5.1 引入

1. 对于分析连续时间LTI系统的完全响应

在时域有：零输入影响(齐次解) + 零状态响应($x(t) * h(t)$)

在频域有：仅零状态响应，且要求输入信号绝对可积，系统稳定

2. 如何分析连续时间LTI系统的系统特性

在时域有：由系统响应$h(t)$描述

在频域有：由系统频率响应$H(jw)$描述，但只适用于稳定系统

5.2 拉普拉斯变换的定义

双边拉普拉斯

背景：因为有些函数不满足绝对可积条件，故用一衰减因子$e^{-\sigma}t$乘信号$f(t)$，使得乘积信号$f(t)e^{-\sigma t}$当$t- > \infty$时，信号幅度趋近于0，从而满足绝对可积

令$s = \sigma + jw$，则得到双边拉普拉斯变换对

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds$$

其中$F_b(s)$称为$f(t)$的象函数，$f(t)$称为$F_b(s)$的原函数

拉普拉斯变换时在复平面中，以拉普拉斯变换为工具对系统进行复频域分析

收敛域

只有选择适当的σ值，才能使积分收敛，信号$f(t)$的双边拉普拉斯变换才存在

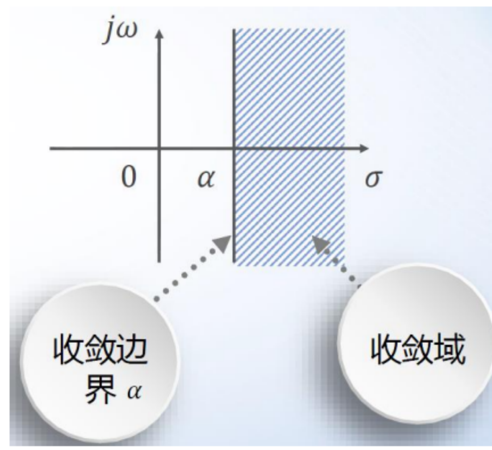
收敛域：使$f(t)$拉氏变换存在的σ取值范围

例子：

例1 因果信号$f_1(t)= e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求其拉普拉斯变换。

解： $$F_{1b}(s)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{(s-\alpha)}[1-\lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha\\ \text{不定}, & \sigma=\alpha\\ \text{无界}, & \sigma<\alpha\end{cases}$$



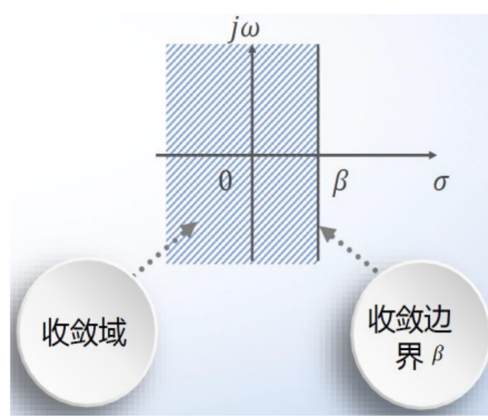
可见，对于因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求其拉普拉斯变换。

解：

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{\beta t} e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}[1-\lim_{t\to-\infty} e^{-(\sigma-\beta)t} e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & \sigma<\beta\end{cases}$$



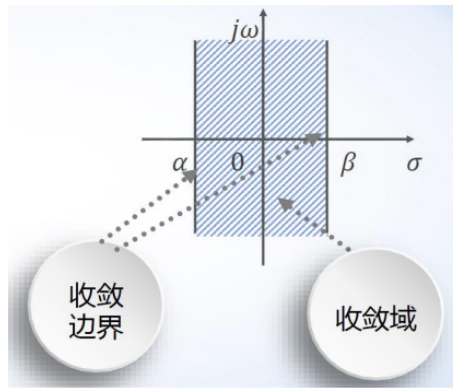
可见，对于反因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma<\beta$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

例3 双边信号 $f_3(t)=f_1(t)+f_2(t)=\begin{cases} e^{\beta t}, & t<0 \\ e^{\alpha t}, & t>0 \end{cases}$

求其拉普拉斯变换。

解：其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)=F_{1b}(s)+F_{2b}(s)$

$$F_b(s)=F_{b1}(s)+F_{b2}(s)=\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s-\beta}$$



仅当$\beta>\alpha$时，其收敛域为 $\alpha<\mathrm{Re}[s]<\beta$ 的一个带状区域，如图所示。

例4 求下列信号的双边拉氏变换。

$f_1(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)$， $f_2(t)=-e^{-3t}\varepsilon(-t)-e^{-2t}\varepsilon(-t)$，

$f_3(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(-t)$

解： $f_1(t)\longleftrightarrow F_1(s)=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s+2}$ $\quad$ $\mathrm{Re}[s]=\sigma>-2$

$f_2(t)\longleftrightarrow F_2(s)=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s+2}$ $\quad$ $\mathrm{Re}[s]=\sigma<-3$

$f_3(t)\longleftrightarrow F_3(s)=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s+2}$ $\quad$ $-3<\sigma<-2$

可见，象函数相同，但收敛域不同。双边拉氏变换必须标出收敛域。

结论

1. 对于双边拉普拉斯变换而言，$F_b(s)$和收敛于一起，可以唯一地确定$f(t)$
2. 不同的信号可以有不同的$F_b(s)$，但收敛域不同

单边拉普拉斯

因为信号均有初始时刻，故设其初始时刻为坐标原点，$t<0, f(t)=0$

从而拉氏变换式写为：

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

称为单边拉氏变换，简称拉氏变换

其逆变换为：

$$f(t)=[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds]\epsilon(t)$$

5.3 拉氏变换与傅里叶变换的关系

单边拉氏变换与傅里叶变换的关系

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \mathbf{Re}[s]>\sigma_0$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

要讨论其关系，$f(t)$必须为因果信号。

根据收敛坐标σ_0的值可分为以下三种情况：

（1）$\sigma_0<0$，即$F(s)$的收敛域包含 $\mathrm{j}\omega$ 轴，则 $f(t)$的傅里叶变换存在，并且 $F(\mathrm{j}\omega)=F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$

如 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=1/(s+2)$ ，$\sigma>-2$；

则 $F(\mathrm{j}\omega)=1/(\mathrm{j}\omega+2)$。

（2）$\sigma_0=0$，即$F(s)$的收敛边界为jω轴，

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\sigma\to0}F(s)$$

如 $f(t)=\varepsilon(t)\longleftrightarrow F(s)=1/s$ （验证一下）

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\sigma\to0}\frac{1}{\sigma+j\omega}=\lim_{\sigma\to0}\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}+\lim_{\sigma\to0}\frac{-j\omega}{\sigma^2+\omega^2}$$

$$=\pi\delta(\omega)+1/\mathrm{j}\omega$$

（3）$\sigma_0>0$，$F(\mathrm{j}\omega)$不存在。

如 $f(t)=\mathrm{e}^{2t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow F(s)=1/(s-2)$ ，$\sigma>2$；

其傅里叶变换不存在。

常用函数的拉普拉斯变换对

序号	时域表示	s域表示
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$或1	$\frac{1}{s}$
3	$\mathrm{e}^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
4	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
5	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$

5.4 拉普拉斯变换的性质

1. 线性性质

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$$
$$,Re[s]>max(\sigma_1,\sigma_2)$$

2. 尺度变换

$$f(t)\leftrightarrow F(s),Re[s]>\sigma_0$$
$$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),Re[s]>a\sigma_0$$

3. 时移性质

$$f(t-t_0)\epsilon(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$$

例题：

$$f_1(t)=\epsilon(t)-\epsilon(t-1)$$
$$F_1(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-s})$$

