אני מסתפק בסרגל (ועוד משהו)

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

1 מבוא

כל בנייה בסרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם מחוגה בלבד. משפט זה הוכח בשנת 1672 על ידי Georg Mohr וב־ 1797 על ידי Lorenzo Mascheroni. נשאלת השאלה: האם כל בנייה בסגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם סרגל בלבד? התשובה היא שלילית. ב־ 1822 המתיטיקאי הצרפתי Jean-Victor Poncelet שיער שכן ניתן להסתפק בסרגל בלבד, בתנאי שקיים במישור מעגל **אחד** עם מרכזו. המשפט הוכח ב־ 1833 על ידי המתימטיקאי השוויצרי Jakob Steiner.

במסמך זה אביא את הוכחת המשפט המבוססת על הוכחה שמופיעה כבעייה 34 בספר:

Heinrich Dörrie: *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution* (Dover, 1965),

ועובדה על ידי Michael Woltermann.[1]

במאה ה־ 19 הוכח שאם נתחיל עם קטע קו עם אורך 1 (המידות לא משנות, פשוט קובעים שאורך הקטע הוא אחד), ניתן לבנות קטעי קו באורך המתקבלים מהמספרים הרציונליים על ידי פעולות החשבון $+, -, \times, \div$ ועוד פעולת שורש ריבועי $\sqrt{}$, **ורק** מספרים אלה.

משפט זה מסביר למה לא ניתן לפתור את הבעיות המפורסמות שהציגו היוונים: חלוקת זוויות לשלושה חלקים שווים, בניית קוביה שהנפח שלו פי שניים מהנפח של קוביה נתונה, ובניית ריבוע שהשטח שלו שווה לשטח של מעגל נתון. שתי הבניות הראשונות מחייבות בניית קטע קו שאורכו שורש שלישי של קו אחר, וריבוע המעגל מחייב בניית קטע באורך π שהוא מספר "טרנסנדנטלי", כלומר, אי אפשר לחשב אותו מהמספרים הרציונליים ועוד פעולה שורש מחזקה כלשהי.

עם סרגל בלבד ניתן לבנות רק קווים הנחתכים ביניהם, שהיא פעולה לשמעשה פותרת משוואות מסדר ראשון, כלומר, אי אפשר לחשב שורש ריבועי. בנייה של Poncelet-Steiner מראה שאם קיים מעגל אחד, ניתן להשתמש בו כדי לחשב שורש ריבועי וכך לבניות כל בנייה על סרגל ומחוגה.

עיון בבנייה גיאומטרית יגלה שכל צעד הוא אחת משלוש פעולות:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים ישרים.
- מציאת נקודות החיתוך בין קו ישר ומעגל.
- מציאת נקודות החיתוך בין שני מעגלים.

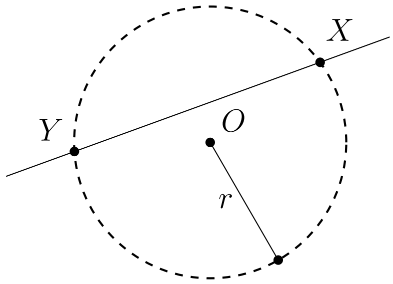
ברור שניתן לבצע את הפעולה הראשונה עם סרגל בלבד. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למוצא בנייה שקולה המשתמשת רק בסרגל עם מעגל אחד.

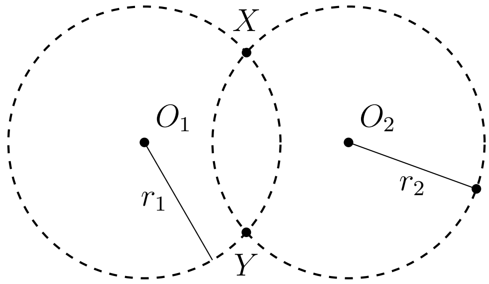
סימונים:

- $c(O, A)$: המעגל שמרכזו O העובר דרך הנקודה A.
- $c(O, r)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס r.
- $c(O, AB)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס שהוא אורך קטע קו נתון AB.

[1] http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm.
ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו.

מה המשמעות של בנייה עם סרגל בלבד? מעגל מוגדר על יהי המרכז שלו O וקטע קו שאחת מהנקודות הקצה שלה היא O, קטע המגדיר את הרדיוס. אם נצליח לבנות את הנקודות X, Y בהתרשים להלן, נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון וקו נתון ושל שני מעגלים. המעגלים מצויירים בקו מקווקו כי אם לא ממש מפיעים בבנייה. נמשיך לנקוט בסימון זה: המעגל היחיד הנתון יצוייר בקו רגיל, ומעגלים המשמשים רק להדגמת הבנייה והוכחתה יהיו מקווקוים.





תחילה נביא חמש בניות עזר נחוצות (סעיפים 2–6), ואחר כך נראה איך למצוא תקודות חיתוך בין קו ומעגל (סעיף 7) ובין שני מעלגים (סעיף 8).

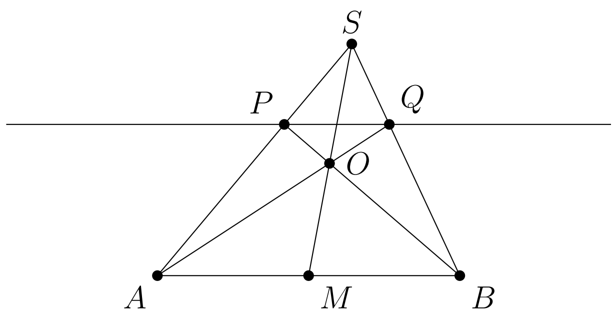
2 בניית קו המקביל לקו נתון

נתון קו l המוגדר על ידי שתי נקודות A, B, ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות קו דרך P המקביל ל־ AB.

נפריד את הבנייה לשני מקרים, כאשר הבנייה של המקרה הראשון תעזור לנו בבנייה של המקרה השני.

- "קו מכוון": נתון שתי נקודות A, B על הקו והנקודה M החוצה את AB.
- כל קו אחר.

קו מכוון: נבנה קו המכיל את AP. נבחר נקודה S, נקודה כלשהי על הממשך הקו מעבר ל־AP. נבנה את הקווים MS, BS. נסמן ב־O את החיתוך של BP ו־MS. נבנה קו המכיל את AO ונסמן ב־Q את החיתוך של ההמשך של AO עם BS.



מהתרשים נראה ברור שהקו PQ מקביל ל־AB, אבל זה בדיוק מה שעלינו להוכיח.

ההוכחה תשתמש במשפט של Ceva שנוכיח בהמשך. לפי המשפט, קיים קשר בין האורכים של קטעים המרכיבים את היקף המשולש:

$$\frac{AM}{MB}\frac{BQ}{QS}\frac{SP}{PA}=1$$

נזכור ש־M היא הנקודה החוצה של AB, כך ש־$AM=MB$ ו־$\frac{AM}{MB}=1$. הגורם הראשון של המכלפה יורד ונרשום את המשוואה:

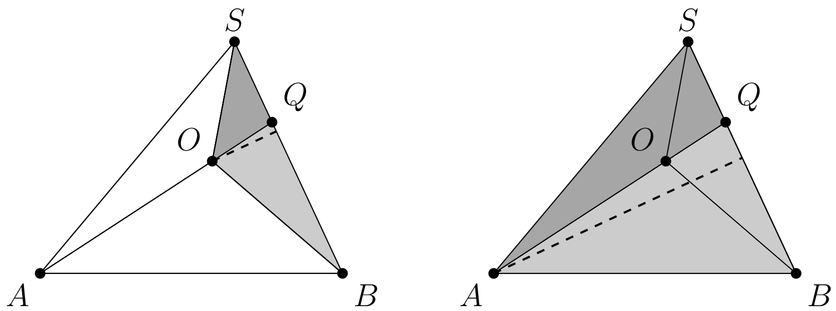
$$\frac{BS}{QS}=\frac{AS}{PS}\,. \qquad (1)$$

