MSA08 – INTEGRAL TENTU

PERINGATAN HAK CIPTA

Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep integral tentu dalam menyelesaikan soal perhitungan tentang integral tentu. (C3, A3)

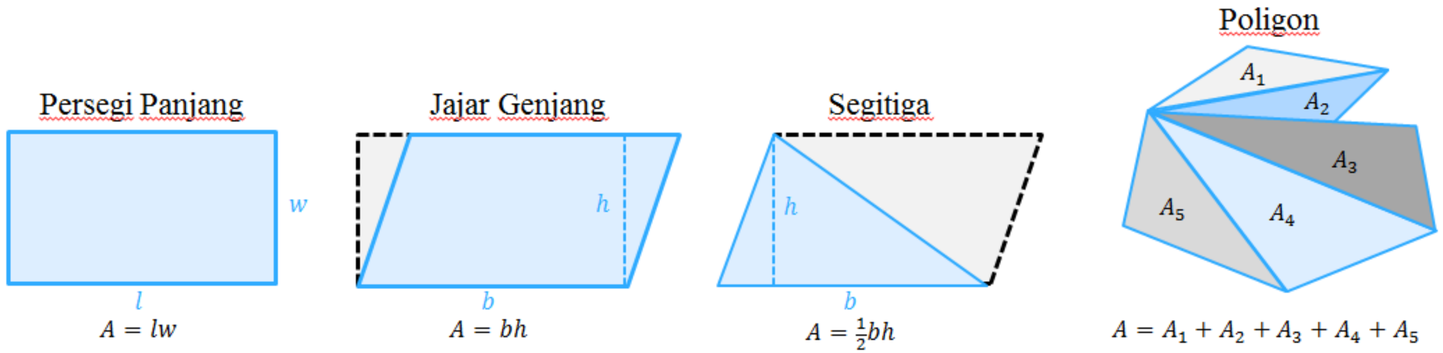
Materi

1. Pendahuluan.
2. Integral tentu.
3. Teorema dasar kalkulus pertama.
4. Teorema dasar kalkulus kedua dan metode subtitusi.
5. Teorema nilai rataan untuk integral.
6. Integrasi numerik.

1. Pendahuluan

Pendahuluan

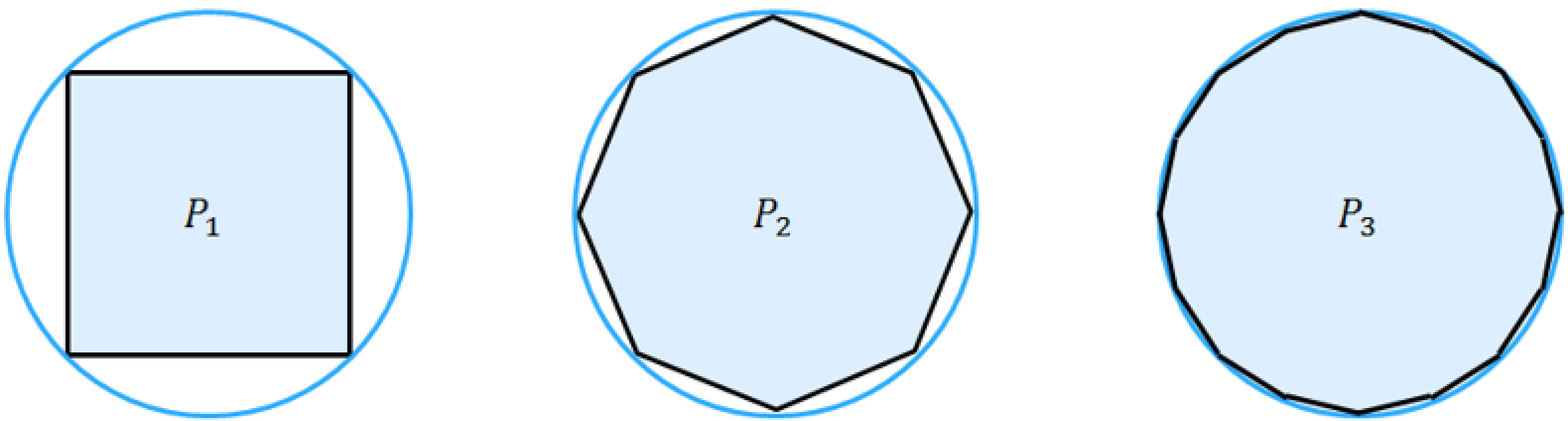
- Terdapat 2 masalah penting dalam geometri yang merupakan ide utama dari kalkulus. Masalah pencarian garis singgung adalah dasar dari turunan. Sedangkan masalah pencarian luas area merupakan dasar dari integral tentu.
- Untuk poligon (bidang tertutup dengan sisi garis lurus), masalah pencarian luas sangat mudah diselesaikan. Mulai dari luas persegi panjang, jajar genjang, segitiga, dan sebarang poligon.



