MSA08 – PENERAPAN INTEGRAL

PERINGATAN HAK CIPTA

Sub-CPMK

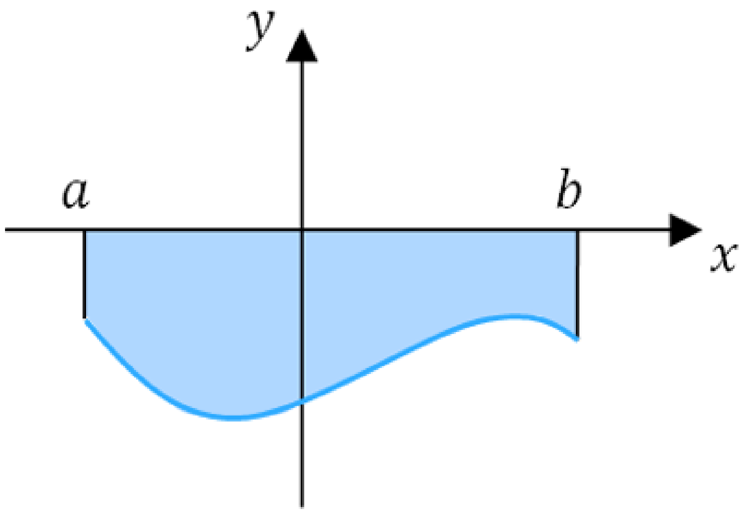
- Mahasiswa mampu menerapkan konsep integral dalam menentukan luas daerah dan volume benda putar (C3, A3)

Materi

1. Luas daerah bidang datar
2. Volume benda: lempeng, cakram, cincin
3. Volume benda putar
4. Panjang kurva bidang
5. Kerja dan gaya
6. Momen, pusat massa

1. Luas Daerah Bidang Datar

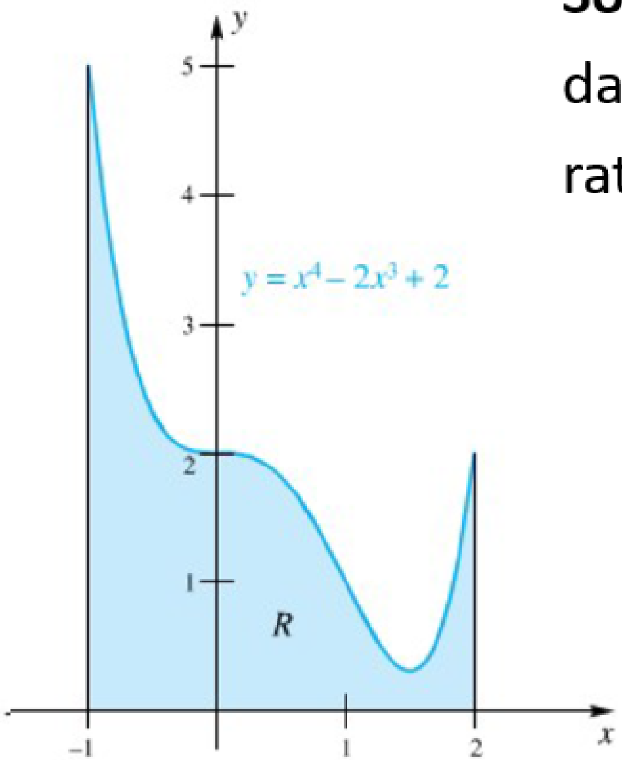
1.1. Daerah Diatas Sumbu-x



Luas bukan merupakan bilangan negatif. Jika grafik $y = f(x)$ berada di bawah sumbu-x, maka $\int_a^b f(x)\,dx$ merupakan bilangan negatif sehingga bukan merupakan luas. Namun luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$ adalah negatif dari nilai tersebut.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Carilah luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ diantara $x = -1$ dan $x = 2$.



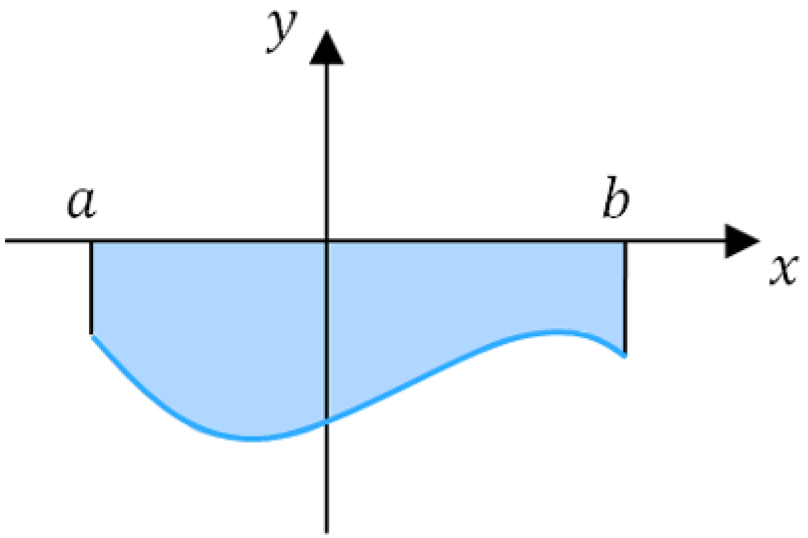
Solusi. Dari gambar, estimasi luas yang mungkin dari daerah R adalah alas dikali tinggi rata-ratanya, $(3)(2) = 6$. Luas sesungguhnya adalah

$$L(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 5.1$$

Hasil perhitungan 5.1 cukup dekat dengan estimasi awal, yakni 6.

