חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי

במקרים רבים, כשמחלקים חפצים בדידים, והחפצים יקרים מכדי שיהיה אפשר להסתפק בהגינות מקורבת. פתרון מקובל במצב זה הוא להשאיר חלק מהחפצים בבעלות משותפת. למשל בחלוקת ירושות, אם יש שני יורשים ושלוש דירות, אז כל אחד יקבל דירה, והדירה השלישית תהיה משותפת, כשאחוזי-הבעלות ייקבעו לפי השווי של הדירות האחרות. גם במקומות עבודה מסויימים מקובל לשתף חפצים, למשל, לתת לעובדים "חצי רכב" (= רכב שנמצא ברשותם 50% מהזמן). דוגמה נוספת היא חלוקת התיקים בממשלה: לא תמיד מצליחים למצוא חלוקה מושלמת, הנתפסת כהוגנת בעיני כל הצדדים. אחד הפתרונות הוא לבצע רוטציה בראשות הממשלה, או בחלק ממשרדי הממשלה, כך שהבעלות עליהם תתחלק בין אנשים ממפלגות שונות.

שיתוף חפצים עלול להיות מאד לא נוח. תחשבו למשל על אנשים שצריכים לשתף ביניהם רכב: בכל מספר ימים, כשמגיע התור של הצד השני להשתמש ברכב, צריך להעביר לו את המפתח. לכן נעדיף חלוקה שבה מספר השיתופים הוא קטן ככל האפשר. **מהו המספר הקטן ביותר של חפצים שצריך לשתף, על-מנת להשיג חלוקה הוגנת ויעילה?**

א. שני שחקנים

בשלב ראשון נניח שיש לנו רק שני שחקנים. קל לראות, שבמקרים מסויימים חייבים לשתף חפץ אחד (למשל, אם יש רק חפץ אחד עם ערך גדול מאד, ולכל שאר החפצים ערך קטן משמעותית). האם תמיד אפשר להשיג חלוקה הוגנת ויעילה עם שיתוף חפץ אחד בלבד?

ניסיון ראשון: נסדר את כל החפצים בשורה ונתייחס אליהם כמו עוגה. נבקש מאדם אחד לחתוך ומהשני לבחור (או להיפך). בשיטה זו אין קנאה, ולכל היותר חפץ אחד נחתך. אבל החלוקה לא בהכרח יעילה פארטו (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שמייחס לו את הניקוד הגבוה ביותר. החלוקה ממקסמת את סכום הערכים, ולכן היא יעילה פארטו (כמו שהוכחנו בעבר), ואין בה שיתופים בכלל. אבל עלולה להיות קנאה (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שלישי: נתייחס לחפצים כמו לסחורות, ונמצא חלוקה הוגנת ויעילה, למשל חלוקה לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות. כפי שהוכחנו באחד השיעורים הקודמים, החלוקה תהיה יעילה פארטו וגם פרופורציונלית; אבל, לא בטוח שייחתך רק חפץ אחד.

א.1. חלוקה עם שיתוף אחד

קיים אלגוריתם לשני אנשים, המוצא חלוקה הוגנת ויעילה פארטו עם שיתוף **חפץ אחד** לכל היותר. האלגוריתם פותח ע"י שני פרופסורים אמריקאים - סטיבן בראמס (Steven Brams) שהוא פרופסור למדעי-המדינה, ואלן טיילור (Alan Taylor) שהוא פרופסור למתמטיקה. שיתוף-הפעולה ביניהם הניב הרבה אלגוריתמים, וביניהם גם את האלגוריתם שנראה מייד. האלגוריתם יכול לשמש לא רק לחלוקה של חפצים אלא גם לחלוקה של נושאים שיש עליהם מחלוקת, כמו למשל במשפטי גירושין או פירוק שותפויות.

האלגוריתם יכול לשמש לגישור ולמציאת פתרון שיהיה טוב לשני הצדדים, ולכן הוא נקרא "the win-win solution" או "adjusted winner" (המנצח המתוקן).

האלגוריתם מתייחס לשני שותפים/בני זוג הרוצים להיפרד. יש m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת. כל שותף מייחס ערך שונה לכל נושא; הערכים נמדדים באחוזים (כך שעבור כל שותף, סכום הערכים של כל החפצים הוא 100). האתגר הוא להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך שיתקיימו התכונות הבאות:

1. אין קנאה;
2. התוצאה היא יעילה-פארטו;
3. צריך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

בנוסף ל-3 התכונות שלמעלה, האלגוריתם מקיים תכונה נוספת - שיוויוניות (equitability) - סכום הנקודות של כל שחקן יהיה שווה. התיאור כאן שונה ופשוט יותר מהתיאור המקורי.

צעד א. עבור כל חפץ, חשב את **יחס הערכים**: הערך של שחקן א / הערך של שחקן ב. סדר את החפצים מימין לשמאל בסדר עולה של יחס זה, כך שבצד ימין נמצאים החפצים ששחקן ב מייחס להם ערך גבוה יותר ביחס לשחקן א, ובצד שמאל נמצאים החפצים ששחקן א מייחס להם ערך גבוה יותר ביחס לשחקן ב..

צעד ב. איתחול: תן את כל החפצים לשחקן א.

צעד ג. עבור על החפצים מימין לשמאל. העבר חפץ אחר חפץ לשחקן ב. חשב את סכום הערכים ששחקן ב מייחס לחפצים שברשותו, ואת סכום הערכים ששחקן א מייחס לחפצים שברשותו. אם הסכומים של שני השחקנים שוים – סיים.

צעד ד. אם הגעת לחפץ, שאם יתנו אותו לשחקן ב – סכום הערכים שלו יהיה גדול יותר, ואם ישאירו אותו אצל שחקן א – סכום הערכים שלו יהיה גדול יותר, חלק אותו ביחס שיגרום לסכום הנקודות להיות שווה, ע"י פתרון משוואה בנעלם אחד.

להדגמה, ראו בגליון האלקטרוני winner.ods.

האלגוריתם בבירור משתף חפץ אחד לכל היותר. כעת נוכיח שהוא גם יעיל והוגן. היעילות של האלגוריתם נובעת מכך שהוא מייצר חלוקה "מסודרת", כמו שנגדיר מייד.

הגדרה. חלוקת חפצים בין שני שחקנים (עם או בלי שיתופים) נקראת **מסודרת** אם יחסי־הערכים של החפצים שמקבל שחקן ב שווים או קטנים מיחסי־הערכים של החפצים שמקבל שחקן א (כאשר "יחס הערכים" מוגדר כ: הערך של שחקן א מחולק בערך של שחקן ב). במילים אחרות: חלוקה מסודרת נוצרת ע"י סידור החפצים בסדר עולה של יחס הערכים, "חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי (בין חפצים, או בתוך חפץ כלשהו), מתן החלק עם היחסים הקטנים יותר לשחקן ב, ומתן החלק עם היחסים הגדולים יותר לשחקן א.

משפט: כל חלוקה מסודרת בין שני שחקנים היא יעילה־פארטו.
הוכחה: בכל חלוקה מסודרת, קיים מספר כלשהו r, כך ששחקן ב מקבל חפצים עם יחס־ערכים שווה או קטן מ־r, ושחקן א מקבל חפצים עם יחס־ערכים שווה או גדול מ־r. אם קיים חפץ משותף, אז r הוא יחס־הערכים של חפץ זה; אחרת, r יכול להיות כל מספר בין יחס־הערכים הגדול ביותר של חפץ שבידי שחקן ב, לבין יחס־הערכים הקטן ביותר של חפץ שבידי שחקן א. בדוגמה שבקובץ, היחס הזה הוא r=1.3333. נגדיר, עבור כל חפץ:

- va = הערך לשחקן א;

- vb = הערך לשחקן ב;
- vc=r*vb = הערך לשחקן ב כפול r (בהמשך נראה למה מכפילים ב-r).

בחלוקה מסודרת, שחקן ב מקבל חפצים, שיחס הערכים שלהם שווה או קטן מ־r:

$$va/vb \le r \;\rightarrow\; vc \ge va$$

ושחקן א מקבל חפצים, שיחס הערכים שלהם **שווה או גדול** מ־r:

$$va/vb \ge r \;\rightarrow\; va \ge vc$$

מכאן, שהחלוקה הסופית ממקסמת את הסכום:

$$vc + va = r*vb + va$$

הסכום הזה הוא סכום של פונקציות עולות של ערכי השחקנים. בשיעור קודם הוכחנו, שכל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה־פארטו. לכן, החלוקה המסודרת הנתונה היא יעילה פארטו. ***

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו, פרופורציונלית וללא קנאה.

הוכחה: אלגוריתם "המנצח המתוקן", לפי הגדרתו, מחזיר תמיד חלוקה מסודרת. לפי המשפט הקודם, החלוקה יעילה־פארטו. כעת נוכיח את תכונות ההוגנות. האלגוריתם נותן לשני השחקנים סל עם אותו ערך. אילו ערך זה היה קטן מ־50, הם היו יכולים להתחלף ולהשיג שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. מכאן, שכל שחקן מקבל סל עם ערך לפחות 50, ולכן החלוקה פרופורציונלית. כיוון שסכום הערכים של כל אחד הוא 100, הערך שכל אחד מהם מייחס לסל של השחקן השני הוא לכל היותר 50. לכן אין קנאה. ***

א.2. חלוקה עם מספר שיתופים מינימלי

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר. במקרים מסויימים אכן חייבים לשתף חפץ אחד, אבל במקרים אחרים ייתכן שקיימת חלוקה בלי שיתופים בכלל. זה מעורר את השאלה: **האם אפשר לברר, עבור בעיית חלוקה מסויימת, אם קיימת חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים כלל**?

נוכיח תחילה משפט כללי על חלוקות יעילות־פארטו (זהו הכיוון השני של המשפט שהוכחנו קודם):

משפט. כל חלוקה יעילה־פארטו בין שני שחקנים היא חלוקה מסודרת.

הוכחה. נניח ששחקן א קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ושחקן ב קיבל את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$v_{a1} / v_{b1} < v_{a2} / v_{b2}$$

נעביר אגפים:

$$v_{a1} / v_{a2} < v_{b1} / v_{b2}$$

נבחר שני מספרים קטנים מ־1, y ו־z, שהיחס ביניהם נמצא בין היחסים באי־השיוויון הקודם:

$$v_{a1} / v_{a2} < z / y < v_{b1} / v_{b2}$$

נעביר y מחפץ 1 משחקן א לשחקן ב, ונעביר z מחפץ 2 משחקן ב לשחקן א.

שחקן א הפסיד $y\, v_{a1}$ אבל הרוויח $z\, v_{a2}$, ושחקן ב הפסיד $z\, v_{b2}$ אבל הרוויח $y\, v_{b1}$.

לפי האי-שיוויון הקודם:

$z\ v_{a2} > y\ v_{a1}$ $\qquad$ $y\ v_{b1} > z\ v_{b2}$

ולכן כל אחד מהשחקנים הרוויח יותר ממה שהפסיד. לכן, ההחלפה בין y ל־z היא שיפור־פארטו, ומכאן שהחלוקה המקורית אינה יעילה־פארטו. ***

במחשבה ראשונה, המשפט שהוכחנו עכשיו מאפשר לנו לעבור בקלות על כל החלוקות היעילות־פארטו ללא שיתופים: נסדר את החפצים בסדר עולה של יחס הערכים, ונבדוק את כל הדרכים "לחתוך" את סדרת החפצים לשניים. כיוון שיש m חפצים, יש בסה"כ m+1 דרכים לחתוך את הסדרה, ולכן יש בסה"כ m+1 חלוקות יעילות־פארטו. אפשר לעבור על כולן ולבדוק, לגבי כל אחת מהן, אם היא גם הוגנת. אם כן, נחזיר אותה; אם לא, נשתמש באלגוריתם "המנצח המתוקן" כדי למצוא חלוקה הוגנת ויעילה עם שיתוף אחד.

מדוע "במחשבה ראשונה"? כי האלגוריתם שתואר בפיסקה הקודמת מניח שיש רק דרך **אחת** לסדר את החפצים בסדר עולה. הנחה זו נכונה רק כאשר כל יחסי־הערכים שונים זה מזה. בדוגמה למעלה, יחסי־הערכים אכן שונים, אבל במקרים אחרים ייתכן שחלק מהיחסים או כולם יהיו זהים. במקרה הגרוע ביותר, כשכל יחסי־הערכים זהים, ישנן 2^m דרכים שונות לסדר את החפצים, וכל 2^m החלוקות הן יעילות־פארטו. האם קיים אלגוריתם יעיל יותר? - באופן כללי, התשובה היא "כנראה שלא":

משפט. בעיית ההחלטה, האם קיימת חלוקה פרופורציונלית (או ללא-קנאה) ויעילה-פארטו בין שני שחקנים ללא שיתוף חפצים כלל, היא בעיה NP-קשה.

הוכחה. כאשר לשני השחקנים יש פונקציות-ערך זהות, כל החלוקות הן יעילות-פארטו. חלוקה היא ללא-קנאה אם-ורק-אם לשני השחקנים יש ערך זהה. לכן בעיית מציאת חלוקה ללא-קנאה שקולה לבעיה הנקראת Partition, וידוע שבעיה זו היא NP-קשה. ***

שימו לב לנקודה מעניינת: ככל שההערכות של השחקנים דומות יותר, כך הבעיה החישובית קשה יותר: כשכל יחסי־הערכים זהים, הבעיה היא NP־קשה; אך כשכל יחסי־הערכים שונים, הבעיה פתירה בזמן פולינומיאלי. היה אפשר אולי לחשוב, שחלוקה הוגנת קלה יותר כשכולם חושבים אותו הדבר. בפועל, ההיפך הוא הנכון: הבעיה קלה יותר דווקא כשהשחקנים **לא** חושבים אותו הדבר!

מה עושים כשמקבלים בעיה כללית, ולא נתון מראש אם יחסי־הערכים זהים או שונים? – אפשר להשתמש באלגוריתם חיפוש במרחב המצבים, הדומה לאלה שלמדנו בשיעור הקודם. בנוסף לכללי־הגיזום הרגילים (גיזום מצבים שקולים וגיזום לפי חסם אופטימי), נבצע גיזום גם לכל חלוקת־ביניים שאינה מסודרת, כלומר, נגזום כל ניסיון לתת לשחקן כלשהו חפץ ה"מקלקל" את הסדר בין יחסי־הערכים.

זמן־הריצה של האלגוריתם תלוי במספר החלוקות המסודרות. אם כל יחסי־הערכים שונים, אז יש רק m+1 חלוקות מסודרות, ודרוש זמן $O(m)$ כדי לבנות כל חלוקה, ולכן זמן הריצה הוא $O(m^2)$ במקרה הגרוע. מצד שני, אם כל יחסי־הערכים זהים, אז כל 2^m החלוקות הן מסודרות, ובמקרה הגרוע זמן הריצה יהיה $O(m\ 2^m)$, אם־כי בפועל זמן הריצה יהיה כנראה קצר יותר בזכות כללי־הגיזום האחרים.

ב. שלושה שחקנים ויותר

עכשיו נעבור לבעיית חלוקה כללית, עם n שחקנים.

ב.1. בדיקת יעילות פארטו

ראשית, עלינו למצוא תנאי הכרחי ומספיק לזיהוי חלוקה יעילה־פארטו. חלוקה מסודרת היא עדיין **תנאי הכרחי** ליעילות־פארטו: עבור כל זוג שחקנים, החלוקה הפנימית בין השחקנים צריכה להיות מסודרת

בהתאם ליחסי־הערכים בין שני השחקנים. אולם זה כבר אינו **תנאי מספיק** ליעילות־פארטו: גם אם החלוקה הפנימית בין כל זוג שחקנים היא מסודרת, עדיין ייתכן שקיים שיפור פארטו הכולל החלפה בין שלושה שחקנים או יותר, כמו שמראה הדוגמה הבאה:

	אוהל	**דירה**	**מחסן**
עמי:	3	1	6
תמי:	6	3	1
רמי:	1	6	3

נתונה החלוקה: עמי-אוהל, תמי-דירה, רמי-מחסן. חלוקה זו היא מסודרת עבור כל זוג בנפרד. למשל, עבור עמי ותמי, יחסי־הערכים הם: אוהל=1/2, דירה=1/3, מחסן=6. יחס־הערכים של החפץ של עמי גדול מיחס־הערכים של החפץ של תמי. אותו הדבר נכון לשני הזוגות האחרים.

אבל החלוקה אינה יעילה־פארטו, שכן החלוקה: עמי-מחסן, תמי-אוהל, רמי-דירה היא שיפור־פארטו שלה.

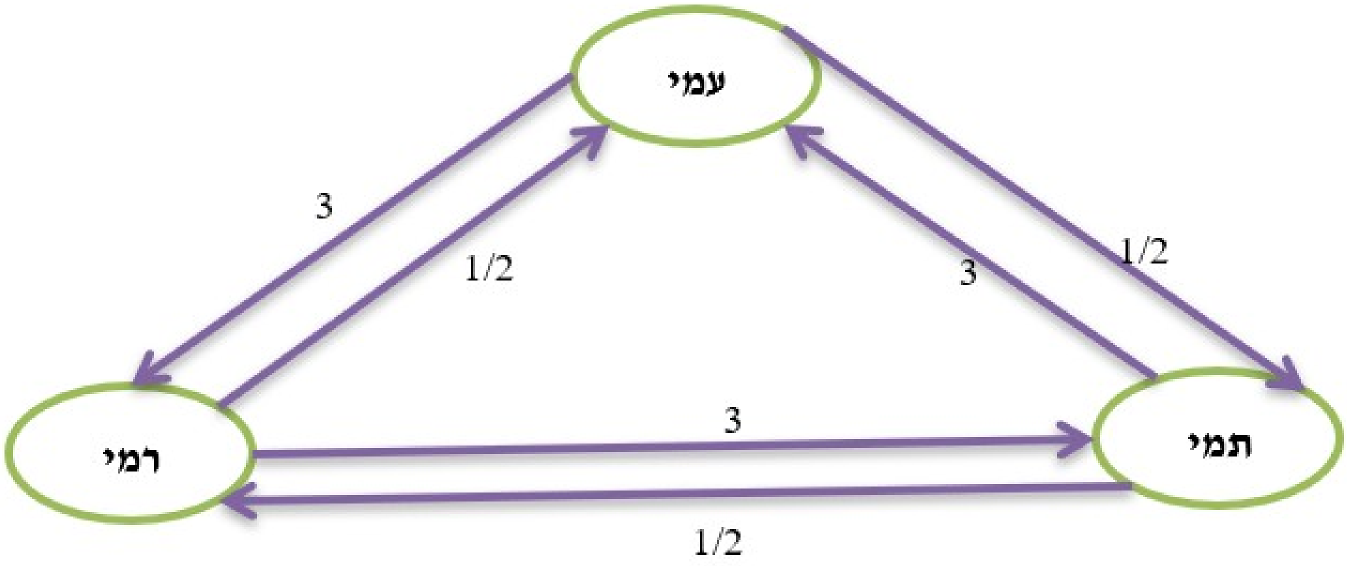
כדי לנסח תנאי הכרחי ומספיק ליעילות־פארטו, אנחנו צריכים לבחון את כל מעגלי־ההחלפה האפשריים. לשם כך נשתמש בגרף המייצג את ההחלפות האפשריות של חפצים. לשם פשטות, נתאר את הגרף עבור שחקנים עם הערכות חיוביות בלבד.

הגדרה. **גרף־ההחלפות** של חלוקה נתונה הוא גרף מכוון שלם, שבו n צמתים – צומת לכל שחקן. לכל שני שחקנים i,j, משקל הקשת משחקן i לשחקן j שווה ליחס־הערכים (ערך של i / ערך של j) הקטן ביותר של חפץ כלשהו הנמצא בסל של שחקן i.

נחשב את משקלי הקשתות בדוגמה למעלה.

- כדי לחשב את משקל הקשת מעמי לתמי, יש לחשב את יחסי־הערכים של החפצים שנמצאים בסל של עמי. בחלוקה הנתונה, לעמי יש רק אוהל. יחס־הערכים של האוהל הוא 3/6. לכן משקל הקשת מעמי לתמי הוא 1/2.
- גם משקל הקשת מעמי לרמי נקבע לפי יחס־הערכים של האוהל, שהוא במקרה זה 3/1=3..
- משקל הקשת מרמי לתמי נקבע לפי יחס הערכים של החפץ היחיד בסל של רמי, שהוא המחסן. יחס זה הוא 3/1=3..

באותו אופן ניתן לחשב את משקלי הקשתות האחרות, ומתקבל הגרף הבא:



לכל מעגל מכוון בגרף, ניתן לחשב את **מכפלת המשקלים** על הקשתות במעגל. לדוגמה:

- מכפלת המשקלים של המעגל (עמי → תמי → רמי → עמי) היא 1/8;
- מכפלת המשקלים של המעגל ההפוך (עמי → רמי → תמי → עמי) היא 27;
- מכפלת המשקלים של המעגל באורך 2 (עמי → תמי → עמי) היא 3/2;

שימו לב, שבמעגל־ההחלפה שראינו בדוגמה, מכפלת־המשקלים קטנה מ־1. המשפט הבא מראה שזה לא במקרה: מעגל־החלפה עם מכפלת־משקלים קטנה מ־1 מאפשר שיפור־פארטו.

משפט. חלוקה היא יעילה־פארטו אם־ורק־אם בגרף־ההחלפות שלה אין מעגלים מכוונים שמכפלת־המשקלים שלהם קטנה מ־1.

[ניתן להוכיח, שהמשפט הזה מכליל את שני המשפטים שהוכחנו לגבי שני שחקנים, כלומר: כאשר יש שני שחקנים, חלוקה היא מסודרת אם־ורק־אם בגרף־ההחלפות שלה אין מעגלים עם מכפלה קטנה מ־1.]

הוכחת המשפט. **כיוון אחד**: נניח שבגרף־ההחלפות ישנו מעגל מכוון, שמכפלת־המשקלים שלו קטנה מ־1, ונראה שבמקרה זה קיים שיפור־פארטו.

כדי שלא להעמיס בסימונים, נראה את ההוכחה עבור מעגל באורך 3 הכולל את השחקנים:

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

הקורא לא יתקשה להכליל את ההוכחה למעגל בכל אורך שהוא. נסמן את ההערכות של השחקנים במעגל ב: v_a, v_b, v_c, ואת החפצים שלפיהם נקבעו משקלי הקשתות ב: x (לשחקן a), y (לשחקן b), z (לשחקן c). נסמן את מכפלת המשקלים במעגל באות P. לפי הגדרת המשקלים:

$$p = \frac{v_a(x) \cdot v_b(y) \cdot v_c(z)}{v_b(x) \cdot v_c(y) \cdot v_a(z)}$$

לפי ההנחה P<1., נסמן ב־Q את השורש השלישי של P, ונשים לב שגם Q<1. כעת, נגדיר החלפת חפצים בין השחקנים, באופן הבא:

- שחקן a נותן לשחקן b חלק קטן כלשהו, שנסמן ב־ε_x, של חפץ x.
- שחקן b נותן לשחקן c חלק ε_y של חפץ y, המוגדר כך: $\varepsilon_y = \varepsilon_x \cdot q \cdot \left(\frac{v_b(x)}{v_b(y)} \right)$
- שחקן c נותן לשחקן a חלק ε_z של חפץ z, המוגדר כך: $\varepsilon_z = \varepsilon_y \cdot q \cdot \left(\frac{v_c(y)}{v_c(z)} \right)$
- נשים לב, שלפי הגדרתQ', מתקיים גם השיוויון: $\varepsilon_x = \varepsilon_z \cdot q \cdot \left(\frac{v_a(z)}{v_a(x)} \right)$

(כדי לוודא עובדה זו, הכפילו את כל שלושת השיוויונים המקשרים בין ה־ε־ים, וראו שמתקבל השיוויון $Q^3/P=1$, שהוא נכון לפי הגדרת Q.

הגודל של ε_x יכול להיות כל מספר חיובי. נקבע אותו כך שההעברה תהיה אפשרית, כלומר: ε_x יהיה קטן מהכמות של x המוחזקת בידי שחקן a, ε_y יהיה קטן מהכמות של y המוחזקת בידי שחקן b, ו־ ε_z יהיה קטן מהכמות של z המוחזקת בידי שחקן c.

כעת נוכיח, שכל השחקנים מרוויחים מההעברה.

- שחקן a מרוויח $\varepsilon_z \cdot v_a(z)$ ומפסיד $\varepsilon_x \cdot v_a(x)$. לפי השיוויון למעלה, $\varepsilon_x \cdot v_a(x) = q \cdot \varepsilon_z \cdot v_a(z)$.
- בדומה לכך, שחקן b מרוויח $\varepsilon_x \cdot v_b(x)$ ומפסיד $\varepsilon_y \cdot v_b(y)$, השווה ל־ $q \cdot \varepsilon_x \cdot v_b(x)$.
- בדומה לכך, שחקן c מרוויח $\varepsilon_y \cdot v_c(y)$ ומפסיד $\varepsilon_z \cdot v_c(z)$, השווה ל־ $q \cdot \varepsilon_y \cdot v_c(y)$.

לסיכום, לכל שלושת השחקנים, ההפסד שווה Q כפול הרווח. לפי ההנחה, Q<1, ולכן ההפסד של כל שחקן קטן מהרווח שלו – "יצא הפסדו בשכרו". לכן העברה זו היא שיפור־פארטו.

כיוון שני: נניח שקיים שיפור־פארטו, ונוכיח שבגרף־ההחלפות ישנו מעגל מכוון עם מכפלת משקלים קטנה מ־1.

