变形：弹性体某一个位移相对于参考位移在形状上的变化，指点间距离的变换

例题

弹性体内有一点$P(2,1,3)$处有一线元dx,其长度为ds,其方向在单位向量$n=\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2+0e_3$的方向上，试求上述线元$dx$在变形后所对应之$dx'$，已知弹性体变形时的位移场为：

$$u_1'=0, u_2=x_3-ax_2, u_3=x_2-bx_3$$

解：

法一：通过求出变形后线元dx'的始点及终点的坐标，以确定线元dx'

1. 线元dx的分量为$dx_i=n_ids$

$$(dx_1,dx_2,dx_3)=(\frac{\sqrt{2}}{2}ds,\frac{\sqrt{2}}{2}ds,0)$$

2. 线元dx始点P的坐标为

$$(x_1,x_2,x_3)^P=(2,1,3)$$

代入$x_i^Q = x_i^P + dx_i$，得到线元dx终点Q的坐标为

$$(x_1, x_2, x_3)^Q = (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}ds, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}ds, 3)$$

点P与以及点Q的位移为：

$$(u_1, u_2, u_3)^P = (0, 3 - a, 1 - 3b)$$

$$(u_1, u_2, u_3)^Q = (0, 3 - a - \frac{\sqrt{2}}{2}ads, 1 - 3b + \frac{\sqrt{2}}{2}ds)$$

因为$x_i' = x_i + u_i$，得到P在变形后所处位置P'点的坐标为：

$$(x_1', x_2', x_3')^{P'} = (2, 4 - a, 4 - 3b)$$

同理Q在变形后的所处位置Q'点的坐标为：

$$(x_1', x_2', x_3')^{Q'} = (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}ds, 4 - a + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - a)ds, 4 - 3b + \frac{\sqrt{2}}{2}ds)$$

根据$dx_i' = x_i^{Q'} - x_i^{P'}$

$$(dx'_1, dx'_2, dx'_3) = (\frac{\sqrt{2}}{2}ds, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)ds, \frac{\sqrt{2}}{2}ds)$$

$$dx' = \frac{\sqrt{2}}{2}dse_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)dse_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}dse_3$$

例题

已知弹性体的位移场为：

$$u_1 = 3x_1x_3^2k, u_2 = 2x_1x_3k, u_3 = (x_3^2 - x_1x_2)k$$

其中$k = 10^{-2}$，求应变张量场，转动张量场，以及转动向量

解：

1. 把题给位移场代入，$e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$，即可求得应变张量场

则可写成矩阵形式

$$e_{ij} = []$$

2. 把题给位移场代入$w_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i})$，即可求得转动张量场

同样也是矩阵形式

$$w_{ij}=[]$$

3. 把题位移场代入$w_k=\frac{1}{2}e_{kij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，即可求得转动向量场

把题给位移场代入 $\omega_k=\frac{1}{2}e_{kji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，即可求得转动向量场为

$$\omega_1=-\frac{3}{2}x_1k,\quad \omega_2=\frac{1}{2}x_2k,\quad \omega_3=-(3x_1x_2-x_3)k$$

例题

已知弹性体内点P处的应变张量为：

$$e_{ij}=\begin{bmatrix}4k & 0 & 0\\ 0 & 7k & 2k\\ 0 & 2k & 4k\end{bmatrix}$$

试求点P沿$n=\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2+0e_3$方向的正应变

解：

$$
\begin{gathered}
e = e_{ij}n_in_j = e_{11}n_1n_1 + e_{22}n_2n_2 + \\
e_{33}n_3n_3 + 2e_{12}n_1n_2 + 2e_{23}n_2n_3 + \\
2e_{31}n_3n_1 \\
= 5.5k
\end{gathered}
$$

例题

例 3.5-2 已知弹性体内点P处的应变张量为

$$
(e_{ij}) = \begin{pmatrix} 4k & k & 0 \\ k & 7k & 2k \\ 0 & 2k & 4k \end{pmatrix}
$$

其中$k=10^{-2}$。变形前过点P有两个线元$d\tilde{x}$及 $\tilde{d}x$，它们分别沿 $n=\frac{\sqrt{3}}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2+0\cdot e_3$ 及 $\tilde{n}=\frac{1}{2}e_1+\frac{\sqrt{3}}{2}e_2+0\cdot e_3$ 方向上。试求变形后两个线元之间的夹角φ'。