1.1. Poligon Dalam

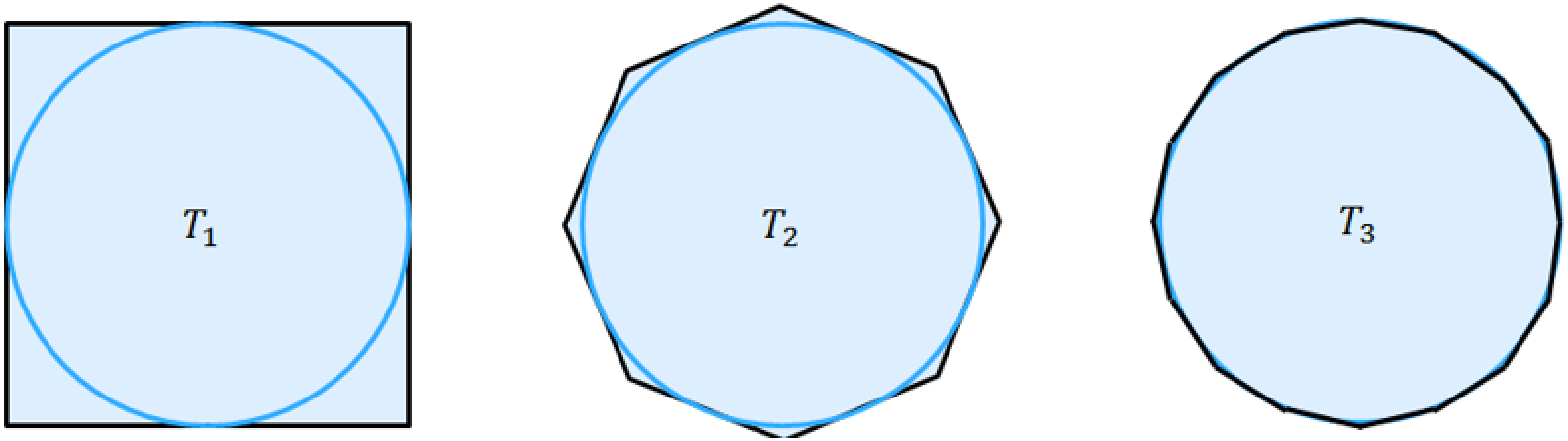
- Misalkan terdapat suatu lingkaran dengan jari-jari 1 dan poligon (segi banyak) beraturan P_1, P_2, P_3, ... dengan 4 sisi, 8 sisi, 16 sisi, ...
- Luas area lingkaran adalah limit dari area P_n saat $n \to \infty$, dituliskan

$$L = \lim_{n \to \infty} L(P_n)$$



1.2. Poligon Luar

- Lebih lanjut, diambil poligon luar $T_1, T_2, T_3, \ldots$ untuk mencari luas area lingkaran dengan jari-jari 1.
- Kedua proses ini (poligon dalam dan poligon dalam) menghasilkan luas area yang sama, yakni π.



1.3. Notasi Sigma (1)

Langkah pendekatan untuk mencari luas area dari daerah melengkung R terdiri dari:

1. Perkirakan daerah R dengan n bujur sangkar dimana gabungan dari n bujur sangkar mengandung R (poligon luar) atau terkadung dalam R (poligon dalam).
2. Cari luas area masing-masing bujur sangkar.
3. Jumlahkan luas area dari n bujur sangkar.
4. Tentukan nilai limitnya saat $n \to \infty$.

Jika limit poligon dalam dan luar sama, maka nilai limit tersebut merupakan luas dari daerah R.

1.3. Notasi Sigma (2)

- Perhatikan jumlahan berikut: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$.
- Jumlahan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sifat-sifat dari sigma ($\sum$)

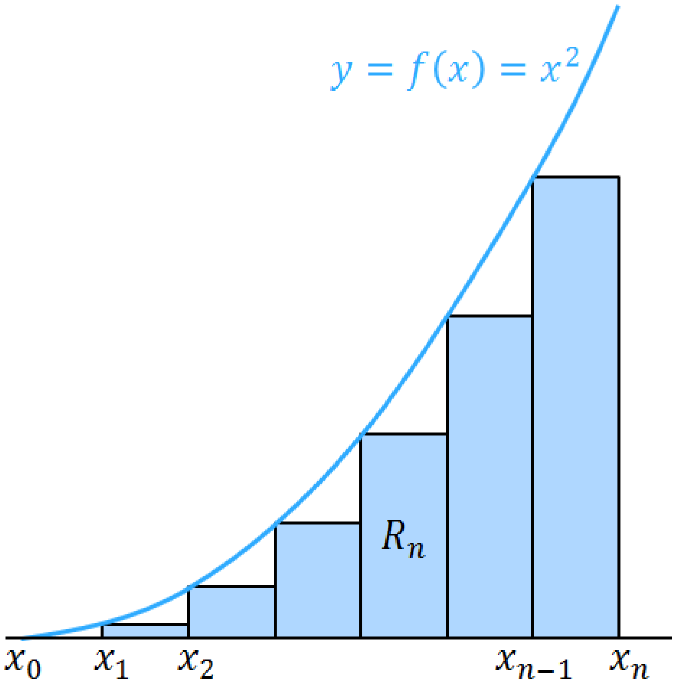
Jika c adalah sembarang konstan, maka berlaku

(i) $\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

1.4. Luas Menurut Poligon-Poligon Dalam (1)



Poligon dalam

Perhatikan daerah R yang dibatasi oleh $f(x) = x^2$, sumbu-x, dan garis $x = 2$. Luas daerah ini akan didekati dengan poligon-poligon dalam seperti pada gambar disamping.

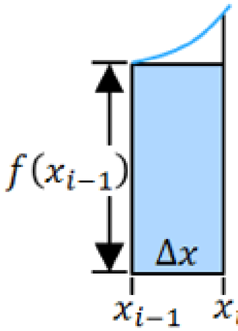
Interval $[0,2]$ dipartisi menjadi n bagian sama besar dengan lebar setiap sub-interval $\Delta x = 2/n$.

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$$

dengan $x_i = i \cdot \Delta x = 2i/n$.

1.4. Luas Menurut Poligon-Poligon Dalam (2)

Perhatikan segi empat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_{i-1})$ pada gambar di samping. Luas segi empat tersebut adalah $f(x_{i-1})\Delta x$. Sehingga total luas semua segi empat adalah



Luas = $f(x_{i-1})\Delta x$

$$L(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Karena $f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2$, maka

$$L(R_n) = \left[\frac{8}{n^3}(0)^2 + \frac{8}{n^3}(1)^2 + \frac{8}{n^3}(2)^2 + \cdots + \frac{8}{n^3}(n-1)^2\right]$$

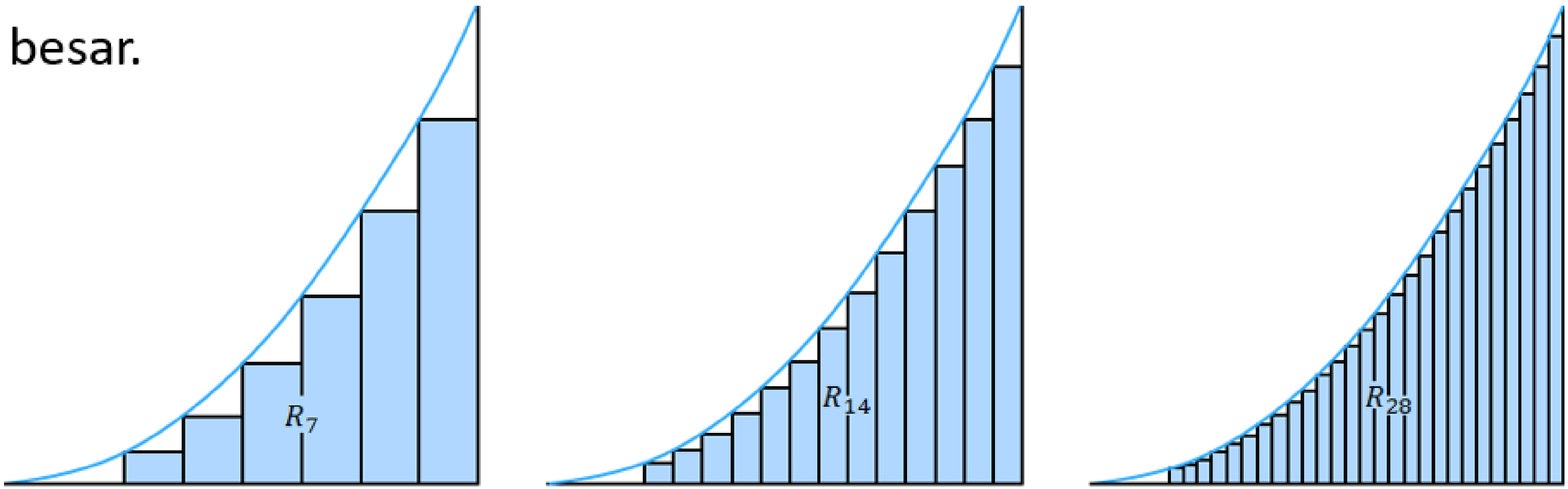
$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

1.4. Luas Menurut Poligon-Poligon Dalam (3)

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

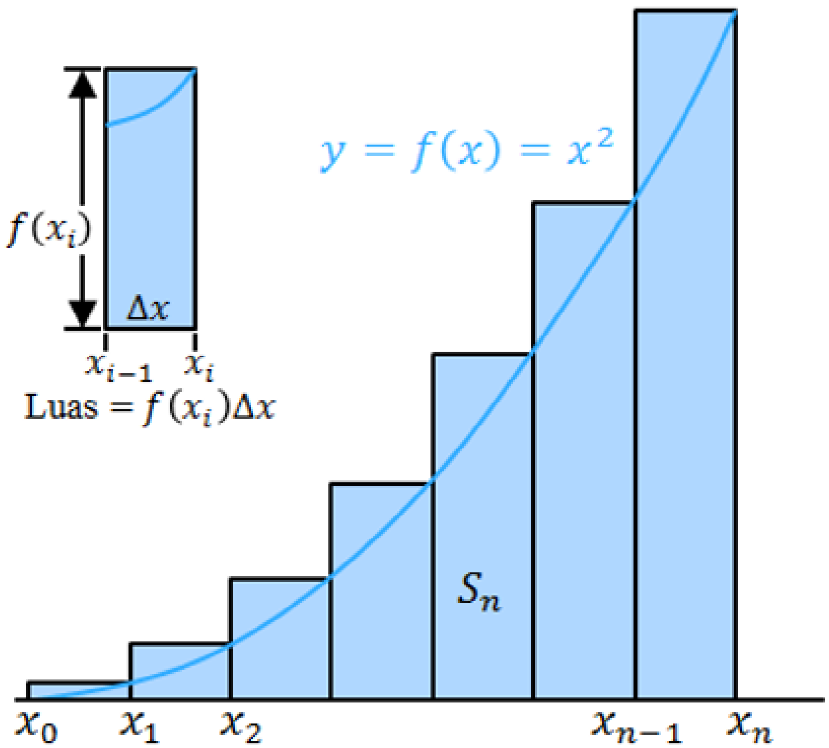
$$L(R) = \lim_{n\to\infty} L(R_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Diagram berikut memperlihatkan apa yang terjadi saat n semakin besar.



$L(R_7) \approx \frac{8}{3} - 0.5442$ $\quad$ $L(R_{14}) \approx \frac{8}{3} - 0.2789$ $\quad$ $L(R_{28}) \approx \frac{8}{3} - 0.1412$

1.5. Luas Menurut Poligon-Poligon Luar (1)



Poligon luar

Perhatikan daerah R yang dibatasi oleh $f(x) = x^2$, sumbu-x, dan garis $x = 2$. Luas daerah ini akan didekati dengan poligon-poligon luar seperti pada gambar disamping.

Perhatikan segi empat dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_i)$ pada gambar di samping. Luas segi empat tersebut adalah $f(x_i)\Delta x$.

Sehingga total luas semua segi empat adalah

$$L(S_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

1.5. Luas Menurut Poligon-Poligon Luar (2)

Seperti sebelumnya $f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2$, maka

$$L(S_n) = \left[\frac{8}{n^3}(1)^2 + \frac{8}{n^3}(2)^2 + \cdots + \frac{8}{n^3}(n)^2\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1(2n+1)}{6}\right] = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

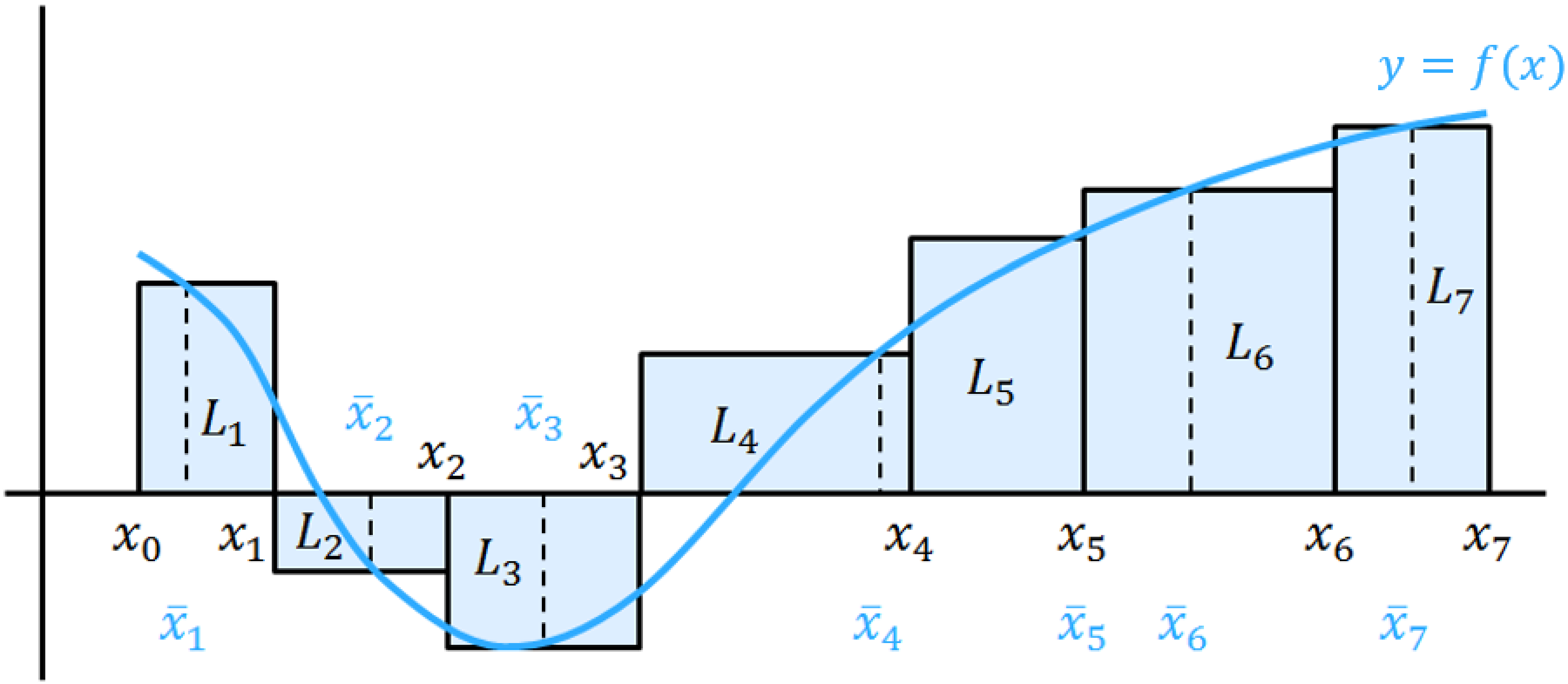
Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$L(R) = \lim_{n\to\infty} L(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

2. Integral Tentu

2.1. Jumlahan Riemann (1)

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $[a, b]$.

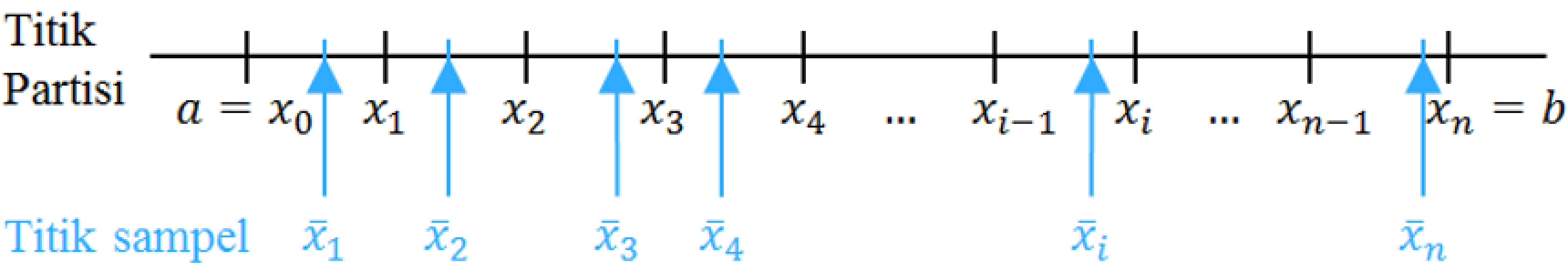


2.1. Jumlahan Riemann (2)

Partisi interval $[a,b]$ menjadi n baian (tidak perlu sama lebar) dimana

$$P:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ dengan } \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

Pada setiap interval $[x_{i-1}, x_i]$, pilih titik sampel $\bar{x}_i$, untuk $i = 1,2,\dots,n$.



Jumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

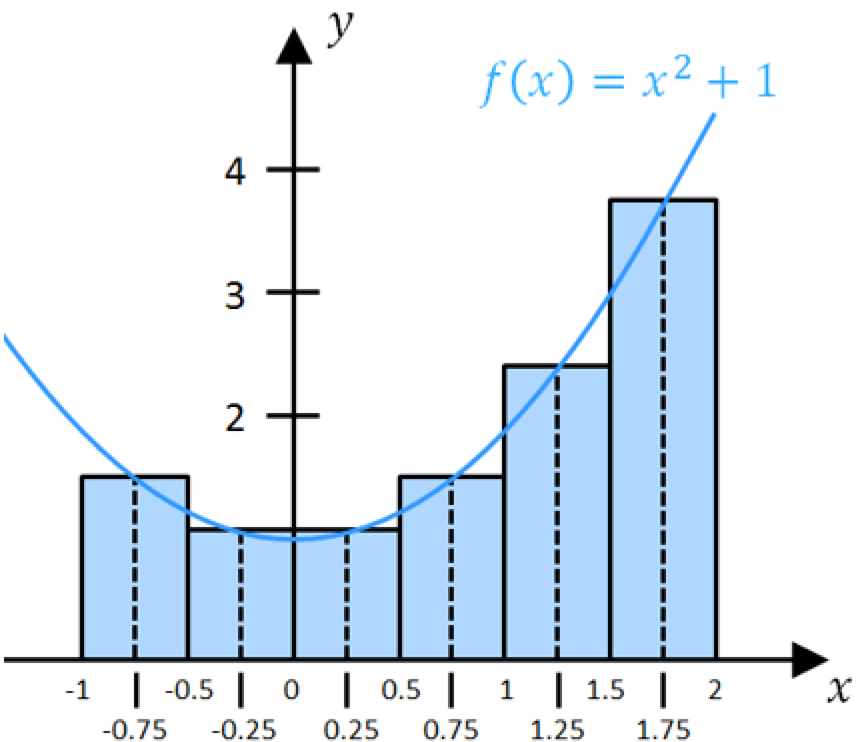
disebut jumlahan Riemann dari f terhadap partisi P.

CONTOH SOAL (1)

Contoh 2.1. Hitung jumlahan Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada interval $[-1,2]$ dengan menggunakan titik partisi dengan jarak sama $-1 < -0.5 < 0 < 0.5 < 1 < 1.5 < 2$, dengan titik sampel $\bar{x}_i$ adalah titik tengah subinterval ke-i.

Solusi.

Perhatikan gambar berikut.



CONTOH SOAL (2)

Sehingga

$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \\
&= [f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) \\
&+ f(1.75)](0.5) \\
&= [1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.5625 + 2.5625 \\
&+ 4.0625](0.5) \\
&= 5.9375
\end{aligned}
$$

CONTOH SOAL (3)

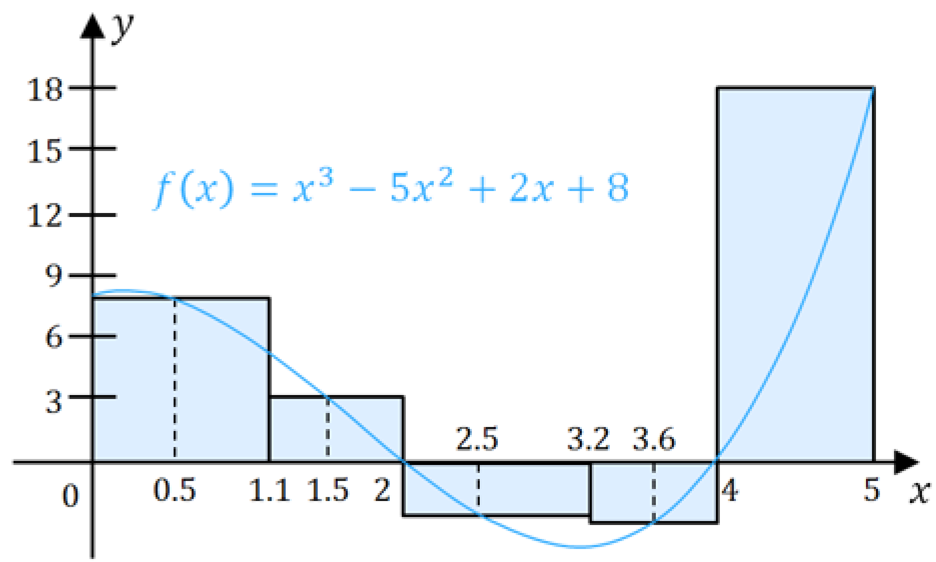
Contoh 2.2. Hitung jumlahan Riemann untuk

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

pada interval $[0,5]$ dengan menggunakan partisi P dengan titik partisi $0 < 1.1 < 2 < 3.2 < 4 < 5$, dengan titik sampel $\bar{x}_1 = 0.5$, $\bar{x}_2 = 1.5$, $\bar{x}_3 = 2.5$, $\bar{x}_4 = 3.6$, dan $\bar{x}_5 = 5$.

Solusi.

Perhatikan gambar berikut.



CONTOH SOAL (4)

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \\
&= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5 \\
&= f(0.5)(1.1-0) + f(1.5)(2-1.1) + f(2.5)(3.2-2) \\
&\quad + f(3.6)(4-3.2) + f(5)(5-4) \\
&= (7.875)(1.1) + (3.125)(0.9) + (-2.635)(1.2) \\
&\quad + (-2.944)(0.8) + 18(1) \\
&= 23.9698
\end{aligned}
$$

2.2. Definisi Integral Tentu (1)

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, maka dapat dikataan bahwa f terintegrasi pada $[a, b]$.

Selanjutnya, $\int_a^b f(x)\,dx$, yang disebut sebagai integral tentu (atau integral Riemann) fungsi f dari a ke b, didefinisikan sebagai

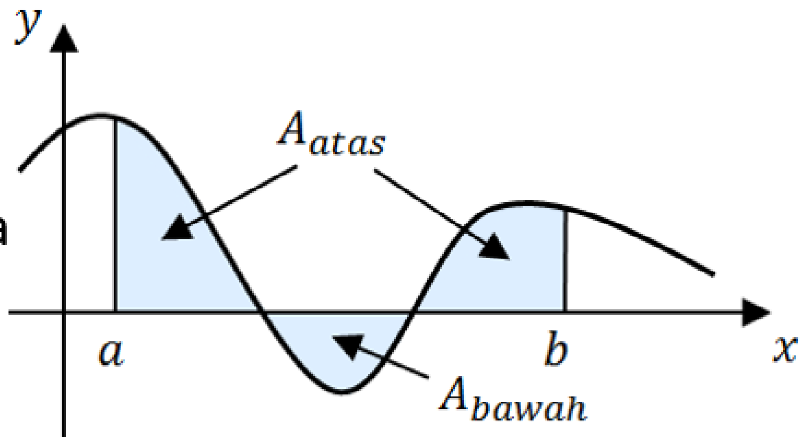
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

2.2. Definisi Integral Tentu (2)

Secara umum $\int_a^b f(x)\,dx$ digunakan untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan sumbu-x pada interval $[a, b]$, yang berarti tanda positif melekat pada luas daerah yang berada diatas sumbu-x, dan tanda negatif melekat pada luas daerah yang berada di bawah sumbu-x.

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{atas} - A_{bawah}$$

dengan A_{atas} dan A_{bawah} seperti pada gambar disamping.



2.3. Sifat Integral Tentu

1. **Identitas.** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
2. **Sifat Linier.** Misalkan k konstanta, maka:
   - $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
   - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
3. **Sifat Penambahan Interval.** Misalkan f teritegrasi pada interval yang memuat titik a, b, c, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2.4. Menghitung Integral Tentu (1)

Contoh 2.3. Hitunglah $\int_{-2}^{3}(x+3)\,dx$.

