MSA08 – APLIKASI TURUNAN

PERINGATAN HAK CIPTA

Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep turunan dalam menyelesaikan kasus-kasus aplikasi turunan. (C3, A3)

Materi

1. Maksimum dan Minimum.
2. Kemonotongan dan kecekungan.
3. Ekstrime lokal dan ekstrime pada interval terbuka.
4. Masalah-masalah praktis.
5. Penggambaran grafik fungsi.
6. Teorema nilai rataan untuk turunan.
7. Menyelesaikan persamaan secara numerik.
8. Anti turunan.

1. Maksimum dan Minimum

Maksimum dan Minimum

Misalkan terdapat himpunan S, domain fungsi f yang memuat titik c

- $f(c)$ adalah **nilai maksimum** dari f di S, jika $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x di S.
- $f(c)$ adalah **nilai minimum** dari f di S, jika $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap x di S.
- $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** dari f di S, jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum atau nilai minimum.
- Fungsi yang akan di maksimumkan atau minimumkan adalah **fungsi objektif.**

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f memiliki nilai maksimum dan minimum pada interval tersebut.

1.1. Teorema Titik Kritis

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c merupakan titik kritis; dengan kata lain, c merupakan

- Titik ujung dari interval I.
- Titik stasioner dari f; yakni titik dimana $f'(c) = 0$.
- Titik singular dari f; yakni titik dimana $f'(c)$ tidak ada.

Langkah-langkah menentukan nilai maksimum dan minimum

- Carilah titik kritis dari f pada interval I.
- Hitung nilai f untuk setiap titik kritis. Nilai terbesar adalah nilai maksimum dan nilai terkecil adalah nilai minimum.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = x^3$ pada $[-2,2]$.

Solusi. Turunannya adalah $f'(x) = 3x^2$, yang bernilai nol hanya saat $x = 0$. Turunan tersebut terdefinisi pada interval $(-2,2)$, sehingga diperoleh 3 titik kritis, $x = 0$, $x = -2$, dan $x = 2$.

Untuk $x = 0$, maka $f(0) = 0^3 = 0$
Untuk $x = -2$, maka $f(-2) = (-2)^3 = -8$ (minimum)
Untuk $x = 2$, maka $f(2) = 2^3 = 8$ (maksimum)

Jadi nilai maksimum dari f adalah 8 (saat $x = 2$) dan nilai minimumnya adalah -8 (saat $x = -2$).

2. Kemonotongan dan Kecekungan

2.1. Kemonotonan (1)

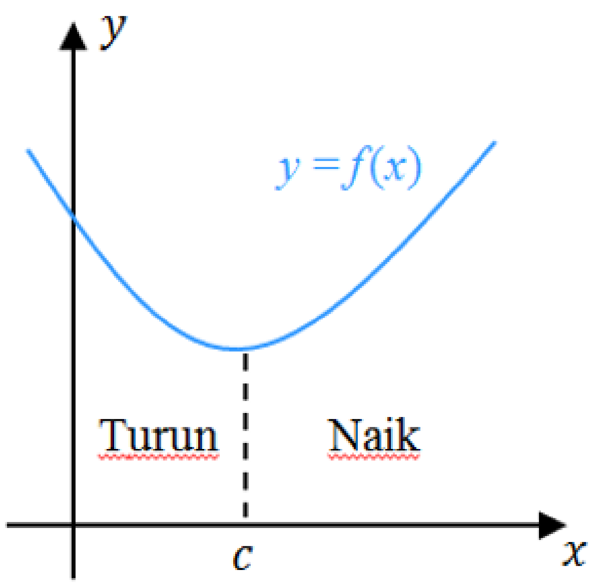
Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval I (interval terbuka, tertutup, atau tidak keduanya). Maka

- f **naik** pada I jika untuk setiap pasang x_1 dan x_2 dalam I,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- f **turun** pada I jika untuk setiap pasang x_1 dan x_2 dalam I,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- f **monoton murni** pada I jika f naik pada I atau turun pada I.

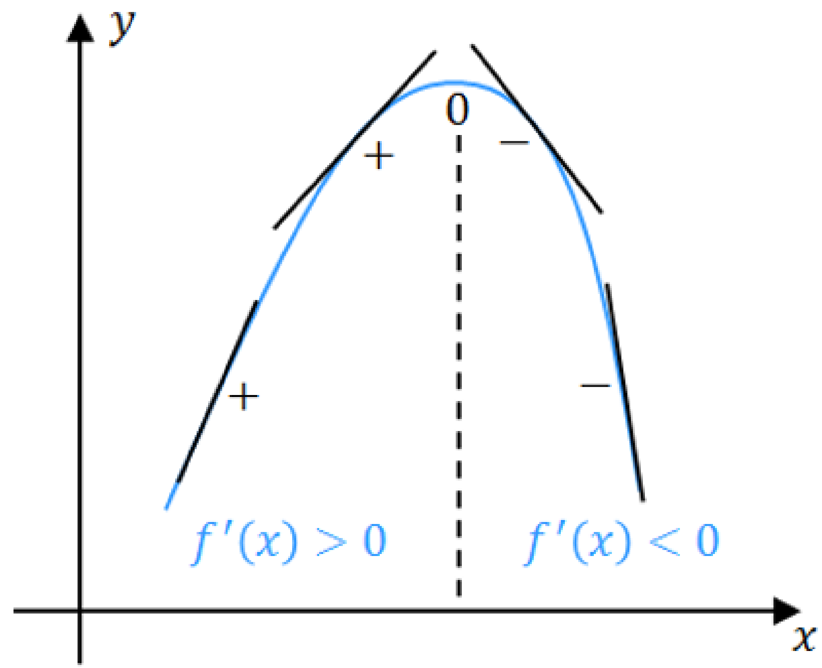
Teorema Kemonotonan. Andaikan fungsi f kontinu pada interval I dan memiliki turunan pada semua titik di interval I.

- Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap titik di I, maka f naik pada I.
- Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap titik di I, maka f turun pada I.

2.1. Kemonotonan (2)



Fungsi f turun di sebelah kiri titik c dan naik di sebelah kanan titik c.



Saat $f'(x) > 0$, gradien garis singgung bernilai positif sehingga fungsi f naik, dan sebaliknya.

CONTOH SOAL

Contoh 2.1. Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, tentukan kapan fungsi f naik dan turun.

Solusi. Petama-tama, cari turunan dari fungsi f.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

Dicari nilai x saat $(x+1)(x-2) > 0$ dan $(x+1)(x-2) < 0$.

Diperoleh 2 titik pemisah -1 dan 2 yang membagi sumbu-x menjadi 3 interval, yakni $(-\infty, -1)$, $(-1,2)$, dan $(2, \infty)$. Dengan titik pengujian -2, 0, dan 3, dapat disimpulkan bahwa $f'(x) < 0$ pada interval tengah.

Jadi fungsi f naik pada interval $(-\infty, -1]$ dan $[2, \infty)$; dan turun pada interval $[-1,2]$.

2.2. Kecekungan (1)

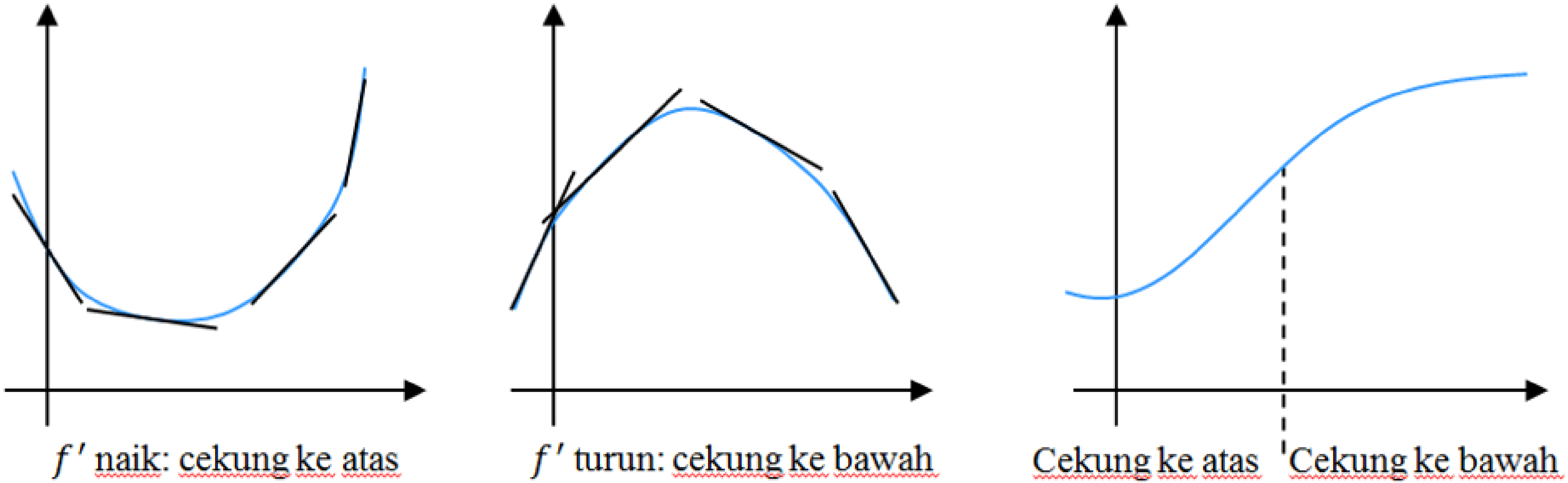
Misalkan fungsi f memiliki turunan pada interval terbuka I.

- f **cekung ke atas** pada I, jika f' naik pada interval I.
- f **cekung ke bawah** pada I, jika f' turun pada interval I.

Teorema Kecekungan. Andaikan fungsi f memiliki turunan kedua pada interval I.

- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka f cekung ke atas pada interval I.
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, maka f cekung ke bawah pada interval I.

