)+2y(x)dy+dy^2-y^2(x)\right)=2\pi xy(x)dx+\pi dy^2.$$

Переходя к дифференциалу и пренебрегая квадратичными членами, имеем $dV(x)=2\pi y^2(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем $V=2\pi\int\limits_a^b xydx$. Пример. Вычислить объем шара $x^2+y^2=R^2$.

$$V=\int\limits_{-R}^{R}\pi y^2(x)dx=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi R^2 2R-\pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2

Метод вариации произвольной постоянной.

Общее решение однородной системы можно записать в виде $\vec{y}_{oo}(x)=Y(x)\vec{C}$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы, $\vec{C}$ - вектор произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы в том же виде, варьируя вектор произвольных постоянных: $\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\vec{C}(x)$.

Вычисляем производную и подставляем в уравнение неоднородной системы:

$$\vec{y}'_{он}(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x).$$

$$\vec{y}'_{он}(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)=A(x)Y(x)\vec{C}(x)+\vec{f}(x).$$

Так как фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению однородной системы, то $Y'(x)=A(x)Y(x)$. Поэтому в предыдущем уравнении (как и всегда в методе вариации) сокращается пара слагаемых. Получаем уравнение $Y(x)\vec{C}'(x)=\vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица не выраждена ($\det Y(x)=W(x)\neq 0$), то отсюда получаем уравнение для определения вектора $\vec{C}(x)$:

$$\vec{C}'(x)=Y^{-1}(x)\vec{f}(x).$$

Интегрируя, получаем

$\vec{C}(x)=\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1$ (здесь предполагается, что при вычислении интеграла вектор констант не добавляется, он уже добавлен в виде вектора $\vec{C}_1$).

Подставляя в $\vec{y}_{он}$, имеем

$$\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1\right)=Y(x)\vec{C}_1+Y(x)\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx.$$

Здесь в полном соответствии с теоремой о структуре общего решения неоднородной системы первое слагаемое представляет собой общее решение однородной системы, а второе слагаемое – частное решение неоднородной системы.

Билет 25

1 *Вычисление объемов тел вращения.*

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси OX.*

Тогда $S(x)=\pi y^2(x),\quad V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$. Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси OY*, если функция задана в виде $x=x(y)$, можно вычислить по формуле $V=\int\limits_c^d x^2(y)dy$.

Если функция задана в виде $y=y(x)$ *и требуется определить объем тела вращения вокруг оси OY*, то формулу для вычисления объема можно получить следующим образом.

$$\Delta V(x)=V(x+dx)-V(x)=\pi y^2(x+dx)-\pi y^2(x)=\pi\left((y(x)+dy)^2-y^2(x)\right)=$$
$$\pi\left(y^2(x)+2y(x)dy+dy^2-y^2(x)\right)=2\pi xy(x)dx+\pi dy^2.$$

Переходя к дифференциалу и пренебрегая квадратичными членами, имеем $dV(x)=2\pi y^2(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем $V=2\pi\int\limits_a^b xydx$. Пример. Вычислить объем шара $x^2+y^2=R^2$.

$$V=\int\limits_{-R}^{R}\pi y^2(x)dx=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi R^2 2R-\pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2 **Метод вариации произвольной постоянной.** Общее решение однородной системы можно записать в виде $\vec{y}_{oo}(x)=Y(x)\vec{C}$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы, $\vec{C}$ - вектор произвольных постоянных. Будем искать решение неоднородной системы в том же виде, варьируя вектор произвольных постоянных:

$\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\vec{C}(x)$. Вычисляем производную и подставляем в уравнение неоднородной системы: $\vec{y}'_{он}(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)$.

$\vec{y}'_{он}(x)=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)=A(x)Y(x)\vec{C}(x)+\vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению однородной системы, то $Y'(x)=A(x)Y(x)$. Поэтому в предыдущем уравнении (как и всегда в методе вариации) сокращается пара слагаемых. Получаем уравнение $Y(x)\vec{C}'(x)=\vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица не выраждена ($\det Y(x)=W(x)\neq 0$), то отсюда получаем уравнение для определения вектора $\vec{C}(x)$:

$\vec{C}'(x)=Y^{-1}(x)\vec{f}(x)$. Интегрируя, получаем $\vec{C}(x)=\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1$ (здесь предполагается, что при вычислении интеграла вектор констант не добавляется, он уже добавлен в виде вектора $\vec{C}_1$). Подставляя в $\vec{y}_{он}$, имеем

$$\vec{y}_{он}(x)=Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx+\vec{C}_1\right)=Y(x)\vec{C}_1+Y(x)\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx.$$

Здесь в полном соответствии с теоремой о структуре общего решения неоднородной системы первое слагаемое представляет собой общее решение однородной системы, а второе слагаемое – частное решение неоднородной системы.

Билет 24

1. *Фигура ограничена графиком функции, заданной в полярной системе координат.* Пусть график функции задан в полярной системе координат и мы хотим вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi=\varphi_1,\ \varphi=\varphi_2$ и графиком функции $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат. Здесь можно использовать метод интегральных сумм, вычисляя площадь криволинейного сектора как предел суммы площадей элементарных секторов, в которых график функции заменен дугой окружности $S=\lim_{\max(\Delta\varphi_i)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\rho^2(\varsigma_i)}{2}\Delta\varphi_i$. Можно использовать и метод дифференциалов: $\Delta S\approx dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi,\quad S=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$. Рассуждать можно так. Заменяя элементарный криволинейный сектор, соответствующий центральному углу $d\varphi$ круговым сектором, имеем пропорцию $2\pi\Leftrightarrow\pi\rho^2$. Отсюда $d\varphi\Leftrightarrow dS.$

$dS=\frac{\pi\rho^2 d\varphi}{2\pi}=\frac{\rho^2}{2}d\varphi$. Интегрируя и используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем $S=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$.

Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы. $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$. Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ является общим решениям (удовлетворяет пунктам определения общего решения)

5. $y_{oo}(x)$ - решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.

6. Зададим произвольные начальные условия $y_0,y_0',\ldots y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1,\ldots C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

$$y_{oo}(x_0)=C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0.$$

$$y_{oo}'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_0'.$$

$$y_{oo}''(x_0)=C_1y_1''(x_0)+\ldots+C_ny_n''(x_0)=y_0''.$$

....

$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1,\ldots C_n$. Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1,\ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом. Следовательно, $y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ - общее решение. *Замечание.* Определитель Вронского (как всякий определитель) представляет собой ориентированный n – мерный объем, натянутый на векторы решений фундаментальной системы решений.

Формула Остроградского – Лиувилля. Рассмотрим линейное однородное уравнение $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$. Определитель Вронского можно вычислить по *формуле Остроградского – Лиувилля*

$W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Вывод формулы Остроградского – Лиувилля. Известна формула для производной определителя

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}'\ldots & a_{1n}'\\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn}\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}' & a_{n2}' & a_{nn}'\end{vmatrix}.$$

Вычислим

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}y_1 & y_2\ldots & y_n\\ y_1' & y_2' & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1' & y_2'\ldots & y_n'\\ y_1' & y_2' & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}y_1 & y_2\ldots & y_n\\ y_1' & y_2'\ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & \ldots & y_n\\ y_1' & \ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_1 & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_n\end{vmatrix}=$$

$$0+\ldots+0+\begin{vmatrix}y_1 & \ldots & y_n\\ y_1' & \ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=-\frac{a_1}{a_0}W(x).\quad \frac{dW(x)}{W(x)}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)},\quad W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

.

Замечание. В формуле Остроградского – Лиувилля участвуют только коэффициенты при двух старших производных.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка. $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x),\ y_2(x)$ - два частных решения $a_0(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=0$, $a_0(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=0$. Умножим первое уравнение на y2, а второе на y1 и вычтем первое уравнение из второго. $a_0(x)\left(y_1y_2''-y_2y_1''\right)+a_1(x)\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)=0$.

Так как $W(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$, то $W'(x)=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''=$ $y_1y_2''-y_2y_1''$. Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x)+a_1(x)W(x)=0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

Формула для построения второго частного решения по известному (построение фундаментальной системы).

$W(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x)\neq 0$

$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$. Отсюда $\frac{y_2}{y_1}=\int C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx+C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем C=1, C $_1$=0, получим

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx.$$