Exercício 6 - Seção 15.7

Enunciado: Calcule o momento de massa em relação ao plano xy do sólido E que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre os planos $z = 0$ e $z = 1$, se a densidade em cada ponto é proporcional à distância ao eixo z.

Resolução Usando coordenadas cilíndricas, as integrais ficam:

$$M = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^1 \rho^3 \sin^2\phi, d\rho, dz, d\theta$$

Simplificando e resolvendo as integrais, temos:

$$\begin{aligned}
M &= 2\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^1 \rho^3 \sin^2\phi, d\rho, dz, d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}, d\theta \int_1^2, dz \int_0^1 \rho^3 \sin^2\phi, d\rho \\
&= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, o momento de massa em relação ao plano xy do sólido E é $\frac{2\pi}{3}$.

Exercício 8 - Seção 15.7

Enunciado: Calcule a massa do sólido limitado pelo parabolóide $z = 1-x^2-y^2$ e pelo plano $z = 0$, onde a densidade em cada ponto é proporcional à distância ao plano $z = 0$.

Resolução Usando coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} \rho \cdot \sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial \rho}^2 + \frac{\partial z}{\partial \phi}^2}, dz, d\rho, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} \rho \cdot \sqrt{1 + 4\rho^2}, dz, d\rho, d\phi \\ &= \frac{\sqrt{17}}{6} \cdot \pi \end{aligned}$$

Portanto, a massa do sólido é $\frac{\sqrt{17}}{6} \cdot \pi$.

Exercício 30 - Seção 15.7

Enunciado: Calcule o momento de inércia do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$ em relação ao eixo z.

Resolução Usando coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_E \rho^2, dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^r \rho^3 \cdot \sin^2 \phi, dz, d\rho, d\phi \\
&= \frac{1}{4} \cdot \pi \int_0^1 r^4, dr \\
&= \frac{1}{20} \cdot \pi
\end{aligned}$$

Portanto, o momento de inércia do sólido em relação ao eixo z é $\frac{1}{20} \cdot \pi$.