一、选择题

1. $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1\Rightarrow P(AB)=P(B)$，

所以$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$，选项 C 正确。

2. 例：(1) 掷骰子试验中，设$A=\{偶数点\}$，$B=\{2点\}$，则$AB\neq\Phi$，且$P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(AB)=P(B)=\dfrac{1}{6}$，所以$P(AB)\neq P(A)P(B)$，故A与B不独立。

(2) 设A为任意事件且$A\neq\Phi$，$B=\Omega$，则$AB\neq\Phi$。因为$P(AB)=P(A)$，$P(B)=1$，所以$P(AB)=P(A)P(B)$，故A与B独立。

由(1)(2)知$AB\neq\Phi$时，A与B可能独立，也可能不独立。故选项 B 正确。

例：(3) 设A为任意事件，$B=\Phi$，则$AB=\Phi$，因为$P(AB)=P(A)P(B)$，故A与B独立。

(4) 设A与B为任意事件，满足$P(A)>0$，$P(B)>0$，$AB=\Phi$，则$P(AB)=0$，$P(A)P(B)>0$，因为$P(AB)\neq P(A)P(B)$，故A与B不独立。

由(3)(4)知$AB=\Phi$时，A与B可能独立，也可能不独立。故选项 C 和 D 错误。

3. 由§2.2.2 结论 1、结论 2 知，选项 A 和 B 错误。

（结论 1：概率为 0 的事件不一定是不可能事件。

例：设X是连续型随机变量，则$P(X=x_0)=0$，但$\{X=x_0\}$不是不可能事件Φ。

（Φ是空集，但$\{X=x_0\}$不是空集）

结论 2：概率为 1 的事件不一定是必然事件。

例：设X是连续型随机变量，则$P(\Omega-\{X=x_0\})=1$，但$\Omega-\{X=x_0\}$不是必然事件Ω。）

(C) $P(X^2=1)=P(X=1)+P(X=-1)=p \not\Rightarrow P(X=1)=p$，选项 C 错误。

(D) 由§2.4.2 例 1 结论（若$X\sim U[a,b]$，则$kX+c\sim U[ka+c,kb+c](k\neq 0)$）知，若$X\sim U[0,1]$，则$2X\sim U[0,2]$，故选项 D 正确。

4. X有密度函数$f(x)$，说明X是连续型随机变量，由课本(2.2.6)式知 C 正确。

5. 设A_i表示第i天下雨($i=1,2$)，则$P(A_1)=0.2$， $P(A_2)=0.3$， $P(A_1A_2)=0.1$。由课本§1.2.5 性质(iv)(1)知, $P(A_1\bar{A}_2)=P(A_1-A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.1$，故 A 正确。

6. 设$Y=2X$，则$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X\le y)=P(X\le \frac{y}{2})=F_X(\frac{y}{2})$，

两边对y求导，得 $f_Y(y)=\frac{dF_X(\frac{y}{2})}{dy}\overset{(令u=\frac{y}{2})}{=}\frac{dF_X(u)}{dy}=\frac{dF_X(u)}{du}\cdot\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}f_X(u)$

$$=\frac{1}{2}f_X(\frac{y}{2})=\frac{1}{2\pi(1+\frac{y^2}{4})}=\frac{2}{\pi(4+y^2)}$$

所以 $f_{2X}(x)=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$，选项 B 正确。

7. 由课本§3.3.1 例 3 结论（若$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，X,Y独立，则$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$）知，$Z=X+Y\sim P(6)$。所以$P(Z=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{6^k}{k!}e^{-6}$，

故$P(Z=2)=\frac{6^2}{2!}e^{-6}=18e^{-6}$，选项 C 正确。

8. (A) $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow X,Y$不相关，但$X,Y$不一定独立。选项 A 错误。（参考§4.4.2 讲义中独立与不相关的关系：X,Y独立时，一定有X,Y不相关。X,Y不相关时，不一定有X,Y独立。）

(B)(C) 由课本(4.4.3)式知，$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$，因为$\rho_{XY}=0$，所以$\mathrm{cov}(X,Y)=0$，故$D(X\pm Y)=DX+DY$，选项 B 正确，选项 C 错误。

(D) 无此性质，选项 D 错误。

二、填空题

1. 因为A,B,C独立，则由定理 1.6 知$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$独立。

