

2 Komplexní obálka

Zadání

Mějme dán pásmový signál $s(t) = [1 + 0.5\cos(2\pi 5t)] \cos(2\pi 100t)$

1. Zobrazte tento signál a odhad jeho modulového spektra.
2. Nalezněte jeho komplexní obálku, zobrazte ji (reálnou, imaginární část a obálku) a zakreslete její spektrum, pokud platí $f_c = 100$ Hz. Na všech výstupech správně oceňujte kmitočtovou a časovou osu.
3. Ověřte možnost zpětného získání pásmového signálu z jeho komplexní obálky pomocí kvadraturního modulátoru. Porovnejte takto získaný signál s původním signálem.

Teoretický úvod

Modulované signály jsou většinou tzv. pásmové (úzkopásmové). Jejich šířka pásma je obvykle velmi malá vzhledem k použitému kmitočtu nosné. Z důvodu snadnější simulace (snížení potřebného vzorkovacího kmitočtu) komunikačních systémů je vhodné umět vysokofrekvenční signál vyjádřit pomocí jeho ekvivalentu v základním pásmu (kolem nulového kmitočtu) - komplexní obálky.

Jednou z možností jak z pásmového signálu $s(t)$ získat jeho komplexní obálku je využití Hilbertovy transformace a tzv. analytického signálu. Tzv. analytický signál $s_a(t)$ je signál vytvořený z původního signálu $s(t)$ a jeho Hilbertovy transformace $s_h(t)$ dle vztahu:

$$s_a(t) = s(t) + js_h(t). \quad (2.1)$$

Komplexní obálku $s_o(t)$ pak získáme, jestliže analytický signál $s_a(t)$ posuneme na kmitočtové ose o f_c :

$$s_o(t) = s_a(t)e^{-j2\pi f_c t}. \quad (2.2)$$

Vztah mezi pásmovým signálem, analytickým signálem a komplexní obálkou v kmitočtové oblasti je znázorněn na obr. 2.1. Komplexní obálku můžeme rozepsat na její reálnou a imaginární část $s_o(t) = s_i(t) + js_q(t)$.

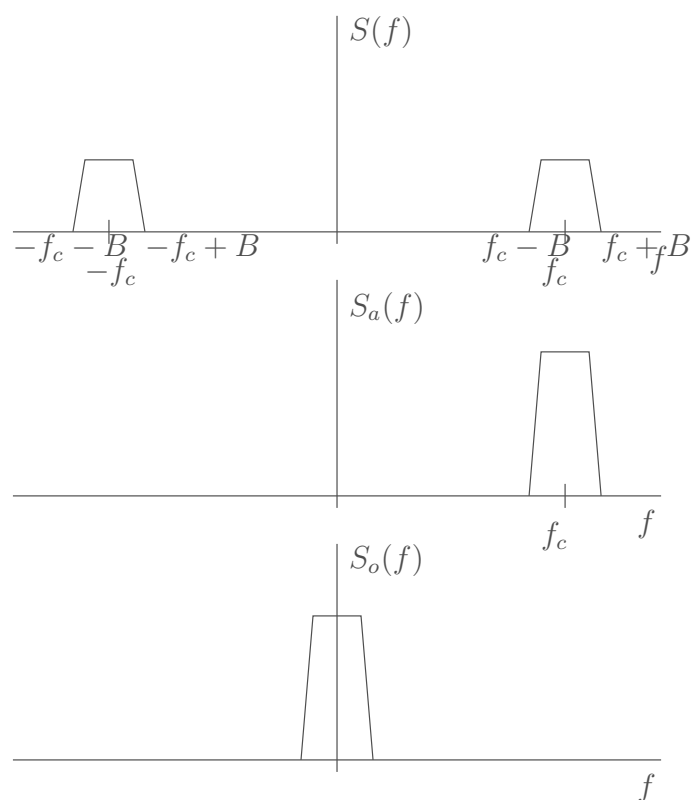
Z komplexní obálky je možné získat zpět původní pásmový signál jako reálnou část komplexní obálky násobené $e^{j2\pi f_c t}$:

$$s(t) = \Re\{[(s(t) + js_h(t))e^{-j2\pi f_c t}]e^{j2\pi f_c t}\}. \quad (2.3)$$

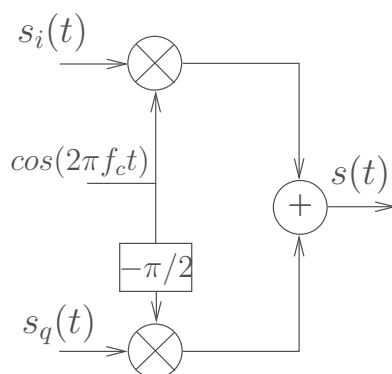
Po dosazení $s_o(t) = s_i(t) + js_q(t)$ a úpravě obdržíme:

$$s(t) = s_i(t) \cos(2\pi f_c t) - s_q(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (2.4)$$

Tato rovnice nám poskytuje návod jak získat pásmový signál z jeho komplexní obálky. Je možné ji graficky vyjádřit ve formě uvedené na obrázku 2.2.



Obrázek 2.1: Pásmový signál (nahore), analytický signál (uprostřed) a komplexní obálka (dole) v kmitočtové oblasti



Obrázek 2.2: Získání pásmového signálu z komplexní obálky

Řešení

1.
 - Nejprve definujte parametry simulace - vzorkovací kmitočet a periodu, vektor času (v rozsahu -2 s. až 2 s.), kmitočet nosné.
 - Vypočtěte vzorky původního signálu $s(t)$ a vykreslete (*figure, plot*) závislost

$s(t)$ na čase.

- Pomocí Fourierovy transformace vypočtete modulové spektrum signálu. Použijte funkce *fft*, *abs*. Nezapomeňte správně ocejchovat kmitočtovou osu. Využijte i funkci *fftshift*.
- 2.
- Pomocí funkce *hilbert* vypočtete analytický signál. Pozor - tato funkce nevrací Hilbertovu transformaci ale přímo analytický signál (ověřte pomocí *help hilbert*). Proveďte výpočet komplexní obálky násobením $e^{-j2\pi f_c t}$.
 - Zobrazte reálnou a imaginární část komplexní obálky a také její absolutní hodnotu (obálku). Vypočtete spektrum komplexní obálky a zobrazte ho.
3. Z reálné a imaginární složky komplexní obálky vytvořte původní signál podle obrázku 2.2. Zjistěte odchylku mezi takto získaným signálem a původním signálem. Jaké maximální hodnoty nabývá?