1.有两个口袋，甲袋中装有两个白球三个黑球，乙袋中装有两个白球两个黑球。由甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋中取出一球。(1)求从乙袋中取到白球的概率。(2)若发现从乙袋中取到的是白球，求从甲袋中取出放入乙袋的球是白球的概率。

解：设 $A=\{从甲袋中取到白球\}, B=\{从乙袋中取到白球\},$

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$

(2) $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{12}{25}}=\frac{1}{2}$

2.设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx+1, 0<x<2\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$，

求(1)常数 $k$；(2) $P\{X>0.5\}$；(3)分布函数 $F(x)$。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 (kx+1)dx=1,$ 解得 $k=-\frac{1}{2}$

所以 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1, 0<x<2\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

(2) $P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0.5}^{2}(-\frac{1}{2}x+1)dx=\frac{9}{16}$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$,

$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$

$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x(-\frac{1}{2}t+1)dt=-\frac{1}{4}x^2+x;$

$x\ge 2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^2(-\frac{1}{2}t+1)dt+\int_2^x 0dt=1;$

所以 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{1}{4}x^2+x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

3.设 $(X,Y)$ 的分布函数为 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$，

求(1)边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$；(2)判断 $X$ 与 $Y$ 是否独立；

(3) $P\{0<X\le 2, 0<Y\le\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

解：(1) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}$

$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y$

(2) 因为 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 $X$ 与 $Y$ 相互独立。

(3) 解法一：因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则由课本§3.2.4 定理 3.1 知，与 $X,Y$ 有关的所有事件独立。所以事件 $\{0<X\le 2\}$ 与事件 $\{0<Y\le\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ 独立。故

$$P(0<X\le 2,0<Y\le\frac{\sqrt{3}}{3})=P(0<X\le 2)P(0<Y\le\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$=[F_X(2)-F_X(0)][F_Y(\frac{\sqrt{3}}{3})-F_Y(0)]$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan 0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan 0)$$

$$=(\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}-0)(\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{6}-0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

解法二：$P(0<X\le 2,0<Y\le\frac{\sqrt{3}}{3})=F(2,\frac{\sqrt{3}}{3})-F(0,\frac{\sqrt{3}}{3})-F(2,0)+F(0,0)$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan 1)(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{3}}{3})-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan 0)(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan 1)(\frac{\pi}{2}+\arctan 0)+\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan 0)(\frac{\pi}{2}+\arctan 0)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+0)(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}+0)+\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+0)(\frac{\pi}{2}+0)$$

$$=\frac{1}{24}$$

4.已知连续型随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，

求(1)常数 $A,B$;(2) $X$ 的密度函数 $f(x)$;(3) $P(0<2X<2)$.

解：(1) $\begin{cases}F(-\infty)=A+B\cdot(-\frac{\pi}{2})=0\\F(+\infty)=A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{\pi}\end{cases}$

(2) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$, 所以 $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

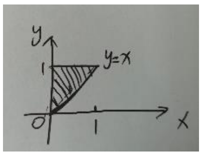
(3) $P(0<2X<2)=P(0<X<1)=F(1)-F(0)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan 0=\frac{1}{4}$$

5.设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1)求边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$;(2)判断 $X$ 与 $Y$ 是否独立；(3)求 $P\{X+Y<1\}$

解：(1) $f(x,y)$ 在下图三角形区域内取值非零。




$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$; $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_x^1 2dy=2-2x$.

所以 $f_X(x)=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

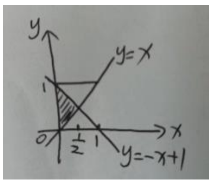
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$; $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y$.

