本构关系

线弹性体内一点处的应力张量各分量为该点应变张量各分量的线性齐次方程

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}$$

其中C_{ijkl}为弹性系数张量，有$3^4 = 81$个分量

各向同性弹性体的广义胡克定律

各向同性：在材料内任一点处沿任何方向弹性性质都一样，弹性系数张量的每个分量的值都不随坐标系旋转而改变

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

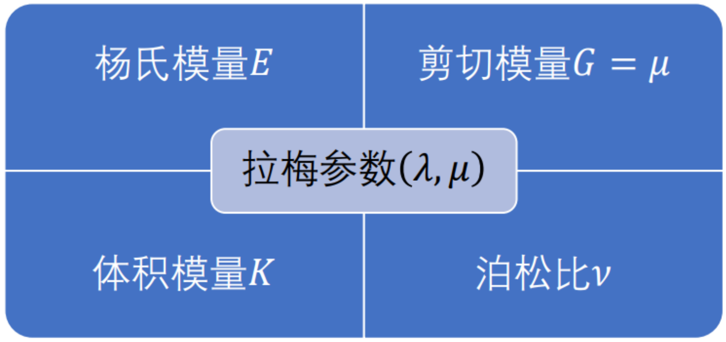
只有2个独立参数μ和λ，称为$Lame$参数

各向同性线弹性体的应变能密度

$$W = \frac{1}{2}\lambda(e_{kk})^2 + \mu e_{ij}e_{ij}$$

物理常数与$lame$参数之间的关系

2.3 物理常数与Lamé参数之间的关系



	$\boldsymbol{\lambda, G}$	$\boldsymbol{\lambda, \nu}$	$\boldsymbol{G, \nu}$	$\boldsymbol{E, \nu}$
$\boldsymbol{E} =$	$\dfrac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\dfrac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2G(1+\nu)$	
$\boldsymbol{G} =$		$\dfrac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$
$\boldsymbol{K} =$	$\lambda + \dfrac{2G}{3}$	$\dfrac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\dfrac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$
$\boldsymbol{\nu} =$	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda + G)}$			

2.4 各弹性常数的取值范围

- $\mu \geq 0$
- $E > 0, K > 0$
- $-1 < \nu < \frac{1}{2}$
  - $\nu = 0.25$的材料称为泊松体
  - $\nu \to 0.5$时，$K \to \infty$，材料不可压缩
- $\lambda > 0$

应力/应变球张量与偏张量

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\sigma_{ij}$$
$$\epsilon_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3}\delta_{ij}$$

例题

各向同性均匀弹性体内的位移为

$$u_1 = x_1x_2 + 2x_2x_3,$$
$$u_2 = x_1x_3^2 + 2x_2,$$
$$u_3 = x_1x_2x_3$$

1. 求点$(1,3,-2)$处的应变张量场及转动张量场

$$\text{应变张量：} e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$
$$\text{转动张量：} w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

2. 求过点$(1,3,-2)$沿$\hat{n} = 0 \cdot e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3$

$$\text{正应变} e = e_{ij} n_i n_j$$

例题

根据胡克定律，线弹性体的本构关系为$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$，其中$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$

1. 证明：$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$
$$\text{将} e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \text{代入上式}$$
$$\text{有}: \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$$
$$\text{又因为：线弹性体有} u_{k,l} = u_{l,k}$$
$$\text{故} \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$$

2. 对各向同性线弹性体，$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$，其中$\lambda$和$\mu$是拉梅参数，对各向同性线弹性体，请写出(1)用应变表示应力的表达式 (2)用应力表示应变的表达式

(1) 用应变表示应力的表达式：

根据胡克定律，线弹性体的本构关系为 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$，其中 $e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$。
对各向同性线弹性体，$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$，其中 λ 和 μ 是拉梅参数。

将 C_{ijkl} 的表达式代入胡克定律的关系式中：

$$\sigma_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \cdot \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$$

简化上述表达式，得到用应变表示应力的表达式：

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \cdot \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \cdot \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$$

(2) 用应力表示应变的表达式：

要从 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$ 的关系式中得到用应力表示应变的表达式，我们需要将 e_{kl} 表达式中的 $u_{k,l}$ 和 $u_{l,k}$ 消去。

根据应变张量的定义，我们有 $e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$，可以整理得到 $u_{k,l} = 2e_{kl} - u_{l,k}$。

将上述表达式代入胡克定律的关系式中：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(2e_{kl} - u_{l,k})$$

整理上述表达式，得到用应力表示应变的表达式：

$$\sigma_{ij} = 2C_{ijkl} e_{kl} - C_{ijkl} u_{l,k}$$

例题

将某一小球放入高压容器内，在静水压力为$P=0.45MPa$的作用下，测得体积应变为$\theta=e_{kk}=-3.6\times10^{-5}$，若泊松比$v=0.3$，求该物体的杨氏模量$E$

解：

设:

$$\theta=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=\sigma_{kk}$$

而

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-P$$

$$H=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=-3P=-1.35\times10^{6}Pa$$

根据各向同性的胡克定律

$$e=\frac{1-2v}{E}H$$

$$e=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}=-3.6\times10^{-5}$$

故

$$E = \frac{1 - 2v}{e} H = 1.5 \times 10^4 N/mm^2$$