2 Binary Relations Cheatsheet

2.1 Терминология и обозначения

- * $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$ декартово произведение множеств A и B. Cartesian product
- $*A^2 = A \times A$ декартов квадрат множества A. Cartesian square
- * $R \subseteq A \times B$ **бинарное отношение** R, определённое на паре множеств A и B.
- * $R \subseteq A^2$ (гомогенное) бинарное отношение на множестве A. Homogeneous relation (endorelation)
- * a R b элементы a и b **находятся в отношении** R, т.е. $\langle a,b\rangle \in R$. Ordered pair
- * $\mathcal{E}_A = \emptyset$ **пустое** отношение. Empty relation
- * id_A = { $\langle x, x \rangle \mid x \in A$ } тождественное (диагональное) отношение. Identity relation
- * $\mathfrak{U}_A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$ полное (универсальное) отношение. Universal relation

2.2 Операции над отношениями

- $*R \cup S = \{\langle a,b \rangle \mid (aRb) \lor (aSb)\}$ объединение отношений R и S. Union of relations
- $*R \cap S = \{\langle a,b \rangle \mid (aRb) \land (aSb)\}$ пересечение отношений R и S. Intersection of relations
- * $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\} \subseteq B \times A$ отношение, **обратное** к $R \subseteq A \times B$. Converse relation
- $*\overline{R} = \{\langle a,b \rangle \mid \langle a,b \rangle \notin R\}$ дополнение отношения R. Complementary relation
- * R; $S = S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z : (x R z) \land (z S y)\}$ композиция отношений R и S. Composition of relations \circ Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, то R; $S \subseteq A \times C$.
- * $R^{\circ i+1} = R \circ R^{\circ i}$ «композитная» (функциональная) степень отношения R. Functional power При этом $R^{\circ 1} = R$, $R^{\circ 0} = \operatorname{id}_A$. Чаще используется нотация R^i , совпадающая с нотацией Декартовой степени.
- * $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x R y\}$ применение отношения R ко множеству M.
- * Замыкание отношения R относительно свойства P минимальное (по включению) надмножество R, обладающее свойством P.
 - $\circ R^{=}=R^{r}=R\cup \mathrm{id}_{A}$ рефлексивное замыкание отношения $R\subseteq A^{2}$.
 - $\circ R^{\sim} = R^s = R \cup R^{-1}$ симметричное замыкание отношения R. Symmetric closure
 - $\circ R^+ = R^t = \bigcup R^n$ транзитивное замыкание отношения R, где $R^1 = R$, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Transitive closure
 - $\circ R^{\equiv} = ((R^r)^s)^t$ рефлексивное симметричное транзитивное замыкание отношения R. Минимальное отношение эквивалентности, содержащее R. Reflexive symmetric transitive closure
- * Сокращение отношения R минимальное отношение, замыкание которого совпадает с замыканием R.
 - \circ **Рефлексивное сокращение** $R^{\neq} = R \setminus \mathrm{id}_A$ минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием R, то есть $(R^{\neq})^{=} = R^{=}$. Reflexive reduction
 - \circ Симметричное сокращение R^* минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием R, то есть $(R^*)^{\sim} = R^{\sim}$.
 - \circ **Транзитивное сокращение** R^- минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием R, то есть $(R^-)^+ = R^+$. Transitive reduction Транзитивное сокращение R^- отношения R без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание: $R_{\mathrm{DAG}}^- = R \setminus (R \circ R^+) = R \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R^n$.

Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли: $R_{\text{loop-DAG}}^- = (R^{\neq})^- \cup \{(x,x) \mid x \ R \ x\}$.

2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения $R \subseteq M^2$: Properties of homogeneous relations

Свойство		Формальное определение
Рефлексивность	Reflexive	$\forall x \in M : x R x$
Иррефлексивность	Irreflexive	$\forall x \in M : \neg(x R x)$
Корефлексивность	Coreflexive	$\forall x, y \in M : (x R y) \to (x = y)$
Симметричность	Symmetric	$\forall x, y \in M : (x R y) \to (y R x)$
Антисимметричность	Antisymmetric	$\forall x, y \in M : (x R y) \land (y R x) \rightarrow (x = y)$
Асимметричность	Asymmetric	$\forall x, y \in M : (x R y) \to \neg (y R x)$
Транзитивность	Transitive	$\forall x, y, z \in M : (x R y) \land (y R z) \rightarrow (x R z)$
Антитранзитивность	Antitransitive	$\forall x, y, z \in M : (x R y) \land (y R z) \rightarrow \neg (x R z))$
Евклидовость (правая)	Right Euclidean	$\forall x, y, z \in M : (x R y) \land (x R z) \rightarrow (y R z)$
Евклидовость (левая)	Left Euclidean	$\forall x, y, z \in M : (y R x) \land (z R x) \rightarrow (y R z)$
Связность	Semiconnex	$\forall x, y \in M : (x \neq y) \to (x R y) \lor (y R x)$
Сильная связность	Connex	$\forall x, y \in M : (x R y) \lor (y R x)$
Плотность	Dense	$\forall x, y \in M : (x R y) \to \exists z \in M : (x R z) \land (z R y)$

2.4 Отношения эквивалентности

- * Отношение толерантности рефлексивное и симметричное.
- * Отношение эквивалентности рефлексивное, симметричное и транзитивное.
- $*[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}$ класс эквивалентности элемента $x \in A$.

