Exercício 12 - Seção 15.2

Enunciado: Encontre a massa do sólido que é obtido ao encher a caixa $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ com um material cuja densidade em cada ponto (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = 2xy + z$.

Solução:

A massa do sólido é dada por:

$$m = \iiint_R \rho(x, y, z)\, dV.$$

Usando coordenadas retangulares, temos:

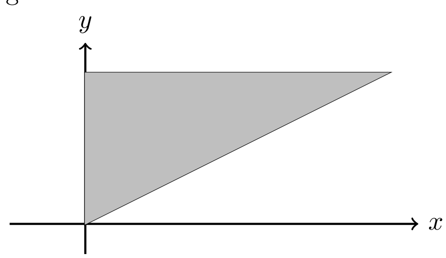
$$\begin{aligned}
m &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \left[xy^2 + \frac{z}{2}x^2 \right]_0^1 dy\, dz \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \left(y^2 + \frac{z}{2} \right) dy\, dz \\
&= \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} + \frac{z}{2}y \right]_0^1 dz \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{2} \right) dz \\
&= \left[\frac{z}{3} + \frac{z^2}{4} \right]_0^2 \\
&= \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a massa do sólido é $\frac{11}{3}$.

Exercício 36 - Seção 15.2

Enunciado: Calcule a integral dupla $\iint_D x^2, dA$, onde D é a região delimitada pelos eixos coordenados e a reta $y = x/2$.

A região D é um triângulo com vértices em $(0,0)$, $(2,1)$ e $(0,1)$, como mostra a figura abaixo:



Podemos expressar D como $D = (x,y), |, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x/2$.

Então, temos:

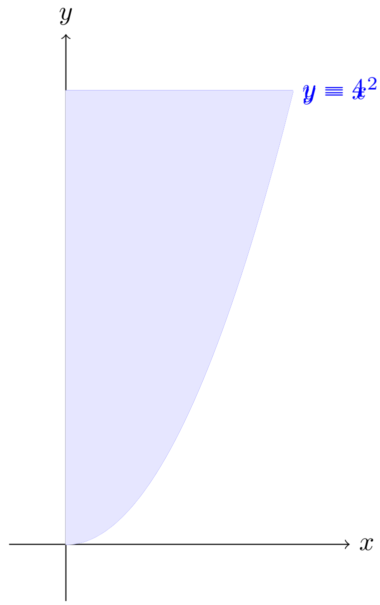
$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2, dA &= \int_0^2 \int_0^{x/2} x^2, dy, dx \\
&= \int_0^2 x^2 \cdot \left(\int_0^{x/2} dy \right), dx \\
&= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 x^3, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^2 \\
&= \frac{2^4}{2 \cdot 4} \\
&= \boxed{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a integral dupla $\iint_D x^2, dA$ tem valor igual a 2.

Exercício 46 - Seção 15.2

Enunciado: Esboce a regiao de integracao e mude a ordem de integracao.

Esboço da região de integração:



Mudança de ordem de integração:

$\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x,y)dydx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$

Esboço da nova região de integração: