

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 3

Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших (без доказательства). Интегрирование простейших дробей. Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей.

Отношение двух многочленов

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0}{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0},$$

где $Q(x) \not\equiv 0$, называется рациональной дробью. Мы будем предполагать, что коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ вещественны.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется правильной; в противном случае - неправильной. Если дробь является неправильной, то, разделив числитель на знаменатель, мы представим такую дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Поскольку интегрирование многочлена не представляет трудностей, мы ограничимся рассмотрением вопроса об интегрировании правильных дробей.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x - \alpha)^m} \quad \text{и} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

называются простейшими. При этом предполагается, что $A \neq 0$, $B^2 + C^2 > 0$, и квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней. Займемся сначала интегрированием простейших дробей. Имеем

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \cdot \ln |x - \alpha| + C;$$
$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^m} dx = -\frac{A}{(m-1)(x - \alpha)^{m-1}} + C, \quad m = 2, 3, \dots$$

Интегралы от дробей

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

мы уже рассматривали. Действуя в том же духе, получаем

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + p) + C - \frac{Bp}{2}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} +$$

$$+ \frac{2C - Bp}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = -\frac{B}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \\ + \frac{2C - Bp}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

и дело сводится к вычислению интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right)^n}.$$

Т.к. по предположению квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, то мы можем обозначить $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. После замены $t = x + \frac{p}{2}$ мы получим такой интеграл:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}.$$

При $n = 1$ имеем табличный интеграл:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Далее, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} (t)' dt = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{n+1}} = \\ = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Отсюда такое рекуррентное соотношение:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n,$$

которое позволяет, зная I_1 , в принципе найти I_n при любом натуральном n . Например,

$$I_2 = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + C.$$

Т.о., мы можем проинтегрировать любую простейшую дробь.

Напомним некоторые сведения из алгебры многочленов. Всякий многочлен

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

степени n с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде

$$Q(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}, \quad (*)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_r, p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$ — вещественные числа; квадратные трехчлены не имеют вещественных корней, и $k_1 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$.

При этом если многочлен $Q(x)$ не имеет вещественных корней, то в написанном разложении отсутствуют линейные множители, а если все корни этого многочлена вещественны, то отсутствуют квадратные трехчлены. Отметим еще, что разложение (*) единственно (с точностью до порядка сомножителей).

В курсе высшей алгебры доказывается, что всякая правильная рациональная дробь $P(x)/Q(x)$, знаменатель которой записывается в виде (*), следующим образом представляется в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{r_1}}{x - \alpha_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x - \alpha_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s_1}x + C_{s_1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}} \quad (**)$$

Такое представление единственно (с точностью до порядка слагаемых). Мы видим, таким образом, что для того, чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, следует найти для знаменателя разложение (*), а затем представить эту дробь в виде (**). После этого задача сведется к интегрированию простейших дробей. Чтобы фактически найти разложение (**), рекомендуется записать правую часть с неопределенными коэффициентами, затем выполнить сложение написанных дробей и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях в числителях левой и правой частей получившегося равенства. Для нахождения неопределенных коэффициентов образуется система линейных уравнений; эта система всегда совместна (и более того, можно доказать, что она имеет единственное решение). При решении этой системы можно использовать и дополнительные равенства, получающиеся из(**) подстановкой вместо x каких-либо конкретных значений.

Пример. Требуется проинтегрировать рациональную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

В данном случае степень числителя больше степени знаменателя; разделим числитель на знаменатель, пользуясь известным алгоритмом:

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5 & x^4 - x^3 - x + 1 \\ 2x^5 - 2x^4 & -2x^2 + 2x \\ \hline x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 5 & \\ x^4 - x^3 & -x + 1 \\ \hline 3x^3 + x^2 - 2x + 4 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x + 1 + \frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

Далее, разложим на линейные и квадратичные множители знаменатель, заметив, что $x = 1$ - его корень. Имеем

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1);$$

т.к. квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет вещественных корней, то требуемое разложение получено. Запишем теперь разложение выделенной ранее правильной дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Выполнив сложение дробей в правой части и приравняв числители слева и справа, получим

$$3x^3 + x^2 - 2x + 4 = A(x^3 - 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1).$$

Отсюда

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 3 = A + C \\ x^2 & 1 = B + D - 2C \\ x & -2 = B + C - 2D \\ 1 & 4 = -A + B + D. \end{array}$$

Сложив все уравнения, получим, что $3B = 6$, т.е. $B = 2$. Подставим это значение B во второе и третье уравнения системы:

$$D - 2C = -1C - 2D = -4.$$

Отсюда $C = 2$, $D = 3$; из первого уравнения системы находим $A = 1$. Окончательно получаем такое равенство

$$\frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

Для исходной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1} = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

Здесь заслуживает внимания лишь интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + 2 \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Для интеграла от рациональной функции $P(x)/Q(x)$ имеем следовательно, такое выражение

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= x^2 + x + \ln|x - 1| - \\ &- \frac{2}{x - 1} + \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$