Lanjutan dari file sebelumnya…

PERINGATAN HAK CIPTA

6. Teorema Nilai Rataan untuk Turunan

Teorema Nilai Rataan untuk Turunan

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensiasi pada titik-titik dalam (a, b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c di (a, b) dimana

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

atau

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 6.1. Tentukan nilai c dimana teorema nilai rataan terpenuhi untuk $f(x) = 2\sqrt{x}$ pada $[1,4]$.

Solusi.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dan

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

dicari solusi untuk $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$. Diperoleh solusi tunggal yaitu $c = \frac{9}{4}$.

CONTOH SOAL (2)

Contoh 6.2. Andaikan letak suatu objek didefinisikan oleh fungsi $s(t) = t^2 - t - 2$. Tentukan kecepatan rata-rata objek pada interval $[3,6]$ dan carilah t saat kecepatan sesaat sama dengan kecepatan rata-rata.

Solusi. Kecepatan rata-rata pada interval $[3,6]$ dama dengan

$$\frac{s(6) - s(3)}{6 - 3} = \frac{28 - 4}{3} = 8$$

Kecepatan sesaat adalah $s'(t) = 2t - 1$. Kecepatan sesaat sama dengan kecepatan rata-rata saat $2t - 1 = 8$ atau saat $t = 9/2$.

7. Menyelesaikan Persamaan Secara Numerik

7.1. Algoritma Metode Biseksi

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kontinu, dan a_1 dan b_1 merupakan suatu angka dimana $a_1 < b_1$ dan $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Andaikan E adalah toleransi eror yang diijinkan untuk $|r - m_n|$.

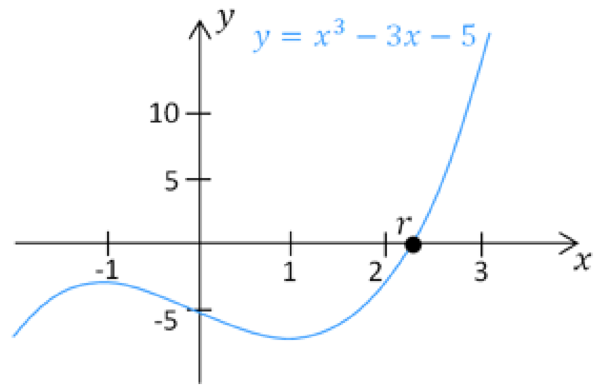
Ulangi langkah 1 sampai 5 untuk $n = 1,2, \ldots$ hingga $h_n < E$:

1. Hitung $m_n = (a_n + b_n)/2$.
2. Hitung $f(m_n)$, jika $f(m_n) = 0$, STOP.
3. Hitung $h_n = (b_n - a_n)/2$.
4. Jika $f(a_n) \cdot f(m_n) < 0$, maka $a_{n+1} = a_n$ dan $b_{n+1} = m_n$.

   Jika $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$, maka $a_{n+1} = m_n$ dan $b_{n+1} = b_n$.

CONTOH SOAL (1)

Contoh 7.1. Tentukan akar real dari $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ dengan batas eror 0.001.



Solusi. Gambarkan fungsi $y = x^3 - 3x - 5$, terlihat bahwa fungsi f memotong sumbu-x di antara 2 dan 3. Jadi diambil $a_1 = 2$ dan $b_1 = 3$.

Step 1: $m_1 = (a_1 + b_1)/2 = (2+3)/2 = 2.5$

Step 2: $f(m_1) = f(2.5) = 2.5^3 - 3 \cdot 2.5 - 5 = 3.125$

Step 3: $h_1 = (b_1 - a_1)/2 = (3-2)/2 = 0.5$

Step 4: Karena $f(a_1) \cdot f(m_1) = f(2)f(2.5) = (-3)(3.125) < 0$,

maka $a_2 = a_1 = 2$ dan $b_2 = m_1 = 2.5$.

CONTOH SOAL (2)

Ulangi proses iterasi sehingga diperoleh hasil seperti tabel berikut:

n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0.5	2.5	3.125
2	0.25	2.25	−0.359
3	0.125	2.375	1.271
4	0.0625	2.3125	0.429
5	0.03125	2.28125	0.02811
6	0.015625	2.265625	−0.16729
7	0.078125	2.2734375	−0.07001
8	0.039063	2.2773438	−0.02106
9	0.019531	2.2792969	0.00350
10	0.009766	2.2783203	−0.00878

Jadi, diperoleh $r = 2.2783202$ dengan batas eror maksimum 0.001.