2.2. Kecekungan (2)



Gambar diatas menunjukkan kurva yang cekung ke atas, cekung ke bawah dan gabungan keduanya. Perhatikan bahwa kurva yang cekung ke atas berbentuk seperti cup.

CONTOH SOAL

Contoh 2.2. Jika $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, tentukan kapan fungsi f cekung ke atas dan cekung ke bawah.

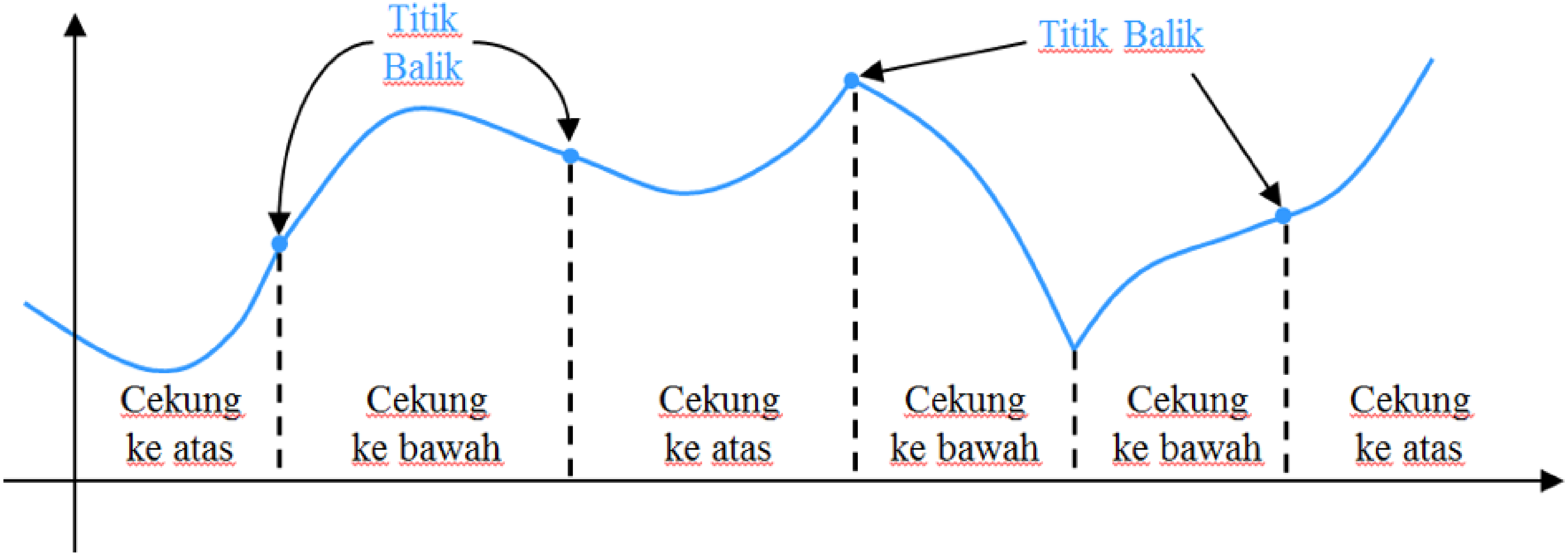
Solusi.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$
$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

Dengan menyelesaikan pertidaksamaan $(x+1)(x-3) > 0$ dan $(x+1)(x-3) < 0$, dapat disimpulkan bahwa f naik pada interval $(-\infty, -1]$ dan $[3, \infty)$; dan turun pada $[-1,3]$. Dengan cara yang sama, penyelesaian $2(x-1) > 0$ dan $2(x-1) < 0$ menunjukkan bahwa f cekung ke atas pada $(1, \infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty, 1)$.

2.3. Titik Balik

Misalkan fungsi f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ disebut **titik balik** dari f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lain; yakni saat $f''(c) = 0$.



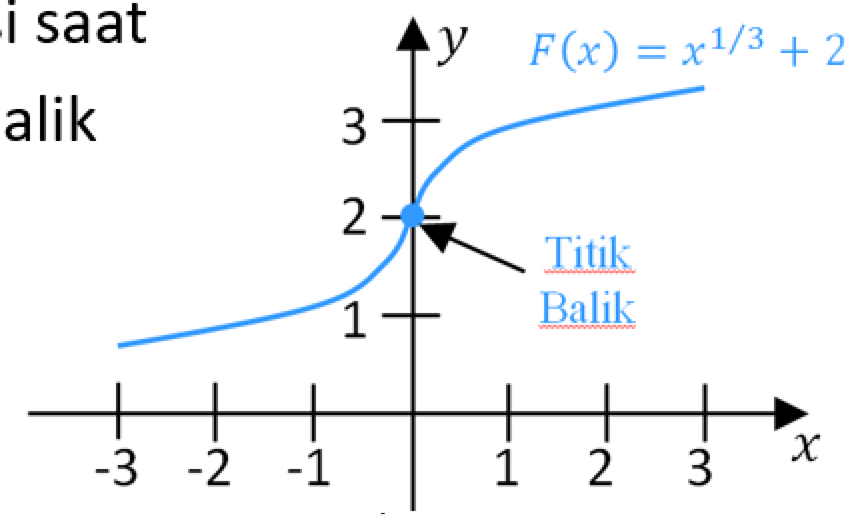
CONTOH SOAL

Contoh 2.3. Tentukan semua titik balik dari $F(x) = x^{1/3} + 2$.

