MSA08 – 02 TURUNAN

PERINGATAN HAK CIPTA

Segala materi ini merupakan milik Universitas Bunda Mulia yang dilindungi oleh hak cipta.

Materi ini hanya untuk dipergunakan oleh mahasiswa Universitas Bunda Mulia dalam rangkaian proses perkuliahan.

Dilarang keras untuk mendistribusikannya dalam bentuk apapun.

Pelanggaran terhadap hak cipta ini dapat dikenakan sanksi hukum sesuai dengan perundang-undangan yang berlaku.

© Universitas Bunda Mulia

SubCPMK

- Mahasiswa mampu menerapkan konsep turunan dalam menyelesaikan soal perhitungan. (C3, A3)

Materi

1. Turunan.
2. Aturan pencarian turunan.
3. Turunan fungsi trigonometri.
4. Aturan rantai.
5. Turunan tingkat tinggi.
6. Diferensiasi implisit.
7. Laju yang berkaitan.
8. Diferensiasi dan Aproksimasi.

1. Turunan

Turunan (1)

- Turunan merupakan dasar dari pencarian gradien garis singgung, kecepatan sesaat, kecepatan pertumbuhan organisme dan lain-lain.
- Berdadarkan konsep limit, turunan suatu fungsi f adalah suatu fungsi yang dinotasikan sebagai f' yang didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Contoh 1.1. Diketahui $f(x) = 13x - 6$. Tentukan $f'(4)$.

Solusi.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

Turunan (2)

Contoh 1.2. Diketahui $f(x) = x^3 + 7x$. Tentukan $f'(x)$.

Solusi.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^{2h} + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7)$$

$$= 3x^2 + 7$$

Contoh 1.3. Diketahui $f(x) = 1/x$. Tentukan $f'(x)$.

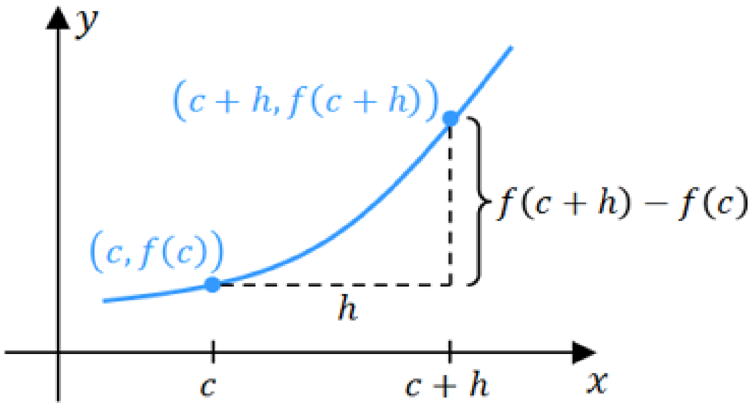
Solusi.

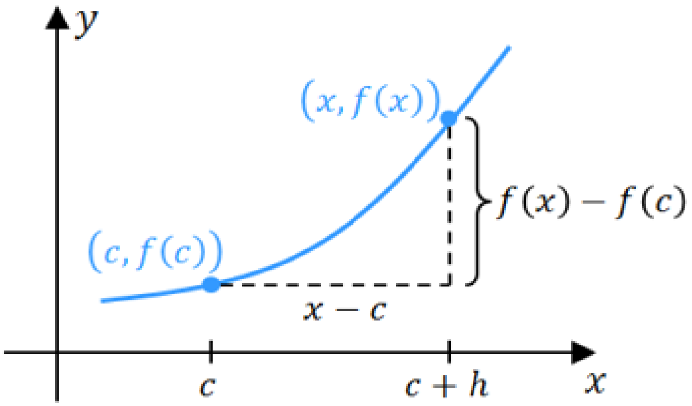
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

1.1. Bentuk Ekuivalen dari Turunan

- Untuk mencari nilai dari $f'(c)$ dengan menggunakan definisi turunan, diperoleh $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.
- Perhatikan dua gambar berikut.





- Dengan substitusi $c + h = x$ sehingga $h = x - c$, diperoleh

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.4. Gunakan definisi turunan dalam kotak untuk menentukan $g'(c)$ dari $g(x) = 2/(x+3)$.

Solusi.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{2}{c+3}}{x - c}$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+2)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+2)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

2. Aturan Pencarian Turunan

Aturan Pencarian Turunan (1)

- **Aturan Fungsi Konstan**

  Jika $f(x) = k$, dengan k merupakan konstanta sembarang, maka $f'(x) = 0$.
- **Aturan Fungsi Identitas**

  Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$.
- **Aturan Pangkat**

  Jika $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$. (n bilangan bulat positif)
- **Aturan Perkalian Konstan**

  Jika k merupakan konstanta sembarang dan fungsi f memiliki turunan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$.

Aturan Pencarian Turunan (2)

- **Aturan Penjumlahan dan Pengurangan**

  Jika fungsi f dan g memiliki turunan, maka
  $$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
- **Aturan Perkalian**

  Jika fungsi f dan g memiliki turunan, maka
  $$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x)f'(x)$$
- **Aturan Pembagian**

  Jika fungsi f dan g memiliki turunan, maka
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 2.1. Carilah turunan dari:

(a) $f(x) = 5x^2 + 7x - 6,$

(b) $g(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 13,$ dan

(c) $h(x) = 4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16.$

Solusi.

(a) $f'(x) = 5(2x^{2-1}) + 7(1) - 0 = 10x + 7.$

(b) $g'(x) = 3(4x^{4-1}) + 8(3x^{3-1}) - 2(2x^{2-1}) - 0$

$\qquad = 12x^3 + 24^2 - 4x$

(c) $h'(x) = 4(6x^{6-1}) - 3(5x^{5-1}) - 10(2x^{2-1}) + 5(1) + 16$

$\qquad = 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5.$

CONTOH SOAL (2)

Contoh 2.2. Carilah turunan dari $h(x) = (3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ dengan menggunakan aturan perkalian.

Solusi.

Misalkan $f(x) = 3x^2 - 5$ dan $g(x) = 2x^4 - x$, maka $f'(x) = 6x$ dan $g'(x) = 8x^3 - 1$; sehingga

$$\begin{aligned} h'(x) = (f \cdot g)'(x) &= f(x) \cdot g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x) \\ &= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2 \\ &= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5. \end{aligned}$$

CONTOH SOAL (3)

Contoh 2.3. Carilah turunan dari $h(x) = (3x - 5)/(x^2 + 7)$

Solusi.

Misalkan $f(x) = 3x - 5$ dan $g(x) = x^2 + 7$, maka $f'(x) = 3$ dan $g'(x) = 2x$; sehingga

$$h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{(x^2 + 7)(3) - (3x - 5)(2x)}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 21 - 6x^2 + 10x}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

3. Turunan Fungsi Trigonometri

Turunan Fungsi Trigonometri

Turunan dari fungsi-fungsi trigonometri didefinisikan sebagai berikut.

- Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$.
- Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$.
- Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$.
- Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$.
- Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$.
- Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$.

Contoh 3.1. Tentukan turunan dari $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$.

Solusi.

$$f'(x) = 3(\cos x) - 2(-\sin x) = 3\cos x + 2\sin x$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.2. Tentukan turunan dari $h(x) = x^n \tan x$, untuk $n \geq 1$.

Solusi. Misalkan $f(x) = x^n$ dan $g(x) = \tan x$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ dan $g'(x) = \sec^2 x$; sehingga

$$h'(x) = x^n(\sec^2 x) + (\tan x)(nx^{n-1}) = x^n \sec^2 x + nx^{n-1} \tan x$$

Contoh 3.3. Carilah turunan dari $h(x) = (1 + \sin x)/(\cos x)$.

Solusi. Misalkan $f(x) = 1 + \sin x$ dan $g(x) = \cos x$, maka $f'(x) = \cos x$ dan $g'(x) = -\sin(x)$; sehingga

$$h'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (1 + \sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

4. Aturan Rantai

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika fungsi g dapat diturunkan terhadap x dan fungsi f dapat diturunkan terhadap u, maka fungsi komposisi $f \circ g$ yang didefinisikan sebagai $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ memiliki turunan terhadap x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh 4.1. Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, carilah turunan dari y.

Solusi. Misalkan $u = 2x^2 - 4x + 1$ dan $y = u^{60}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (60u^{59})(4x - 4) = 60(2x^2 - 4x - 1)^{59}(4x - 4)$$

CONTOH SOAL

Contoh 4.2. Tentukan dy/dx dari fungsi-fungsi berikut:

(a) $y = 1/(2x^5 - 7)^3$ dan

(b) $y = \sin 2x$.

Solusi.

(a) Misalkan $u = 2x^5 - 7$ dan $y = 1/u^3 = u^{-3}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-3u^{-4})(10x^4) = \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 = \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)}$$

(b) Misalkan $u = 2x$ dan $y = \sin u$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)(2) = 2\cos 2x$$

4.1. Menerapkan Aturan Rantai Lebih dari Satu Kali

Contoh 4.3. Carilah turunan dari:

(a) $y = \sin^3(4x)$

(b) $y = \sin[\cos(x^2)]$

Solusi.

(a) Misalkan $u = 4x$, $v = \sin u$, dan $y = v^3$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3v^2)(\cos u)(4) = 12\sin^2(4x)\cos(4x)$$

(b) Misalkan $u = x^2$, $v = \cos u$, dan $y = \sin v$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos v)(-\sin u)(2x)$$
$$= -2x\sin(x^2)\cos[\cos(x^2)]$$

5. Turunan Tingkat Tinggi

Turunan Tingkat Tinggi

Notasi turunan dari $y = f(x)$

Turunan	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D	Notasi Leibniz
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Keempat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

CONTOH SOAL

Contoh 5.1. Jika $y = \sin 2x$, carilah d^3y/dx^3, d^4y/dx^4, dan $d^{12}y/dx^{12}$.

Solusi.

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \sin 2x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \cos 2x$$

Pola turunan berulang setiap kelipatan 4, sehingga

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \sin 2x$$

5.1. Kecepatan dan Percepatan (1)

- Kecepatan dapat didefinisikan sebagai perubahan letak suatu objek pada interval tertentu.
- Sedangkan percepatan merupakan perubahan kecepatan pada interval waktu tertentu.

Contoh 5.2. Suatu objek bergerak di koordinat sepanjang fungsi $s = 2t^2 - 12t + 8$, dengan jarak s cm dan waktu t detik, $t \geq 0$. Tentukan:

(a) kecepatan objek pada saat $t = 1$ dan $t = 6$.

(b) kapan kecepatan objek sama dengan nol.

(c) kapan kecepatannya positif.

(d) berapa percepatannya.

(d) berapa percepatannya.

5.1. Kecepatan dan Percepatan (2)

Solusi.

(a) Jika kecepatan pada waktu t dinotasikan dengan $v(t)$, maka $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12.$

Sehingga $v(1) = 4(1) - 12 = -8$ cm/s dan

$v(6) = 4(6) - 12 = 12$ cm/s.

(b) Kecepatan sama dengan nol saat $4t - 12 = 0$, yakni saat $t = 3$.

(c) Kecepatan positif saat $4t - 12 > 0$, yakni saat $t > 3$.

(d) Percepatan adalah perubahan kecepatan dalam interval waktu tertentu. Jika percepatan pada waktu t dinotasikan dengan $a(t)$, maka $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$ cm^2/s.