בשיפור־פארטו ישנו לפחות שחקן אחד, נניח שחקן a, שהרויח; ולכן יש חפץ כלשהו, נניח חפץ z, ששחקן a מקבל ממנו כמות גדולה יותר. מכאן, שקיים שחקן אחר כלשהו, נניח שחקן c, המקבל כמות קטנה יותר מחפץ z, בשיפור־פארטו שחקן c לא מפסיד, ולכן קיים חפץ אחר כלשהו, נניח חפץ y, ששחקן c מקבל ממנו כמות גדולה יותר. מכאן שקיים שחקן אחר כלשהו, המקבל כמות קטנה יותר מחפץ y. אם נמשיך כך, בסופו של דבר נמצא מעגל מכוון של שחקנים, שכל אחד מהם "מסר" חפץ כלשהו לשחקן הבא אחריו במעגל, אף אחד מהם לא הפסיד מההעברה, ולפחות אחד מהם הרויח. שוב, כדי שלא להעמיס בסימונים, נראה את ההוכחה עבור מעגל באורך 3:

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

נסמן את החפצים שעברו במעגל: x (משחקן a לשחקן b), y (משחקן b לשחקן c), z (משחקן c לשחקן a), ונסמן את הכמויות שעברו מכל חפץ ב: ε_x, ε_y, ε_z. אף שחקן לא הפסיד מההעברה, ולכן:

$$\varepsilon_x \cdot v_a(x) \le \varepsilon_z \cdot v_a(z)$$

$$\varepsilon_y \cdot v_b(y) \le \varepsilon_x \cdot v_b(x)$$

$$\varepsilon_z \cdot v_c(z) \le \varepsilon_y \cdot v_c(y)$$

כאשר לפחות אחד מאי־השיוויונים הללו הוא חזק. לכן, אם נכפיל את אי־השיוויונים הללו, נקבל אי־שיוויון חזק. נצמצם את ה־ε־ים ונקבל:

$$v_a(x)\cdot v_b(y)\cdot v_c(z) < v_a(z)\cdot v_b(x)\cdot v_c(y)$$

נחלק ונקבל מכפלה של יחסי־ערכים:

$$\frac{v_a(x)}{v_b(x)}\cdot\frac{v_b(y)}{v_c(y)}\cdot\frac{v_c(z)}{v_a(z)} < 1$$

לפי הגדרת גרף ההחלפות, משקל הקשת b ← a הוא יחס־הערכים (ערך של a / ערך של b) הקטן ביותר של חפץ כלשהו הנמצא בסל של שחקן a. בפרט, משקל זה שווה או קטן מהגורם הראשון במכפלה: $\frac{v_a(x)}{v_b(x)}$. בדומה לכך, משקל הקשת c ← b שווה או קטן מהגורם השני במכפלה: $\frac{v_b(y)}{v_c(y)}$, ומשקל הקשת a ← c שווה או קטן מהגורם השלישי במכפלה: $\frac{v_c(z)}{v_a(z)}$. לכן, מכפלת הערכים במעגל a ← b ← c ← a קטנה מ־1. ***

לפי המשפט, כדי לבדוק אם חלוקה נתונה היא יעילה־פארטו, יש לבנות את גרף־ההחלפות שלה ולחפש בו מעגל עם משקלים קטנה מ־1. איך מחפשים מעגל עם מכפלת־ערכים קטנה מ־1? – ראשית, נשתמש בפונקציה הידועה, ההופכת מכפלה לסכום: לוגריתם. המכפלה קטנה מ־1 אם ורק אם לוגריתם המכפלה קטן מאפס. לוגריתם של מכפלת המשקלים שווה לסכום הלוגריתמים של המשקלים. אם כך, כדי למצוא מעגל עם מכפלת־משקלים קטנה מ־1, נחליף כל משקל בלוגריתם שלו, ונחפש מעגל עם סכום־משקלים שלילי. ישנם אלגוריתמים רבים למציאת מעגל מכוון עם סכום־משקלים שלילי בזמן פולינומיאלי. הפשוט ביותר מביניהם הוא **אלגוריתם בלמן–פורד**, הנלמד בדרך־כלל בקורסי יסוד בתורת הגרפים. ישנם אלגוריתמים נוספים. נסכם את האלגוריתם לזיהוי יעילות־פארטו:

- א. בנה את גרף־ההחלפות של החלוקה.
- ב. החלף כל משקל בלוגריתם שלו.
- ג. השתמש באלגוריתם קיים למציאת מעגל עם סכום־משקלים שלילי.
- ד. אם נמצא מעגל כזה – החזר "לא" (החלוקה אינה יעילה־פארטו). אחרת, החזר "כן".

נחשב את זמן הריצה של האלגוריתם:

- בניית גרף־ההחלפות בצעד א דורשת לעבור על כל $O(n^2)$ הזוגות, ולכל אחד מהם, למצוא את החפץ עם היחס הקטן ביותר; לכן הזמן הדרוש הוא $O(n^2m)$.
- זמן־הריצה של אלגוריתם בלמן–פורד על גרף עם V צמתים ו־E קשתות הוא $O(E\ V)$. בגרף ההחלפות יש n צמתים ו $O(n^2)$ קשתות, ולכן זמן הריצה של צעד ג הוא $O(n^3)$.

הערה: החלפת משקלים בלוגריתמים היא דרך נוחה ופשוטה להפוך מכפלה לסכום, אבל יש לה חיסרון אחד – הלוגריתמים הם מספרים לא־רציונליים, שאי־אפשר לייצג במחשב במדוייק. לכן, חישוב בעזרת לוגריתמים עלול להיות לא־מדוייק. פתרון אפשרי הוא להשאיר את המשקלים כמו שהם, אבל לעשות שינוי קטן באלגוריתם: בכל מקום שהאלגוריתם מבצע פעולת **חיבור** של משקלים – להחליף אותו בפעולת **כפל**; באותו אופן, יש להחליף פעולת **חיסור** של משקלים בפעולת **חילוק**, וכן להחליף את המספר 0 – האיבר הנייטרלי של פעולת החיבור – במספר 1 – האיבר הנייטרלי של פעולת הכפל.

בעזרת האלגוריתם לזיהוי יעילות-פארטו, אנחנו יכולים לבצע חיפוש במרחב המצבים על כל החלוקות היעילות-פארטו ללא שיתופים כלל; כך נוכל לבדוק אם יש חלוקה ללא שיתופים, שהיא הוגנת ויעילה-פארטו. אבל מה קורה אם אין חלוקה כזאת? במקרה של שני שחקנים, שיתוף של חפץ אחד הספיק לנו כדי להשיג חלוקה הוגנת ויעילה. מה קורה כשיש שלושה שחקנים או יותר?

ב.2. חלוקה עם n-1 שיתופים: קיום

כמה שיתופים צריך כדי להשיג חלוקה הוגנת ויעילה בין n שחקנים? במקרה הגרוע, כאשר יש n שחקנים, קל לראות שצריך לפחות $n-1$ שיתופים. למשל, כשיש $m=n-1$ חפצים זהים, כדי להשיג חלוקה פרופורציונלית (וללא־קנאה), צריך לתת (n-1) חלקי n חפץ לכל שחקן, ולשם כך צריך לשתף את כל החפצים.

