MSA08 – FUNGSI TRANSENDEN

PERINGATAN HAK CIPTA

Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep fungsi transenden dalam membuat persamaan diferensial dan menghitung aproksimasi persamaan diferensial (C3, A3).

Materi

1. Fungsi logaritma alami
2. Fungsi invers dan turunannya
3. Fungsi eksponen alami
4. Fungsi eksponen dan logaritma umum
5. Pertumbuhan dan peluruhan eksponen
6. Persamaan diferensial linier orde pertama
7. Aproksimasi untuk persamaan diferensial
8. Fungsi invers trigonometri dan turunannya
9. Fungsi hiperbola dan inversnya

1. Fungsi Logaritma Alami

Fungsi Logaritma Alami (1)

Fungsi logaritma alami, dinotasikan dengan $\ln$, didefinisikan oleh:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

Daerah asal fungsi logaritma alami adalah himpunan bilangan real positif.

Turunan dari Fungsi Logaritma Alami

$$D_x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = D_x \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Jika dikombinasikan dengan aturan rantai ($u = f(x) > 0$), maka

$$D_x \ln x = \frac{1}{u} D_x u$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Tentukan $D_x \ln \sqrt{x}$.

Solusi. Ambil $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Maka

$$D_x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot D_x\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x}$$

Contoh 1.2. Tentukan $D_x \ln(x^2 - x - 2)$.

Solusi. Nilai logaritma alami selalu positif, jadi nilai $x^2 - x - 2 > 0$, dengan kata lain $x < -1$ atau $x > 2$. Sehingga domain dari $\ln(x^2 - x - 2)$ adalah $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Pada domain ini,

$$D_x \ln(x^2 - x - 2) = \frac{1}{x^2 - x - 2} D_x(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

Fungsi Logaritma Alami (2)

Integral dari Fungsi Logaritma Alami

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c, \qquad u \neq 0$$

Contoh 1.3. Hitunglah $\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2}\,dx$.

Solusi. Ambil $u = 10 - x^2$, maka $du = -2x\,dx$. Sehingga

$$\int \frac{x}{10 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{10 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|10 - x^2| + C$$

Dengan Teorema Dasar Kalkulus Kedua, diperoleh

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|10 - x^2|\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 9$$

1.1. Sifat-Sifat Logaritma Alami

Jika a dan b merupakan bilangan positif dan r sembarang bilangan rasional, maka

(i) $\ln 1 = 0;$

(ii) $\ln ab = \ln a + \ln b;$

(iii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\,;$

(iv) $\ln a^r = r \ln a.$

Contoh 1.4. Tentukan dy/dx jika $y = \ln \sqrt[3]{(x-1)/x^2}$, $x > 1$.

Solusi.

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}[\ln(x-1) - \ln x^2]$$

$$= \frac{1}{3}[\ln(x-1) - 2\ln x]$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right] = \frac{2-x}{3x(x-1)}$$

1.2. Diferensiasi Logaritmik

Metode pencarian turunan yang melibatkan hasil bagi, hasil kali atau pangkat dengan menggunakan fungsi logaritma alami disebut sebagai **diferensiasi logaritmik**.

Contoh 1.5. Carilah turunan dari $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$.

Solusi.

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(1-x^2)} - \frac{2}{3(x+1)} = \frac{-(x+2)}{3(1-x^2)}$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)} = \frac{-\sqrt{1-x^2}(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)} = \frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)^{1/2}}$$

1.3. Integral Trigonometri

Beberapa integral trigonometri dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi logaritma alami.

Contoh 1.6. Hitunglah $\int \tan x$.

Solusi. Karena $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ diambil $u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$, diperoleh

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x}(-\sin x\, dx) = -\ln|\cos x| + C$$

Contoh 1.7. Hitunglah $\int \sec x \csc x\, dx$.

Solusi. Gunakan identitas trigonometri $\sec x \csc x = \tan x + \cot x$.

Maka $\int \sec x \csc x\, dx = \int (\tan x + \cot x)\, dx = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C$

2. Fungsi Invers dan Turunannya

2.1. Fungsi Invers (1)

- Suatu fungsi f membawa nilai x dari domain D dan memasangkan-nya dengan suatu nilai y di daerah hasil R.
- Proses tersebut dapat dibalik, yakni untuk setiap y pada R, dapat dicari nilai x dari mana nilai tersebut berasal.
- Fungsi baru yang membawa y dan memasanggkan x dinotasikan dengan f^{-1}. Fungsi ini disebut sebagai fungsi invers dari f.
- Suatu fungsi f memiliki invers jika f merupakan fungsi satu-satu dan f monoton murni (fungsi naik atau fungsi turun saja).

Contoh 2.1. Perlihatkan bahwa $f(x) = x^5 + 2x + 1$ memiliki invers.

Solusi. $f'(x)5x^4 + 2 > 0$ untuk semua x. Jadi fungsi f monoton naik pada sepanjang garis bilangan real sehingga f memiliki invers.

2.1. Fungsi Invers (2)

- Jika f memiliki invers f^{-1}, maka f^{-1} memiliki invers f, dituliskan

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \text{ dan } f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

Contoh 2.2. Perlihatkan bahwa $f(x) = 2x + 6$ memiliki invers, cari formula untuk $f^{-1}(y)$ dan buktikan pernyataan diatas.

Solusi. Karena f adalah fungsi naik, f punya invers.

$$y = 2x + 6 \iff x = (y - 6)/2 = f^{-1}(y)$$

Perhatikan bahwa

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x + 6) = \frac{(2x + 6) - 6}{2} = x$$

dan

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{x - 6}{2}\right) = 2\left(\frac{y - 6}{2}\right) + 6 = y$$

2.2. Fungsi $y = f^{-1}(x)$

- Andaikan f memiliki invers, maka

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

- Jika diketahui grafik fungsi $y = f(x)$, maka grafik dari $y = f^{-1}(x)$ adalah cerminan garfik fungsi $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.
- Untuk mencari formula untuk $f^{-1}(x)$ diperlukan tiga langkah sebagai berikut

  Step 1: Selesaikan persamaan $y = f(x)$ untuk x dalam bentuk y.

  Step 2: Gunakan $f^{-1}(y)$ untuk menggantikan posisi x.

  Step 3: Ganti y dengan x untuk memperoleh formula untuk $f^{-1}(x)$
- Sebelum mencoba ketiga langkah diatas untuk suatu fungsi f, cek terlebih dahulu apakah fungsi f memiliki invers.

CONTOH SOAL

Contoh 2.3. Tentukan $f^{-1}(x)$ jika $y = f(x) = x/(1-x)$.

Solusi. Berikut ketiga langkah untuk contoh ini.

Step 1:

$$y = \frac{x}{1-x}$$

$$(1-x)y = x$$

$$y - xy = x$$

$$x + xy = y$$

$$x(1+y) = y$$

$$x = \frac{y}{1+y}$$

Step 2:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Step 3:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

2.3. Turunan Fungsi Invers

Teorema Fungsi Invers

Andaikan f terdiferensiasi dan monoton murni pada interval I. Jika $f'(x) \neq 0$ untuk suatu x pada I, maka f^{-1} terdiferensiasi di titik $y = f(x)$ pada daerah hasil dari f dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{atau} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Contoh 2.4. Diketahui $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$, tentukan $(f^{-1})'(4)$.

Solusi. Tanpa mencari formula f^{-1}, perhatikan bahwa saat $y = 4$ nilai $x = 1$. Karena $f'(x) = 5x^4 + 2$, maka

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}$$

3. Fungsi Eksponen Alami

Fungsi Eksponen Alami

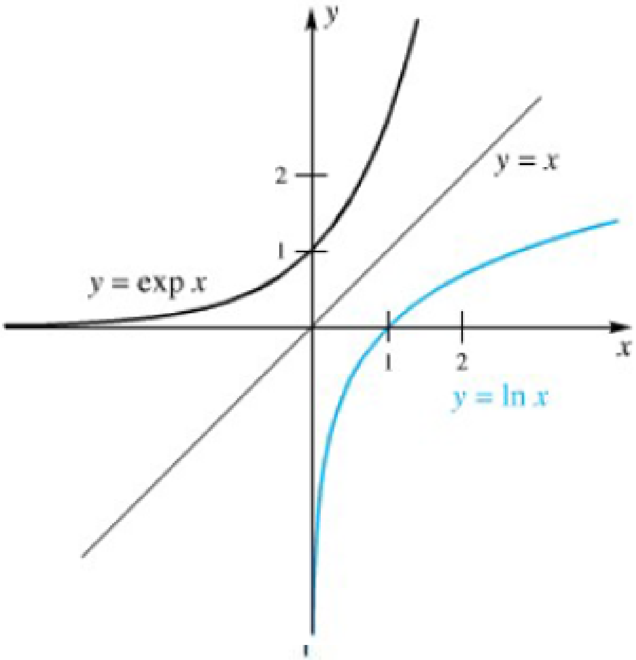
Invers dari fungsi logaritma alami, $\ln$, disebut fungsi eksponen alami dan dinotasikan dengan $\exp$. Jadi

$$x = \exp y \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x$$

Sehingga berlaku

1. $\exp(\ln x) = x, \qquad x > 0$
2. $\ln(\exp y) = y, \qquad$ untuk setiap y

Karena $\exp$ dan $\ln$ merupakan fungsi yang saling invers, maka grafik $y = \exp x$ adalah grafik $y = \ln x$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$.



3.1. Sifat-Sifat Fungsi Eksponen

- Untuk mengamati sifat-sifat dari fungsi eksponen, didefinisikan bilangan baru yaitu e yang memenuhi $\ln e = 1$. Dimana
$$e \approx 2.718281828459045$$
- Misalkan $x \in \mathbb{R}$, maka $\exp x = \exp(x \ln e) = \exp(\ln e^x) = e^x$.
- Dari sifat fungsi invers, diperoleh
  1. $e^{\ln x} = x, \qquad x > 0$
  2. $\ln(e^y) = y,$ untuk setiap y
- Jika a dan b sembarang bilangan real, maka
$$e^a e^b = e^{a+b} \quad \text{dan} \quad e^a / e^b = e^{a-b}$$

3.2. Turunan Fungsi Eksponen

Turunan dari e^x

$$D_x e^x = e^x$$

Jika $u = f(x)$ terdiferensiasi, maka berdasarkan Aturan Rantai

$$D_x e^u = e^u D_x u$$

Contoh 3.1. Tentukan $D_x e^{\sqrt{x}}$.

Solusi. Ambil $u = \sqrt{x}$, diperoleh

$$D_x e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Contoh 3.2. Tentukan $D_x e^{x^2 \ln x}$.

Solusi.

$$D_x e^{x^2 \ln x} = e^{x^2 \ln x} D_x(x^2 \ln x) = e^{x^2 \ln x}\left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x\right) = x e^{x^2 \ln x}(1 + \ln x^2)$$

3.3. Integral Fungsi Eksponen

Integral dari e^x

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \text{atau} \quad \int e^u \, du = e^u + c$$

Contoh 3.3. Hitunglah $\int e^{-4x}$.

Solusi. Ambil $u = -4x$, maka $du = -4\, dx$. Jadi

$$\int e^{-4x} \, dx = -\frac{1}{4}\int e^{-4x}(-4\, dx) = -\frac{1}{4}\int e^u \, du = -\frac{1}{4}e^u + c = -\frac{1}{4}e^{-4x} + c$$

Contoh 3.4. Hitunglah $\int x^2 e^{-x^3}$.

Solusi. Ambil $u = -x^3$, maka $du = -3x^2\, dx$. Jadi

$$\int x^2 e^{-x^3} \, dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}(-3x^2\, dx) = -\frac{1}{3}\int e^u \, du = -\frac{1}{3}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$$

4. Fungsi Eksponen dan Logaritma Umum

4.1. Fungsi a^x

Fungsi Eksponensial Basis a

Untuk $a > 0$ dan sembarang bilangan real x,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Sifat-Sifat Eksponen (a^x)

Jika $a > 0$, $b > 0$, dan x, y sembarang bilangan real, maka

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$

(ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

4.2. Aturan Fungsi a^x (1)

Aturan Turunan

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

Contoh 4.1. Tentukan $D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right)$.

Solusi. Ambil $u = \sqrt{x}$, dengan Aturan Rantai diperoleh

$$D_{x\left(3^{\sqrt{x}}\right)} = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 \cdot D_x\sqrt{x} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}$$

Contoh 4.2. Carilah dy/dx jika $y = (x^4+2)^5 + 5^{x^4+2}$.

Solusi.

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^4+2)^4 \cdot 4x^3 + 5^{x^4+2} \ln 5 \cdot 4x^3$$
$$= 4x^3\left[5(x^4+2)^4 + 5^{x^4+2} \ln 5\right] = 20x^3\left[(x^4+2)^4 + 5^{x^4+1} \ln 5\right]$$

4.2. Aturan Fungsi a^x (1)

Aturan Integral

$$\int a^x \, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, \qquad a \neq 1$$

Contoh 4.3. Hitunglah $\int 2^{x^3} x^2 \, dx$.

Solusi. Ambil $u = x^3$, maka $du = 3x^2 \, dx$. Jadi

$$\int 2^{x^3} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int 2^{x^3} (3x^2 \, dx) = \frac{1}{3} \int 2^u \, du = \frac{1}{3} \frac{2^u}{\ln 2} + C$$

$$= \frac{2^{x^3}}{3 \ln 2} + C$$

4.3. Fungsi $\log_a$

Misalkan a bilangan positif yang tidak sama dengan 1. Maka

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

Fungsi logaritma basis a juga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Sehingga

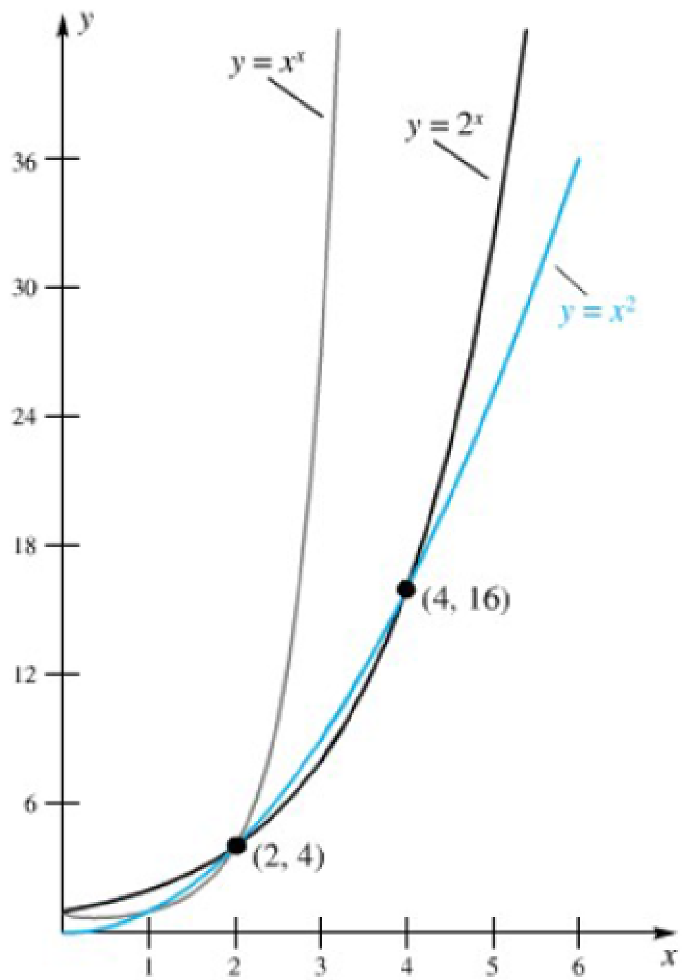
$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Contoh 4.4. Jika $y = \log_{10}(x^4 + 13)$, carilah dy/dx.

Solusi. Ambil $u = x^4 + 13$ dan gunakan Aturan Rantai, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4 + 13)\ln 10} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{(x^4 + 13)\ln 10}$$

4.4. Fungsi a^x, x^a, dan x^x (1)



Dengan membandingkan ketiga grafik pada gambar disamping, $f(x) = a^x$ merupakan fungsi eksponensial dan $f(x) = x^a$ adalah fungsi pangkat, dimana

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

$$D_x(x^a) = a\, x^{a-1}$$

Aturan integral berikut juga berlaku saat a merupakan bilangan irrasional.

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1$$

4.4. Fungsi a^x, x^a, dan x^x (2)

Terdapat formula untuk mencari turunan dari fungsi $f(x) = x^x$, namun dua metode berikut lebih sederhana untuk digunakan.

Metode 1

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Aturan Perkalian,

$$D_x y = e^{x \ln x} D_x(x \ln x)$$

$$= x^x \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right)$$

$$= x^x (1 + \ln x)$$

Metode 2

Dengan menggunakan diferensiasi logaritmik pada bagian 1.2. (slide 12)

$$y = x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} D_x y = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$D_x y = y(1 + \ln x)$$

$$D_x y = x^x (1 + \ln x)$$

CONTOH SOAL

Contoh 4.5. Jika $y = (x^2+1)^{\pi} + \pi^{\sin x}$, carilah dy/dx.

Solusi.

$$\frac{dy}{dx} = \pi(x^2+1) \cdot D_x(x^2+1) + \pi^{\sin x} \ln \pi \cdot \cos x$$

Contoh 4.6. Hitunglah $\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx$

Solusi. Ambil $u = 1/x$, maka $du = (-1/x^2)dx$. Jadi

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx = -\int 5^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\, dx\right) = -\int 5^u\, du = -\frac{5^u}{\ln 5} + C = -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C$$

Dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx = \left[-\frac{5^{1/x}}{\ln 5}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{\ln 5}(5^2 - 5) = \frac{20}{\ln 5} \approx 13.43$$

5. Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen

Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen (1)

- **Kasus:** Pada awal tahun 2014, populasi dunia sekitar 6,4 milyar. Dikatakan bahwa pada akhir tahun 2030 populasi dunia akan mencapai 7,9 milyar. Bagaimana prediksi tersebut dibuat?
- Untuk menyelesaikan kasus diatas secara matematika, dibentuk fungsi $y = f(t)$ yang menyatakan jumlah populasi dunia pada waktu t, dimana t adalah jumlah tahun setelah 2014.
- Nilai $f(t)$ merupakan bilangan bulat dan grafiknya akan "lompat" saat ada orang yang lahir atau meninggal.
- Untuk populasi yang besar, lompatan ini sangat kecil jika dibanding-kan dengan total populasi. Sehingga dapat diasumsikan bahwa f merupakan fungsi diferensial yang halus.

Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen (2)

Andaikan pertumbuhan populasi Δy (kelahiran dikurangi kematian) dalam jangka waktu Δt sebanding terhadap ukuran populasi pada awal periode dan panjang periode tersebut. Jadi,

$$\Delta y = ky\,\Delta t$$

atau

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

Diperoleh bentuk persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Jika $k > 0$, populasi bertumbuh; jika $k < 0$ populasi menyusut.

5.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial (1)

Untuk menyelesaikan $dy/dt = ky$ diambil nilai awal $y = y_0$ saat $t = 0$.

Dengan pemisahan variabel dan integral, diperoleh

$$\frac{dy}{y} = k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = kt + C$$

Dengan nilai awal $y = y_0$ saat $t = 0$ diperoleh $C = \ln y_0$. Sehingga

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

$$\boxed{y = y_0 e^{kt}}$$

Saat $k > 0$ pertumbuhan ini disebut **pertumbuhan eksponen**, dan saat $k < 0$ penyusutan populasi ini disebut sebagai **peluruhan eksponen.**

5.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial (2)

- Untuk kasus sebelumnya tentang populasi dunia, waktu t dihitung dalam tahun setelah 1 Januari 2014, dan y dalam milyar orang.
- Berdasarkan sejarah populasi dunia, kosntanta k sekitar 0.0132.
- Sehingga $y_0 = 6.4$ dan $k = 0.0132$, maka

$$y = 6.4\, e^{0.0132t}$$

Pada tahun 2030, saat $t = 16$, diprediksi nilai y sekitar

$$y = 6.4\, e^{0.0132(16)} \approx 7.9 \text{ milyar}$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 5.1. Jika populasi dunia pada awal tahun 2014 sekitar 6.4 milyar, berapa tahun yang diperlukan agar populasi meningkat dua kali lipat?

Solusi. Pertanyaan diatas sama dengan pertanyaan "Berapa tahun setelah 2014 populasi dunia mencapai 12.8 milyar?" Sehingga

$$12.8 = 6.4\ \mathrm{e}^{0.0132t}$$

$$2 = e^{0.0132t}$$

$$\ln 2 = 0.0132t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.0132} \approx 53 \text{ tahun}$$

CONTOH SOAL (2)

Contoh 5.2. Jumlah bakteria dalam suatu pembiakan yang bertumbuh dengan cepat sekitar 10.000 bakteria pada tengah hari dan 2 jam kemudian menjadi 40.000 bakteria. Tentukan prediksi jumlah bakteria pada pukul 17.00.