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) 因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 $X$ 与 $Y$ 不独立。

(3)积分区域为下图阴影区域：




$$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{y<-x+1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_x^{-x+1}2dy)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx=\frac{1}{2}$$

6. 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其他. \end{cases}$，求 $P\{X>1,Y>1\}$

解：$P\{X>1,Y>1\}=\int_1^{+\infty}(\int_1^{+\infty} e^{-x}\cdot e^{-y}dy)dx=\int_1^{+\infty} e^{-x}dx\cdot\int_1^{+\infty} e^{-y}dy$

$$=(-e^{-x})|_1^{+\infty}\ (-e^{-y})|_1^{+\infty}=e^{-2}$$

7.若随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0\le x\le 2 \\ 0, & 其他. \end{cases}$，且 $P\{-1\le X\le 1\}=\dfrac{3}{4}$，

(1)求常数 $a,b$ 的值；(2)分布函数值 $F(1)$。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2(ax+b)dx=(\frac{1}{2}ax^2+bx)|_0^2=2a+2b=1$，

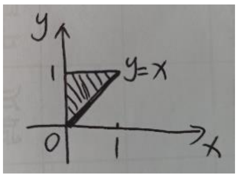
$P\{-1\le X\le 1\}=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=(\frac{1}{2}ax^2+bx)|_0^1=\frac{1}{2}a+b=\frac{3}{4}$，

所以 $\begin{cases} a+b=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a+b=\frac{3}{4} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$

(2) $F(1)=P\{X\le 1\}=\int_{-\infty}^1 f(x)dx=\int_0^1(-\frac{1}{2}x+1)dx=(-\frac{1}{4}x^2+x)|_0^1=\frac{3}{4}$

8. 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 12x^2, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$，求 $P\{|Y|<\frac{1}{2}\}$

解法一：$f(x,y)$ 在下图三角形区域内取值非零。



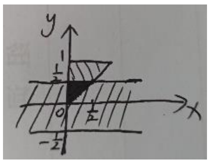

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$y<0$或$y>1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$; $0\le y\le 1$时，$f_Y(y)=\int_0^y 12x^2dx=4y^3$.

所以 $f_Y(y)=\begin{cases} 4y^3, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$P\{|Y|<\frac{1}{2}\}=P\{-\frac{1}{2}<Y<\frac{1}{2}\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)dy=\int_0^{\frac{1}{2}} 4y^3dy=\frac{1}{16}.$

解法二：令 $G=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\}$，则实际积分区域为下图黑色三角形区域：



$$P\{|Y|<\frac{1}{2}\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_x^{\frac{1}{2}}12x^2dy)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x^2-12x^3)dx=\frac{1}{16}$$

注：两种方法，选一种自己喜欢的即可。

9.设离散型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}k, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<0\\ 0.8, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

求(1)常数 $k$ 的值。(2) $X$ 的概率分布。(3) $P\{X<1.1\mid X\neq 0\}$。

解：(1) $k=0.$

(2)

| $X$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $0.3$ | $0.5$ | $0.2$ |

(3) $P\{X<1.1\mid X\neq 0\}=\dfrac{P(\{X<1.1\}\cap\{X\neq 0\})}{P(X\neq 0)}=\dfrac{P(X=-1)}{P(X=-1)+P(X=2)}$

$$=\frac{0.3}{0.3+0.2}=\frac{3}{5}$$

10.盒子中有 10 个乒乓球，其中 5 个是新球，第一次比赛时任取一个球使用，用完后放回，第二次比赛时任取两个球，(1)求第二次取出的球都是新球的概率；(2)若发现第二次取出的两球都是新球，求第一次取出的球也是新球的概率。

解：设 $A=\{$第一次取到新球$\}$, $B=\{$第二次取出的两个都是新球$\}$,

(1) $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}+\dfrac{5}{10}\times\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{8}{45}$

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{\frac{5}{10}\times\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{\frac{8}{45}}=\dfrac{3}{8}$

11. 设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}+a\arcsin x, & -1\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

求(1)常数 $a$ 的值。(2)密度函数 $f(x)$。(3) $P\{|X|<\frac{1}{2}\}$。

解：(1)因为 $F(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to -1^-}F(x)=F(-1)$，即 $\frac{1}{2}+a\arcsin(-1)=0$，

所以 $\frac{1}{2}+a\times(-\frac{\pi}{2})=0$，解得 $a=\frac{1}{\pi}$。

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(3) $P(|X|<\frac{1}{2})=P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})$

$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2}))=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\pi}\times(-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$

附加题：找出谁是卧底~~~