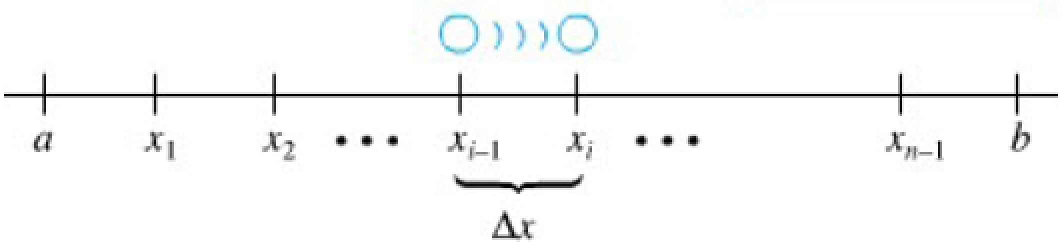
Lanjutan dari file sebelumnya…

PERINGATAN HAK CIPTA

5. Kerja dan Gaya

Kerja dan Gaya

- Dalam fisika, kerja = gaya x perpindahan, dinotasikan $W = F \times d$
- Misalkan sebuah objek bergerak sepanjang sumbu-x dari a ke b dengan gaya sebesar $F(x)$ di titik x, dimana F adalah fungsi kontinu. Partisi interval $[a, b]$ atas $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- Untuk setiap interval $[x_{i-1}, x_i]$ diambil titik sampel $\bar{x}_i$.



- Pada setiap subinterval, gaya yang bekerja diaproksimasi oleh $F(\bar{x}_i)$, maka $\Delta W_i = F(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Sehingga total kerja adalah

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

5.1. Aplikasi pada Pegas

Contoh 5.1. Jika panjang awal suatu pegas adalah 0.2 meter dan digunakan gaya 12 newton untuk merentangkannya sepanjang 0.04 meter, carilah kerja yang diperlukan untuk merentangkan pegas dari kondisi awal ke 0.3 meter.

Solusi. Berdasarkan Hukum Hooke gaya yang diperlukan untuk merentangkan pegas sepanjang x meter $F(x) = kx$. Untuk mencari konstanta k, diketahui $F(0.04) = 12$. Maka $\mathrm{k} \cdot 0.04 = 12$, atau $k = 300$, sehingga $F(x) = 300x$.

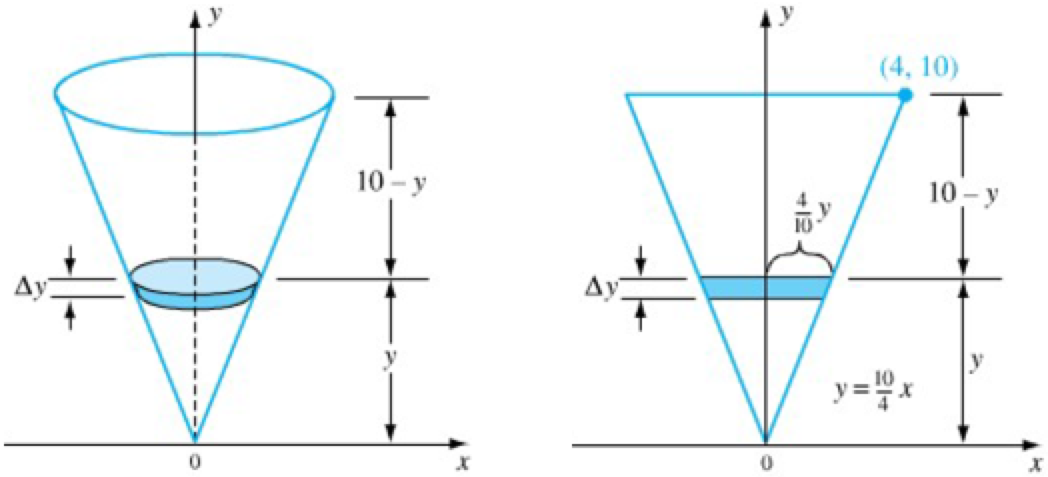
Dari kondisi awal 0.2 meter, $x = 0$, hingga 0.3 meter, $x = 0.1$, diperlukan kerja $W = \int_0^{0.1} 300x\,dx = [150x^2]_0^{0.1} = 1.5$ joule.

5.2. Aplikasi pada Pemompaan Cairan (1)

Contoh 5.2. Sebuah tangki berbentuk kerucut lingkaran tegak (seperti gambar) penuh dengan air. Apabila tinggi tangki adalah 10 kaki dan jari-jari permukaan atasnya 4 kaki, tentukan kerja yang diperlukan untuk

(a) memompa air hingga tepi puncak tangki, dan

(b) memompa air hingga ketinggian 10 kaki diatas permukaan atas tangki.



5.2. Aplikasi pada Pemompaan Cairan (2)

Solusi.

(a) Letakkan tangki pada sistem koordinat (slide sebelumnya). Diambil potongan cakram horisontal dari tangki dengan ketebalan Δy dan pada ketinggian y memiliki jari-jari $4y/10$. Sehingga

$$\Delta W \approx \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y \cdot (10 - y)$$

dengan $\delta = 62.4$ merupakan massa jenis air. Maka

$$W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10 - y)\, dy = \delta\pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (10y^2 - y^3)\, dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 26\,138 \text{ foot} - \text{pound}$$

5.2. Aplikasi pada Pemompaan Cairan (3)

(b) Sama dengan soal (a), namun cakram diangkat setinggi $20 - y$, bukan $10 - y$. Sehingga

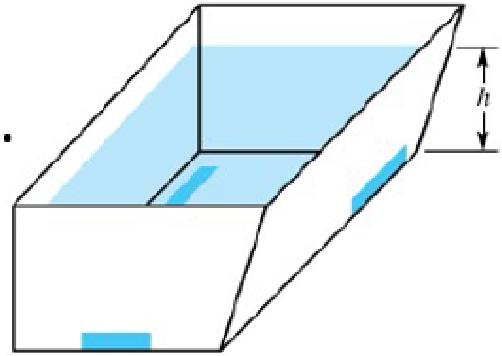
$$W = \delta\pi \int_0^{10} \left(\frac{4y}{10}\right)^2 (20 - y)\, dy = \delta\pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (20y^2 - y^3)\, dy$$

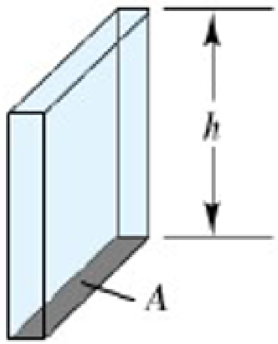
$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25} \left[\frac{20y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 130\,690 \text{ foot} - \text{pound}$$

Perhatikan bahwa batas integral tetap 0 dan 10 (bukan 0 dan 20). Mengapa?

5.3. Gaya Fluida (1)

Sebuah tangki seperti gambar disamping terisi sampai kedalaman h dengan massa jenis cairan δ.

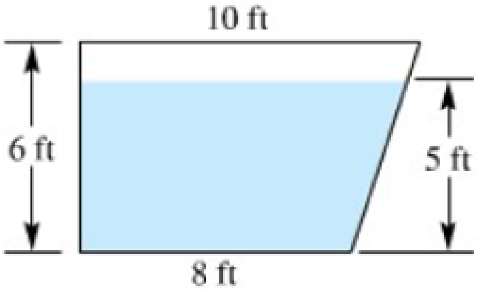




$F = \delta h A$

Gaya yang diberikan oleh cairan pada persegi panjang horisontal dengan luas A sama dengan berat cairan yang berada diatasnya, yakni $F = \delta h A$.

Contoh 5.3. Andaikan sisi tegak tangki berbentuk trapesium dengan dimensi seperti pada gambar. Jika tangki diisi air ($\delta = 62.4$) sampai kedalaman 5 kaki, tentukan total gaya yang diberikan air terhadap sisi tangki



5.3. Gaya Fluida (2)

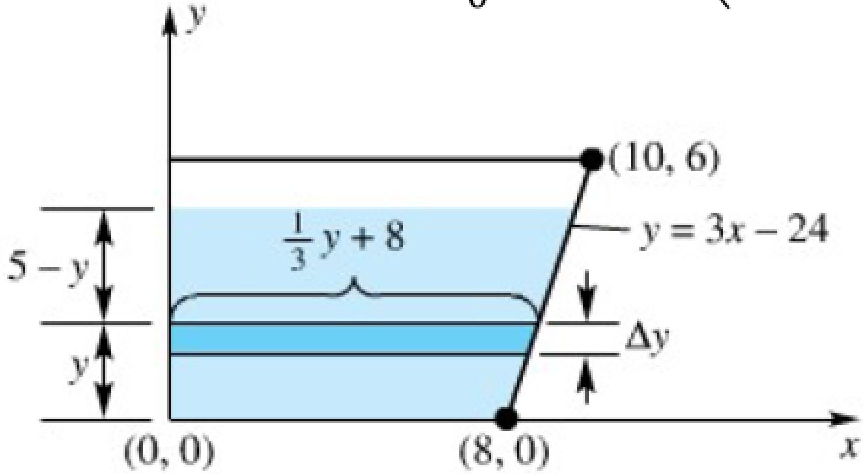
Solusi. Letakkan sisi tangki pada sistem koordinat seperti pada gambar. Dicari persamaan sisi miring tangki, diperoleh $x = \frac{1}{3}y + 8$. Gaya terhadap persegi panjang tipis pada kedalaman $5 - y$ adalah $\Delta F \approx \delta h A = \delta(5-y)\left(\frac{1}{3}y + 8\right)\Delta y$. Sehingga

$$F = \delta \int_0^5 (5-y)\left(\frac{1}{3}y + 8\right) dy = \delta \int_0^5 \left(40 - \frac{19}{3}y - \frac{1}{3}y^2\right) dy$$

$$= \delta \left[40\, y - \frac{19}{6}y^2 - \frac{1}{9}y^3\right]_0^5$$

$$= 62.4\left(200 - \frac{475}{6} - \frac{125}{9}\right)$$

$$\approx 6673 \text{ pound}$$



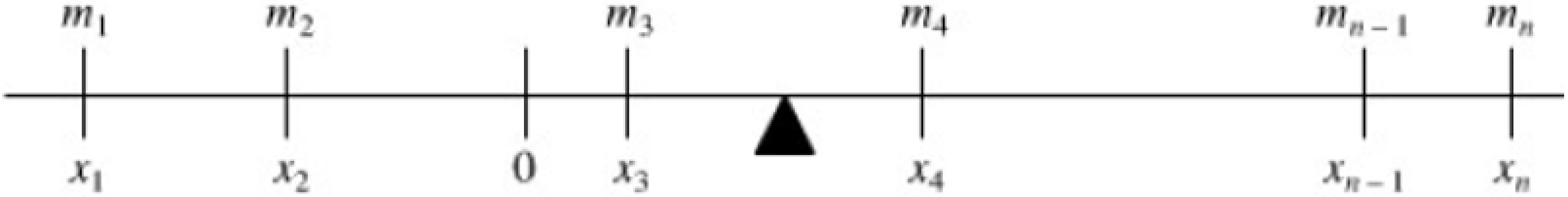
6. Momen, Pusat Massa

Momen & Pusat Massa (1)

- Hasil kali massa m suatu partikel dengan jaraknya terhadap suatu titik dinamakan momen partikel pada titik tersebut.
- Momen total M suatu sistem yang terdiri dari n massa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ yang berada pada titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pada sumbu-x adalah

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

- Syarat keseimbangan adalah $M = 0$. Sehingga perlu dicari titik tumpu $\bar{x}$ agar syarat keseimbangan terpenuhi.



