MSA08 – 01 KALKUKUS

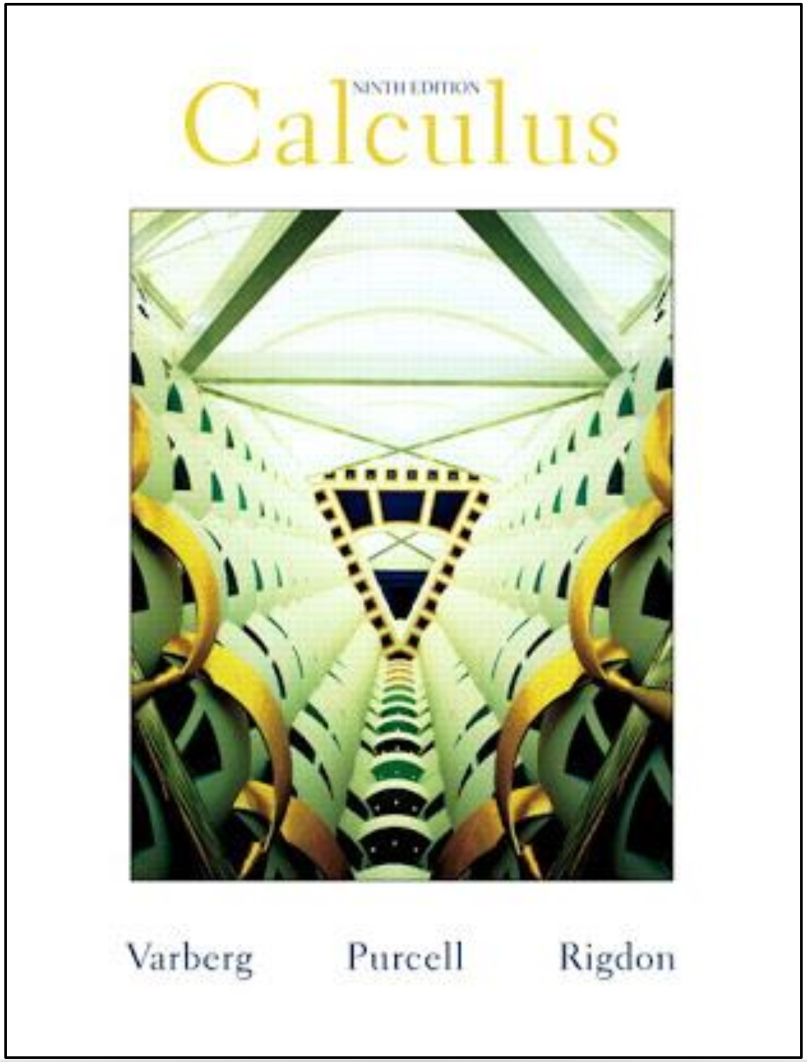
PERINGATAN HAK CIPTA

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep-konsep kalkulus matematika untuk mendukung dalam implementasi pengetahuan dan teknologi secara teoritis maupun praktis. (C3,A3)

LIMIT

Diadopsi dari sumber:



Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep limit dalam menyelesaikan soal perhitungan. (C3, A3)

Materi

1. Pendahuluan.
2. Pengkajian mendalam tentang limit.
3. Teorema limit.
4. Limit dengan fungsi trigonometri.
5. Limit tak terhingga.
6. Kontinuitas fungsi.

1. Pendahuluan

1.1. Masalah yang Mendasari Konsep Limit (1)

- Konsep limit merupakan pusat dari banyak masalah fisika, teknik dan ilmu-ilmu sosial.
- Pada dasarnya, pertanyaannya adalah: apa yang terjadi pada fungsi $f(x)$ jika x mendekati suatu konstanta c.
- Misalkan diketahui posisi sebuah objek yang bergerak dengan stabil pada waktu tertentu.
- Letak objek pada waktu t dinotasikan sebagai $s(t)$. Berapa kecepatan gerak objek pada saat $t = 1$?
- Kita dapat menggunakan rumus "Jarak = Kecepatan × Waktu" untuk mencari kecepatan pada interval waktu tertentu.
- Dengan kata lain, Kecepatan = Jarak / Waktu.

1.1. Masalah yang Mendasari Konsep Limit (2)

- Rumus kecepatan tersebut adalah kecepatan “rata-rata” pada interval tertentu, karena sekecil apapun interval yang diambil, kita tidak pernah tau apakah kecepatan objek selalu konstan pada interval tersebut.h
- Misalkan pada interval $[1,2]$, kecepatan rata-ratanya $\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$; pada interval $[1,1.2]$, kecepatan rata-ratanya $\frac{s(1.2)-s(1)}{1.2-1}$; pada interval $[1,1.02]$, kecepatan rata-ratanya $\frac{s(1.02)-s(1)}{1.02-1}$.
- Jadi berapa kecepatan gerak objek pada saat $t = 1$?
- Untuk memahami konsep kecepatan “sesaat” tersebut, kita harus membahas tentang limit dari kecepatan rata-rata dengan interval yang sangat kecil.

1.2. Pemahaman Intuitif (1)

- Misalkan terdapat fungsi sebagai berikut

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

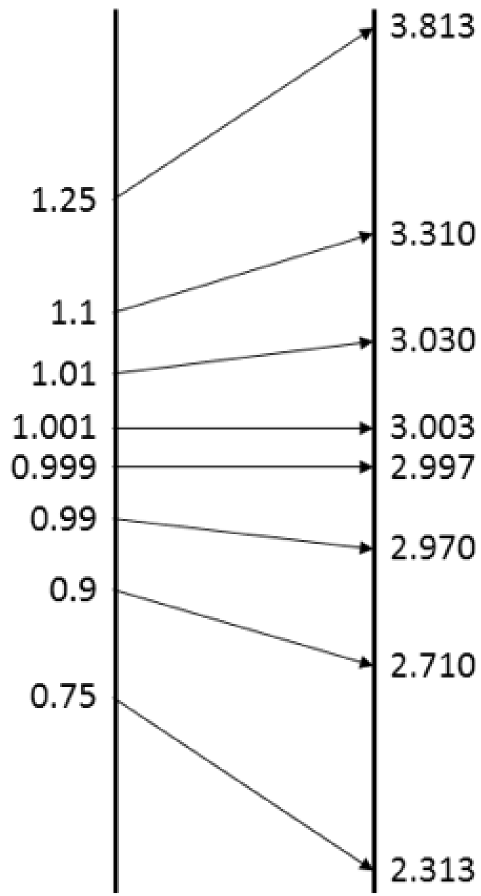
- Fungsi tersebut tidak terdefinisi saat $x = 1$, karena pada titik ini $f(x)$ memiliki bentuk $\frac{0}{0}$, yang tidak memiliki makna.
- Namun kita dapat menentukan apa yang terjadi pada $f(x)$ saat x mendekati 1. Atau lebih tepatnya, apakah $f(x)$ mendekati suatu nilai saat x mendekati 1?
- Untuk menjawab pertanyaan tersebut, ada 3 hal yang dapat dilakukan, yakni menghitung nilai $f(x)$ untuk x disekitar 1, membuat diagram skematik, dan menggambar grafik $y = f(x)$.

1.2. Pemahaman Intuitif (2)

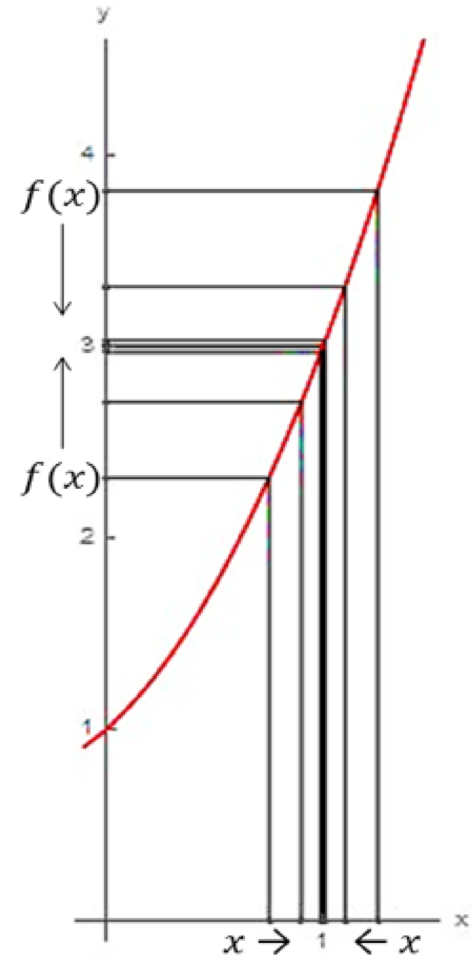
Tabel nilai $f(x)$

x	$y = f(x)$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
$\downarrow$	$\downarrow$
1.000	?
$\uparrow$	$\uparrow$
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Diagram Skematik



Grafik $y = f(x)$



1.2. Pemahaman Intuitif (3)

- Dari ketiga cara tersebut, kita memperoleh hasil yang sama, yakni $f(x)$ mendekati 3 saat x mendekati 1.
- Dalam simbol matematika, kita tuliskan sebagai

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

- Yang dibaca sebagai "limit dari $(x^3-1)/(x-1)$ saat x mendekati 1 adalah 3".
- Secara aljabar, dapat dibuktikan sebagai berikut

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$
$$= 1^2+1+1 = 3$$

- Perhatikan bahwa $(x-1)/(x-1) = 1$ dengan syarat $x \neq 1$.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Tentukan $\lim_{x \to 3}(4x - 5)$.