6. Diferensiasi Implisit

Diferensiasi Implisit

- Fungsi-fungsi yang kita pelajari sebelumnya mendefinisikan salah satu variabel secara eksplisit, contohnya $y = \sqrt{x^3 + 1}$ dan $y = x \sin x$, atau secara umum $y = f(x)$.
- Namun beberapa fungsi didefinisikan secara implisit dengan hubungan antara x dan y, misalkan $y^3 + 7y = x^3$.
- Fungsi tersebut dapat diubah menjadi fungsi eksplisit, namun sering kali turunannya akan sulit untuk dicari.
- Oleh karena itu diperlukan metode khusus yang disebut diferensiasi atau turunan implisit.
- Dalam proses diferensiasi implisit, kedua ruas diturunkan terhadap x, dengan asumsi y merupakan fungsi dari x, kemudian kumpulkan dy/dx pada satu ruas untuk menentukan fungsi dari dy/dx.

CONTOH SOAL (1)

Contoh 6.1. Carilah turunan dari $y^3 + 7y = x^3$.

Solusi.

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

CONTOH SOAL (2)

Contoh 6.2. Carilah turunan dari $y^3 - xy^2 - \cos xy = 2$.

Solusi. Untuk suku dengan variabel x dan y, digunakan aturan perkalian.

$$\frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(\cos xy) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - y^2 - (\sin xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

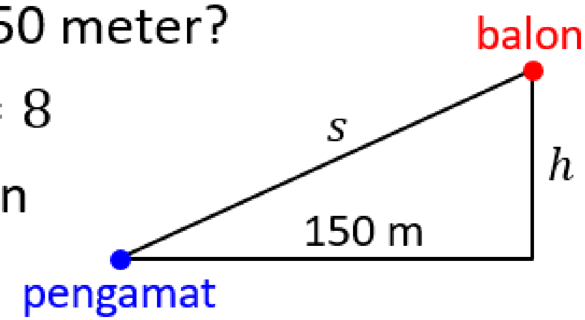
$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2xy - x\sin xy) = y^2 + y\sin xy$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + y\sin xy}{3y^2 - 2xy - x\sin xy}$$

7. Laju yang Berkaitan

7.1. Benda yang Dilemparkan

Contoh 7.1. Sebuah balon dilepaskan ke udara dari suatu titik berjarak 150 meter dari seorang pengamat yang berada setara dengan groud. Jika kecepatan awal balon 8 m/s, berapa kecepatan perubahan jarak pengamat dengan balon saat ketinggian balon 50 meter?



Solusi. Dari soal diketahui bahwa $v = dh/dt = 8$ dan ditanyakan nilai ds/dt saat $h = 50$. Dengan Teorema Phytagoras, diperoleh:

$$s^2 = h^2 + (150)^2$$

$$\frac{d}{dt}(s^2) = \frac{d}{dt}(h^2 + (150)^2)$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt} \iff s\frac{ds}{dt} = h\frac{dh}{dt}$$

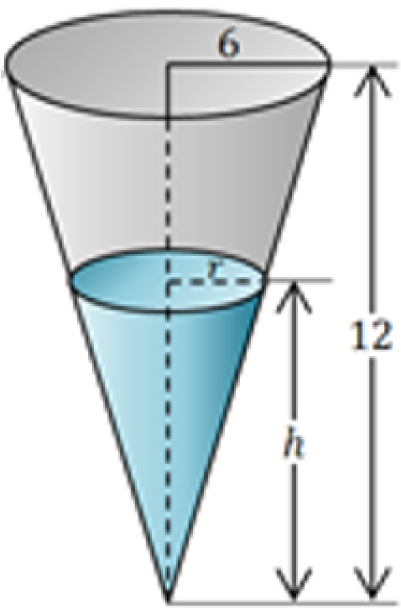
Saat $h = 0$, $s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$

$$\left(50\sqrt{10}\right)\frac{ds}{dt} = 50(8)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2{,}53 \text{ m/s}$$

7.2. Air Memenuhi Tangki

Contoh 7.2. Air dialirkan ke sebuah tangki berbentuk kerucut dengan kecepatan 8 m^3/s. Jika tinggi kerucut adalah 12 m dengan diameter atas 6 m, berapa laju peningkatan tinggi permukaan air saat keadalaman air 4 m?



