一、选择题

1. $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1\Rightarrow P(AB)=P(A)$，显然选项 A 和 B 错误。

(C) 反例：设 X 是连续型随机变量，$A=\{0\le X\le\frac{1}{2}\}$，$B=\{0\le X<\frac{1}{2}\}$，

则 $P(A)=P(B)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$，且 $P(AB)=P(B)$，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=1$，

但 $A\not\subset B$，故选项 C 错误。

(D) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0$，故选项 D 正确。

2. 令 $Y=aX+b$，则 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X=\dfrac{Y-b}{a}$。由于 $E(\dfrac{Y-b}{a})=\dfrac{\mu-b}{a}$，

$D(\dfrac{Y-b}{a})=\dfrac{\sigma^2}{a^2}$，所以 $X=\dfrac{Y-b}{a}\sim N(\dfrac{\mu-b}{a},\dfrac{\sigma^2}{a^2})=N(0,1)$。

则有 $\begin{cases}\mu-b=0\\ a^2=\sigma^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sigma\\ b=\mu\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\sigma\\ b=\mu\end{cases}$，选项 C 正确。

3. 因为 $P(X=0,Y=0)=0.1$，$P(X=0)=0.1$，$P(Y=0)=0.8$，

所以 $P(X=0,Y=0)\ne P(X=0)P(Y=0)$，故 X,Y 不独立。

又 X,Y 的边缘分布为

X	0	1
P	0.1	0.9

Y	0	1
P	0.8	0.2

所以 $EX=0\times0.1+1\times0.9=0.9$， $EY=0\times0.8+1\times0.2=0.2$，

$E(XY)=0\times0\times0.1+0\times1\times0+1\times0\times0.7+1\times1\times0.2=0.2$，

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0.2-0.9\times0.2=0.02\neq0$，

故 X,Y 相关，选项 D 正确。

4. $P\{|X-\mu_1|<1\}=P(-1<X-\mu_1<1)=P(\mu_1-1<X<\mu_1+1)$

$$=\Phi(\mu_1+1)-\Phi(\mu_1-1)=\Phi_0(\frac{\mu_1+1-\mu_1}{\sigma_1})-\Phi_0(\frac{\mu_1-1-\mu_1}{\sigma_1})$$

$$=\Phi_0(\frac{1}{\sigma_1})-\Phi_0(-\frac{1}{\sigma_1})=2\Phi_0(\frac{1}{\sigma_1})-1$$

同理， $P\{|X-\mu_2|<1\}=2\Phi_0(\frac{1}{\sigma_2})-1$。所以 $\Phi_0(\frac{1}{\sigma_1})>\Phi_0(\frac{1}{\sigma_2})$。因为 $\Phi_0(x)$ 是增函数，所以 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1<\sigma_2$，选项 A 正确。

5. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2\cdot2^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，所以 $X\sim N(-1,4)$，故 $EX=-1$， $DX=4$，选项 B 正确。

6. 由 § 3.3.1 例 3 结论（若 $X\sim P(\lambda_1)$， $Y\sim P(\lambda_2)$， X,Y 独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$）知，选项 B 正确。

7. $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X\le y)=P(X\le\frac{y}{2})=F_X(\frac{y}{2})$

$$=\begin{cases}0, & \frac{y}{2}\le0\\ \frac{y^2}{4}, & 0<\frac{y}{2}<1\\ 1, & \frac{y}{2}\ge1\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le0\\ \frac{y^2}{4}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge2\end{cases}$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，选项 B 正确。

8. (A) 由§3.3.1 例 2 结论（若 $X_1\sim B(n_1,p)$，$X_2\sim B(n_2,p)$，⋯，$X_s\sim B(n_s,p)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 独立，则 $X_1+X_2+\cdots+X_s\sim$ $B(n_1+n_2+\cdots+n_s,p)$ ）知，$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$，故选项 A 错误。

(B) 由(A)知 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=np$，$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=np(1-p)$，B 正确。

(C) 由(A)知 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$，则由定理 5.6（拉普拉斯定理）知，

$\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{近似}{\sim}N(np,np(1-p))$，故选项 C 错误。

(D) 由(C)知 $\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{近似}{\sim}N(np,np(1-p))$，则 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$，

$$所以P(a<\sum_{i=1}^{n}X_i<b)=P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\approx\Phi_0\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

故选项 D 错误。

9. 由§6.3.2 定理 6.6 知 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})=N(1,1)$，所以 $\frac{\bar{X}-1}{1}\sim N(0,1)$，B 正确。

10. $D(X+Y)=D(X-Y)$，

即 $DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)$，

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$，所以 X 与 Y 不相关，此时，X 与 Y 不一定独立。B 正确。

二、填空题

1. $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2$，所以 $P(AB)=0.3$，$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$。

2. 设 A 表示第 9 个人抓到电影票。试验相当于将 10 个纸团分给 10 个人，共有 $10!$ 种分法。要完成事件 A，则从 4 张写有电影票的纸团中取出 1 个，给第 9 个人（有 C_4^1 种取法），再将剩下的 9 个纸团分给剩下的 9 个人（有 $9!$ 种分法），所以完成事件 A，共有 $C_4^1\cdot 9!$ 种方法。所以 $P(A)=\dfrac{C_4^1\cdot 9!}{10!}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$。

