Philip Laskowicz | Matr.Nr. 35569183 | philip.laskowicz@student.uni-kassel.de

Montag, 9. Januar 2023 00:47

A1

Die Gaußapproximation einer Funktion $f(x)$ bzgl. der L^2-Norm über einem Intervall $[a, b]$ in einem Polynomraum P_n ist ein Polynom $p_n(x) \in P_n$, das die folgende Eigenschaft hat:

$\int_a^b [(f(x) - p_n(x))^2]\,dx$ ist minimal

Um die Gaußapproximation der Funktion $f(x) = 3x^2$ bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 2]$ im Polynomraum P_0 zu bestimmen, müssen wir also das Polynom $p_0(x) \in P_0$ finden, das die kleinstmögliche Integralwerte von $[(f(x) - p_0(x))^2]$ über dem Intervall $[0, 2]$ hat.

Da P_0 das Polynomraum der Konstanten ist, besteht $p_0(x)$ aus einer einzigen Konstanten c. Das Integral von $[(f(x) - p_0(x))^2]$ über dem Intervall $[0, 2]$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\int_0^2 [(3x^2 - c)^2]\,dx = 2c^2 - 16c + \frac{288}{5}$$
$$\cancel{= \int_0^2 [9x^4 - 6cx^2 + c^2]\,dx}$$
$$\cancel{= [9x^5/5 - 3cx^3/3 + c^2x]_0^2}$$
$$\cancel{= 9/5 \cdot 2^5 - 3/3 \cdot 2c + 2c^2 - (9/5 \cdot 0^5 - 3/3 \cdot 0c + 0c^2)}$$
$$\cancel{= 32 - 4c + 4c^2}$$

~~Um das Integral zu minimieren, müssen wir das Quadrat $4c^2$ minimieren. Das erreichen wir, indem wir $c = 0$ setzen, da $c = 0$ das einzige Minimum von $4c^2$ ist.~~ Das Minimum liegt hier bei $c = 4$

Daher ist die Gaußapproximation der Funktion $f(x) = 3x^2$ bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 2]$ im Polynomraum P_0 das Polynom $p_0(x) = \cancel{0}$. 4

Um die Gaußapproximation der Funktion $f(x) = 3x^2$ bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 2]$ im Polynomraum P_1 zu bestimmen, müssen wir das Polynom $p_1(x) \in P_1$ finden, das die kleinstmögliche Integralwerte von $[(f(x) - p_1(x))^2]$ über dem Intervall $[0, 2]$ hat.

Da P_1 das Polynomraum der linearen Funktionen ist, besteht $p_1(x)$ aus einer linearen Funktion $c + d*x$. Das Integral von $[(f(x) - p_1(x))^2]$ über dem Intervall $[0, 2]$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\int_0^2 [(3x^2 - (c + dx))^2]\,dx = 2c^2 + 4c(d-4) + \frac{8d^2}{3} - 24d + \frac{288}{5}$$
$$\cancel{= \int_0^2 [9x^4 - 6x^2(c + dx) + (c + dx)^2]\,dx}$$
$$\cancel{= [9x^5/5 - 3x^3(c + dx) + x(c + dx)^2]_0^2}$$
$$\cancel{= 9/5 \cdot 2^5 - 3/3 \cdot 2(c + 2d) + 2(c + 2d)^2 - (9/5 \cdot 0^5 - 3/3 \cdot 0c + 0c^2)}$$
$$\cancel{= 32 - 4(c + 2d) + 4(c + 2*d)^2}$$

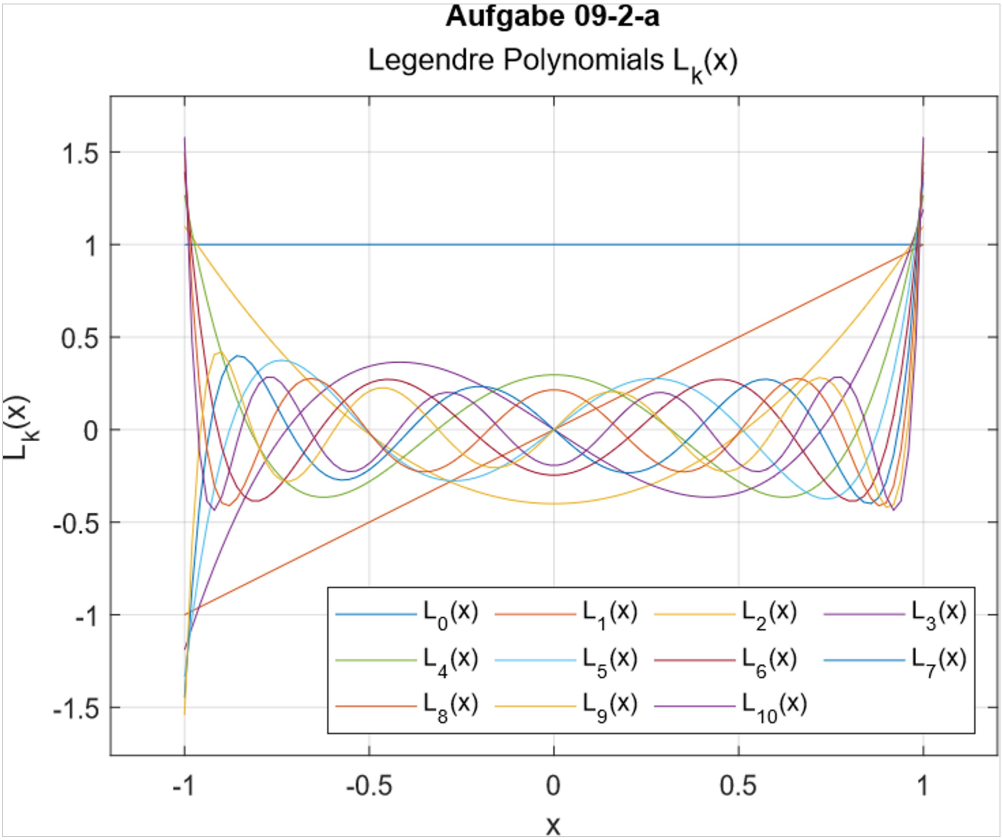
~~Um das Integral zu minimieren, müssen wir das Quadrat $4(c + 2d)^2$ minimieren. Das erreichen wir, indem wir $c + 2d = 0$ setzen.~~ Das Minimum liegt hier bei $c = -2$ und $d = 6$