Solusi.

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

Nilai dari turunan kedua, $F''(x)$, tidak akan pernah sama dengan nol. Namun nilainya tidak terdefinisi saat $x = 0$. Titik $(0,2)$ merupakan titik balik karena $F''(x) > 0$ saat $x < 0$ dan $F''(x) < 0$ saat $x > 0$.



3. Ekstrime Lokal dan Ekstrime pada Interval Terbuka

3.1. Maksimum dan Minimum Lokal

Misalkan S merupakan domain dari fungsi f yang memuat titik c.

1. $f(c)$ adalah **maksimum lokal** dari f jika terdapat interval (a,b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum dari f pada $(a,b) \cap S$;
2. $f(c)$ adalah **minimum lokal** dari f jika terdapat interval (a,b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum dari f pada $(a,b) \cap S$;
3. $f(c)$ adalah **ekstrim lokal** dari f jika $f(c)$ merupakan maksimum lokal atau minimum lokal.

3.2. Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di interval terbuka (a,b) yang memuat titik c.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b), maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal** dari f.
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c,b), maka $f(c)$ adalah **minimum lokal** dari f.
3. Jika $f'(x)$ memiliki tanda yang sama di kedua sisi c, maka $f(c)$ **bukan ekstrim lokal** dari f.

CONTOH SOAL (1)

Contoh 3.1. Tentukan ekstrim lokal dari $f(x) = x^2 - 6x + 5$ pada $(-\infty, \infty)$.

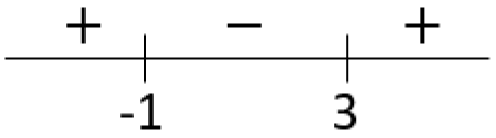
Solusi. Fungsi f kontinu dan turunannya $f'(x) = 2x - 6$ terdefinisi di semua x. Sehingga titik kritisdari f adalah saat $f'(x) = 0$; yakni saat $x = 3$.

Karena $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ untuk $x < 3$, maka f turun pada $(-\infty, 3]$; dan karena $2(x - 3) > 0$ untuk $x > 3$, maka f naik pada $[3, \infty)$. Bersadarkan uji turunan pertama, $f(3) = -4$ adalah minimum lokal dari f. Karena hanya terdapat satu titik kritis, maka $f(3)$ merupakan minimum global.

CONTOH SOAL (2)

Contoh 3.2. Tentukan nilai ekstrim dari $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $(-\infty, \infty)$.

Solusi. Turunan pertama $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, diperoleh titik kritis $x = -1$ dan $x = 3$.



$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 4 = \frac{17}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 4 = -5$$

Berdasarkan uji turunan pertama, $f(-1) = \frac{17}{3}$ adalah maksimum lokal dan $f(3) = -5$ adalah minimum lokal dari f.

3.3. Uji Turunan Kedua

Misalkan f' dan f'' ada pada setiap interval terbuka (a, b) yang memuat titik c, dan andaikan $f'(c) = 0$.

1. Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah **maksimum lokal** dari f.
2. Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah **minimum lokal** dari f.

Contoh 3.3. Diketahui $f(x) = x^2 - 6x + 5$, gunakan uji turunan kedua untuk menentukan titik ekstrim lokal.

Solusi. Dari contoh 3.1. Diperoleh $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$, sehingga $f''(x) = 2$. Karena $f''(3) > 0$, maka berdasarkan uji turunan kedua $f(3)$ merupakan minimum lokal.

3.4. Nilai Ekstrim pada Interval Terbuka

Contoh 3.4. Tentukan (jika ada) nilai minimum dan maksimum dari $f(x) = x^4 - 4x$ pada $(-\infty, \infty)$.

Solusi.

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Karena $x^2 + x + 1 = 0$ tidak memiliki solusi real, maka hanya terdapat satu titik kritis, $x = 1$. Untuk $x < 1$, $f'(x) < 0$, sedangkan untuk $x > 0$, $f'(x) > 0$. Dapat disimpulkan bahwa $f(1) = -3$ merupakan nilai minimum lokal dari f.

4. Masalah-Masalah Praktis

Masalah-Masalah Praktis

Langkah-langkah:

Step 1. Gambarkan masalah dan beri variabel untuk nilai-nilai yang penting.

Step 2. Tuliskan fungsi yang akan dicari nilai maksimum atau minimumnya dengan variabel dari step 1.