1.2. Daerah Dibawah Sumbu-x

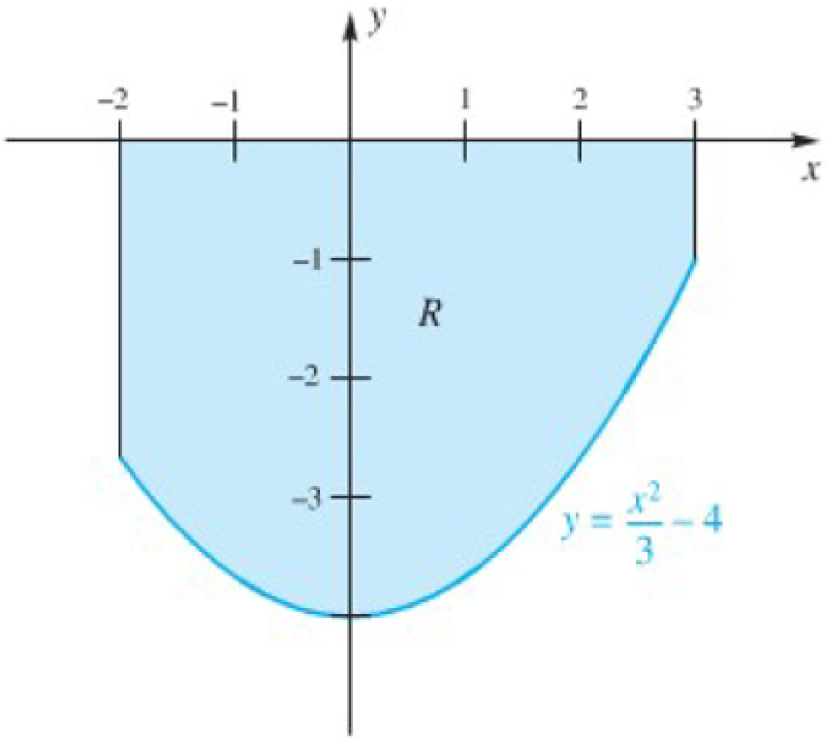


Luas bukan merupakan bilangan negatif. Jika grafik $y = f(x)$ berada di bawah sumbu-x, maka $\int_a^b f(x)\,dx$ merupakan bilangan negatif sehingga bukan merupakan luas. Namun luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$ adalah negatif dari nilai tersebut.

CONTOH SOAL

Contoh 1.2. Carilah luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2/3 - 4$, sumbu-x, $x = -2$ dan $x = 3$.

Solusi. Dari gambar, estimasi awal luas R adalah $(5)(3) = 15$.

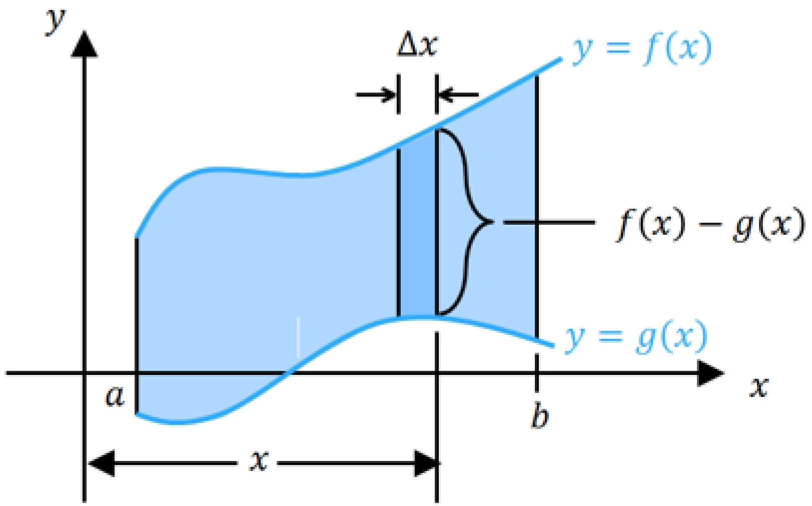


Luas sesungguhnya adalah

$$L(R) = -\int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx$$
$$= \int_{-2}^{3} \left(-\frac{x^2}{3} + 4\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$\approx 16.11$$

1.3. Daerah Diantara 2 Kurva

- Misalkan kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ saat $a \leq x \leq b$. Didefiniskan daerah seperti terlihat pada gambar.
- Luas daerah tersebut dapat dicari dengan menerapkan potongan poligon, aproksimasi dan integral.



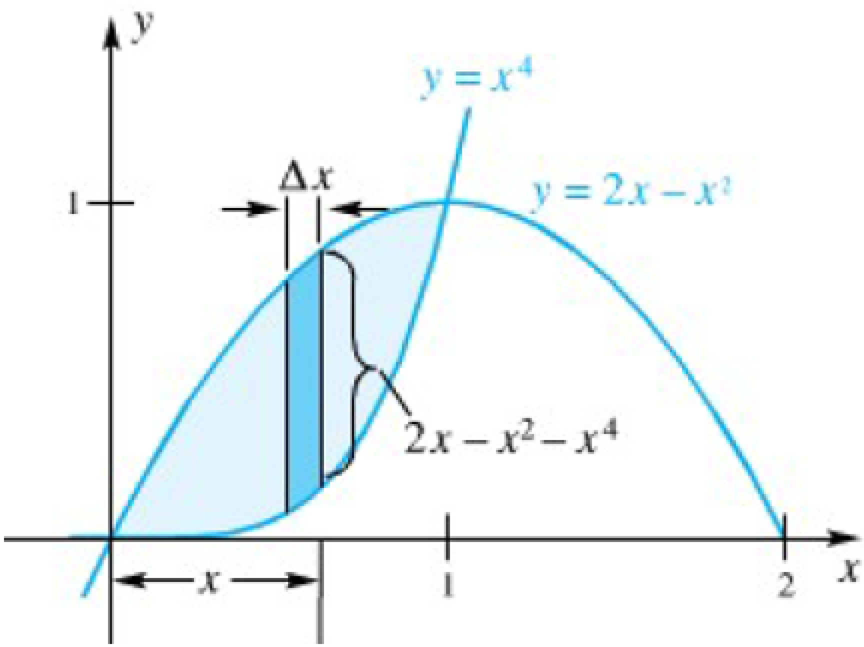
$$\Delta L \approx [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.3. Carilah luas daerah diantara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Solusi. Cari titik potong kedua kurva: $x^4 = 2x - x^2$ diperoleh $x = 0$ dan $x = 1$. Gambarkan daerah yang akan dicari.



$$L = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

2. Volume Benda: Lempeng, Cakram, Cincin

2.1. Volume Benda Pejal

- Integral tentu tidak hanya dapat digunakan untuk mencari luas daerah.
- Dengan metode yang sama, integral tentu dapat digunakan untuk mencari volume dari benda pejal.
- Volume benda pejal dapat diaproksimasi dengan menggunakan jumlahan Riemann

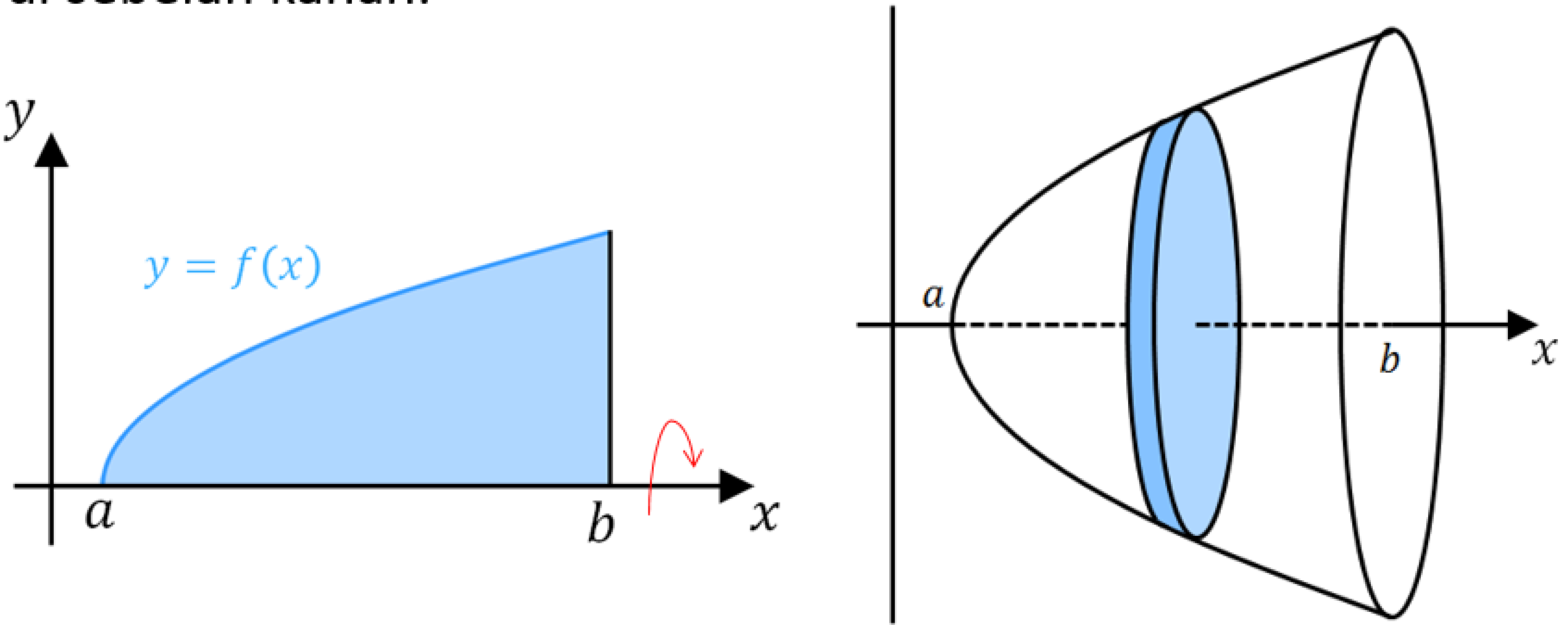
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$$

