1.指标

1.写出$t_i=\sigma_{ij}n_j$的展开式

其中i是自由指标，j是哑指标，对i分类，对j展开有：

$$
\begin{aligned}
i=1, t_1=\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3\\
i=2, t_2=\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{23}n_3\\
i=3, t_3=\sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2+\sigma_{33}n_3
\end{aligned}
$$

2.写出$a=A_{ij}b_ic_j$的展开式

其中i,j是哑指标，展开有：

$$
\begin{gathered}
a=A_{11}b_1c_1+A_{12}b_1c_2+A_{13}b_1c_3+\\
A_{21}b_2c_1+A_{22}b_2c_2+A_{23}b_2c_3+\\
A_{31}b_3c_1+A_{32}b_3c_2+A_{33}b_3c_3
\end{gathered}
$$

3.对下列式子指出有几个自由指标，几个哑指标，几个方程

1. $e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$

有2个自由指标，0个哑指标，6个方程

2. $\tau_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$

有2个自由指标，0个哑指标，6个方程

3. $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \rho f_i = \rho u_i''$

有1个自由指标，1个哑指标，3个方程

2.kronecker符号的性质

1. $a_j\delta_{ij} = a_i$
2. $A_{kj}\delta_{ik} = A_{ij}$

证明：

1. $\delta_{ij}\delta_{ij}=3$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}=3$$

2. $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=3$

令$k=j$，则上式转换为$\delta_{ij}\delta_{ij}\delta_{jj}$

其中δ_{jj}恒等于1，故转化为上一个问题

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}=3$$

3.排列符号

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{偶排列}\\ -1 & \text{奇排列}\\ 0 & \text{当}i,j,k\text{中任意2个相等}\end{cases}$$

e.g.

1. $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$
2. $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$

将任意2个指标互换位置，值反号

练习

1. $\epsilon_{ijk}\delta_{ij}$

$= 0$

2. $\hat{e_i} \times \hat{e_j}$

$= \epsilon_{ijk}\hat{e_k}$

证明：$\epsilon_{kij}C_{ij} = 0$成立的充分必要条件是$C_{ij} = C_{ji}$

充分性：

$$\epsilon_{kij}C_{ij}$$
$$=\epsilon_{kij}C_{ji}$$
$$=\epsilon_{kij}C_{ij}$$
$$=-\epsilon_{kij}C_{ij}$$
$$\text{则有：}2\epsilon_{kij}C_{ij}=0$$
$$\epsilon_{kij}C_{ij}=0$$

必要性:

$$\epsilon_{kij}C_{ij}=0$$
$$\text{令}i=j,j=i\text{有：}$$
$$\epsilon_{kji}C_{ji}=0$$
$$\text{又根据排列符号的变换性质：}$$
$$-\epsilon_{kij}C_{ji}=0$$
$$\text{故可知}C_{ij}=C_{ji}$$

利用排列符号表示向量的叉乘

$$a\times b=\epsilon_{ijk}a_ib_je_k$$

符号表示

$$标量场\phi的梯度 grad\phi = \bigtriangledown\phi = e_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

$$矢量场u的散度 div\, u = \bigtriangledown\cdot u = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$向量场u的旋度 curl\, u = \bigtriangledown\times u = \epsilon_{ijk}e_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

$$拉普拉斯算子\ \bigtriangledown^2 = \bigtriangledown\cdot\bigtriangledown = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}$$

必考：

$$\begin{aligned}
&\bigtriangledown\times\bigtriangledown\times u\\
&=\bigtriangledown\times\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}e_i\\
&=\epsilon_{lmi}\frac{\partial}{\partial x_m}\epsilon_{ijk}\frac{u_k}{\partial x_j}e_l\\
&=\epsilon_{lmi}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m\partial x_j}e_l
\end{aligned}$$

逗号和指标记号表示空间导数：

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

用上标点表示对时间的导数：

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Kronecker符号与排列符号的关系

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

练习：

1. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$

$= \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{jk}$

$= \delta_{kk}\delta_{kk} - \delta_{kk}\delta_{kk}$

$= 0$

2. $\epsilon_{ikl}\epsilon_{lkj}$

$= \epsilon_{lik}\epsilon_{lkj}$

$= \delta_{ik}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kk}$

$= \delta_{ij} - \delta_{ij}$

$= 0$

证明：

$$
\begin{gathered}
a \times (b \times c) \\
= a \times (\epsilon_{lmn} b_l c_m e_n) \\
= \epsilon_{ijk} a_i \epsilon_{lmj} b_l c_m e_k \\
= \epsilon_{jki} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m e_k \\
= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) a_i b_l c_m e_k \\
= \delta_{kl}\delta_{im} a_i b_l c_m e_l - \delta_{km}\delta_{il} a_i b_l c_m e_k \\
= a_i c_i b_k e_k - a_i b_i c_k e_k \\
= (a \cdot c) b - (a \cdot b) c
\end{gathered}
$$

坐标变换

定义：新坐标系下各基向量与原坐标各基向量的夹角(方向余弦)

$$n_{ij} = e_i \cdot e_j = cos < e'_i, e'_j >$$

$$n_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

点坐标和向量坐标旋转变换

$$x'_i = n_{ij} x_j$$
$$x_i = n_{ji} x'_j$$

例题

一速度矢量$u = (u_1, u_2, u_3)$，坐标系$Ox_{1,2,3}$绕Ox_3轴旋转90°，成为新坐标系$Ox'_1x'_2x'_3$，求速度矢量在新坐标下的表述

$$n_{ij} = \begin{bmatrix} cos90 & cos0 & cos90 \\ cos180 & cos90 & cos90 \\ cos90 & cos90 & cos0 \end{bmatrix}$$

$$u' = n_{ij}(u_1, u_2, u_3)' = (u_2, -u_1, u_3)'$$

变换系数性质

$$det\, n_{ij} = e_1(e_2 \times e_3) = 1$$

张量

1. 零阶张量(标量)

