微积分简介: 无穷小量方法

LiouQiouQiou[1]

[1] http://www.github.com/Liouqiouqiou.

(Dated: 2019 年 10 月 8 日)

这是一次对微积分的简单介绍。无穷小量，我们把它看成一种类似于原子的东西，即构成数量的最小的单位。我所做的不过是对数学家 Cavalieri 和 Leibniz 的思想的阐释与注释。我将先介绍一种面积与高度的转换规则，我将其称为 Descartes 转换规则。接着回顾 Leibniz 和 Newton 各自的微积分。最后我们可以用 Descartes 转换规则来统一 Newton 和 Leibniz 的微积分。

这是我曾做助教时讲的，现在终于有时间将其整理出来。台湾的 EpisteMath 网站有一篇文章《Leibniz 如何想出微积分?》，那是我第一次对无穷小量以及 Leibniz 的微积分有了深刻的理解。

Descartes 转换规则　在不考虑有量纲的情况下，我们认为 a 乘以 b 所得到的数可以有两种表示方式:

- 将 a 看成一个长方形的一条边，b 看成长方形的另外一条边，将 $a * b$ 理解成面积 (area);

- 将 b 看成斜率，我们考虑直线 $y = bx$, 当 $x = a$ 时，$y = ab$, 在这里我们将 $a * b$ 理解成一个底边为 a 斜率为 b 的直角三角形的高 (height)。

我将其称为 Descartes 转换规则 (因为就我所知范围内，Descartes 是第一个作这种解释的人), 如图 1所示。

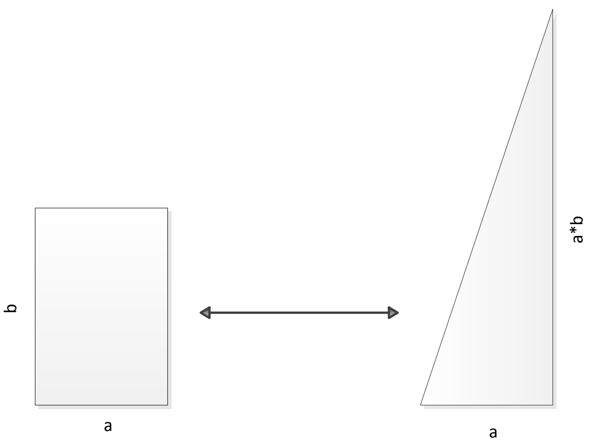

图 1: Descartes 转换规则. 当 a 乘以 b 时，我们最先想到的是面积，用左边的一个长方形来表示它；当然还有其他方式表示 $a * b$, 就是将 b 看出斜率:$y = bx$, 当 $x = a$ 时，$y = ab$, 我们用右边的三角形来表示。

多个乘积的和　在这里我们考虑一个例子:

$$3 * 1 + 2 * 1 + 4 * 1 + 2 * 1 \tag{1}$$

我们应用 Descatres 转换规则，如图 2所示：左图表示求和的每一项的三角形的高；右图表示求和的每一项的面积；中间的图我们可以将其想象成一根竹竿，我们想要知道竹竿有多长，我们可以计算竹子的每一小节有多长，然后将其加起来得到整个竹竿的长度 $(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - e) = 3 + 2 + 4 + 2$；也可以将竹竿的低端放在 e 点，其终端在 a 点，也能知道竹竿的长度为 $a - e$。竹竿长度表示为:$a - e = (a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - e)$，这是 Leibniz 的想法：求和可以用两数值差来表示, 这就是离散形式的微积分基本定理。

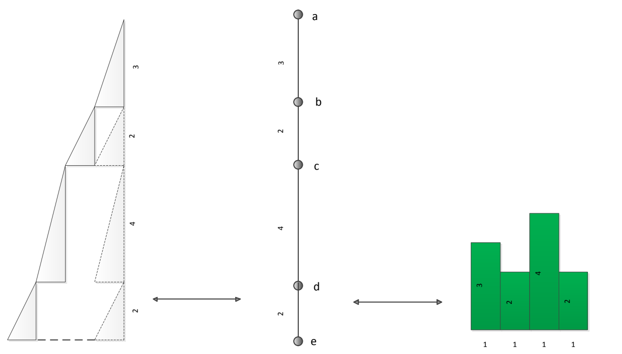

图 2: 多个乘积的和. 左图 (left) 表示的是 3∗1+2∗1+4∗1+2∗1 的 Descartes 转换规则的高度表示; 右图 (right) 是其面积表示; 中间的图 (middle) 可以想象成是一根竹竿，我们想要知道竹竿有多长, 我们可以计算竹子的每一小节有多长, 然后将其加起来得到整个竹竿的长度 $(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e) = 3+2+4+2$;也可以将竹竿的低端放在点, 其终端在 a 点，也能知道竹竿的长度为 $a-e$。竹竿长度表示为:$a-e = (a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)$, 这是 Leibniz 的想法：求和可以用两数值差来表示 (微积分基本定理)。

Leibniz 微积分　Leibniz 考虑一种叫做无穷小量的东西 dx，我们可以将其类似的看出组成物质的原子，这是组成数的最小的数量。类似与我们第二节考虑多个数的和，我们也可以考虑无穷小量的和，有限多个无穷小量的和为 0(宏观上看)，只有无穷多个无穷小量的和可以为一个有限数。$\sum_x dx$ 我们用 $\int_x dx$ 来表示它，这是 Leibniz 引进的符号，用积分号 $\int$ 代替求和号 $\sum$。

