

1 Set Theory Cheatsheet

1.1 Терминология и обозначения

- * **Множество** — неупорядоченный набор уникальных элементов. Set
- * Множество может быть задано с помощью: Set-builder notation
 - перечисления элементов: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество, состоящее из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n . Urelement
 - Например, $\{\square, \clubsuit, 42\}$ — множество, содержащее квадрат, кошку (или кота) и число 42. 42
 - характеристического свойства: $\{x \mid P(x)\}$ — множество элементов, обладающих **свойством** P . Predicate
 - Например, $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$ — множество простых чисел. Prime number
- * $\emptyset = \{\}$ — **пустое** множество. Empty set
- * \mathcal{U} — **универсальное** множество (**универсум**). Universal set
- * $x \in A$ — элемент x **принадлежит** множеству A . Element
 - $1 \in \{1, 2, 3\}$ $\square \in \{\triangle, \square, \circ\}$ $1.25 \in \mathbb{Q}$ $2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- * $x \notin A$ — элемент x **не принадлежит** множеству A .
 - $9 \notin \{1, 2, 3\}$ $\clubsuit \notin \{\square, 42, \{\clubsuit\}\}$ $\pi \notin \mathbb{Q}$ $42 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- * $A \subseteq B$ — множество A является **подмножеством** множества B , т.е. $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$. Subset
 - $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ $\{\{42\}\} \subseteq \{\{42\}\}$ $\{\square, \square\} \not\subseteq \{a, \square, 9\}$ $\{5\} \not\subseteq \{7, \{5\}\}$
- * $A \subset B$ — множество A является **строгим подмножеством** множества B , т.е. $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Strict subset
 - $\{c\} \subset \{a, b, c\}$ $\{42\} \not\subset \{42\}$ $\{9, \clubsuit\} \not\subset \{a, \square, 9\}$ $\{5\} \not\subset \{7, \{5\}\}$
- * $A = B$ — множества A и B содержат одинаковые элементы, т.е. $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$. Extensionality
 - $\{\triangle, a, \{5\}\} = \{a, \{5\}, \triangle\}$ $\{2, \{\square, \square, \square\}, 2\} = \{2, \{\square\}\}$ $\{6, \emptyset\} \neq \{6\}$

1.2 Операции над множествами

- * $|A|$ — **мощность** множества A (число элементов). Cardinality
 - $|\{4, \square, d\}| = 3$ $|\{1, 9, 9, 9, 1\}| = 2$ $|\{\{a, b, c\}, \{3, 5, 9\}\}| = 2$ $|\{1, \{2, 3, 4, \{5\}\}\}| = 2$
- * $2^A = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ — **булеан** множества A (множество всех подмножеств). Powerset
 - $\mathcal{P}(\{1, \square, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\square\}, \{\emptyset\}, \{1, \square\}, \{1, \emptyset\}, \{\square, \emptyset\}, \{1, \square, \emptyset\}\}$
- * $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — **пересечение** множеств A и B . Intersection
- * $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — **объединение** множеств A и B . Union
- * $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — **разность** множеств A и B (дополнение A до B). Set difference
- * $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$ — **дополнение** (до универсума) множества A . Complement
- * $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — **симметрическая разность** множеств A и B . Symmetric difference
- * $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств A и B . Cartesian product
- * $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{n \text{ sets}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-tuple}} \mid a_i \in A_i, i \in [1; n]\}$ — **n -арное декартово произведение** множеств A_1, \dots, A_n .
- * $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-кортеж}} \mid a_i \in A, i \in [1; n]\}$ — **декартова степень** множества A . Tuple

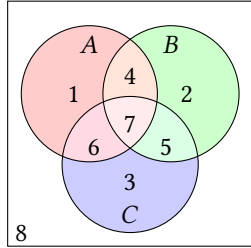
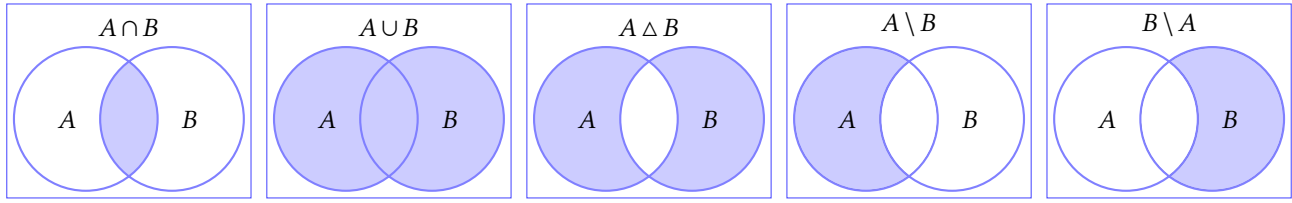
1.3 Некоторые свойства и законы

- * Свойства операций над множествами ($\forall A$):

| | | |
|--|--|--|
| $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $A \triangle \emptyset = A$ |
| $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ | $A \cap \mathcal{U} = A$ | $A \triangle \mathcal{U} = \overline{A}$ |
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ | $A \triangle A = \emptyset$ |
| $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | $A \triangle \overline{A} = \mathcal{U}$ |
| $\overline{\overline{A}} = A$ | $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$ | $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$ |
| $ \emptyset = 0$ | $ 2^A = 2^{ A }$ | $ A^n = A ^n$ |
| $ \mathbb{N} = \mathbb{Q} = \aleph_0$ | $ \mathbb{R} = \mathfrak{c} = 2^{\mathbb{N}} = \beth_1$ | $ A \times B = A \cdot B $ |
| $\emptyset \subseteq A$ | $2^\emptyset = \{\emptyset\}$ | $A^0 = \{()\}$ |
- * Законы де Моргана: De Morgan's laws
 - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- * Законы поглощения: Absorption law
 - $A \cup (A \cap B) = A$
 - $A \cap (A \cup B) = A$
- * Мистические законы:
 - $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
 - $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

1.4 Диаграммы Венна

Venn diagram



На предоставленной слева диаграмме Венна для трёх множеств A, B, C и универсума \mathcal{U} области отмечены номерами. Для заданного списка областей нарисуйте диаграмму Венна и составьте соответствующую формулу, используя термы $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и операторы \cup, \cap .

$$1. S(1, 4, 6, 8) = S(1, 4, 6) + S(8) = \text{// Wolfram //}$$

$$= \text{// } S(1, 4, 6) = A \text{ without } ABC,$$

$$S(8) = \text{outside of } (A + B + C) \text{ // } =$$

$$= (A - ABC) + \overline{A + B + C} =$$

$$= \overline{A} \overline{B} \overline{C} + A + B + C =$$

$$= A \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$$

$$= \overline{A \bar{A}} + \overline{A \bar{B}} + \overline{A \bar{C}} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$$

$$= \bar{B} \cdot (A + \bar{A} \cdot \bar{C}) + \bar{A} \bar{C} =$$

$$= \bar{B} \cdot (A + \bar{C}) + \bar{A} \bar{C} =$$

$$= \bar{B} \cdot A + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \bar{C} =$$

$$= \bar{B} \cdot A + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \bar{C}$$

правило: $A - B = A\bar{B}$

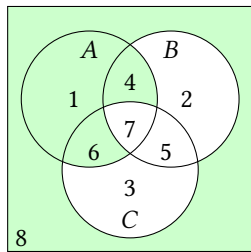
два де Моргана

раскрываем скобку, сокращаем $A\bar{A} = \emptyset$

выносим \bar{B} за скобку

закон поглощения: $A + \bar{A}B = A + B$

раскрываем скобку



$$2. S(1, 5, 6) = S(1, 6) + S(5) = \text{// Wolfram //}$$

$$= \text{// } S(1, 6) = A \text{ without } AB,$$

$$S(5) = BC \text{ without } ABC \text{ // } =$$

$$= (A - AB) + (BC - ABC) =$$

$$= \overline{A} \overline{B} + BC \overline{A} \overline{B} \overline{C} =$$

$$= A \cdot (\bar{A} + \bar{B}) + BC \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) =$$

$$= \overline{A \bar{A}} + \overline{A \bar{B}} + \overline{A \bar{C}} + \overline{B \bar{C}} + \overline{B \bar{C}} =$$

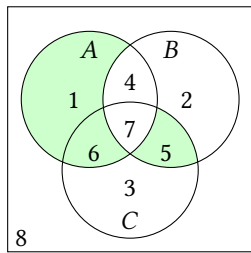
$$= \bar{B} + \bar{A} \bar{B} + \bar{A} \bar{C} + \bar{B} \bar{C} =$$

правило: $A - B = A\bar{B}$

два де Моргана

раскрываем скобку

сокращаем $A\bar{A} = \emptyset$



1.5 Декартово произведение множеств на плоскости \mathbb{R}^2

\mathbb{R}^2 coordinate space

Декартово произведение двух множеств — множество пар. Если представить, что такие пары — элементы пространства \mathbb{R}^2 (точки на плоскости), то возможна следующая геометрическая интерпретация:

