9. Abgabe

Philip Laskowicz | Matr.Nr. 35569183 | philip.laskowicz@student.uni-kassel.de

Montag, 9. Januar 2023 00:47

A1)

Die Gaußapproximation einer Funktion f(x) bzgl. der L^2-Norm über einem Intervall [a, b] in einem Polynomraum Pn ist ein Polynom pn (x) ∈ Pn, das die folgende Eigenschaft hat:

∫_a^b [(f(x) - pn(x))^2] dx ist minimal

Um die Gaußapproximation der Funktion f(x) = 3x^2 bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall [0, 2] im Polynomraum P0 zu bestimmen, müssen wir also das Polynom p0(x) ∈ P0 finden, das die kleinstmögliche Integralwerte von [(f(x) - p0(x))^2] über dem Intervall [0, 2] hat.

Da P0 das Polynomraum der Konstanten ist, besteht p0(x) aus einer einzigen Konstanten c. Das Integral von [(f(x) - p0(x))^2] über dem Intervall [0, 2] lässt sich wie folgt berechnen:

∫_0^2 [(3x^2 - c)^2] dx
= ∫_0^2 [9x^4 - 6cx^2 + c^2] dx
= [9x^5/5 - 3cx^3/3 + c^2x]_0^2
= 9/52^5 - 3/32c + 2c^2 - (9/50^5 - 3/30c + 0c^2)
= 32 - 4c + 4c^2

Um das Integral zu minimieren, müssen wir das Quadrat 4c^2 minimieren. Das erreichen wir, indem wir c = 0 setzen, da c = 0 das einzige Minimum von 4c^2 ist.

Daher ist die Gaußapproximation der Funktion f(x) = 3x^2 bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall [0, 2] im Polynomraum P0 das Polynom p0(x) = 0.

Um die Gaußapproximation der Funktion f(x) = 3x^2 bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall [0, 2] im Polynomraum P1 zu bestimmen, müssen wir das Polynom p1(x) ∈ P1 finden, das die kleinstmögliche Integralwerte von [(f(x) - p1(x))^2] über dem Intervall [0, 2] hat.

Da P1 das Polynomraum der linearen Funktionen ist, besteht p1(x) aus einer linearen Funktion c + d*x. Das Integral von [(f(x) - p1(x))^2] über dem Intervall [0, 2] lässt sich wie folgt berechnen:

∫_0^2 [(3x^2 - (c + dx))^2] dx
= ∫_0^2 [9x^4 - 6x^2(c + dx) + (c + dx)^2] dx
= [9x^5/5 - 3x^3(c + dx) + x(c + dx)^2]_0^2
= 9/52^5 - 3/32(c + 2d) + 2(c + 2d)^2 - (9/50^5 - 3/30c + 0c^2)
= 32 - 4(c + 2d) + 4(c + 2*d)^2

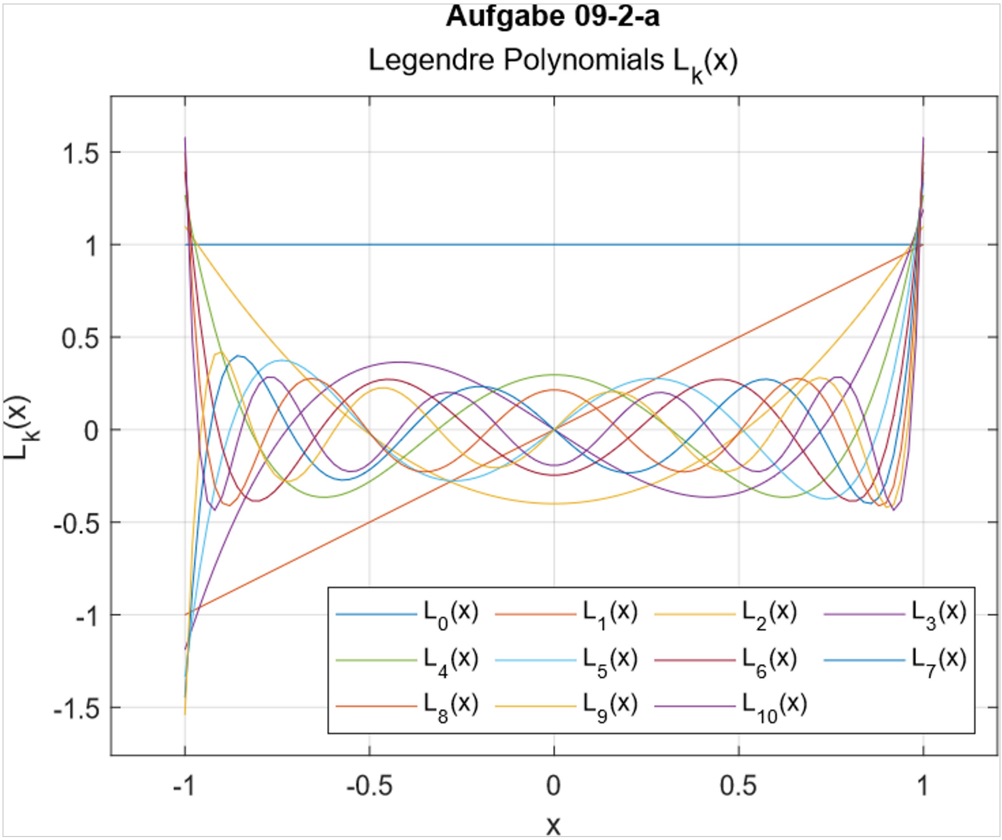
Um das Integral zu minimieren, müssen wir das Quadrat 4(c + 2d)^2 minimieren. Das erreichen wir, indem wir c + 2d = 0 setzen.

