

# המתמטיקה של אוריגמי

מוטי בן-ארי

<http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/>

גרסה 3.5

© 2020 Moti Ben-Ari

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

# תוכן עניינים

3	1	הקדמה
4	2	האקסיומות
21	3	חלוקת זווית לשלושה חלקים
25	4	הכפלת קוביה
30	5	השיטה של Lill למציאת שורשים
40	6	הקיפול של Beloch והריבוע של Beloch
45	א'	קישוריות לגיאוגברה
46	ב'	פיתוח הזהיות הטריגונומטריות
47	ג'	פרבולות
49	ד'	משיקים המשותפים לשתי פרבולות

# פרק 1

## הקדמה

מסמך זה מפתח את המתמטיקה של אוריגמי תוך שימוש במתמטיקה של בית-ספר תיכון. המשוואות של קווים ניתנים בצורה של שיפוע ונקודת חיתוך  $y = mx + b$ .

פרק 2 מפתח את משוואות של שבעת האקסיומות ביחד עם דוגמאות נומריות. באיורים, קווים נתונים מוצגים בקווים רגילים, קיפולים בקווים מקווקווים, קווי עזר בקווים מנוקדים, וחצים מנוקדים מראים את כיוון הקיפול של הנייר.

פעולות הקיפול יכולות לבנות כל אורך שניתן לבנות עם סרגל ומחוגה. נתונים  $a, b$ : ניתן לבנות

$$a + b, a - b, a \times b, a/b, \sqrt{a}. \quad [\text{פרק 4, 4}]$$

פעולת הקיפול חזקה יותר כי ניתן לבנות שורשים ממעולה שלוש. פרק 3 מציג שתי דרכים לחלק זווית לשלושה ופרק 4 מציג שתי דרכים להכפלת קוביה.

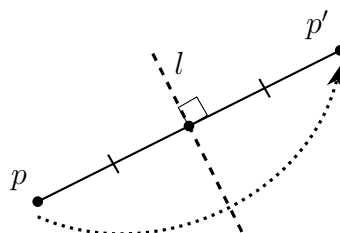
פרק 5 מסביר את השיטה הגיאומטרית של Eduard Lill למציאת שורשים ממשיים של פולינום. נציג את השיטה עבור פולינומים ממעלה שלוש. פרק 6 מביא את המימוש של Margharita P. Beloch לשיטה של Lill באמצעות קיפול.

נספח A מכיל קישורים לפרוייקטים בגיאוגרה המדגימים את האקסיומות. נספח B מפתח שוויונות טריגונומטריות. נספח C מסביר את ההגדרה הגיאומטרית של פברבולות.

## הגדרות

לפי כל אחד מהאקסיומות, קיים **קיפול** המניח נקודות וקווים על נקודות וקווים, כך שתנאים מסויימים מתקיימים. המונח קיפול בא מהפעולה באוריגמי של קיפול דף נייר, אבל כאן נשתמש בו עבור הקו הגיאומטרי שנוצר על ידי קיפול דף נייר.

ניתן למצוא הגדרות פורמליות ב-[פרק 5, 10]. לתשומת לב הקורא, **לפי ההגדרה**, כתוצאה מקיפול נוצרים **שיקופים**. נתונה נקודה  $p$ , השיקוף שלה סביב הקיפול  $l$  הוא נקודה  $p'$ , כך ש- $l$  הוא האנך האמצעי של קטע הקו  $\overline{pp'}$ :

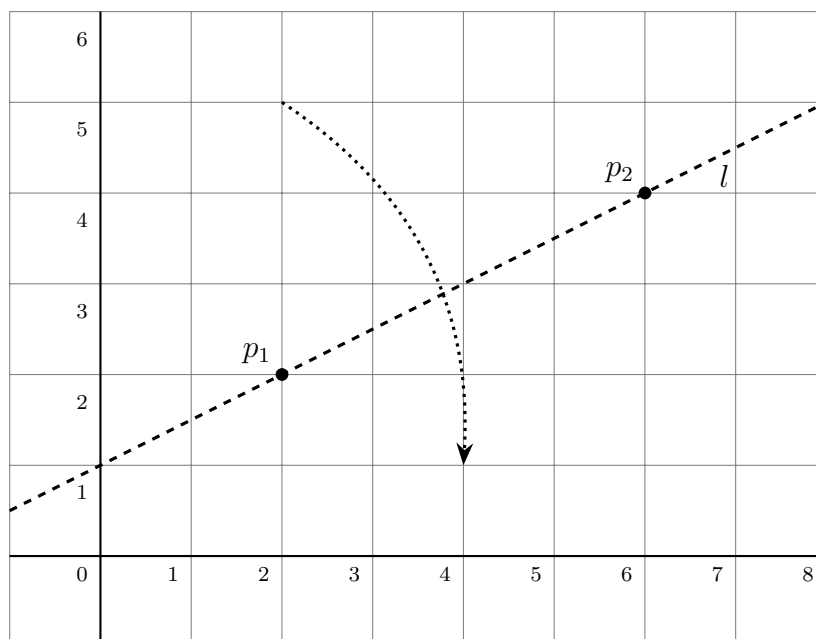


## פרק 2

# האקסיומות

### 2.1 אקסיומה 1

**אקסיומה** נתונות שתי נקודות שונות  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ , קיים קיפול יחיד  $l$  העובר דרך שניהן.



### פיתוח משוואת הקיפול

המשוואה של הקיפול  $l$  מתקבלת מהקואורדינטות של  $p_1$  ו- $p_2$ : השיפוע הוא המנה של הפרשי הקואורדינטות ונקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  מתקבלת מ- $p_1$ :

$$(2.1) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

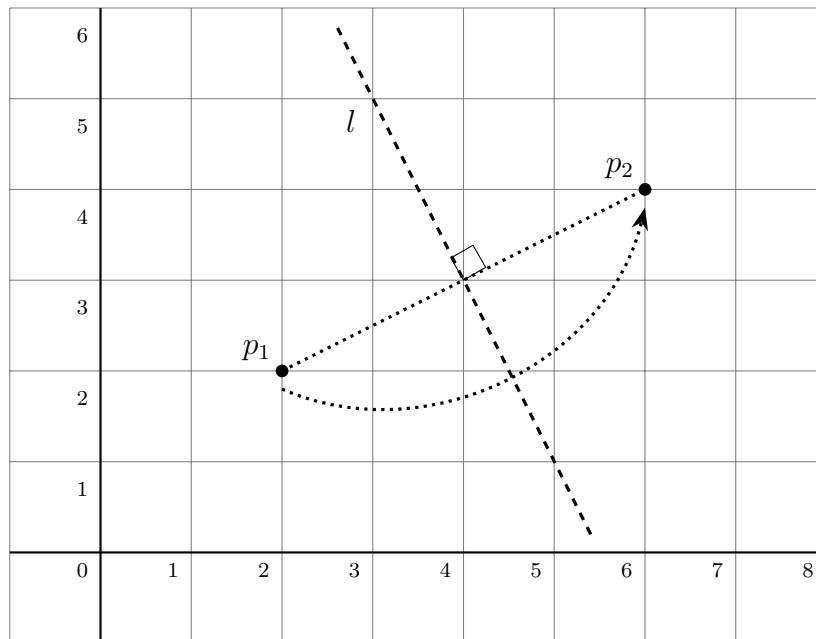
### דוגמה

נסמן  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$ . המשוואה של  $l$  היא:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{6 - 2} (x - 2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

## 2.2 אקסיומה 2

אקסיומה נתונות שתי נקודות שונות  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$  קיים קיפול יחיד  $l$  המניח את  $p_1$  על  $p_2$ .



### פיתוח משוואת הקיפול

הקיפול  $l$  הוא האנך האמצעי של  $\overline{p_1p_2}$ . השיפוע שלו הוא ההופכי השלילי של השיפוע של הקו המחבר את  $p_1$  ו- $p_2$ .  $l$  עובר דרך נקודת האמצע בין שתי הנקודות:

$$(2.2) \quad y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right).$$

### דוגמה

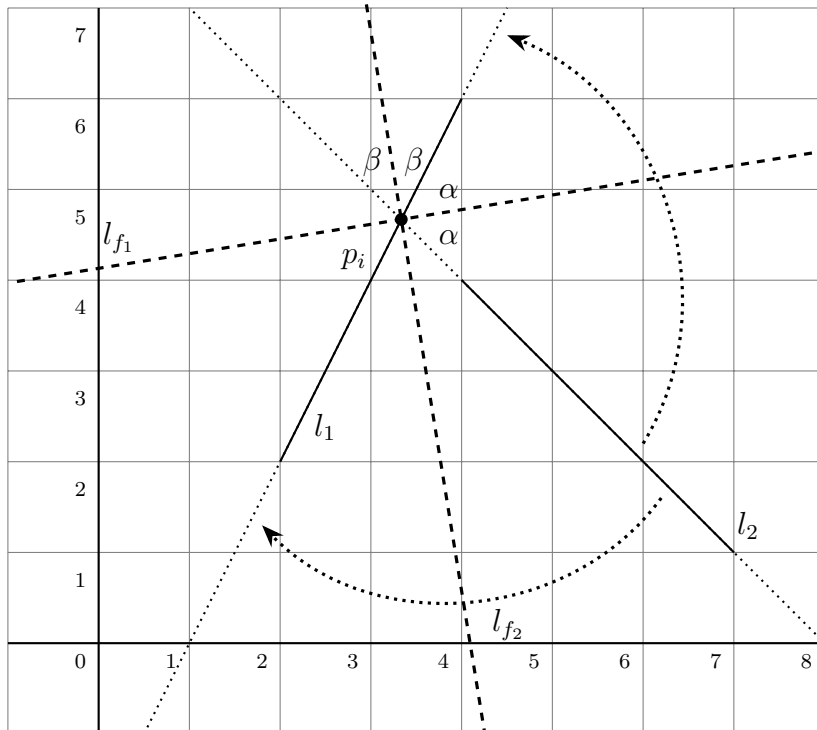
נסמן  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$  המשוואה של  $l$  היא:

$$y - \left( \frac{2+4}{2} \right) = -\frac{6-2}{4-2} \left( x - \left( \frac{2+6}{2} \right) \right)$$

$$y = -2x + 11.$$

## 2.3 אקסיומה 3

אקסיומה נתונים שני קווים  $l_1$  ו- $l_2$ , קיים קיפול  $l$  המניח את  $l_1$  על  $l_2$ .



**פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים מקבילים**

אם הקווים מקבילים,  $l_1$  הוא  $y = mx + b_1$  ו- $l_2$  הוא  $y = mx + b_2$ . הקיפול הוא הקו המקביל ל- $l_1, l_2$  וחצי המרחק ביניהם:  $y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}$ .

**פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים נחתכים**

אם הקווים נחתכים,  $l_1$  הוא  $y = m_1x + b_1$  ו- $l_2$  הוא  $y = m_2x + b_2$ .

נקודת החיתוך של שני הקווים, הוא:  $p_i = (x_i, y_i)$

$$m_1x_i + b_2 = m_2x_i + b_2$$

$$x_i = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$$

$$y_i = m_1x_i + b_1.$$

## דוגמה

נסמן ב- $l_1$  את הקו  $y = 2x - 2$ , ונסמן ב- $l_2$  את הקו  $y = -x + 8$ . נקודת החיתוך היא:

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67.\end{aligned}$$

## פיתוח משוואת השיפוע של חוצה הזווית

שני קווים יוצרים זווית בנקודות החיתוך, למעשה, שני זוגות של זוויות קודקודיות. הקיפולים הם חוצי הזווית שלהן.

אם הזווית של  $l_1$  יחסית לציר ה- $x$  הוא  $\theta_1$  והזווית של  $l_2$  יחסית לציר ה- $x$  הוא  $\theta_2$ , אזי קיפול הוא הקו היוצר זווית של  $\theta_b = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  יחסית לציר ה- $x$ .

$\tan \theta_1 = m_1$  ו- $\tan \theta_2 = m_2$  נתונים ו- $m_b$ , השיפוע של חוצה הזווית, הוא:

$$m_b = \tan \theta_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

פיתוח המשוואה מחייב שימוש בשוויונות הטריגונומטריות:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_1 + \alpha_2) &= \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.\end{aligned}$$

תחילה נמצא את  $m_s$ , השיפוע של  $\theta_1 + \theta_2$ :

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

אחר כך נמצא את  $m_b$ , השיפוע של חוצה הזווית:

$$\begin{aligned}m_b &= \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>פיתוח המשוואות הללו נתון בנספח ב'.

## דוגמה

עבור הקווים  $y = 2x - 2$  ו- $y = -x + 8$ , השיפוע של חוצה הזווית הוא:

$$m_s = \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3}$$
$$m_b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6.16, 0.162.$$

## פיתוח משוואת הקיפול

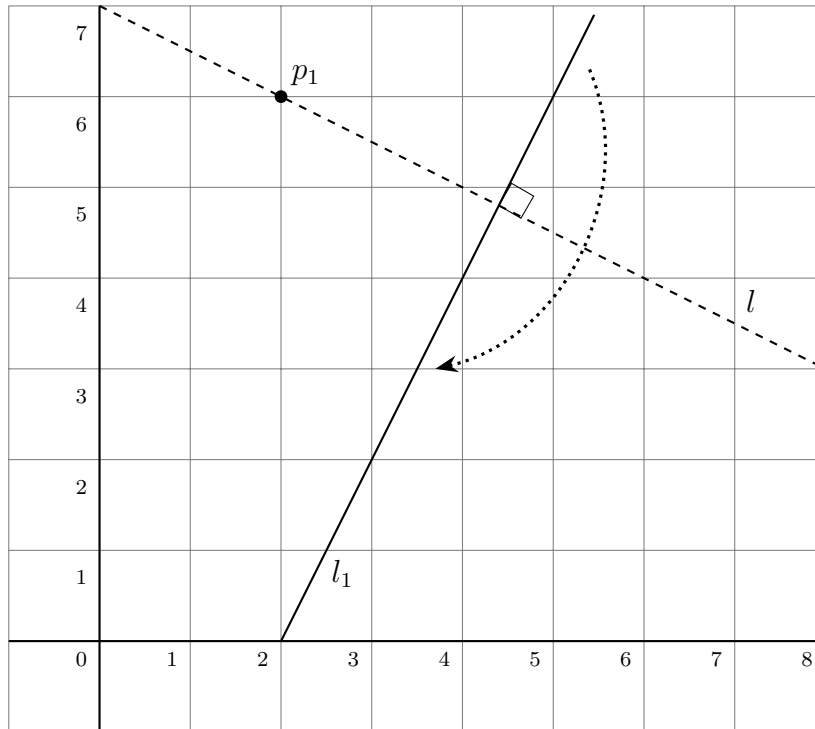
נפתח את המשוואה של הקיפול  $l_{f_1}$  באיור עם שיפוע חיובי. אנו יודעים את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של שני הקווים  $m_i = \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$ :

$$\frac{14}{3} = (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b$$
$$b = \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3}$$
$$y = (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x + 4.13.$$



## 2.4 אקסיומה 4

אקסיומה נתונים נקודה  $p_1$  וקו  $l_1$ , קיים קיפול יחיד  $l$  הניצב ל- $l_1$  שעובר דרך  $p_1$ .



### פיתוח משוואת הקיפול

נסמן את  $y = m_1x + b_1$  ב- $l_1$ , ונסמן  $p_1 = (x_1, y_1)$ .  $l$  ניצב ל- $l_1$  לכן השיפוע שלו הוא  $-\frac{1}{m_1}$ .  
הקו עובר דרך  $p_1$  ונוכל לחשב את החיתוך שלו  $b$  ולכתוב את המשוואה:

$$y_1 = -\frac{1}{m}x_1 + b$$

$$b = \frac{(my_1 + x_1)}{m}$$

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}.$$

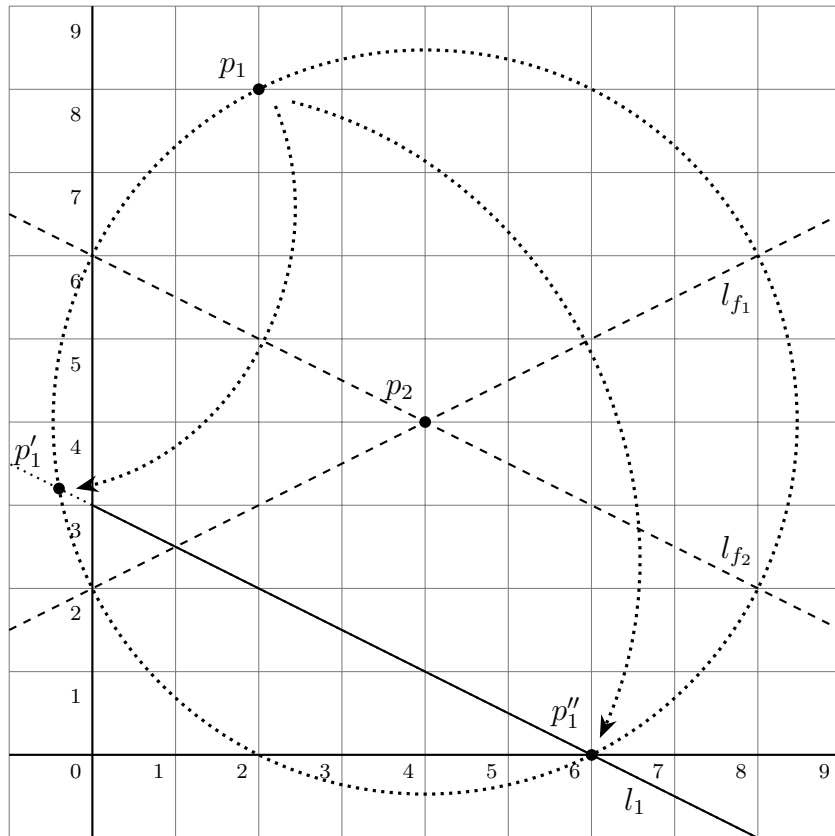
### דוגמה

נסמן ב- $p_1$  את הנקודה (2, 6) ונסמן ב- $l_1$  את הקו  $y = 2x - 4$ . המשוואה של הקיפול  $l$  היא:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

## 2.5 אקסיומה 5

אקסיומה נתונות נקודות  $p_1, p_2$  ונתון קו  $l_1$ , קיים קיפול  $l$  המניח את  $p_1$  מעל  $l_1$  והעובר דרך  $p_2$ .



עבור זוג נקודות נתון וקו נתון, יכולים להיות אפס, אחד או שני קיפולים.

### פיתוח משוואות עבור השיקופים

נסמן ב- $l$  את הקיפול העובר דרך  $p_2$ , ונסמן ב- $p'_1$  את השיקוף של  $p_1$  מסביב ל- $l$ . האורך של  $\overline{p_1 p_2}$  שווה לאורך של  $\overline{p_2 p'_1}$ . המקום הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק  $\overline{p_1 p_2}$  מ- $p_2$  הוא המעגל שמרכזו  $p_2$  והרדיוס שלו הוא האורך  $\overline{p_1 p_2}$ . נקודות החיתוך של מעגל זה עם הקו  $l_1$  הן המקומות האפשריים עבור  $p'_1$ .

נסמן ב- $l_1$   $y = m_1 x + b_1$ , ונסמן  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ . המשוואה של המעגל שמרכזו  $p_2$  עם רדיוס באורך של  $\overline{p_1 p_2}$  היא:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{כאשר}$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1 x + b_1) - y_2)^2 = (x - x_2)^2 + (m_1 x + (b_1 - y_2))^2 = r^2,$$

ונקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה- $x$  של נקודות החיתוך האפשריות:

$$(2.3) \quad x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1b - m_1y_2)x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0.$$

למשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות  $x'_1, x''_1$ , ונחשב את  $y'_1, y''_1$  מ- $y = m_1x + b_1$ . נקודות השיקוף הן  $p'_1 = (x'_1, y'_1), p''_1 = (x''_1, y''_1)$ .

#### דוגמה

נסמן ב- $p_1$  את הנקודה  $(2, 8)$  ונסמן ב- $p_2$  את הנקודה  $(4, 4)$ . נסמן ב- $l_1$  את הקו  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . משוואת המעגל היא:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = r^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 8)^2 = 20.$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל ונפשט כדי לקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה- $x$  של נקודות החיתוך (אפשר גם להשתמש משוואה 2.3):

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 3 - 4\right)^2 &= 20 \\ \frac{5}{4}x^2 - 7x - 3 &= 0 \\ 5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\ (5x + 2)(x - 6) &= 0. \end{aligned}$$

שתי נקודות חיתוך הן:

$$p'_1 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right) = (-0.4, 3.2), \quad p''_1 = (6, 0).$$

#### פיתוח המשוואות של הקיפולים

הקיפולים יהיו האנכים האמצעיים של  $\overline{p_1p'_1}$  ו- $\overline{p_1p''_1}$ . המשוואה של אנך אמצעי נתונה על ידי משוואה 2.2, שנעתיק כאן עבור  $p'_1$ :

$$(2.4) \quad y - \frac{y_1 + y'_1}{2} = -\frac{x'_1 - x_1}{y'_1 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x'_1}{2}\right).$$

### דוגמה

עבור  $p_1 = (2, 8)$  ו-  $p'_1 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$ , משוואת הקיפול עבור  $l_{f_1}$  היא:

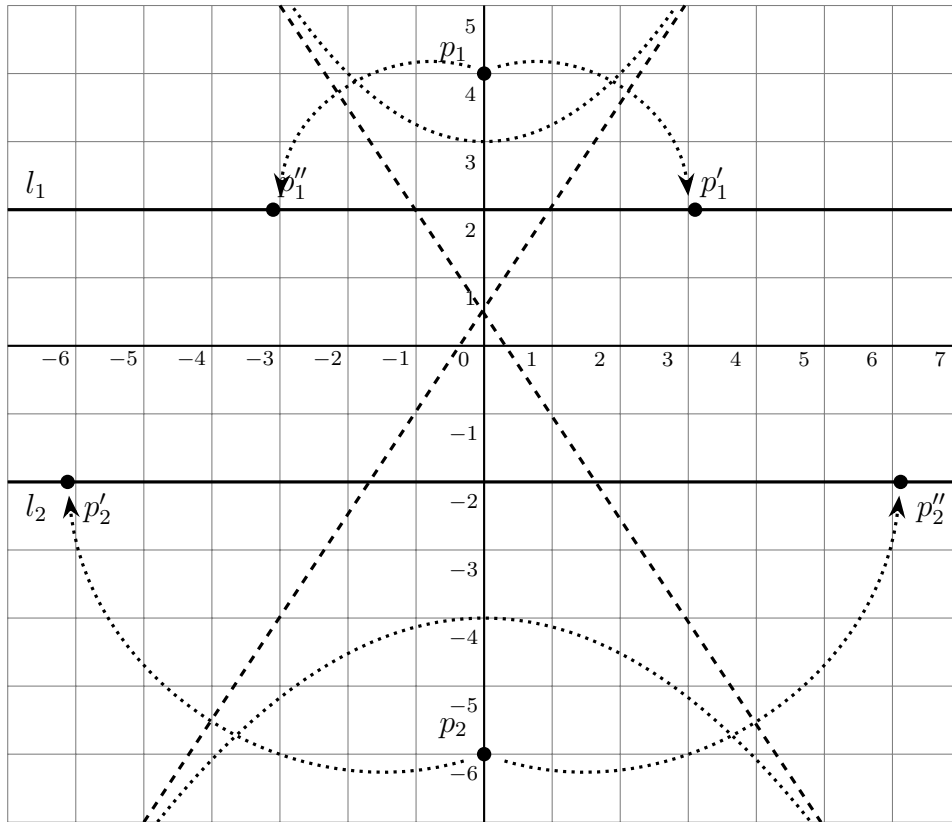
$$\begin{aligned}y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right) \\y &= -\frac{1}{2}x + 6.\end{aligned}$$

עבור  $p_1 = (2, 8)$  ו-  $p''_1 = (6, 0)$ , משוואת הקיפול עבור  $l_{f_2}$  היא:

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + 0}{2} &= -\frac{6 - 2}{0 - 8} \left(x - \frac{2 + 6}{2}\right) \\y &= \frac{1}{2}x + 2.\end{aligned}$$

## 2.6 אקסיומה 6

**אקסיומה** נתונות שתי נקודות  $p_1$  ו- $p_2$  ונתונים שני קווים  $l_1$  ו- $l_2$ , קיים קיפול  $l$  המניח את  $p_1$  על  $l_1$  ו- $p_2$  על  $l_2$ .



עבור זוג נקודות נתון וזוג קווים נתון, יכולים להיות אפס, אחד, שניים או שלושה קיפולים. ניתן למצוא הוכחה ב-[5, פרק 10]; בנספח ד' הבאנו דוגמאות גרפיות לארבעת האפשרויות.

קיפול המניח את  $p_i$  על  $l_i$  הוא קו שמרחקו ל- $p_i$  שווה למרחקו ל- $l_i$ . המקום הגיאומטרי של נקודות שהן במרחק שווה מנקודה  $p_i$  ומקו  $l_i$  הוא פרבולה עם מוקד  $p_i$  (focus) ומדריך  $l_i$  (directrix). קיפול הוא כל קו המשיק לפרבולה. הצדקה מפורטת של טיעון זה נמצא בנספח ג'.

כדי שהקיפול יניח בו־זמנית את  $p_1$  על  $l_1$  ו- $p_2$  על  $l_2$ , הוא חייב להיות משיק משותף לשתי הפרבולות.

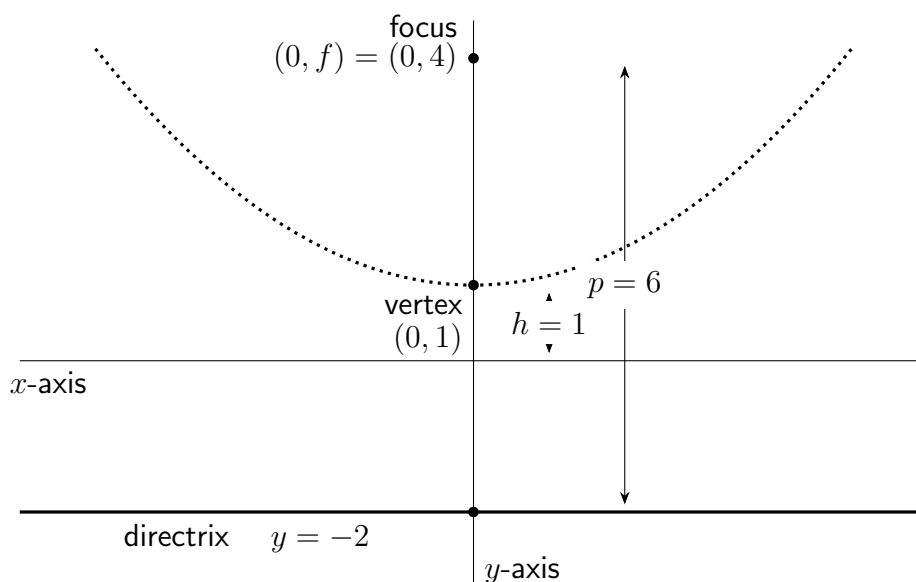
המשוואה עבור פרבולה שרירותית די מסובכת, לכן נגביל את הדיון לפרבולה שציר ה- $y$  הוא ציר הסמטריה. אין כאן מגבלה משמעותית כי עבור כל פרבולה קיימים הזזה וסיבוב המעבירים אותה כך שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה- $y$ .

נביא גם דוגמה עם פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה- $x$ .

## פיתוח הנקודה של הקיפול

תהי  $(0, f)$  מוקד של פרבולה עם מדריך  $y = d$ . נגדיר  $p = f - d$ , האורך (עם הסימן) של קטע הקו בין המוקד למדריך. אם קודקוד (vertex) הפרבולה נמצא על ציר ה- $x$ , המשוואה של הפרבולה היא  $y = \frac{x^2}{2p}$ . כדי להזיז את הפרבולה למעלה או למטה על ציר ה- $y$ , כך שהקודקוד

שלה היא  $(0, h)$ , יש להוסיף  $h$  למשוואת הפרבולה:  $y = \frac{x^2}{2p} + h$ .



נגדיר  $a = 2ph$  כך שמשוואת הפרבולה היא:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p}$$

$$x^2 - 2py + a = 0.$$

עבור הפרבולה באיור למעלה המשוואה היא:

$$x^2 - 2 \cdot 6y + 2 \cdot 6 \cdot 1 = 0$$

$$x^2 - 12y + 12 = 0.$$

נציב את המשוואה של קו **שרירתי**  $y = mx + b$  במשוואה עבור הפרבולה ונקבל משוואה עבור נקודות החיתוך של הקו והפרבולה:

$$x^2 - 2p(mx + b) + a = 0$$

$$x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) = 0.$$

הקו יהיה משיק לפרבולה אם ורק אם למשוואה ריבועית זו קיים **בדיוק** פתרון אחד אם ורק אם הדיסקרימיננטה היא אפס:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0.$$

<sup>2</sup>השתמשנו בסימון  $p_i$  עבור נקודות, כך שהשימוש כאן ב- $p$  עלול לבלבל, אבל סימון זה מקובל. השם הפורמלי עבור  $p$  הוא מחצית ה-latus rectum.

לאחר פישוט מתקבלת:

$$(2.5) \quad m^2 p^2 + 2pb - a = 0.$$

משוואה זו עם המשתנה  $m$  היא המשוואה עבור השיפועים של המשיקים לפרבולה. קיימים אינסוף משיקים כי עבור כל  $m$ , קיים  $b$  שגורם למשיק לזוז למעלה או למטה.<sup>3</sup> כדי למצוא את המשיקים המשותפים לשתי הפרבולות, יש לפתור את המשוואות של שתי הפרבולות, משוואות עם שני משתנים  $m$  ו- $b$ .

#### דוגמה

פרבולה 1: מוקד  $(0, 4)$ , מדריך  $y = 2$ , קודקוד  $(0, 3)$  ו- $p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot 2y + 12 = 0.$$

נציב לתוך משוואה 2.5 ונפשט:

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

פרבולה 2: מוקד  $(0, -4)$ , מדריך  $y = -2$ , קודקוד  $(0, -3)$  ו- $p = -2$ ,  $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$ . משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot (-2)y + 12 = 0.$$

נציב לתוך משוואה 2.5 ונפשט:

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$m^2 - b - 3 = 0,$$

הם  $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$  ו- $b = 0$ . המשיקים המשותפים שהם הקיפולים הם:

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

#### דוגמה

פרבולה 1 ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד  $(0, -6)$ , מדריך  $y = -2$ , קודקוד  $(0, -4)$  ו- $p = -4$ ,  $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$ . משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot (-4)y + 32 = 0.$$

נציב לתוך משוואה 2.5 ונפשט:

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$2m^2 - b - 4 = 0,$$

---

<sup>3</sup>פרט כמונח עבור קו המקביל לציר הסמטריה.

הם  $m = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1.53$  ו-  $b = \frac{2}{3}$ . יש שני משיקים משותפים שהם קיפולים:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

## דוגמה

כעת נגדיר פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה- $x$ .

פרבולה 1 ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד  $(4, 0)$ , מדריך  $x = 2$ , קודקוד  $(3, 0)$  ו-  $p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . משוואת הפרבולה היא:

$$y^2 - 4x + 12 = 0.$$

שימו לב שזו משוואה עם  $x$  ו- $y^2$  במקום  $x^2$  ו- $y$ , כך שלא ניתן להשתמש במשוואה 2.5 ונצטרך לפתח את משוואות מחדש.

נציב את המשוואה עבור קו:

$$(mx + b)^2 - 4x + 12 = 0$$

$$m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) = 0,$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונפשט:

$$(2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) = 0$$

$$-3m^2 - mb + 1 = 0.$$

אם ננסה לפתור את שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$-3m^2 - mb + 1 = 0,$$

נקבל משוואה ממעלה שלוש במשתנה  $m$ :

$$(2.6) \quad m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0.$$

למשוואה ממעלה שלוש יש לפחות פתרון ממשי אחד ולכן היותר שלושה פתרונות ממשיים, לכן יכול להיות אחד, שניים או שלשה משיקים משותפים. אפשר שלא יהיה אף משיק אחד אם אין פתרון לשתי המשוואות, למשל, כאשר פרבולה אחת נמצאת בתוך השנייה:  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x^2$ . המשוואה למציאת פתרונות למשוואה ממעלה שלוש די מסובכת, לכן השתמשתי במחשבון באינטרנט וקיבלתי שלושה פתרונות:

$$m = 3.73, \quad m = -1, \quad m = 0.27.$$



אם נבחר  $m = 0.27$ ,  $b = 3 - m^2 = 2.93$ , משוואת הקיפול היא:

$$y = 0.27x + 2.93.$$

מהצורה של המשוואה 2.6, נוכל לנחש ש-1 או -1 הוא פתרון:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -4$$

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

נחלק את המשוואה 2.6 ב- $m + 1 = m - (-1)$  ונקבל משוואה ריבועית  $m^2 - 4m + 1$  ששורשיה הם  $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$ .

### פיתוח המשוואות של השיקופים

נפתח את המיקום של  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  השיקוף של  $p_1 = (x_1, y_1)$  מסביב למשיק  $l_t$  שהמשוואה שלה היא  $y = m_t x + b_t$ . הפיתוח זהה עבור כל משיק ועבור  $p_2$ .

כדי לשקף את  $p_1$  מסביב ל- $l_t$ , נמצא את הקו  $l_p$  עם המשוואה  $y = m_p x + b_p$  שניצב ל- $l_t$  ועובר דרך  $p_1$ :

$$y = -\frac{1}{m_t}x + b_p$$

$$y_1 = -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p$$

$$y = \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right).$$

אז נמצא את נקודת החיתוך  $p_t = (x_t, y_t)$  של  $l_t$  ו- $l_p$ :

$$m_t x_t + b_t = \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right)$$

$$x_t = \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)}$$

$$y_t = m_t x_t + b_t.$$

קל למצוא את השיקוף  $p'_1$  כי נקודת החיתוך  $p_t$  היא נקודת האמצע בין  $p_1$  והשיקוף שלו  $p'_1$ :

$$x_t = \frac{x_1 + x'_1}{2}, \quad y_t = \frac{y_1 + y'_1}{2}$$

$$x'_1 = 2x_t - x_1, \quad y'_1 = 2y_t - y_1.$$

### דוגמה

נסמן  $p_1 = (0, 4)$  ונסמן ב- $l_1$  את  $y = \sqrt{3}x$ :

$$x_t = \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3}$$

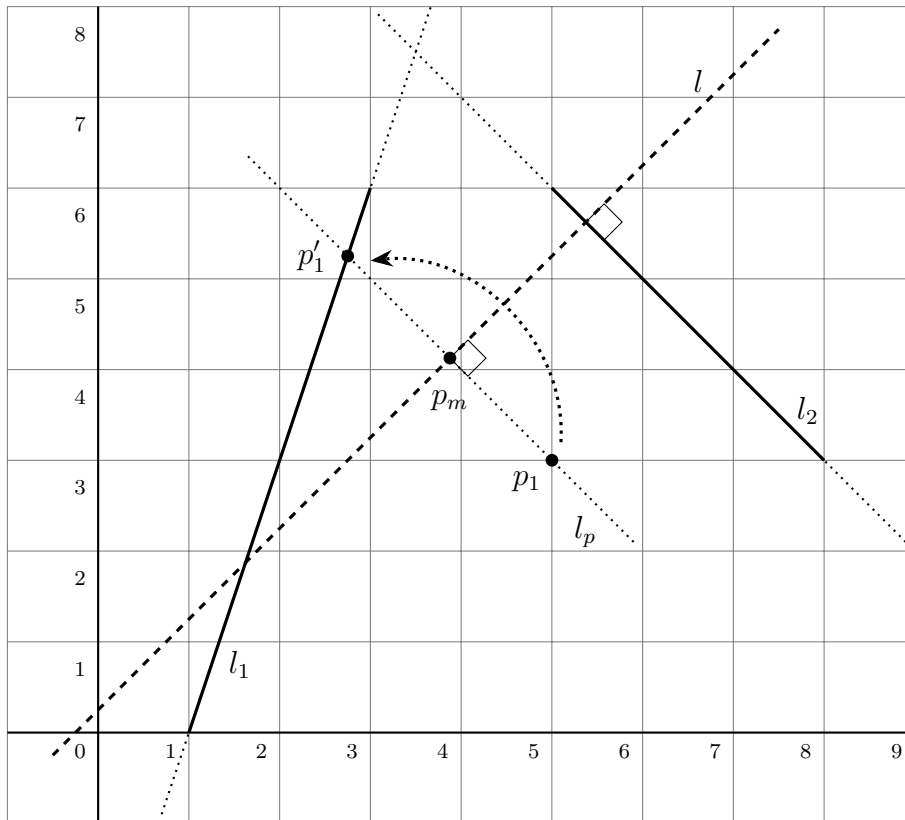
$$y_t = \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3$$

$$x'_1 = 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

$$y'_1 = 2y_t - y_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

## 2.7 אקסיומה 7

**אקסיומה** נתונה נקודה אחת  $p_1$ , ונתונים שני קווים  $l_1, l_2$ , קיים קיפול  $l$  הניצב ל- $l_2$  שהמניח את  $p_1$  על ל- $l_1$ .



### פיתוח משוואת הקיפול

נסמן  $p_1 = (x_1, y_1)$  נסמן ב- $l_1$  את  $y = m_1x + b_1$  ונסמן ב- $l_2$  את  $y = m_2x + b_2$ . הקיפול  $l$  ניצב ל- $l_2$ , וגם לקו  $l_p$  המכיל את  $\overline{p_1p'_1}$  והניצב ל- $l$ , לכן אפשר להסיק ש- $l_p$  מקביל ל- $l_2$ :

$$y = m_2x + b_p.$$

$l_p$  עובר דרך  $p_1$  כך ש- $y_1 = m_2x_1 + b_p$  והמשוואה שלו היא:

$$y = m_2x + (y_1 - m_2x_1).$$

$p'_1 = (x'_1, y'_1)$  השיקוף של  $p_1$  מסביב לקיפול  $l$ , הוא נקודת החיתוך של  $l_1$  ו- $l_p$ :

$$m_1x'_1 + b_1 = m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1)$$

$$x'_1 = \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2}$$

$$y'_1 = m_1x'_1 + b_1.$$

$p_m = (x_m, y_m)$  נקודת האמצע של  $l_p$  נמצא על הקיפול  $l$ :

$$(x_m, y_m) = \left( \frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$

הקיפול  $l$  הוא האנך האמצעי של  $\overline{p_1 p'_1}$  וכדי לחשב את המשוואה שלו, תחילה נחשב את נקודת החיתוך של  $l$  שעובר דרך  $p_m$ :

$$y_m = -\frac{1}{m_2}x_m + b_m$$

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$

המשוואה של הקיפול  $l$  היא:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left( y_m + \frac{x_m}{m_2} \right).$$

### דוגמה

נסמן  $p_1 = (5, 3)$  נסמן ב- $l_1$  את  $y = 3x - 3$

ונסמן ב- $l_2$  את  $y = -x + 11$ .

$$x'_1 = \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4}$$

$$y'_1 = 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4}$$

$$p_m = \left( \frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left( \frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right).$$

משוואת הקיפול היא:

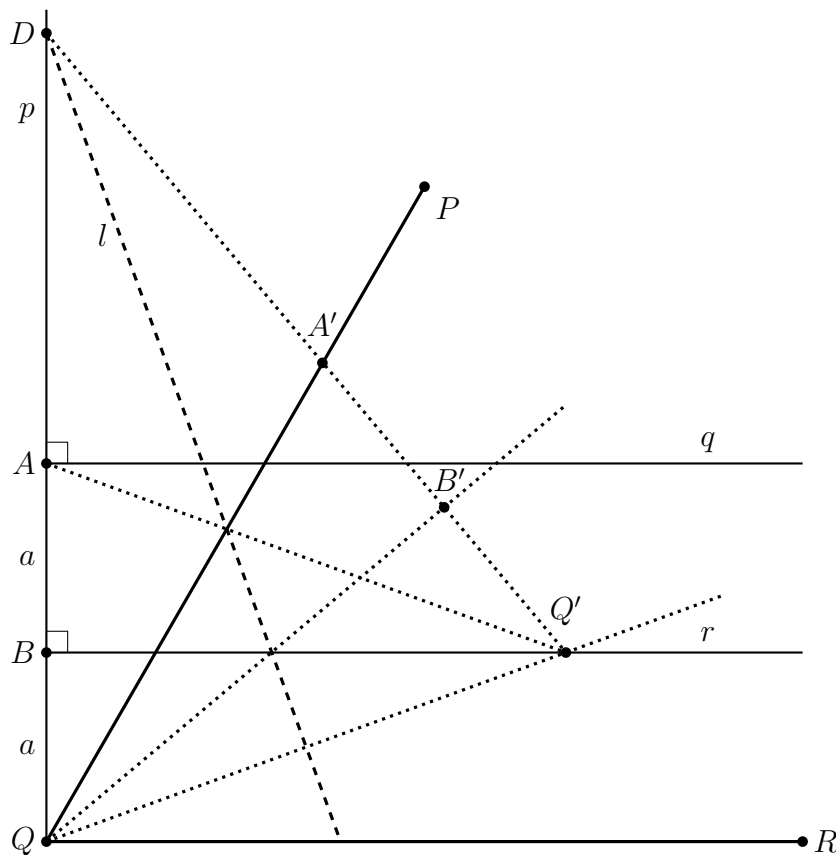
$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left( \frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1} \right) = x + \frac{1}{4}.$$

## פרק 3

# חלוקת זווית לשלושה חלקים

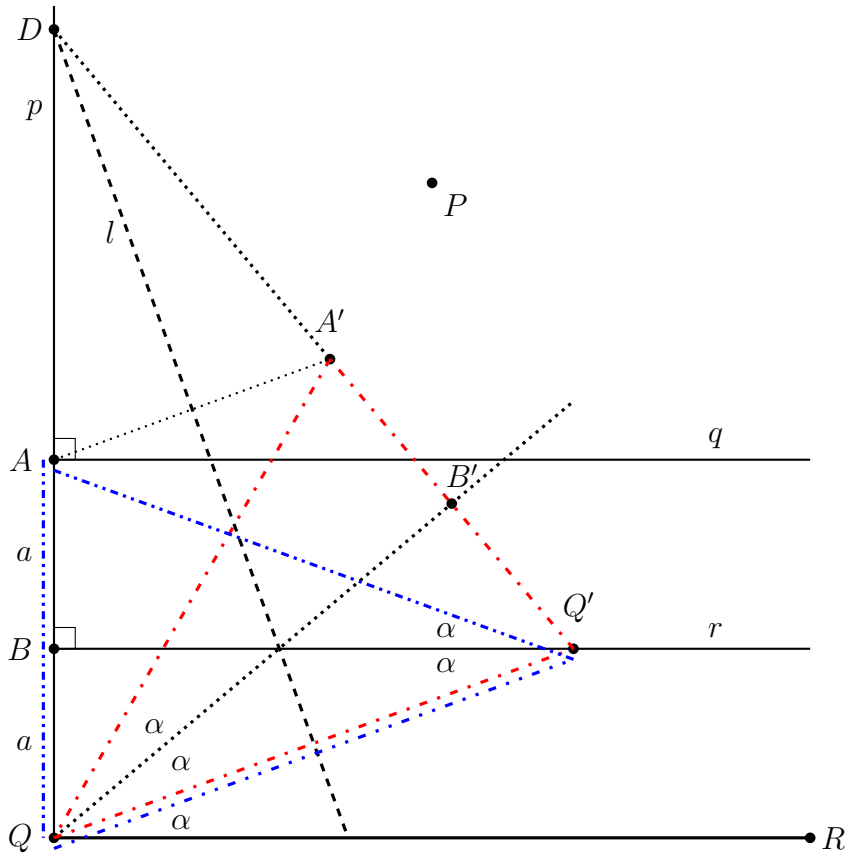
## 3.1 הבנייה של Abe לחלוקת זווית לשלושה חלקים

### 3.1.1 הבנייה



נתונה זווית חדה  $\angle PQR$ , יהי הקו  $p$  ניצב ל- $\overline{QR}$  ב- $Q$ . יהי הקו  $q$  ניצב ל- $p$  ב- $A$  שחותך את  $\overline{PQ}$ , ויהי הקו  $r$  ניצב ל- $p$  ב- $B$  במחצית הדרך בין  $Q$  ו- $A$ . לפי אקסיומה 6 בנה קיפול  $l$  המניח את  $A$  על  $\overline{PQ}$  בנקודה  $A'$ , ומניח את  $Q$  על  $r$  בנקודה  $Q'$ . נסמן ב- $B'$  את השיקוף של  $B$  מסביב ל- $l$ . בנה את הקווים  $\overline{QB'}$  ו- $\overline{QQ'}$ . טיעון: הזוויות  $\angle PQB'$ ,  $\angle B'QQ'$ ,  $\angle Q'QR$  מחלקות לשלושה חלקים את הזווית  $\angle PQR$ .

### 3.1.2 הוכחה ראשונה



הנקודות  $A', B', Q'$  הן שיקופים סביב אותו קו  $l$  של הנקודות  $A, B, Q$  הנמצאות על קו אחד  $\overline{DQ}$ , ולכן גם הן נמצאות על קטע קו אחד  $\overline{DQ'}$ . לפי הבנייה,  $\overline{AB} = \overline{BQ}$ ,  $\overline{BQ'} = \overline{AQ'}$  ניצב ל- $AQ'$  ו- $\overline{BQ'}$  הוא צלע משותף, ולכן  $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$  לפי צלע-זווית-צלע. מכאן ש:  $\angle AQ'B = \angle QQ'B = \alpha$ . כי  $\overline{Q'B}$  הוא האנך האמצעי של המשולש שוו-שוקיים  $\triangle AQ'Q$ .

לפי זוויות מתחלפות,  $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$ .

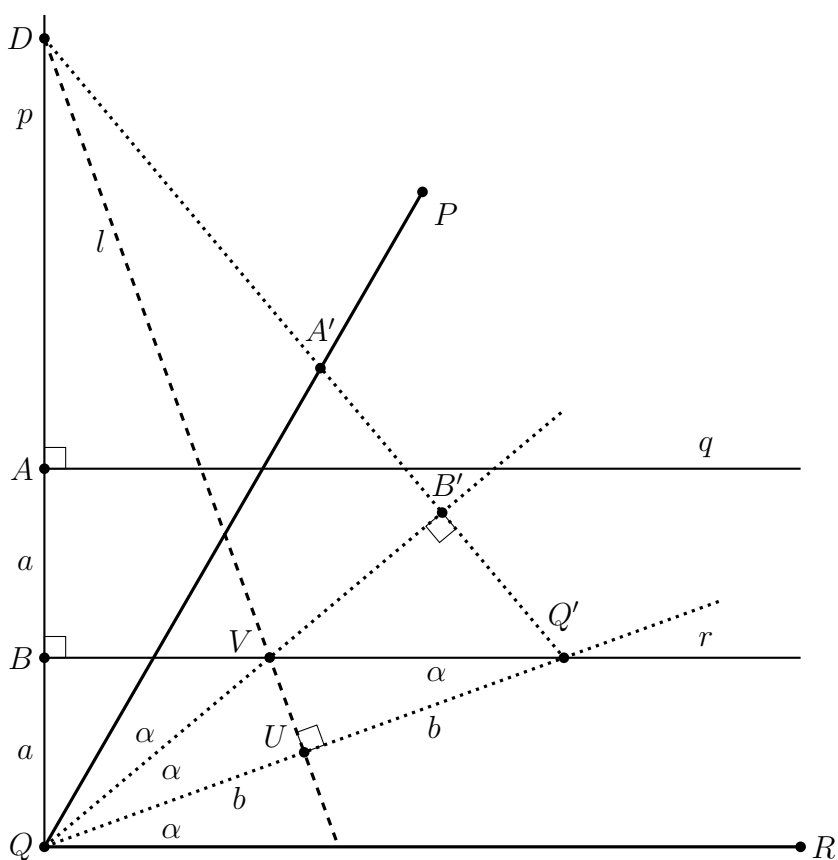
לפי שיקוף,  $\triangle AQ'Q \cong \triangle A'QQ'$ .

הוכחה: הקיפול  $l$  הוא האנך האמצעי של  $\overline{AA'}$  וגם של  $\overline{QQ'}$ ; בנה ניצבים מ- $A$  ו- $A'$  ל- $\overline{QQ'}$ ; אזי  $\overline{AQ} = \overline{A'Q'}$  לפי משולשים ישר זווית חופפים.  $\overline{AA'Q'Q}$  הוא טרפז שוו-שוקיים כך שהאלכסונים שווים  $\overline{AQ'} = \overline{A'Q}$ .

מכאן ש- $\overline{QB'}$ , השיקוף של  $\overline{QB}$ , הוא האנך האמצעי של משולש שוו-שוקיים  $\triangle A'QQ'$ , ו- $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$ .

<sup>1</sup>שני המשולשים מודגשים על ידי קווים שונים של מקפים ונקודות, וכן על ידי הצבעים אדום וכחול.

### 3.1.3 הוכחה שנייה

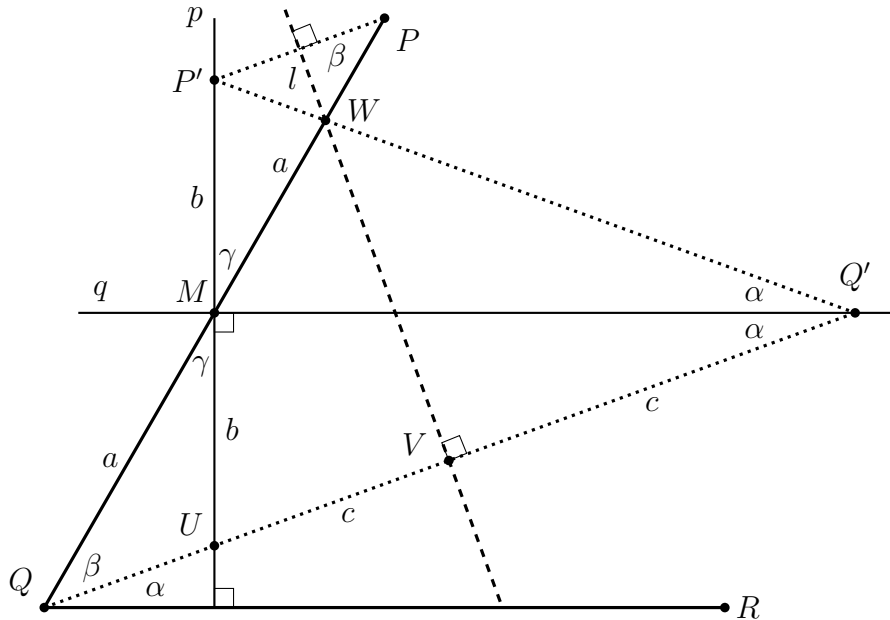


הקו  $l$  הוא קיפול, ולכן הוא האנך האמצעי של  $\overline{QQ'}$ . סמן ב- $U$  את נקודת החיתוך של  $l$  עם  $\overline{QQ'}$ , וסמן ב- $V$  את נקודת החיתוך שלו עם  $\overline{QB'}$ .  $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$  לפי צלע-זווית-צלע כי:  $\overline{VU}$  הוא צלע משותף, הזוויות ב- $U$  הן זוויות ישרות, ו- $\overline{QU} = \overline{Q'U} = b$ . מכאן ש- $\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$  ו- $\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$  לפי זוויות מתחלפות.

כמו בהוכחה הראשונה, הנקודות  $A', B', Q'$  הן כולן שיקופים סביב  $l$ , לכן הן כולן נמצאות על קטע קו אחד  $\overline{DQ'}$ , ו- $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$ . מכאן ש- $\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q'$  ו- $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$ .

## 3.2 הבנייה של Martin לחלוקת זווית לשלושה חלקים

### 3.2.1 הבנייה



נתונה זווית חדה  $\angle PQR$ , תהי  $M$  נקודת האמצע של  $\overline{PQ}$ . בנה  $p$  ניצב ל- $\overline{QR}$  העובר דרך  $M$  ובנה  $q$  ניצב ל- $p$  העובר דרך  $M$ .  $q$  מקביל ל- $\overline{QR}$ .  
 לפי אקסיומה 6, בנה קיפול  $l$  המניח את  $P$  ב- $p$  על  $P'$ , ומניח את  $Q$  ב- $Q'$  על  $q$ . ייתכן שקיים מספר קיפולים מתאימים; בחר את הקיפול החותך את  $\overline{PM}$ .  
 בנה את קטעי הקו  $\overline{PP'}$  ו- $\overline{QQ'}$ . סמן ב- $U$  את נקודת החיתוך של  $\overline{QQ'}$  עם  $p$ , וסמן ב- $V$  את נקודת החיתוך שלו עם  $l$ . סמן ב- $W$  את החיתוכים של  $\overline{P'Q'}$  עם  $l$ .<sup>2</sup>

### 3.2.2 הוכחה

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$  לפי זווית-צלע-זווית:  $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$  לפי זוויות מתחלפות;  $\overline{QM} = \overline{MP} = a$  כי  $M$  היא נקודת האמצע של  $\overline{PQ}$ ;  $\angle QMU = \angle PMP'$  הן זוויות קודקודיות. מכאן ש- $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$ .

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$  לפי צלע-זווית-צלע: הראנו ש- $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$ ; הזוויות ב- $M$  הן זוויות ישרות;  $\overline{MQ'}$  הוא צלע משותף. הגובה של המשולש שווה-שוקיים  $\triangle P'Q'U$  הוא חוצה הזווית  $\angle P'Q'U$  ולכן  $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$ .

$\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$  לפי צלע-זווית-צלע:  $\overline{QV} = \overline{Q'V} = c$  והזוויות ב- $V$  הן זוויות ישרות כי הקיפול הוא האנך אמצעי של  $\overline{QQ'}$ ;  $\overline{VW}$  הוא צלע משותף. מכאן ש- $\angle WQV = \beta = \angle WQ'V$ .  
 2.  $\alpha$  הראנו ש- $\angle PQR = \beta + \alpha = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$  ולכן  $\angle Q'QR$  היא שליש מ- $\angle PQR$ .

<sup>2</sup>לא ברור מאליו ש- $\overline{PQ}$  ו- $\overline{P'Q'}$  חותכים את  $l$  באותה נקודה.  $\triangle PP'W \sim \triangle QQ'W$  כך שהגבהים מחלקים את הזוויות  $\angle PWP'$ ,  $\angle WQW'$  בצורה דומה וחייבים להיות על אותו קו.



## פרק 4

### הכפלת קוביה

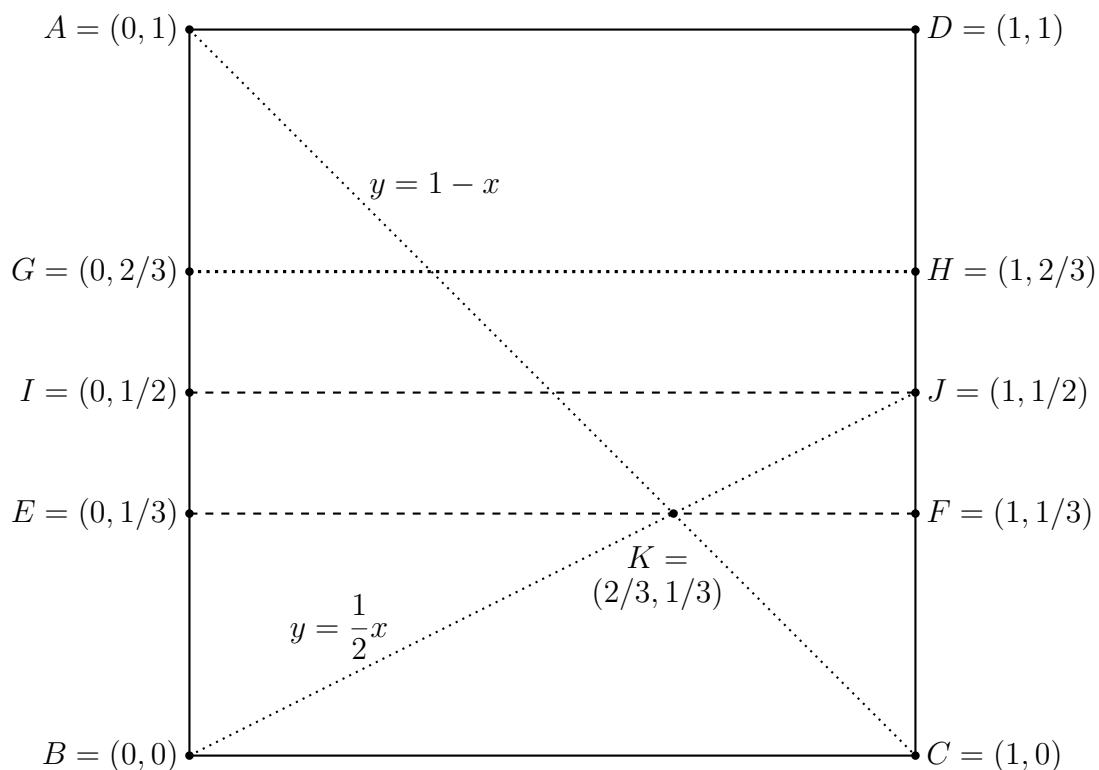
#### 4.1 הבנייה של Messer להכפלת קוביה

לקוביה בנפח  $V$  צלעות באורך  $\sqrt[3]{V}$ . נפח קוביה שנפחה פי שניים הוא  $2 \cdot V$ , כך שיש לבנות קטע קו באורך  $\sqrt[3]{2 \cdot V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$ . אם נוכל לבנות קטע קו באורך  $\sqrt[3]{2}$ , נוכל להכפיל באורך הנתון  $\sqrt[3]{V}$  כדי להכפיל את נפח הקוביה.

##### 4.1.1 חלוקת קטע קו לשלוש

[3] Lang מביא בניות יעילות עבור שברים רציונליים של אורכו של צלע של (דף נייר שהוא) ריבוע. כאן עלינו לחלק צלע של ריבוע לשלושה חלקים.

תחילה, קפל את הריבוע לחצי כדי למצוא את הנקודה  $J = (1, 1/2)$ . אחר כך, בנה את קטעי הקו  $\overline{AC}$  ו- $\overline{BJ}$ .



אפשר לחשב את הקואורדינטות של נקודה החיתוך  $K$  על ידי פתרון של שתי המשוואות הללו:

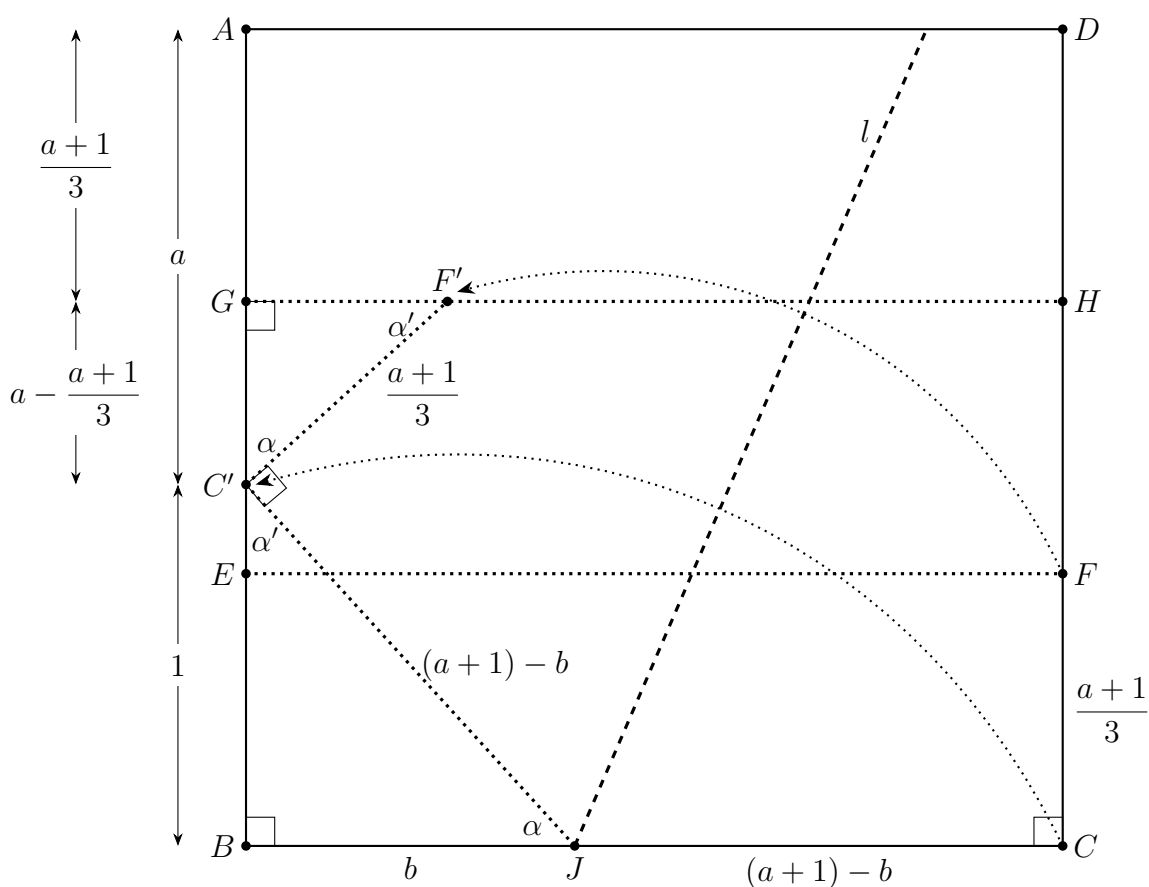
$$y = 1 - x$$

$$y = \frac{1}{2}x.$$

הפתרון הוא:  $x = 2/3, y = 1/3$

בנה את הקו  $\overline{EF}$  ניצב ל- $\overline{AB}$  כך שהוא עובר דרך  $K$ , ובנה את  $\overline{GH}$ , השיקוף של  $\overline{BC}$  סביב  $\overline{EF}$ . הצלע של הריבוע מחולק לשלושה חלקים.

### 4.1.2 בניית $\sqrt[3]{2}$



נסמן צלע של הריבוע  $a + 1$ . הבנייה תראה ש- $a = \sqrt[3]{2}$ .

נשמתש באקסיומה 6 כדי להניח את  $C$  ב- $C'$  על  $\overline{AB}$ , ולהניח את  $F$  ב- $F'$  על  $\overline{GH}$ . סמן את נקודת החיתוך של הקיפול עם  $\overline{BC}$  ב- $J$ , וסמן את אורכו של  $\overline{BJ}$  ב- $b$ . האורך של קטע הקו  $\overline{JC}$  הוא  $(a+1) - b$ .

לאחר ביצוע הקיפול, קטע הקו  $\overline{JC}$  הוא שיקוף של קטע הקו  $\overline{JC'}$  מאותו אורך, וקטע הקו  $\overline{CF}$  הוא שיקוף של קטע הקו  $\overline{C'F'}$  באותו אורך. חישוב פשוט מראה שאורכו של  $\overline{GC'}$  הוא:

$$(4.1) \quad a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}.$$

לבסוף,  $\angle FCJ$  היא זווית ישרה, לכן גם  $\angle F'C'J$  היא זווית ישרה.

$\triangle C'BJ$  הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פתגורוס:

$$\begin{aligned} 1^2 + b^2 &= ((a+1) - b)^2 \\ a^2 + 2a - 2(a+1)b &= 0 \\ b &= \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

נסמן  $\alpha = \angle GC'F'$ . נסמן  $\overline{GB}$ . כי הם מרכיבים קו ישר  $\angle GC'F' + \angle F'C'J + \angle JC'B = 180^\circ$  אז:

$$\angle JC'B = 180^\circ - \angle F'C'J - \angle GC'F' = 180^\circ - 90^\circ - \angle GC'F' = 90^\circ - \angle GC'F' = 90^\circ - \alpha.$$

נסמן  $\alpha' = 90^\circ - \alpha$ . המשולשים  $\triangle F'GC'$ ,  $\triangle C'BJ$  הם משולשים ישר-זווית, ולכן  $\angle C'JB = \alpha$  ו- $\angle C'F'G = \alpha'$ . מכאן שהמשולשים דומים וממשוואה 4.1 מתקבלת המשוואה:

$$\frac{b}{(a+1) - b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}.$$

נציב עבור  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}}{(a+1) - \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}} &= \frac{2a-1}{a+1} \\ \frac{a^2 + 2a}{a^2 + 2a + 2} &= \frac{2a-1}{a+1}. \end{aligned}$$

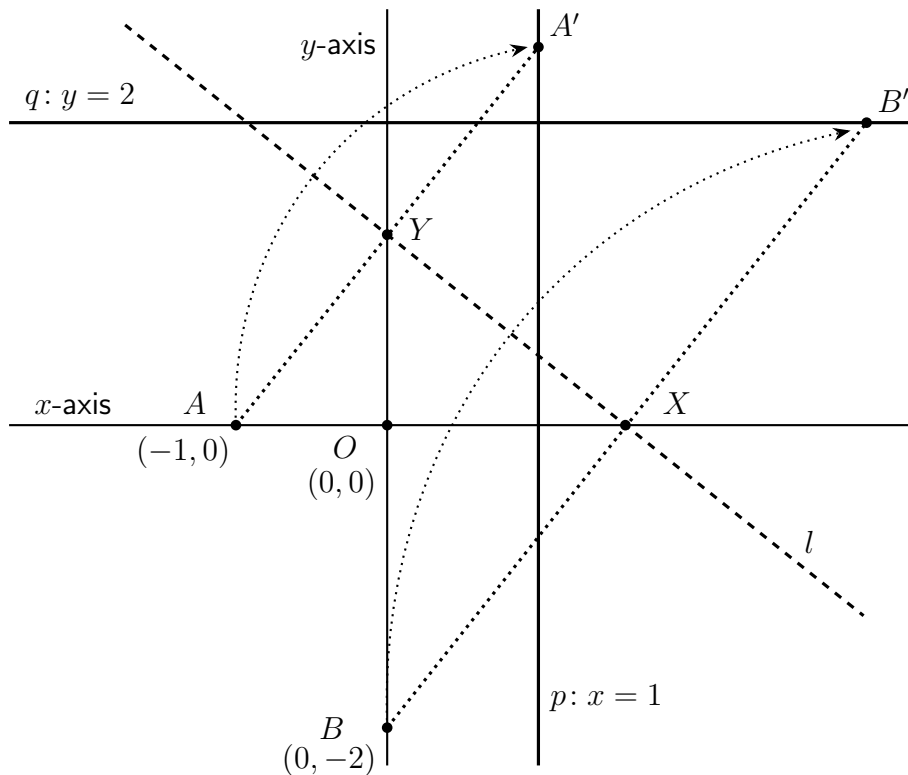
$$a^3 = 2 \text{ ו- } a = \sqrt[3]{2}.$$

## 4.2 הבנייה של Beloch להכפלת קוביה

ב-1936 Margharita P. Beloch נתנה הגדרה פורמלית לאקסיומה 6 (הנקרא לעתים הקיפול של Beloch). היא הראתה שניתן להשמתמש באקסיומה כדי לפתור משוואות ממעלה שלוש. כאן אנחנו נביא את השיטה שלה להכפלת קוביה. נדון בפתרון של משוואות ממעלה שלוש בפרקים 5, 6.

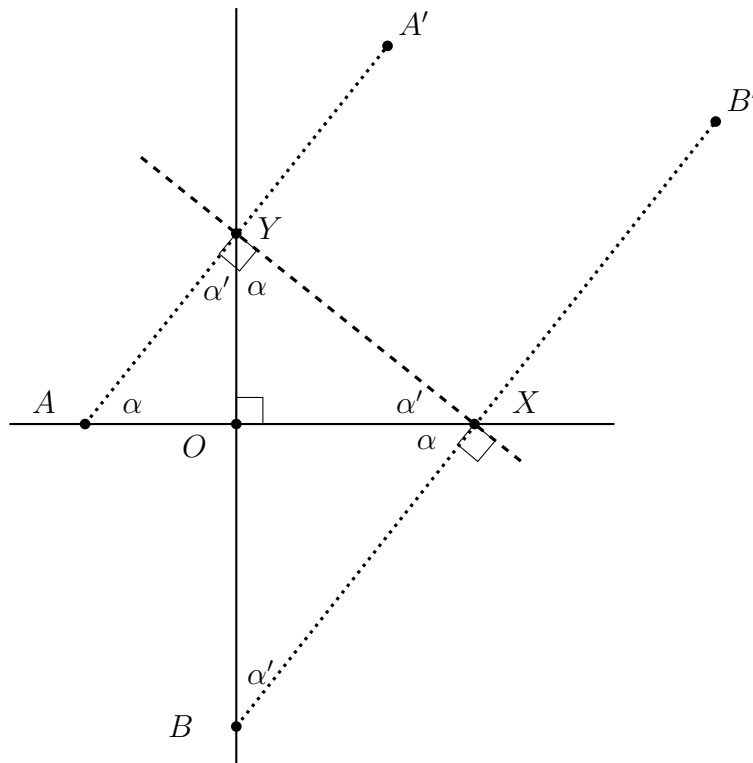
### 4.2.1 הבנייה

נסמן את הנקודה  $A$  ב- $(-1, 0)$  ואת הנקודה  $B$  ב- $(0, -2)$ . נסמן ב- $p$  את הקו  $x = 1$  וב- $q$  את הקו  $y = 2$ . לפי אקסיומה 6 ניתן לבנות קיפול  $l$  המניח את  $A$  ב- $A'$  על  $p$ , והמניח את  $B$  ב- $B'$  על  $q$ . נסמן ב- $Y$  את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה- $y$ , ונסמן ב- $X$  את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה- $x$ .



## 4.2.2 הוכחה

נחלץ איור פשוט יותר:



הקיפול הוא האנך האמצעי של  $\overline{AA'}$  ו- $\overline{BB'}$ . לכן  $\angle AYX$  ו- $\angle YXB$  הן זוויות ישר-זווית ו- $\overline{AA'}$  מקביל ל- $\overline{BB'}$ . לפי זוויות מתחלפות  $\angle XAO = \angle BYO = \alpha$ . אם זווית חדה אחת של משולש ישר-זווית היא  $\alpha$ , הזווית החדה השנייה היא  $90^\circ - \alpha$  שנשמך  $\alpha'$ . מכאן מתקבלים סימוני הזוויות האחרות באיור.

יש לנו שלושה משולשים דומים:  $\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$ . קטעי קו  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{OB} = 2$  נתונים ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}} \\ \frac{\overline{OY}}{1} &= \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}} \\ \overline{OY}^2 &= \overline{OX} = \frac{2}{\overline{OY}}, \end{aligned}$$

מכאן ש- $\overline{OY}^3 = 2$  ו- $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$ .

## פרק 5

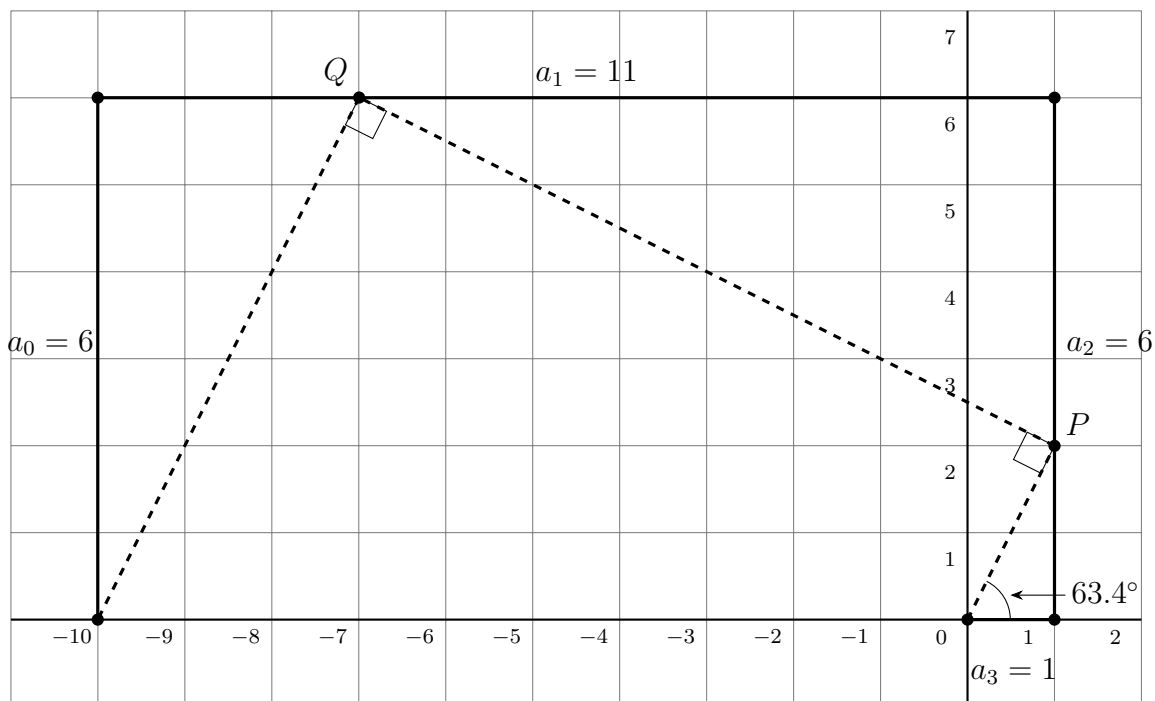
# השיטה של Lill למציאת שורשים

## 5.1 קסם

בנה מסלול המורכב מארבע קטעי קו  $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$  באורכים:

$$\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\},$$

החל ממרכז מערכת הצירים, תחילה בכיוון החיובי של ציר ה- $x$  תוך סיבוב של  $90^\circ$  נגד כיוון השעון בין הקטעים. בנה מסלול שני כדלקמן: בנה קו ממרכז הצירים בזווית  $63.4^\circ$  יחסית לציר ה- $x$ , וסמן ב- $P$  את נקודת החיתוך שלו עם  $a_2$ . פנה שמאלה  $90^\circ$ , בנה קו וסמן ב- $Q$  את החיתוך שלו עם  $a_1$ . פנה שמאלה  $90^\circ$  פעם נוספת, בנה קו, ושים לב שהוא חותך את קצה המסלול הראשון הנמצא ב- $(-10, 0)$ .



יהי  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  חשב  $\tan 63.4^\circ = 2$ , הטנגנס של הזווית בתחילת המסלול השני. מתקבל:

$$p(-\tan 63.4^\circ) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0.$$

בשעה טובה! מצאת שורש של  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ , פולינום ממעלה שלוש.

## 5.2 מבוא

דוגמה זו מדגימה שיטה גרפית למציאת שורשים ממשיים של כל פולינום שגילה Eduard Lill ב-1867 [1, 2, 7]. נגביל כאן את הדיון לפולינומים ממעלה שלוש.

ברור שאין כאן שיטה אלגברית לחישוב שורשים של פולינומים ממעלה שלוש; למעשה, בדוגמה וידאנו ש-2 – הוא שורש. יש עניין חדש בשיטה של Lill כי ניתן לממש אותה באורייגמי (פרק 6).

בסעיפים 5.3–5.4 נרחיב את הדוגמה הראשונה כדי למצוא שורשים נוספים, ונראה שאם  $\alpha$  היא זווית כך ש- $\tan \alpha$  – **אינה** שורש, הבנייה לא תצליח.

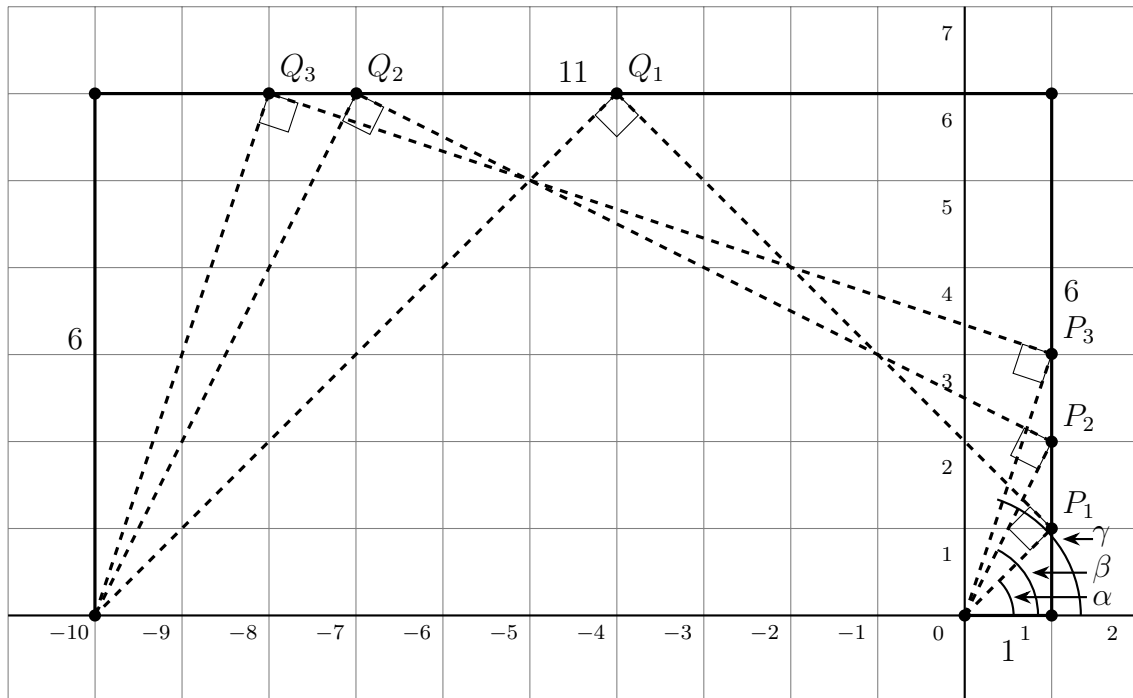
סעיף 5.5 מביא פירוט מלא של השיטה של Lill. חלקים מהתיאור עלולים להיות לא ברורים, אבל יתבהרו כאשר נביא דוגמאות נוספות בסעיפים 5.6–5.8. השיטה של Lill מסוגלת למצוא שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש, לכן ניתן להשתמש בה לחלק זווית לשלושה חלקים. אפשר גם למצוא את  $\sqrt[3]{2}$  כשורש של  $x^3 - 2$ , ולכן אפשר להכפיל קוביה כפי שנראה בסעיף 5.9. 5.10 מביא הוכחה שהשיטה של Lill יכולה למצוא שורשים ממשיים של כל פולינום ממעלה שלוש. להוכחה עבור פולינום כלשהו מבנה דומה.

### 5.3 שורשים מרובים

נמשיך את הדוגמה. לפולינום  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  שלושה שורשים  $-1, -2, -3$ . מחישוב השלילה של הטנגס שלהם מתקבל:

$$\alpha = -\tan^{-1} -1 = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1} -2 = 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1} -3 = 71.6^\circ.$$

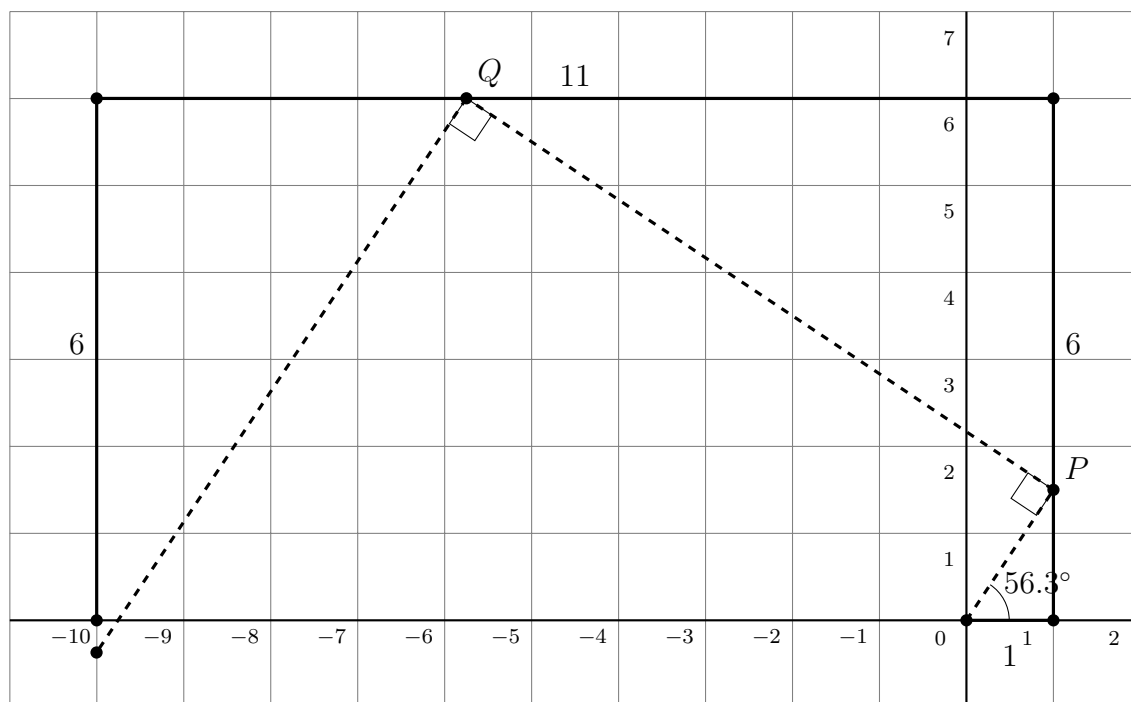
באיור רואים שעבור כל אחת מהזוויות, המסלול השני חותך את הקצה של המסלול הראשון.





## 5.4 מסלולים שלא תואמים לשורשים

אולי המסלול השני חותך את המסלול הראשון עבור כל זווית, למשל,  $56.3^\circ$ . באיור שלהלן, המסלול השני חותך את המסך קטע הקו עבור המקדם  $a_0$ , אבל לא ב- $(-10, 0)$ , הקצה של המסלול הראשון. נסיק ש- $\tan 56.3 = -1.5$  – אינו שורש של הפולינום.



## 5.5 מפרט של השיטה של Lill

כדי להבין את פרטי השיטה מומלץ לעיין בדוגמאות בסעיפים הבאים.

- נתון פולינום שרירותי  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

- בנה את המסלול הראשון כך:

- לכל מקדם  $a_3, a_2, a_1, a_0$  (בסדר זה) בנה קטע קו המתחיל במרכז הצירים  $O = (0, 0)$  בכיוון החיובי של ציר ה- $x$ . פנה  $90^\circ$  נגד השעון בין כל קטע.

- בנה את המסלול השני כך:

- נסמן ב- $a_i$  את קטע הקו שאורכו  $a_i$ .

- בנה קו מ- $O$  בזווית  $\theta$  יחסית לכיוון החיובי של ציר ה- $x$ . נסמן ב- $P$  את הנקודה בה חותך הקו את  $a_2$ .

- פנה  $\pm 90^\circ$  ובנה קו מ- $P$  וסמן ב- $Q$  את הנקודה בה חותך הקו את  $a_1$ .

- פנה  $\pm 90^\circ$  ובנה קו מ- $Q$  וסמן ב- $R$  את נקודה בה חותך הקו את  $a_0$ .

- אם  $R$  היא נקודת הקצה של המסלול הראשון, אזי  $\tan \theta -$  הוא שורש של  $p(x)$ .

- מקרים מיוחדים:

- כאשר בונים את קטעי הקו של המסלול הראשון, אם מקדם הוא שלילי בנה את קטע הקו בכיוון ההפוך.

- כאשר בונים את קטעי הקו של המסלול הראשון, אם מקדם הוא אפס, אל תצייר את קטע הקו, אבל המשך לפנייה הבאה של  $\pm 90^\circ$ .

- הערות:

- "חותך הקו את  $a_i$ " כולל המקרה "חותך את קטע הקו  $a_i$  או כל המשך שלו" או "חותך את הקו המכיל את קטע הקו  $a_i$ ".

- כאשר בונים את המסלול השני, בחר לפנות ימינה או שמאלה ב- $90^\circ$  כך שלמסלול השני תהיה נקודת חיתוך עם המסלול הראשון.

## 5.6 מקדמים שליליים

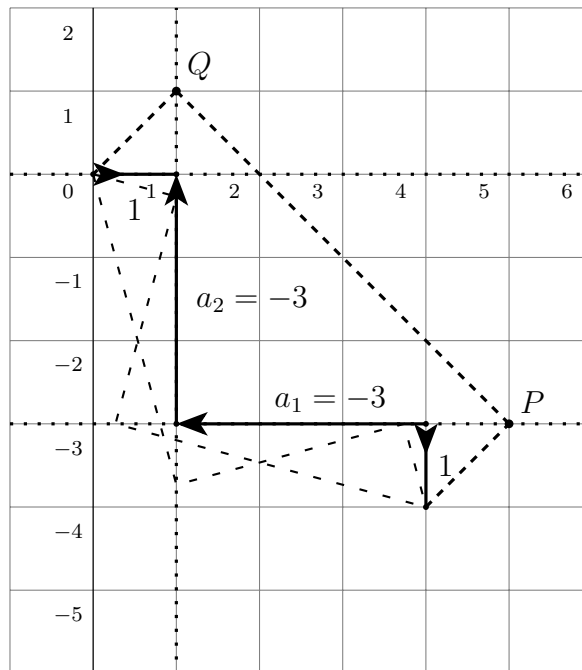
בסעיף 2.6 הפעלת אקסיומה 6 יצרה את הפולינום  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  עם מקדמים שליליים. נתחיל בבניית קטע קו באורך 1 לכיוון החיובי של ציר ה- $x$ . אחר כך נפנה  $90^\circ$  עם הפנים למעלה, אבל המקדם שלילי, ולכן נבנה קטע קו באורך 3 **למטה**, הפוך מהכיוון שאנו פונים אליו. לאחר פנייה  $90^\circ$  לשמאל, המקדם שוב שלילי כך שנבנה קו באורך 3 לאחור, לכיוון ימין. לבסוף, נפנה עם הפנים למטה ונבנה קטע קו באורך 1.

המסלול השני מתחיל עם קו בזווית  $45^\circ$  יחסית לציר ה- $x$ . נקודת החיתוך של הקו עם ההמשך של קטע הקו  $a_2$  היא  $(1, 1)$ . נפנה שוב  $-90^\circ$  (לכיוון ימין), נבנה קו שנקודת החיתוך שלה עם ההמשך של  $a_1$  היא  $(5, -3)$ . נפנה שוב  $-90^\circ$ , נבנה קו שנקודת החיתוך שלו היא בנקודת הקצה של המסלול הראשון ב- $(4, -4)$ .

$-\tan 45^\circ = -1$ , ולכן שורש ממשי של הפולינום הוא  $-1$ :

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

בסעיף 5.8 נדון בקווים המקווקווים עם רווחים ארוכים.



## 5.7 מקדמים שהם אפס

$a_2$ , המקדם של  $x^2$  בפולינום  $x^3 - 7x - 6 = 0$ , הוא אפס. עבור מקדם אפס, אנו "בונים" קטע קו באורך 0, כלומר, אנחנו לא מציירים קו, אבל כן פונים  $\pm 90^\circ$  לפני ש"בונים" אותו, כפי שניתן לראות באיור: חץ הפונה למעלה בנקודה  $(1, 0)$ . אחר כך, נפנה שוב ונבנה קו באורך -7, קו באורך 7 אחורה לנקודה  $(8, 0)$ . לבסוף, פונים שוב ובונים קו באורך -6 לנקודה  $(8, 6)$ . קיימים שלושה מסלולים החותכים את קצה המסלול הראשון. הם מתחילים עם הזוויות:

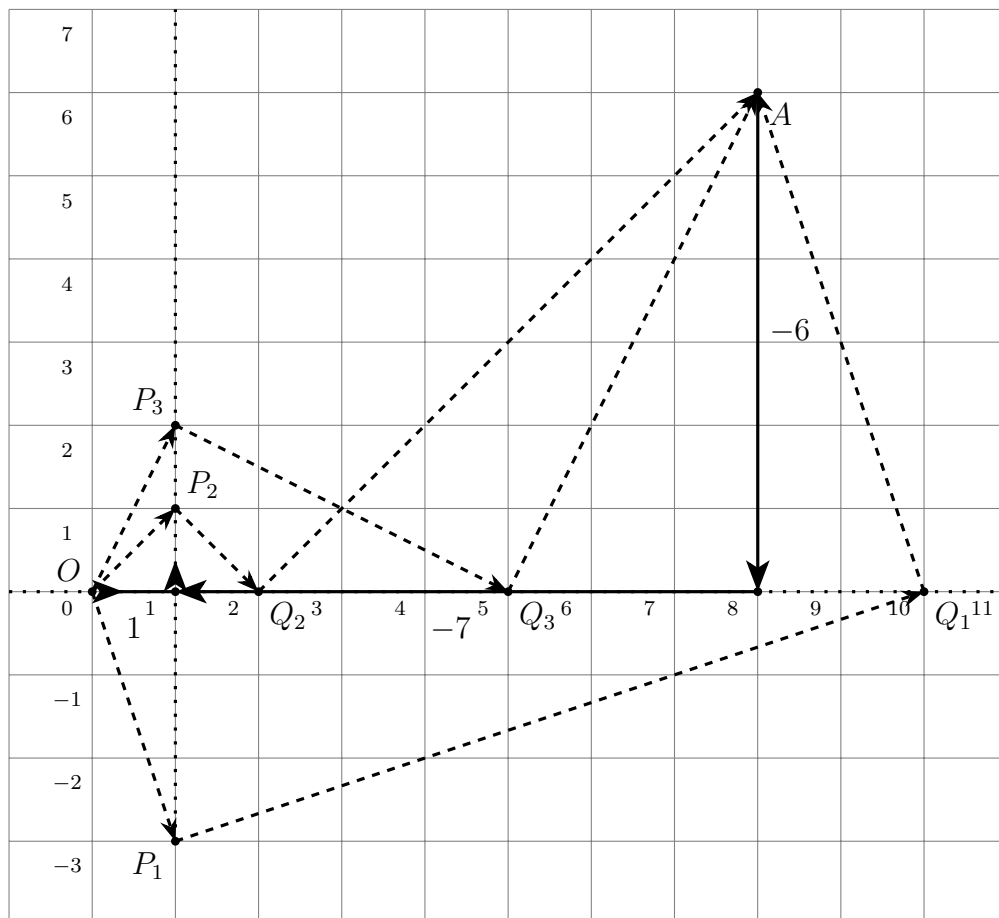
$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 63.4^\circ, \quad \gamma = -71.6^\circ.$$

מכאן אפשר להסיק שיש שלושה שורשים ממשיים:

$$-\tan 45^\circ = -1, \quad -\tan 63.4^\circ = -2, \quad -\tan(-71.6^\circ) = 3.$$

בדיקה:

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2 + 3x + 2)(x-3) = x^3 - 7x - 6.$$



## 5.8 שורשים שאינם מספרים שלמים

נבדוק את הפולינום  $p(x) = x^3 - 2x + 1$ . הקטע הראשון של המסלול הראשון עובר מ- $(0, 0)$  ל- $(1, 0)$  ואז פונה למעלה. המקדם של  $x^2$  הוא אפס כך שלא נצייר קטע קו ונפנה שמאלה. המקדם הבא הוא  $-2$  כך שהקטע הבא נבנה לאחור מ- $(1, 0)$  ל- $(3, 0)$ . לבסוף, המסלול פונה למטה וקו באורך 1 נבנה מ- $(3, 0)$  ל- $(3, -1)$ .

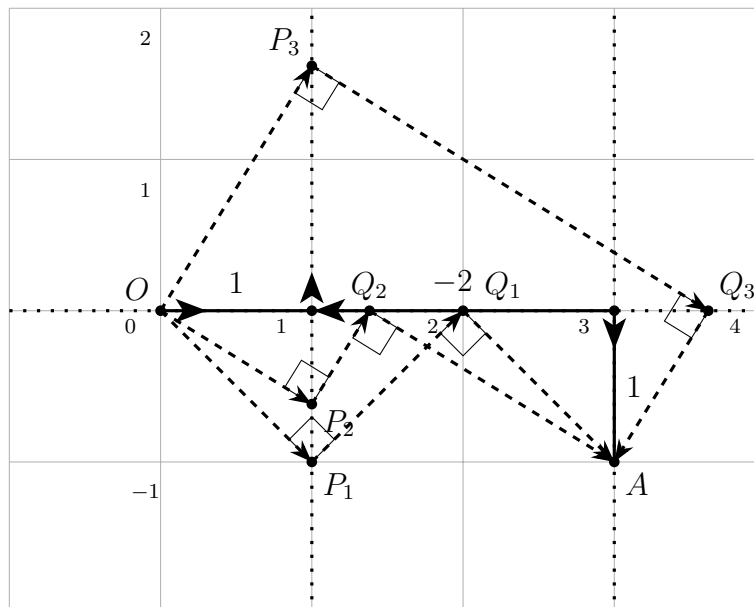
קל לראות ש-1 הוא שורש של  $p(x)$ .  $\tan^{-1} -45^\circ = 1$ , ולכן קיים מסלול  $\overline{OP_1Q_1A}$ .

אם נחלק את  $p(x)$  ב- $x - 1$ , נקבל פולינום ריבועי  $x^2 + x - 1$  ששורשיו הם:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0.62, -1.62.$$

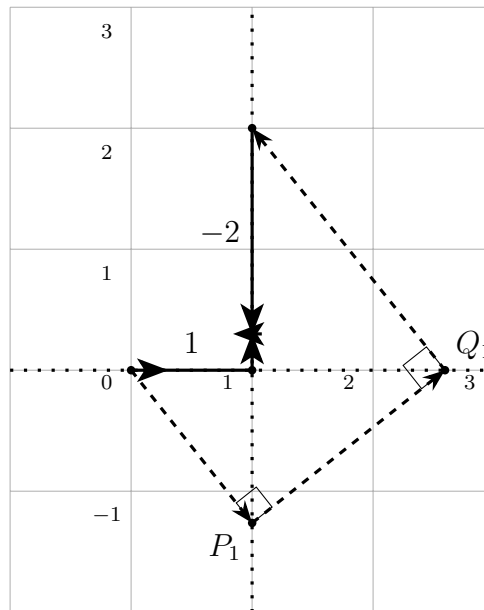
לכן קיימים שני מסלולים נוספים: אחד שמתחיל בזווית  $-31.8^\circ$  כי  $-\tan^{-1} 0.62 = -31.8^\circ$ , ואחד שמתחיל בזווית  $58.3^\circ$  כי  $-\tan^{-1} 1.62 = 58.3^\circ$ .

באופן דומה, לפולינום בסעיף 5.6 שני שורשים  $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$ . הזוויות הן  $-75^\circ$  ו- $-15^\circ$ , כי  $-\tan(-75^\circ) \approx 3.73$  ו- $-\tan(-15^\circ) \approx 0.27$ .



## 5.9 השורש ממעלה שלוש של שניים

כדי להכפיל קוביה עלינו למצוא  $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ , שורש של הפולינום ממעלה שלוש  $x^3 - 2$ . בבנייה של המסלול הראשון, אנו פונים פעמיים שמאלה בלי לבנות קטעי קו, כי המקדמים  $a_1$  ו- $a_2$  שניהם אפס. אז פונים שוב שמאלה (לכיוון למטה) ובונים קו לאחור כי  $a_0 = -2$  שלילי. הקטע הראשון של המסלול השני נבנה בזווית של  $-51.6^\circ$  ו- $\sqrt[3]{2} \approx 1.26 \approx -\tan(-51.6^\circ)$ .



## 5.10 ההוכחה של השיטה של Lill

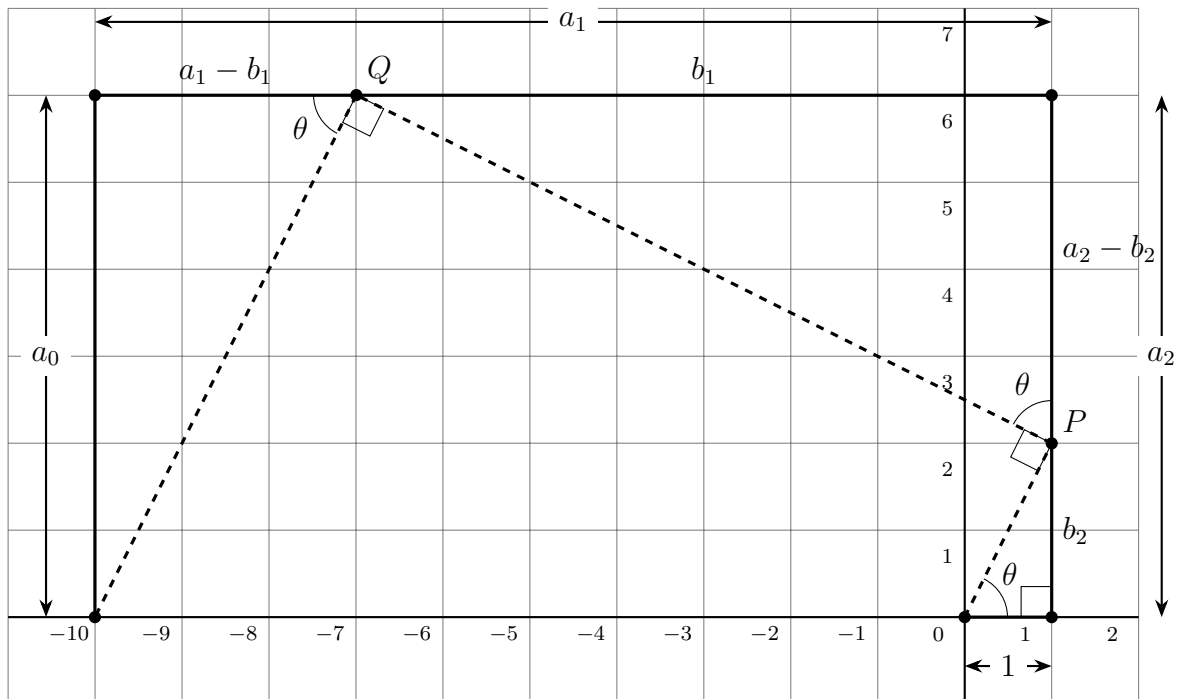
נגביל את הדיון לפולינומים שהמקדם הראשי שלהם הוא אחד  $^1 p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  באיור למטה, הקטעים של המסלול הראשון מסומנים עם המקדמים ועם  $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$ . סכום הזוויות של משולש הוא  $180^\circ$ , ולכן אם זווית חדה אחת היא  $\theta$ , השנייה היא  $90^\circ - \theta$ . מכאן שהזווית מעל ל- $P$  והזווית משמאל ל- $Q$  שוות ל- $\theta$ . כעת נפתח סדרת משוואות עבור  $\tan \theta$ :

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta} \\ b_1 &= \tan \theta (a_2 - \tan \theta) \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta (a_2 - \tan \theta)}.\end{aligned}$$

נפשט את המשוואה האחרונה ונקבל:

$$\begin{aligned}(\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0 \\ -(\tan \theta)^3 + a_2(\tan \theta)^2 - a_1(\tan \theta) + a_0 &= 0 \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

נסיק ש- $\tan \theta$  הוא שורש ממשי של  $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$



<sup>1</sup>אחרת, אפשר לחלק ב- $a_3$  ולפולינום המתקבל אותם שורשים.

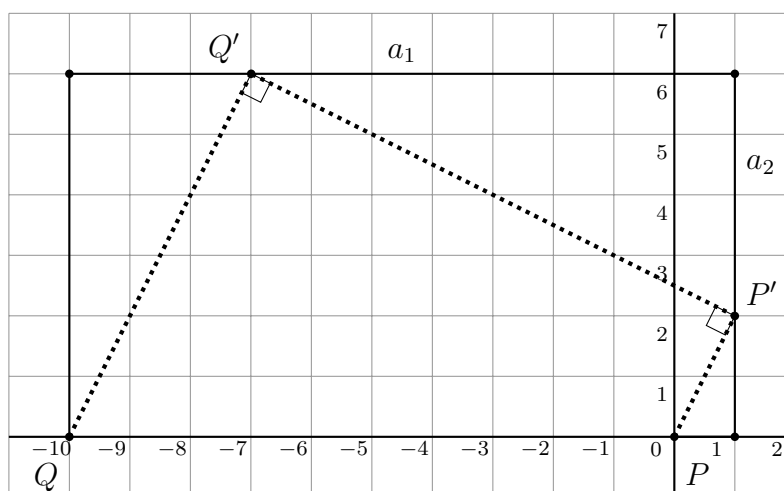
## פרק 6

# הקיפול של Beloch והריבוע של Beloch

## 6.1 הקיפול של Beloch

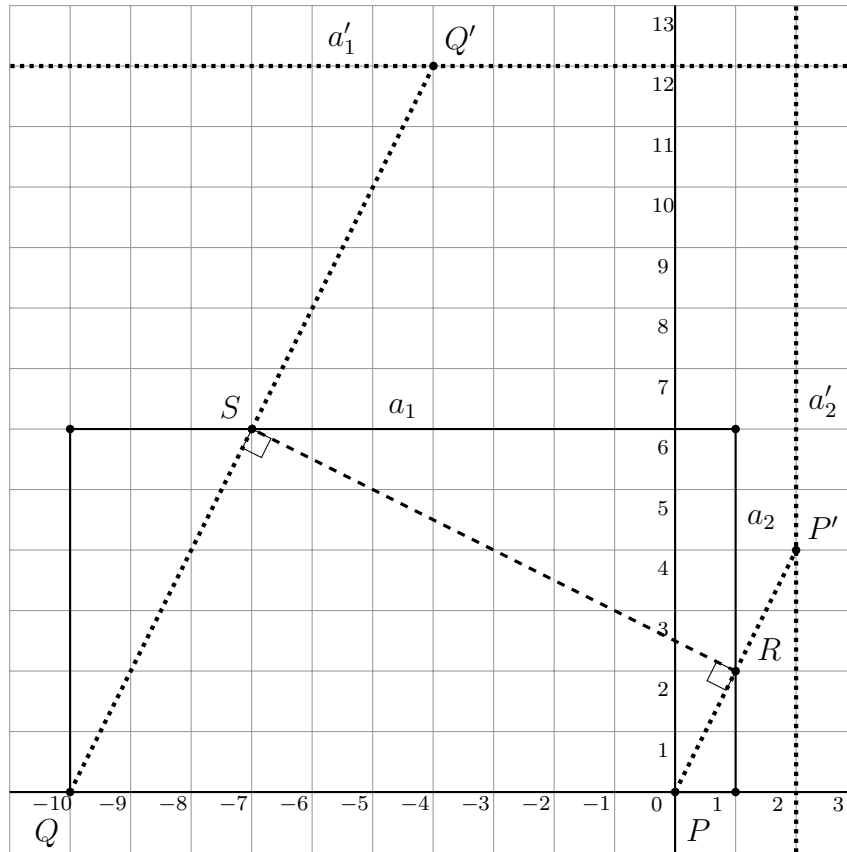
Margarita P. Beloch גילתה קשר מרתק בין אוריגמי והשיטה של Lill למציאת שורשים של פולינומים ממעלה שלוש. היא מצאה ששהפעלה אחת בלבד של אקסיומה 6 (פרק 2.6) מאפשרת מציאת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש. לכבודה, לעתים מכנים את הפעולה של האקסיומה "הקיפול של Beloch".

נדגים את השיטה על הפולינום  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  מסעיף 5.1. באיור שלהלן הדגשנו את המסלול השני ושנינו את הסימנים של מספר נקודות. כדי לפתור את המשוואה, כל שעלינו לעשות הוא להפעיל קיפול של Beloch כדי להניח בבת אחת את הנקודות  $P', Q'$  על הקווים  $a_2, a_1$ , בהתאמה. לכאורה זה נראה כשימוש פשוט של הקיפול של Beloch. אולם, עם מפעילים את האקסיומה, המסלול מוצא פתרון למשוואה:  $Q'$  נמצא רחוק ימינה, כך שהזווית ב- $P'$  ו- $Q'$  אינן זוויות ישרות.



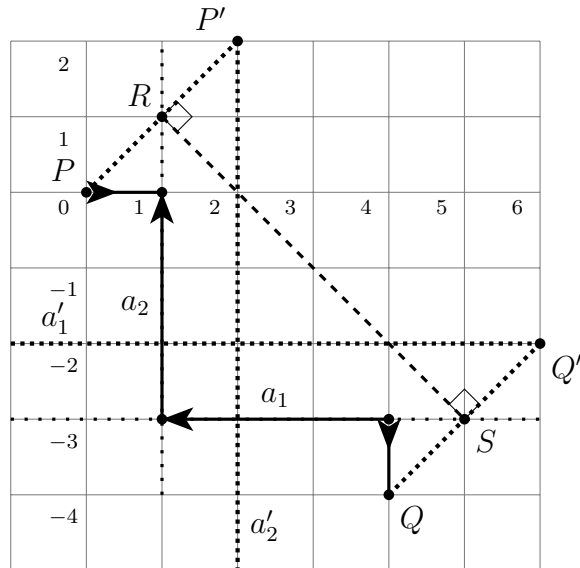


נזכור שקיפול הוא האנך האמצעי של קטע הקו בין נקודה ושיקופה מסביב לקיפול. אנו רוצים שהקיפול יהיה  $\overline{P'Q'}$  כך שהוא יהיה ניצב גם ל- $\overline{QQ'}$  וגם ל- $\overline{PP'}$ . אם  $\overline{P'Q'}$  הוא האנך האמצעי של  $\overline{QQ'}$  ו- $\overline{PP'}$ , אזי  $P', Q'$  השיקופים של  $P, Q$  חייבים להיות באותו מרחק מהקיפול כמו  $P$  ו- $Q$ , בהתאמה. עם שינוי קל בסימונים, מתקבל האיור שלהלן:



נבנה את הקו  $a'_2$  מקביל ל- $a_2$  ובאותו מרחק מ- $a_2$  כמו המרחק של  $a_2$  מ- $P$ . באופן דומה נבנה את הקו  $a'_1$  מקביל ל- $a_1$  ובאותו מרחק מ- $a_1$  כמו המרחק של  $a_1$  מ- $Q$ . נפעיל את אקסיומה 6 כדי להניח ב-זמנית את  $P$  ב- $P'$  על  $a'_2$  ולהניח את  $Q$  ב- $Q'$  על  $a'_1$ . הקיפול  $\overline{RS}$  הוא האנך האמצעי של הקווים  $\overline{PP'}$  ו- $\overline{QQ'}$ . מכאן שהזוויות ב- $R$  ו- $S$  הן ישרות כפי שמתחייב.

ננסה את הקיפול של Beloch על הפולינום  $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  מסעיף 5.6.  $a_2$  הוא קטע הקו האנכי באורך 3 שהמשוואה לו הוא  $x = 1$ , והקו המקביל לו הוא  $a'_2$  שהמשוואה שלו היא  $x = 2$ , כי  $P$  נמצאת במרחק 1 מ- $a_2$ .  $a_1$  הוא קטע הקו האופקי באורך 3 שהמשוואה שלו היא  $y = -3$ , והקו המקביל לו הוא  $a'_1$  שהמשוואה שלו היא  $y = -2$ , כי  $Q$  נמצאת במרחק 1 מ- $a_1$ . הקיפול  $RS$  הוא האנך האמצעי של  $\overline{PP'}$  וגם של  $\overline{QQ'}$ . המסלול  $\overline{PRSQ}$  זהה למסלול בסעיף 5.6.



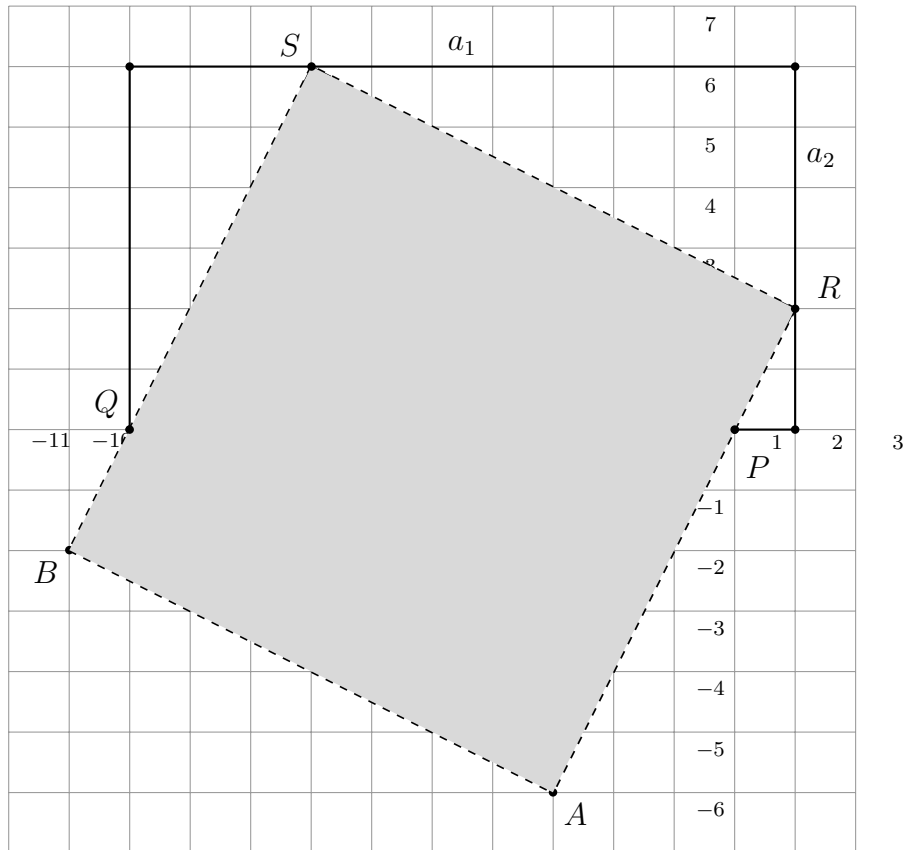
## 6.2 הריבוע של Beloch

ניתן להציג את הבנייה בסעיף הקודם לפי הריבוע של Beloch: נתונות שתי נקודות  $P, Q$  ושני קווים  $a_1, a_2$ , בנה ריבוע  $\overline{ARSB}$  כך ש:

• צלע אחד הוא  $\overline{RS}$  כאשר  $R$  נמצאת על  $a_2$  ו- $S$  נמצאת על  $a_1$ ;

•  $P$  נמצאת על  $\overline{RA}$  ו- $Q$  נמצאת על  $\overline{SB}$ .

האיור שלהלן מדגים את הריבוע של Beloch עבור הפולינום  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ . האורך של  $RS$  הוא  $\sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8.94$ . ניתן לבנות את הריבוע על ידי הוספת שלושה צלעות של אורך זה.



# מקורות

להלן רשימת המקורות ששימשו להכנה המסמך.

האקסיומות נמצאות במאמר בויקיפדיה [8], ביחד עם משוואות פרמטריות עבור חמשת האקסיומות הראשונות. Lee [פרק 4, 4] מביא סקירה טובה של המתמטיקה של אוריגמי. Martin [פרק 10, 5] מפתח את המתמטיקה של אוריגמי בצורה פורמלית. Lang [3] מראה כיצד ניתן לבנות באמצעות אוריגמי מספרים רציונליים, מקצת מספרים אי-רציונליים וקירובים לאחרים. חלוקת זווית לשולשה חלקים והכפלת הקוביה ניתנת על ידי Newton [6] ובן לולו מביא הוכחה שונה של חלוקת הזווית. הבנייה להכפלת קוביה גם היא מופיעה אצל Newton [6] ו-Hull [4]. Hull [2] מביא את השיטה של Lill למציאת שורשים של פולינומים ואת המימוש של Beloch [1] Bradford. Bradford [1] מביא איורים רבים של השיטה של Lill.

- [1] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to  $n$ -th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010, at the Wayback Machine, <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvh/ALG/rightpaths.html>, 2010.
- [2] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.
- [3] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. [http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf), 1996–2015. Accessed 26/02/2020.
- [4] Hwa Young Lee. Origami-constructible numbers. Master's thesis, University of Georgia, 2017.
- [5] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998.
- [6] Liz Newton. The power of origami. <https://plus.maths.org/content/power-origami>. Accessed 26/02/2020.
- [7] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly*, 69(7):654–658, 1962.
- [8] Wikipedia contributors. Huzita–Hatori axioms — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita%E2%80%93Hatori\\_axioms&oldid=934987320](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita%E2%80%93Hatori_axioms&oldid=934987320), 2020. Accessed 26/02/2020.

## נספח א'

### קישורים לגיאוגברה

1	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/fq9d5hms">https://www.geogebra.org/m/fq9d5hms</a>
2	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/fgmfss27">https://www.geogebra.org/m/fgmfss27</a>
3	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/ek3mqupw">https://www.geogebra.org/m/ek3mqupw</a>
4	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/renzzbdg">https://www.geogebra.org/m/renzzbdg</a>
5	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/aszn9ywu">https://www.geogebra.org/m/aszn9ywu</a>
6	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/bxe5e5ku">https://www.geogebra.org/m/bxe5e5ku</a>
7	אקסיומה	<a href="https://www.geogebra.org/m/yeq5gmeg">https://www.geogebra.org/m/yeq5gmeg</a>
	חקלוקת זווית לשלושה של Abe	<a href="https://www.geogebra.org/m/dxrcvjam">https://www.geogebra.org/m/dxrcvjam</a>
	חקלוקת זווית לשלושה של Martin	<a href="https://www.geogebra.org/m/caky7edd">https://www.geogebra.org/m/caky7edd</a>
	הכפלת קוביה של Messer	<a href="https://www.geogebra.org/m/mrcwjqh8">https://www.geogebra.org/m/mrcwjqh8</a>
	הכפלת קוביה של Beloch	<a href="https://www.geogebra.org/m/enzmmwua">https://www.geogebra.org/m/enzmmwua</a>

לאור תקלה בגיאוגברה, בפרוייקטים המשתמשים באקסיומה 6, נקודות המוגדרות על ידי שיקוף מסביב למשיק המשותף אינן נשמרות או נשמרות בצורה שגויה.

## נספח ב'

### פיתוח הזהויות הטריגונומטריות

ניתן לפתח את הזהויות הטריגונומטריות עבור טנגנס שהשתמשנו בהוכחה של אקסיומה 3 מזהויות עבור סינוס וקסינוס:

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \\&= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2} \\&= \frac{\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \tan \theta_2}{\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \tan \theta_2} \\&= \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}.\end{aligned}$$

נשתמש משוואה זו עם  $\theta = (\theta/2) + (\theta/2)$  ונקבל משוואה ריבועית במשתנה  $\tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\tan(\theta/2) + \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} \\ \tan \theta (\tan(\theta/2))^2 + 2 \tan(\theta/2) - \tan \theta &= 0.\end{aligned}$$

הפתרונות שלה הם:

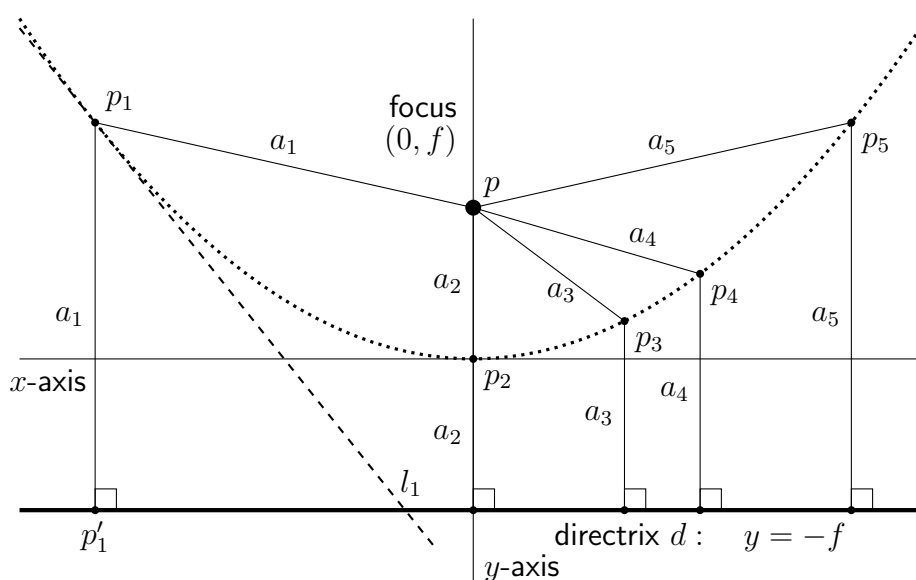
$$\tan(\theta/2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}.$$

# נספח ג'

## פרבולות

בתחילת דרכם, תלמידים מכירים פרבולות כגרפים של פולינומים ריבועיים  $y = ax^2 + bx + c$ . אולם ניתן הגדיר פרבולות באמצעות גיאומטריה: נתונה נקודה, **המוקד** (focus), ונתון קו, **המדריך** (directrix), המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהמוקד ומהמדריך מגדיר פרבולה.

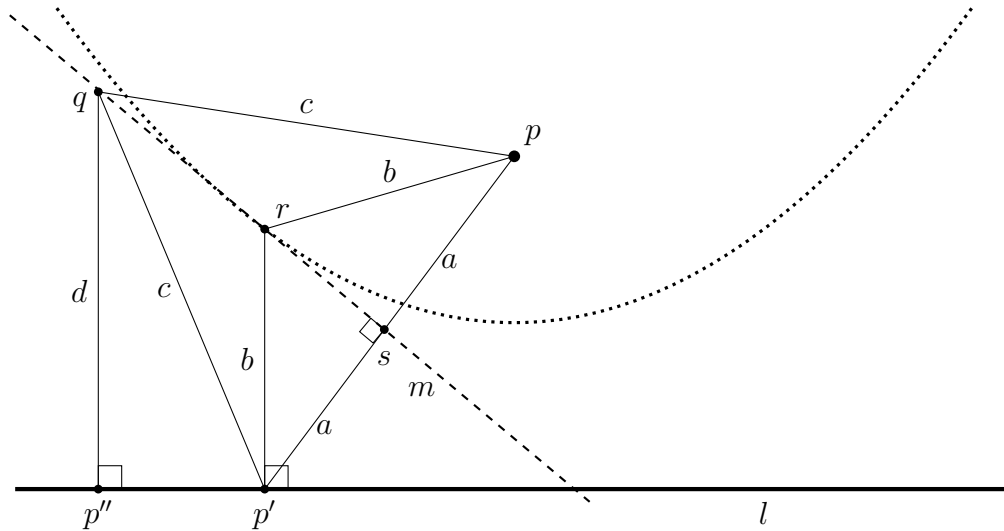
האיור שלהלן מראה את המוקד - הנקודה הגדולה ב-  $p = (0, f)$ , והמדריך - הקו העבה עם המשוואה  $y = -f$ . הפרבולה המתקבלת מוצגת בקו מנוקד. **הקודקוד** (vertex) שלה  $p_2$  נמצא במרכז הצירים.



בחרנו חמש נקודות  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  על הפרבולה. כל נקודה  $p_i$  הוא במרחק  $a_i$  גם מהמוקד וגם מהמדריך. נוריד ניצב למדריך מ-  $p_i$ , ונסמן ב-  $p'_i$  את נקודת החיתוך של הניצב עם המדריך. נשתמש באקסיומה 2 ונבנה את הקו  $l_i$  דרך  $p_i$  שמשקף את  $p$  על  $p'_i$ . האיור מראה את הקיפול  $l_1$  דרך  $p_1$ .

**משפט הקיפולים הם משיקים לפרבולה.**

**הוכחה (אוריה בן לולו)** באיור שלהלן, המוקד הוא  $p$ , המדרין הוא  $l$ ,  $p'$  היא נקודה על המדרין, ו- $m$  הוא הקיפול המשקף את  $p$  על  $p'$ . לפי ההגדרה,  $m$  הוא האנך האמצעי של הקו  $pp'$ . תהי  $s$  החיתוך של  $pp'$  ו- $m$ ; אזי  $\overline{ps} = \overline{p's} = a$  ו- $m \perp pp'$ .



תהי  $r$  החיתוך של הניצב ל- $l$  דרך  $p'$  והקיפול  $m$ . אזי  $\triangle p'sr \cong \triangle p'sr$  לפי צלע-זווית-צלע, כי  $\angle p'sr = \angle p'sr = 90^\circ$ ,  $\overline{ps} = \overline{p's}$  מכאן ש- $\overline{pr} = \overline{p'r} = b$ . נמצאת על הפרבולה.

בחר נקודה  $p''$  על המדרין שהיא שונה מ- $p'$ , והנח שהקיפול  $m$  גם משקף את  $p$  על  $p''$ . תהי  $q$  החיתוך של הניצב ל- $l$  דרך  $p''$  והקיפול  $m$ . כמו בהוכחה לעיל, נוכל להוכיח ש- $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$ . נסמן  $\overline{qp''} = d$ . אם  $q$  נמצאת על הפרבולה, אזי  $d = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$  אבל  $c$  הוא היתר של המשולש ישר-זווית  $\triangle qp''p'$  ולא יכול להיות שווה לאחד הצלעות שלו  $d$ . הוכחנו של- $m$  נקודת חיתוך אחד עם הפרבולה ולכן הם משיק לפרבולה.



## משיקים המשותפים לשתי פרבולות

להלן איורים המדגימים את ארבעת האפשרויות:

