一．判断题

1.错误。由§2.2.2 补充结论 1（结论 1：概率为 0 的事件不一定是不可能事件。例：设 X 是连续型随机变量，则 $P(X=x_0)=0$，但 $\{X=x_0\}$ 不是不可能事件 Φ。因为 Φ 是空集，但 $\{X=x_0\}$ 不是空集）知，若 $P(A)=0$，则 A 不一定是不可能事件 Φ。所以若 $P(AB)=0$，则未必有 $AB=\Phi$，即未必有 A 与 B 互不相容.

例：设 X 是连续型随机变量，$A=\{1<X\le 2\}$，$B=\{2\le X<3\}$，则 $AB=\{X=2\}$，所以 $P(AB)=0$，但 $AB\ne\Phi$，所以 A 与 B 相容.

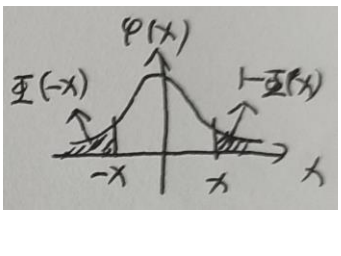
2.错误。$EXY=EX\cdot EY\Leftrightarrow X,Y$ 不相关。由§4.4.2 结论（参考§4.4.2 讲义中独立与不相关的关系：X,Y 独立时，一定有 X,Y 不相关。X,Y 不相关时，不一定有 X,Y 独立。）知，X,Y 不相关时，不一定独立。

3.错误。由§3.1.3 例 5 结论知，若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。反之，若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则未必有 (X,Y) 服从二维正态分布（反例为习题 3-1 第 10 题）。

4.正确。因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $X_i\sim P(\lambda), i=1,2,\cdots,n$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，则由§3.3.1 例 3 结论（泊松分布的可加性：若 $X_1\sim P(\lambda_1)$，$X_2\sim P(\lambda_2)$，…，$X_s\sim P(\lambda_s)$，$X_1,X_2,\cdots,X_s$ 独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_s\sim P(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s)$）知，

$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim P(n\lambda)$。

5.正确。$X\sim N(0,4)$，所以 $\mu=0$，则 $\varphi(x)$ 关于纵轴对称。所以 $\Phi(-x)$ 与 $1-\Phi(x)$ 对应的面积相等，故 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$。图像如下图：



二．填空题

1．即为两封信全在 3 号和 4 号邮筒中的概率：$\frac{2\times 2}{4\times 4}=\frac{1}{4}$。

2．X 的概率分布函数为

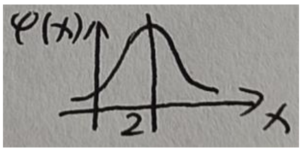
X	-1	2	4
P	0.3	0.3	0.4

所以 $P\{X=4\}=0.4$.

3．$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}\mu=n\mu$，$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=n\sigma^2$，则由§5.2 定理 5.5（中心极限定理）结论 2 知，$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$。

4．$P\{|X-\mu|\geq 2\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{4\sigma^2}=\frac{1}{4}$。

5．$X\sim N(1,\sigma^2)$，则 $X_i\sim N(1,\sigma^2)$，$i=1,2$，且 X_1,X_2 独立，又 $E(X_1+X_2)=2$，$D(X_1+X_2)=2\sigma^2$，则由§3.3.2 例 2 结论（若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$ 独立，则 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$）知，$X_1+X_2\sim N(2,2\sigma^2)$，所以 $P\{X_1+X_2<2\}=\frac{1}{2}$（恰为总面积的一半）。如下图：



6．相当于从 10 粒中取出 5 粒，这 5 粒中恰有 1 粒黑子的概率：$\frac{C_2^1C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{9}$。

7．$E(2X_1-X_2+X_3)=2EX_1-EX_2+EX_3=0$，

$D(2X_1-X_2+X_3)=4DX_1+DX_2+DX_3=6$，

则由§6.3.1 补充定理 1（设 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\cdots$，$X_n\sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，则 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b\sim N(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n+b,$ $a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2)$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为 0）知，$2X_1-X_2+X_3\sim N(0,6)$.

