推导:在均匀球壳中引力场和引力势的连续性

解:

对于引力势有:

$$\delta V = G\frac{\delta m}{r}$$

其中r是观察点道球心的距离

对于δm球壳的单位质量:

$$\delta m = 4\pi r^{'2}\sigma dr^{'}$$

其中σ为球壳密度，代入有:

$$\delta V = G\frac{4\pi r^{'2}\sigma}{r}dr'$$

1. 当$r > R_2$时

等式两边取积分有:

$$V = \frac{4\pi G\sigma}{r}\int_{R_1}^{R_2} r^{'2}dr'$$

解得:

$$V = \frac{4\pi G\sigma}{3r}(R_2^3 - R_1^2)$$

2. 当 $R_1 < r < R_2$时

分段积分有:

$$V = \int_{R_1}^{r} G\frac{\delta m^{'}}{r}dr^{'} + \int_{r}^{R_2} G\frac{\delta m^{''}}{r^{''}}dr^{''}$$

其中$\delta m^{'} = 4\pi r^{'2}\sigma dr^{'}, \delta m^{''} = 4\pi r^{''2}\sigma dr^{''}$

代入并解得:

$$V=\frac{2\pi G\sigma}{3}(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r})$$

3. 当$r<R_1$时

同理有

$$V=\int_{R_1}^{R_2}G\frac{\delta m^{''}}{r^{''}}dr^{''}=2\pi G\sigma(R_2^2-R_1^2)$$

综上有:

$$V(r)=\begin{cases}2\pi G\sigma(R_2^2-R_1^2) & r<R_1\\ \frac{2\pi G\sigma}{3}(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r}) & R_1<r<R_2\\ \frac{4\pi G\sigma}{3r}(R_2^3-R_1^2) & r>R_2\end{cases}$$

又因为引力场可以通过对引力位求梯度确定，则有:

$$F(r)=\nabla V(r)$$

$$F(r)=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \frac{2\pi G\sigma}{3}(\frac{2R_1^3}{r^2}-2r) & R_1<r<R_2\\ -\frac{4\pi G\sigma}{3r^2}(R_2^3-R_1^3) & r>R_2\end{cases}$$

对R_2取左右极限讨论其连续性有:

$$\lim_{r\to R_2^+}V(r)=\frac{4\pi G\sigma}{3R_2}(R_2^3-R_1^3)$$

$$\lim_{r\to R_2^-}V(r)=\frac{4\pi G\sigma}{3R_2}(R_2^3-R_1^3)$$

$$\lim_{r\to R_2^+}F(r)=-\frac{4\pi G\sigma_0}{3R_2^2}(R_2^3-R_1^3)$$

$$\lim_{r\to R_2^-}F(r)=-\frac{4\pi G\sigma_0}{3R_2^2}(R_2^3-R_1^3)$$

故引力场和引力势在R_2界面连续

同理对R_1取左右极限讨论其连续性有:

$$\lim_{r\to R_1^+} V(r) = 2\pi G\sigma(R_2^2 - R_1^2)$$
$$\lim_{r\to R_1^-} V(r) = 2\pi G\sigma(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\lim_{r\to R_1^+} F(r) = 0$$
$$\lim_{r\to R_1^-} F(r) = 0$$

故引力场和引力势在R_1界面连续

至此，推导完毕。