Daher ist die Gaußapproximation der Funktion f(x) = 3x^2 bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall [0, 2] im Polynomraum P1 das Polynom p1(x) = -2x.

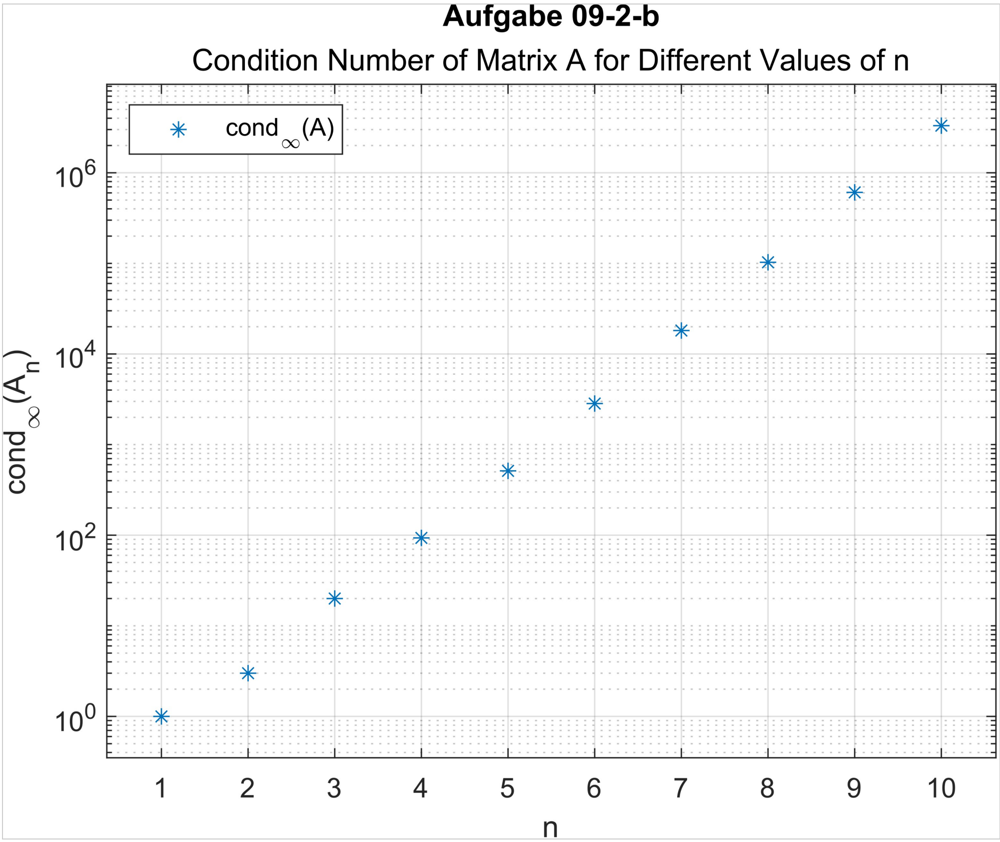
Die Gaußapproximationen der Funktion f(x) = 3x^2 bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall [0, 2] in den Polynomräumen P0 und P1 sind also p0(x) = 0 und p1(x) = -2x.

A2)

a)


Aufgabe 09-2-a
Legendre Polynomials $L_k(x)$
$L_k(x)$
x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
$L_0(x)$
$L_1(x)$
$L_2(x)$
$L_3(x)$
$L_4(x)$
$L_5(x)$
$L_6(x)$
$L_7(x)$
$L_8(x)$
$L_9(x)$
$L_{10}(x)$

b)



Die Ausgabe zeigt, dass die Konditionierung (Wert von $\text{cond}_\infty(A)$) für leicht steigende n sehr schnell ansteigt. Ferner wurde festgestellt, dass $\text{cond}_\infty(A)$ erst für $n > 20$ nicht mehr so stark steigt. Damit ändert sich der Lösungsvektor bei einer kleinen Änderung im Gleichungssystem stark ändert. Daher ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert und somit nicht geeignet.