Exercício 4 - Seção 15.3

Enunciado: Calcular a integral dupla de $f(x,y) = y$ sobre a região D limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e o eixo x positivo, na primeira interseção com o eixo x.

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dA &= \int_0^1 \int_0^\pi f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi r\sin\theta \cdot r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 [-r\cos\theta]_0^\pi\, r\,dr \\
&= \int_0^1 2r^2\,dr \\
&= \left[\frac{2}{3}r^3\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, a integral dupla de $f(x,y) = y$ sobre a região D é $\frac{2}{3}$.

Exercício 36 letra ”a” - Seção 15.3

Enunciado: Calcule a integral dupla $\iint_D e^{x^2-y^2}dA$, onde D é a região delimitada pelo triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$.

Solução. A região D é um triângulo, portanto podemos integrar sobre ele usando a integral dupla em coordenadas retangulares ou em coordenadas polares. Vamos usar coordenadas polares, pois a função integranda tem um termo da forma x^2-y^2, que sugere a mudança de coordenadas. A equação da hipotenusa do triângulo é $y=2x$, portanto a região D pode ser descrita pelas seguintes desigualdades:

$$0 \leq r \leq 2\sin\theta$$
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Assim, a integral dupla pode ser escrita como

$$\iint_D e^{x^2-y^2}dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sin\theta} re^{r^2\cos 2\theta}drd\theta.$$

Fazendo a substituição $u=r^2$, $du=2rdr$, obtemos

$$\iint_D e^{x^2-y^2}dA = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\sin^2\theta} e^{u\cos 2\theta}dud\theta.$$

Fazendo a substituição $v=u\cos 2\theta$, $dv=-2u\sin 2\theta d\theta$, obtemos

$$\iint_D e^{x^2-y^2}dA = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin 2\theta}\left[e^{-4\sin^2\theta}-1\right]d\theta.$$

Podemos aproximar a integral acima usando um método numérico, ou podemos deixar a integral na forma acima como resposta.