Solusi. Saat x mendekati 3, $4x - 5$ mendekati $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Dituliskan

$$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$$

Contoh 1.2. Tentukan $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

Solusi. Perhatikan bahwa $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ tidak terdefinisi di $x = 3$. Kita dapat menggunakan cara-cara sebelumnya. Namun lebih baik jika menggunakan aljabar untuk menyederhanakan masalah ini.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Ingat $(x - 3)/(x - 3) = 1$, dengan syarat x tidak sama dengan 3.

1.3. Limit Satu Sisi (1)

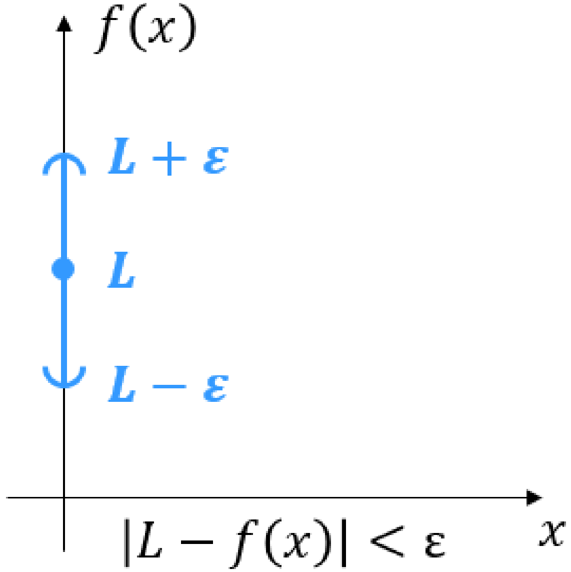
- Misalkan simbol $x \to c^+$ berarti x mendekati c dari kanan, dan $x \to c^-$ berarti x mendekati c dari kiri.
- Limit kanan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ artinya saat x mendekati tetapi tidak sama dengan c dari kanan, maka $f(x)$ mendekati L.
- Limit kiri $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ artinya saat x mendekati tetapi tidak sama dengan c dari kiri, maka $f(x)$ mendekati L.
- Limit fungsi $f(x)$ di c adalah L jika dan hanya jika limit kanan dan limit kirinya mendekati L. Atau dituliskan sebagai

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L.}$$

2. Pengkajian Mendalam Tentang Limit

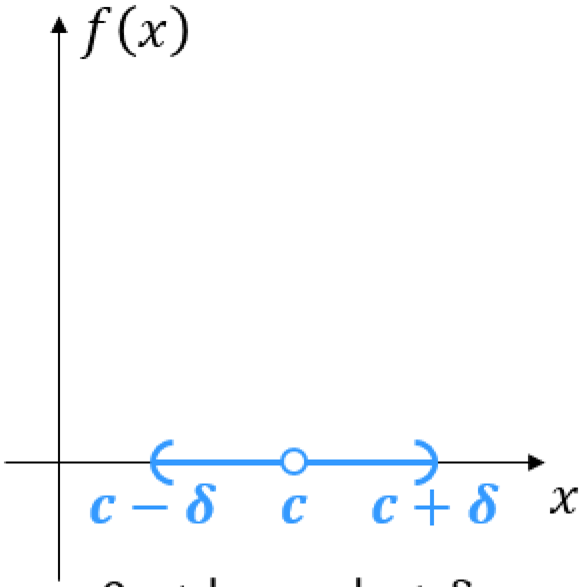
2.1. Konsep Dasar Limit (1)

- Kita gunakan huruf Yunani ε (epsilon) dan δ (delta) untuk mendefinisikan suatu nilai perubahan positif yang sangat kecil.
- Untuk menyatakan bahwa fungsi $f(x)$ berada pada range ε dari L, berarti $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ atau $|f(x)-L| < \varepsilon$.
- Yang artinya $f(x)$ berada di interval terbuka $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



2.1. Konsep Dasar Limit (2)

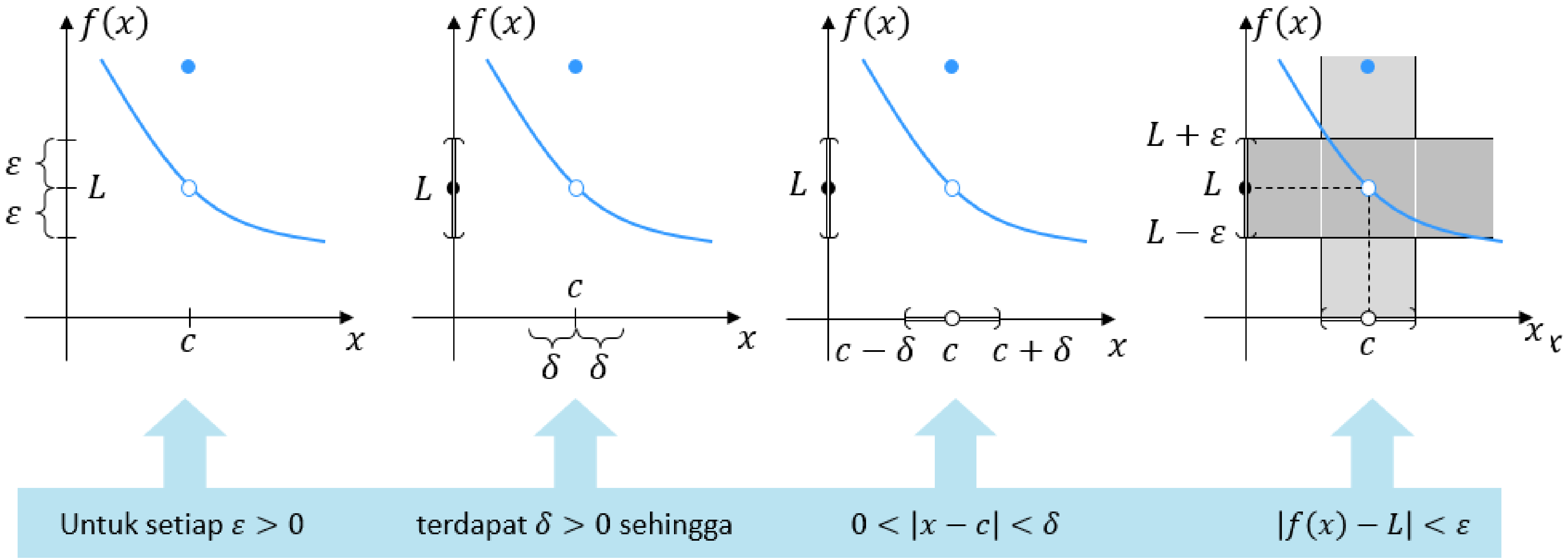
- Selanjutnya untuk menyatakan bahwa x sangat dekat namun tidak sama dengan c, diambil suatu nilai δ sehingga x berada di interval terbuka $(c-\delta, c+\delta)$ dengan c dihapus.
- Atau dapat dituliskan sebagai $0 < |x-c| < \delta$.
- Bentuk $|x-c| < \delta$ mendefinisikan interval $c-\delta < x < c+\delta$.
- Sedangkan $0 < |x-c|$ menyatakan bahwa $x = c$ tidak termasuk.



$0 < |x-c| < \delta$

2.1. Konsep Dasar Limit (3)

- Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$, dituliskan dengan $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



2.2. Pembuktian Limit (1)

Contoh 2.1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4}(3x - 7) = 5$.

Analisis Pendahuluan. Misalkan ε merupakan suatu bilangan positif. Kita harus mencari suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Perhatikan pertidaksamaan di sisi kanan

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Sekarang kita tahu bagaimana memilih nilai δ, yakni $\delta = \varepsilon/3$. Tentu nilai δ yang lebih kecil juga berlaku.

2.2. Pembuktian Limit (2)

Bukti Formal. Diberikan suatu $\varepsilon > 0$, ambil $\delta = \varepsilon/3$.

Dengan $0 < |x-4| < \delta$, maka

$$|(3x-7)-5| = |3x-12| = |3(x-4)| = 3|x-4| < 3\delta = \varepsilon$$

Jika rantai persamaan dan pertidaksamaan diatas dibaca dari kiri ke kanan dengan menggunakan sifat transitif dari $=$ dan $<$, diperoleh

$$|(3x-7)-5| < \varepsilon$$

3. Teorema Limit

3.1. Teorema Utama Limit (1)

Misalkan terdapat bilangan bulat positif n, konstanta k, dan fungsi f dan g yang memiliki limit di c. Maka

1. $\lim_{x \to c} k = k;$ → Fungsi konstan
2. $\lim_{x \to c} x = c;$ → Fungsi tunggal
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x);$ → Perkalian konstan dan fungsi
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x);$
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x);$

   → Penjumlahan dan pengurangan fungsi
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x);$ → Perkalian dua fungsi

3.1. Teorema Utama Limit (2)

7. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$; $\longrightarrow$ Pembagian dua fungsi

8. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$; $\longrightarrow$ Fungsi dipangkatkan

9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ saat n genap. $\longrightarrow$ Fungsi diakar

Contoh 3.1. Hitung $\lim\limits_{x\to 4} (3x^2 - 2x)$.

Lingkaran merah menunjukkan aturan yang digunakan untuk penjabaran limit

$$\lim_{x\to 4} (3x^2 - 2x) \overset{5}{=} \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \overset{3}{=} 3 \lim_{x\to 4} x^2 - 2 \lim_{x\to 4} x$$

$$\overset{8}{=} 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2 \lim_{x\to 4} x \overset{2}{=} 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

3.1. Teorema Utama Limit (3)

Lingkaran merah menunjukkan aturan yang digunakan untuk penjabaran limit

Contoh 3.2. Hitung $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{7}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x \to 4} x} \overset{9,2}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4}(x^2+9)}}{4} \overset{4}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 9}$$

$$\overset{8,1}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 + 9} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$

Contoh 3.3. Jika $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ dan $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 8$, carilah $\lim\limits_{x \to 3}\left[f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}\right]$.

$$\lim_{x \to 3}\left[f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}\right] \overset{6}{=} \lim_{x \to 3} f^2(x) \cdot \lim_{x \to 3} \sqrt[3]{g(x)} \overset{8,9}{=} \left[\lim_{x \to 3} f(x)\right]^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to 3} g(x)}$$

$$= [4]^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 32$$

3.2. Teorema Substitusi

Jika fungsi f merupakan suatu fungsi polinomial atau rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

dengan $f(c)$ terdefinisi. Jika $f(x)$ fungsi rasional, maka nilai dari penyebut saat $x = c$ tidak boleh nol.

Contoh 3.4. Hitung $\lim_{x \to 4} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

3.3. Teorema Apit

Andaikan fungsi f, g, dan h memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x di sekitar c, $x \neq c$.

Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

Contoh 3.5. Misalkan terbukti bahwa $1 - x^2/6 \leq (\sin x)/x \leq 1$ untuk semua x di sekitar 0, $x \neq 0$. Apa yang dapat disimpulkan tentang $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

Solusi. Misalkan $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\sin x)/x$, dan $h(x) = 1$.

Dapat dihitung bahwa $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} h(x)$, sehingga berdasarkan teorema apit, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4. Limit dengan Fungsi Trigonometri

4.1. Limit Fungsi Trigonometri

Untuk setiap bilangan real c pada domain fungsi, berlaku

1. $\lim\limits_{t \to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim\limits_{t \to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t \to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim\limits_{t \to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t \to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim\limits_{t \to c} \csc t = \csc c$

Contoh 4.1. Hitung $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1} = \left(\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t+1}\right)\left(\lim_{t \to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

4.2. Limit Trigonometri Khusus

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

2. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0$

Contoh 4.2. Tentukan limit berikut ini:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x\cos x}} = \frac{4\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}{\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1\cdot 1} = 4$

5. Limit Tak Terhingga

5.1. Limit Menuju Tak Hingga

Definisi. Limit $x \to \infty$

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval $[c, \infty)$ untuk suatu nilai c.

Dapat dikatakan bahwa $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat suatu nilai M sedemikian sehingga $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi. Limit $x \to -\infty$

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval $(-\infty, c]$ untuk suatu nilai c.

Dapat dikatakan bahwa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat suatu nilai M sedemikian sehingga $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

CONTOH SOAL

Contoh 5.1. Jika k adalah bilangan bulat positif, buktikan bahwa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ dan } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Solusi. Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Setelah analisis pendahulan (seperti **Contoh 2.1**), diperoleh $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Jika $x > M$, maka

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon.$$

Sedangkan untuk $x < M$ dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

5.2. Limit Barisan Bilangan

- Beberapa fungsi memiliki domain bilangan asli $\{1,2,3,\dots\}$.
- Suku ke-n dari barisan bilangan biasa dinotasikan sebagai a_n.
- Sebagai contoh, didefinisikan barisan bilangan $a_n = n/(n+1)$.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \dots, a_{100} = \frac{100}{101}, \dots$$

- Dapat dilihat bahwa semakin besar nilai n, nilai a_n semakin mendekati 1. Sehingga dapat dikatakan $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

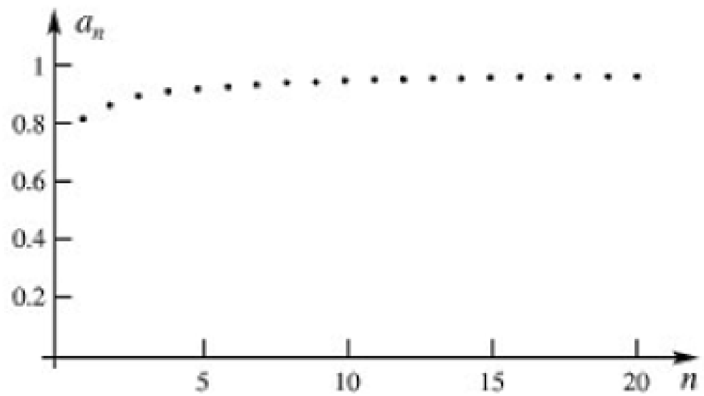
Definisi. Misalkan a_n terdefinisi untuk semua bilangan asli yang lebih besar atau dama dengan c. Dapat dikatakan bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli M sedemikian sehingga