Daher ist die Gaußapproximation der Funktion $f(x) = 3x^2$ bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 2]$ im Polynomraum P_1 das Polynom $p_1(x) = \cancel{-2x}$. $(-2, 6)$

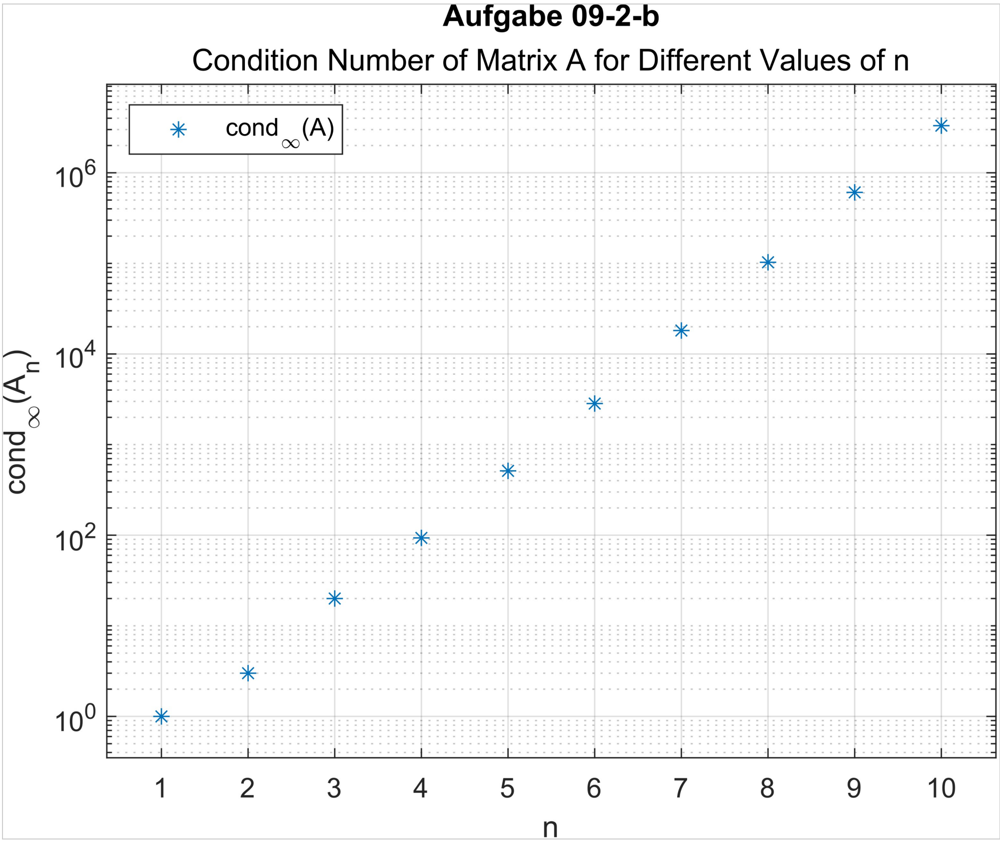
Die Gaußapproximationen der Funktion $f(x) = 3x^2$ bzgl. der L^2-Norm über dem Intervall $[0, 2]$ in den Polynomräumen P_0 und P_1 sind also $p_0(x) = \cancel{0}\ 4$ und $p_1(x) = \cancel{-2x}$. $(-2, 6)$

A2]

a)


Aufgabe 09-2-a
Legendre Polynomials $L_k(x)$
$L_k(x)$
x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
$L_0(x)$
$L_1(x)$
$L_2(x)$
$L_3(x)$
$L_4(x)$
$L_5(x)$
$L_6(x)$
$L_7(x)$
$L_8(x)$
$L_9(x)$
$L_{10}(x)$

b)



Die Ausgabe zeigt, dass die Konditionierung (Wert von $cond_\infty(A)$) für leicht steigende n sehr schnell ansteigt. Ferner wurde festgestellt, dass $cond_\infty(A)$ erst für $n > 20$ nicht mehr so stark steigt. Damit ändert sich der Lösungsvektor bei einer kleinen Änderung im Gleichungssystem stark ändert. Daher ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert und somit nicht geeignet.