一、填空题

1．试验相当于将 10 个球放入 10 个空格，则第三个空格放的是黑球的概率为

$\frac{C_3^1 \cdot 9!}{10!} = \frac{3}{10} = 0.3$。

2． $P(\bar{A}B) = P(B-A) = P(B) - P(AB)$，

则 $P(AB) = P(B) - P(\bar{A}B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$，

所以 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.2 = 0.3$。

3． $0.48 \times 0.05 + 0.52 \times 0.3 = 0.18$。

4．设 X 表示顾客人数，则 $X \sim P(10)$， $P(X=k) = \frac{10^k}{k!} e^{-10}, k = 0,1,2,\cdots$

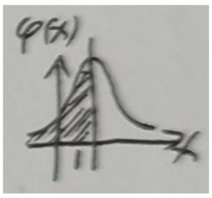
$P(X \ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} - \frac{10}{1!} e^{-10} = 1 - 11e^{-10}$。

5．由§3.1.3 例 5 结论（若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$）知，$X \sim N(1,1)$，$Y \sim N(1,4)$。因为 $\rho = 0$，则由§4.4.2 结论（若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$）知，X,Y 独立。

$E(2X-Y) = 2EX - EY = 2\times 1 - 1 = 1$， $D(2X-Y) = 4DX + DY = 4\times 1 + 4 = 8$。

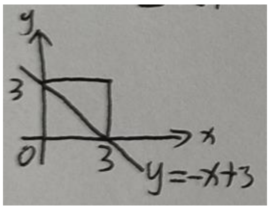
由§3.3.2 例 2 结论（若 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$ 独立，则 $aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$）知，$2X - Y \sim N(1,8)$，所以

$P(2X - Y < 1) = 0.5$（对称轴为 $\mu = 1$，则 $P(2X - Y < 1)$ 恰为总面积的一半 0.5）



6． $S(G) = 3\times 3 = 9$，所以 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 0 < x \le 3, 0 < y \le 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

图像如下图：



$$P(X+Y\le 3)=\iint\limits_{y\le -x+3} f(x,y)dxdy=\int_0^3(\int_0^{-x+3}\frac{1}{9}dy)dx=\frac{1}{9}\int_0^3(3-x)dx=0.5\ 。$$

7． $\mathrm{cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{cov}(X,X)-\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Y,X)-\mathrm{cov}(Y,Y)$

$$=DX-DY=-5$$

8．由§6.3.2 定理 6.6 知，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，

所以$E\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=n-1$， $D\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=2(n-1)$。

由$\frac{1}{\sigma^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=n-1$可得$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=(n-1)\sigma^2$，

由$\frac{1}{\sigma^4}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=2(n-1)$可得$D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=2(n-1)\sigma^4$。

二、判断题

1．正确。$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le 1$，则$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1>0$，

所以$AB\ne\Phi$，即A,B相容。

2．正确。由§2.3.2 例 3 结论（指数分布的无记忆性）即知。

3．错误。由§4.4.2 内容知，若X,Y独立，则必有$\rho=0$。但$\rho=0$时，未必有X,Y

独立（特殊情况：若(X,Y)服从二维正态分布，则X,Y独立$\Leftrightarrow\rho=0$）。

4．错误。由§6.3.1 定理 6.5 知，缺少了“X,Y独立”的条件。

三、选择题

1．因为$A\subset B$，所以$P(AB)=P(A)$，又$P(B)\le 1$，

所以$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\ge P(A)$，选项 B 正确。

2． $F(2)=P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.8$，选项 C 正确。

3． $D(X+2Y)=E(X+2Y)^2-[E(X+2Y)]^2$，又 $E(X+2Y)=EX+2EY=0$，

$D(X+2Y)=DX+4DY=5$，所以 $E(X+2Y)^2=5$，选项 C 正确。

4. $X\sim U[2,3]$，所以 $EX=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2}$，$DX=\dfrac{(3-2)^2}{12}=\dfrac{1}{12}$。由 $DX=EX^2-(EX)^2$ 得，

$EX^2=DX+(EX)^2=\dfrac{19}{3}$，所以 $E(2X-X^2)=2EX-EX^2=-\dfrac{4}{3}$，选项 A 正确。

5．设 X 表示一周内正常的天数，则 $X\sim B(7,\dfrac{3}{4})$。由§2.3.1 最可能值的定义知，

因为 $(n+1)p=8\times\dfrac{3}{4}=6$，所以 $k_0=5$ 或 6。选项 B 正确。

四、计算题

1. $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$，

$P\{X<EX\}=P\{X<\dfrac{2}{3}\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{9}$.

2. (1) 由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，有：

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}4e^{-2(x+y)}dy=2e^{-2x}$；当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=0$。

所以，X 的边缘概率密度函数为：$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0\\ 0,\ 其他.\end{cases}$

同理可得 Y 的边缘概率密度函数为：$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0,\ 其他.\end{cases}$

(2) $P\{(X,Y)\in G\}=\int_0^1dx\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy=\int_0^1(-2e^{-2}+2e^{-2x})dx=1-3e^{-2}$.

3. (1) $EZ=E(3X+2Y)=3EX+2EY=3\times1+2\times0=3$。

(2) $DZ=D(3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)+2\mathrm{cov}(3X,2Y)$

$=9DX+4DY+12\mathrm{cov}(X,Y)=9DX+4DY+12\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

$=9\times9+4\times16+12\times(-0.5)\times3\times4=73$

4. (1) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}, x>0\\ 0,\quad x\le 0\end{cases}$，$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-y}, y>0\\ 0,\quad y\le 0\end{cases}$.

(2) 因为 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立。

(3) 解法一： $P(-1<X\le 1,Y\le 1)=F(1,1)-F(1,-\infty)-F(-1,1)+F(-1,-\infty)$

$$=F(1,1)-0-F(-1,1)+0$$

$$=(1-3^{-1}-3^{-1}+3^{-2})-0=\frac{4}{9}$$

解法二：因为 X 与 Y 相互独立，则由课本 § 3.2.4 定理 3.1 知，与 X,Y 有关的所有事件独立。所以事件 $\{-1<X\le 1\}$ 与事件 $\{Y\le 1\}$ 独立。故

$$P(-1<X\le 1,Y\le 1)=P(-1<X\le 1)P(Y\le 1)$$

$$=[F_X(1)-F_X(-1)][F_Y(1)]=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

(4) $f_X(x)=[F_X(x)]'=\begin{cases}3^{-x}\ln 3, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$

五、应用题

1.设 X 表示 500 粒麦种中的发芽数，则 $X\sim B(500,0.8)$, $EX=400, DX=80$.

由中心极限定理知, X 近似服从 $N(400,80)$， 所以

$$P\{\left|\frac{X}{500}-0.8\right|\le 2\%\}=P\{|X-400|\le 10\}=2\Phi_0(\frac{10}{\sqrt{80}})-1$$

$$=2\Phi_0(1.12)-1=0.7372$$

2. X 的可能取值为 3，4，5.

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}=0.1$， $P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}=0.3$， $P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=0.6$，

所以

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

3. 设 B 表示该生取得资格， A_i 表示第 i 次考试及格， $i=1,2$ 。则 $P(A_1)=p$，

$P(A_2\mid A_1)=p$， $P(A_2\mid \bar{A}_1)=\frac{p}{2}$ 。

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid \bar{A}_1)$$

$$=p^2+(1-p)\frac{p}{2}=\frac{p}{2}+\frac{p^2}{2}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=p^2$$

所以$P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2$

附加题：想啥呢~就是你呀~只要用心，每个人都会闪闪发光的~~~