האם תמיד אפשר להשיג חלוקה עם $n-1$ שיתופים לכל היותר? התשובה היא כן. ההוכחה מעט מורכבת יותר מבמקרה של שני שחקנים. אנחנו נוכיח משפט כללי יותר: נוכיח, שלכל חלוקה, קיימת חלוקה עם לכל היותר $n-1$ שיתופים שהיא "שיפור פארטו חלש" שלה.

הגדרה. חלוקה ב תיקרא **שיפור פארטו חלש** של חלוקה א, אם הערך שמקבל כל שחקן בחלוקה ב גדול לפחות כמו הערך שהוא מקבל בחלוקה א.
כל שיפור־פארטו הוא שיפור־פארטו־חלש, אבל ההיפך לא נכון: בשיפור־פארטו יש שחקן שערכו ממש גדול יותר, ובשיפור־פארטו־חלש ייתכן שערכם של כל השחקנים נשאר זהה.

משפט. בכל בעייה של חלוקת m חפצים בין n שחקנים, לכל חלוקה נתונה, קיימת חלוקה שהיא שיפור־פארטו־חלש שלה, ובה לכל היותר $n-1$ חפצים משותפים.

הוכחה. נניח שיש m חפצים ו-n שחקנים .לכל שחקן i, נסמן ב־t_i את הערך שהוא מקבל בחלוקה המקורית. נכתוב תוכנית ליניארית המגדירה את החלוקה החדשה. בתוכנית יהיו $m*n+n$ משתנים:

- לכל שחקן i וחפץ j, נגדיר משתנה z_{ij} המייצג החלק שמקבל שחקן i מתוך משאב j (מספר בין 0 ל-1). בסך-הכל יהיו $m*n$ משתנים כאלו.
- לכל שחקן i בין 1 ל $n-1$ יהיה משתנה y_i, המייצג את הערך העודף שמקבל השחקן מעל הסף הדרוש (t_i). בהמשך נסביר מדוע לא צריך משתנה כזה עבור שחקן n.

נסמן ב- v_{ij} את הערך שמייחס שחקן i למשאב j כולו. הערך הכללי שמקבל שחקן כלשהו מהחלוקה המיוצגת ע"י המטריצה z הוא ביטוי שניתן להציג כמכפלה סקלרית של שני וקטורים – וקטור הערכים של שחקן i כפול וקטור החלקים שמקבל שחקן i מהמשאבים השונים (שני הוקטורים באורך m):

$$v_i \cdot z_i = v_{i1}*z_{ij} + .. + v_{im}*z_{im}$$

אנחנו דורשים שהביטוי הזה יהיה שווה ל t_i+y_i - הערך של i בחלוקה א ועוד העודף.

עכשיו נציג את התוכנית הליניארית:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & v_n \cdot z_n & \\ \text{Subject to:} & & \\ & v_i \cdot z_i = t_i + y_i & \text{for all } i \text{ in } 1,..,n-1 \\ & z_{1j} + .. + z_{nj} = 1 & \text{for all } j \text{ in } 1,..,m \\ & z_{ij} \geq 0 & \text{for all } i \text{ in } 1,..,n \ \& \ j \text{ in } 1,..,m \\ & y_i \geq 0 & \text{for all } i \text{ in } 1,..,n-1 \end{array}$$

האילוצים השני והשלישי מבטיחים שהחלוקה החדשה היא תקנית – כל שחקן מקבל חלק לפחות אפס מכל משאב, וסכום החלקים הנמסרים מכל משאב שווה בדיוק 1. האילוצים הראשון והרביעי מבטיחים שכל השחקנים 1 עד n-1 מקבלים לפחות את הערך שקיבלו בחלוקה א. מדוע לא צריך אילוצים דומים עבור שחקן n? - כיוון שקיימת חלוקה כלשהי (- החלוקה המקורית) המקיימת את כל האילוצים ונותנת

לשחקן n ערך t_n, ואנחנו מוצאים את החלוקה שבה ערכו של שחקן n הוא גדול ביותר תחת האילוצים הנתונים, ודאי ששחקן n יקבל לפחות t_n.

החלוקה המקורית מקיימת את כל האילוצים. מכאן, שהתוכנית הליניארית שכתבנו היא אפשרית – קיים לה פתרון אחד לפחות. ניתן לפתור את התוכנית בקלות בעזרת כל כלי לפתרון בעיות אופטימיזציה קמורות, למשל cvxpy. אבל איך נוודא שבפתרון שמצאנו יש לכל היותר n-1 שיתופים? לשם כך נשתמש בעובדה ידועה על תוכניות ליניאריות. ניתן להציג תוכנית ליניארית כללית, עם P משתנים ו-Q אילוצים, באופן הבא:

```
maximize c x
subject to A x = b
           x ≥ 0
```

כאשר x הוא וקטור באורך P המייצג את המשתנים; c הוא וקטור קבוע באורך P המייצג את הביטוי שרוצים למקסם; A היא מטריצה Q על P ו-b הוא וקטור באורך Q והם מייצגים את אילוצי השיוויון.

משפט. נתונה תוכנית ליניארית בצורה המתוארת למעלה, עם Q אילוצי שיוויון. אם יש לתוכנית הזאת פתרון אופטימלי, אז יש לה פתרון אופטימלי שבו לכל היותר Q משתנים שונים מאפס.

הוכחה מלאה של משפט זה היא מעבר להיקפו של הקורס הנוכחי, אבל קל להבין אותה אינטואיטיבית. אם $P \leq Q$ אז המשפט נכון באופן טריביאלי. אחרת, אם נבחר Q מתוך P המשתנים, ונציב אפס בכל P-Q המשתנים האחרים, נקבל מערכת של Q משוואות ב-Q נעלמים. לכל מערכת כזאת, שבה המשוואות בלתי-תלויות ליניארית, קיים פתרון אחד ויחיד. פתרון כזה נקרא פתרון יסודי – *basic solution* – של התוכנית הליניארית. מספר הפתרונות היסודיים הוא לכל היותר P מעל Q - מספר הדרכים לבחור Q משתנים מתוך P.

כמובן, לא כל פתרון יסודי מקיים את התנאי $x \geq 0$, ולא כל פתרון יסודי הוא אופטימלי. אבל ניתן להוכיח, שמבין כל הבחירות האפשריות של Q משתנים מתוך ה-P, קיימת לפחות בחירה אחת שעבורה הפתרון היסודי הוא חיובי ואופטימלי (פתרון כזה נקרא פתרון יסודי אפשרי אופטימלי – *optimal basic feasible solution*). לכן, אם נעבור על כל הפתרונות היסודיים, נמצא פתרון אופטימלי עם לכל היותר Q משתנים שונים מאפס.