7.2. Metode Newton

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang memiliki turunan dan x_1 adalah nilai pendekatan awal untuk akar r dari $f(x) = 0$. Andaikan E adalah batas eror $|r - x_n|$.

Ulangi langkah berikut untuk $n = 1,2, \ldots$ hingga $|x_{n+1} - x_n| < E$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Contoh 7.2. Gunakan Metode Newton untuk menentukan akar real dari $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$.

Solusi.

Dari contoh sebelumnya, diambil $x_1 = 2.5$.

CONTOH SOAL

Karena $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ dan $f'(x) = 3x^2 - 3$, maka

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$$

Diperoleh hasil iterasi pada tabel berikut:

n	x_n
1	2.5
2	2.30
3	2.2793
4	2.2790188
5	2.2790188

Setelah 5 iterasi, diperoleh pengulangan 8 digit pertama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $r \approx 2.2790188$.

7.3. Algoritma Fixed-Point

Misalkan $g(x)$ adalah fungsi kontinu dan x_1 merupakan nilai pendekatan awal terhadap akar r dari $x = g(x)$. Andaikan E adalah batas eror $|r - x_n|$.

Ulangi langkah berikut untuk $n = 1,2, \ldots$ hingga $|x_{n+1} - x_n| < E$:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

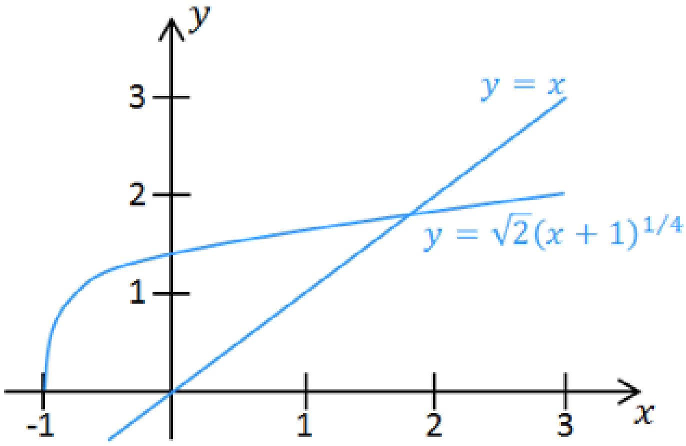
Contoh 7.3. Gunakan Algoritma Fixed-Point untuk menentukan penyelesaian pendekatan dari $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.

Solusi. $x^2 = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow x = \pm\left(2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}$. Sehingga

$$x_{n+1} = \left(2\sqrt{x_n + 1}\right)^{1/2} = \sqrt{2}(x_n + 1)^{1/4}$$

CONTOH SOAL

Dari gambar, terlihat bahwa perpotongan kurva $y = x$ dan $y = \sqrt{2}(x+1)^{1/4}$ ada di antara 1 dan 2, karena titik potong lebih dekat ke 2, maka diambil $x_1 = 2$.



n	x_n	n	x_n
1	2.0	7	1.8350896
2	1.8612097	8	1.8350871
3	1.8392994	9	1.8350868
4	1.8357680	10	1.8350867
5	1.8351969	11	1.8350867
6	1.8351045	12	1.8350867

Dari tabel disamping diperoleh penyelesaian pendekatannya adalah 1.8350867.

8. Anti Turunan

Anti Turunan

F disebut anti turunan dari f pada interval I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I, yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I.

Contoh 8.1. Tentukan anti turunan dari fungsi $F(x) = 4x^3$ pada $(-\infty, \infty)$.

Solusi. Akan dicari fungsi F dengan $F'(x) = 4x^3$ untuk setiap x real. Dari pengertian turunan, diketahui bahwa $F(x) = x^4$ memenuhi syarat ini. Karena turunan dari konstan adalah nol (0), maka fungsi F dapat dinyatakan sebagai $F(x) = x^4 + C$ dengan C merupakan sembarang konstanta.

8.1. Notasi Anti Turunan (1)

- **Aturan Pangkat**

  Jika r adalah sebarang bilangan rasional yang tidak sama dengan -1, maka

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

  Untuk $r = 0$, $\int 1 \, dx = x + C$.

- **Aturan Trigonometri**

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \text{dan} \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8.1. Notasi Anti Turunan (1)

- **Integral Tak-Tentu dengan Operator Linier**

  Jika f dan g mempunyai anti turunan (integral tak-tentu) dan k adalah suatu konstanta, maka:

  (i) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

  (ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

- **Aturan Pangkat yang digeneralisir**

  Jika g adalah suatu fungsi yang memiliki turunan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1, maka

$$\int [g(x)]^r \cdot g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 8.2. Tentukan anti turunan umum dari $f(x) = x^{4/3}$.

