Определения

1) Сформулируйте определение окрестности точки $x \in R$.

Окрестностью $U(x)$ точки x называют любой интервал, содержащий эту точку;

2) Сформулируйте определение ε-окрестности точки $x \in R$.

ε- окрестностью точки x (при положительном ε) называют интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. $U(b, \varepsilon) = \{x: |x - b| < \varepsilon\}$

3) Сформулируйте определение окрестности $+\infty$.

Окрестностью точки $+\infty$ называют интервал вида $(a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

4) Сформулируйте определение окрестности $-\infty$.

Окрестностью точки $-\infty$ называют интервал вида $(-\infty, a)$ где a — произвольное действительное число.

5) Сформулируйте определение окрестности ∞.

Окрестностью такой бесконечности называют объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

6) Сформулируйте определение предела последовательности.

($\lim x_n = a$ при $n\to\infty$) ≡ (для ∀ сколько угодно малого $\varepsilon>0$ ∃ номер $N=N(\varepsilon)$: для $\forall n>N \Rightarrow |x_n-a|< \varepsilon$).

Число a называется пределом числовой последовательности, если для ∀ сколь угодно малого $\varepsilon>0$ ∃ такой номер $N=N(\varepsilon)$, начиная с которого ($n=N+1$) выполняется неравенство $|x_n-a|< \varepsilon$.

7) Сформулируйте определение сходящейся последовательности.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

8) Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной.

Последовательность $\{xn\}$ называется ограниченной снизу, если существует число $c1$ такое, что $xn \geqslant c1$ при всех $n = 1, 2, .$

Последовательность $\{xn\}$ называется ограниченной сверху, если существует число $c2$ такое, что $xn \leqslant c2$ при всех $n = 1, 2, .$

9) Сформулируйте определение монотонной последовательности.

Монотонная последовательность — это последовательность, элементы которой с увеличением номера не убывают, или, наоборот, не возрастают.

10) Сформулируйте определение возрастающей последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X называется возрастающей, если каждый следующий элемент этой последовательности превышает предыдущий.

11) Сформулируйте определение убывающей последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X называется убывающей, если каждый элемент этой последовательности превышает следующий за ним.

12) Сформулируйте определение невозрастающей последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X называется невозрастающей, если каждый следующий элемент этой последовательности не превосходит предыдущего.

13) Сформулируйте определение неубывающей последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X называется неубывающей, если каждый элемент этой последовательности не превосходит следующего за ним.

14) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

Последовательность {xn} называется фундаментальной, если для любого ε > 0 существует номер N = N(ε) такой, что при любых m > N и n > N выполняется неравенство |xm − xn| < ε.

15) Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

16) Сформулируйте определение по Гейне предела функции.

Определение предела функции по Гейне: Точку b∈$\overline{\mathbb{R}}$ называют пределом функции f(x) в точке a∈$\overline{\mathbb{R}}$ (или при x, стремящемся к a), если для любой имеющей пределом точку a последовательности $\{x_n\}$ значений x_n∈R аргумента функции, не совпадающих с a, соответствующая последовательность {f(x_n)} значений f(x_n) функция имеет пределом точку b.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall\{x_n\}:\; (\lim\{x_n\} = a) \land (x_n \neq a \;\; \forall n \in \mathbb{N}) \;\; \exists \lim\{f(x_n)\} = b.$$

17) Сформулируйте определение бесконечно малой функции.

Функцию f(x) называют бесконечно малой (б.м.) при x→a∈R, если при этом стремлении аргумента предел функции равен нулю. Другими словами, с учётом определения предела:

$$f(x) \underset{x\to a}{—} \text{б.м.} \quad :\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0 :\Leftrightarrow$$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a):\;\; \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a) \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

18) Сформулируйте определение бесконечно большой функции.

Функцию f(x) называют бесконечно большой (б.б.) при x→a∈$\overline{\mathbb{R}}$, если при этом стремлении аргумента функция имеет бесконечный предел, т.е. с учётом определения:

$$f(x) \underset{x\to a}{-} \text{б.б.} :\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
$$:\Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \quad |f(x)| > E.$$

19) Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка.

Функции α(x) и β(x) называют б.м. одного порядка при x→a (α(x) = O(β(x))), если при x→a существует конечный от нуля предел отношения α(x) / β(x).

$$\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\beta(x)\big) \ :\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

20) Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций.

Функции α(x) и β(x) называют несравнимыми при x→a, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения.

21) Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций.

Функции α(x) и β(x) называют эквивалентными, если предел их отношения, при x→a, равен единице.

22) Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой.

Функцию α(x) называют б.м. k порядка малости относительно β(x) при x→a, а число k – порядком малости, если функции α(x) и β(x)^k являются б.м. одного порядка при x→a.

23).Сформулируйте определение приращения функции.

-

24) Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое).

Функцию f(x) называют непрерывной в точке a∈R, если в этой точке существует конечный предел функции, и он совпадает с её значением f(a).

$$(\exists \lim f(x) \text{ при } x \to a \in R) \cap (\lim f(x) \text{ при } x \to a = f(a))$$

25) Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

Функцию y=f(x) называют непрерывной на интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

26) Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

Функцию y=f(x) называют непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в интервале (a,b), и в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

27) Сформулируйте определение точки разрыва.

Точку, в которой функция не является непрерывной, называют точкой разрыва.

28) Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.

Если разность f(a + 0) - f(a - 0) конечна, то ее называют скачком функции в точке разрыва первого рода, а про функцию говорят, что она терпит разрыв с конечным скачком. Если скачок равен нулю, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем *точку устранимого разрыва.*

29) Сформулируйте определение точки разрыва I-го рода.

