

Exercício 16 - Seção 15.1

Enunciado: Calcular $\iint_R x \, dA$, onde R é a região triangular com vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 3)$.

Solução: A região R pode ser descrita como $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3\}$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}\iint_R x \, dA &= \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 x \left[-\frac{3}{2}x + 3 \right]_0^{-\frac{3}{2}x+3} dx \\ &= \int_0^2 x \left(\frac{3}{2}x - 3 \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{4}(2)^3 - 3(2)^2 \\ &= \boxed{-3}.\end{aligned}$$

Exercício 30 - Seção 15.1

Enunciado: Avaliar $\iint_R \frac{1}{x+2y} \, dA$, onde R é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Solução: A integral dupla é

$$\iint_R \frac{1}{x+2y} \, dA = \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{x+2y} \, dy \, dx.$$

Integrando em relação a y , temos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x+2y} \, dy &= \frac{1}{2} \ln |x+2y| \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln |x+4|.\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na integral dupla, temos:

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{1}{x+2y} \, dA &= \int_0^1 \frac{1}{2} \ln |x+4| \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln |x+4| \, dx.\end{aligned}$$

Integrando em relação a x por partes, temos:

$$\int \ln |x + 4| dx = x \ln |x + 4| - x + C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{1}{x + 2y} dA &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln |x + 4| dx \\ &= \frac{1}{2} [(x \ln |x + 4| - x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [(1 \ln |1 + 4| - 1) - (0 \ln |0 + 4| - 0)] \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exercício 32 - Seção 15.1

Enunciado: Avaliar $\iint_R y^2 dA$, onde R é a região delimitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: A região R pode ser representada na forma polar como $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto, a integral dupla é

$$\begin{aligned} \iint_R y^2 dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sin^2 \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \int_1^2 r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 d\theta \\ &= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta &= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{7}{6} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \boxed{\frac{7\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Exercício 42 - Seção 15.1

Enunciado: Calcular $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$, onde R é a região limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solução:

Usando coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r \sqrt{r^2} dr d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 dr d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} d\theta \\&= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\&= \frac{a^3}{3} [\theta]_0^{2\pi} \\&= \frac{2\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA = \frac{2\pi a^3}{3}$.