6.1 z变换定义及收敛域

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

上式两端取双边拉普拉斯变换，得

$$F_{sb}(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

令$z = e^{sT}$，即有

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}, \text{双边}z\text{变换}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}, \text{单边}z\text{变换}$$

特别的，如果$f(k)$为因果序列，则单边，双边z变换相等，统称单边双边z变换均为z变换

即

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

收敛域

当幂级数收敛时，z变换才存在，即满足绝对可积条件：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

同样的，它也是序列$f(k)$的z变换存在的充分条件

例题：

例1 求$\delta(k)$的 z变换。

解： $$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)=1$$

其单边、双边z变换相等，其收敛域为整个z平面。

例2 求有限长序列 $f(k)=\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-2)$ 的双边z变换。

解： $$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=-1}^{1}z^{-k}=z+1+z^{-1}$$

根据绝对可和条件：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|=|z|+1+\left|z^{-1}\right|<\infty$

收敛域为： $0<|z|<\infty$ 整个z平面收敛

例3 求因果序列 $f(k)=a^k\varepsilon(k)$ 的z变换(式中a为常数)。

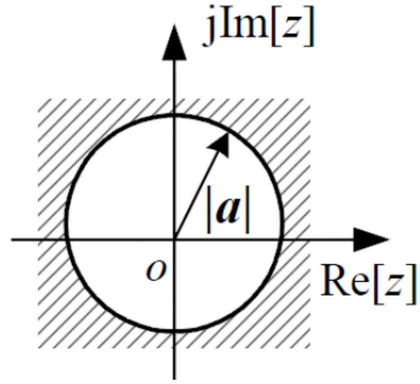
解： $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$

仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$f(k)=a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a}$$

收敛域为 $|z|>|a|$

（某一圆之外）



离散序列的收敛域情况分类

离散序列的收敛域情况分类

序列特性	收敛域特性
有限长序列	常为整个平面
因果序列	某个圆外区域
反因果序列	某个圆内区域
双边序列	(若存在)环状区域

特别的，对于双边z变换必须表明收敛域，

对于单边z变换，其收敛域是某个圆外区域，可省略

常用序列的z变换

$$\delta(k) \longleftrightarrow 1, \quad \text{整个}z\text{平面}$$

$$f_1(k) = a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow F_1(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$f_2(k) = -a^k \varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow F_2(z) = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$\delta(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}, \quad |z| > 0$$

$$\begin{matrix} \varepsilon(k) \\ -\varepsilon(-k-1) \end{matrix} \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad \begin{matrix} , & |z| > 1 \\ , & |z| < 1 \end{matrix}$$

6.2 z变换性质

1. 线性

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1$$
$$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z),$$
$$max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < min(\beta_1, \beta_2)$$

合成后，收敛域至少是$F_1(z), F_2(z)$收敛域的交集

2. 移位特性

- 双边z变换的移位

$$f(k \pm m) \leftrightarrow z^{\pm} F(z)$$

- 单边z变换的移位

$$f(k-m) \leftrightarrow z^{-m} F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m) z^{-k}$$
$$f(k+m) \leftrightarrow z^{m} F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$$

即移位之后的部分 = 已经在单边的部分 + 之前在负半轴的部分

特别的，若$f(k)$为因果序列

$$f(k-m) \leftrightarrow z^{-m} F(z)$$
$$f(k-m)\epsilon(k-m) \leftrightarrow z^{-m} F(z)$$

3. k域反转，仅适用双边z变换

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

$$f(-k) \leftrightarrow F(z^{-1}), \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

例题：

例1： $2\delta(k)+3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2+\frac{3z}{z-1}, \quad |z|>1$

例2： $f(k)=2^{-|k|}$，**求** $f(k)$ **的双边** z **变换** $F(z)$**。**

解：

$$f(k)=2^{k}\varepsilon(-k-1)+2^{-k}\varepsilon(k)$$

$$2^{k}\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z-2}, \quad |z|<2$$

$$2^{-k}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z}{2z-1}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2z}{2z-1}-\frac{z}{z-2}=\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}, \quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

例3： 求如下周期为N的有始周期性单位序列的 z变换。

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$$

解：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN) \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN} = \frac{1}{1-z^{-N}} = \frac{z^N}{z^N-1}, |z|>1$$

例4： $f(k)=\varepsilon(-k)$，求双边z变换。

解：

$$\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$$

$$\varepsilon(-k) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1} = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$$

4. z域尺度变换

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

$$a^k f(k) \leftrightarrow F(\frac{z}{a}), |a|\alpha < |z| < |a|\beta$$

5. 序列乘k(z域微分)

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

$$kf(k) \leftrightarrow (-z)\frac{d}{dz}F(z)$$

例题：

例1： $a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解:
$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$
$$a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}=\frac{z}{z-a}$$

例2： $\cos(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解: $\cos(\beta k)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})\longleftrightarrow \frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{j\beta}}+\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{-j\beta}}$

