

## שאלה 5: אלגוריתם מגלה-אמת להקצאת מעונות לסטודנטים

משרד המעונות של האוניברסיטה מקצה מעונות לסטודנטים בעזרת האלגוריתם הבא:

- כל סטודנט רשם, מבין כל סוגי המעונות הקיימים, את שלושת הסוגים שהוא הכי רוצה, לפי הסדר (עדיפות ראשונה – עדיפות שנייה – עדיפות שלישית).
- המשרד מסדר את הסטודנטים לפי סדר עדיפות כלשהו (ותק, ציונים וכד').
- המשרד עובר על הסטודנטים לפי הסדר, ונותן לכל סטודנט את החדר הכי גבוה בדירוג שלו שעדיין זמין. אם כל השלושה לא זמינים, הסטודנט מקבל חדר זמין כלשהו באקראי.

א. הוכיחו שהאלגוריתם אינו מגלה-אמת.

ב. הוכיחו, שגם אם כל הסטודנטים מדווחים את ההעדפות האמיתיות שלהם, האלגוריתם אינו יעיל פארטו.

ג. הציעו שיפור קטן לאלגוריתם, שיהפוך אותו למגלה-אמת וגם יעיל פארטו.

### פתרון:

א. נזכיר שאלגוריתם נקרא מגלה אמת אם לכל משתתף באלגוריתם כדאי תמיד להגיד את הערכים האמיתיים שלו, בלי קשר לשאלה מה עושים האחרים.

כעת, נניח בשלילה שהאלגוריתם הנ"ל הוא מגלה אמת.

יהיו ארבעה סטודנטים, נמספר אותם מ-1 עד 4, כאשר סטודנט מספר 1 הוא הסטודנט עם ממוצע הציונים הגבוה ביותר וסטודנט מספר 4 הסטודנט עם ממוצע הציונים הנמוך ביותר.

נניח גם שהמשרד מסדר את הסטודנטים לפי ממוצע הציונים שלהם, כאשר ניתנת עדיפות לסטודנט בעל ממוצע הציונים הגבוה ביותר.

כעת, נניח שקיימים חמישה חדרים, בעלי סוגים שונים: קרוואן, דירה רגילה, דירה עם מרפסת, דירת גן ופנטאוז (סה"כ חמישה חדרים).

נניח שאלו העדפות הסטודנטים האמיתיות מהגבוהה לנמוכה:

סטודנט 1: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

סטודנט 2: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

סטודנט 3: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

סטודנט 4: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

מכיוון שסטודנט מספר 4 יכול להניח שלחבריו יהיו העדפות דומות לשלו, מיד יבין שאם יבחר בשלושת העדפות האמיתיות שלו, הרי שככל הנראה יקבל חדר באקראי מבין שתי אפשרויות: דירה רגילה וקרוואן. לכן, מכיוון שסטודנט מספר 4 מעדיף לקבל דירה רגילה על פני קרוואן, הרי שעל סמך ההנחות, יעדיף להציג דרוג העדפות שקרי מבחינתו ולכן יבחר בדירוג הבא: דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה.

אבל זה סותר את ההנחה שהאלגוריתם מגלה אמת, מכיוון שסטודנט מספר 4 העדיף להגיד ערך לא נכון ולכן ההנחה שלנו לא הייתה נכונה. מכאן נובע, האלגוריתם הנ"ל אינו מגלה-אמת. מ.ש.ל.

ב. נניח בשלילה שהאלגוריתם יעיל פארטו.

ניקח את אותה התרחיש מהסעיף הקודם.

ניח שאלו העדפות הסטודנטים האמיתיות מהגבוהה לנמוכה:

סטודנט 1: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

סטודנט 2: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

סטודנט 3: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.  
סטודנט 4: פנטאוז, דירת גן, דירה עם מרפסת, דירה רגילה, קרוואן.

כעת נניח שסטודנט מספר 4 מקבל קרוואן באופן רנדומלי.  
מכיוון שהאלגוריתם יעיל פארטו, אזי לא קיימת אופציה שטיב עם סטודנט מספר 4, מבלי לפגוע בשאר הסטודנטים.  
אבל אם נחלק את הדירות באופן הבא:  
סטודנט 1: פנטאוז.  
סטודנט 2: דירת גן.  
סטודנט 3: דירה עם מרפסת.  
סטודנט 4: **דירה רגילה**.  
קיבלנו שקיימת אופציה אשר תטיב עם סטודנט מספר 4, אך לא פוגעת באף אחד מהסטודנטים האחרים.  
מכן שהאופציה הנ"ל היא שיפור פארטו של האופציה אשר התקבלה לאחר הרצת האלגוריתם.  
מכן נובע, ההנחה הייתה שגויה ולכן האלגוריתם אינו יעיל פארטו.  
מ.ש.ל

ג. האלגוריתם המשופר:

- כל סטודנט מדרג את **כל סוגי המעונות** הקיימים, מהעדיפות הגבוהה לנמוכה.
- המשרד מסדר את הסטודנטים לפי סדר עדיפויות כשלהו.
- המשרד עובר על הסטודנטים לפי הסדר ונותן לכל סטודנט את החדר הכי גבוה בדירוג שלו שעדיין זמין.