Exercício 44 - Seção 15.8

Enunciado: Calcular a integral tripla $\iiint_E z, dV$, onde E é o sólido que fica abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Resolução O sólido E é descrito na condição $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Podemos descrever o sólido E na coordenadas esféricas como $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq \rho \leq a \sin\theta$. Então temos:

$$
\begin{aligned}
\iiint_E z, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sin\theta} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\theta, d\rho, d\theta, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\phi, d\theta, d\phi \int_0^{a\sin\theta} \rho^3, d\rho \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\phi \cdot \frac{a^4 \sin^4\theta}{4}, d\theta, d\phi \\
&= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos\phi, d\phi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5\theta, d\theta \\
&= \frac{a^4}{4} \cdot 0 \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, a integral tripla $\iiint_E z, dV$ é igual a 0.