Solusi. Diasumsikan persamaan diferensial $dy/dt = ky$ berlaku untuk kasus ini, maka $y = y_0 e^{kt}$. Diketahui $y_0 = 10.000$ dan $y = 40.000$ saat $t = 2$, sehingga $40.000 = 10.000e^{k(2)}$ atau $4 = e^{2k}$. Diperoleh

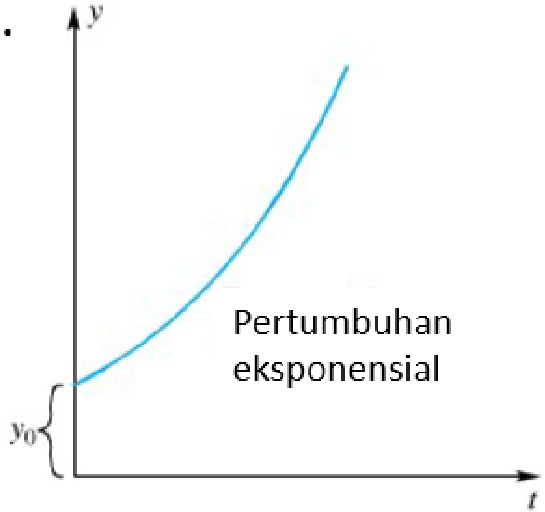
$$\ln 4 = 2k \quad \Leftrightarrow \quad k = \tfrac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2$$

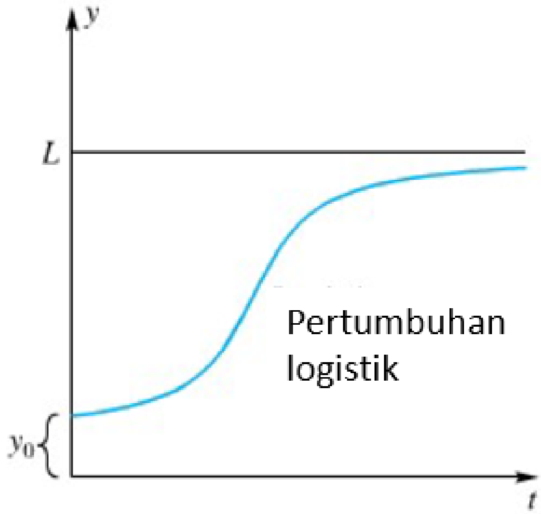
Sehingga $y = 10.000e^{(\ln 2)t}$ dan saat $t = 5$

$$y = 10.000e^{0,693(5)} \approx 320.000$$

5.2. Model Logistik (1)

- Model eksponensial $y = y_0 e^{kt}$, $k > 0$, untuk pertumbuhan populasi memiliki kecatatan karena populasi akan naik semakin cepat dan naik tak terhingga di masa depan.
- Pada kebanyakan kasus (termasuk populasi dunia), keterbatasan ruang dan sumber daya memaksa laju pertumbuhan yang lebih lambat.





5.2. Model Logistik (2)

- Oleh karena itu, dibuat model logistik yang menggangap laju pertumbuhan populasi y berbanding lurus dengan selisih $L - y$, dimana L merupakan populasi maksimum yang memungkinkan.
- Diperoleh model persamaan diferensial

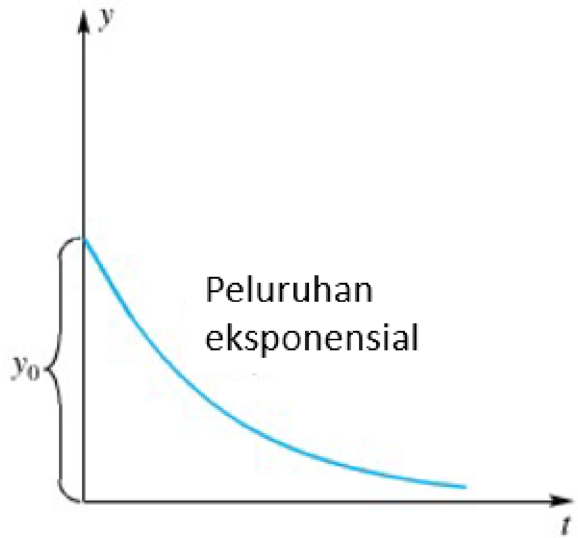
$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

5.3. Peluruhan Radioaktif

- Elemen radioaktif mengalami peluruhan dan kecepatan peluruhan tersebut sebanding dengan jumlahnya saat ini.
- Sehingga laju perubahannya memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$
$$y = y_0 e^{kt}$$

dengan k negatif.