- Ketika $||P||$ mendekati nol, maka

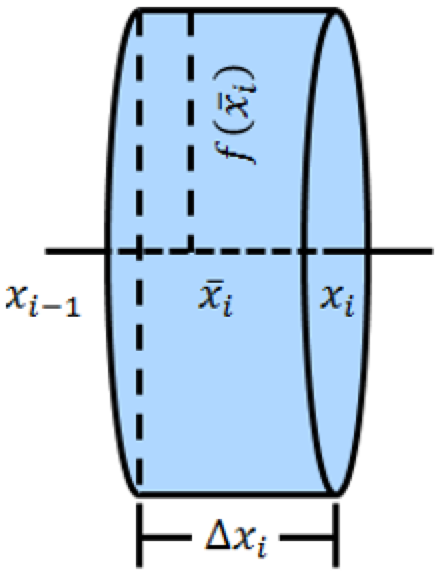
$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

2.2. Metode Cakram (1)

- Perhatikan sebuah keping yang dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, sumbu-x, garis $x = a$ dan garis $x = b$. (gambar sebelah kiri)
- Saat kepingan ini diputar terhadap sumbu-x, terbentuk gambar di sebelah kanan.



2.2. Metode Cakram (2)



- Bentuk partisi P: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- Pada setiap sub interval $[x_{i-1}, x_i]$, pilih titik sampel $\bar{x}_i$.
- Bentuk silinder dengan jari-jari $f(\bar{x}_i)$ dan tinggi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

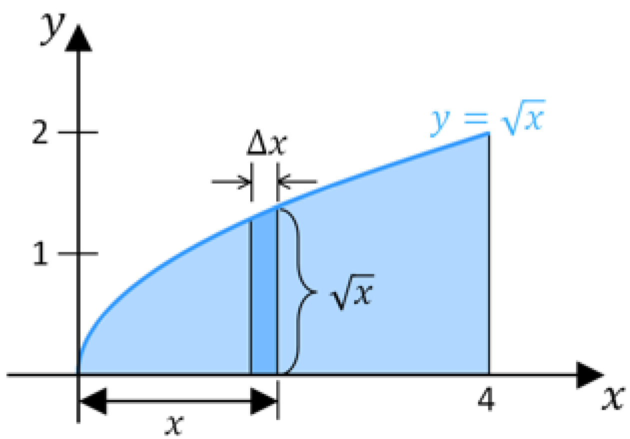
- Volume elemen integrasi: $\Delta V_i = \pi f^2(\bar{x}_i)\Delta x_i$
- Jadi volume benda putar seluruhnya adalah

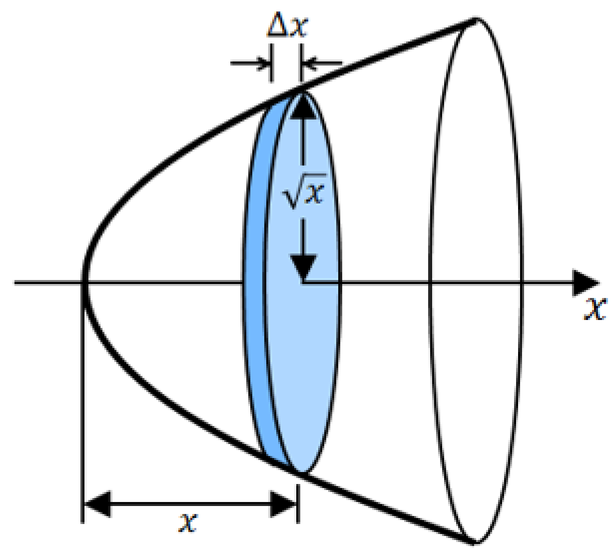
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 2.1. Carilah volume benda pejal putar yang diperoleh dari daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x dan garis $x = 4$ yang diputar mengelilingi sumbu-x.

Solusi.



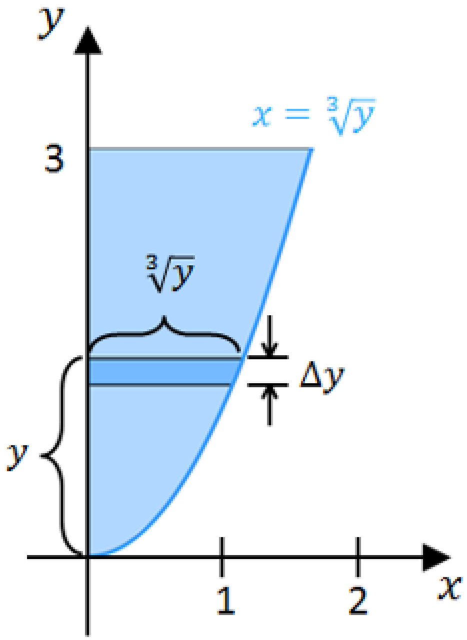


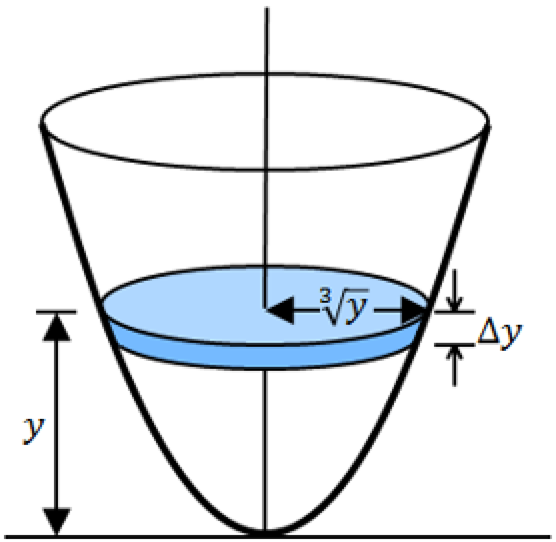
$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25.13$$

CONTOH SOAL (2)

Contoh 2.2. Carilah volume benda pejal putar yang diperoleh dari daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu-y dan garis $x = 3$ yang diputar mengelilingi sumbu-y.

Solusi.





$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt[3]{y})^2 \, dy$$

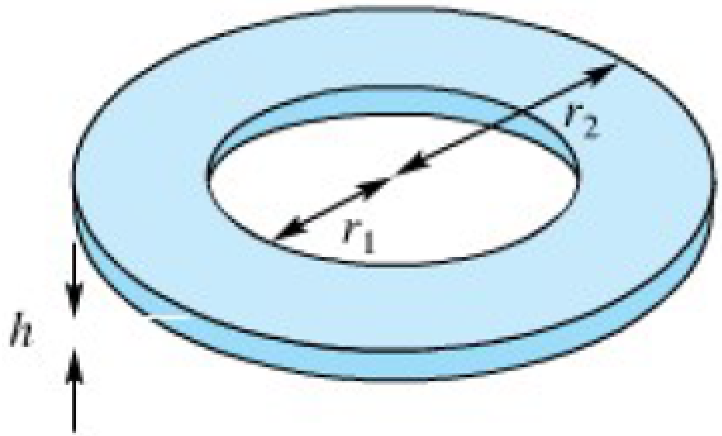
$$= \pi \int_0^3 y^{2/3} \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^3$$

$$= \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76$$

2.3. Metode Cincin

- Terkadang saat memotong benda pejal putar, diperoleh sebuah cakram dengan lubang ditengahnya.
- Oleh karena itu metode ini dikenal sebagai metode cincin.



$$V = A \bullet h$$
$$= \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

- Dengan metode yang sama dengan sebelumnya (partisi, aproksimasi, dan intrgral), volume total benda pejal putar dirumuskan oleh

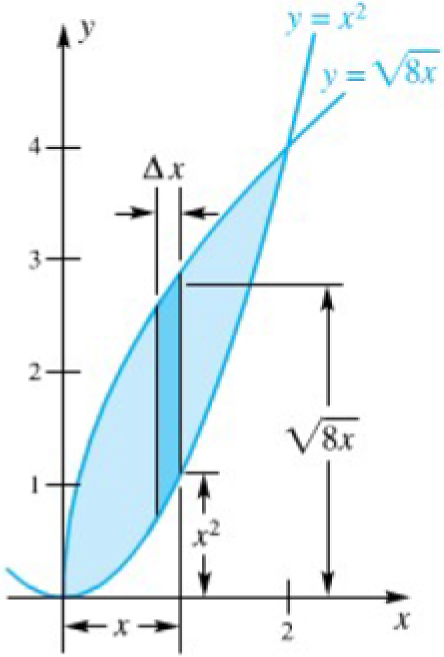
$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$$

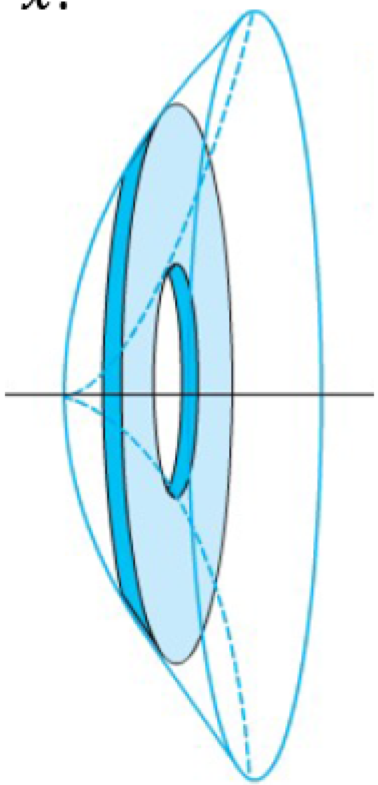
dengan fungsi $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $a \leq x \leq b$.

CONTOH SOAL

Contoh 2.3. Carilah volume benda pejal putar yang diperoleh dari daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$ dan $y^2 = 8x$ yang diputar mengelilingi sumbu-x.

Solusi.





Dicari titik potong kedua kurva,

$(x^3)^2 = 8x \iff x^6 - 8x = 0.$

Diperoleh $x = 0$ dan $x = 2$.

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx$$

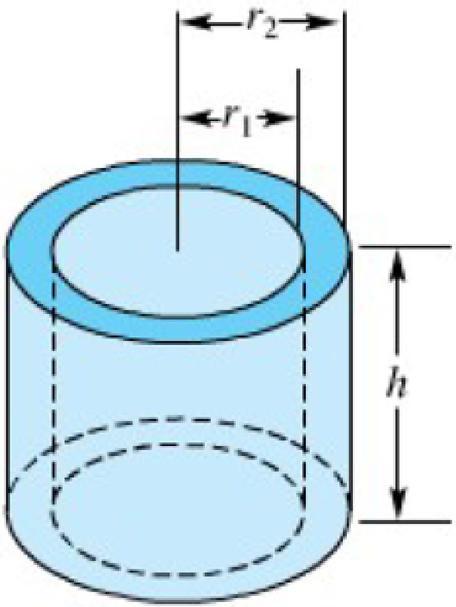
$$= \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{48\pi}{5} \approx 30.16$$

3. Volume Benda Putar

3.1. Metode Kulit Silinder (1)

- Metode kulit silinder relatif lebih mudah dipakai dibandingkan metode cakram dan cincin.
- Kulit silinder merupakan benda pejal yang dibatasi oleh dua silinder (lihat gambar).



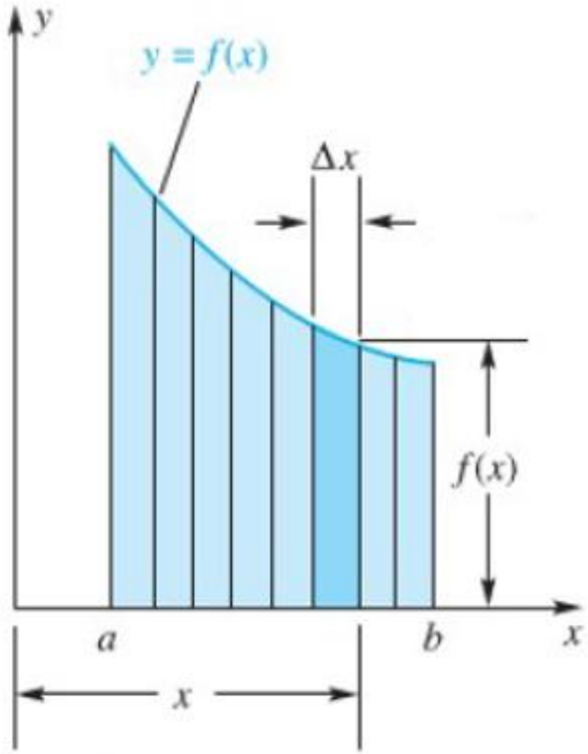
- Volume silinder disamping dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
V &= (\text{luas alas}) \cdot (\text{tinggi}) \\
&= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_1 - r_2)h \\
&= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1)
\end{aligned}
$$

- Rata-rata jari-jari, $(r_1 + r_2)/2$, dinotasikan dengan r. Sehingga $V = 2\pi r h \,\Delta r$.

3.1. Metode Kulit Silinder (2)

- Perhatikan daerah pada gambar sebelah kiri. Jika dibentuk potongan vertikal yang diputar mengelilingi sumbu-y, terbentuk benda pejal yang mirip dengan kulit silinder (gambar kanan).



3.1. Metode Kulit Silinder (3)

- Volume dari setiap kulit silinder

$$\Delta V \approx 2\pi x\, f(x)\, \Delta x$$

- Dengan metode yang sama dengan sebelumnya (partisi, aproksimasi, dan intrgral), diperoleh

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

Contoh 3.1. Daerah yang dibatasi oleh $y = 1/\sqrt{x}$, sumbu-x, $x = 1$ dan $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu-y. Tentukan volumenya.