נוכיח שהמשולש $\triangle ABS$ דומה ל־$\triangle PQS$, ולכן הקו PQ מקביל לקו AB כי $\angle ABS=\angle PQS$.
ההוכחה שהמשולשים דומים היא:

$$\begin{aligned}
BS &= BQ+QS\\
\frac{BS}{QS} &= \frac{BQ}{QS}+\frac{QS}{QS}=\frac{BQ}{QS}+1\\
AS &= AP+PS\\
\frac{AS}{PS} &= \frac{AP}{PS}+\frac{PS}{PS}=\frac{AP}{PS}+1\\
\frac{BS}{QS} &= \frac{AS}{PS}\,.
\end{aligned}$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקבלת ממשוואה־(1).

כדי להוכיח את המשפט של Ceva, נתבונן בתרשימים שלהן:



אם הגבהים של שני משולשים שווים, יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

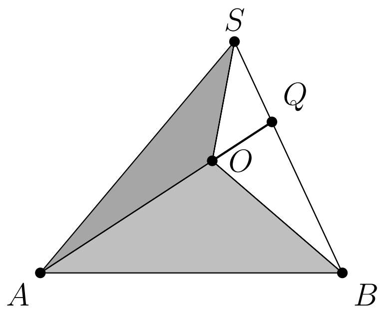
$$A_1=\frac{1}{2}hb_1,\quad A_2=\frac{1}{2}hb_2,\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{b_1}{b_2}\,.$$

בכל אחד מהתרשימים, הגבהים של זוג המשולשים המסומנים באפור שווים. לכן:[2]

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO}=\frac{BQ}{QS}\,,\qquad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA}=\frac{BQ}{QS}\,.$$

[2]נשתמש בשם המשולש כקיצור לשטחו.

על ידי חיסור של המשולשים המסומנים, נקבל יחס בין המשולשים המסומנים באפור בתרשים שלהן:



$$\frac{BQ}{QS} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\,.$$

החישוב עלול להיראות חשוד. נסביר אותו תוך שימוש בסימונים פשוטים יותר:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\\
\frac{e}{f} &= \frac{a}{b}\\
c-e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b}\\
c-e &= \frac{a}{b}(d-f)\\
\frac{c-e}{d-f} &= \frac{a}{b}\,.
\end{aligned}$$

באופן דומה ניתן להוכיח:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\,, \qquad \frac{SP}{PA} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

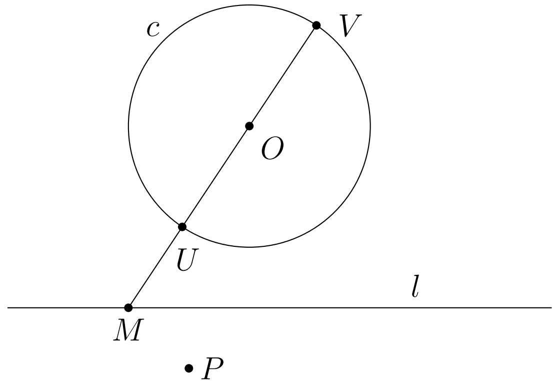
ומכאן

$$\frac{AM}{MB}\frac{BQ}{QS}\frac{SP}{PA} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1\,,$$

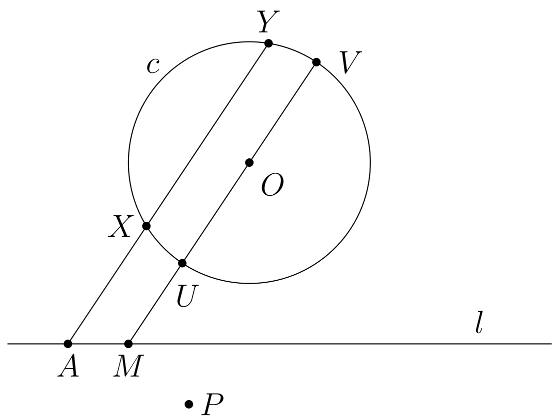
כי השטחים במונה ובמכנה מצטצמים (זכרו שסדר הקודקים במשלוש לא חשוב).