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

CONTOH SOAL

Contoh 5.2. Hitunglah $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

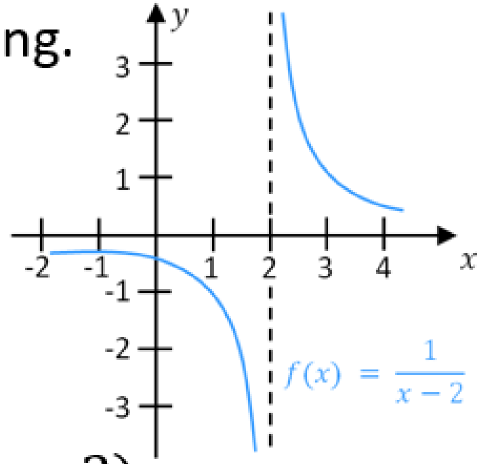
Solusi. Gambar disamping menunjukkan grafik dari $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.



Dengan menggunakan teorema dasar limit, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{1/2} = 1$$

5.3. Limit Tak Hingga



- Perhatikan grafik fungsi $f(x) = 1/(x-2)$ disamping.
- Saat x mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi terlihat semakin kecil, tanpa batas.
- Demikian pula saat x mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi terlihat semakin besar tanpa batas.
- Sehingga tidak mungkin mencari nilai dari $\lim_{x \to 2} 1/(x-2)$, namun kita dapat menuliskan $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ dan $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Definisi. Dikatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$, jika untuk bilangan positif M, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

CONTOH SOAL

Contoh 5.3. Hitunglah $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

Solusi.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

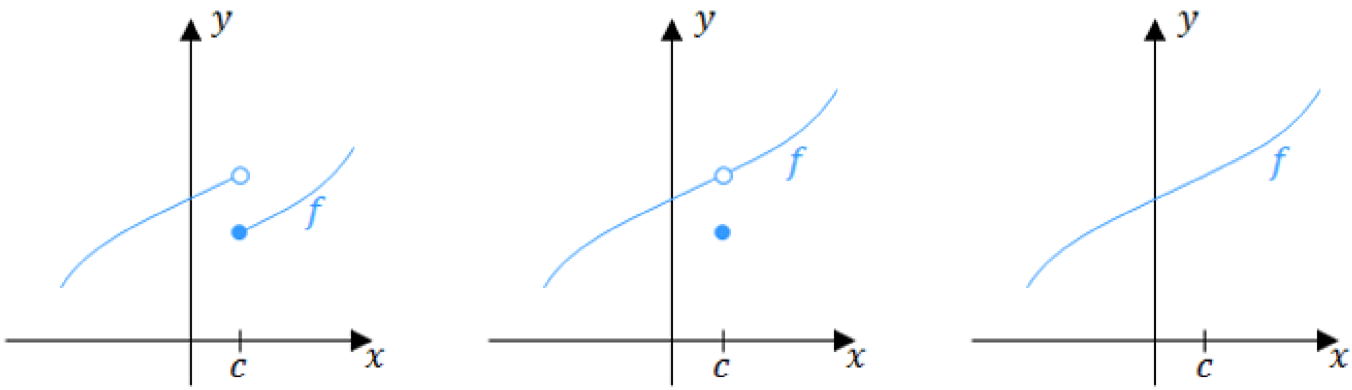
Saat $x \to 2^+$, dapat dilihat bahwa $(x+1) \to 3$, $(x-1) \to -1$, dan $(x-2) \to 0^+$; sehingga pembilang mendekati 3, namun nilai dari penyebut adalah negatif dan mendekati 0. Dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

6. Kontinuitas Fungsi

Kontinuitas Fungsi

- Dalam matematika dan ilmu pengetahuan alam, kata kontinu digunakan untuk menjelaskan suatu proses yang berlangsung tanpa perubahan yang mendadak.



- Dari tiga gambar diatas, hanya gambar ketiga yang menggambarkan kontinuitas di c.
- Grafik pertama tidak memiliki limit di c.
- Grafik kedua memiliki limit di c, tetapi $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

6.1. Kontinuitas Fungsi di Suatu Titik

Definisi. Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval terbuka yang memuat titik c. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Artinya, suatu fungsi f dikatakan kontinu jika memenuhi 3 syarat berikut:
  1. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada,
  2. $f(c)$ ada, dan
  3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
- Jika salah satu dari ketiga syarat tersebut tidak terpenuhi, maka fungsi f tidak kontinu (diskontinu) di c.