Momen & Pusat Massa (2)

- Nilai $\bar{x}$ harus memenuhi

$$(x_1 - \bar{x})m_1 + (x_2 - \bar{x})m_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})m_n = 0$$

atau

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \cdots + \bar{x} m_n$$

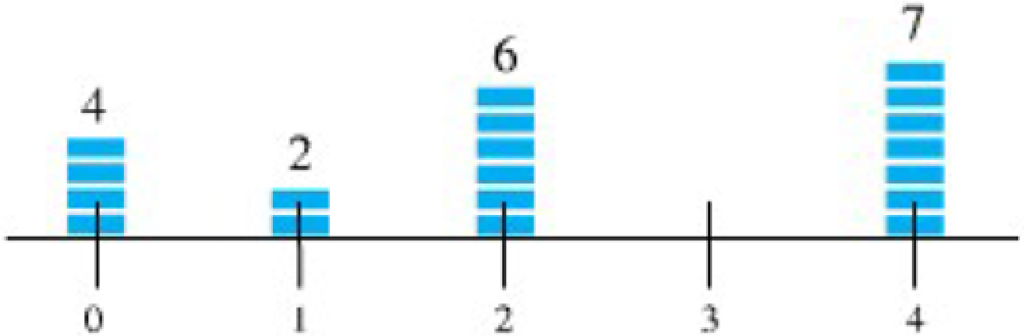
- Dengan menyelesaikan $\bar{x}$, diperoleh

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

- Titik $\bar{x}$ disebut sebagai pusat massa (titik keseimbangan).
- Perhatikan bahwa pusat massa adalah momen total dibagi dengan massa total.

CONTOH SOAL

Contoh 6.1. Diketahui massa objek 4, 2, 6, dan 7 kg masig-masing terletak pada titik 0, 1, 2, dan 4, berturut-turut, di sepanjang sumbu-x seperti pada gambar.. Carilah pusat massanya.



Solusi.

$$\bar{x} = \frac{(0)(4) + (1)(2) + (2)(6) + (4)(7)}{4 + 2 + 6 + 7} = \frac{42}{19} \approx 2.21$$

Jadi titik keseimbangan atau pusat massa berada di titik $x = 2.21$.

6.1. Distribusi Massa Kontinu di Sepanjang Garis

- Misalkan satu ruas kawat dengan kepadatan bervariasi (massa per unit panjang) yang ingin dicari titik keseimbangannya.
- Andaikan kepadatan pada x adalah $\delta(x)$, dicari massa total m dan momen total M terhadap titik asal.

$$\Delta m \approx \delta(x)\Delta x \qquad \Delta M \approx x\,\delta(x)\Delta x$$

$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad M = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx$$

- Diperoleh

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

CONTOH SOAL

Contoh 6.2. Kepadatan $\delta(x)$ dari sebuah kawat di titik yang terletak x cm dari ujungnya adalah $\delta(x) = 3x^2$ gr/cm. Tentukan pusat massa kawat diantara $x = 0$ dan $x = 10$.

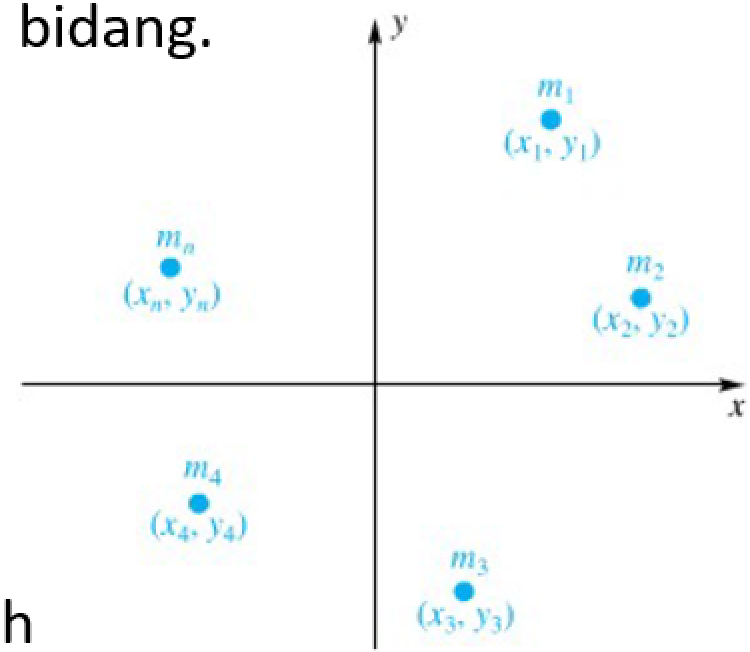
Solusi. Asumsi awal adalah $\bar{x}$ berada lebih dekat ke 10 daripada 0, karena kawat semakin padat saat menuju ke kanan (gambar).

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} x \cdot 3x^2\,dx}{\int_0^{10} 3x^2\,dx} = \frac{\left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^{10}}{\left[x^3\right]_0^{10}} = \frac{7500}{1000} = 7.5 \text{ cm}$$

6.2. Distribusi Massa pada Bidang Datar (1)

- Andaikan terdapat n massa $m_1, m_2, \dots, m_n$ dengan koordinat titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ pada bidang.
- Momen total M_y dan M_x terhadap sumbu-y dan sumbu-x berturut-turut, dirumuskan oleh

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$$



- Koordinat $(\bar{x}, \bar{y})$ dari pusat masa adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

CONTOH SOAL

Contoh 6.3. Lima partikel dengan massa 1, 4, 2, 3, dan 2 unit, berada pada koordinat $(6,-1)$, $(2,3)$, $(-4,2)$, $(-7,4)$ dan $(2,-2)$, berturut-turut. Carilah pusat massanya.

Solusi. Asumsi awal adalah $\bar{x}$ berada lebih dekat ke 10 daripada 0, karena kawat semakin padat saat menuju ke kanan (gambar).

$$\bar{x} = \frac{(6)(1) + (2)(4) + (-4)(2) + (-7)(3) + (2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = -\frac{11}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{(-1)(1) + (3)(4) + (2)(2) + (4)(3) + (-2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = \frac{23}{12}$$

Jadi koordinat pusat massanya adalah $\left(-\frac{11}{12}, \frac{23}{12}\right)$.

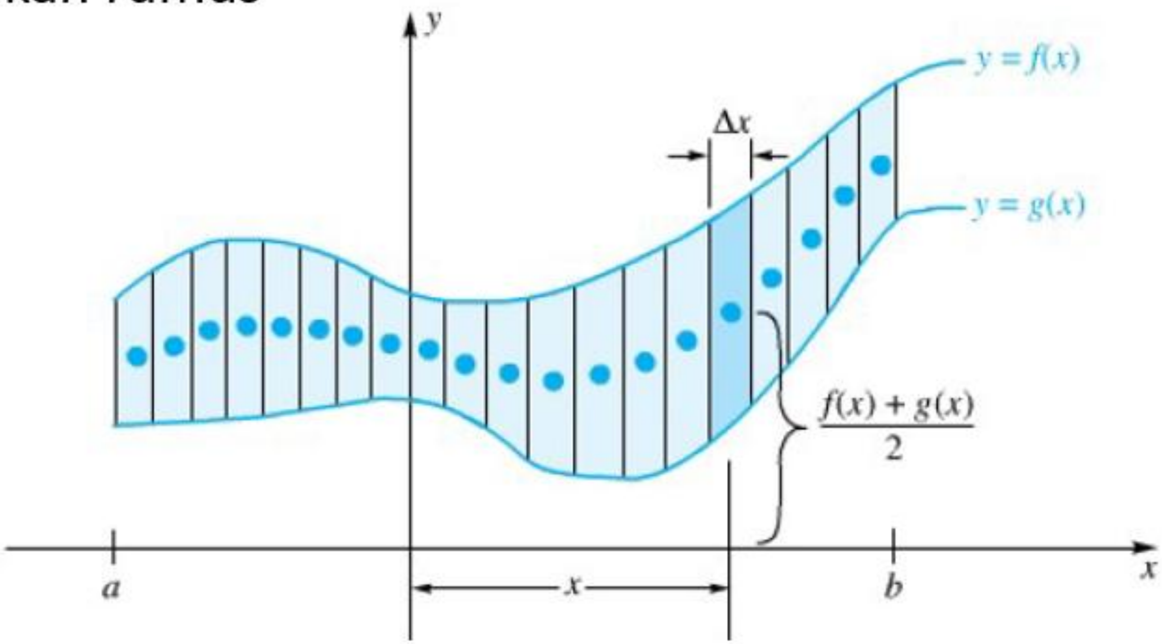
6.2. Distribusi Massa pada Bidang Datar (2)