כל קו אחר: נסמן את הקו ב־l, את המעגל הקבוע ב־$c = c(O, r)$, והנקודה שלא על הקו ב־P. עליך להשתכנע שהבנייה, כאן ובהמשך, לא תלוייה מיקום המעגל במישור או ברדיוס שלו.

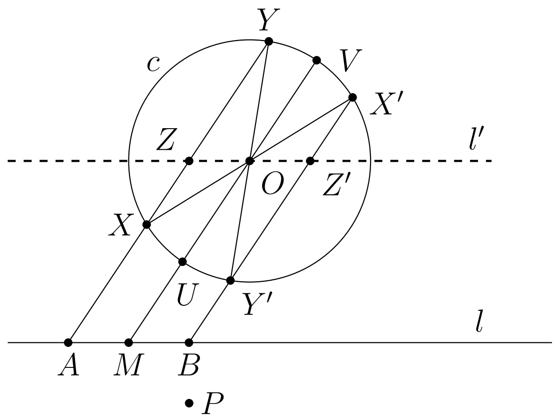
נבחר M, נקודה כלשהי על הקו l, ובנה את הקו מ־M ל־O (נקודת חיתוך U) ונמשיך את הקו עד לנקודת החיתוך השני V.



קו זה הוא **קו מכוון** כי O, מרכז המעגל, חוצה את קטע הקו UV. נבחר נקודה שנייה A על הקו l ונשתמש בבנייה המתואר במקרה הראשון כי לבנות קו מקביל ל־UV החותך את המעגל בנקודות X, Y.



נבנה קוטר עם נקודת קצה דרך X וקוטר עם נקודת קצה דרך Y, ונגדיר את נקודות החיתוך האחרות שלהם X', Y'. נבנה את הקו X', Y' ונמשיך אותו עד ל־B, נקודת החיתוך עם l.



טענה: הקו המכיל את AB הוא **קו מכוון** כי M חוצה אותו.

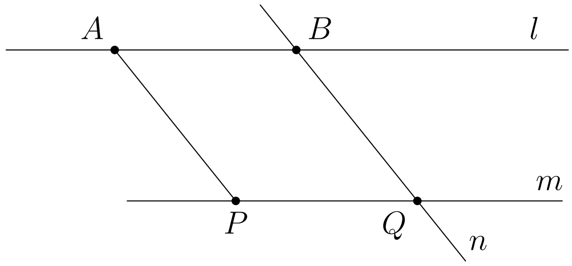
מהטענה אפשר לבנות קו דרך P מקביל ל־AB כמתואר במקרה הראשון.

הוכחה: OX, OX', OY, OY' הם כולם רדיוסים את המעגל, ו־$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות נגדיות. לכן, $\triangle XOY$ חופף ל־$\triangle X'OY'$ לפי צלע־זווית־צלע. נגדיר l', קו מקביל ל־l, החותך

את XY בנקודה Z וחותך את X',Y' בנקודה Z'. המשולשים $\triangle XOZ$, $\triangle X'OZ'$ חופפים לפי זווית־צלע־זווית, ולכן $ZO = OZ'$. הוכחנו ש־$AMOZ$ ו־$BMOZ'$ מקביליות, ולכן $AM = ZO = OZ' = MB$.

מסקנה: נתון קטע קו AB ונקודה P שאיננה על הקו. ניתן לבנות קטע קו PQ עם נקודת קצה P המקביל ל־AB.

