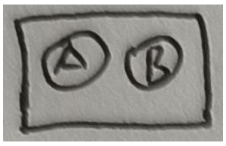
一、单项选择题

1．由已知条件知 $AB=\Phi$，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$。

(A) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$，选项 A 正确。

(B) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0$，选项 B 错误。

(C)若 A,B 的关系如下图：



则 $\bar{A}\bar{B}\neq\Phi$，选项 C 错误。

(D)若 $B=\bar{A}$，如下图：

则 $\bar{A}\bar{B}=\Phi$，选项 D 错误。

2．因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$。又 $P(X=1)=\dfrac{1}{2}P(X=2)$，

所以 $\dfrac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$。注意到 $\lambda>0$，所以 $1=\dfrac{1}{4}\lambda$，即 $\lambda=4$。选项 C 正确。

3．由§2.4.2 例 1 结论（若 $X\sim U[a,b]$，则 $kX+c\sim U[ka+c,kb+c](k\neq 0)$）知，

若 $X\sim U[0,2]$，则 $Y=3X-1\sim U[-1,5]$。故选项 A 和 B 错误。

由 $Y=3X-1\sim U[-1,5]$ 知， $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & -1\le y\le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

所以 $P(0\le Y\le 2)=\int_0^2\dfrac{1}{6}dy=\dfrac{y}{6}\Big|_0^2=\dfrac{1}{3}$，选项 C 错误。

$P(0\le Y\le 3)=\int_0^3\dfrac{1}{6}dy=\dfrac{y}{6}\Big|_0^3=\dfrac{1}{2}$，选项 D 正确。

4. $DX=EX^2-(EX)^2=b-a^2$，所以 $D(3X)=9DX=9(b-a^2)$，C 正确。

5. $X\sim B(100,0.2)$，则 $EX=np=100\times 0.2=20$， $DX=npq=100\times 0.2\times 0.8=16$，

由定理 5.6（拉普拉斯定理）知，$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(20,16)$，所以 $\frac{X-20}{4} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$。

$P(10 \le X \le 30) = P(\frac{10-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{30-20}{4}) \approx \Phi_0(2.5) - \Phi_0(-2.5) = 2\Phi_0(2.5) - 1$，D 正确。

二、填空题

1．设 $A=\{$第一次取到新球$\}$，$B=\{$第二次取到新球$\}$，

则 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{5}$。

2．A 与 B 独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$。

$P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.5P(A) = 0.3$，所以 $P(A) = 0.6$。

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = 0.6$。

3．由§3.3.1 例 2 结论（若 $X_1 \sim B(n_1,p)$，$X_2 \sim B(n_2,p)$，$\cdots$，$X_s \sim B(n_s,p)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 独立，则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_s \sim B(n_1 + n_2 + \cdots + n_s, p)$）知，$X + Y \sim B(14, 0.6)$。

4．X 与 Y 独立，所以 $D(3X+2Y) = D(3X) + D(2Y) = 9DX + 4DY = 44$。

5．X 与 Y 独立，所以 $P(X=2, Y=1) = P(X=2)P(Y=1)$，即 $\frac{1}{9} = (\frac{1}{9}+a)(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18})$，

解得 $a = \frac{2}{9}$。又 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+a+\frac{1}{18}+b = 1$，所以 $b = \frac{1}{9}$。

6．$X \sim U[a,b]$，所以 $EX = \frac{a+b}{2}$。由§6.2.2 定理 6.1 知，$E\bar{X} = EX = \frac{a+b}{2}$。

7. (1)由§6.3.2 定理 6.6 知，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$。

(2)由§6.3.2 定理 6.7 知，$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$，所以 $E\chi^2 = n$。

因为 $H = \frac{\sigma^2}{n}\chi^2$，所以 $EH = E(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2) = \frac{\sigma^2}{n}E\chi^2 = \frac{\sigma^2}{n}\times n = \sigma^2$。

8. $P\left\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_6) > \frac{1}{4}\right\} = 1 - P\left\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_6) \le \frac{1}{4}\right\}$

$$= 1 - P(X_1 \le \frac{1}{4}, X_2 \le \frac{1}{4}, \cdots, X_6 \le \frac{1}{4})$$（利用 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 独立）

$$= 1 - P(X_1 \le \frac{1}{4})P(X_2 \le \frac{1}{4})\cdots P(X_6 \le \frac{1}{4})\cdots(\Delta)$$

又 $P(X_i \le \frac{1}{4}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} 2xdx = x^2 |_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{16}$，所以 $(\Delta) = 1-(\frac{1}{16})^6$。

9. 设 X 表示射击次数，则 X 服从 $p=\frac{3}{5}$ 的几何分布，所以 $EX=\frac{1}{p}=\frac{5}{3}$。

10. 易知 $a+b=1$，且 X 可能的值为 $-1,1,2$。

$P(X=-1)=a$，$P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{3}-a$，$P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)=1$，

所以 $P(X=2)=1-(\frac{2}{3}-a)=\frac{1}{3}+a=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{6}, b=\frac{5}{6}$。

三、计算题

1. 解：设 A 表示“至少有一个正面”，B 表示“正面数为三个”，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}$$

又 $P(B)=C_5^3 \times (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{16}$，$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(\frac{1}{2})^5=\frac{31}{32}$，所以 $P(B|A)=\frac{10}{31}$。

2. 解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} ce^{-x}dx = c = 1$，所以 $c=1$。

(2) 当 $x \le 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$。

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}$。

所以 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & x>0 \end{cases}$。

3. 解：$0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 6xy^2 dy = 2x$，

所以 $f_X(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，同理，$f_Y(y)=\begin{cases} 3y^2, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \frac{2}{3}$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot 3y^2 dy = \frac{3}{4}$，

$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy \cdot 6xy^2 dxdy = \int_0^1 6x^2dx \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{2}$，

所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$，则 X,Y 不相关。

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 相互独立。

4. 解：设 n 为至少应取的产品数，X 是其中的次品数，则 $X \sim B(n,0.1)$。

由拉普拉斯定理知，$X \overset{近似}{\sim} N(0.1n,0.09n)$，所以 $\frac{X-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$。

$P(X>10)\ge 0.9,$ 则有 $P(\frac{X-0.1n}{\sqrt{0.09n}} > \frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}) \ge 0.9$，

即 $P(\frac{X-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \le \frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}) \approx \Phi_0(\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}) \le 0.1$。

所以 $\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \le -1.28$，整理得 $n^2-214.7456n+10000\ge 0$，

解得 $n\le 68.3$ 或 $n\ge 146.5$，由于 $10-0.1n<0$，所以 $n>100$，故 $n\le 68.3$ 舍去。

所以 $n\ge 146.5$，应取 $n=147$。

5. 解：$X_i \sim N(0,\sigma^2), i=1,2,\cdots,5$，并且相互独立，所以 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，$i=1,2,\cdots,5$，且相互独立。由定理 6.2 知，$\frac{X_1^2}{\sigma^2}+\frac{X_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2), \frac{X_3^2}{\sigma^2}+\frac{X_4^2}{\sigma^2}+\frac{X_5^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3),$ 并且相互独立。由定理 6.5

知，$T=\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{(\frac{X_1^2}{\sigma^2}+\frac{X_2^2}{\sigma^2})/2}{(\frac{X_3^2}{\sigma^2}+\frac{X_4^2}{\sigma^2}+\frac{X_5^2}{\sigma^2})/3} \sim F(2,3)$。

6. 解：似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$，

取对数，得 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

求导数，得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

附加题：11. 11~~~

以后谁在课堂上吃早饭，要分我一半~~~在吃土的人面前吃饭，你礼貌吗~~~><