由§6.3.1 定理 6.2 知，$X_1^2+X_2^2+X_3^2\sim\chi^2(3)$。

三．单项选择题

1. (A) 三个事件全发生表示为ABC，故选项 A 错误。

(B) 三个事件全不发生表示为$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，故选项 B 错误。

(C) $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$表示至少有一个不发生，即三个事件不全发生，选项 C 正确。

(D) 至少有一个事件发生表示为$A+B+C$，故选项 D 错误。

2. 由§2.4.2 例 2 结论知，$X \sim N(2,4)$，则$aX+b \sim N(2a+b,4a^2)=N(0,1)$，

所以$\begin{cases}2a+b=0\\4a^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=1\end{cases}$，故选项 C 正确（实际上有两组解）。

3. 由§3.3.2(3.3.5)式知，选项 B 正确。

4. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,20$，且$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$独立，

又$EY=E(3\sum\limits_{i=1}^{10}X_i-4\sum\limits_{i=11}^{20}X_i)=3\sum\limits_{i=1}^{10}EX_i-4\sum\limits_{i=11}^{20}EX_i=3\times10\times\mu-4\times10\times\mu=-10\mu$，

$DY=D(3\sum\limits_{i=1}^{10}X_i-4\sum\limits_{i=11}^{20}X_i)=9\sum\limits_{i=1}^{10}DX_i+16\sum\limits_{i=11}^{20}DX_i=9\times10\times\sigma^2+16\times10\times\sigma^2=250\sigma^2$，

则由§6.3.1 补充定理 1（设$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\cdots$，$X_n \sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，则$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b \sim N(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n+b,$

$a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2)$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$不全为 0）知，

$Y=3\sum\limits_{i=1}^{10}X_i-4\sum\limits_{i=11}^{20}X_i \sim N(-10\mu,250\sigma^2)$，故选项 D 正确。

四、计算题

1.(1)设A_i表示第i台机床加工的零件，$i=1,2,3$，B表示合格品，则由全概率公式，得$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95=0.93$.

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.3\times0.9}{0.93}\approx0.29$

2.设X表示每个人的等车时间，则$X \sim U[0,5]$，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0\le x\le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

等车时间不超过 2 分钟的概率为

$$P(X\le 2)=\int_{-\infty}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{5}dx=\frac{2}{5}$$

设Y表示三人中等车时间不超过 2 分钟的人数，则$Y\sim B(3,\frac{2}{5})$，所以

$$P(Y\ge 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_3^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^1+C_3^3(\frac{2}{5})^3(\frac{3}{5})^0=\frac{44}{125}=0.352$$

3.(1)由题意可得 X与Y 的联合概率分布为：

X \ Y	0	1
0	$\frac{12}{30}$	$\frac{8}{30}$
1	$\frac{8}{30}$	$\frac{2}{30}$

(2) X和Y的边缘分布为:

X	0	1
P	$\frac{20}{30}$	$\frac{10}{30}$

Y	0	1
P	$\frac{20}{30}$	$\frac{10}{30}$

计算得$EX=EY=\frac{1}{3},DX=DY=\frac{2}{9}$，$EXY=\frac{1}{15}$,

所以$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=-\frac{2}{45}$，$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{5}$

(3)Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$

4. (1) $EX=\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$, 令 $\frac{2}{3}\theta=\bar{X}$，可得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}$。

(2) $DX=EX^2-(EX)^2=\int_0^{\theta}\frac{2x^3}{\theta^2}dx-\left(\frac{2}{3}\theta\right)^2=\frac{1}{18}\theta^2$,

$D(\hat{\theta})=D(\frac{3}{2}\bar{X})=\frac{9}{4}D(\bar{X})=\frac{9}{4n}DX=\frac{\theta^2}{8n}$.（由定理 6.1 知 $D(\bar{X})=\frac{1}{n}DX$）

五、综合分析题

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^3dx\int_0^3kxydy=\frac{81}{4}k=1$，解得 $k=\frac{4}{81}$。

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，

当 $x<0$ 或 $x>3$ 时，$f_X(x)=0$。

当 $0\le x\le 3$ 时，$f_X(x)=\int_0^3\frac{4}{81}xydy=\frac{2}{9}x$。

所以 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x, & 0\le x\le 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

同理可得 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{9}y, & 0\le y\le 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

(2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立。

(3) $P\{Y>X^2\}=\int_0^3dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{4}{81}xydx=\frac{2}{9}$

（或 $P\{Y>X^2\}=\int_0^{\sqrt{3}}dx\int_{x^2}^3\frac{4}{81}xydy=\frac{2}{9}$）

附加题：你不会认为是讲台吧！

开学第一天就说了啊~~~