

שאלה 1: כמה שיתופים לכל חפץ?

א. מחלקים ארבעה חפצים בין ארבעה שחקנים. כמו שלמדנו בהרצאה, תמיד קיימת חלוקה עם לכל היותר שלושה שיתופים. יש כמה אפשרויות לחלוקה כזאת:

1. חפץ א משותף בין כל ארבעת השחקנים.
2. חפץ א משותף בין שלושה שחקנים, וחפץ ב משותף בין שני שחקנים.
3. חפץ א משותף בין שני שחקנים, חפץ ב בין שני שחקנים, חפץ ג בין שני שחקנים.

לכל אחת מהאפשרויות, הראו דוגמה שבה האפשרות הזאת היא האפשרות היחידה הנותנת חלוקה פרופורציונלית עם שלושה שיתופים (לדוגמה, עבור סעיף 1: הראו דוגמה להערכות של השחקנים, שבה בכל חלוקה פרופורציונלית, חפץ א משותף בין כל ארבעת השחקנים).

פתרון א':

עבור כל החפצים, נניח שערכם זהה עבור כל אחד מהשחקנים.

1. ערך החפצים: $[40, 0, 0, 0]$.
 החפץ הראשון יהיה משותף בצורה שווה בין כל ארבעת השחקנים, כך שהערך של כל אחד מהשחקנים יהיה שווה ל-10, משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.

2. ערך החפצים: $[25, 15, 0, 0]$.
 החפץ הראשון יהיה משותף בין שלושת השחקנים הראשונים באופן הבא: שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ב' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-5.
 החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים ג' וד' באופן הבא: שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-5 ושחקן ד' יקבל ערך השווה ל-10.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 10.

שחקן ב' - 10.

שחקן ג' - 10.

שחקן ד' - 10.

משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.

3. ערך החפצים: $[40, 40, 40, 0]$.
 החפץ הראשון יהיה משותף בין שחקנים א' וב' באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ב' יקבל ערך השווה ל-30.

החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים א' וג' באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ג' יקבל ערך השווה ל-30.

החפץ השלישי יהיה משותף בין שחקנים א' וד' באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ד' יקבל ערך השווה ל-30.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 30.

שחקן ב' - 30.

שחקן ג' - 30.

שחקן ד' - 30.

משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-30, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-30.

* ב. מחלקים ארבעה חפצים בין חמישה שחקנים. כמו שלמדנו בהרצאה, תמיד קיימת חלוקה עם לכל היותר ארבעה שיתופים. יש כמה אפשרויות לחלוקה כזאת:

4. חפץ א משותף בין כל חמשת השחקנים.
5. חפץ א משותף בין ארבעה שחקנים, וחפץ ב משותף בין שני שחקנים.
6. חפץ א משותף בין שלושה שחקנים, וחפץ ב משותף בין שלושה שחקנים.
7. חפץ א משותף בין שלושה שחקנים, חפץ ב בין שני שחקנים, חפץ ג בין שני שחקנים.
8. חפץ א משותף בין שני שחקנים, חפץ ב בין שני שחקנים, חפץ ג בין שני שחקנים, חפץ ד בין שני שחקנים.

לכל אחת מהאפשרויות, הראו דוגמה שבה האפשרות הזאת היא האפשרות היחידה הנותנת חלוקה פרופורציונלית עם ארבעה שיתופים.

פתרון ב':

עבור כל החפצים, נניח שערכם זהה עבור כל אחד מהשחקנים.

4. ערך החפצים: $[50, 0, 0, 0]$.
החפץ הראשון יהיה משותף בצורה שווה בין כל חמשת השחקנים, כך שהערך של כל אחד מהשחקנים יהיה שווה ל-10, משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.

5. ערך החפצים: $[35, 15, 0, 0]$.
החפץ הראשון יהיה משותף בין ארבעת השחקנים הראשונים באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ב' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ד' יקבל ערך השווה ל-5. החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים ד' וחמש באופן הבא: שחקן ד' יקבל ערך השווה ל-5 ושחקן חמש יקבל ערך השווה ל-10.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 10.

שחקן ב' - 10.

שחקן ג' - 10.

שחקן ד' - 10.

שחקן חמש - 10.

- משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.
6. ערך החפצים: $[25, 25, 0, 0]$.

- החפץ הראשון יהיה משותף בין שלושת השחקנים הראשונים באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ב' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-5. החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים ג' ד' וחמש באופן הבא: שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-5, שחקן ד' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן חמש יקבל ערך השווה ל-10.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 10.

שחקן ב' - 10.

שחקן ג' - 10.

שחקן ד' - 10.

שחקן חמש - 10.

- משמע החלוקה פרופורציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.

7. ערך החפצים: [0, 10, 10, 30].

החפץ הראשון יהיה משותף בין שלושת השחקנים הראשונים באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ב' יקבל ערך השווה ל-10, שחקן ג' יקבל ערך השווה ל-10. החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים ד' וחמש באופן הבא: שחקן ד' יקבל ערך השווה ל-5 ושחקן חמש יקבל ערך השווה ל-5.

החפץ השלישי יהיה משותף בין שחקנים ד' וחמש באופן הבא: שחקן ד' יקבל ערך השווה ל-5 ושחקן חמש יקבל ערך השווה ל-5.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 10.

שחקן ב' - 10.

שחקן ג' - 10.

שחקן ד' - 10.

שחקן חמש - 10.

משמע החלוקה פורפרציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-10, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-10.

8. ערך החפצים: [50, 50, 50, 50].

החפץ הראשון יהיה משותף בין שני השחקנים הראשונים באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ב' יקבל ערך השווה ל-40.

החפץ השני יהיה משותף בין שחקנים א' וג' באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ג' יקבל ערך השווה ל-40.

החפץ השלישי יהיה משותף בין שחקנים א' וד' באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן ד' יקבל ערך השווה ל-40.

החפץ הרביעי יהיה משותף בין שחקנים א' וחמש באופן הבא: שחקן א' יקבל ערך השווה ל-10 ושחקן חמש יקבל ערך השווה ל-40.

כך שהחלוקה המתקבלת היא:

שחקן א' - 40.

שחקן ב' - 40.

שחקן ג' - 40.

שחקן ד' - 40.

שחקן חמש - 40.

משמע החלוקה פורפרציונלית. זאת האפשרות היחידה, מכיוון שפונקציית הערך זהה ולכן אם שחקן א' (שחקן שרירותי) יקבל ערך שגדול מ-40, זה בהכרח יבוא על חשבון שחקן אחר שיקבל ערך הנמוך מ-40.