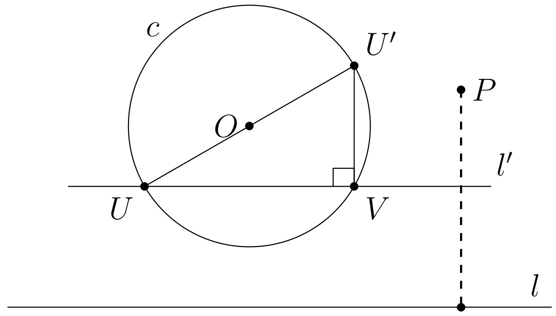
הוכחה: הוכחנו שנתון AB ו־P ניתן לבנות קו m דרך P המקביל ל־AB, וקו n דרך B המקביל ל־AP. המרובע $ABQP$ הוא מקבילית, ולכן הצלעות הנגדיות שוות ו־$AB = PQ$ ו־PQ מקביל ל־AB.



3 בניית אנח לקו נתון

נתון קו l המוגדר על ידי שתי נקודות A, B, ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות קו דרך P אנח ל־ AB.

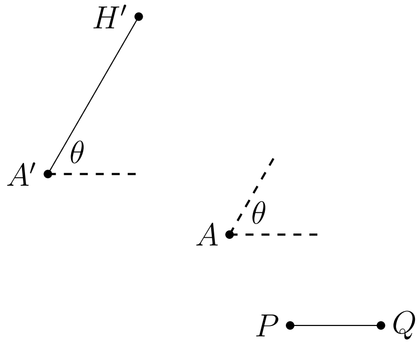
נבנה (כפי שתואר בסעיף 2) קו l' מקביל ל־l החותך את המעגל הקבוע ב־U, V. נבנה את הקוטר UOU' והמיתר VU'.



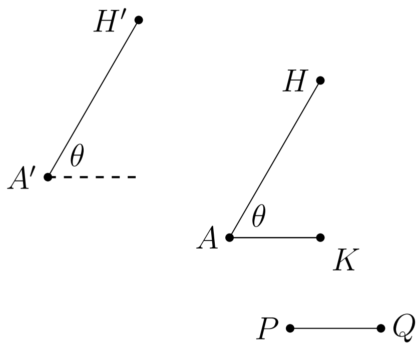
$\angle UVU'$ היא זווית הנשענת על מחצית המעגל, לכן היא זווית ישרה. מכאן ש־VU' הוא אנח ל־UV ו־ l. לבסוף, נבנה קו העובר דרך P מקביל ל־VU' כפי שתואר בסעיף 2.

4 העתקת קטע קו נתון בכיוון נתון

נתון נקודה A, קטע קו PQ וכיוון, ניתן לבנות קטע קו AS בכיוון הנתון. הכוונה של המושג כיוון היא שנתון קו המוגדר על ידי שתי נקובות A', H' המגדיר זווית θ יחסית לציר מסויים. המשימה היא להעתיק קטע קו PQ ל־AS כך ש־AS יהיה באותה זווית θ.



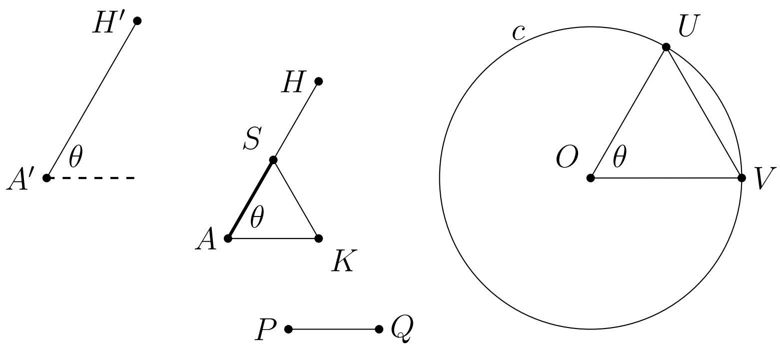
נתחיל את הבנייה על ידי העתקת קטע הקו $A'H'$ אל AH כך ש־AH יהיה מקביל ל־$A'H'$. הבנייה אפשרית לפי המסקנה בסוף סעיף 2. באותו אופן נעתיק את PQ ל־AK כך ש־AK מקביל ל־PQ.