例3： **求** $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ **的 z 变换。**

解:
$$a^{k-1}\varepsilon(k-1)\longleftrightarrow \frac{z^{-1}z}{z-a}=\frac{1}{z-a},\quad |z|>a$$
$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{1}{z^{-1}-a},\quad |z|<\frac{1}{a}$$

利用齐次性，k域和z域同时乘以 a 得：

$$a^{-k}\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{a}{z^{-1}-a},\quad |z|<\frac{1}{a}$$

例4：求 $f(k)= k\,\varepsilon(k)$ 的z变换$F(z)$。

<解法1>

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k\varepsilon(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2},\quad |z|>1$$

<解法2>

$$f(k+1) = (k+1)\varepsilon(k+1) = (k+1)\varepsilon(k) = f(k)+\varepsilon(k)$$

两边取z变换： $zF(z)-zf(0) = F(z)+\dfrac{z}{z-1}$

$$kf(k) \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

6. 时域卷积

$$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$$

收敛域取交集

7. 部分和

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$$

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z), max(\alpha, 1) < |z| < \beta$$

例题：

$$
\begin{aligned}
f(k) * \epsilon(k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\epsilon(k-i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)\epsilon(k-i) \\
&\text{由部分和性质可得} \\
&= \frac{z}{z-1}F(z)
\end{aligned}
$$

6.3 初值定理和终值定理

初值定理

由象函数直接求序列的出自$f(M)$，

$$
f(M) = \lim_{z \to \infty} z^m F(z)
$$

特别的，对于因果序列有：

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

终值定理

如果序列存在终值，即

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty}f(k)$$

则序列的终值

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

6.4 逆z变换：幂级数和部分分式展开

$F(z)$的逆z变换

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz,-\infty<k<\infty$$

应用：`L10 Z变换`

6.5 差分方程的z变换解

一样的方法，就是注意序列移序后变换

`L11-Z变换P25-P34`

6.6 系统函数$H(z)$

一样的方法

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$$

`L11-Z变换P35-P38`

6.7 系统函数与系统特性

系统函数与系统特性

1、离散系统的零点和极点：

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_m)}{(z-P_1)(z-P_2)\cdots(z-P_n)}=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(z-\xi_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-P_i)},\quad m\le n$$

零极点增益形式

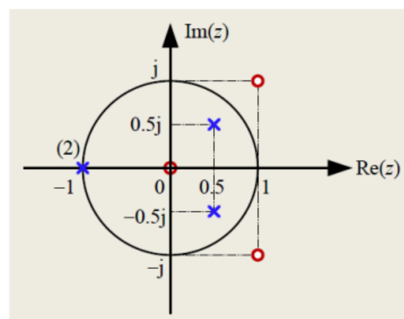
其中：ξ_i，$i=1,2,\cdots$，m，称 $H(z)$ 的零点；在z平面用o表示。

p_j，$j=1,2,\cdots$，n，称 $H(z)$ 的极点。在z平面用×表示。

例：离散时间LTI系统的系统函数

$$H(z)=\frac{z(z-1-\mathrm{j})(z-1+\mathrm{j})}{(z+1)^2(z-0.5-\mathrm{j}0.5)(z-0.5+\mathrm{j}0.5)}$$

可得$H(z)$的零极点分布图。



结论：

1. $H(z)$的极点在单位圆内，对应$h(k)$按指数规律衰减
2. 极点在单位圆上，一阶极点对应$h(k)$为稳态分量
3. 极点在单位圆外，对应$h(k)$按指数规律增长

6.8 离散系统稳定性判据

离散系统稳定性判据（因果系统）

(1) 离散系统稳定的时域充要条件： $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$

(2) 离散系统稳定性的Z域充要条件：

若LTI离散系统的系统函数$H(z)$的收敛域包含单位圆，则系统为稳定系统。

若LTI离散因果系统稳定，要求其系统函数$H(z)$的极点全部在单位圆内。

(2) ***H*(*z*) 极点是0.4和-0.6，在单位圆内，故系统稳定。**

(3) 将*H*(*z*)/*z*进行部分分式展开，得到

$$H(z)=\frac{1.4z}{z-0.4}-\frac{0.4z}{z+0.6}\quad |z|>0.6$$

$$h(k)=\left[1.4(0.4)^{k}-0.4(-0.6)^{k}\right]\varepsilon(k)$$

(4) 求阶跃响应

$$Y(z)=F(z)H(z)=\frac{z^{2}(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

$$Y(z)=\frac{2.08z}{z-1}-\frac{0.93z}{z-0.4}-\frac{0.15z}{z+0.6}\quad |z|>1$$

$$g(k)=\left[2.08-0.93(0.4)^{k}-0.15(-0.6)^{k}\right]\varepsilon(k)$$

阶跃响应

$$Y(z)=F(z)H(z)$$