Equivalence class

Tolerance relation

Equivalence relation

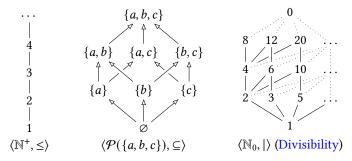
* $A/_R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ — разбиение множества A на классы эквивалентности.

Quotient set Order theory

Preorder

2.5 Отношения порядка

- * Предпорядок (квазипорядок) рефлексивное и транзитивное отношение.
- Partial order * Частичный порядок – рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.
- Linear (total) order
- * Линейный (полный) порядок сильно-связный частичный порядок.
- * Строгий частичный порядок иррефл., антисимм. и транзитивное отношение. Strict partial order
- * **Строгий линейный (полный) порядок** *связный* строгий частичный порядок.
- Strict total order
- * Частично упорядоченное множество упорядоченная пара $\langle M, R \rangle$, где M произвольное множество, $R \subseteq M^2$ — отношение частичного порядка на M. Partially ordered set (Poset)
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ называется **максимальным**, если он *не меньше других* элементов, то есть не существует элемента больше. Дуально, элемент называется минимальным, если он не больше других, то есть нет элемента меньше. Maximal and minimal elements
 - $a \in M$ is **maximal** $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg (a R b) \equiv \nexists b \neq a : (a R b) \equiv \forall b \in M : (a R b) \rightarrow (a = b)$ $a \in M$ is **minimal** $\longleftrightarrow \forall b \neq a : \neg (b R a) \equiv \nexists b \neq a : (b R a) \equiv \forall b \in M : (b R a) \longrightarrow (b = a)$
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M,R \rangle$ называется **наибольшим**, если он *больше всех* элементов. Дуально, элемент называется наименьшим, если он меньше всех элементов. Greatest and least elements $a \in M$ is **maximum** (greatest) $\leftrightarrow \forall b : (b R a)$
 - $a \in M$ is **minimum** (least) $\leftrightarrow \forall b : (a R b)$
- $*(x \le y) \leftrightarrow (x < y) \land \exists z : ((x < z) \land (z < y))$ отношение покрытия (y «покрывает» x). Covering relation \circ «<»— индуцированный строгий частичный порядок: $(x < y) \leftrightarrow (x \le y) \land (x \ne y)$
- * Диаграмма Хассе визуализация частично упорядоченного множества $\langle M,R \rangle$ в виде графа *транзитивного* $cokpaщehus R^-$. Вершины такого графа — элементы множества M, а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют отношению покрытия. Hasse diagram



2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения $R \subseteq X \times Y$: Special type

Special types of binary relations

Отношение	Формальное определение
Injective (left-unique)	$\forall x, z \in X \ \forall y \in Y : (x R y) \land (z R y) \rightarrow (x = z)$
Functional (right-unique)	$\forall x \in X \ \forall y, z \in Y : (x R y) \land (x R z) \longrightarrow (y = z)$
One-to-One	Injective and Functional
One-to-Many	Injective and not Functional
Many-to-One	Not Injective and Functional
Many-to-Many	Not Injective and not Functional
Serial (left-total)	$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x R y)$
Surjective (right-total)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : (x R y)$

2.7 Функции как отношения

* Частичная функция $f: X \to Y -$ Functional бинарное отношение.

Partial function

Function

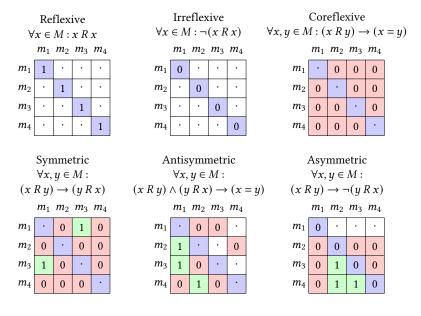
* Функция $f: X \to Y -$ Functional и Serial бинарное отношение.

2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$, определённое на паре множеств $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ может быть представлено в виде матрицы $\|R\|$ размера $n \times m$, элементы которой — 0 или 1: Logical matrix

$$\|R\| = [r_{i,j}]$$
 $r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i \ R \ b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \ R \ b_j \end{cases}$

Пусть $R \subseteq M^2$ — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве $M = \{m_1, \dots, m_4\}$. Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:



Легенда:

$$m_{j}$$
 m_{i} $\boxed{1-m_{i}}$ и m_{j} находятся в отношении R , т.е. m_{i} R m_{j}
 m_{i} $\boxed{0-m_{i}}$ и m_{j} не находятся в отношении R , т.е. m_{i} R m_{j}
 m_{j}
 m_{j}
 m_{i} $\boxed{-m_{i}}$ и m_{j} могут находиться в отношении R , а могут и не находиться