הזווית $\angle HAK$ שווה ל־θ, לכן כל מה שנשאר הוא למצוא נקודה S על AH כך ש־$AS = AK$.

במעגל הקבוע c נבנה שני רדיוסים OU ו־OV מקביליים ל־AH ו־AK, בהתאמה. לבסוף, נבנה קו דרך K מקביל ל־UV.

טענה: S היא נקודת החיתוך של הקו עם AH ו־$AS = AK$.

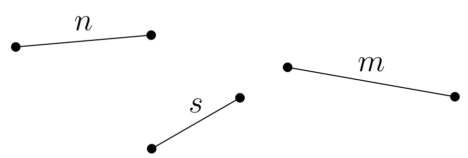


הוכחה: AH מקביל ל־OU ו־AK מקביל ל־OV ולכן $\angle SAK = \angle HAK = \theta = \angle UOV$. SK מקביל ל־UV, ולכן המשולש $\triangle SAK$ דומה למשולש $\triangle UOV$ שהוא משולש שווה שוקיים (OU, OV הם רדיוסים של אותו מעגל.) מכאן, $\triangle SAK$ הוא משולש שווה שוקיים ו־$AS = AK = PQ$.

5 בניית קטע קו שאורכו מוגדר יחסית לשלושה קטעי קו אחרים

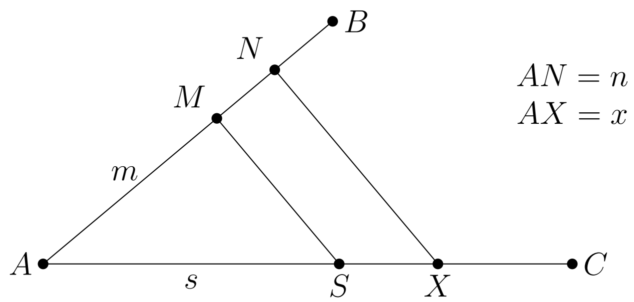
נתון קטעי קו באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע קו באורך $x = \dfrac{n}{m}s$.

קטעי הקו הנתונים נמצאים במיקומים כלשהם במישור ובכיוונים כלשהם.



נבחר נקודה כלשהי A ונבנה שתי קרונות AB dna AC. כפי שמתואר בסעיף 4 ניתן למצוא נקודות M, N, S כך ש־$AM = m$, $AN = n$ ו־$AS = s$. נבנה דרך N קו המקביל ל־MS החותך את AC ב־X, ונסמן את אורכו ב־x. המשולש $\triangle MAS$ דומה למשולש $\triangle NAX$, ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m}s\,.$$



6 בניית שורש ריבועי של המכפלה של אורכי שני קטעי קו נתונים

נתון קטעי קו באורכים a, b, ניתן לבעות קטע קו שאורכו $\sqrt{ab}$.

אפו שואפים להראות שניתן לבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \frac{n}{m}s$ כדי להשתמש בבנייה מסעיף 5. עבור n נשתמש ב־d הקוטר של המעגל הקבוע, עבור m נשתמש ב־$t = a + b$ שניתן לבנות מהאורכים הנתונים a, b לפי הבנייה בסעיף 4, ועבור s נמצא הגדרה של האורכים h, k תוך שימוש באורכים a, b, t, d כך ש־$s = \sqrt{hk}$, ונראה איך ניתן לבנות קטע קו באורך זה.

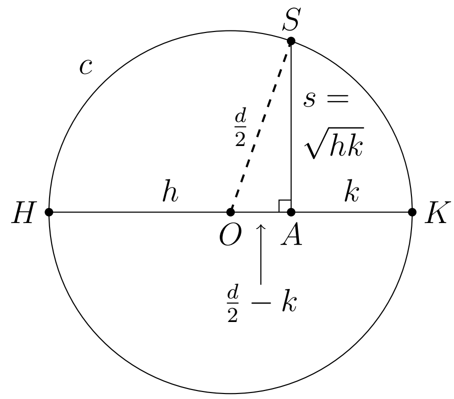
נגדיר $h = \frac{d}{t}a$, $k = \frac{d}{t}b$, $s = \sqrt{hk}$. נחשב:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}} = \frac{t}{d}s\,.$$

ונחשב גם:

$$h + k = \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d\,.$$

לפי סעיף 4 ניתן לבנות קטע קו $HA = h$ על הקוטר HK של המעגל הקבוע, ו־$AK = HK - HA = d - h = k$. לפי סעיף 3 ניתן לבנות דרך A אנח ל־HK. נסמן ב־S את החיתוך של האנח עם המעגל הקבוע.



הטטע הקו OS הוא רדיוס של המעגל ולכן אורכו שווה ל־$\frac{d}{2}$. לפי הבנייה אורכו של OA שווה ל־$k - \frac{d}{2}$. לפי משפט פיתגורס:

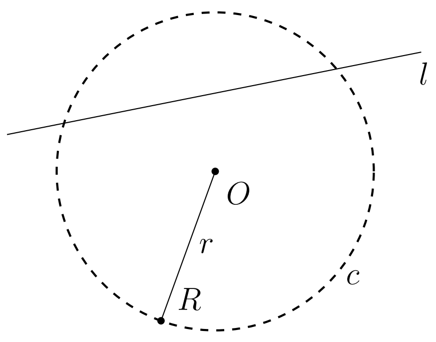
$$\begin{aligned} SA^2 &= \frac{d}{2}^2 - (\frac{d}{2} - k)^2 \\ &= dk - k^2 \\ &= k(d-k) \\ &= kh, \qquad \text{since } h + k = d, \\ s &= SA = \sqrt{hk}\,. \end{aligned}$$

כעת ניתן לבנות $x = \dfrac{t}{d} s$ לפי סעיף 5.

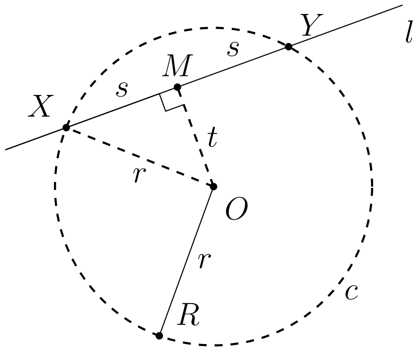
7 בניית נקודות חיתוך בין קו למעגל

נתון קו l ומעגל $c(O, r)$, ניתן לבנות את נקודות החיתוך בין הקו והמעגל.

לא מדובר על המעגל הקבוע, אלא על מעגל המוגדר על ידי מרכזו וקטע קו שהוא הרדיוס.



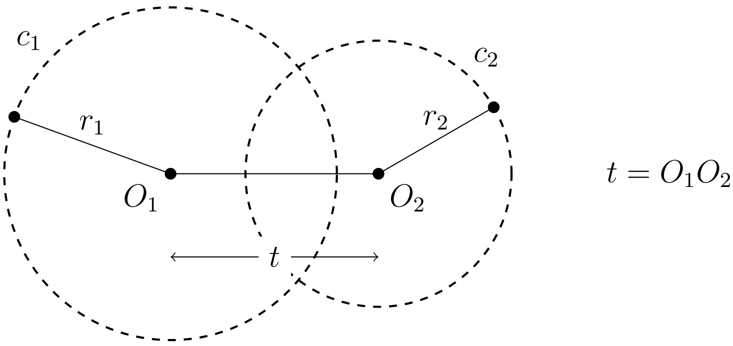
כפי שתואר בסעיף 3 ניתן לבנות את הנקודה M שהיא נקודת החיתוך של הקו עם האנח אליו ממרכז המעגל. M תהיה החוצה של המיתר XY, כאשר X, Y הן נקודות החיתוך של של הקו עם המעגל. באיור שלהלן X, Y, s הם רק סימונים. טרם בנינו את נקודות החיתוך.