CONTOH SOAL

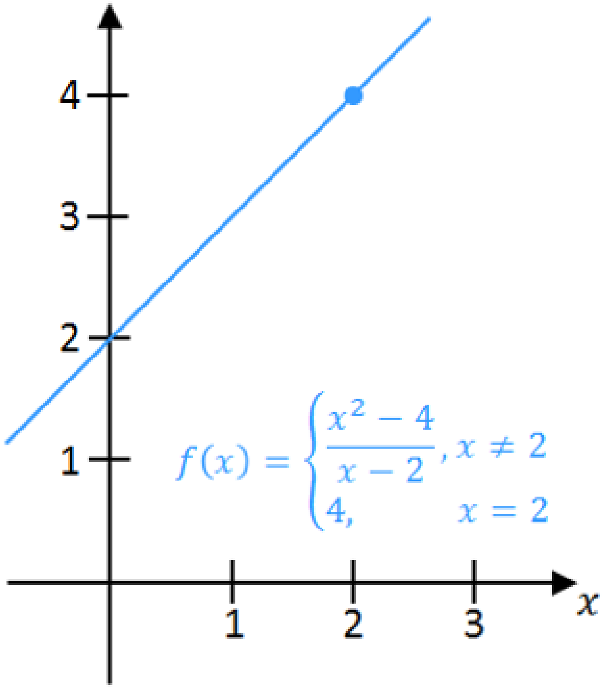
Contoh 6.1. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Tentukan $f(2)$ agar fungsi f kontinu.

Solusi.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Oleh karena itu, didefinisikan $f(2) = 4$.

Grafik yang menggambarkan fungsi tersebut ditunjukkan oleh gambar disamping.



Dari gambar, terlihat bahwa fungsi f dapat dituliskan sebagai $f(x) = x + 2$ untuk semua x.

6.2. Kontinuitas Fungsi-Fungsi Umum

Fungsi Polinomial.

- Suatu fungsi polinomial kontinu di semua bilangan real c.

Fungsi Rasional.

- Suatu fungsi rasional kontinu di semua bilangan real c dalam domainnya, kecuali saat penyebutnya nol.

Fungsi Nilai Mutlak.

- Suatu fungsi nilai mutlak kontinu di semua bilangan real c.

Fungsi Akar Pangkat n.

- Jika n ganjil, fungsi akar pangkat n kontinu di semua bilangan real c.
- Jika n genap, fungsi akar pangkat n kontinu di senua bilangan real positif c.

6.3. Kontinuitas dalam Operasi Fungsi

Jika fungsi f dan g kontinu di c, maka fungsi kf, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g (dengan $g(c)\neq 0$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (dengan $f(c)>0$ saat n genap) juga kontinu di c.

Contoh 6.2. Tentukan dimana fungsi $F(x)=(3|x|-x^2)/(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$ kontinu.

Solusi. Fungsi $|x|$, x^2, $\sqrt{x}$, dan $\sqrt[3]{x}$ kontinu di semua bilangan positif (slide sebelumnya).

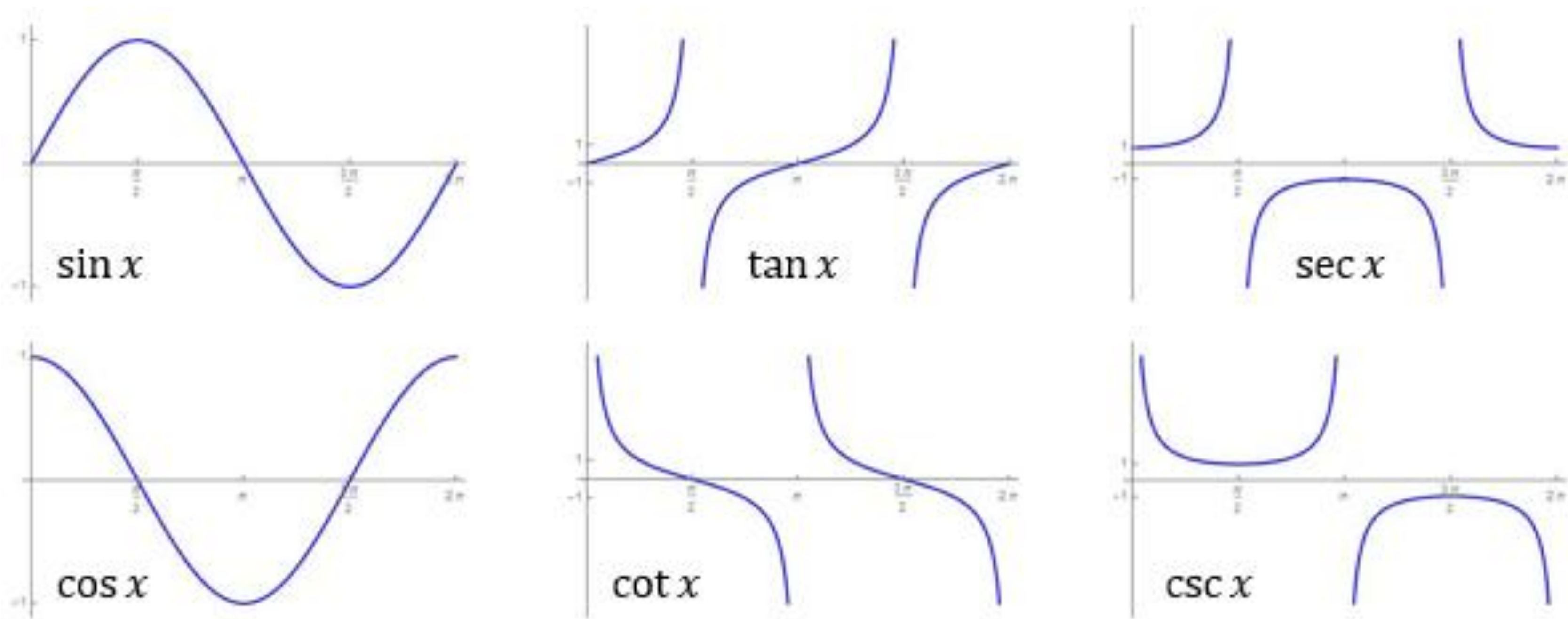
Berdasarkan definisi diatas, fungsi $3|x|-x^2$, $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$, serta

$$\frac{3|x|-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

kontinu di setiap bilangan positif c.

6.4. Kontinuitas Fungsi Trigonometri

- Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ kontinu di setiap bilangan real c.
- Fungsi $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, dan $\csc x$ kontinu di setiap bilangan real c yang merupakan domain fungsi tersebut.



6.5. Kontinuitas Fungsi Komposisi

Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan jika fungsi f kontinu di L, maka

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika fungsi g kontinu di c dan fungsi f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di c.

Conton 6.3. Pelihatkan bahwa fungsi $h(x) = \sin\frac{x^4-3x+1}{x^2-x-6}$ kontinu kecuali saat $x = 3$ dan $x = -2$.

Solusi. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, sehingga fungsi rasional $g(x) = \frac{x^4-3x+1}{x^2-x-6}$ kontinu kecuali saat $x = 3$ dan $x = -2$. Sedangkan fungsi $\sin x$ selalu kontinu. Oleh karena $h(x) = \sin\big(g(x)\big)$, maka fungsi h juga kontinu kecuali saat $x = 3$ dan $x = -2$.

LATIHAN SOAL (1)

Tentukan hasil dari limit berikut:

1. $\lim\limits_{x \to 3} (4x - 5)$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - x^2}{2x^2 - 5x^2}$
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3\sqrt{x^3} + 3x}{\sqrt{2x^3}}$
11. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n + 1}$
12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5}\right)$

LATIHAN SOAL (2)

Tentukan apakah fungsi-fungsi berikut kontinu di $x = 3$. Jika tidak, berikan alasannya.

13. $f(x) = (x-3)(x-4)$
14. $f(x) = \frac{3}{x-3}$
15. $f(x) = \sqrt{x-4}$
16. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Fungsi-fungsi berikut tidak terdefinisi di suatu titik. Bagaimana kita dapat mendefinisikan fungsi f di titik tersebut agar fungsi f kontinu?

17. $f(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$
18. $f(x) = \frac{2x^2-18}{3-x}$
19. $f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x+1}$
20. $f(x) = \sin\frac{x^2-1}{x+1}$

Ringkasan (1)

- Konsep limit merupakan pusat dari banyak masalah fisika, teknik dan ilmu-ilmu sosial. Limit digunakan untuk mencari nilai pendekatan dari suatu fungsi $f(x)$ saat x mendekati c.
- Ada 3 cara mendasar untuk memahami konsep limit, yakni dengan menghitung nilai $f(x)$ untuk x di sekitar c, membuat diagram skematik, dan menggambar grafik $y = f(x)$.
- Limit fungsi $f(x)$ di titik c adalah L jika dan hanya jika limit kiri dan limit kanannya mendekati L.
- Secara aljabar, limit dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema utama limit.

Ringkasan (2)

- Terdapat dua limit penting dalam limit trigonometri, yaitu $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ dan $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0$.
- Selain limit x mendekati c, terdapat limit yang menuju tak hingga (∞ dan $-\infty$).
- Salah satu contoh limit menuju tak hingga adalah limit barisan bilangan saat n menuju tak hingga.
- Fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, $f(c)$ ada, dan $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

PERINGATAN HAK CIPTA

TERIMA KASIH