עכשיו נחזור לתוכנית הליניארית שלנו. אצלנו מספר אילוצי-השיווין Q הוא m+n-1. לכן קיים פתרון שבו לכל היותר m+n-1 משתנים במטריצה z_{ij} שונים מאפס. בפרט, קיימים לכל היותר n-1 חפצים עם שניים או יותר משתנים שונים מאפס. עבור שאר החפצים, יש רק משתנה אחד שונה מאפס, וערכו של המשתנה הזה חייב להיות 1 (כי סכום כל המשתנים עבור כל חפץ הוא 1). לכן, יש לכל היותר n-1 חפצים משותפים. כפי שהוסבר בהוכחה למעלה, ניתן למצוא חלוקה כזאת בעזרת אלגוריתם הסימפלקס. ***

המשפט הקודם אינו מבטיח חלוקה יעילה־פארטו. עם עוד מאמץ קטן, אפשר לחזק את המשפט כך שיבטיח גם יעילות פארטו:

משפט. נתונה בעייה של חלוקת m חפצים בין n שחקנים. לכל חלוקה נתונה, קיימת חלוקה **יעילה־פארטו** עם לכל היותר n–1 חפצים משותפים, שהיא שיפור־פארטו־חלש שלה.

הוכחה. נקרא לחלוקה המקורית: **חלוקה א**. נבנה חלוקה חדשה: **חלוקה ב**, שהיא שיפור־פארטו־חלש של חלוקה א, וגם יעילה־פארטו. ניתן לעשות זאת, למשל, על־ידי פתרון תוכנית ליניארית של מיקסום סכום־הערכים, תחת האילוץ שמדובר בשיפור־פארטו:

$$\text{Maximize} \quad v_1 \cdot z_1 + \ldots + v_n \cdot z_n$$
$$\text{Subject to:}$$
$$v_i \cdot z_i = t_i + y_i \qquad \text{for all } i \text{ in } 1,\ldots,n$$

```
z_1j + .. + z_nj = 1          for all j in 1,..,m
z_ij ≥ 0              for all i in 1,..,n & j in 1,..,m
y_i ≥ 0               for all i in 1,..,n-1
```

נפעיל על חלוקה ב את המשפט הקודם, ונקבל חלוקה חדשה – **חלוקה ג** – שהיא שיפור־פארטו־חלש של חלוקה ב (ולכן גם של חלוקה א), ויש בה לכל היותר n−1 שיתופים.

חלוקה ב ממקסמת סכום ערכים, ולכן יעילה־פארטו. לכן לא קיים לה שיפור־פארטו. לכן בחלוקה ג, שהיא שיפור־פארטו־חלש שלה, כל השחקנים מקבלים בדיוק אותו ערך כמו בחלוקה ב. לכן גם חלוקה ג יעילה־פארטו – וזו החלוקה המבוקשת. ***

משפט. בכל בעיית חלוקת-משאבים עם n שחקנים, קיימת חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו שבה היותר n-1 חפצים משותפים. קיים אלגוריתם מהיר המוצא חלוקה כזאת.
הוכחה. חלוקה פרופורציונלית קל מאד למצוא – פשוט נותנים לכל שחקן 1 חלקי n מכל משאב. נגדיר אותה כ"חלוקה א" ונפעיל עליה את המשפט הקודם: נקבל חלוקה יעילה-פארטו עם לכל היותר n-1 שיתופים, שבה כל שחקן מקבל לפחות את הערך שקיבל בחלוקה א – שהוא הערך הפרופורציונלי. ***

ב.3. חלוקה עם n-1 שיתופים: חישוב

כדי לחשב חלוקה הוגנת ויעילה עם n−1 שיתופים, צריך לדעת לחשב חלוקה עם n−1 שיתופים, שהיא שיפור־פארטו־חלש של חלוקה נתונה. איך אפשר לחשב חלוקה כזאת?

– אפשר לפתור את התוכנית הליניארית לחישוב שיפור־פארטו־חלש, שנזכרה בהוכחת המשפט, בעזרת כל כלי לפתרון בעיות־מיטוב קמורות (למשל ספריית cvxpy בשפת פייתון). אבל איך נדע שהפתרון שיתקבל יהיה דווקא פתרון **יסודי**?

מבחינה מעשית, הדרך הפשוטה ביותר למצוא פתרון יסודי היא להשתמש באלגוריתם מסויים לפתרון תוכניות ליניאריות, שנקרא **אלגוריתם הסימפלקס – Simplex algorithm** (רוב הספריות לפתרון בעיות מיטוב מאפשרות לפותר לבחור באיזה אלגוריתם להשתמש). אלגוריתם הסימפלקס סורק את מרחב הפתרונות היסודיים עד שהוא מוצא פתרון מיטבי.

תיאורטית, אלגוריתם הסימפלקס אינו אלגוריתם פולינומיאלי: ישנם מקרים שבהם האלגוריתם צריך לעבור על מספר מעריכי של פתרונות יסודיים עד שהוא מוצא פתרון יסודי אפשרי אופטימלי. אבל המקרים האלה נדירים מאד ואינם מתגלים ביישומים מעשיים. קיימים אלגוריתמים משוכללים יותר למציאת פתרון יסודי אפשרי אופטימלי, שזמן הריצה שלהם הוא תמיד פולינומיאלי. אבל ברוב המקרים המציאותיים, זמן-הריצה של אלגוריתמים אלה איטי יותר משל אלגוריתם הסימפלקס

לכן נראה עכשיו אלגוריתם אחר,[i] המוצא שיפור־פארטו־חלש לחלוקה נתונה **ללא** שימוש בתיכנות ליניארי, בזמן־ריצה פולינומיאלי. אלגוריתם זה ייתן לנו מידע נוסף על החלוקה, שיהיה שימושי בהמשך הפרק. האלגוריתם משתמש באותו גרף החלפות שהגדרנו בסעיף הקודם, וכן בגרף מסוג חדש, שנגדיר עכשיו.

הגדרה. ***גרף־הצריכה*** של חלוקה נתונה הוא גרף דו־צדדי לא־מכוון וללא משקלים, שבו:
* הקודקודים בצד אחד הם n השחקנים;
* הקודקודים בצד השני הם m החפצים;
* יש צלע בין שחקן i לבין חפץ j, אם ורק אם שחקן i מקבל חלק חיובי של חפץ j.

כל משתנה $z_{i,j}$ בתוכנית הליניארית מהסעיף הקודם, המקבל ערך חיובי, מתאים לצלע בגרף־הצריכה בין שחקן i לחפץ j. חלוקה עם לכל היותר n−1 שיתופים היא חלוקה שבה לכל היותר m+n−1 משתנים

מקבלים ערך חיובי, כלומר, בגרף הצריכה יש לכל היותר m+n−1 צלעות. אנחנו נבנה חלוקה המקיימת תנאי חזק יותר: **גרף־הצריכה יהיה חסר־מעגלים**. מדוע התנאי הזה חזק יותר? – כי לפי עובדה ידועה בתורת הגרפים, בכל גרף חסר־מעגלים על N קודקודים, יש לכל היותר N−1 צלעות. בגרף הצריכה יש m+n קודקודים, ולכן אם אין בו מעגלים, אז יש בו לכל היותר m+n−1 צלעות.

משפט. בכל בעיית חלוקת m חפצים בין n שחקנים, קיים אלגוריתם המוצא, לכל חלוקה נתונה, חלוקה יעילה־פארטו שהיא שיפור־פארטו־חלש שלה, עם גרף־צריכה חסר־מעגלים.

הוכחה. ניתן למצוא מעגל בגרף־הצריכה בעזרת כל אלגוריתם למציאת מעגלים בגרף לא־מכוון, למשל, אלגוריתם Depth-First Search. אם לא מצאנו מעגל – האלגוריתם הסתיים בהצלחה.

אם מצאנו מעגל לא־מכוון בגרף־הצריכה, נבנה שני מעגלים מכוונים בכיוונים מנוגדים בגרף־ההחלפות. לדוגמה, נניח שבגרף־הצריכה קיים המעגל הלא־מכוון:

א – x – ב – y – ג – z – א

כאשר השחקנים הם א, ב, ג והחפצים הם x, y, z. אז ניתן לבצע את שתי ההחלפות הבאות:

- א נותן x ל־ב, ב נותן y ל־ג, ו־ג נותן z ל־א;   המעגל בגרף־ההחלפות הוא א ← ב ← ג ← א.
- א נותן z ל־ג; ג נותן y ל־ב; ו־ב נותן x ל־א;   המעגל בגרף־ההחלפות הוא א → ב → ג → א.

נבדוק את מכפלת־המשקלים של כל אחד מהמעגלים הללו:

- המשקל של הקשת א←ב הוא לכל היותר היחס (הערך של x לפי א / הערך של x לפי ב), כיוון ש־x הוא אחד החפצים בסל של א.
- המשקל של הקשת ב←א הוא לכל היותר היחס (הערך של x לפי ב / הערך של x לפי א), כיוון ש־x הוא אחד החפצים בסל של ב.
- כלומר, המשקל של הקשת א←ב הוא לכל היותר 1 חלקי המשקל של הקשת ב←א.
- אותו הדבר נכון לכל שאר הזוגות של הקשתות בכיוונים מנוגדים.
- לכן, הדבר נכון גם עבור המעגל כולו: מכפלת־המשקלים של המעגל א ← ב ← ג ← א היא לכל היותר אחד חלקי מכפלת־המשקלים של המעגל ההפוך, א → ב → ג → א.
- לכן, אם המכפלה של אחד משני המעגלים הללו גדולה מ־1, אז המכפלה של המעגל ההפוך קטנה מ־1.
- המסקנה היא, שלפחות **לאחד** משני מעגלי־ההחלפה שמצאנו יש מכפלת ערכים שהיא קטנה או שווה ל־1.

כעת יש בידינו מעגל מכוון בגרף ההחלפה, עם מכפלת־ערכים p, כאשר $p\leq 1$. מכל מעגל כזה אפשר לבנות החלפה כמו שהסברנו בהוכחת משפט קודם. לדוגמה, מהמעגל א ← ב ← ג ← א אפשר לבנות החלפה שבה שחקן א נותן לשחקן ב חלק ε_x של חפץ x, שחקן ב נותן לשחקן ג חלק ε_y של חפץ y, וכו'. אם $p<1$ אז ההחלפה מגדילה את הערכים של כל השחקנים, והיא שיפור־פארטו; אם $p=1$ אז ההחלפה לא משנה את הערכים של כל השחקנים, והיא שיפור־פארטו־חלש.

הגודל של ε_x קובע את הגדלים של כל שאר ה־ε־ים בהעברה. נבחר את ה־ ε_x הגדול ביותר שעבורו ההחלפה עדיין אפשרית, כלומר:

- ε_x שווה או קטן מהכמות של x המוחזקת בידי שחקן א,
- ε_y שווה או קטן מהכמות של y המוחזקת בידי שחקן ב,

וכו'. בחירה זו מבטיחה, שבזמן ביצוע ההחלפה, שחקן אחד לפחות, מבין השחקנים שבמעגל, נותן לשחקן הבא אחריו במעגל את **כל** הכמות של אחד החפצים שברשותו (שחקן א נותן את כל חפץ x, או שחקן ב נותן את כל חפץ y, וכו'). כתוצאה מכך, אחת הקשתות במעגל שמצאנו בגרף־הצריכה מתבטלת.

נמשיך כך למצוא מעגלים בגרף־הצריכה ולבצע שיפורי־פארטו (רגילים או חלשים), עד שלא נשארים מעגלים בגרף־הצריכה. בשלב זה, בגרף־הצריכה יש לכל היותר $m+n-1$ קשתות, ולכן בחלוקה המתאימה יש לכל היותר $n-1$ שיתופים.

כאמור, כל החלפה שמבצעים במעגל מבטלת את אחת הקשתות במעגל כלשהו בגרף הצריכה. קשת שהתבטלה לא תהיה עוד חלק ממעגל, ולכן לא תחזור לגרף. מספר הקשתות ההתחלתי בגרף הוא לכל היותר m*n, ולכן מספר ההחלפות שצריך לבצע קטן מ־m*n . לכן, זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי ב־m ו־n. ***

לסיכום, בעזרת המשפטים שראינו בפרק זה, ניתן למצוא חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו, עם n-1 שיתופים לכל היותר, בזמן פולינומיאלי.

מקורות

- Brams and Taylor: "Fair Division" (1996 book), "The Win-Win Solution" (1999 book).
- הקורס של ויליאם גסרך – כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים:http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15
  - מצגת על דונאלד ואיואנה: http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15/trump.pptx
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק – כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי:http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/
- http://fairoutcomes.com/fd.html
- הכללת אלגוריתם "שיתוף מינימלי" לשלושה אנשים או יותר: https://arxiv.org/abs/1908.01669

סיכם: אראל סגל-הלוי.

i Fedor Sandomirskiy and Erel Segal-Halevi (2022): "Efficient fair division with minimal sharing." Operations Research 70.3, 1762–1782.