设有一个量，它有$3^0 = 1$个分量，在上述2个直角坐标系中分别为$\phi(x_1, x_2, x_3)$以及$\phi'(x_1', x_2', x_3')$，当按$x_i' = n_{ij}x_i$变换时，如果：

$$\phi'(x_1', x_2', x_3') = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

则称此量为零阶张量或标量，它是坐标变换下的不变量

2. 一阶张量(向量)

$3^1=3$个有序分量

当坐标轴按$x_i'=n_{ij}x_i$变换时，称这个量为一阶张量或者向量

3. 二阶张量

设有一个量，它有$3^2=9$个有序分量，在上述两个直角坐标系中这个量的分量分别为T_{ij},T_{ij}'，当坐标轴按$x_i'=n_{ij}x_i$变换时，如果这两组分量满足：

$$T_{ij}'=n_{im}n_{jn}T_{mn}$$
$$\text{或}T_{ij}=n_{mi}n_{nj}T_{mn}'$$

则称这个量为二阶张量，记为$T=T_{ij}$，也可写成3阶矩阵的形式

证明两点距离是标量

$n_{ij}n_{ik} = \delta_{jk}$

$$
\begin{gathered}
d^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i) \\
x'_i = n_{ij}x_j, y'_i = n_{ij}y_i \\
d'^2 = (x'_i - y'_i)(x'_i - y'_i) \\
= n_{ij}n_{ik}(x_j - y_j)(x_k - y_k) \\
= \delta_{jk}(x_j - y_j)(x_k - y_k) \\
= (x_j - y_j)(x_j - y_j) \\
= d^2
\end{gathered}
$$

证明$a \cdot b$是标量

$$
a_i b_i = n_{ij}n_{ik}a_j b_k = \delta_{jk}a_j b_k = a_j b_j
$$

性质

1. 张量的对称性和反对称性不因坐标系变换而改变

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

其中$A_{ij} + A_{ji}$为对称张量, $A_{ij} - A_{ji}$为反对称张量

2. 球张量和偏张量

$$A_{ij} = \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij} + (A_{ij} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij})$$

式1为球张量，式2为偏张量

证明

1. 证明克罗内克符号δ_{ij}为二阶张量

$$\text{要证明}\delta'_{ij} = n_{ip}n_{jq}\delta_{pq}$$

$$\text{根据}\delta_{ij}\text{的定义，在新旧坐标系中有：}$$

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\text{又因}n_{ip}n_{jq}\delta_{pq} = n_{iq}n_{jq} = \delta_{ij}$$

$$\text{则：}\delta'_{ij} = n_{ip}n_{jq}\delta_{pq}$$

$$\text{得证，克罗内克符号为二阶张量}$$

2. 证明排列符号ϵ_{ijk}为三阶张量

$$\text{即证明：}\epsilon'_{ijk} = n_{il}n_{jm}n_{kn}\epsilon_{lmn}$$

$$\text{根据排列符号的定义，在新旧坐标系中有：}$$

$$\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

$$\epsilon_{ijk}det\,n = \epsilon_{lmn}n_{il}n_{jm}n_{kn}$$

$$\text{又因为}det\,n = 1$$

$$\text{则：}\epsilon_{ijk}det\,n = \epsilon_{lmn}n_{il}n_{jm}n_{kn} = \epsilon'_{ijk}$$

计算

$$\text{二阶张量}A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{两坐标系间变换系数}n_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据坐标变换有：

$$A'_{ij} = n_{im} n_{jn} A_{mn}$$

$$A'_{11} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} n_{1i} n_{1j} A_{ij}$$

计算

$$\text{内积}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, b = [1, -2, 2]$$

$$C_i = A_{ij} b_j$$

$$D_j = b_i A_{ij}$$

$$\text{将} T_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{写成对称张量和反对称张量}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求二阶张量$T_{ij}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$的特征值和特征向量

解：特征方程$\left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-2]$$

$$=(1-\lambda)\lambda(\lambda-3)=0$$

→三个特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$

- $\lambda_1=3$时，$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j^{(1)}=0$

$$\begin{bmatrix}1-3&1&0\\1&2-3&1\\0&1&1-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(1)}\\n_2^{(1)}\\n_3^{(1)}\end{bmatrix}=0\rightarrow\hat{n}^{(1)}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{e}_1+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{e}_2+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{e}_3\right)$$

- $\lambda_2=1$时，$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j^{(2)}=0$

$$\begin{bmatrix}1-1&1&0\\1&2-1&1\\0&1&1-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(2)}\\n_2^{(2)}\\n_3^{(2)}\end{bmatrix}=0\rightarrow\hat{n}^{(2)}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_3\right)$$

- $\lambda_2=0$时，$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j^{(3)}=0$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(3)}\\n_2^{(3)}\\n_3^{(3)}\end{bmatrix}=0\rightarrow\hat{n}^{(3)}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_3\right)$$

- 求不变量：

$$\mathrm{I} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$$

$$\mathrm{II} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = 3$$

$$\mathrm{III} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$