- Misalkan lempeng plat tipis (lamina) homogen dibatasi oleh $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$, dengan $g(x) \leq f(x)$.
- Dengan aproksimasi dan integrasi, pusat masa $(\bar{x}, \bar{y})$ dapat dicari dengan menggunakan rumus

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

dan

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$$



6.2. Distribusi Massa pada Bidang Datar (3)

$$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)]\Delta x \qquad m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\Delta M_y \approx x\, \delta[f(x) - g(x)]\Delta x \qquad M_y = \delta \int_a^b x\, [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\Delta M_x \approx \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\Delta x \qquad M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$$

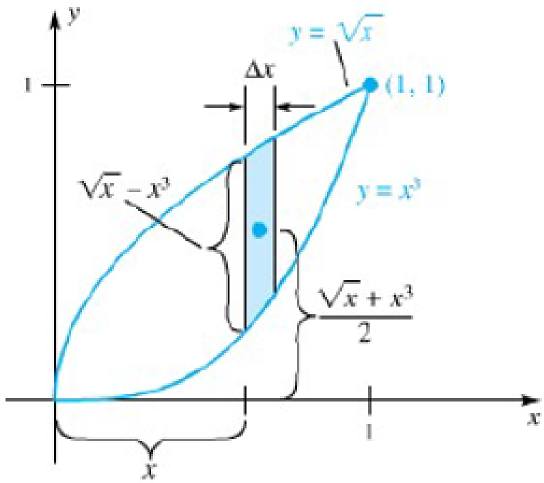
Sehingga

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Pusat massa lamina homogen disebut sentroid.

CONTOH SOAL

Contoh 6.4. Carilah sentriod dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$ dan $y = \sqrt{x}$.



Solusi.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)\,dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx} = \frac{\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2]\,dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{7}$$

Jadi sentriodnya adalah $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$.

LATIHAN SOAL (1)

1. Gambarkan daerah yang dibatasi oleh persamaan-persamaan berikut, kemudian tentukan luas daerah tersebut.
   a) $y = 5x - x^2, y = 0, x = 1$ dan $x = 3$
   b) $y = x^2 - 4x - 5, y = 0, x = -1$ dan $x = 3$
   c) $y = (x - 3)(x - 1)$ dan $y = x$
   d) $y = x^2 - 2x$ dan $y = -x^2$
2. Gambarkan daerah R yang dibatasi oleh persamaan-persamaan berikut, kemudian tentukan volume benda pejal saat daerah R diputar mengelilingi sumbu-x.
   a) $y = x^{3/2}, y = 0, x = 2$ dan $x = 3$
   b) $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$
   c) $x - 2y = 0$ dan $y^2 = 4x$

LATIHAN SOAL (2)

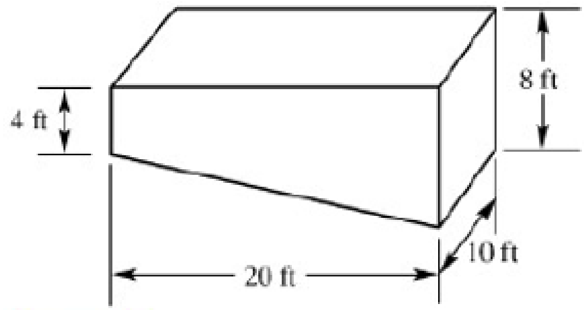
3. Gambarkan daerah R yang dibatasi oleh persamaan-persamaan berikut, kemudian tentukan volume benda pejal saat daerah R diputar mengelilingi sumbu-y.
   a) $x = 2\sqrt{y}, y = 4$ dan $x = 0$
   b) $y = x^2$ dan $y = \sqrt{8x}$
   c) $y = 4x$ dan $y = 4x^2$
4. Dengan menggunakan metode kulit silinder, gambar daerah R kemudian tentukan volume benda pejal yang terbentuk dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu yang diberikan.
   a) $y = x^2, x = 1, y = 0$; mengelilingi sumbu-y
   b) $y = x^2, y = 3x$; mengelilingi sumbu-y
   c) $x = \sqrt{y} + 1, x = 0, y = 0, y = 4$; mengelilingi sumbu-$x$

LATIHAN SOAL (3)

5. Tetukan panjang kurva berikut.
   a) $y = 4x^{2/3}; 1/3 \leq x \leq 5$
   b) $y = (x^4 + 3)/(6x); 1 \leq x \leq 3$
   c) $x = 3t^2 + 2, y = 2t^3 - 1/2; 1 \leq t \leq 4$
6. Tentukan luas permukaan putar yang dengan memutar kurva berikut mengelilingi sumbu-x.
   a) $y = 6x, 0 \leq x \leq 1$
   b) $y = (x^6 + 2)/(8x^2), 1 \leq x \leq 3$
   c) $x = t, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$
7. Gaya sebesar 6 pound diperlukan untuk membuat pegas terentang 0.5 meter dari panjang awalnya. Tentukan konstanta pegas dan kerja untuk merentangkan pegas 2 meter dari panjang awalnya.

LATIHAN SOAL (4)

8. Tentukan kerja yang diperlukan untuk mempompa semua minyak ($\delta = 50$ pound/ft^3) keluar dari tangki silinder tegak dengan jari-jari alas 4 kaki, tinggi tangki 10 kaki dan tangki penuh dengan minyak.
9. Tentukan total gaya yang diberikan oleh air terhadap dasar kolam renang pada gambar disamping, jika kolam tersebut penuh dengan air.



10. Kawat lurus sepanjang 7 unit memiliki kerapatan $\delta(x) = \sqrt{x}$ pada suatu titik x unit dari salah satu ujungnya. Tentukan jarak pusat massa dari ujung ini.
11. Carilah sentroid dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 3$.

Ringkasan (1)

- Integral dapat digunakan untuk untuk mencari luas daerah bidang datar, mencari volume benda pejal-putar, menentukan panjang kurva bidang, mencari kerja dan gaya suatu objek bergerak serta menentukan momen dan pusat massa.
- Luas daerah bidang datar dibagi menjadi 3 bagian, daerah diatas sumbu-x, daerah di bawah sumbu-x dan daerah diantara 2 kurva.
- Untuk mencari volume benda pejal-putar, terdapat 3 metode, yakni metode cakram, metode cincin dan metode kulit silinder.
- Panjang kurva bidang dapat dicari jika kurva merupakan kurva mulus. Selain menentukan panjang busur, integral dapat digunakan untuk mencari luas permukaan putar dari busur tersebut.

Ringkasan (2)

- Integral juga dapat digunakan dalam ilmu fisika, yakni kerja dan gaya. Aplikasi kerja dan gaya diantaranya pada pegas, pada pemompaan cairan dan gaya fluida (cairan).
- Momen dan pusat massa dari suatu objek dapat dicari dengan menggunakan integral. Pusat massa pada suatu garis disebut titik keseimbangan, sedangkan pusat masa pada lamina homogen (bidan datar) disebut sentroid.

TERIMA KASIH