土木 4A 109302512 陳泰安

Prob 3.

Weak form： $\int_0^2 (u'\bar{u}' - u'\bar{u} - x\bar{u})dx - 2\bar{u}_{(2)} = 0$

1. 設定元素個數

```
% 設參數
n_ele = 2;              % 元素個數
nodes = n_ele+1;         % 節點個數
L = 2;                  % 總長
h = L/n_ele;             % 個元素長
r_xk = h/2;              % dx/dξ 值
```

2.建立 K、U、F 的空矩陣

先建立空矩陣，以便之後將個元素之矩陣 Ke 合併。

a. K 矩陣大小為 nodes*nodes

b. F 向量大小為 nodes*1

c.U 向量大小為 nodes*1

```
K = zeros(nodes,nodes); % K 矩陣
F = zeros(nodes,1);     % F 向量
U = zeros(nodes,1);     % U 向量
```

3.定義 Shape function

$\underset{\sim}{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N1 \\ N2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}$，$\underset{\sim}{N}'(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{d\xi}{dx}$。與講義不同，此以 column vector 運算。

```
N1 = @(k) (1-k)/2;
N2 = @(k) (1+k)/2;
Ni = @(k) [N1(k); N2(k)];
Ni_pram = [-1/2; 1/2]*1/r_xk;
```

4.建置 for loop，分別計算個元素之 **Ke** 與 **f**^{b}。

a. 設置 $\underset{\sim}{\hat{x}}$ (x-hat)為每 element 的節點 xi 及 xi+1 值 $\underset{\sim}{\hat{x}} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$

```
for n = 1:n_ele
        x_h = [(n-1)*h;n*h];        % x_hat 每 elem.的節點 xi 及 xi+1 值
```

b. **Ke** 運算

$\int_0^2 (u'\bar{u}'-u'\bar{u}-x\bar{u})dx-2\bar{u}_{(2)}$ 此兩項為方陣，將其合併為 Ke 矩陣。

整理可得：

$\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}\int \underset{\sim}{N}'\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}-\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}\,dx\,\underset{\sim}{\hat{u}}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}\int_{-1}^{1} \underset{\sim}{N}'\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}-\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}\frac{dx}{d\xi}d\xi\,\underset{\sim}{\hat{u}}=\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}\int_{-1}^{1}(\underset{\sim}{N}'-\underset{\sim}{N})\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}\frac{dx}{d\xi}d\xi\,\underset{\sim}{\hat{u}}$

$\int_{-1}^{1}(\underset{\sim}{N}'-\underset{\sim}{N})\underset{\sim}{N}'^{\mathrm{T}}\frac{dx}{d\xi}d\xi$ 此式結果即為 **Ke** 矩陣。**Ke**= $\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ (非對稱)

計算步驟，先將積分式內各項組合存在 A 中，再將其積分得到 **Ke**。

再將個元素之 **Ke** 放進 **K** 矩陣中。**K**= $\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 \\ -0.5 & 2 & -1.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

```
A = @(k) (Ni_pram-Ni(k))*Ni_pram'*r_xk;  % (N'-N)N'*dx/dξ
Ke = integral(A,-1,1,'ArrayValue',true); % 將上式積分
K(n:n+1,n:n+1)=K(n:n+1,n:n+1)+Ke;        % 將各 elem.之 Ke 存入 K 矩陣
```

c. **f**^{b} 向量計算

$\int_0^2 (u'\bar{u}'-u'\bar{u}-x\bar{u})dx-2\bar{u}_{(2)}$ 將此項結果設為 **f**^{b} 向量。

可整理成：$\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}\int_{-1}^{1}\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{N}^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{\hat{x}}\frac{h_i d\xi}{2}$ 。

計算步驟，先將積分式內各項組合存在 B 中，再將其積分得到 **f**^{b}。

再將個元素之 **f**^{b} 放進 **F** 向量中。**F**= $\begin{bmatrix} 0.1667 \\ 1 \\ 0.8333 \end{bmatrix}$

```
B = @(k) Ni(k).*Ni(k)'*x_h*r_xk;        % N*N'*x_h*dx/dξ
fb = integral(B,-1,1,'ArrayValue',true); % 將上式積分
F(n:n+1) =F(n:n+1)+fb ;                % 將各 elem.之 fb 存入 F 矩陣
```

5.最後，加入邊界條件，計算節點位移

B.C.：$u(0)=2$ ，$u'(2)=2$

$$\Rightarrow \mathbf{F}=\begin{bmatrix} 0.1667 \\ 1 \\ 0.8333+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.1667 \\ 1 \\ 2.8333 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\hat{u}} = \underset{\approx}{K}^{-1} \underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 24.667 \end{bmatrix}$$

```
F(nodes) = F(nodes)+2;
u = inv(K(2:nodes,2:nodes))*F(2:nodes);
U(2:nodes) = U(2:nodes)+u;
```

6.顯示結果

```
disp(['Stiffness matrix = ',newline]);          disp(K)
disp(['Force vector = ',newline]);              disp(F)
disp(['Displacement value of each node = ',newline]); disp(U)
```

```
Stiffness matrix =

    1.5000   -1.5000         0
   -0.5000    2.0000   -1.5000
         0   -0.5000    0.5000

Force vector =

    0.1667
    1.0000
    2.8333

Displacement value of each node =

         0
   19.0000
   24.6667
```