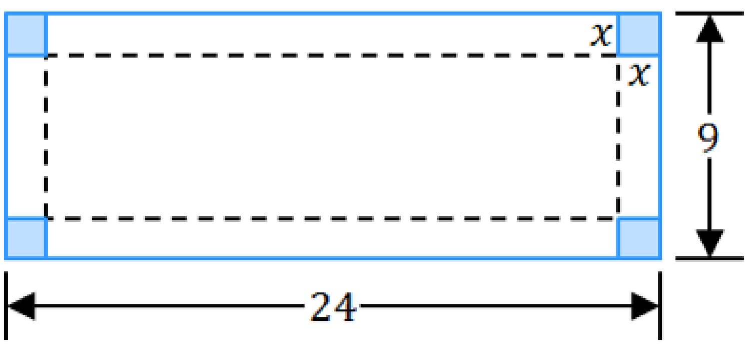
Step 3. Jika terdapat lebih dari 1 variabel, gunakan substitusi agar diperoleh fungsi dengan satu variabel.

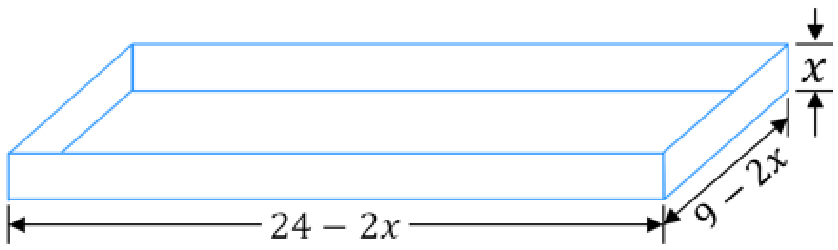
Step 4. Cari titik kritis dari fungsi tersebut.

Step 5. Gunakan substitusi atau uji turunan untuk menentukan nilai maksimum atau minimumnya.

CONTOH SOAL (1)

Contoh 4.1. Sebuah box dengan alas persegi panjang akan dibuat dari karton berukuran 24 cm × 9 cm dengan memotong 4 segi-empat identik dari setiap sudutnya,seperti terlihat pada gambar. Tentukan dimensi dari box tersebut agar volumenya maksimum. Berapa volume maksimumnya?





Solusi.

Volume box:

$$V = x(9-2x)(24-2x)$$

$$V = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

CONTOH SOAL (2)

Nilai x tidak boleh kurang dari 0 atau lebih dari 4.5. Sehingga akan dicari V maksimum pada interval $[0,4.5]$. Dicari titik kritis:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2)$$
$$= 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Maka $x = 2$ dan $x = 9$, tetapi 9 berada diluar interval $[0,4.5]$.

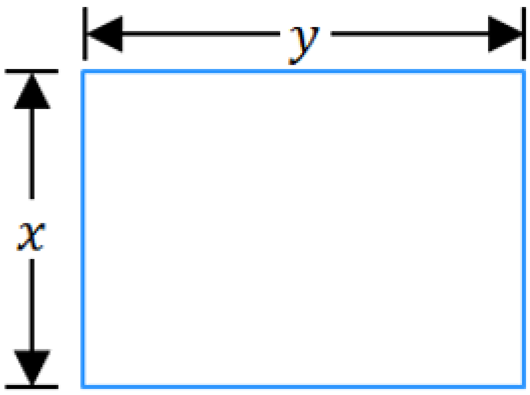
Sehingga terdapat 3 titik kritis, 0, 2, dan 4.5.

$$x = 0 \Rightarrow V = 216(0) - 66(0)^2 + 4(0)^3 = 0$$
$$x = 2 \Rightarrow V = 216(2) - 66(2)^2 + 4(2)^3 = 200$$
$$x = 4.5 \Rightarrow V = 216(4.5) - 66(4.5)^2 + 4(4.5)^3 = 0$$

V maksimum saat $x = 2$. Jadi, dimensi box: panjang 20 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 2 cm dengan volume maksimum 200 cm^2.

CONTOH SOAL (3)

Contoh 4.2. Seorang petani memiliki 100 m pagar kawat dan ingin membentuk 2 lahan Tertutup yang sama besar, seperti terlihat pada gambar. Berapa dimensi dari lahan tertutup agar luasnya maksimum?



Solusi. Keliling area yang akan dipagari $2y + 3x = 100$ atau $y = 50 - \frac{3}{2}x$. Luas area:

$$A = xy = x\left(50 - \frac{3}{2}x\right) = 50x - \frac{3}{2}x^2$$

Nilai x harus berada pada interval $[0, {}^{100}/_{3}]$.

CONTOH SOAL (4)

Nilai kritis: $\frac{dA}{dx} = 50 - 3x = 0$. Maka $x = \frac{50}{3}$. Sehingga terdapat 3 titik kritis, 0, $\frac{50}{3}$, dan $\frac{100}{3}$.

$$x = 0 \Rightarrow V = 50(0) - \frac{3}{2}(0)^2 = 0$$

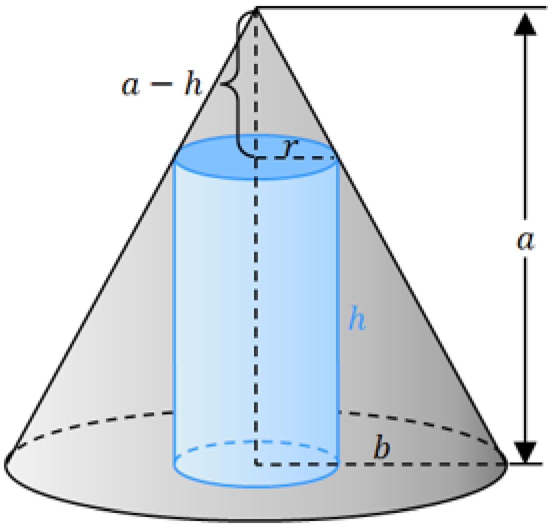
$$x = \frac{50}{3} \Rightarrow V = 50\left(\frac{50}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{125}{3}$$

$$x = \frac{100}{3} \Rightarrow V = 50\left(\frac{100}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{100}{3}\right)^2 = 0$$

V maksimum saat $x = \frac{50}{3}$. Jadi, dimensi yang diperoleh adalah $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ meter dan $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$ meter.

CONTOH SOAL (5)

Contoh 4.3. Carilah dimensi tabung dengan volume maksimum yang dapat dimasukkan kedalam kerucut seperti pada gambar disamping.



Solusi. Volume tabung: $V = \pi r^2 h$

Kesebangunan segitiga: $\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b}$, maka $h = a - \frac{a}{b}r$. Sehingga

$$V = \pi r^2 \left(a - \frac{a}{b}r\right) = \pi a r^2 - \pi \frac{a}{b} r^3$$

Akan dicari nilai maksimumnya pada interval $[0, b]$. Nilai kritis:

$$\frac{dV}{dr}$$

CONTOH SOAL (6)

Nilai kritis: $\frac{dA}{dx} = 50 - 3x = 0$. Maka $x = \frac{50}{3}$. Sehingga terdapat 3 titik kritis, 0, $\frac{50}{3}$, dan $\frac{100}{3}$.

$$x = 0 \Rightarrow V = 50(0) - \frac{3}{2}(0)^2 = 0$$

$$x = \frac{50}{3} \Rightarrow V = 50\left(\frac{50}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{125}{3}$$

$$x = \frac{100}{3} \Rightarrow V = 50\left(\frac{100}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{100}{3}\right)^2 = 0$$

V maksimum saat $x = \frac{50}{3}$. Jadi, dimensi yang diperoleh adalah $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ meter dan $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$ meter.

5. Penggambaran Grafik Fungsi

Penggambaran Grafik Fungsi

Step 1. Analisis Pre-kalkulus

a) Cek domain dan range fungsi.

b) Test simetri fungsi (fungsi genap/ganjil).

c) Cari titik potong terhadap sumbu-x dan sumbu-y.

Step 2. Analisis Kalkulus

a) Gunakan turunan pertama untuk mencari titik kritis dan tentukan dimana fungsi naik dan turun.

b) Uji titik kritis (maksimum/minimum)

c) Gunakan turunan kedua untuk menentukan dimana fungsi cekung ke atas dan cekung ke bawah

d) Cari garis asimptotnya.

Step 3. Gambar grafik berdasarkan titik koordinat yang sudah diperoleh.

5.1. Fungsi Polinomial (1)

Contoh 5.1. Gambarkan grafik dari $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

Solusi.

- **Cek Fungsi Genap/Ganjil**

$$f(-x) = \frac{3(-x)^5 - 20(-x)^3}{32} = \frac{-3x^5 + 20x^3}{32} = -\left(\frac{3x^5 - 20x^2}{32}\right) = -f(x)$$

Jadi f merupakan fungsi ganjil dan simetris terhadap titik $(0,0)$.

- **Titik Potong**

$$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32} = \frac{x^3(3x^2 - 20)}{32} = 0$$

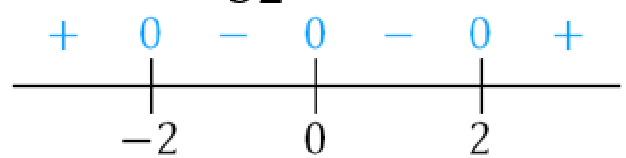
Sehingga titik potong dengan sumbu-x adalah 0 dan $\pm\sqrt{20/3}$.

5.1. Fungsi Polinomial (2)

- **Titik Kritis**

$$f'(x)=\frac{15x^4-60x^2}{32}=\frac{15x^2(x^2-4)}{32}=\frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$$

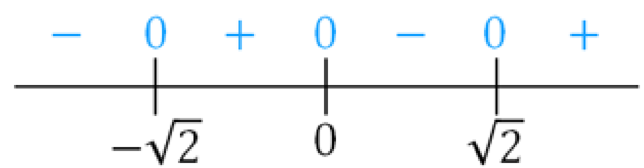
Titik kritis $x=0$, $x=2$ dan $x=-2$.



f naik pada $(-\infty,-2)$ dan $(2,\infty)$. f turun pada $(-2,2)$.

- **Kecekungan**

$$f''(x)=\frac{60x^3-120x}{32}=\frac{15x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{8}$$



f cekung ke atas pada $\left(-\sqrt{2},0\right)$ dan $\left(\sqrt{2},\infty\right)$.

f cekung ke bawah pada $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ dan $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

5.1. Fungsi Polinomial (3)

- **Koordinat Titik Kritis**

$$f(0) = 0 \qquad \Rightarrow (0,0)$$

$$f(-2) = (3(-2)^5 - 20(-2)^3)/32 = 2 \quad \Rightarrow (-2,2)$$

$$f(2) = (3(2)^5 - 20(2)^3)/32 = 2 \qquad \Rightarrow (2,2)$$

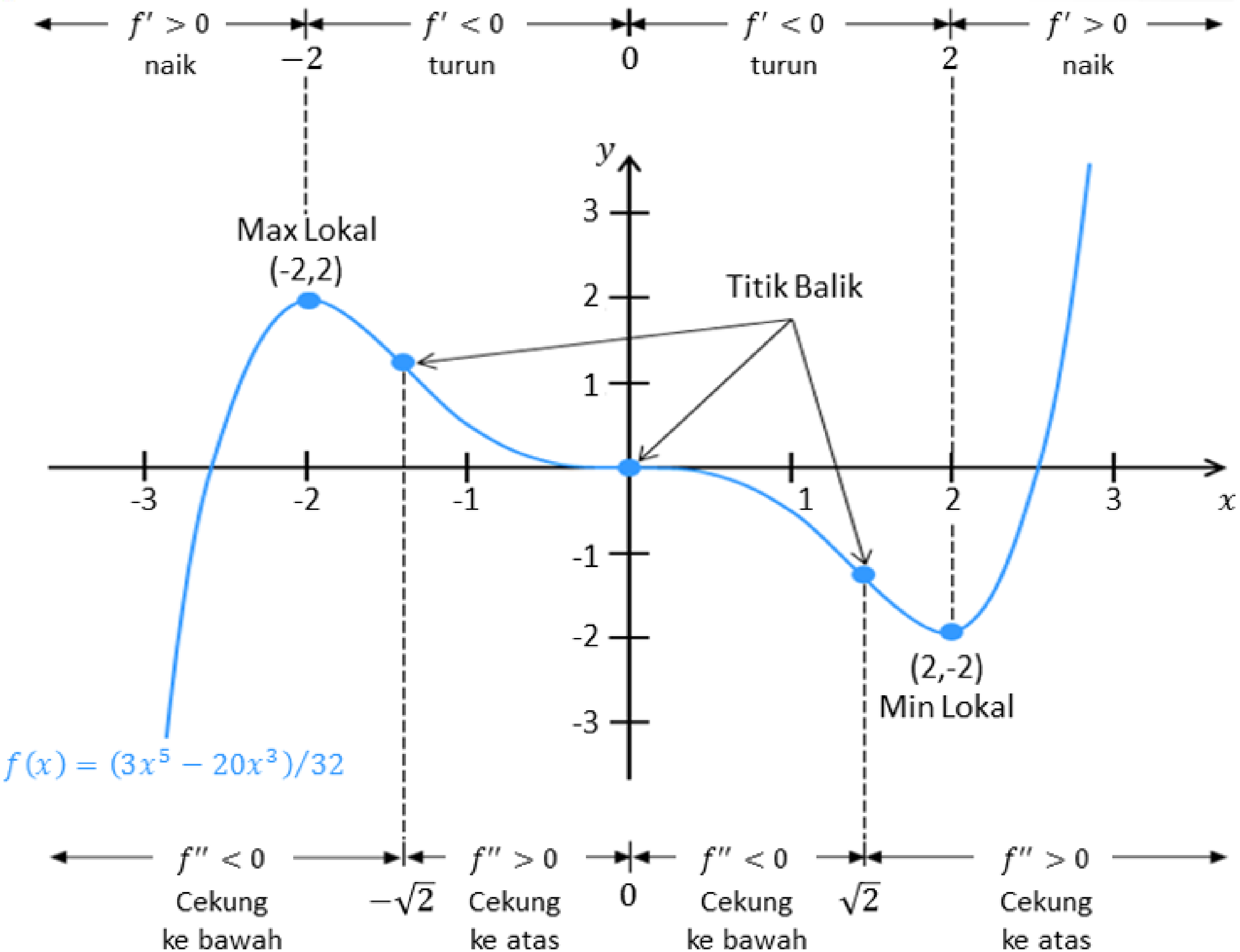
- **Koordinat Titik Balik**

$$f(0) = 0 \qquad \Rightarrow (0,0)$$

$$f(-\sqrt{2}) = \left(3(-\sqrt{2})^5 - 20(-\sqrt{2})^3\right)/32 = 7\sqrt{2}/8 \quad \Rightarrow (-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8)$$

$$f(\sqrt{2}) = \left(3(\sqrt{2})^5 - 20(\sqrt{2})^3\right)/32 = -7\sqrt{2}/8 \quad \Rightarrow (\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8)$$

5.1. Fungsi Polinomial (4)



5.2. Fungsi Rasional (1)

Contoh 5.2. Gambarkan grafik dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

Solusi.