所以$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$

$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

2. 设A表示第m次取出的是白球。试验相当于将$a+b$个球分给$a+b$个人，共有$(a+b)!$种分法。要完成事件A，则从a个白球中取出1个，给第m个人（有C_a^1种取法），再将剩下的$a+b-1$个球分给剩下的$a+b-1$个人（有$(a+b-1)!$种分法），所以完成事件A，共有$C_a^1(a+b-1)!$种方法。所以$P(A)=\dfrac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\dfrac{a}{a+b}$。（本题的解法不止一种，这里写的是最简单的一种解法。只考虑前m个球也可以，其他解法可参考课本§1.2.2 例 7 的讲解。）

3. 设$A=\{X\le\frac{1}{2}\}$，则$\bar{A}=\{X>\frac{1}{2}\}$，$P(A)=P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{9}xdx=\frac{1}{9}x^2\big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{36}$。

对X的三次独立重复观察即为三重伯努利试验（每次试验的结果为$\{A,\bar{A}\}$），Y表示A出现的次数，所以$Y\sim B(3,\frac{1}{36})$，故$P(Y=2)=C_3^2(\frac{1}{36})^2(\frac{35}{36})=\frac{105}{36^3}$。

4. 由课本§2.3.1 内容知，因为$(n+1)p=(4+1)\times0.8=4$，所以$k_0=4$或 3。

5. $EY=2EX-3=2\times2-3=1$，$DY=D(2X-3)=4DX=4\times9=36$，

所以$Y\sim N(1,36)$。

6. $P(Y=1|X=1)=\dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=0$，所以$P(X=1,Y=1)=a=0,$ 又$a+b=0.1,$

所以$b=0.1$。故$a=0,b=0.1$。

三、计算题

1. 设A_i表示“由第i台机器加工”（i=1,2），B表示“合格品”，

则$P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(B|A_1)=0.97,P(B|A_2)=0.98$，由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=\frac{2.92}{3}=0.9733$$

2. (1) $P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}\dfrac{1000}{x^2}dx=\left(-\dfrac{1000}{x}\right)\Big|_{1500}^{+\infty}=\dfrac{2}{3}$

(2) 所求 4 只元件寿命都大于 1500 小时的概率为

$$\{P(X>1500)\}^4=(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$$

3.设第i袋盐的重量为X_i千克（$i=1,2,\cdots,100$）．则X_i独立同分布，$EX_i=1$，

$DX_i=0.01$。一箱盐的重量为$\sum_{i=1}^{100}X_i$，$E(\sum_{i=1}^{100}X_i)=100,\ D(\sum_{i=1}^{100}X_i)=1$。

由中心极限定理得：$\sum_{i=1}^{100}X_i$近似服从$N(100,1)$，所以

$$
\begin{aligned}
P(0.98\le\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i\le1.02)&=P(98\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le102)\\
&\approx\Phi(102)-\Phi(98)=\Phi_0(2)-\Phi_0(-2)\\
&=2\Phi_0(2)-1=0.9545
\end{aligned}
$$

4. $P(U=1,V=1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(U=1,V=2)=0$，$P(U=1,V=3)=0$，

$$
\begin{aligned}
P(U=2,V=1)&=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)\\
&=P(X=2)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},
\end{aligned}
$$

$P(U=2,V=2)=P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(U=2,V=3)=0$,

$$
\begin{aligned}
P(U=3,V=1)&=P(X=3,Y=1)+P(X=1,Y=3)\\
&=P(X=3)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=3)\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(U=3,V=2)&=P(X=3,Y=2)+P(X=2,Y=3)\\
&=P(X=3)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=3)\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},
\end{aligned}
$$

$P(U=3,V=3)=P(X=3,Y=3)=P(X=3)P(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

所以(U,V)的联合分布为

$U \backslash V$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

U,V 的边缘分布为

U	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

V	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

由于 $P(U=1,V=1)\neq P(U=1)P(V=1)$，所以$U,V$ 不独立。

5. (1) 已知 $EX=\frac{1}{\lambda}$，由矩估计的思想，令 $EX=\bar{X}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$.

(2) X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$

似然函数为 $$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数得 $$ln\,L(\lambda)=n\,ln\,\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求导得 $$\frac{d\,ln\,L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\frac{1}{\bar{X}}$。

四、证明题

证明: $DX = p(1-p)$，由于 $(p-\frac{1}{2})^2 \geq 0$，所以 $p^2 - p + \frac{1}{4} \geq 0$，

则有 $DX = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$。

附加题：C　学概率长知识~~~