Solusi.

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} + C = \frac{3}{7}x^{7/3} + C$$

Contoh 8.3. Dengan menggunakan konsep linieritas anti turunan, tentukan hasil dari $\int (3x^2 + 4x)\,dx$.

Solusi.

$$\int (3x^2 + 4x)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx = 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) = x^3 + 2x^2 + C$$

CONTOH SOAL (2)

Contoh 8.4. Hitunglah $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx$.

Solusi. Ambil $g(x) = x^4 + 3x$; maka $g'(x) = 4x^3 + 3$. Sehingga

$$\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx = \int [g(x)]^{30} \cdot g'(x)\,dx$$

$$= \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C$$

$$= \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + C$$

LATIHAN SOAL (1)

1. Indentifikasi nilai kritis dari fungsi-fungsi berikut dan carilah nilai maksimum dan minimum pada interval yang diberikan.
   a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$, pada $[-4,0]$.
   b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pada $[-3,1]$.
   c) $s(t) = \sin t - \cos t$, pada $[0, \pi]$.
2. Gunakan teorema kemonotonan untuk menentukan kapan fungsi berikut naik dan turun.
   a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
   b) $s(t) = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
3. Gunakan teorema kecekungan untuk menentukan kapan fungsi berikut cekung ke atas dan cekung ke bawah.
   a) $f(x) = (x-1)^2$
   b) $f(x) = 24x^2 + 12 \sin^2 x$

LATIHAN SOAL (2)

4. Tentukan nilai kritis dari fungsi-fungsi berikut. Kemudian gunakan Uji Turunan Pertama (jika memungkinkan) dan Uji Turunan Kedua untuk menentukan titik maksimum dan minimum lokal.
   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$
   b) $f(\theta) = \sin 2\theta, 0 < \theta < \pi/4$
   c) $f(x) = x^4 + 4$
   d) $f(x) = x^2 - 1/x$
5. Seorang petani memiliki 80 m pagar yang akan digunakan untuk membuat sebuah kandang tertutup berbentuk persegi panjang pada salah satu sisi gudangnya yang memiliki panjang 100 m, seperti pada gambar disamping. Berapa ukuran kandang agar luas area kandang maksimum?

LATIHAN SOAL (3)

6. Gambarkan grafik fungsi berikut.
   a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$
   c) $f(x) = (x-1)^4$
   b) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
   d) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$
7. Tentukan semua nilai c (jika ada) yang memenuhi teorema nilai rataan untuk fungsi-fungsi berikut pada interval yang diberikan.
   a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, pada $[-3,1]$
   b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, pada $[0,2]$
   c) $s(\theta) = \tan\theta$, pada $[0,\pi]$
8. Gunakan Metode Biseksi untuk menentukan akar pendekatan dari fungsi $x^3 + 2x - 6 = 0$ pada interval $[1,2]$. (pembulatan 2 desimal)
9. Gunakan Metode Newton untuk menentukan nilai pendekatan dari akar maksimum fungsi $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$. (5 desimal)

LATIHAN SOAL (4)

10. Gunakan Algoritma Fixed-Point dengan $x_1 = 1$ sebagai nilai pendekatan awal untuk menyelesaikan persamaan $x = \frac{3}{2}\cos x$. (pembulatan 5 desimal)

11. Tentukan anti turunan umum dari fungsi-fungsi berikut.

a) $f(x) = x^{5/4}$

b) $f(x) = \frac{4x^6+3x^4}{x^3}$

c) $f(x) = (x+1)^2$

d) $f(x) = \sin x - \cos x$

e) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

f) $f(x) = \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3\sqrt{2}$

g) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+5}}$

h) $f(x) = x^2\sqrt{x^3+4}$

i) $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)^4$

j) $f(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$

Ringkasan (1)

- Turunan dapat digunakan untuk:
  - Mencari nilai maksimum dan nilai minimum dari suatu fungsi.
  - Menentukan interval dimana suatu fungsi naik atau turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah serta titk baliknya.
  - Menyelesaikan masalah-masalah praktis untuk menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum).
  - Menggambar grafik fungsi.
  - Menentukan nilai rataan.
  - Menyelesaikan persamaan secara numerik.

Ringkasan (2)

- Untuk menyelesaikan persamaan secara numerik, terdapat 3 metode yang dapat digunakan:
  - Metode Biseksi.
  - Metode Newton.
  - Algoritma Fixed-Point.
- Anti turunan merupakan fungsi kebalikan dari turunan.

PERINGATAN HAK CIPTA

Universitas Bunda Mulia

TERIMA KASIH