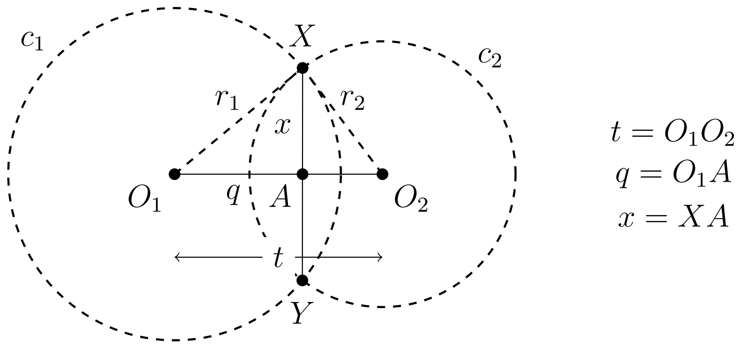
$\triangle OMX$ הוא מעגל ישר זווית. לפי משפט פיתגורס, $s^2 = r^2 - t^2 = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. קטע קו באורך r נתון כרדיוס המעגל, ובנינו את הנקודה M כך שיש לנו את OM באורך t. כפי שמתואר בסעיף 4 ניתן לבנות קטע קו שאורכו t מהנקודה O בכיוון RO, וגם קטע קו שאורכו t מהנקודה O בכיוון OR, כלומר, ניתן לבנות קטעים באורכים $r+t, r-t$. כפי שתואר בסעיף 6 ניתן לבנות קטע קו באורך $\sqrt{(r+t)(r-t)} = s$. שוב לפי סעיף 4, ניתן לבנות קטעי קו באורך s על הקו הנתון l מהנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מקטעי הקו הוא נקודת חיתוך של הקו והמעגל.

8 בניית נקודות חיתוך בין שני מעגלים

נתון שני מעגלים $c_1(O_1, r), c_2(O_2, r)$**, ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם** X, Y המעגלים נתונים כנקודות מרכז וקטעי קו שהם הרדיוסים. עם הסרגל ניתן לבנות את קנע הקו O_1O_2 המחבר את המרכזים. נסמן את אורכו ב־t.



נסמן ב־A את נקודת החיתוך בין O_1O_2 לבין XY, והאורכים $q = O_1A, x = XA$. שימו לב שטרם גנינו את הנקודה A.



אם נצליח לבנות את האורכים q, x, לפי סעיף 4 נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון O_1O_2. לפי סעיף 3 ניתן לבנות את האנך ל־O_1O_2 בנקודה A, ושוב לפי סעיף 4 קטעי קו באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנך. הקצה השני של כל קטע קו X, Y הוא נקודת חיתוך של שני המעגלים כי הן נמצאות במרחקים r_1, r_2 מהמרכזים O_1O_2.

בניית האורך q**:** נסמן $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$. d הוא האורך של היתר של משולש ישר זווית, ולפי סעיפים 3,4 ניתן לבנות אותו מ־r, t, האורכים הידועים של שני הצלעות האחרות, לפי חוק הקוסינוסים במשולש $\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= r_1^2 + t^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\
&= r_1^2 + t^2 - 2t(r_1 \cos \angle XO_1O_2) \\
&= r_1^2 + t^2 - 2tq \\
2tq &= (r_1^2 + t^2) - r_2^2 \\
q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t} .
\end{aligned}$$

נסמן $n = d + r_2$, $m = 2t$, $s = d - r_2$. ניתן לבנות את כל האורכים האלה לפי סעיף 4. לבסוף, ניתן לבנות את $q = \frac{n}{m}s$ לפי סעיף 5.

שימו לב שהמשולש לא מופיע האיור. ניתן לבנות אותו בכל מקום במישור כדי לבנות את האורכים d, q מהארוכים הידועים r_1, r_2, t.

בניית האורך x**:** $\triangle AO_1X$ הוא משולש ישר זווית, ולכן $x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}$. לפי 4 ניתן לבנות את $h = r_1 + q$ ו־$k = r_1 - q$, ולפי 6 ניתן לבנות את $x = \sqrt{hk}$.