האקטון אנליזה נומרית:

מגישים:

ליאור וקנין – 208574046
פבל שוורצוב – 319270583
אליאור קרצמן – 313565095
ארתור אדינייב – 314307414
מורדי דבח – 203507017

הסבר על המאמר:

המאמר מציג בפנינו את אחד השימושים העיקריים בשיטת ניטור האוויר.

משתמשים בעצם באיזוטופים רדיואקטיביים כדי להתחכות בעצם אחר הקרינה.

הבעיה היא בחישוב המתמטי של הניטור כאשר מדובר במרחב 3d.

אז מנסים להתגבר על הבעיה באמצעות הערכה מספיק טובה של התפלגות הזיהום ב 2d (בעצם על הקרקע).

פתרון הבעיה :

נרצה להגיע למטריצה (רשת פריסה) ולמצוא את ערכיה כאשר כל נקודה (I,j) מרכזית תייצג את רמת הקרינה בתא בא היא נמצאת.

ננסה לפענח את הסיטואציה ולמצוא ערכים אופטימליים לגודל N^2 ולגודל של R

כך שמהטריצה D לא תיהיה מסובכת מדיי לדירוג ושהפתרון שלה יתכנס (ill condition).

כדי שנוכל למצוא מטריצה הפיכה כדי שנוכל לפתור את הבעיה בעזרת פונקציות אלמנטריות.

מסמך הסבר קוד להאקטון ומדריך למשתמש לכל אלגוריתם

שיטת החצייה – Bisection method:

שיטת החצייה מתאימה אך ורק לשורשים מריבוב אי זוגי. כלומר ש:

מספר קטן מאוד j כך ש- f(a-j)*f(a+j)<0

שיטת החצייה שכתבנו, קודם כל בודקת אם השורש הוא מריבוב אי זוגי. אם כן, נמשיך באלגוריתם. אחרת, נעצור את התוכנית.

Input:

ax – point a
bx – point b
function f
epsilon – point of accuracy. If the answer in in this epsilon bounds, we will stop the function and return the value.

Output:

The function bisection method prints the a and b values along the algorithm. In the end of the algorithm the function prints the result value of the root.

האלגוריתם האיטרטיבי בודק כל פעם איפה השורש. בין נקודת האמצע לנקודה השמאלית או בין האמצע לנקודה הימינית. ולפי זה קובע גבולות חדשים.

אם התוצאה מספיק קרובה לרמת הדיוק שהגדרנו (אפסילון) נעצור ונחזיר את השורש אליו הגענו.

User guide:

First enter a function f in python format. (Example shown in picture)
Then enter a and b values:

Run bisection_method

```
C:\Python34\python.exe C:/Users/ליאור/PycharmProjects/Numerical/bisection_method.py
Enter a function f(x):
x**2-2
Enter range: a and b
a=1
b=2
aX: 1.0, bX: 2.0
aX: 1.0, bX: 1.5
aX: 1.25, bX: 1.5
aX: 1.375, bX: 1.5
aX: 1.375, bX: 1.4375
aX: 1.40625, bX: 1.4375
aX: 1.40625, bX: 1.421875
aX: 1.4140625, bX: 1.421875
aX: 1.4140625, bX: 1.41796875
aX: 1.4140625, bX: 1.416015625
aX: 1.4140625, bX: 1.4150390625
aX: 1.4140625, bX: 1.41455078125

The root is: 1.4141845703125

Process finished with exit code 0
```

שיטת המיתר – Secant method

עבור שיטה זו דרושים שני ניחושים התחלתיים. שיטה זו היא שיטה איטרטיבית למציאת שורשים של פונקציה רציפה בין שני נקודות (שהם הניחושים ההתחלתיים).
נעצור את האלגוריתם כאשר אנו מתקרבים לדיוק מספיק טוב (שאנו הגדרנו – אפסילון).

האלגוריתם:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Input:

Function f
x0 – first point (guess)
x1 – second point (guess)
epsilon – point of accuracy. If the answer in in this epsilon bounds, we will stop the function and return the value.
nMax – number of maximum iterations.

Output:

The function secant method prints the a and b values along the algorithm calculated according to the secant method algorithm. In the end of the algorithm the function prints the result value of the root.

User guide:

First enter a function f in python format. (Example shown in picture)
Then enter x0 and x1 values:

```
C:\Python34\python.exe C:/Users/ליאור/PycharmProjects/Numerical/secant_method.py
Enter a function f(x):
x**2-2
Enter start values: x0 and x1
x0=1
x1=2
x0: 1.0, x1: 2.0
x0: 2.0, x1: 1.3333333333333335
x0: 1.3333333333333335, x1: 1.4000000000000001

The root is: 1.41421143847487
```

שיטת ניוטון-רפסון – Newton-Rapson method:

שיטת ניוטון-רפסון היא שיטה איטרטיבית למציאת שורשים של משוואה. שיטה זו עושה שימוש בנגזרת של נקודה. כלומר, הנגזרת צריכה להיות מוגדרת וצרי לחשב אותה.

חישבנו נגזרת לפונקציה נתונה והחזרנו פונקציה שהיא פונקציית הנגזרת שלה, לפי פתרון נומרי:

```python
def derive(f):
    """
    This function return the numerial calculated derived function of f.
    :param f: the function
    :return: derived function
    """
    h = 10**-10
    return lambda x: (f(x + h) - f(x))/float(h)
```

לפי הגזרה של נגזרת של פונקציה:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

בפיתרון שלנו המשתנה ששואף לאפס שווה ל10 בחזקת מינוס 10 (מספר ממש קטן).

האלגוריתם:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Input:

For derive function:
function f

For newton-Raphson method:
function f
start value x0
epsilon – point of accuracy. If the answer in in this epsilon bounds, we will stop the function and return the value.
nMax – number of maximum iterations.

Output:

For derive function:
the derived function of the function f

For newton-Raphson method:
the algorithm returns false if we finished the while loop without getting close to epsilon.
otherwise, the algorithm returns the value of the root of the function that was

given.
Because, int this algorithm we divide from the value of f(xn) the value of f’(xn), we check first that the f’(xn) is different than zero.

User guide:

First enter a function f in python format. (Example shown in picture)
Then enter x0 start value:

```
C:\Python34\python.exe C:/Users/ליאור/PycharmProjects/Numerical/newtonraphson_method.py
Enter a function f(x):
x**2-2
Enter x0 start value:
1
x0: 1.0, x1: 1.499999958629818
x0: 1.499999958629818, x1: 1.416666673561693

The root is: 1.416666673561693
```

<u>קירוב (אינטרפולציה) לינארית:</u>

נשתמש במתודה זו כשנרצה לחשב ערך בין שני נקודות קרובות (יחסית) אחת לשנייה, ושהנקודות הן ידועות בגרף.

נפתור לפי האלגוריתם שלמדנו בהרצאה.

Input:

x1 – value x1 of the known point x in the graph.
x2 – value x2 of the known point x in the graph.
y1 – value y1 of the known point y in the graph.
y2 – value y2 of the known point y in the graph.
xf – the value of the x point in which we want to approximate its y value.

Output:

The linear approximation of the given values.

שיטת דירוג גאוס – Gauss elimination method:

הרעיון של האלגוריתם הוא לבצע רצף של פעולות אלמנטריות כדי להביא אותה לצורה מדורגת קנונית.

URL: https://github.com/WaizungTaam/Gaussian-Elimination/blob/master/gaussian_eliminate.py

השתמשנו בספריית
numpy
כדי לייצג מטריצות.

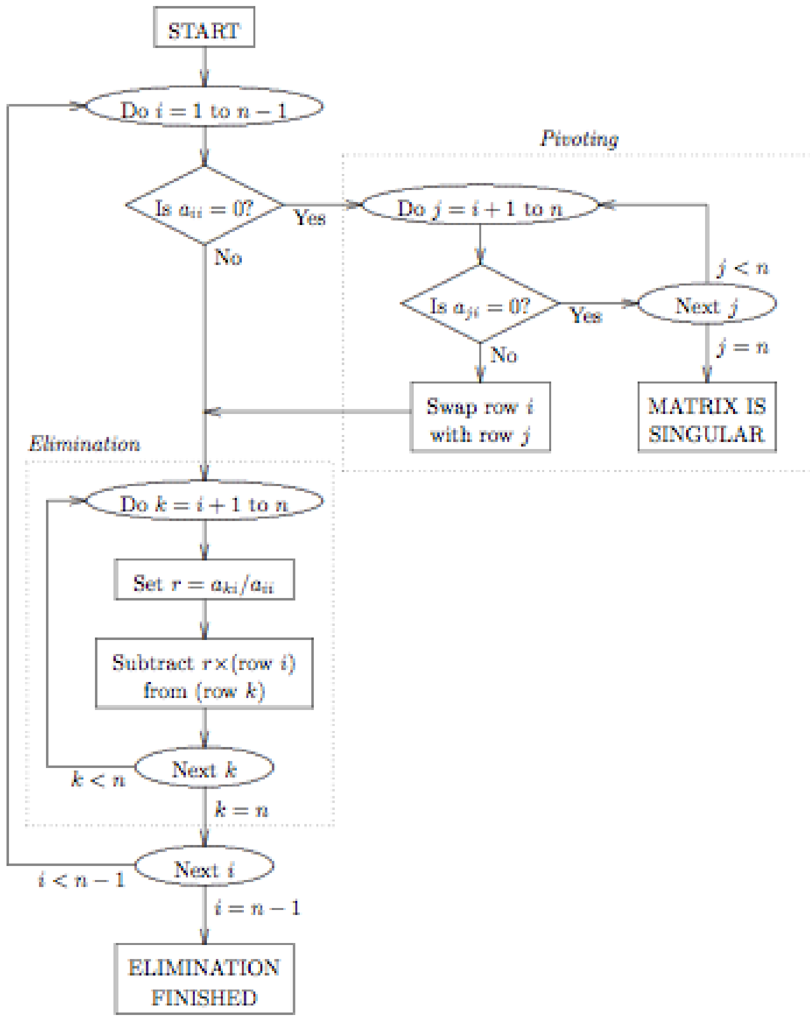
Input:

Matrix A, size of N*N

Output:

The algorithm prints the canonical eliminated matrix A with the result vector as vector b.
The algorithm returns and prints the result vector b.

gauss flowchart:



<u>קירוב (אינטרפולציה) פולינומיאלית</u>:

קירוב פולינומיאלי מקבל מילון (בפייטון) בטור טבלה.
מהמילון אנו יוצרים מטריצה בגודל של המילון. מערכי ה
value
אנו יוצרים וקטור פיתרונות.

את המטריצה מדרגים לקבלת מטריצה מדורגת קנונית ואת ווקטור התוצאות אנו לוקחים ויוצרים ממנו פולינום. באמצעות ספרייה מוכנה בפייטון.

Input:

Dictionary in python with keys and values.

Output:

Polynomial of the approximation.

User guide:

Enter a dictionary as:
{key1:val1, key2:val2, …, keyn:valn}

<u>פיתרון להאקטון:</u>

<u>גודל c:</u>

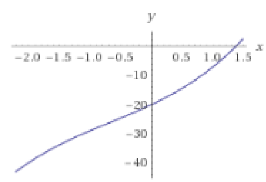
הגודל c מתקבל מתוך חישוב של מחצית השורש האמיתי של משוואת לינאנרדו:
נפעיל שתי שיטות למציאת שורשים.

לפי wolframe alpha השורש הוא x=1.3688

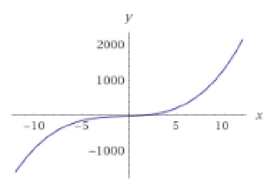
Input:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Plots:



(x from −2.2 to 1.5)



(x from −12 to 12)

Alternate forms:

$$x(x(x+2)+10) - 20$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{26}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right) - \frac{704}{27}$$

$$-\frac{1}{9\left(176+3\sqrt{3930}\right)}\left(-3\sqrt[3]{176+3\sqrt{3930}}\,x+\sqrt[3]{2}\left(176+3\sqrt{3930}\right)^{2/3}-2\sqrt[3]{176+3\sqrt{3930}}-13\times 2^{2/3}\right)\left(3\left(176+3\sqrt{3930}\right)^{2/3}x^2+4\left(176+3\sqrt{3930}\right)^{2/3}x-13\times 2^{2/3}\sqrt[3]{176+3\sqrt{3930}}\,x+3\times 2^{5/6}\sqrt{1965}\,x+176\sqrt[3]{2}\,x+10\left(176+3\sqrt{3930}\right)^{2/3}+2\sqrt[6]{2}\sqrt{1965}\sqrt[3]{176+3\sqrt{3930}}+50\times 2^{2/3}\sqrt[3]{176+3\sqrt{3930}}+2\times 2^{5/6}\sqrt{1965}+230\sqrt[3]{2}\right)$$

Real root: More digits

$$x \approx 1.3688$$

שיטת החצייה – bisection method:

```
"C:\Users\Lior Vaknin\PycharmProjects\Numerial\venv\Scripts\python.exe" "C:/Users/Lior Vaknin/PycharmProjects/Numerial/bisection_method.py"
Enter a function f(x):
x**3+2*x**2+10*x-20
Enter range: a and b
a=1
b=2
aX: 1.0, bX: 2.0
aX: 1.0, bX: 1.5
aX: 1.25, bX: 1.5
aX: 1.25, bX: 1.375
aX: 1.3125, bX: 1.375
aX: 1.34375, bX: 1.375
aX: 1.359375, bX: 1.375
aX: 1.3671875, bX: 1.375
aX: 1.3671875, bX: 1.37109375
aX: 1.3671875, bX: 1.369140625
aX: 1.3681640625, bX: 1.369140625
aX: 1.36865234375, bX: 1.369140625

The root is: 1.3687744140625
```

השורש הוא: x=1.36877
בקירוב של epsilon=10^-4=0.0001

שיטת ניוטון-רפסון – Newton-Raphson:

```
"C:\Users\Lior Vaknin\PycharmProjects\Numerial\venv\Scripts\python.exe"
Enter a function f(x):
x**3+2*x**2+10*x-20
Enter x0 start value:
1
x0: 1.0, x1: 1.4117646718127912
x0: 1.4117646718127912, x1: 1.3693364593869966

The root is: 1.3693364593869966
```

השורש הוא: x=1.3693
הקירוב של הנגזרת h=10^-10 (המספר שקרוב מאוד לאפס – שואל לאינסוף)
בקירוב של epsilon=10^-4=0.0001

שיטת המיתר – secant method:

```
"C:\Users\Lior Vaknin\PycharmProjects\Numerial\venv\Scripts\python.exe"
Enter a function f(x):
x**3+2*x**2+10*x-20
Enter start values: x0 and x1
x0=1
x1=2
x0: 1.0, x1: 2.0
x0: 2.0, x1: 1.3043478260869565
x0: 1.3043478260869565, x1: 1.3579123046578667

The root is: 1.3688074597219246
```

השורש הוא: x=1.3688
בקירוב של epsilon=10^-4=0.0001

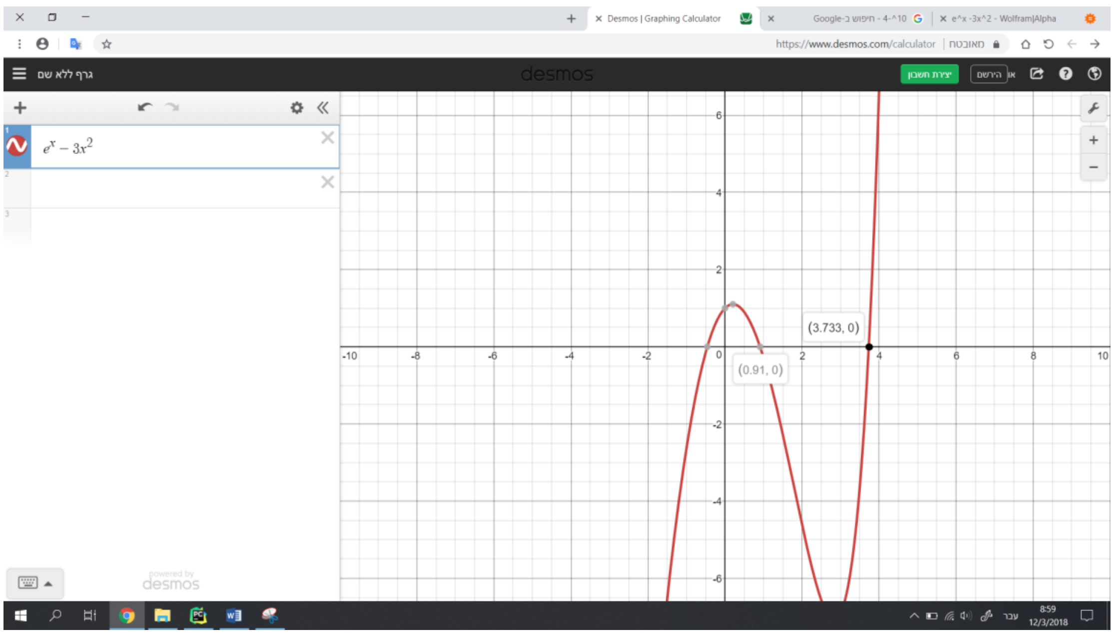
ולכן הגודל c שווה:

c= x/2=0.6844

<u>גודל של מקדם הבליעה:</u>

מקדם הבליעה שווה לאלפית השורש החיובי של המשוואה e^x-3x^2

לפי Desmos:



השורש האמיתי הוא: x=3.733

לפי שיטת המיתר – secant method:

```
"C:\Users\Lior Vaknin\PycharmProjects\Numerial\venv\Scripts\python.exe"
The function f: {e**x-3*x**2}
Enter start values: x0 and x1
x0=3
x1=4
x0: 3.0, x1: 4.0
x0: 4.0, x1: 3.5117043624757907
x0: 3.5117043624757907, x1: 3.680658256169178
x0: 3.680658256169178, x1: 3.745598502519386
x0: 3.745598502519386, x1: 3.732460650522579

The root is: 3.7330790326819776
```

השורש הוא x=3.733
לפי קירוב של epsilon=10^-4=0.0001

לפי שיטת החצייה – bisection method:

```
"C:\Users\Lior Vaknin\PycharmProjects\Numerial\venv\Scripts\python.exe" '
The function f: {e**x-3*x**2}
Enter range: a and b
a=3
b=4
aX: 3.0, bX: 4.0
aX: 3.5, bX: 4.0
aX: 3.5, bX: 3.75
aX: 3.625, bX: 3.75
aX: 3.6875, bX: 3.75
aX: 3.71875, bX: 3.75
aX: 3.71875, bX: 3.734375
aX: 3.7265625, bX: 3.734375
aX: 3.73046875, bX: 3.734375
aX: 3.732421875, bX: 3.734375
aX: 3.732421875, bX: 3.7333984375
aX: 3.73291015625, bX: 3.7333984375

The root is: 3.7330322265625
```

השורש הוא x=3.7330
לפי קירוב של epsilon=10^-4=0.0001

ולכן מקדם הבליעה הוא אלפית השורש שיצא לנו:

מקדם הבליעה = 0.003733 = 3/7330/1000 = x/1000

3)קירוב פולונומיאלי: הכנסנו למילון את ערכי הטבלה :

{2:-3.5,3:1.25,6:0.05}

ופונקציה שמחשבת פתרון של מטריצה, לפנו' **polynomial_approximation**
והפונקציה חישבה את מקדמי הפולינום שאליו קירבנו והחזירה לנו פולינום עם מקדמים אלו.
פתרון עם פונקציה פתירת מטריצה gaussian_eliminate_result:

polynomial_approx | polynomial_halving_method

```python
if __name__ == '__main__':
#     solver = addKwargs(Matrix.iterSOR,n=100,w=1.5)
    p1 = polynomial_approximation({2:-3.5, 3:1.25, 6:0.05},matrixSolver=gaussian_eliminate_result_adapter)
    p1 = Polynom(p1)
    print("f(3.83) = ", p1.eval(3.83))
```

Console

<terminated> polynomial_approx.py [D:\Programs\Programming\Python 3.6.5\python.exe]

```
0.0     1.5     0.75     | 1.2375
0.0     0.0     0.2222222222222221      | -4.605555555555556

36.0    6.0     0.0      | 20.775000000000016
0.0     1.5     0.0      | 16.78125000000001
0.0     0.0     0.2222222222222221      | -4.605555555555556

36.0    0.0     0.0      | -46.35000000000002
0.0     1.5     0.0      | 16.78125000000001
0.0     0.0     0.2222222222222221      | -4.605555555555556

1.0     0.0     0.0      | -1.2875000000000005
0.0     1.5     0.0      | 16.78125000000001
0.0     0.0     0.2222222222222221      | -4.605555555555556

1.0     0.0     0.0      | -1.2875000000000005
0.0     1.0     0.0      | 11.187500000000007
0.0     0.0     0.2222222222222221      | -4.605555555555556

Final matrix A:

1.0     0.0     0.0      | -1.2875000000000005
0.0     1.0     0.0      | 11.187500000000007
0.0     0.0     1.0      | -20.725000000000012

Vector x (result): [-1.2875000000000005, 11.187500000000007, -20.725000000000012]
guess error:  1.136590821460004e-14
f(3.83) =  3.2369162500000073
```

פתרון עם פונ' פתירת מטריצה Matrix.iterGaussSeidel:

polynomial_approx

```python
if __name__ == '__main__':
    solver = addKwargs(Matrix.iterGaussSeidel,n=25)
    print(polynomial_approximation({2:-3.5, 3:1.25, 6:0.05},matrixSolver=solver))
```

Console

<terminated> polynomial_approx.py [D:\Programs\Programming\Python 3.6.5\python.exe]

```
guess #4: [[-278.2208333333333], [515.7708333333334], [6921.375]]
guess #5: [[-1989.1041666666667], [3660.6041666666665], [49644.175]]
guess #6: [[-14242.220833333335], [26179.020833333336], [355645.875]]
guess #7: [[-102001.85416666667], [187457.35416666666], [2547322.675]]
guess #8: [[-730560.2208333333], [1342573.5208333335], [18244726.875]]
guess #9: [[-5232469.354166667], [9615832.854166666], [130673899.675]]
guess #10: [[-37476392.22083333], [68871210.52083333], [935922856.8749999]]
guess #11: [[-268416320.35416663], [493274675.8541666], [6703339477.674999]]
guess #12: [[-1922472208.220833], [3532970132.520833], [48011178700.875]]
guess #13: [[-13769279742.354166], [25304112993.854168], [343869392761.675]]
guess #14: [[-98619404688.22083], [181235083144.5208], [2462888069908.8745]]
guess #15: [[-706339559050.354], [1298055987181.854], [17639888202721.67]]
guess #16: [[-5059000044272.22], [9297037398576.52], [126341777202340.86]]
guess #17: [[-36233962999874.35], [66587963265509.84], [904894888402417.5]]
guess #18: [[-259517703733360.2], [476921481732608.44], [6481108444005316.0]]
guess #19: [[-1858737851867634.0], [3415844074267797.5], [4.641949822162805e+16]]
guess #20: [[-1.331279659254091e+16], [2.446522370374672e+16], [3.324693351089925e+17]]
guess #21: [[-9.534994562912149e+16], [1.752267251843669 8e+17], [2.381237691542171 6e+18]]
guess #22: [[-6.829227854777265e+17], [1.2550224592524554e+18], [1.705508552168342e+19]]
guess #23: [[-4.891282610047082e+18], [8.988819322913442e+18], [1.221532580242143 3e+20]]
guess #24: [[-3.5032724167510303e+19], [6.4380419827792806e+19], [8.748955510636142e+20]]
guess #25: [[-2.5091409767979994e+20], [4.611104426848618e+20], [6.266244860363628e+21]]
done in iteration number :  25
guess error: 6.184809355014152e+21 , result guess:
 [[-2.50914098e+20]
 [ 4.61110443e+20]
 [ 6.26624486e+21]]
            2
-2.509e+20 x + 4.611e+20 x + 6.266e+21
```

פיתרון מטריצת D:

```
M:
 [[1250]
 [1550]
 [1100]
 [1400]]
D:
 [[0.00845397 0.00524882 0.00524882 0.00362924]
 [0.00524882 0.00845397 0.00362924 0.00524882]
 [0.00524882 0.00362924 0.00845397 0.00524882]
 [0.00362924 0.00524882 0.00524882 0.00845397]]
```

חישוב רמת זיהום:

```python
def getDMatrix():
    c = 0.6844
    k=3.23691625
    u = 0.003733
    math.e
    def getRadius(i,j):
        radius = [[150,180,180,206.155],[180,150,206.155,180],[180,206.155,150,180],[206.155,180,180,150]]
        return radius[i][j]

    def getD(i,j):
        return (c*(1+k*150)*math.e**(-u*getRadius(i, j)))/getRadius(i, j)**2

    result = [[getD(i,j) for j in range(4)] for i in range(4)]
    return np.matrix(result)

def CalcC(solver):
    M = Matrix([[x] for x in [1250,1550,1100,1400]])
    D = getDMatrix()
    print("M:\n",M)
    print("D:\n",D)
    return solver(D,M)

if __name__ == '__main__':
    solver = addKwargs(Matrix.iterGaussSeidel,n=50)
#     solver = gaussian_eliminate_result_adapter
    print("vector c: ", CalcC(solver).tolist())
```

calcC מייצר את ווקטור M ומטריצת D לפי המשוואה 1.3 מהמסמך ופותרת את C בהתאם לsolver שהוא פונ' מציאת פתרון למטריצה.

פתרון לפי שיטת gauss elim:

```
<terminated> main.py [D:\Programs\Programming\Python 3.6.5\python.exe]
0.008453967055416407	0.0	0.0	4.336808689942018e-19	| 364.6461831018804
0.0	0.0029955298629080747	0.0	0.0	| 315.467705522975
0.0	0.0	0.00482472744608122	0.0	| 58.10566639163997
0.0	0.0	0.0	-0.006821264759487217	| -506.29462277999477

1.0	0.0	0.0	5.1299096170045397e-17	| 43133.144559423585
0.0	0.0029955298629080747	0.0	0.0	| 315.467705522975
0.0	0.0	0.00482472744608122	0.0	| 58.10566639163997
0.0	0.0	0.0	-0.006821264759487217	| -506.29462277999477

1.0	0.0	0.0	5.1299096170045397e-17	| 43133.144559423585
0.0	1.0	0.0	0.0	| 105312.82275941574
0.0	0.0	0.00482472744608122	0.0	| 58.10566639163997
0.0	0.0	0.0	-0.006821264759487217	| -506.29462277999477

1.0	0.0	0.0	5.1299096170045397e-17	| 43133.144559423585
0.0	1.0	0.0	0.0	| 105312.82275941574
0.0	0.0	1.0	0.0	| 12043.305459427565
0.0	0.0	0.0	-0.006821264759487217	| -506.29462277999477

Final matrix A:

1.0	0.0	0.0	5.1299096170045397e-17	| 43133.144559423585
0.0	1.0	0.0	0.0	| 105312.82275941574
0.0	0.0	1.0	0.0	| 12043.305459427565
0.0	0.0	0.0	1.0	| 74222.98365941965

Vector x (result): [43133.144559423585, 105312.82275941574, 12043.305459427565, 74222.98365941965]
guess error:  0.0
vector c:  [43133.144559423585, 105312.82275941574, 12043.305459427565, 74222.98365941965]
```

פתרון לפי שיטת gauss seidel:

```
Console
<terminated> main.py [D:\Programs\Programming\Python 3.6.5\python.exe]
guess #10: [[42442.46953591368], [105598.2226095677], [12583.358543555729], [74066.9872974825]]
guess #11: [[42713.371368337044], [105475.71148340765], [12368.108681792066], [74100.39645121596]]
guess #12: [[42882.977111866276], [105404.81888356444], [12235.244336681506], [74154.0923082145]]
guess #13: [[42986.432418902084], [105364.28629886082], [12155.074256365242], [74184.62023477105]]
guess #14: [[43048.267651969945], [105341.3573144627], [12107.571997523759], [74201.80338903314]]
guess #15: [[43084.619687773535], [105328.51135370771], [12079.848286606753], [74211.38617165067]]
guess #16: [[43105.69435737601], [105321.37868309385], [12063.876000392811], [74216.68411769539]]
guess #17: [[43117.765160431634], [105317.45175397804], [12054.778068503678], [74219.5889401703]]
guess #18: [[43124.604885841894], [105315.3073438614], [12049.648551338989], [74221.16885048994]]
guess #19: [[43128.44280463728], [105314.14564712421], [12046.783492030856], [74222.021347084]]
guess #20: [[43130.57692587367], [105313.52129842843], [12045.197219110141], [74222.47769032134]]
guess #21: [[43131.75352959108], [105313.18842807566], [12044.326270217882], [74222.71999667565]]
guess #22: [[43132.39692444913], [105313.01241588741], [12043.851925685105], [74222.84757810735]]
guess #23: [[43132.745941628775], [105312.92014336542], [12043.595631838449], [74222.91416152989]]
guess #24: [[43132.933772244694], [105312.87221073067], [12043.458250929492], [74222.94858259398]]
guess #25: [[43133.03405115023], [105312.84755636021], [12043.385203702066], [74222.9661934526]]
guess #26: [[43133.08715092763], [105312.8350129842], [12043.346686369377], [74222.97510009876]]
guess #27: [[43133.11502943181], [105312.82870944795], [12043.326553634917], [74222.9795455114]]
guess #28: [[43133.12953453633], [105312.82558650263], [12043.316128484605], [74222.98173016304]]
guess #29: [[43133.137008287784], [105312.82406534452], [12043.310784893667], [74222.98278384299]]
guess #30: [[43133.14081806765], [105312.82333973984], [12043.308076813957], [74222.98328019891]]
guess #31: [[43133.14273685748], [105312.82300281074], [12043.306721963483], [74222.9835068491]]
done in iteration number :  31
guess error: 3.9368496800307184e-06 , result guess:
 [[ 43133.14368993]
 [105312.82285198]
 [ 12043.30605426]
 [ 74222.9836059 ]]
vector c:  [[43133.14368993351], [105312.82285198335], [12043.306054255878], [74222.98360590306]]
```

וקטור התוצאה הסופית:

```
vector c:  [[43133.14368993351], [105312.82285198335], [12043.306054255878], [74222.98360590306]]
```

נספח א

כל הקודים המלווים, נכתבו על ידנו.
השתמשנו בספריית numpy במהלך פתרון המטריצות.

הקוד היחיד שלקחנו מgithub הוא הקוד של דירוג גאוס – הקישור שממנו לקחנו את הקוד מצורף לעבודה. מצורף הסבר על הקוד ותרשים זרימה שמתאר את זרימת הנתונים באלגוריתם.

בדיקות:

עבור האלגוריתמים שכתבנו בדקנו את התוצאות מול אלגוריתמים מקבילים אליהם שמביאים תוצאה אמינה (wolframe alpha) וראינו שהתוצאות זהות.

עבור האלגוריתמים של מציאת השורשים בדקנו את הקוד עם בדיקות יחידה, pytest.
הכנסנו מספר פונקציות והגבלנו את התוצאה הסופית בבדיקות ל-3 ספרות אחרי נקודה עשרונית.
ואז בדקנו מול התוצאה הצפויה (wolframe alpha) שהתוצאה נכונה באותו קירוב (עבור דלתא שווה 0.001).

דוח מסכם:

התהליך פתרון הבעיה הכוללת התבצע בתהליך של pipeline. כלומר, בכל שלב בפתרון הסתמכנו על נכונות הנתונים מהשלב הקודם.

בנוסף לכך, מנתוני השאלה ולפני ההגעה לפתרון הסופי הסקנו כי בהתאם לרמת הקרינה שהתקבלה כנתון במטריצה M נקבל סידור של רמות הקרינה ובהתאם לכך נצפה לקבל בווקטור C את אותו סידור.
וקטור C תאם את גדלי רמת הקרינה במטריצה M. האיבר השני בווקטור C היה הכי גדול בהתאם לנתוני הקרינה במטריצה M.

הסבר על האלגוריתמים - המשך:

פתרון מטריצה שיטות איטרטיביות:

מבנה שיטה איטרטיבית:

כל שיטה איטרטיבית ניתן לפרק לתהליך:

$$M * X = b$$
$$M = (D + U + L)$$
$$x^{i+1} = G * x^i + H * b$$

נתחיל עם ניחוש x^0 וקטור 0, ונתקדם לווקטור x^N כאשר N מוגדר על ידנו. אם ייתכנס לפני שהגענו ל N נחזיר את התוצאה. תנאי עצירה הוא $x^i - x^{i-1} < e$, כאשר e הוא טווח השגיאה המירבי. אם הניחוש שהתקבל x^i לא מקיים $M * x^i = b$ לא נעצור ונקטין את טווח השגיאה (במימוש שלי באופן שרירותי $e = \frac{e}{10}$). בסוף התהליך נוכל לדעת אם הניחוש שהתקבל מהווה פתרון למטריצה או לא.

```
def iterSolver(self,g,h,result=None,startingGuess=None,maxError=0.001,**kwargs):
    """
    performs x{i+1} = g*x{i} + h*b, stops when reaches n = max iteration or reaches valid guess
    """
    matrixDegree = self.shape[0]
    startingGuess = Matrix([[0] for _ in range(matrixDegree)]) if startingGuess==None else startingGuess
    result = Matrix([[i] for i in result]) if not isinstance(result, np.matrix) else result

    def guessError(guess):
        return abs(result - (self * guess)).max()

    def iteration(n=25):
        currGuess=startingGuess
        i=1
        err = maxError
        while(i<=n):
            nextGuess = g*currGuess + h*result
            if(abs(nextGuess - currGuess).max()<err):
                currGuess = nextGuess
                if(guessError(currGuess)<maxError):
                    break
                else:
                    print("close, but not enough; decreasing range")
                    err = err/10
            currGuess = nextGuess
            i+=1
            print("guess #{}: {}".format(i-1,currGuess.tolist()))
        print("done in iteration number : " , i-1)
        return currGuess

    guess = iteration(**kwargs)
    print("guess error:",guessError(guess),", result guess:\n",guess,'')
    return guess
```

: Jacobi+Gauss Seidel+SOR

נציב בפונקציה של פתרון מטריצה בשיטה איטרטיבית את G,H בהתאם לשיטה:
* נעזרנו בNumpy לצורך חישוב מטריצה הופכית
* בנינו פונקציה לפירוק מטריצה לגורמים (D,L,U)

:Jacobi

$$G = -D^{-1} * (L + U)$$
$$H = D^{-1}$$

:Gauss Seidel

$$G = -(D + L)^{-1} * U$$
$$H = (D + L)^{-1}$$

:SOR

$$0 < w < 2$$
$$G = (D + w * L)^{-1} * ((1 - w) * D - w * U)$$
$$H = w * (D + w * L)^{-1}$$

```
def iterJacobi(self,result,**kwargs):
    lu,d = Matrix.decompose(self,'LU','D')
    dInver = d**-1
    g = -dInver*lu
    h = dInver
    return Matrix.iterSolver(self, g, h, result,**kwargs)

def iterGaussSeidel(self,result,**kwargs):
    dl,u = Matrix.decompose(self,'DL','U')
    dlInver = dl**-1
    g = -dlInver*u
    h = dlInver
    return Matrix.iterSolver(self, g, h, result,**kwargs)

def iterSOR(self,result,w=None,**kwargs):
    w = 2*random_sample() if (w==None or w>2 or w<=0) else w
    d,l,u = Matrix.decompose(self,'D','L','U')
    dwlInver = (d+w*l)**-1
    g = dwlInver * ((1-w)*d -w*u)
    h = w * dwlInver
    print("w: ", w)
    return Matrix.iterSolver(self, g, h, result, **kwargs)
```

קירוב (אינטרפולציה) פולינומיאלית:

נשתמש במתודה זאת על מנת לייצר פולינום שיהווה קירוב פולינומי לפונקציה נקודתית.
ייצגנו פונקציה נקודתית ע"י מילון (מפתח = x, ערך = f(x) כאשר f היא הפונקציה הנקודתית)

נפתור לפי האלגוריתם שלמדנו בהרצאה.
ייצרנו מטריצה כך שכל שורה במטריצה מהווה פתרון של הפולינום הסופי לכל x->f(x) בפונקציה הנקודתית:

$$matrixA = \begin{matrix} (x1)^{n-1} & (x1)^{n-2} & (x1) \\ (x2)^{n-1} & & \\ & & \\ (xn)^{n-1} & & (xn) \end{matrix} \quad | \; vectorB = \begin{matrix} f(x1) \\ \\ \\ f(xn) \end{matrix}$$

ופתרנו את מטריצה זאת ע"י פונקציה פתרון מטריצה כלשהיא, כלומר matrixSolver יקבל פעם את שיטת גאוס-סיידל ופעם אחרת את שיטת SOR.
ווקטור הפתרון:

$$vectorResults = \begin{matrix} zn \\ \\ z1 \end{matrix}$$

פתרון המטריצה במיקום i: zi מהווה מקדמי חזקת x^i בפולינום התוצאה, ממנו ייצרנו פולינום מספריית NumPy.

```
def polynomial_approximation(dict, matrixSolver = gauss_elim):
    """
    :param dict: the dictionary that was given
    :return: result vector as a polynom.
    """
    def createMatrix():
        """
        create the matrix
        :return: the matrix from the dictionary
        """
        size = len(dict.keys())
        return np.matrix([[x ** i for i in range(size - 1, -1, -1)] for x in dict.keys()])

    def createResultsVector():
        """
        :return: the resut vector
        """
        return np.matrix([[y] for y in dict.values()])

#     def unpackVector(vector):
#         return vector.flatten()

    matrixA , vectorB = createMatrix(), createResultsVector()
    vectorX = matrixSolver(matrixA,vectorB)
    if isinstance(vectorX, np.matrix):
        vectorX = vectorX.flatten().tolist()[0]
        print(vectorX)
    return np.poly1d(vectorX)
```