Solusi. Partisi interval $[-2,3]$ menjadi n subinterval dengan lebar setiap interval $\Delta x = 5/n$. Pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, diambil $\bar{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel. Sehingga

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

2.4. Menghitung Integral Tentu (2)

Diperoleh $f(x_i) = x_i + 3 = 1 + i(5/n)$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n} = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

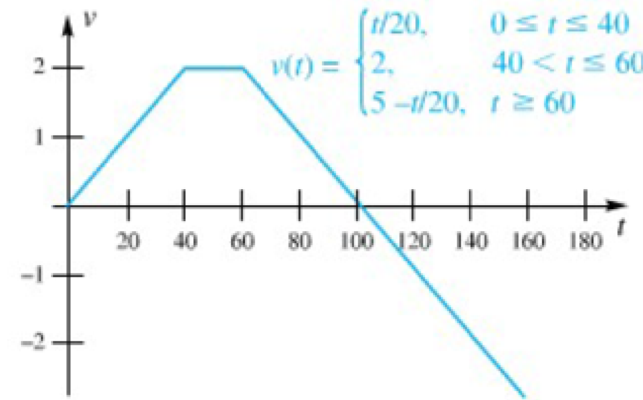
Karena partisi P sama besar, $\|P\| \to 0$ sama dengan $n \to \infty$. Dapat disimpulkan bahwa

$$\int_{-2}^{3}(x+3)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{35}{2}$$

2.5. Kecepatan dan Posisi

Contoh 2.4. Sebuah objek berada di titik asal saat $t = 0$. Kecepatan objek, dalam m/s, dirumuskan sebagai berikut.

$$v(t) = \begin{cases} t/20, & 0 \le t \le 40 \\ 2, & 40 < t \le 60 \\ 5 - t/20, & t > 60 \end{cases}$$



Tuliskan posisi objek saat $t = 140$ dengan menggunakan integral tentu, lalu tentukan posisinya dengan rumus luas secara geometri.

Solusi.

$$\int_0^{140} v(t)\,dt = \int_0^{40} \frac{t}{20}\,dt + \int_{40}^{60} 2\,dt + \int_{60}^{140} \left(5 - \frac{t}{20}\right) dt$$
$$= 40 + 40 + 40 + 40 - 40 = 80$$

3. Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan x merupakan sembarang titik dalam (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Contoh 3.1. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus pertama, hitunglah:

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}\right) = x^3$

b) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}(3t-1)\,dt = (3x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = (3x^2-1)(2x)$

$$= 6x^3 - 2x$$

3.1. Sifat Integral Tentu

Sifat Perbandingan

Jika f dan g mempunyai invers pada $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Jadi, integral tentu mempertahankan pertidaksamaan.

Sifat Keterbatasan

Jika f mempunyai invers pada $[a, b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

4. Teorema Dasar Kalkulus Kedua dan Metode Subtitusi

4.1. Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan F adalah sebarang anti-turunan dari f pada $[a, b]$. Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 4.1. Hitunglah $\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx$.

Solusi.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx &= [2x^2 - 2x^3]_{-1}^{2} \\ &= 2(2^2 - (-1)^2) - 2(2^3 - (-1)^3) \\ &= 2(3) - 2(9) = 6 - 18 = -12\end{aligned}$$

4.2. Metode Substitusi

Misalkan g terdiferensiasi dan F adalah anti-turunan dari f. Maka

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Contoh 4.2. Hitunglah $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}(2x+1)\,dx$.

Solusi. Misal $u = x^2 + x \Rightarrow du = (2x+1)dx$. Sehingga

$$\int \sqrt{x^2+x}(2x+1)\,dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C$$

Berdasarkan teorema dasar kalkulus kedua,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}(2x+1)\,dx = \left[\frac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C\right]_0^4 = \frac{2}{3}(20)^{3/2}$$
$$\approx 59.63$$

4.3. Metode Susbtitusi untuk Integral Tentu (1)

Misalkan g memiliki turunan kontinu pada $[a, b]$ dan f kontinu pada daerah hasil dari g. Maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

dimana $u = g(x)$.

Contoh 4.3. Hitunglah $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx$.

Solusi.

Misal $u = x^2 + 2x + 6 \Rightarrow du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$.

- Untuk $x = 0 \Rightarrow u = 0^2 + 2(0) + 6 = 6$.
- Untuk $x = 1 \Rightarrow u = 1^2 + 2(1) + 6 = 9$.

4.3. Metode Substitusi untuk Integral Tentu (2)

Sehingga

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2}\,du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\right]_6^9$$

$$= -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{36}$$

PERINGATAN HAK CIPTA

Lanjut ke file berikutnya…