应力的定义：

单位面积上的附加内力

$$\tau_0 = \frac{N}{S_0}$$

体力的定义：

连续分布作用于弹性体每个体元上的外力

$$f = lim_{\Delta V -> 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

代表：重力，惯性力

面力的定义：

连续分布作用于弹性力表面上的力

$$T = lim_{\Delta A -> 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

应力向量的定义：

过点Q而外法线单位向量为n的面元上的应力向量

$$T = lim_{\Delta A->0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

应力向量的分解：正应力和剪应力

正应力的大小形式：

$$\sigma_n = T_i n_i$$

剪应力：

$$\tau_0 = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2}$$

应力状态的定义：

x和t固定，时刻t过x点所有面元上应力向量的总体

什么是主应力?什么是应力主平面?

若存在过该点的一个面元，该面元上的应力向量T与外法线方向平行，则称此面元为该点的主平面，称此应力向量为主应力

例题

弹性体内过点Q的一个面元，其外法线单位向量

$\hat{n} = (2/3, -2/3, 1/3)$其上应力方向为$T = (4, -10/3, 0)$，

求：

1. 应力向量的大小

   对应力向量取模有：

$$|T| = \sqrt{4^2 + (-10/3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{244}{9}}$$

2. 应力向量T与n之间的夹角ϕ

$$cos < \phi >= \frac{T \cdot n}{|T||n|}$$
$$= \frac{11\sqrt{244}}{181}$$
$$\phi = arccos(\frac{11\sqrt{244}}{181})$$

3. 该面元上正应力与剪应力的大小

$$
\begin{aligned}
\sigma_n &= T_i n_i \\
&= (4, -10/3, 0) \cdot (2/3, -2/3, 1/3) \\
&= \frac{44}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2} \\
&= \sqrt{\frac{224}{9} - \frac{44^2}{9^2}} \\
&= \sqrt{\frac{80}{81}}
\end{aligned}
$$

应力张量

$$\sigma_{ij}$$

应力分量的第一个指标i表明法线方向

应力分量的第二个指标j表明力的方向

9个应力分量沿面法线方向的应力分量$\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$为正应力，其他在作用面内的应力分量称为剪应力

一点的应力状态：

任意面元上的应力向量均可由9个应力分量得到，9个应力分量足以描述一点的应力状态

柯西应力公式：

$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

例题

$$\begin{gathered} T_1 = \sigma_{j1} n_j \\ = 7 \times 2/3 - 2 \times 1/3 = 4 \\ T_2 = \sigma_{j2} n_j \\ T_3 = \sigma_{j3} n_j \end{gathered}$$

静水压力：所有面元上的应力向量都垂直于面元，这样的应力状态称静水压力

证明：

证明：九个应力分量构成二阶张量

设点Q处应力分量为σ_{ij}，过该点外法线方向为$\hat{n}$的面元上应力向量为$\vec{T}$。设有坐标旋转$Ox_1x_2x_3 \to Ox_1'x_2'x_3'$，变换系数为$\alpha_{ij}$。在新坐标系下，该点处应力分量为$\sigma_{ij}'$，该面元的外法线方向为$\hat{n}'$而应力向量为$\vec{T}'$，则

$$T_i' = \alpha_{iq}T_q = \alpha_{iq}\sigma_{pq}n_p = \alpha_{iq}\sigma_{pq}\alpha_{jp}n_j'$$

$$T_i' = \sigma_{ji}'n_j'$$

$$\sigma_{ij}' = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\sigma_{pq}$$

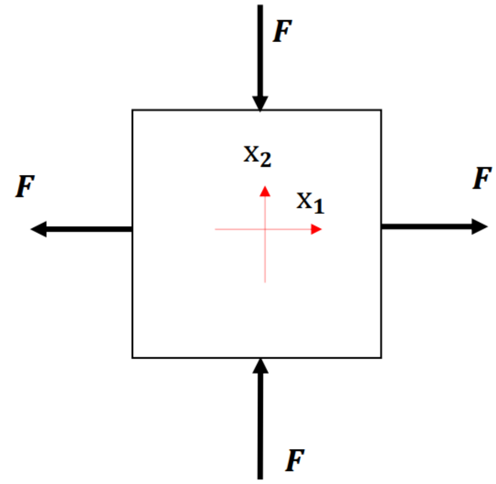
符合二阶张量的定义！

例题

例题

在$Ox_1x_2x_3$中，某点处应力张量如下所示，将$Ox_1x_2x_3$绕x_3轴旋转$\frac{\pi}{4}$得到新坐标系，求新坐标系下的应力张量。

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



解：

先根据转动角度求出坐标变换系数

$$n_{ij} = \begin{bmatrix} cos45 & cos45 & 0 \\ cos45 & cos135 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再根据：$\sigma'_{ij} = n_{ij}\sigma_{ij}$即可得到新坐标系下的应力张量

定义：纯剪应力状态

- 如果一个应力张量在某个坐标系$Ox_1x_2x_3$具有形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则称此应力张量所对应的应力状态为关于坐标轴Ox_1方向和Ox_2方向的**纯剪应力状态**。

运动微分方程平衡微分方程

运动微分方程：

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho u_i''$$

处于静力平衡：

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0$$

剪应力互等原理:

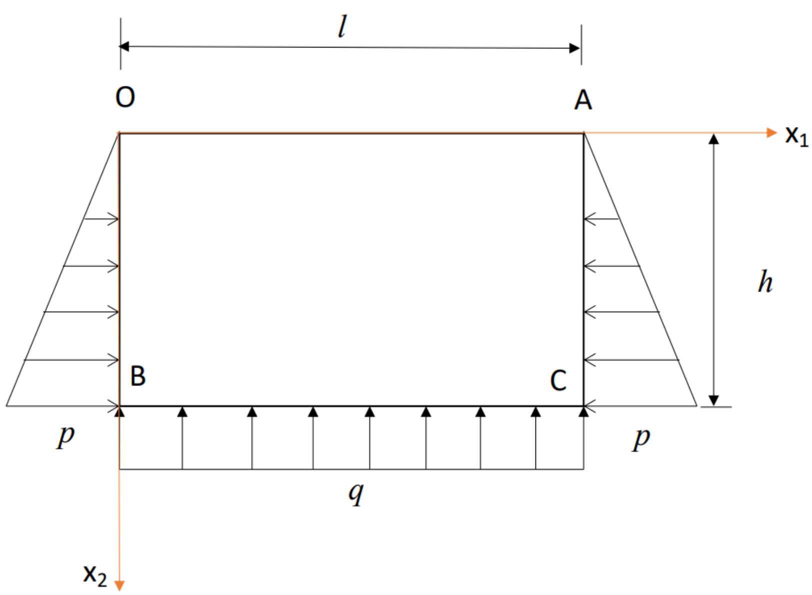
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

应力边界条件：

弹性体边界上的应力值与边界面上给定的表面力之间的关系

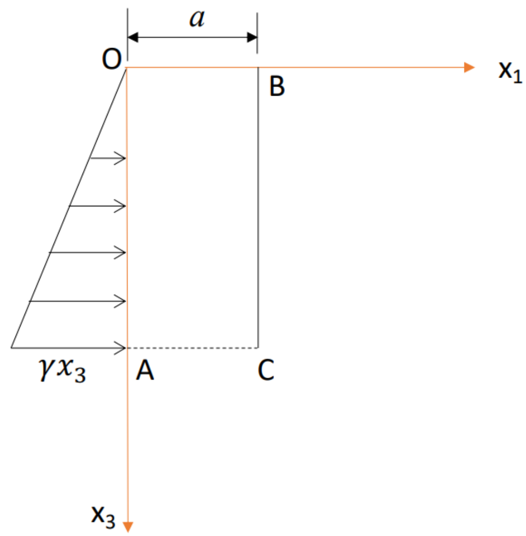
例题

下图弹性体内应力张量的分量有$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$，而$\sigma_{11}$、$\sigma_{22}$及$\sigma_{12}$都是$x_1$及$x_2$的函数。已知该弹性体边界面上所受的面力如图所示，试写出应力边界条件。



练习：

下图为一挡土墙。设土对墙侧面OA作用的压强是随深度而线性增加的，即弹性体内应力张量的分量有$p=\gamma x_3$，γ是单位体积土的重量。试写出OA、OB及BC面的边界条件。



主应力

弹性体内任意点P处应力张量为σ_{ij}，过该点外法向单位向量为$\hat{n}$的面元上应力向量为：

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

主平面：

若存在过该点的一个面元，该面元上的应力向量T与外法向平行，则称此面元为该点的主平面，称主平面法向为该点的应力的主方向

在主平面上，剪应力分量为零，如果以σ表示正应力，则：

$$T_i = \sigma n_i$$

而根据柯西应力公式有：

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

所以

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i$$
$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta ij) n_i = 0$$

例题

给定坐标系下应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求主应力和主方向

为了求解主应力和主方向，我们需要计算应力张量的特征值和对应的特征向量。特征值表示主应力，特征向量表示主方向。

首先，我们可以写出应力张量的特征值方程：

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda I) = 0$$

其中，λ是特征值，I是单位矩阵。

将具体的应力张量代入特征值方程，得到：

$$\begin{vmatrix} -\lambda & s & 0 \\ s & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

计算上述行列式，我们得到特征值方程：

$$\lambda^3 + \lambda s^2 = 0$$

解这个方程，可以得到三个特征值：

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = -s, \quad \lambda_3 = 0$$

接下来，我们需要求解每个特征值对应的特征向量。

对于特征值$\lambda_1 = s$，我们需要求解方程组：

$$(\sigma_{ij} - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$是特征向量。

代入具体数值，我们得到方程组：

$$\begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ s & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

通过高斯消元法或其他方法求解上述方程组，我们可以得到特征向量$\mathbf{v}_1$。由于特征向量只能确定到一个比例因子，通常我们会将其归一化。

$$-sv_{11} + sv_{11} = 0$$
$$sv_{11} - sv_{21} = 0$$
$$-sv_{31} = 0$$
$$\text{解得} n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

同样的方法，我们可以求解特征值$\lambda_2 = -s$对应的特征向量$\mathbf{v}_2$。

对于特征值$\lambda_3 = 0$，我们需要求解方程组：

$$(\sigma_{ij} - \lambda_3 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix}$是特征向量。

代入具体数值，我们得到方程组：

$$\begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

通过高斯消元法或其他方法求解上述方程组，我们可以得到特征向量$\mathbf{v}_3$。同样，我们可以将其归一化。

最后，主应力为特征值，即$\sigma_1 = s$，$\sigma_2 = -s$，$\sigma_3 = 0$，主方向为对应的归一化特征向量，即$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$。

请注意，由于特征向量只能确定到一个比例因子，主方向并不唯一，但其方向相同。因此，存在多个解。

主平面：

最大应力平面

最大正应力平面

最大剪应力平面：

法线评分最大与最小主应力方向夹角的平面

例题

已知弹性体内某点处应力张量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

求该点处的最大应力、最大正应力及最大剪应力，并指出他们的作用面的方向

要求该点处的最大应力、最大正应力和最大剪应力，我们需要首先计算应力张量的特征值。特征值表示主应力。

应力张量的特征值方程为：

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda I) = 0$$

其中，λ是特征值，I是单位矩阵。

代入具体的应力张量，我们得到特征值方程：

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

计算上述行列式，我们得到特征值方程：

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

解这个方程，可以得到三个特征值：

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1$$

特征值的大小表示应力的大小，因此最大应力为$\lambda_1 = 2$。对应的最大正应力为$|\lambda_1| = 2$，最大剪应力为$|\lambda_2 - \lambda_3| = 0$。

接下来，我们需要求解每个特征值对应的特征向量。

对于特征值$\lambda_1 = 2$，我们需要求解方程组：

$$(\sigma_{ij} - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$是特征向量。

代入具体数值，我们得到方程组：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

通过高斯消元法或其他方法求解上述方程组，我们可以得到特征向量$\mathbf{v}_1$。由于特征向量只能确定到一个比例因子，通常我们会将其归一化。

同样的方法，我们可以求解特征值$\lambda_2 = -1$和$\lambda_3 = -1$对应的特征向量$\mathbf{v}_2$和$\mathbf{v}_3$。

最大应力的作用面的方向即为对应的归一化特征向量，即$\mathbf{n}_1$。

最大正应力的作用面的方向也是$\mathbf{n}_1$。

最大剪应力的作用面的方向是$\mathbf{n}_2$和$\mathbf{n}_3$所张成的

平面，即$\mathrm{Span}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$。

请注意，由于特征向量只能确定到一个比例因子，主方向并不唯一，但其方向相同。因此，存在多个解。

例题

设均匀各向同性弹性体密度为ρ，所受体力为$f(x,t)$，应力场和位移场分别为$\sigma_{ij}(x,t)$和$u(x,t)$

1. 写出运动微分方程

运动微分方程：

$$\sigma_{ij,j} + f = \rho u_t''$$

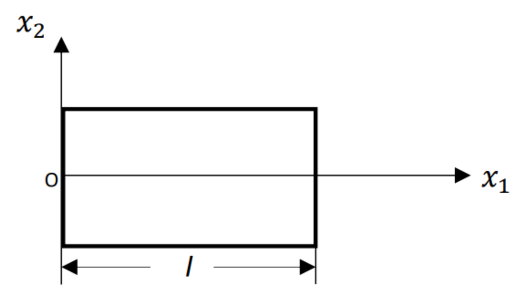
2. 若应力张量为$\sigma_{ij} = -p\sigma_{ij}$，其中$p = p(x,t)$，试证明此时运动微分方程形式为$-\Delta p + f = \rho u_t''$

解：

$$\sigma_{ij} n_i = -p\delta_{ij} n_i = -pn_j$$
$$\text{则有}: -pn_j + f = \rho u_t''$$
$$-p\frac{\partial}{\partial x_j} + f_i = \rho u''$$
$$-\Delta p + f_i = \rho u_t''$$

例题

6. （6 分）如图所示，长度为、l 宽度为 h 的平板处于平衡状态，板内应力分量为 $\sigma_{11}=qx_1x_2$，$\sigma_{22}=0$，$\sigma_{12}=c\left(\frac{h^2}{4}-x_2^2\right)$，$\sigma_{31}=\sigma_{32}=\sigma_{33}=0$，其中$q$、$l$、$h$为已知常数。利用平衡微分方程（不计体力）得到系数 c 为________。



平衡微分方程有：

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

$$\text{又因为不计体力}f_i,\text{故}\sigma_{ij,j}=0$$

对σ_{11}求关于x_1的导数有：$\frac{\sigma_{11}}{\partial x_1}=qx_2$

对$\frac{\sigma_{12}}{\partial j}=-2cx_x$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{3}\sigma_{ij}=0$$

了解：

最大剪应力平面:

最大剪应力平面是指在一个物体内部或结构体系中，剪切应力达到最大值的平面。

应力摩尔圆:

应力莫尔圆以一个圆形图形表示平面应力状态，圆心代表平均应力。圆周上的点代表不同方向的应力状态。应力莫尔圆的横轴表示正应力，纵轴表示剪应力。对于平面上的每个点，根据它的正应力和剪应力，可以在应力莫尔圆上找到对应的点