Solusi. Dari soal diketahui $dV/dt = 8$ dan ditanyakan nilai dh/dt saat $h = 4$. Volume kerucut: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Dari kesamaan segitiga:

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Saat $h = 4$, $8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{16\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$$

8. Diferensiasi dan Aproksimasi

8.1. Diferensiasi (1)

Definisi.

- Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi dengan variabel bebas x.
- Jika Δx merupakan kenaikan sembarang dari variabel bebas x, maka dx adalah diferensial dari variabel bebas x yang nilainya sama dengan Δx.
- Jika Δy merupakan perubahan variabel y saat nilai x berubah dari x ke $x + \Delta x$, yakni $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; maka dy adalah diferensial dari variabel terikat y yang didefinisikan sebagai $dy = f'(x)dx$.

CONTOH SOAL

Contoh 8.1. Tentukan dy jika

(a) $y = x^3 - 3x + 1$

(b) $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$

(c) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

Solusi.

(a) $dy = (3x^2 - 3)dx$

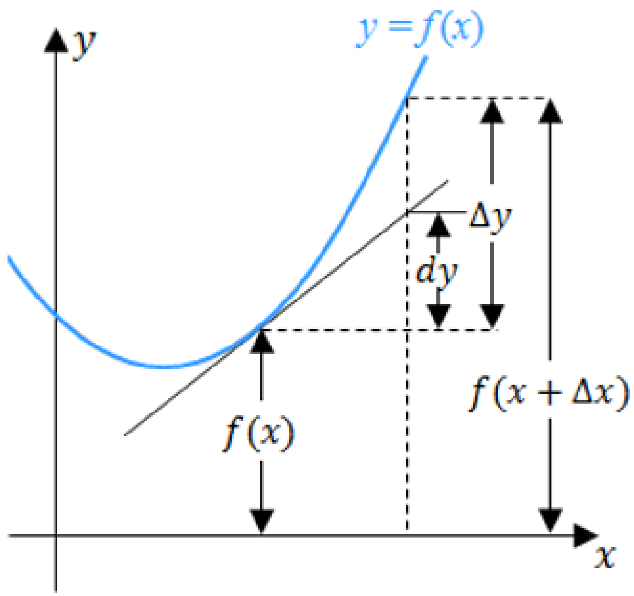
(b) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x)dx$

(c) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)dx = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}dx$

8.1. Diferensiasi (2)

Aturan Turunan	Aturan Diferensiasi
1. $\dfrac{dk}{dx} = 0$	1. $dk = 0$
2. $\dfrac{d(ku)}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$	2. $d(ku) = k\,du$
3. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3. $d(u+v) = du + dv$
4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$
5. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$	5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
6. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	6. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

8.2. Aproksimasi



Misalkan $y = f(x)$, seperti pada gambar diatas. Kenaikan nilai Δx menyebabkan kenaikan Δy di y, yang memiliki nilai pendekatan dy. Maka pendekatan dari $f(x + \Delta x)$ didefinisikan sebagai

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 8.2. Tentukan nilai pendekatan dari $\sqrt{4.6}$ dan $\sqrt{8.2}$ tanpa mengunakan kalkulator. Apa yang dapat anda lakukan?

Solusi. Dibentuk suatu fungsi $y = \sqrt{x}$.

Saat x berubah dari 4 ke 4.6, maka $\sqrt{x}$ berubah dari $\sqrt{4} = 2$ ke (sekitar) $\sqrt{4} + dy$.

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

dimana saat $x = 4$ dan $dx = 0.6$, diperoleh

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Sehingga $\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$

CONTOH SOAL (2)

Untuk $x = 9$ dan $dx = -0.8$,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} \approx -0.133$$

Sehingga $\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$

Contoh 8.3. Gunakan pendekatan diferensiasi untuk mencari perubahan area gelembung sabun saat jari-jarinya berubah dari 3 cm ke 3.025 cm.

Solusi.

Luas area gelembung sabun adalah $A = 4\pi r^2$. Perubahan area (ΔA) dapat diestimasi dengan diferensiasi dA, dengan $dA = 8\pi r\ dr$.

Saat $r = 3$ dan $dr = \Delta r = 0.025$, maka

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885\ \mathrm{cm}^2$$

8.3. Perhitungan Eror

Contoh 8.4. Sisi sebuah kubus adalah 11.4 cm dengan eror $\pm$ 0.05 cm. Hitunglah volume kubus tersebut beserta estimasi erornya.

Solusi. Rumus volume kubus dengan sisi x adalah $V = x^3$. Sehingga $dV = 3x^2 dx$. Jika $x = 11.4$ dan $dx = 0.05$, maka

$$V = (11.4)^3 \approx 1482$$

dan

$$\Delta V \approx dV = 3(11.4)^2(0.05) \approx 19$$

Jadi volume kubus adalah 1482 ± 19 cm^3.

Nilai ΔV disebut eror mutlak, sedangkan eror relatifnya adalah

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{19}{1482} \approx 0.0128$$

Dengan kata lain, eror relatifnya sebesar 1.28%.

8.4. Aproksimasi Linier

Jika f terdefinisi di a, maka terdapat garis singgung dari f di $(a, f(a))$ yang didefinisikan sebagai $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Pendekatan linier fungsi f di a dituliskan sebagai

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Contoh 8.5. Hitung dan gambarkan pendekatan linier untuk fungsi $f(x) = 1 + \sin 2x$ di $x = \pi/2$.

Solusi. Turunan dari f adalah $f'(x) = 2\cos 2x$, sehingga pendekatan liniernya adalah

$$\begin{aligned} L(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) \\ &= (1 + \sin \pi) + (2\cos \pi)(x - \pi/2) \\ &= 1 - 2(x - \pi/2) = (1 + \pi) - 2x \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL (1)

1. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 1$ di titik $x = -2, -1, 0, 1, 2.$
2. Diketahui suatu objek yang bergerak sepanjang fungsi $s = t^2 + 1$. Tentukan kecepatan sesaat pada waktu $t = 2$.
3. Gunakan definisi turunan $f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h$ untuk menentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

   a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$
   b) $f(x) = x^4 + x^2$
   c) $f(x) = 2/x$
   d) $f(x) = 6/(x^2 + 1)$
   e) $f(x) = 2x/(x^2 - x)$
   f) $f(x) = \sqrt{3x}$
   g) $f(x) = 1/\sqrt{3x}$
   h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

LATIHAN SOAL (2)

4. Dengan menggunakan aturan turunan, carilah turunan dari:

a) $f(x) = x^2 + 2x$

b) $f(x) = -3x^{-4}$

c) $f(x) = {}^{1}/_{2x} + 2x$

d) $f(x) = 2x^{-6} + x^{-1}$

e) $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

f) $f(x) = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

g) $f(x) = 1/(3x^2 + 1)$

h) $f(x) = (5x^2 + 2x - 6)/(3x)$

i) $f(x) = -10x + 3\cos x$

j) $f(x) = x^2 \cot x - 1/x^2$

k) $f(x) = \cos x/(1 + \sin x)$

l) $f(x) = (x\cos x + \sin x)/x^2$

m) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$

n) $f(x) = ((x + 1)/(x - 1))^{-3}$

o) $f(x) = \sin^4(x^2 + 3x)^2$

LATIHAN SOAL (3)

5. Sebuah objek bergerak sepanjang koordinat dengan posisi pada waktu t dirumuskan oleh $s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$, dengan jarak dalam meter dan waktu t detik. Tentukan:
   a) Kapan kecepatan objek sama dengan nol?
   b) Kapan kecepatan objek positif?
   c) Kapan objek bergerak ke kiri (arah negatif)?
   d) Kapan percepatan objek positif?
6. Dua objek bergerak sepanjang bidang koordinat. Jarak kedua objek terhadap titik pusat pada waktu t dirumuskan oleh $s_1 = 4t - 3t^2$ dan $s_2 = t^2 - 2t$. Tentukan:
   a) Kapan kedua objek memiliki posisi yang sama?
   b) Kapan kedua objek mamiliki kecepatan yang sama?

LATIHAN SOAL (4)

7. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi implisit berikut.

a) $xy^2 = x - 8$

b) $xy + \sin xy = 1$

c) $x^3y + y^3x = 30$

d) $y + \cos xy^2 + 3x^2 = 4$

e) $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$

f) $x\sqrt{y+1} = xy + 1$

8. Andaikan gelembung sabun selalu berbentuk bola saat bertambah besar. Tentukan laju pertambahan diameter saat diameternya 3 cm, jika laju angin yang ditiupkan adalah 3 cm/s.

9. Sebuah jembatan berada di ketinggian 10 m diatas rel kereta api dengan posisi saling tegak lurus. Jika sebuah mobil bergerak 45 km/jam tepat diatas sebuah kereta yang melaju 60 km/jam, berapa laju perubahan jarak mobil dan kereta 10 detik kemudian?

LATIHAN SOAL (5)

10. Tentukan dy dari fungsi-fungsi berikut.

    a) $y = x^2 + x - 3$

    b) $y = (3x^2 + x + 1)^{-2}$

    c) $y = (\sin x + \cos x)^3$

    d) $y = (7x^2 + 3x - 1)^{-3/2}$

11. Andaikan $y = f(x) = x^3$. Tentukan nilai dy jika

    a) $x = 0.5, dx = 1$

    b) $x = -1, dx = 0.75$

12. Sebuah tabung memiliki panjang tepat 12 cm dengan diameter 6 ± 0.005 cm. Hitunglah volume tabung beserta eror mutlak dan eror relatif nya.

13. Tentukan aproksimasi linier dari fungsi $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ di titik $a = 0$. Lalu gambarkan fungsi dan aproksimasi linier pada interval $[-1,1]$.

Ringkasan (1)

- Definisi turunan diambil dari konsep limit.
- Terdapat 7 aturan utama dalam pencarian turunan, yaitu aturan konstan, aturan identitas, aturan pangkat, aturan perkalian konstan, aturan pernjumlahan dan pengurangan, aturan perkalian, serta turan pembagian.
- Fungsi trigonometri juga memiliki turunan.
- Aturan rantai digunakan jika terdapat fungsi di dalam suatu fungsi. Aturan rantai dapat digunakan lebih dari satu kali.
- Turunan tingkat tinggi dapat digunakan dalam pencarian kecepatan dan percepatan suatu benda bergerak.

Ringkasan (2)

- Terdapat beberapa laju yang berkaitan dengan konsep turunan, contohnya laju perubahan jarak dan laju perubahan tinggi air.
- Dari konsep turunan, dikenal konsep diferensiasi dan aproksimasi.
- Diferensiasi digunakan untuk mencari nilai pendekatan (aproksimasi) dari suatu nilai yang tidak dapat dicari secara langsung.
- Diferensiasi dapat digunakan untuk perhitungan eror dan aproksimasi linier.

PERINGATAN HAK CIPTA

Segala materi ini merupakan milik Universitas Bunda Mulia yang dilindungi oleh hak cipta.

Materi ini hanya untuk dipergunakan oleh mahasiswa Universitas Bunda Mulia dalam rangkaian proses perkuliahan.

Dilarang keras untuk mendistribusikannya dalam bentuk apapun.

Pelanggaran terhadap hak cipta ini dapat dikenakan sanksi hukum sesuai dengan perundang-undangan yang berlaku.

© Universitas Bunda Mulia

TERIMA KASIH