CONTOH SOAL

Contoh 5.3. Karbon 14 adalah zat radioaktif dan meluruh dengan laju yang berbanding lurus dengan banyaknya zat yang ada. Waktu yang diperlukan untuk meluruhkan karbon 14 menjadi setengah massa awalnya adalah 5730 tahun. Jika massa awalnya 10 gram, berapakah yang tersisa setelah 2000 tahun?

Solusi. Karbon 14 menjadi setengah ukuran aslinya dalam 5370 tahun, maka

$$\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{k(5730)} \quad \Leftrightarrow \quad -\ln 2 = 5730k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx -0.000121$$

Sehingga $y = 10e^{-0.000121t}$ dan saat $t = 2000$

$$y = 10e^{-0.000121(2000)} \approx 7.85 \text{ gram}$$

5.4. Hukum Newton tentang Pendinginan (1)

- Hukum Newton tentang pendinginan menyatakan bahwa laju pendinginan (pemanasan) suatu objek berbanding lurus dengan selisih temperatur objek dengan temperatur ruang di sekitarnya.
- Jika suatu objek dengan temperatur T_0 diletakkan pada ruangan dengan temperatur T_1 dan $T(t)$ menyatakan temperatur objek pada waktu t, maka

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Contoh 5.4. Sebuah objek dikeluarkan dari oven dengan temperatur 350°F dan diletakkan pada ruangan dengan temperatur 70°F. Jika temperatur benda turun menjadi 250°F dalam satu jam, berapa temperatur objek 3 jam setelah dikeluarkan dari oven?

5.4. Hukum Newton tentang Pendinginan (2)

Solusi.

$$\frac{dT}{dt} = k(T-70)$$

$$\frac{dT}{T-70} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T-70} = \int k\,dt$$

$$\ln|T-70| = kt + C$$

$$T - 70 = e^{kt+C}$$

$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

dimana $C_1 = e^C$. Dengan nilai awal $T(0) = 350$, diperoleh

$$350 = 70 + C_1 e^{k\cdot 0}$$

$$280 = C_1$$

Sehingga $T(t) = 70 + 280e^{kt}$.

Dicari k dengan $T(1) = 250$,

$$250 = 70 + 280e^{k\cdot 1}$$

$$280e^k = 180$$

$$e^k = \frac{180}{280}$$

$$k = \ln\frac{180}{280} \approx -0.44183$$

Maka $T(t) = 70 + 280e^{-0.44183t}$

Saat $t = 3$,

$$T(3) = 70 + 280e^{-0.44183(3)}$$

$$\approx 144.4°\text{F}$$

5.5. Bunga Majemuk (1)

- Jika kita menyimpan A_0 dollar di bank dengan bunga majemuk $100r$ persen secara majemuk sebanyak n kali tiap tahun, maka modal tersebut akan menjadi $A(t)$ pada akhir t tahun, dimana

$$A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Contoh 5.5. Andaikan Catherine menympan \$500 di bank dengan bunga mejemuk harian 4%. Berapa jumlah uangnya pada akhir tahun ke-5?

Solusi. Diketahui $A_0 = 500$, $r = 0.04$, $n = 365$ dan $t = 5$, maka

$$A = 500\left(1 + \frac{0.04}{365}\right)^{365(5)} \approx \$563.74$$

5.5. Bunga Majemuk (2)

- Andaikan bunga majemuk dijalankan secara kontinu, yakni saat n, jumlah pembayaran bunga per tahun, menuju tak hingga. Diperoleh

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_0\left[\lim_{n\to\infty}(1+h)^{1/h}\right]^{rt} = A_0 e^{rt}$$

Contoh 5.6. Andaikan bank pada Contoh 5.5 menjalankan bunga secara kontinu. Berapakah jumlah uang Catherine pada akhir tahun ke-3?

Solusi. Diketahui $A_0 = 500$, $r = 0.04$ dan $t = 3$, maka

$$A = 500e^{(0.04)(3)} \approx \$563.75$$

PERINGATAN HAK CIPTA

Dilanjutkan ke file berikutnya …