**A1** a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}, \quad x \neq 0$

$a_1 = x^2 \quad a_2 = a_1 - 1 \quad a_3 = \frac{a_2}{x}$

$a_1 = x(1+\varepsilon_x)\,x(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_1) = x^2(1+2\varepsilon_x+\varepsilon_1+O(\varepsilon^2)) \leq x^2(1+3\varepsilon_1+O(\varepsilon^2))$

$a_2 = (a_1-1)(1+\varepsilon_2) = (x^2(1+3\varepsilon_1+O(\varepsilon^2))-1)(1+\varepsilon_2) = (x^2(1+3\varepsilon_1)-1+O(\varepsilon^2))(1+\varepsilon_2)$

$= (x^2(1+3\varepsilon_1)-1)(1+\varepsilon_2)+O(\varepsilon^2) = (x^2-1)(1+\varepsilon_2)+3x^2\varepsilon_1+O(\varepsilon^2)$

ALTE RECHNUNG nicht zu beachten!

$a = \frac{a_2}{x(1+\varepsilon_x)}(1+\varepsilon_3) = \frac{(x^2-1)(1+\varepsilon_2)+3x^2\varepsilon_1+O(\varepsilon^2)}{x(1+\varepsilon_x)}(1+\varepsilon_3) = \frac{(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+3x^2\varepsilon_1}{x(1+\varepsilon_x)}(1+\varepsilon_3)+O(\varepsilon^2)$

$= \left(\frac{(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+3x^2\varepsilon_1}{x} + \frac{(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+3x^2\varepsilon_1}{x\cdot\varepsilon_x}\right)(1+\varepsilon_3)+O(\varepsilon^2)$

$= \left(\frac{(x^2-1)}{x} + \frac{\varepsilon_2(x^2-1)+3x^2\varepsilon_1}{x} + \frac{(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+3}{x\cdot\varepsilon_x}\right)(1+\varepsilon_3)+O(\varepsilon^2)$

$= \frac{(x^2-1)}{x}(1+\varepsilon_3) + \left(\frac{\varepsilon_2 x^2}{x} - \frac{\varepsilon_2}{x} + \frac{3x^2\varepsilon_1}{x} + \frac{x^2}{x\varepsilon_x} - \frac{1}{x\varepsilon_x} + \frac{\varepsilon_2 x^2}{x\varepsilon_x} - \frac{\varepsilon_2}{x\varepsilon_x} + \frac{3}{x\varepsilon_x}\right)(1+\varepsilon_3)+O(\varepsilon^2)$

$= \frac{(x^2-1)}{x}(1+\varepsilon_3) + \left(\varepsilon_2 x - \frac{\varepsilon_2}{x} + 3\varepsilon_1 x + \frac{x}{\varepsilon_x} - \underbrace{\frac{1}{x\varepsilon_x} + \frac{\varepsilon_2 x}{\varepsilon_x} - \frac{\varepsilon_2}{x\varepsilon_x} + \frac{3}{x\varepsilon_x}}_{\frac{2}{x\varepsilon_x}}\right)(1+\varepsilon_3)$

$= \frac{(x^2-1)}{x}(1+\varepsilon_3)+\varepsilon_2 x + \frac{\varepsilon_2}{x} + 3\varepsilon_1 x + \frac{\varepsilon x}{\varepsilon_x} + \frac{2}{x\varepsilon_x} + \frac{2\varepsilon_3}{x\varepsilon_x} +$

$a = \frac{a_2}{x(1+\varepsilon_x)}(1+\varepsilon_3) \leq \frac{a_2}{\cancel{x(1+\varepsilon_3)}}\cancel{(1+\varepsilon_3)} = \frac{a_2}{x} = \frac{(x^2-1)(1+\varepsilon_2)+3x^2\varepsilon_1+O(\varepsilon^2)}{x}$

$= \frac{(x^2-1)(1+\varepsilon_2)}{x} + 3x\varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$

$= \frac{x^2-1+x^2\varepsilon_2-\varepsilon_2}{x} + 3x\varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$

$= x - \frac{1}{x} + \varepsilon_2 x - \frac{\varepsilon_2}{x} + 3x\varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$

$\left|\frac{a_3 - \left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{\frac{x^2-1}{x}}\right| \leq \left|\frac{x - \frac{1}{x} + \varepsilon_2 x - \frac{\varepsilon_2}{x} + 3x\varepsilon_1 - \frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}}\right|$

$= \left|\cancel{x} - \cancel{\frac{1}{x}} + \varepsilon_2 x - \frac{\varepsilon_2}{x} + 3x\varepsilon_1 - \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{x^2-1}\right|$

$= \left|\frac{\varepsilon_2 x^2 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 x^2}{x^2-1}\right|$

$\leq \left|\frac{\varepsilon x^2 - \varepsilon + 3\varepsilon x^2}{x^2-1}\right|$

$= \left|\frac{4\varepsilon x^2 - \varepsilon}{x^2-1}\right|$

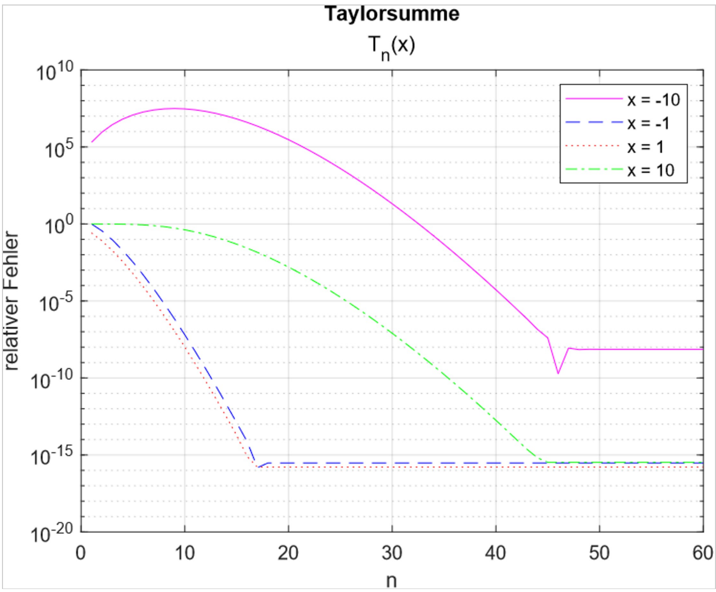
$= \underline{\underline{\left|\frac{\varepsilon(4x^2-1)}{x^2-1}\right|}}$

⇒ Fehlerverstärkung kann groß werden bei $x \approx 1$. □

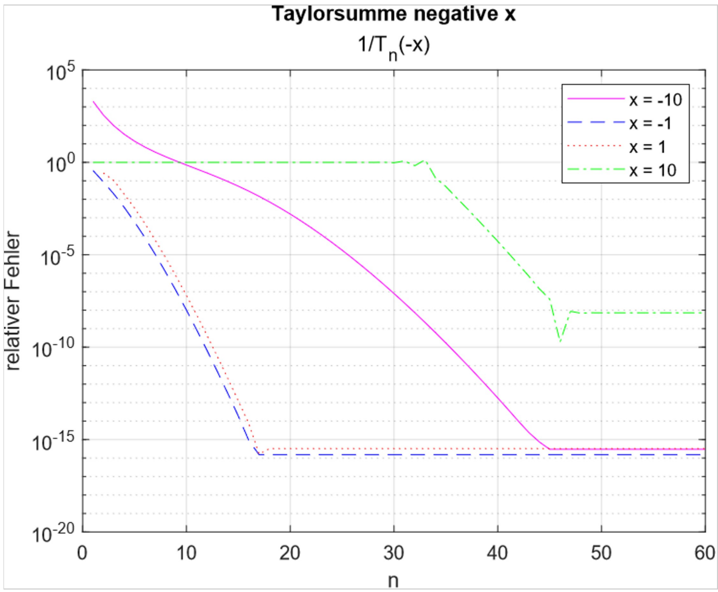
b) Die Formel $\frac{x^2-1}{x}$ lässt sich umformen zu $\frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$.
Obwohl die Division immernoch als zweite Operation durchgeführt wird, ist die Funktion besser konditioniert, da eine Operation ($x^2$) weniger durchgeführt wird.

# A2

a)




b)




⇒ Bei der Funktion $1/T_n(-x)$ ist der maximale relative Fehler deutlich geringer ~$10^{7,5}$ zu ~$10^{3,5}$. Zudem fällt er deutlich früher unter 0.