4. 复频移特性

$$f(t)e^{s_n t} \leftrightarrow F(s-s_n), Re[s] > \sigma_0 + \sigma_a$$

例题：

$f(t)$的象函数$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$，求$e^{-t}f(3t-2)$的象函数

$$e^{-t}f(3t-2) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2+9}e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$$

5. 时域微分特性

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$$
$$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$$

若$f(t)$为因果信号，则

$$f^n(t) \leftrightarrow s^n F(s)$$

6. 时域积分特性

$$\int_{0^-}^{t} f(x)dx \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$$
$$(\int_{0^-}^{t})^n f(x)dx \leftrightarrow \frac{1}{s^n}f(s)$$

例题：

$$t^2\epsilon(t)$$

$$=(\int_0^t)^2\epsilon(x)dx=\int_0^t x\epsilon(x)dx=\frac{t^2}{2}\epsilon(t)$$

$$t^2\epsilon(t)\leftrightarrow\frac{2}{s^3}$$

7. s域微分

$$(-t)f(t)\leftrightarrow\frac{dF(s)}{ds}$$

$$(-t)^n f(t)\leftrightarrow\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

例题：

$$t^2e^{-2t}\epsilon(t)$$

$$e^{-2t}\epsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2}$$

$$t^2e^{-2t}\epsilon(t)\leftrightarrow\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s+2})$$

8. 时域卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

9. 复频域卷积定理

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_n(\xi)F_2(s-\xi)d\xi$$

初值定理

初值定理可由$F(s)$直接求$f(0^+)$，而不必求出原函数

$$f(0^+) = \lim_{t-0^+} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$$

终值定理

终值定理用于$F(s)$求$f(\infty)$

$$f(\infty) = \lim_{s->0} sF(s)$$

例题：

例1 $F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+2}$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=2$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=0$$

例2 $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+2}$ $\quad F(s)=1-\dfrac{2s+2}{s^2+2s+2}=1+F_1(s)$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF_1(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s^2-2s}{s^2+2s+2}=-2$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s^3}{s^2+2s+2}=0$$

5.5 拉普拉斯反变换

通用方法：

1. 查表
2. 利用性质
3. 部分分式展开(重点)

部分分式展开

若$F(s)$是s的实系数有理真分式($m < n$)，则可写为：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+...+a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1}+...+b_0}$$

方程$A(s)=0$称为特征方程，它的根称为特征根，n个特征根p_i称为$F(s)$的极点

应用请看：`L8拉普拉斯变换课件P40-50`

5.6 连续系统的复频域描述

应用请看`L9拉普拉斯变换P21-22`

5.7 零极点分布以及初/终值定理应用

零点 - 打圈

极点 - 打×

5.8 系统函数与系统的稳定性

1. 连续系统稳定的充分必要条件是

$H(s)$的收敛域包含虚轴，则该系统必是稳定系统

2. 连续因果稳定的充分必要条件是

$H(s)$的极点均在左半开平面，则该系统必是稳定的因果系统

3. 连续时间LTI系统稳定的充要条件

系统函数$H(s)$的收敛域包含s平面jw轴

例：根据系统函数$H(s)$收敛域，分析系统的稳定性与因果性

$$H(s)=\frac{6s}{(s+2)(s+1)}$$

解： $H(s)=\dfrac{12}{s+2}+\dfrac{-6}{s+1}$

（1） $\mathrm{Re}(s)>-1$ 系统因果、稳定

$$h(t)=12\mathrm{e}^{-2t}u(t)-6\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

（2） $-2<\mathrm{Re}(s)<-1$ 系统非因果、不稳定

$$h(t)=12\mathrm{e}^{-2t}u(t)+6\mathrm{e}^{-t}u(-t)$$

（3） $\mathrm{Re}(s)<-2$ 系统非因果、不稳定

$$h(t)=-12\mathrm{e}^{-2t}u(-t)+6\mathrm{e}^{-t}u(-t)$$

5.9 综合题

L9拉普拉斯变换P35-42