一、选择题

1． $\dfrac{C_3^2C_2^1+C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{3\times2+1}{10}=\dfrac{7}{10}$，选项 B 正确。

2. (A)符合§2.2.3 中分布函数的性质，选项 A 正确。

（分布函数的性质：(i) $0\le F(x)\le1, x\in(-\infty,+\infty)$；(ii) $F(x)$是x的不减函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0$；(iii) $F(x)$右连续（连续型随机变量的分布函数$F(x)$是连续函数））

(B) $F(-\infty)=e^{+\infty}=+\infty\ne0$，选项 B 错误。

(C) $F(+\infty)=1-e^{+\infty}=-\infty\ne1$，选项 C 错误。

(D) $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=2$，$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)\ne\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$，所以$F(x)$在$x=0$不连续，选项 D 错误。（利用§2.2.3 图 2-8 左边的性质：连续型随机变量的分布函数$F(x)$是连续函数）

3． $DX=\lambda=4$，所以$E(2X+1)=2EX+1=2\lambda+1=9$，选项 A 正确。

4． $EX=\bar{X}$，因为$EX=2p$，所以$2\hat{p}=\bar{X}$，

$\hat{p}=\dfrac{1}{2}\bar{X}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}\times(1+3+0+2+4)=1$，选项 A 正确。

5．因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，$i=1,2,3,4$，

且X_1,X_2,X_3,X_4独立。则由§3.3.2 例 2 结论（若$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$独立，则$aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$）知，$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，所以$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)\cdots(\Delta_1)$。

同理，$\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，由定理 6.2 知$\dfrac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)\cdots(\Delta_2)$。因为 X_1,X_2,X_3,X_4独立，则由§6.3.1 补充定理 2（若$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$独立，则$g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$g_1(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$独立，即相互独立的随机变量，其所构成的函数与函数之间也是独立的）知，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$\dfrac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}$独立$\cdots(\Delta_3)$。由$(\Delta_1)(\Delta_2)(\Delta_3)$及定理 6.4 知，

$$\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}}}=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{(X_3-X_4)^2}}\sim t(1)$$ 。选项 C 正确。

二、填空题

1．$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)$，解得$P(AB)=0.3$。

所以$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.1$。

2．$\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，解得$\operatorname{cov}(X,Y)=0.5\times2\times3=3$。

所以$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=7$。

3．$\begin{cases}F(-\infty)=0\\F(+\infty)=1\end{cases}$，即$\begin{cases}A+B\cdot(-\dfrac{\pi}{2})=0\\A+B\cdot\dfrac{\pi}{2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=\dfrac{1}{\pi}\end{cases}$。

所以$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$， $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$。

4．$E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i=0$， $D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}DX_i=n$，

所以$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\ge n\right)=P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)\right|\ge n\right)\le\frac{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$。

5．$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，

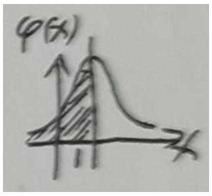
所以$f_X(x)=[F_X(x)]'=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，故$x>0$时，$f_X(x)=3e^{-3x}$。

6．$E(X+Y)=EX+EY=1$，$D(X+Y)=DX+DY=2$。

由§3.3.2 例 2 结论（若$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$独立，则

$aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$）知，$X+Y\sim N(1,2)$，所以

$P(X+Y\le 1)=0.5$（对称轴为$\mu=1$，则$P(X+Y\le 1)$恰为总面积的一半 0.5）



7. $P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=0.1$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=0.6$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=0.3$.

所以

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$P(Y=1)=P(X=2)=0.3$，$P(Y=2)=P(X=1)=0.6$，

$P(Y=3)=P(X=0)=0.1$.

所以

Y	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

$EX=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2$，$EY=1\times0.3+2\times0.6+3\times0.1=1.8$.

三、判断题

1．错误。因为 A 与 B 独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，故 $AB\neq\Phi$，即 A 与 B 相容。

2． 正确。由 § 4.4.2 结论即知。

3． 正确。由 § 4.4.2 结论即知。

4． 正确。因为 $X\sim Exp(\lambda)$，所以 $DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$。由 § 6.2.2 定理 6.1 知，

$ES^2=DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$。

5． 正确。由 § 2.3.2 例 7 结论即知。

四、计算题

1．(1) $P(X\leq1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx=\int_0^1 2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^1=1-e^{-2}$.

(2) $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X+1\leq y)=P(X\leq\dfrac{y-1}{2})=F_X(\dfrac{y-1}{2})$

所以 $f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\left[F_X(\dfrac{y-1}{2})\right]'_y=\dfrac{1}{2}f_X(\dfrac{y-1}{2})$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\times 2e^{-2\times\frac{y-1}{2}}, & \frac{y-1}{2}>0 \\ 0, & \frac{y-1}{2}\le 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{1-y}, & y>1 \\ 0, & y\le 1 \end{cases}.$$

2.

X	1	2
P	0.5	0.5

Y	-2	-1	0	1
P	0.1	0.2	0.3	0.4

$EX=1.5$ ， $EY=0$ ， $EXY=0.2$ ， $Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=0.2$

$EX^2=2.5$ ，$EY^2=1$ ，$DX=EX^2-(EX)^2=0.25$ $DY=EY^2-(EY)^2=1$ ，

所以 $\rho_{X,Y}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{0.2}{0.5\times 1}=0.4$

因为 $Cov(X,Y)\neq 0$，所以 X 与 Y 相关。

又 $P(X=1,Y=-2)=0.1$， $P(X=1)=0.5$， $P(Y=-2)=0.1$，

因为 $P(X=1,Y=-2)\neq P(X=1)P(Y=-2)$，所以 X 与 Y 不独立。

3．似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\dfrac{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1}}{\theta^n}$

取对数得 $lnL(\theta)=(\theta-1)(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)-n\ln\theta$

求导得 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\dfrac{n}{\theta}=0$

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

五、应用题

1．设 A 表示“从甲袋中取到白球放入乙袋” ，B 表示“从乙袋中取到白球”。则 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(\bar{A})=\frac{1}{3}$。由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

2．设 X_i 为第 i 次轰炸时命中目标的炮弹数，则 $EX_i=2$，$DX_i=0.8$，

$E(\sum_{i=1}^{80}X_i)=160$，$D(\sum_{i=1}^{80}X_i)=64$。由中心极限定理得 $\sum_{i=1}^{80}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(160,64)$，

故 $P(150\le\sum_{i=1}^{80}X_i\le170)=\Phi(170)-\Phi(150)=\Phi_0(\frac{170-160}{8})-\Phi_0(\frac{150-160}{8})$

$$=2\Phi_0(1.25)-1=2\times0.8944-1=0.7888$$

3. $P(X=1)=\frac{5}{8}$，$P(X=2)=\frac{3}{8}\times\frac{6}{8}=\frac{9}{32}$，

$P(X=3)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{21}{256}$， $P(X=4)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{8}{8}=\frac{3}{256}$.

所以 X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{3}{256}$

六、综合题

(1) $x>0$ 时， $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}e^{-x-y}dy=e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_0^{+\infty}\right]=e^{-x}$，

$x\le0$ 时， $f_x(x)=0$。

所以 $f_x(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$， 同理， $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$。

(2) 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 独立。

(3) $P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-x-y}dy=\int_0^1 e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_0^{1-x}\right]dx$

$$=\int_0^1 e^{-x}(1-e^{x-1})dx=-e^{-x}\Big|_0^1-e^{-1}=1-2e^{-1} \ .$$

附加题：你以为是烤肉炒饭定理？不不不~~~你难道没发现，这道题竟然得分了~~~好像是 2 分~~~^^