- **Cek Fungsi Genap/Ganjil**

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 4}{(-x) - 2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{-x - 2}$$

Jadi f bukan merupakan fungsi genap/ganjil.

- **Titik Potong**

Sumbu-x: $0 = x^2 - 2x + 4$ $\Rightarrow$ Tidak ada

Sumbu-y: $f(0) = \frac{0^2 - 2(0) + 4}{0 - 2} = -2$ $\Rightarrow (0, -2)$

5.2. Fungsi Rasional (2)

- **Asimptot**

Penyebut $x - 2 \neq 0 \Rightarrow$ asimptot di $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

- **Titik Kritis**

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$0 \qquad 4$

f naik pada $(-\infty, 0)$ dan $(4, \infty)$

f turun pada $(0,4)$

- **Kecekungan**

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

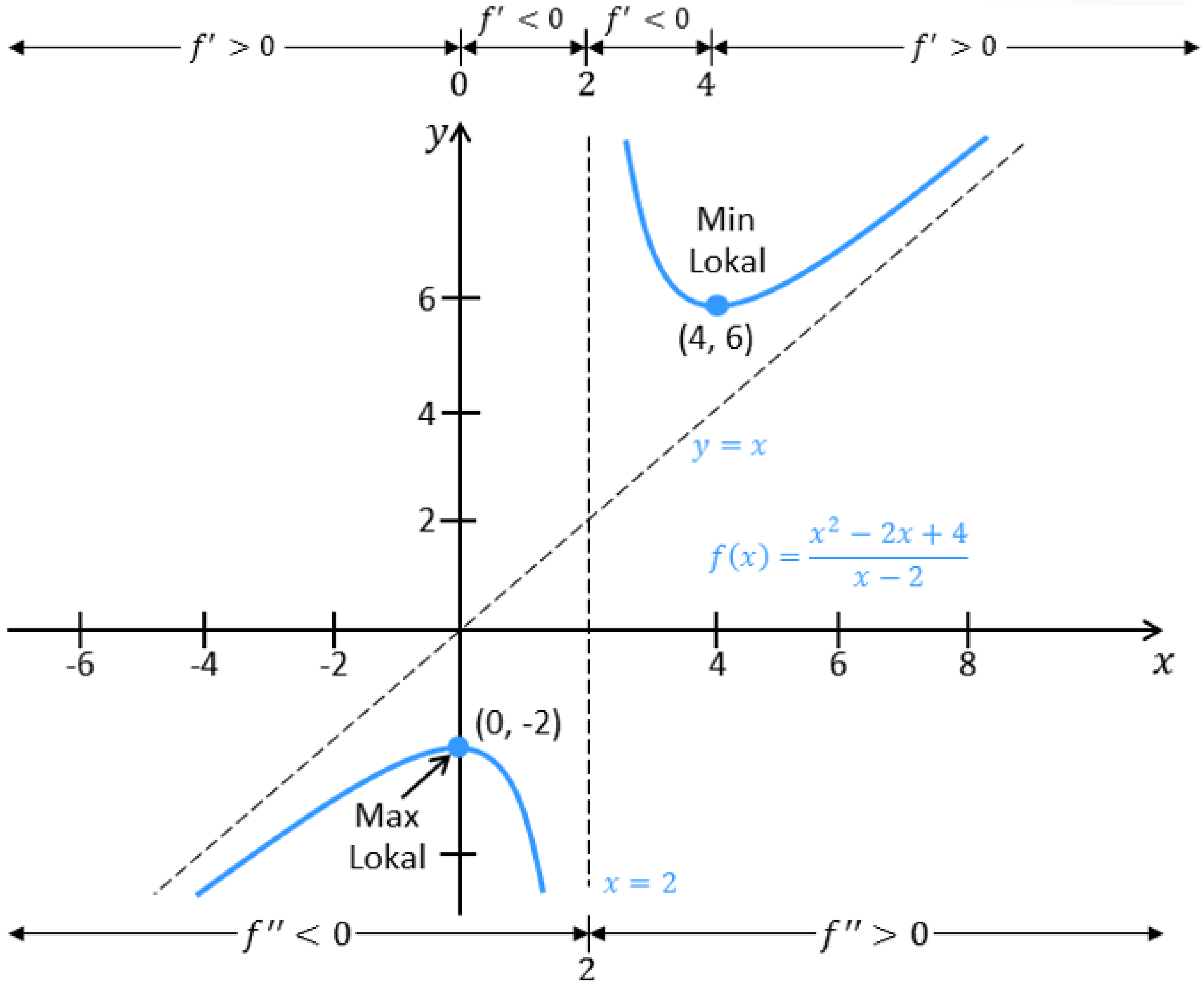
$- \quad 0 \quad +$

2

f cekung ke atas pada $(2, \infty)$

f cekung ke bawah pada $(-\infty, 2)$

5.2. Fungsi Rasional (3)



PERINGATAN HAK CIPTA

Lanjut ke file berikutnya…