Exercício 16 - Seção 15.1

Enunciado: Calcular $\iint_R x\,dA$, onde R é a região triangular com vértices em $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$.

Solução: A região R pode ser descrita como $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3\}$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_R x\,dA &= \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} x\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 x \left[-\frac{3}{2}x + 3\right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} dx \\
&= \int_0^2 x \left(\frac{3}{2}x - 3\right) dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^3 - 3x^2\right]_0^2 \\
&= \frac{3}{4}(2)^3 - 3(2)^2 \\
&= \boxed{-3}.
\end{aligned}$$

Exercício 30 - Seção 15.1

Enunciado: Avaliar $\iint_R \frac{1}{x+2y}\,dA$, onde R é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Solução: A integral dupla é

$$\iint_R \frac{1}{x+2y}\,dA = \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{x+2y}\,dy\,dx.$$

Integrando em relação a y, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{x+2y}\,dy &= \frac{1}{2}\ln|x+2y|\Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\ln|x+4|.
\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na integral dupla, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{1}{x+2y}\,dA &= \int_0^1 \frac{1}{2}\ln|x+4|\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln|x+4|\,dx.
\end{aligned}$$

Integrando em relação a x por partes, temos:

$$\int \ln|x+4|\,dx = x\ln|x+4| - x + C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{1}{x+2y}\,dA &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln|x+4|\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[(x\ln|x+4| - x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[(1\ln|1+4| - 1) - (0\ln|0+4| - 0)\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercício 32 - Seção 15.1

Enunciado: Avaliar $\iint_R y^2\,dA$, onde R é a região delimitada pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Solução: A região R pode ser representada na forma polar como $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Portanto, a integral dupla é

$$\begin{aligned}
\iint_R y^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\sin^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\int_1^2 r^2\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2 d\theta \\
&= \frac{7}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta &= \frac{7}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{7}{6}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \boxed{\frac{7\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercício 42 - Seção 15.1

Enunciado: Calcular $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dA$, onde R é a região limitada pelo círculo $x^2+y^2=a^2$.

Solução:

Usando coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{r^2}drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dA = \frac{2\pi a^3}{3}$.