Задача 1: Проверка утверждений теории множеств

Определите истинность каждого утверждения как `true` или `false`. Приведите краткие обоснования. Считайте, что a и b — различные ($a \neq b$) *урэлементы* (атомарные объекты, не являющиеся множествами).

1. $a \in \{\{a\}, b\}$
2. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$
3. $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$
4. $\{a, b\} \in \{a, b\}$
5. $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$
6. $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a\}\}$
7. $\{a, a, a\} \setminus \{a\} = \{a, a\}$
8. $\varnothing \in \varnothing$
9. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
10. $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$
11. $\varnothing \subseteq \varnothing$
12. $\varnothing \subset \varnothing$
13. $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$
14. $\{\varnothing, \varnothing\} \subset \{\varnothing\}$
15. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
16. $a \in \mathcal{P}(\{a\})$
17. $\mathcal{P}(\{a, \varnothing\}) \subset \mathcal{P}(\{a, b, \varnothing\})$
18. $\{a, b\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$
19. $\{a, a\} \in \mathcal{P}(\{a, a\})$
20. $\{\{a\}, \varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, a\})$
21. $\mathcal{P}(\{a, b\}) \supseteq \{\{a\}, \{\varnothing\}\}$

Задача 2: Операции над множествами

Команда кибербезопасности отслеживает различные типы *сетевых угроз*. Они классифицируют угрозы во множества на основе векторов атак:

- $A = \{\text{malware}, \text{phishing}, \text{ddos}, \text{ransomware}, \text{botnet}\}$ (*активно* обнаруживаемые угрозы)
- $P = \{\text{phishing}, \text{social-eng}, \text{ddos}, \text{insider}, \text{malware}\}$ (угрозы, направленные на *людей*)
- $N = \{\text{ransomware}, \text{cryptojack}, \text{ddos}, \text{botnet}, \text{worm}\}$ (угрозы, требующие *сетевого доступа*)

Универсальное множество $T = A \cup P \cup N$ содержит все различные типы угроз, упомянутые выше.

Примечание: Все дополнения ($\overline{X}$) берутся относительно универсального множества T.

Часть (a): Вычислите следующее и интерпретируйте каждый результат в контексте кибербезопасности:

1. $A \cap P$
2. $A \cup N$
3. $(A \cap P) \setminus N$
4. $\overline{A} \cap P$
5. $A \triangle P$
6. $P \setminus (A \cup N)$
7. $\mathcal{P}(\{A, P, N\})$
8. $\left|(P \cup N) \cap \overline{A}\right|$

Часть (b): Команде безопасности необходимо эффективно сортировать угрозы по приоритету. Определите *уровни приоритета*:

- Критический: $C = A \cap P \cap N$ (активные, направленные на людей, сетевые)
- Высокий: $H = (A \cap P) \setminus N$ (активные и направленные на людей, но не сетевые)
- Средний: $M = A \setminus (C \cup H)$ (остальные активные угрозы)

1. Вычислите C, H, M.
2. Определите, является ли $\{C, H, M\}$ разбиением множества A.

Часть (c): Нарисуйте диаграмму Венна, показывающую множества A, P и N со всеми типами угроз, помеченными в соответствующих областях. Используйте цвета для обозначения категорий приоритетов.

Задача 3: Метрики сходства и расстояния

Стриминговые сервисы используют меры сходства для рекомендации контента.

Будем рассматривать *предпочтения пользователей* как множества жанров, которые им нравятся. Например, если Анна любит запутанные сюжеты, её множество предпочтений: $A = \{\text{Фантастика}, \text{Триллер}\}$.

	Фантастика	**Триллер**	**Драма**	**Романтика**	**Ужасы**	**Комедия**	**Боевик**	**Фэнтези**
Анна	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Борис	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
Клара	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Диана	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓

Часть (a): *Коэффициент сходства Жаккара* измеряет степень пересечения вкусов двух пользователей:

$$\mathcal{J}(X, Y) = \frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|} = \frac{\text{общие предпочтения}}{\text{всего уникальных предпочтений}}$$

с соглашением, что $\mathcal{J}(\varnothing, \varnothing) = 1$.

