二、问题二的模型建立与求解

2.1 图论模型建立

2.1.1 拆点

问题二与问题一不同的点在于，问题一的权值是在边上的，而问题二的权值是在节点上的，即使用一次黄色石头减 1 分，使用一次蓝色石头减 2 分等，利用点权建图的难处在于，传统算法如 Dijkstra 并不适用于点权图，并且用多种数据结构维护同一个点集合，会导致代码过于臃肿，导致算法效率低。

对此，可将单独一个节点拆成两个节点，即原节点的出点和入点，那么原节点的出点和入点的连边即为节点的权值，至此，即可将点权转化为边权，示意图如下：

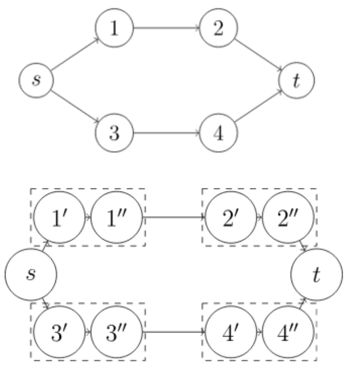

图 2.1 拆点示意图

2.1.2 题意转化

对于该节点与其他节点的连边，仍然采用图 1.4 中的$K = 100$的连线图，以保证图的大部分是连通的，并将该节点的出点与其他节点的入点相连，并设置该边的权值为 0，以避免距离权值会影响到问题二中的颜色权值。

由于题目规定是采取扣分制度，那么可将问题转化为，使用一次黄色石头加 1 分，使用一次蓝色石头加 2 分，使用一次红色石头加 3 分，使用一次绿色石头加 4 分，而后再通过 Dijkstra 算法求取从起点到终点的最短路径，即最少得分路径，而后再通过满分 1000，减去对应的最少得分，则可得到最终的最高得分。

2.2 图论模型求解

综上分析，首先将图中所有节点均拆为 2 个节点即入点和出点，那么图中节点的数量就要增大 2 倍，而后再从入点向出点连接一条权值为原节点颜色权值的边，为了保证图的连通性，将在$K = 100$的图上进行，并把原距离权值赋为 0，这里仍然选择编号 1 作为起点，而编号为 111，112，113，114 则作为终点，最后通过题意转化，使得只需再使用 Dijkstra 算法求取最短路，则可得到最高分路径。

表 2.1 问题二在$K = 100$上的最高得分

每次攀爬最大高度/编号	111	112	113	114
100	969	967	967	969

在 Dijkstra 算法寻找最短路的过程中，只需要用一个数组 prev[N]记录每个节点在最短路径中的前驱节点，而后再通过从终点向起点回溯，将回溯得到的路径依次添加到一个路径数组中，然后反向输出这个路径数组，就能够得到从起点到终点的具体路径，故可得到下表即为从起点编号 1 的节点向，编号为 111，112，113，114 的最高得分路径。

表 2.2 问题二从起点向终点的最高得分路径

终点编号	路径
111	$1 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 24 \rightarrow 29 \rightarrow 34 \rightarrow 40 \rightarrow 48 \rightarrow 57 \rightarrow 60 \rightarrow 69 \rightarrow 75 \rightarrow 84 \rightarrow 91 \rightarrow 100 \rightarrow 103 \rightarrow 111$
112	$1 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 24 \rightarrow 29 \rightarrow 34 \rightarrow 40 \rightarrow 48 \rightarrow 57 \rightarrow 60 \rightarrow 69 \rightarrow 78 \rightarrow 88 \rightarrow 93 \rightarrow 101 \rightarrow 107 \rightarrow 112$
113	$1 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 24 \rightarrow 29 \rightarrow 34 \rightarrow 40 \rightarrow 48 \rightarrow 57 \rightarrow 60 \rightarrow 69 \rightarrow 78 \rightarrow 88 \rightarrow 93 \rightarrow 101 \rightarrow 110 \rightarrow 113$
114	$1 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 24 \rightarrow 29 \rightarrow 34 \rightarrow 40 \rightarrow 48 \rightarrow 57 \rightarrow 60 \rightarrow 69 \rightarrow 78 \rightarrow 88 \rightarrow 89 \rightarrow 94 \rightarrow 96 \rightarrow 105 \rightarrow 114$

在图上可直观由下图表示：

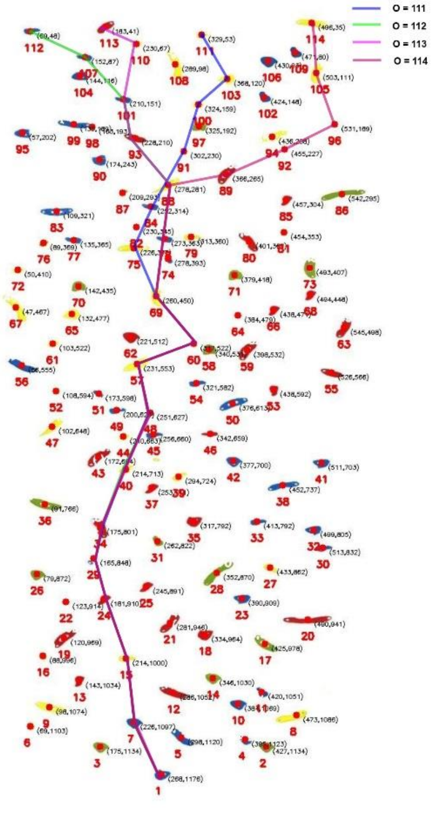

图 2.2 $K = 100$起点向终点最高得分路径图