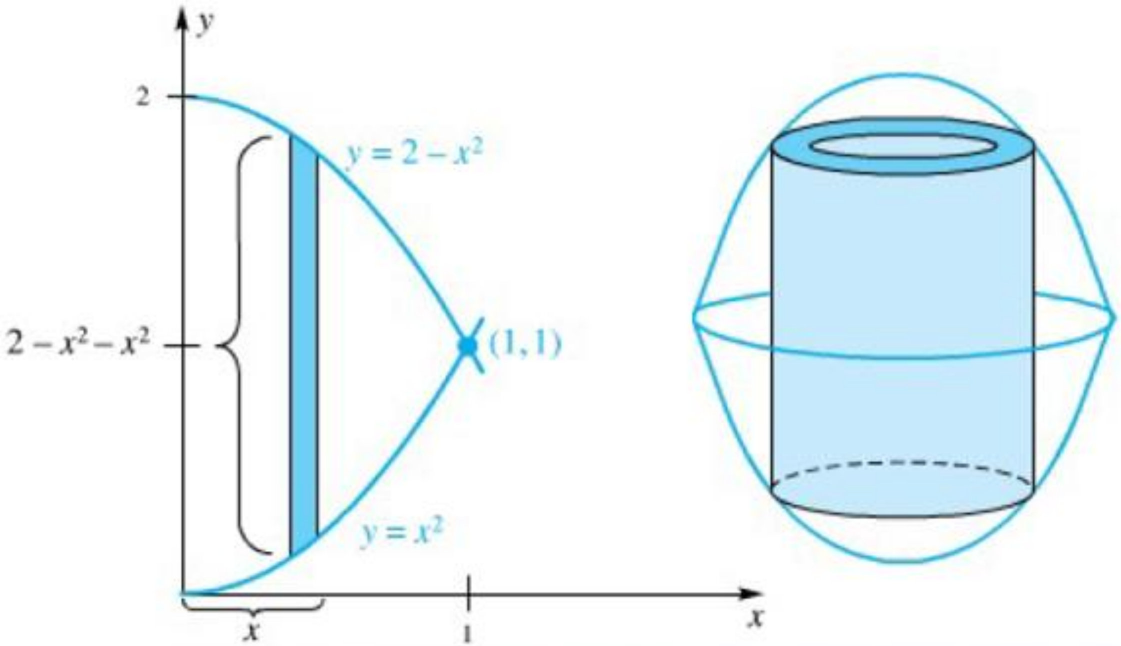
Solusi. Dari rumus sebelumnya, diperoleh volume benda pejal

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\pi \int_1^4 x^{1/2}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{28\pi}{3} \approx 29.32$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.2. Tentukan volume dari benda pejal yang terbentuk dari daerah diatas parabola $y = x^2$ dan dibawah parabola $y = 2 - x^2$ di kuadran pertama yang diputar mengelilingi sumbu-y.

Solusi.



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x(2 - 2x^2)\,dx \\
&= 4\pi \int_0^1 (x - x^3)\,dx \\
&= 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \pi \approx 3.14
\end{aligned}
$$

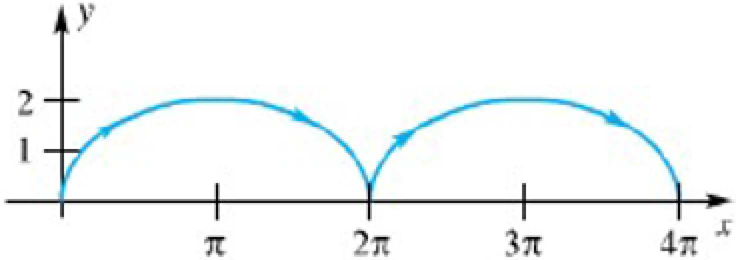
4. Panjang Kurva Bidang

4.1. Kurva Mulus

Sebuah kurva dikatakan mulus jika kurva tersebut ditentukan oleh sepasang persamaan parameter $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, dengan f' dan g' ada dan kontinu pada $[a, b]$, serta $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak secara bersamaan bernilai nol pada (a, b).

Contoh 4.1. Gambarkan kurva dengan persamaan parameter $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 4\pi$. Apakah kurva ini mulus?

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	0
$\pi/2$	0.57	1
π	3.14	2
$3\pi/2$	5.71	1
2π	6.28	0
$5\pi/2$	6.85	1
3π	9.42	2
$7\pi/2$	10	1
4π	12.57	0



Tidak, karena tidak kontinu di $t = 2\pi$.