Функцию, не являющуюся непрерывной в точке $a \in R$, называют разрывной в этой точке, а саму точку a – точкой разрыва этой функции.

Точкой разрыва первого рода называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны. Разность $f(a+0) - f(a-0)$ конечна, и её называют скачком функции. Если скачок равен нулю, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то точку называют точкой устранимого разрыва.

30) Сформулируйте определение точки разрыва II-го рода.

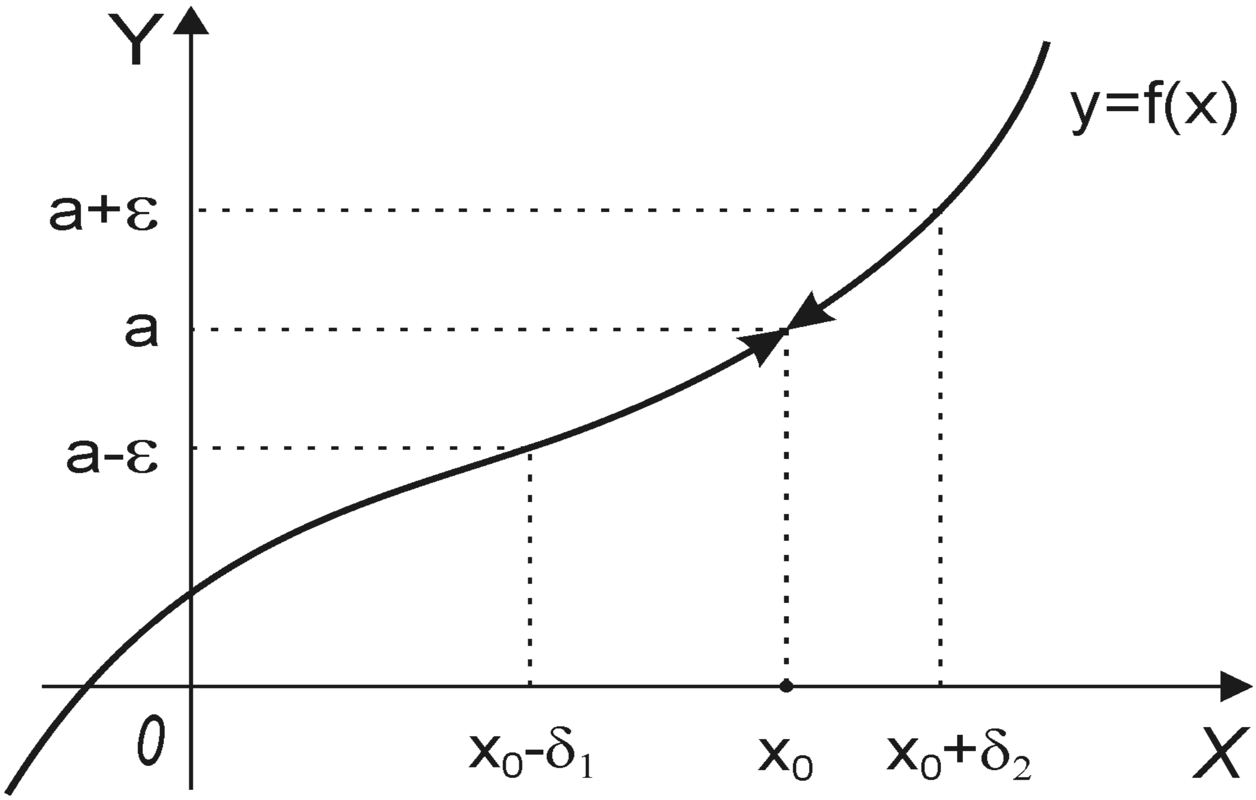
Функцию, не являющуюся непрерывной в точке $a \in R$, называют разрывной в этой точке, а саму точку a – точкой разрыва этой функции.

Точкой разрыва второго рода называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Определение предела по Коши (приводятся не все вопросы, остальные — по аналогии)

1) Сформулируйте определение по Коши limx→0 f(x) = b, где b ∈ R. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Пусть функция f(x) определена в проколотой окрестности точки x0. Число a называется пределом функции f(x) при x → x0, если для любого $\mathcal{E} > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\mathcal{E})$ такое, что если $0 < |x - x0| < \delta$, то $|f(x) - a| < \mathcal{E}$.



2) Сформулируйте определение по Коши limx→a f(x) = +∞, где a ∈ R. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 5.]

3) Сформулируйте определение по Коши limx→∞ f(x) = 0. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 5.]

4) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in R$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 6.]

Формулировки теорем

1) Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

2) Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Функция f(x) имеет в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой конечный предел b, тогда и только тогда, когда эта функция равна сумме этого числа b и б.м. функции $\alpha(x)$ при $x \to \alpha$, или:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \left(f(x) = b + \alpha(x)\right) \wedge \left(\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0\right).$$

3) Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

Пусть функции f(x), g(x) – б.м. при $x \to a$. Тогда функция f(x) + g(x) – б.м. при $x \to a$

4) Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

Произведение функции, б.м. при $x \to a$, и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности $U°(a)$ точки a, есть функция, б.м. при $x \to a$.

5) Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

Если f(x) – б.б. при $x \to a$ функция, то 1/f(x) – б.м. при $x \to a$. Если $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to a$ функция, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, то $1/\alpha(x)$ – б.б. при $x \to a$

6) Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными тогда и только тогда, если: $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$. Или $\alpha(x) - \beta(x) = O(\beta(x))$.

7) Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков.

Сумма конечного числа б.м.ф. различного порядка малости эквивалентна своей главной части.