3. 因为 $X\sim P(2)$，所以 $EX=DX=2$。又 $DX=EX^2-(EX)^2$，所以 $EX^2=6$。

4. 设 X 表示 10 次射击中命中的次数，则 $X\sim B(10,0.2)$。由课本 §2.3.1 最可能值的定义知，$(n+1)p=(10+1)\times 0.2=2.2$，所以 $k_0=2$。

5. $EZ=EX-2EY+7=0$，$DZ=DX+4DY=5$，所以 $Z\sim N(0,5)$。

6. $DX=EX^2-(EX)^2=1$，所以 $X\sim N(-1,1)$，由课本定理 6.6 知 $\bar{X}\sim N(-1,\dfrac{1}{n})$。

7. 此为几何概型，$P(Y\le 4)$ 表示随机点 Y 落在区间 $[0,4]$ 中的概率（随机点落在哪个数表示哪个数被取到了），因此 $P(Y\le 4)$ 即为区间 $[0,4]$ 的长度与区间 $[0,10]$ 的长度的比值，所以 $P(Y\le 4)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$。

三、计算题

1. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 得，$1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x dx=A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2A$，所以 $A=\dfrac{1}{2}$。

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=0$；

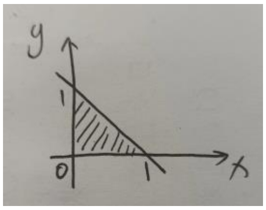
当$-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$时，$F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos t dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{1}{2}(\sin x+1)$；

当$x\ge\frac{\pi}{2}$时，$F(x)=1$。

所以$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(3) $P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $P(X=\frac{5\pi}{4})=0.$

2. (1) 区域D的图像如下图：



$S_D=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，所以$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

(2) $0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{-x+1}2dy=-2x+2$。

所以$f_X(x)=\begin{cases}-2x+2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，同理，$f_Y(y)=\begin{cases}-2y+2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

(3) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{-x+1}2xydy=\frac{1}{12}$，

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{0}^{1}x(-2x+2)dx=\frac{1}{3}$，同理，$EY=\frac{1}{3}$，

所以$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=-\frac{1}{36}$。

3．因为总体X服从参数为λ的泊松分布（$\lambda>0$），所以

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$$

似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$，

取对数，得 $\ln L(\lambda)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i!$

求导数，得 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$

极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$。

四、综合应用题

1. (1) 设A_i表示“选中第i箱”，B_j表示“第j次取到合格品”（$i,j=1,2$），

则有$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(B_1|A_1)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$，$P(B_1|A_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$。

由全概率公式得

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0.4$$

(2) 由条件知 $P(B_1B_2|A_1)=\frac{10}{50}\times\frac{9}{49},P(B_1B_2|A_2)=\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}$。

则有$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|A_2)}{P(B_1)}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}}{0.4}=\frac{\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}}{0.8}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}(\frac{9}{49}+\frac{51}{29})}{0.8}=\frac{1}{5}(0.184+1.759)=0.4856$$

2. 设第i个数的误差为X_i，则X_i（$i=1,2,\cdots,1500$）独立同分布，且$EX_i=0,$，

$DX_i=\frac{1}{12}$，$E(\sum_{i=1}^{1500}X_i)=1500\times 0=0, D(\sum_{i=1}^{1500}X_i)=1500\times\frac{1}{12}=125$。

由中心极限定理得$\sum_{i=1}^{1500}X_i$近似服从$N(0,125)$，所以

$$P(|\sum_{i=1}^{1500}X_i|>15)=1-P(|\sum_{i=1}^{1500}X_i|\le 15)=1-P(\frac{|\sum_{i=1}^{1500}X_i|}{\sqrt{125}}\le\frac{15}{\sqrt{125}})$$

$$\approx 1-[2\Phi_0(\frac{15}{\sqrt{125}})-1]=2-2\Phi_0(\frac{3}{\sqrt{5}})=2-2\times 0.90988$$

$$=0.18024$$

3. 设圆心的坐标为$(0,0)$，则搜救队到达着陆点所需路程为$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$。

设$G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$，则$(X，Y)$的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9\pi},(x,y)\in G\\ 0, \quad 其他\end{cases}$。

下求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数：

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$，

(1) 当$z<0$时，$F_Z(z)=P(\Phi)=0$。

(2) 当$0\le z<3$时，$F_Z(z)=P(X^2+Y^2\le z^2)=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}f(x,y)dxdy$

$$= \iint_{x^2+y^2\le z^2} \frac{1}{9\pi} dxdy = \frac{1}{9\pi} \times \pi z^2 = \frac{z^2}{9}$$

(3) 当 $z \ge 3$ 时， $F_Z(z) = P(X^2+Y^2 \le z^2) = \iint_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)dxdy$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 3^2} \frac{1}{9\pi} dxdy = \frac{1}{9\pi} \times \pi 3^2 = 1$$

所以 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ \dfrac{z^2}{9}, & 0 \le z < 3 \\ 1, & z \ge 3 \end{cases}$，

密度函数为 $f_Z(z) = [F_Z(z)]' = \begin{cases} \dfrac{2z}{9}, & 0 \le z < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

五．证明题

证明：$P(A) > 0$，则 $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}$，

由于 $A\bar{B} \subset \bar{B}$，所以 $P(A\bar{B}) \le P(\bar{B})$，从而 $P(B|A) \ge 1 - \dfrac{P(\bar{B})}{P(A)}$.

附加题：我不是密接。我是阳性。~~~绝绝子~~~