解：

1. 设变形前两个线元之间的夹角为ϕ，则

$$
cos\phi = n\cdot\hat{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}
$$

$$
\phi = 30^{\circ}
$$

2. 设点P处沿n及$\hat{n}$方向的正应变分别为e和$\hat{e}$，则

$$e = e_{ij}n_in_j = k\frac{19+2\sqrt{3}}{4}$$

$$\hat{e} = e_{ij}\hat{n}_i\hat{n}_j = k\frac{25+2\sqrt{3}}{4}$$

又因为有：

$$cos\phi' - cos\phi = 2e_{ij}n_i\hat{n}_i - (e+\hat{e})cos\phi$$

代入即可求解：

$$cos\phi' = 0.8710$$

位移的分解

$$u_i^Q = u_i^P + w_{ij}\Delta x_j + e_{ij}\Delta x_j$$

1. 质点Q随质点P一起作刚性平移而有的位移
2. 物体绕过点P的轴作微小刚性转动时点Q所具有的位移
3. 因变形而使质点Q相对于质点P发生的位移

例题

例题

已知弹性体的位移场为

$u_1 = 3x_1x_2^2k, u_2 = 2x_1x_3k, u_3 = (x_3^2 - x_1x_2)k$,

其中$k = 10^{-2}$。

1. 求应变张量场和转动张量场。
2. 变形前在点P(2, 0, 3)处有一线元$\Delta\vec{x}$，其长度为0.1，其方向单位向量为$\hat{n} = (0.2, 0.8, 0.559)$，求该线元变形后的线元$\Delta\vec{x}'$。

已知弹性体的位移场为：

$$u_1 = 3x_1x_3^2k, u_2 = 2x_1x_3k, u_3 = (x_3^2 - x_1x_2)k$$

主应变

1. 主方向的定义

如果过点P的某个方向的线元，在变形后只沿着它原来的方向产生相对伸缩，则称此线元的方向为该点应变的主方向

2. 主应变的定义

称主方向的相对伸缩(正应变)为主应变

例题

例3.7-1 设一弹性体作小变形，其内点P处的应变张量为

$$(e_{ij})=\begin{bmatrix} 6k & \frac{1}{2}k & 3k \\ \frac{1}{2}k & 0 & \frac{3}{2}k \\ 3k & \frac{3}{2}k & 0 \end{bmatrix}$$

其中$k=10^{-2}$。试求该点处的主应变及应变主方向。

解 1. 这是求二阶张量的特征值及特征向量的问题。对于这种问题，必须求三次方程（特征方程）的根。在此，首先介绍求三次方程根的下述方法。

设要求根的三次方程为

$$e^3-\mathrm{I}_e e^2+\mathrm{II}_e e-\mathrm{III}_e=0 \tag{a}$$

其中I_e、II_e及III_e皆为已知。令

$$e=\beta+\frac{\mathrm{I}_e}{3} \tag{b}$$

并代入式（a），就得

$$\beta^3-J_2\beta-J_3=0 \tag{c}$$

其中$J_2=\frac{1}{3}\mathrm{I}_e^2-\mathrm{II}_e$，$J_3=\frac{2}{27}\mathrm{I}_e^3-\frac{1}{3}\mathrm{I}_e\mathrm{II}_e+\mathrm{III}_e$。如再令

$$\beta=r\cos\varphi \tag{d}$$

并代入式（c），则得

$$r^3\cos^3\phi-J_2r\cos\phi-J_3=0$$

即

$$\cos^3\phi-\frac{J_2}{r^2}\cos\phi-\frac{J_3}{r^3}=0$$

将此式与三角恒等式 $\cos^3\phi-\frac{3}{4}\cos\phi-\frac{1}{4}\cos3\phi=0$相比较，就有

$$\frac{J_2}{r^2}=\frac{3}{4},\quad \frac{J_3}{r^3}=\frac{1}{4}\cos3\phi$$

即

$$r=\sqrt{\frac{4J_2}{3}},\quad \cos3\phi=\frac{4J_3}{r^3} \tag{e}$$

把式（e）所确定的r及ϕ、$120°-\phi$、$120°+\phi$分别代入式（d），得

$$\beta_1=r\cos\phi,\quad \beta_2=r\cos(120°-\phi),\quad \beta_3=r\cos(120°+\phi) \tag{f}$$

再把式（f）分别代入式（b），就求得三次方程式（a）的根为

$$e_1=\beta_1+\frac{\mathrm{I}_e}{3},\quad e_2=\beta_2+\frac{\mathrm{I}_e}{3},\quad e_3=\beta_3+\frac{\mathrm{I}_e}{3} \tag{g}$$

2。本题所给应变张量的特征方程为

$$e^3-6ke^2-\frac{23}{2}k^2e+9k^3=0$$

而 $\mathrm{I}_e=6k$，$\mathrm{II}_e=-\frac{23}{2}k^2$，$\mathrm{III}_e=-9k^3$。采用以上介绍的三次方程求根的方法，则有

$$\beta^3-J_2\beta-J_3=0$$

其中$J_2=\frac{1}{3}\mathrm{I}_e^2-\mathrm{II}_e=\frac{47}{2}k^2$，$J_3=\frac{2}{27}\mathrm{I}_e^3-\frac{1}{3}\mathrm{I}_e\mathrm{II}_e+\mathrm{III}_e=30k^3$。由式（e），得

$$r=\sqrt{\frac{4J_2}{3}}=5.5976k,\quad \cos3\phi=\frac{4J_3}{r^3}=0.6842$$

所以，$\phi=15°37'$。由式（f），得

$$\beta_1 = 5.39k,\ \beta_2 = -1.39k,\ \beta_3 = -4.00k$$

于是，由式（g），得题给应变张量的主应变为

$$e_1 = 7.39k,\ e_2 = 0.61k,\ e_3 = -2.00k$$

3．把$e_1 = 7.39k$代入式（3.7—4），得

$$-1.39n_1^{(1)} + 0.5n_2^{(1)} + 3n_3^{(1)} = 0$$
$$0.5n_1^{(1)} - 7.39n_2^{(1)} + 1.5n_3^{(1)} = 0$$
$$3n_1^{(1)} + 1.5n_2^{(1)} - 7.39n_3^{(1)} = 0$$

将此方程组连同式

$$n_1^{(1)}n_1^{(1)} + n_2^{(1)}n_2^{(1)} + n_3^{(1)}n_3^{(1)} = 1$$

一起求解，就得与主应变$e_1 = 7.39k$相对应的应变主方向为

$$n_1^{(1)} = \pm 0.91,\ n_2^{(1)} = \pm 0.14,\ n_3^{(1)} = \pm 0.40$$

同样的做法，可得与主应变$e_2 = 0.61k$及$e_3 = -2.00k$相对应的应变主方向分别为

$$n_1^{(2)} = \pm 0.33,\ n_2^{(2)} = \mp 0.84,\ n_3^{(2)} = \mp 0.45$$

及

$$n_1^{(3)} = \pm 0.27,\ n_2^{(3)} = \pm 0.54,\ n_3^{(3)} = \mp 0.80$$

§3.8 相容性条件

由§3.4知，应变张量场e_{ij}与位移场u_i之间的联系为

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij} \qquad (3.8—1$$

当给定了位移场u_i时，只要按此式对位移函数求偏导数就能确定出应变张量场e_{ij}。反之，如果指定了应变张量场e_{ij}而要求位移场u_i，那就要去解只含有三个未知函数u_i的六个偏微

简述：

给定u_i求e_{ij}，对其求偏导数就能确定应变张量场

已知e_{ij}求u_i，那么应变张量场需要满足相容性条件：即六个偏微分方程

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

体积应变

单位体积的体积改变，称为体积膨胀率或体积应变

$$\theta = e_{ii} = \sum_{i=1} e_{ii} = \text{对}u\text{取散度}$$

应变张量的不变量

与主应力类似，求解主应变和应变主方向的问题就是求二阶实对称张量e_{ij}的特征值和特征向量的问题！

$$\begin{vmatrix} e_{11}-e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22}-e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-e \end{vmatrix} = 0$$

$$e^3 - J_1 e^2 + J_2 e - J_3 = 0$$

$$J_1 = e_{ii}$$
$$J_2 = \frac{1}{2}\left(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij}\right)$$
$$J_3 = \det e_{ij}$$

应变张量的第一、第二、第三不变量！

应变主轴坐标系

- 总可以找到三个互相垂直的应变主方向，在沿此三个方向建立的应变主轴坐标系内，应变张量具有对角形式，各对角元素即为三个主应变

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

- 在主轴坐标系下，三个应变不变量为

$$J_1 = e_1 + e_2 + e_3$$
$$J_2 = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1$$
$$J_3 = e_1e_2e_3$$