Расстояние Жаккара измеряет, насколько различаются пользователи:

$$d_{\mathcal{J}}(X, Y) = 1 - \mathcal{J}(X, Y)$$

1. Вычислите $\mathcal{J}(X, Y)$ и $d_{\mathcal{J}}(X, Y)$ для всех пар пользователей.
2. Определите, какая пара наиболее похожа, а какая наиболее различна.
3. Постройте граф с пользователями в качестве вершин и рёбрами, взвешенными по коэффициенту сходства Жаккара, за исключением рёбер с весом 0.
4. Постройте $G_{0.25}$: граф с рёбрами, где коэффициент сходства Жаккара ≥ 0.25. Перечислите компоненты связности.

Часть (b): *Косинусное сходство* для множеств можно определить[1] как:

$$\mathcal{C}(X, Y) = \frac{|X \cap Y|}{\sqrt{|X| \cdot |Y|}}$$

Косинусное расстояние равно $d_{\mathcal{C}}(X, Y) = 1 - \mathcal{C}(X, Y)$.

1. Вычислите $\mathcal{C}(X, Y)$ и $d_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для всех пар пользователей.
2. Определите, какая пара наиболее похожа, а какая наиболее различна.
3. Постройте граф с пользователями в качестве вершин и рёбрами, взвешенными по косинусному сходству.

[1] коэффициент Оцука–Очиаи

4. Покажите, что $\mathcal{J}(X, Y) \leq \mathcal{C}(X, Y)$ для любых непустых конечных множеств X и Y. Когда выполняется равенство?

Часть (c): Докажите, что расстояние Жаккара удовлетворяет неравенству треугольника:

$$d_{\mathcal{J}}(A, C) \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) + d_{\mathcal{J}}(B, C)$$

для любых конечных множеств A, B и C.

Часть (d): Покажите, что косинусное расстояние НЕ удовлетворяет неравенству треугольника, предоставив конкретный контрпример. Найдите три непустых множества X, Y и Z такие, что:

$$d_{\mathcal{C}}(X, Z) > d_{\mathcal{C}}(X, Y) + d_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$

Часть (e): Новый пользователь присоединяется с предпочтениями $U = \{\text{thriller}, \text{horror}\}$. Используя коэффициент сходства Жаккара, найдите существующих пользователей со сходством ≥ 0.25 для рекомендации как “пользователи со схожими вкусами”.

Задача повышенной сложности: Разработайте собственную метрику сходства, которая, по вашему мнению, работала бы лучше коэффициента Жаккара для рекомендаций фильмов. Объясните ваше обоснование.

Задача 4: Логические и теоретико-множественные тождества

Эта задача связывает теорию множеств и логические рассуждения, подготавливая вас к формальным доказательствам.

Часть (a): Переведите каждое утверждение в логику первого порядка с кванторами над универсальным множеством U:

1. $A \subseteq B$
2. $A = B$
3. $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Часть (b): Докажите следующие тождества, используя как диаграммы Венна, так и символические рассуждения:

1. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. Законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$
4. Распределительный закон: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Часть (c): Для любого универсального множества U и множества $X \subseteq U$ докажите, что оператор дополнения является:

1. *Инволюцией*: $\overline{\overline{X}} = X$
2. Обращающим порядок (*антимонотонным*): если $X \subseteq Y$, то $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$

Задача 5: Системы координат

Разработчик игр проектирует 2D-головоломку с различными игровыми зонами. Каждая зона определяется конкретными координатными областями в $\mathbb{R}^2$.

Часть (a): Изобразите все игровые зоны на координатной плоскости:
1. Игровая область: $G = [0;8] \times [0;7]$
2. Безопасная зона: $S = (1;4) \times (5;7]$
3. Непроходимая стена: $W = \{\langle x, 4\rangle \mid 0 \leq x \leq 6\}$
4. Зона опасности: $D = \{\langle x, y\rangle \in G \mid y < x \text{ или } y < 4\}$
5. Зоны сокровищ: $T = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \{1,2,3\}, 1 \leq y < 3\}$
6. Арена босса: $B = \{\langle x, y\rangle \in G \mid 16(x-9)^2 + 25y^2 \leq 400\}$

Часть (b): Усиления появляются в узлах решётки (целочисленные координаты) внутри зоны опасности D, исключая стену W и границы G. Подсчитайте количество таких точек.

Часть (c): Игрок начинает в позиции $P_0 = \langle 2, 6\rangle$ и совершает ровно три перехода согласно векторам $v_1 = \langle 4, 0\rangle$, $v_2 = \langle 1, -2\rangle$ и $v_3 = \langle -4, -3\rangle$ (в заданном порядке).
1. Вычислите позицию игрока после каждого хода: $P_i = P_{i-1} + v_i$, для $i = 1, 2, 3$.
2. Определите, в каких зонах находится игрок после каждого хода.
3. Попадает ли игрок когда-либо в арену босса B?

Задача 6: Самореферентные головоломки с множествами

В информатике рекурсивные структуры данных ссылаются на себя. Следующие математические головоломки исследуют аналогичные самореферентные концепции, которые встречаются в программировании, логике и даже философии.

Часть (a): Найдите все множества X и Y, которые удовлетворяют данной системе:

$$X = \{1, 2, |Y|\}$$
$$Y = \{|X|, 3, 4\}$$

Начните с определения возможных значений для $|X|$ и $|Y|$, затем проверьте, какие комбинации дают решение.

Часть (b): Рассмотрим более сложную систему:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$
$$B = \{2, |A|, |C|\}$$
$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

Найдите все верные решения (A, B, C). Объясните, почему некоторые потенциальные решения не работают.

Часть (c): Разработайте собственную *нетривиальную* самореферентную систему множеств, содержащую 2–4 множества.

Задача 7: Нечёткая логика

В реальном мире границы не всегда чёткие. Рост 180 см это высокий? 10°C это тепло? *Нечёткие множества* моделируют эту неопределённость и являются важными в ИИ, машинном обучении и системах управления.

В отличие от классических множеств, где принадлежность бинарна (принадлежит/не принадлежит), нечёткие множества присваивают каждому элементу *степень принадлежности* $\mu(x) \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$, представляющую, насколько "сильно" элемент принадлежит множеству.

Рассмотрите два нечётких множества над $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$F = \{a : 0.4, b : 0.8, c : 0.2, d : 0.9, e : 0.7\}$$
$$R = \{a : 0.6, b : 0.9, c : 0.4, d : 0.1, e : 0.5\}$$

Например, $\mu_F(b) = 0.8$ означает, что элемент b принадлежит нечёткому множеству F со степенью 0.8.

Часть (a): Определите дополнение нечёткого множества S как $\mu_{\overline{S}}(x) = 1 - \mu_S(x)$. Вычислите $\overline{F}$ и $\overline{R}$.

Часть (b): Для объединения определите $\mu_{S \cup T}(x) = \max\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$. Вычислите $F \cup R$.

Часть (c): Для пересечения определите $\mu_{S \cap T}(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$. Вычислите $F \cap R$.

Часть (d): Предложите и обоснуйте определение для $S \setminus T$. Вычислите $F \setminus R$ и $R \setminus F$.

Часть (e): Один нечёткий аналог сходства Жаккара:

$$\tilde{J}_f(F, R) = \frac{\sum_{x \in X} \min\{\mu_F(x), \mu_R(x)\}}{\sum_{x \in X} \max\{\mu_F(x), \mu_R(x)\}}$$

Вычислите $\tilde{J}_f(F, R)$ и соответствующее расстояние $1 - \tilde{J}_f(F, R)$.

Часть (f): Дефаззификация. Предположим, что система запускает предупреждение, если степень принадлежности элемента к $F \cup R$ превышает 0.75. Перечислите все элементы, запускающие предупреждение, с их степенями принадлежности, и кратко обсудите, как изменение данного порогового значения влияло бы на чувствительность системы и количество предупреждений.

Задача 8: Булеаны множеств

Пусть A и B — конечные множества. Для каждого утверждения ниже либо приведите *строгое доказательство*, либо найдите *контрпример*, опровергающий данное утверждение.

1. Если $A \subseteq B$, то $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
3. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
4. $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|}$

Указания по оформлению работы:

- Для вычислительных задач чётко показывайте все шаги решения и рассуждения.
- Для доказательств сформулируйте, что вы доказываете, приведите ясные логические шаги и завершите сочетанием “ч.т.д.” или символом □.
- Для ложных утверждений приведите конкретные контрпримеры.
- Обсуждайте задачи с одногруппниками, но пишите все решения самостоятельно.
- Сдавайте работу в формате PDF с чётко пронумерованными задачами и разборчивым почерком.

Критерии оценки:

- Точность вычислений: 50%
  (Получение правильного ответа)
- Математические рассуждения и качество доказательств: 30%
  (Демонстрация ясного логического мышления)
- Оформление и ясность изложения: 20%
  (Удобство восприятия ваших решений)