10. Abgabe

Freitag, 13. Januar 2023 08:24

A1 a) Da jede Spalte & Zeile von I genau eine 1 und sonst 0en enthält, ist jede Spalte und Zeile ein Einheitsvektor. Daher gilt für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$, dass $\|I\| \geq 1$.

b) Da A symmetrisch & positiv definit ist, gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$, dass $x^T \cdot A \cdot x > 0$ (x^T Transponierte von x). Da die Hauptdiagonalenelemente $a_{ii} = x_i^T A x_i$ sind, gilt $\forall i: a_{ii} > 0$. Somit sind alle ~~Hauptdiagonalen~~ Hauptdiagonalen-elemente positiv.
Alternativ siehe Folie 27 VL 10.

c) Stimmt nicht, Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 41 & 48 \\ 44 & 58 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Nicht mehr symmetrisch!

A2)

a)

Wir beginnen damit zu definieren, was es bedeutet, dass eine Matrix positiv definit ist. Eine Matrix A ∈ R^(n×n) ist positiv definit, wenn für jeden Vektor x ∈ R^n gilt, dass x^T A x > 0.
Wir berechnen den symmetrischen Anteil einer Matrix A, indem wir die Formel A_sym = 1/2 * (A + A^T) verwenden.
Wir zeigen, dass für jeden Vektor x ∈ R^n gilt, dass x^T A_sym x > 0, wenn A positiv definit ist. Um dies zu tun, berechnen wir x^T A_sym x = 1/2 * x^T (A + A^T) x = 1/2 * (x^T A x + x^T A^T x). Da A positiv definit ist, gilt x^T A x > 0. Da A^T = A ist, da A symmetrisch ist, gilt auch x^T A^T x > 0. Daher ist die Summe der beiden Ausdrücke positiv und somit x^T A_sym x > 0.
Um zu zeigen, dass A positiv definit ist, wenn A_sym positiv definit ist, müssen wir die Umkehrung der Schritte 3 zeigen. Wir beginnen damit zu zeigen, dass A_sym positiv definit ist, wenn A positiv definit ist. Da A_sym = 1/2 * (A + A^T) ist und A positiv definit ist, ist auch A + A^T positiv definit. Daher gilt auch x^T A_sym x > 0 für alle x ∈ R^n.
Wir haben gezeigt, dass A positiv definit ist, wenn A_sym positiv definit ist und A_sym positiv definit ist, wenn A positiv definit ist. Daher gilt die Aussage, dass eine Matrix A ∈ R^(n×n) genau dann positiv definit ist, wenn ihr symmetrischer Anteil A_sym = 1/2 * (A + A^T) positiv definit ist.

b)

Damit A positiv definit ist, müssen all Eigenwerte von A positiv sein. Um die Eigenwerte von A zu finden, müssen wir die Characteristische Gleichung von A lösen, die ist |A-λI| = 0. |A-λI| = |[[1-λ, 0], [2α, 2-λ]]| = (1-λ)(2-λ)-4α^2 = λ^2 -3λ + 2 - 4α^2 Daher sind die Eigenwerte λ1,2 = (3 ± sqrt(1-8α^2))/2. Um die Positivität der Eigenwerte zu sicherzustellen, müssen wir sqrt(1-8α^2)>0 haben. Das bedeutet 1-8α^2 > 0, was α^2 < 1/8 ist. Daher ist die Matrix A = [[1, 0], [2α, 2]] positiv definit, wenn -1/2 < α < 1/2

A3

Um zu zeigen, dass für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf R^n durch $\|A\| := \sup_{x\in R^n, x\neq 0} (\|Ax\|/\|x\|)$ für $A \in R^{(n\times n)}$ eine mit ihr verträgliche Matrizennorm gegeben ist, müssen wir die folgenden Eigenschaften der Matrizennorm überprüfen:

$\|A\| \geq 0$ für alle $A \in R^{(n\times n)}$. Dies ist offensichtlich, da der Bruch $\|Ax\|/\|x\| \geq 0$ ist und sup immer ein Maximum enthält.

$\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$. Da $\sup_{x\in R^n, x\neq 0} (\|Ax\|/\|x\|) = 0$, wenn und nur wenn $A = 0$, gilt diese Eigenschaft.

$\|kA\| = |k|\ \|A\|$ für alle $A \in R^{(n\times n)}$ und $k \in R$. Da für jeden Vektor $x \in R^n$ gilt, dass $\|kAx\| = |k|\ \|Ax\|$ und $\|kx\| = |k|\ \|x\|$, gilt $\sup_{x\in R^n, x\neq 0} (\|kAx\|/\|kx\|) = \sup_{x\in R^n, x\neq 0} (|k|\ \|Ax\|/|k|\ \|x\|) = |k| \sup_{x\in R^n, x\neq 0} (\|Ax\|/\|x\|) = |k|\ \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ für alle $A, B \in R^{(n\times n)}$. Um diese Eigenschaft zu zeigen, betrachten wir für jeden Vektor $x \in R^n$ den Bruch $(\|(A + B)x\|/\|x\|)$. Da die Vektornorm eine Triangleungleichung hat, gilt $\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$. Daher gilt $(\|(A + B)x\|/\|x\|) \leq (\|Ax\|/\|x\|) + (\|Bx\|/\|x\|)$. Da der Bruch für alle $x \in R^n$ gilt, können wir den sup-Operator anwenden, um zu erhalten $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Da alle Eigenschaften erfüllt sind, ist $\|A\| := \sup_{x\in R^n, x\neq 0} (\|Ax\|/\|x\|)$ eine Matrizennorm auf $R^{(n\times n)}$ für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf R^n.