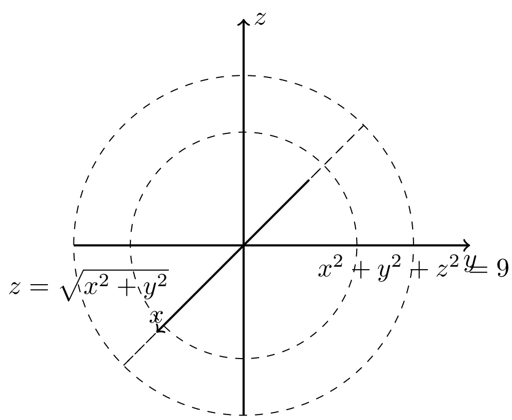
Exercício 6 - Seção 15.6

Enunciado: Calcular o volume da região que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Primeiro, vamos traçar um esboço da região. A figura abaixo mostra a seção transversal da região.



Para calcular o volume da região, usaremos uma integral tripla. Como a região é simétrica em relação ao eixo z, podemos usar coordenadas cilíndricas. As equações de transformação são:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$
$$z = z$$

O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pode ser escrito em coordenadas cilíndricas como $z = r$. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ pode ser escrita como $r^2 + z^2 = 9$. Como a região está abaixo da esfera, temos $z \leq \sqrt{9 - r^2}$. Portanto, a integral tripla é:

$$V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^r r dz dr d\theta$$

A região de integração D é o conjunto de pontos (r, θ, z) que satisfazem as desigualdades acima. A integral interna em z varia de 0 a r, a integral do meio em r varia de 0 a 3, e a integral externa em θ varia de 0 a 2π.

Resolvendo as integrais, obtemos:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^r r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{1}{2} r^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 d\theta \\
&= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume da região é $\frac{9}{2}\pi$.

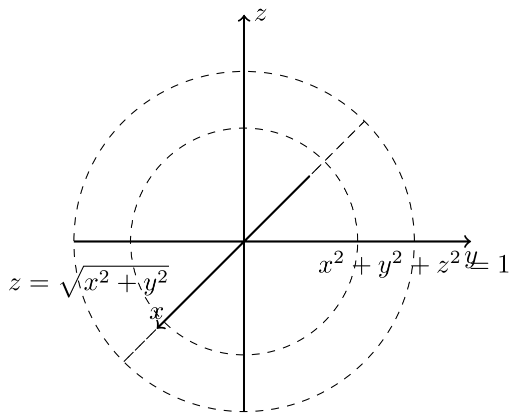
Exercício 10 - Seção 15.6

Enunciado: A região E é definida pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq z^2$ e $z^2 \leq 1$. Calcule

$$\iiint_E z^2 dV$$

Resolução:

Para resolver a integral tripla, primeiro precisamos determinar os limites de integração. A região E é definida por $x^2 + y^2 \leq z^2$ e $z^2 \leq 1$, ou seja, é a região entre um cone circular e uma esfera unitária. A figura a seguir ilustra a região E:



Como a região é simétrica em relação ao plano xy, podemos usar coordenadas cilíndricas. Temos que $x^2 + y^2 = r^2$, então a condição $x^2 + y^2 \leq z^2$ pode ser escrita como $r^2 \leq z^2$. Como a esfera unitária tem raio 1, a condição $z^2 \leq 1$ nos diz que $0 \leq z \leq 1$. Portanto, os limites de integração são:

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq r \leq z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Assim, a integral tripla fica:

$$\begin{aligned}
\iiint_E z^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z^2 r \, dr \, dz \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{4} z^5 \, dz \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$

Portanto, o valor da integral tripla é $\frac{\pi}{10}$.