Lanjutan dari file sebelumnya…

5. Teorema Nilai Rataan untuk Integral

5.1. Nilai Rata-Rata Fungsi

Jika f terintegrasi pada interval $[a, b]$, maka nilai rata-rata fungsi f pada $[a, b]$ adalah

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh 5.1. Carilah nilai rata fungsi $f(x) = x \sin x^2$ pada $[0, \sqrt{\pi}]$.

Solusi. Nilai rata-ratanya adalah $\frac{1}{\sqrt{\pi}-0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\,dx$

Ambil $u = x^2$, sehingga $du = 2x\,dx$. Saat $x = 0$, $u = 0$ dan saat $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Maka

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin u\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}[-\cos u]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

5.2. Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$, maka terdapat suatu bilangan c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Contoh 5.2. Carilah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral dari $f(x) = x^2$ pada interval $[-3,3]$.

Solusi. Nilai rata-rata fungsinya adalah

$$\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{18}[27-(-27)] = 3$$

Untuk mencari nilai c, dicari $f(c) = c^2 = 3$ atau $c = \pm\sqrt{3}$. Karena $-\sqrt{3}$ dan $\sqrt{3}$ didalam interval $[-3,3]$, keduanya memenuhi syarat.

CONTOH SOAL

Contoh 5.3. Carilah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral dari $f(x) = 1/(x+1)^2$ pada interval $[0,2]$.

Solusi. Ambil $u = x + 1$, $du = dx$ dimana saat $x = 0$, $u = 1$ dan saat $x = 2$, $u = 3$.

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}[-u^{-1}]_1^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}$$

Untuk mencari c, $f(c) = 1/(c+1)^2 = 1/3$, maka $c^2 + 2c + 1 = 3$ atau $c^2 + 2c - 2 = 0$.

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Karena $-1 - \sqrt{3} \approx -2.73$ diluar interval $[0,2]$, maka $c = -1 + \sqrt{3}$.

5.3. Teorema Simetri

Jika f merupakan fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Jika f merupakan fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Contoh 5.4. Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/4)\,dx$.

Solusi. Karena $\cos(-x/4) = \cos(x/4)$, maka $f(x) = \cos(x/4)$ adalah fungsi genap. Maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos u\,du = 8[\sin u]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}$$

6. Integrasi Numerik

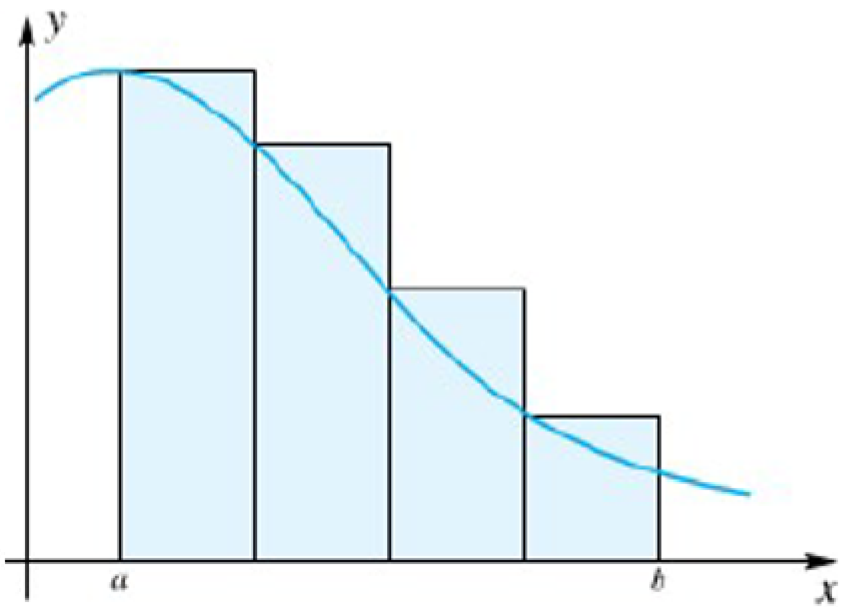
Integrasi Numerik

- Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka integral tentu $\int_a^b f(x)\, dx$ pasti ada.
- Banyak integral tentu yang tidak dapat dicari dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua, contohnya integral tentu

$$\int \sin(x^2)\, dx, \qquad \int \sqrt{1 - x^4}\, dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\, dx$$

  tidak dapat dituliskan secara aljabar menjadi fungsi-fungsi dasar kalkulus yang ada.
- Pada bagian ini, akan dijelaskan pendekatan nilai integral tentu dengan menggunakan jumlahan Riemann (kiri, kanan dan titik-tengah), Aturan Trapesium dan Aturan Parabolik.

6.1. Jumlahan Riemann Kiri



Luas segiempat ke-i

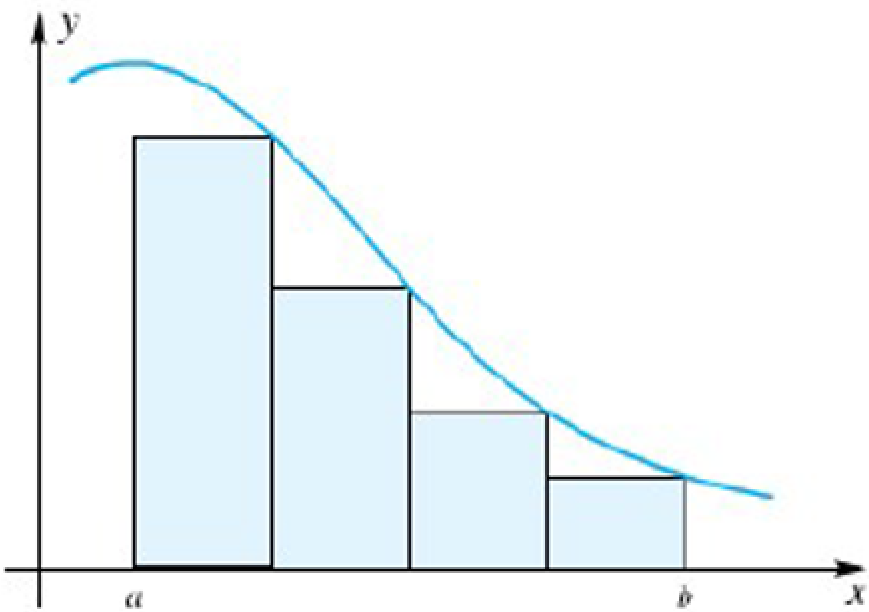
$= f(x_{i-1})\Delta x_i$

$= \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ untuk suatu c dalam $[a, b]$

6.2. Jumlahan Riemann Kanan



Luas segiempat ke-i

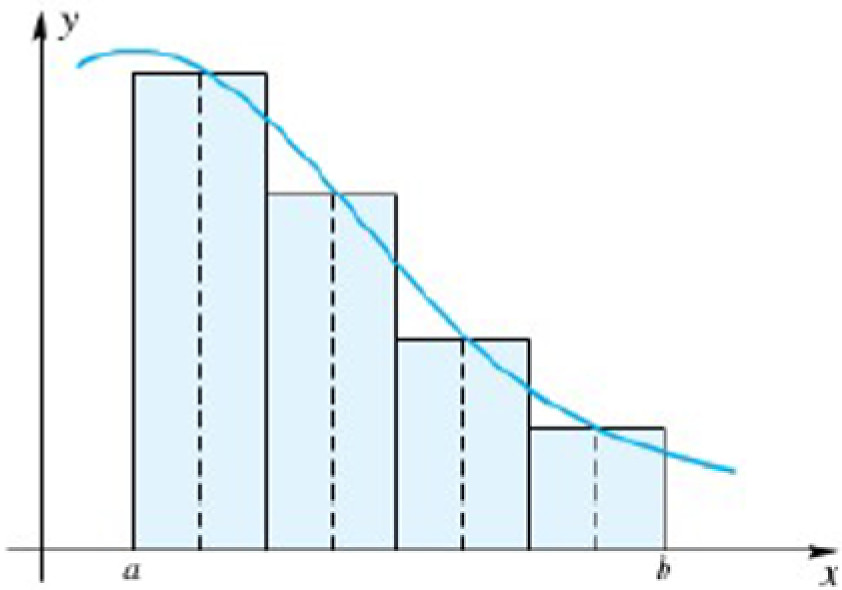
$= f(x_i)\Delta x_i$

$= \dfrac{b-a}{n} f\left(a + i\dfrac{b-a}{n}\right)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$E_n = -\dfrac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ untuk suatu c dalam $[a, b]$

6.3. Jumlahan Riemann Titik-Tengah



Luas segiempat ke-i

$$= f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\Delta x_i$$

$$= \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

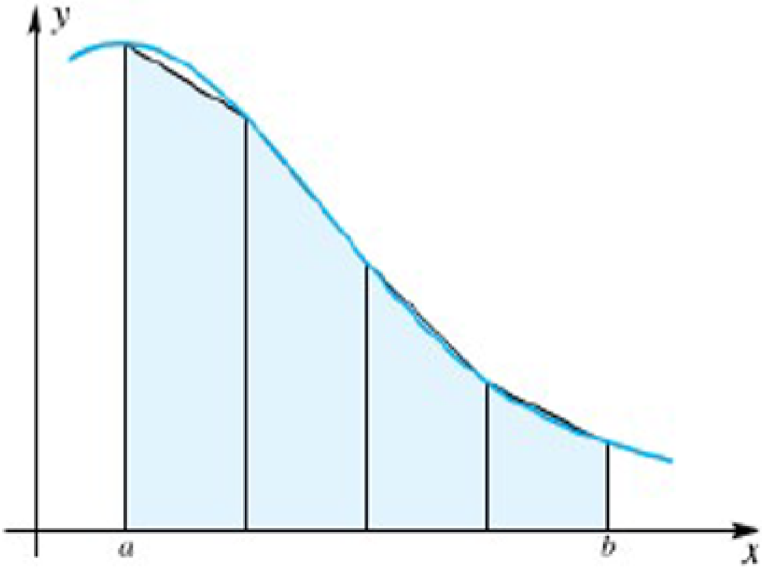
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

$E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$ untuk suatu c dalam $[a, b]$

6.4. Aturan Trapesium

Luas trapesium ke-i

$$= \frac{b-a}{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b) \right]$$

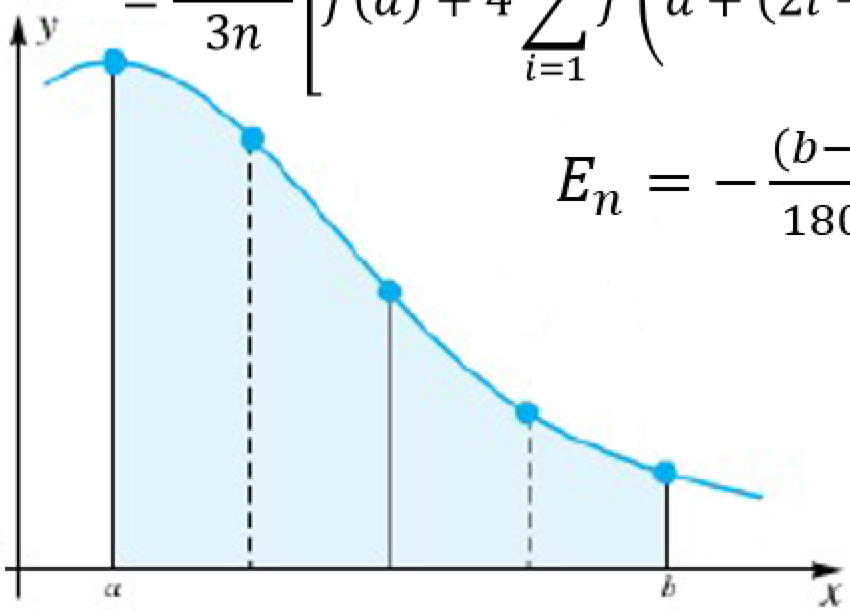
$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$ untuk suatu c dalam $[a, b]$

6.5. Aturan Parabolik (n harus bilangan genap)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \cdots$$

$$+4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$



$$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \text{ untuk suatu } c \text{ dalam } [a, b]$$

CONTOH SOAL (1)

Contoh 6.1. Aproksimasi integral tentu $\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx$ menggunakan jumlahan Riemann kiri, kanan dan titik tengah dengan $n = 4$.

Solusi. Misalkan $f(x) = \sqrt{4-x}$. Diketahui $a = 1$, $b = 3$, dan $n = 4$, sehingga $(b-a)/n = 0.5$. Nilai dari x_i dan $f(x_i)$ adalah

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = 1.0 & f(x_0) = f(1.0) = \sqrt{4-1} \approx 1.7321 \\
x_1 = 1.5 & f(x_1) = f(1.5) = \sqrt{4-1.5} \approx 1.5811 \\
x_2 = 2.0 & f(x_2) = f(2.0) = \sqrt{4-2} \approx 1.4142 \\
x_3 = 2.5 & f(x_3) = f(2.5) = \sqrt{4-2.5} \approx 1.2247 \\
x_4 = 3.0 & f(x_4) = f(3.0) = \sqrt{4-3} = 1.0000
\end{array}
$$

CONTOH SOAL (2)

Dengan menggunakan jumlahan Riemann kiri, diperoleh:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$$
$$= 0.5[f(1.0)+f(1.5)+f(2.0)+f(2.5)]$$
$$\approx 0.5(1.7321+1.5811+1.4142+1.2247)$$
$$\approx 2.9761$$

Dengan menggunakan jumlahan Riemann kanan, diperoleh:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$$
$$= 0.5[f(1.5)+f(2.0)+f(2.5)+f(3.0)]$$
$$\approx 0.5(1.5811+1.4142+1.2247+1.0000)$$
$$\approx 2.6100$$

CONTOH SOAL (3)

Dengan menggunakan jumlahan Riemann titik-tengah, diperoleh:

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]$$

$$= 0.5[f(1.25)+f(1.75)+f(2.25)+f(2.75)]$$

$$\approx 0.5(1.6583+1.5000+1.3229+1.1180) \approx 2.7996$$

Jika dicari dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua

$$\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}\right]_1^3 = -\frac{2}{3}(4-3)^{3/2}+\frac{2}{3}(4-1)^{3/2}$$

$$= 2\sqrt{3}-2/3 \approx 2.7924$$

Pendekatan titik-tengah paling mendekati hasil sesungguhnya.

CONTOH SOAL (4)

Contoh 6.2. Aproksimasi integral tentu $\int_0^2 \sin x^2\, dx$ menggunakan Aturan Trapesium dengan $n = 8$.

Solusi. Misalkan $f(x) = \sin x^2$. Diketahui $a = 0$, $b = 2$, dan $n = 8$, sehingga $(b-a)/n = 0.25$.

Dengan menggunakan aturan trapesium, diperoleh:

$$\int_0^2 \sin x^2\, dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.125[\sin 0^2 + 2(\sin 0.25^2 + \sin 0.5^2 + \sin 0.75^2$$
$$+ \sin 1^2 + \sin 1.25^2 + \sin 1.5^2 + \sin 1.75^2) + \sin 2^2]$$
$$\approx 0.79082$$

CONTOH SOAL (5)

Contoh 6.3. Aproksimasi integral tentu $\int_0^3 1/(1+x^2)\,dx$ menggunakan Aturan Parabolik dengan $n = 6$.

Solusi. Misalkan $f(x) = 1/(1+x^2)$, $a = 0$, $b = 3$, dan $n = 6$.

Sehingga $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, ..., $x_6 = 3.0$.

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{3-0}{3\cdot 6}[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + 2f(2.0) + 4f(2.5) + f(3.0)]$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 4\cdot 0.8 + 2\cdot 0.5 + 4\cdot 0.30769 + 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0.13793 + 0.1)$$

$$= 1.2471$$

LATIHAN SOAL (1)

1. Gambarkan grafik fungsi-fungsi berikut pada interval $[a, b]$ dan bagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval. Hitunglah luas daerah dengan menggunakan poligon dalam dan poligon luar. Kemudian tentukan luasnya saat $n \to \infty$.
   a) $f(x) = x + 1; a = -1, b = 2, n = 3$
   b) $f(x) = x^2 - 1; a = 2, b = 3, n = 6$
   c) $f(x) = x^3; a = 0, b = 1, n = 5$
2. Hitung jumlahan Riemann berdasarkan data yang diberikan.
   a) $f(x) = x - 1; P: 3 < 3.75 < 4.25 < 5.5 < 6 < 7; \bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 4, \bar{x}_3 = 4.75, \bar{x}_4 = 6, \bar{x}_5 = 6.5$
   b) $f(x) = x^2/2 + x; [-2,2]$ dibagi menjadi 8 subinterval sama besar, $\bar{x}_i$ adalah titik tengah setiap subinterval.

LATIHAN SOAL (2)

3. Dengan menggunakan definisi integral, tentukan nilai dari integral tentu berikut.

   a) $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$; Hint: gunakan $\bar{x}_i = 2i/n$

   b) $\int_{-2}^1 (3x^2+2)\,dx$; Hint: gunakan $\bar{x}_i = -2+3i/n$

4. Dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus Pertama, tentukan

   a) $\frac{d}{dx}\int_1^x 2t\,dt$

   b) $\frac{d}{dx}\int_x^1 2t\,dt$

   c) $\frac{d}{dx}\int_1^x \left(2t^2+\sqrt{t}\right)dt$

   d) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \sin t\,dt$

5. Jika diketahui $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$, $\int_0^1 g(x)\,dx = -1$, dan $\int_0^2 g(x)\,dx = 4$. Tentukan nilai dari $\int_1^2 [2f(x)+g(x)]\,dx$.

LATIHAN SOAL (3)

6. Tentukan hasil dari:

   a) $\int_0^2 x^3\,dx$

   b) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

   c) $\int \sqrt[3]{2x-4}\,dx$

   d) $\int x^2(x^3+5)^9\,dx$

   e) $\int_{-1}^{0} \sqrt{x^3+1}(3x^2)\,dx$

   f) $\int_0^{\pi} x^4\cos(2x^5)\,dx$

7. Tentukan nilai rata-rata fungsi berikut pada inteval yang diberikan.

   a) $f(x) = 5x^2; [1,4]$

   b) $f(x) = x\cos x^2; [0,\sqrt{\pi}]$

8. Tentukan semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral pada interval yang diberikan.

   a) $f(x) = \sqrt{x+1}; [0,3]$

   b) $f(x) = x(1-x); [0,1]$

   c) $f(x) = \sin x; [\pi,\pi]$

   d) $f(x) = x^3; [0,2]$

LATIHAN SOAL (4)

9. Gunakan teorema simetri untuk mencari hasil dari integral berikut.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

c) $\int_{-1}^{1} (x + x + x^2 + x^3)\, dx$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{(1 + x^2)^4}\, dx$

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx$

10. Aproksimasi fungsi berikut menggunakan metode (1) jumlahan Riemann kiri, (2) jumlahan Riemann kanan, (3) jumlahan Riemann titik-tengah, (4) Aturan Trapesuim, (5) Aturan Parabolik dengan $n = 4{,}8{,}16.$

a) $\int_{0}^{2} \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

b) $\int_{1}^{3} x\sqrt{x^3 + 1}\, dx$

Ringkasan (1)

- Masalah pencarian luas area merupakan dasar dari integral tentu.
- Notasi sigma digunakan untuk menuliskan jumlahan bilangan-bilangan yang memiliki pola tertentu.
- Luas area dibatasi kurva $y = f(x)$ dan sumbu-x pada suatu interval tertutup $[a, b]$ dapat dicari dengan menggunakan poligon dalam dan poligon luar.
- Konsep poligon dalam dan poligon luar merupakan dasar dari jumlahan Riemann.
- Integral tentu adalah limit dari jumlahan Riemann saat partisi $||P||$ mendekati nol (0) atau saat n menuju tak hingga.

Ringkasan (2)

- Karena integral tentu digunakan untuk mencari luas daerah, maka luasan dibawah sumbu-x akan bernilai negatif, sehingga tanda negatif melekat pada luas daerah yang berada di bawah sumbu-x.
- Integral tentu memiliki beberapa sifat diantaranya sifat linier, sifat penambahan interval, sifat perbandingan dan sifat keterbatasan.
- Integra tentu juga dapat digunakan untuk menentukan posisi suatu objek yang bergerak di sepanjang koordinat.
- Terdapat dua teorema dasar dalam Kalkulus, yakni Teorema Dasar Kalkulus Pertama dan Teorema Dasar Kalkulus Kedua.
- Metode substirusi merupakan kebalikan dari aturan rantai pada turunan.

Ringkasan (3)

- Teorema Nilai Rataan untuk Integral menyatakan bahwa terdapat suatu nilai c sehingga luas segiempat dengan tinggi $f(c)$ dan lebar $b - a$ sama dengan luas daerah di bawah kurva.
- Banyak integral tentu yang tidak dapat dicari dengan menggunakan Teorema Dasar kalkulus Kedua, sehingga diperlukan nilai pendekatan (aproksimasi).
- Terdapat 5 tipe aproksimasi yaitu, jumlahan Riemann kiri, jumlahan Riemann kanan, jumlahan Riemann titik-tengah, Aturan Trapesium dan Aturan Parabolik.

PERINGATAN HAK CIPTA

TERIMA KASIH