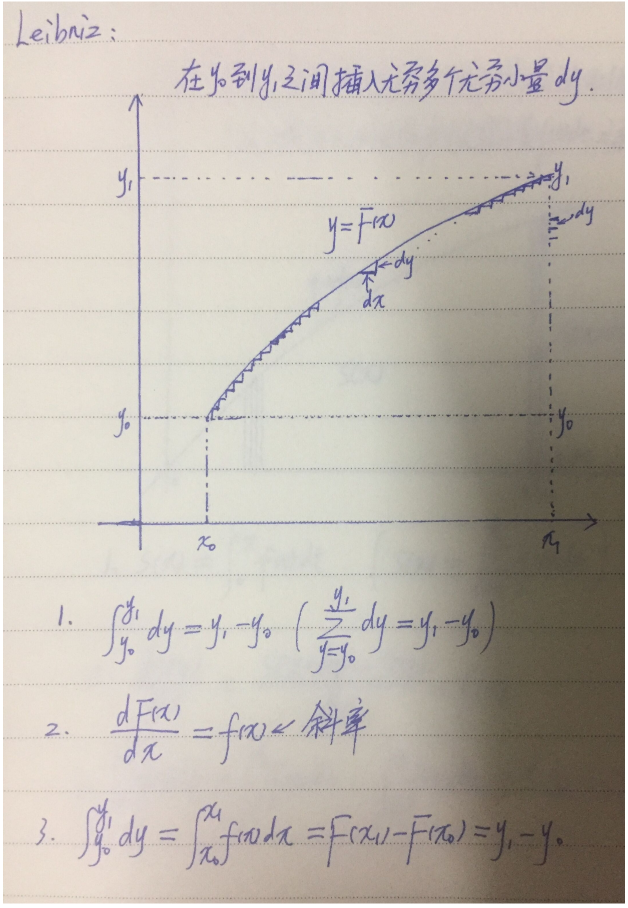

图 3: Leibniz 微积分. 对曲线 $F(x)$ 先微分得 $f(x)dx$, 后积分 $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, 得微积分基本定理:$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x) = F(x_1) - F(x_0)$.Leibniz 式微积分基本定理可以用爬山的例子来加以阐述，有两种方式可以知道你爬了多高。第一种是统计你走过的每一块石阶的高度，加起来就是你爬了多高 ($\int_{y_o}^{y_1} = y_1 - y_0$,$dy$ 表示石阶高度)；第二种是统计你走过的每一块石阶的宽度以及与相邻一块石阶的陡峭度 (可以用斜率表示), 将每一块石阶宽度乘以陡峭度再加起来就是你爬的高度 ($\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0) = y_1 - y_0$；$x_1 - x_0$ 是水平距离，就是你在水平上走了多远，如果不知道陡峭度的话；$f(x)$ 是陡峭度 (斜率),dx 每块石阶的宽度).

首先，假设我们有一根竖着的线，其下端数值标记为 y_0, 其上端数值标记为 y_1, 我们在这根线里插入无穷小量 dy(或者说这个线就是由无穷多个无穷小量 dy 组成的), 所以我们知道线的长度等于无穷多个无穷小量 dy 之和，用符号表示为:$\sum_{y=y_0}^{y_1} = y_1 - y_0$。为了方便我们就用 Leibniz 的积分符号表示:$\int_{y_0}^{y_1} = y_1 - y_0$。如图 3右端所示，图下面公式 1 是对其的数学说明。

其次，想象你正在爬黄山，我们有两种方式来知道你爬了多高，第一种是数数一共爬了多少块石阶，并且测量每一块石阶的高度，把每块石阶的高度加起来就知道你爬了多高；第二种是，我们不测量每一块的高度，我们测量每块石阶的宽度 (没两块石阶的水平间隔), 如果我们只知道每块石阶的宽度，我们并不能知道我们爬了多高，我们只知道我们爬了多远 (水平距离), 如果我们又知道了每一块石阶有多陡 (数学上可以用斜率表示), 那么我们是知道我们能够爬了多高的。如图 3所示，我们在曲线上可以看见很多无穷小三角形，dy 表示三角形的高 (石阶的高度)，dx 三角形的宽 (石阶的宽度),$f(x)$ 表示斜率。根据我们的爬黄山的描述，我们知道 $\int_{y_0}^{y_1} dy = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$。

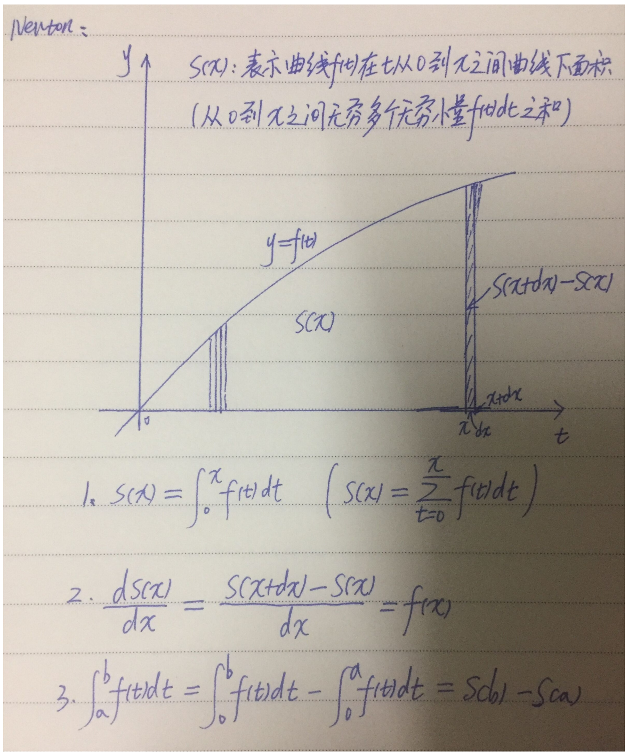

图 4: Newton 微积分. 对 $f(t)$ 先进行积分得:$S(x) = \int_0^x f(t)dt$, 再进行微分 $\frac{dS(x)}{dt} = f(x)$. 曲线下面积 $S(x)$ 的增加等于在 x 处增加一个无穷小量 $f(x)dx$，即 $dS(x) = f(x)dx$. 从 a 到 b 的曲线下面积等于从 0 到 b 曲线下面积减去从 0 到 a 曲线下面积:$\int_a^b f(t)dt = S(b) - S(a)$, 这是 Newton 式微积分基本定理.

Newton 微积分　Newton 当时考虑微积分的时候是用无穷小量观点来思考，但没有用无穷小量的观点来进行写他东西。图 4是其《自然哲学的数学原理》上有的一张图，他当时是用的变化的观点来进行的解释。如图 4，Newton 将 $f(t)$ 看成速度函数，t 看成时间，速度 $f(t)$ 在 t 从 0 到 x 的曲线下面积用 $S(x)$ 来表示，也就是距离。Newton 知道距离的瞬时变化率是速度:$S'(x) = f(x)$。

下面我们用无穷小量的观点来进行讨论。我们先考虑一个例子圆，圆的半径 r 作为自变量，圆的面积为 $S(r) = \pi r^2$，我们将圆的面积看出是在边界上添加环状的无穷小量来组合而成的。故面积的变化在于边界上增加或减少环状无穷小量，在 r 改变 dr 时，dS 是等于环状无穷小量面积: 圆的周长乘以 dr。即 $dS = 2\pi r * dr$。类似的可以考虑三角形，正方形等等。

我们对图 4进行无穷小量观点解释：曲线下的面积可以看出无穷多个柱状的无穷小量之和，曲线下面积的变化在于变化的边界的改变量，故 $dS(x) = f(x)dx$。

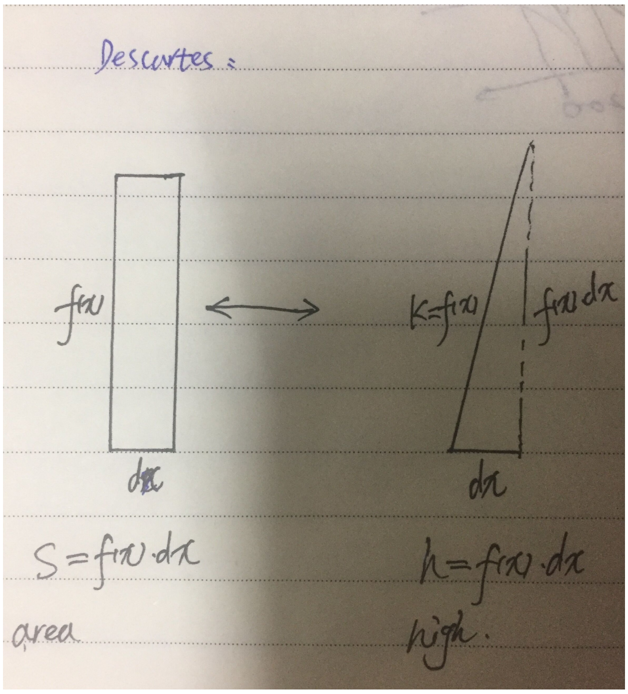

图 5: 无穷小量下的 Descartes 转换规则. 无穷长方形面积 $f(x)dx$y 与无穷小三角形高 $f(x)dx$ 的转换来统一图 4和图 3.

Newton 与 Leibniz 微积分联系:Descartes 转换规则　在这里我们用无穷小量的 Descates 转换规则来统一 Newton 式微积分和 Leibniz 式微积分。只需要将图 4的长方形无穷小量的面积 $f(x) * dx$ 经过 Descartes 转换规则转换成底长为 dx 斜率为 $f(x)$ 的直角三角形的高 $f(x) * dx$ 就可以统一图 3中以无穷小三角形为基础的微积分基本定理和图 4以无穷小长方形为基础的微积分基本定理。