4.2. Panjang Busur (1)

- Panjang dari suatu kurva mulus yang ditentukan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, dapat dicari dengan partisi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval oleh titik t_i:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

- Panjang setiap ruas garis ke-i,

$$\begin{aligned}\Delta s_i \approx \Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

- Dari teorema rataan untuk turunan dengan $\bar{t}_i$ dan $\hat{t}_i$ pada (t_{i-1}, t_i), diperoleh $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t_i$ dan $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t_i$ dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

4.2. Panjang Busur (2)

- Diperoleh

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2}$$
$$= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

sehingga panjang total semua ruas garis adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

- Panjang busur suatu kurva adalah

$$P = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

4.2. Panjang Busur (3)

- Ada dua kasus khususuntuk panjang busur. Jika diberikan persamaan kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, variabel x digunakan sebagai parameter, sehingga

$$P = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- Jika diberikan persamaan kurva $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, variabel y digunakan sebagai parameter, sehingga

$$P = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

CONTOH SOAL

Contoh 4.2. Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$.

Solusi. Persamaan parameter lingkaran: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Maka $dx/dt = -a\sin t$, $dy/dt = a\cos t$, diperoleh

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = [at]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

Contoh 4.3. Tentukan panjang garis dari $A(0,1)$ ke $B(5,13)$.

Solusi. Persamaan garis: $y = \frac{12}{5}x + 1$, sehingga $dy/dx = \frac{12}{5}$; diperoleh

$$P = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{5^2}}\, dx = \frac{13}{5}\int_0^5 1\, dx = \left[\frac{13}{5}x\right]_0^5 = 13$$

4.3. Diferensial Panjang Busur

- Misalkan f kontinu dan terdiferensiasi pada $[a, b]$. Untuk setiap x dalam (a, b), didefinisikan

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du$$

- Nilai $s(x)$ merupakan panjang kurva $y = f(u)$ dari $\left(a, f(a)\right)$ sampai $\left(x, f(x)\right)$. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus Pertama

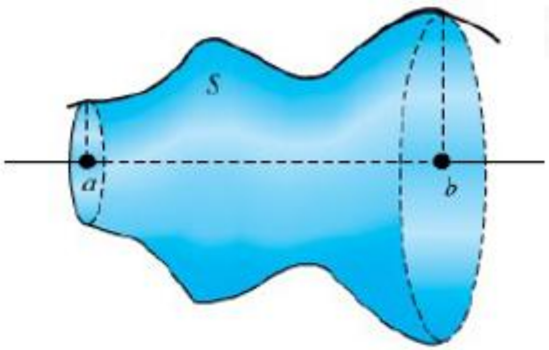
$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

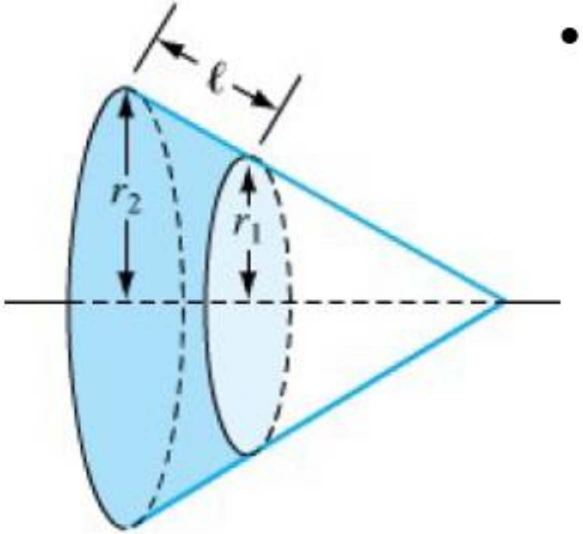
- Sehingga diferensial panjang busur, ds, dapat dituliskan sebagai

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

4.4. Luas Permukaan Putar (1)

- Jika suatu kurva mulus diputar mengelilingi sumbu, diperoleh suatu permukaan putar seperti pada gambar disamping.





- Untuk mencari luas permukaan tersebut, digunakan frustum kerucut. Frustum dari kerucut adalah bagian kerucut diantara dua bidang yang tegak lurus dengan sumbu kerucut (daerah yang diarsir pada gambar disamping).

4.4. Luas Permukaan Putar (2)

- Jika suatu frustum memiliki jari-jari dasar r_1 dan r_2 dan tinggi kemiringan ℓ, maka luas permukaannya adalah

$$L = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\ell = 2\pi(\text{rata}^2\ \text{jari}^2)\cdot(\text{tinggi miring})$$

- Misalkan $y = f(x), a \leq x \leq b$ merupakan persamaan kurva mulus di kuadran pertama. Partisi interval $[a, b]$ menjadi n bagian dengan titik $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$.
- Jika Δs_i adalah panjang ruas ke-i dan y_i adalah koordinat dari ruas tersebut, maka

$$L = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \Delta s_i = 2\pi\int_a^b y\, ds = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

CONTOH SOAL

Contoh 4.3. Tentukan area permukaan putar yang diperoleh dari kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, diputar mengelilingi sumbu-x.

Solusi. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$, maka $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Sehingga

$$L = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\, dx$$

$$= \left[\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1^{3/2}\right) \approx 36.18$$

Jika kurva dituliskan dalam bentuk persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, maka luas permukaan putar dirumuskan oleh

$$L = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

PERINGATAN HAK CIPTA

Lanjut ke file berikutnya…