שגיאות בפתרון שאלות במתמטיקה

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

מבוא

העוסקים במתמטיקה שוגים ומנסים דרכי פתרון שמובילות למבוי סתום! בספרים מופיעים שכתובים נקיים ומסודרים של ההוכחות והחישובים ולא את ערימות הנייר שנזרקו לפח בדרך. לדעתי, חשוב לראות בשגיאה לא סימן לכישלון אלא אתגר שיש להתמודד איתו.

במסמך זה אביא פתרונות לשאלות מבחינות הבגרות במתמטיקה (שאלון 806, תשע"ד ותשע"ה) פחות או יותר כפי שפתרתי כולל שגיאות. לאחר ההתאוששות מהשגיאה אדון במאפייני השגיאה.

* * *

ברצוני להודות לרונית בן־בסט לוי ולאביטל אלבוים־כהן שקראו את המסמך והעירו הערות מועילות. במקרים מסויימים הן הציעו דרכי פתרון אחרות. לא שניתי את דרכי הפתרון שלי כדי לשמור על "אותנטיות", ולכן שילבתי את הצעותיהן בסעיפי "המסקנות".

קיץ תשע"ה מועד ב, שאלה 1

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו,

ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.

כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה,

ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.

מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו,

והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.

כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו

(בכיוון ההליכה שלה).

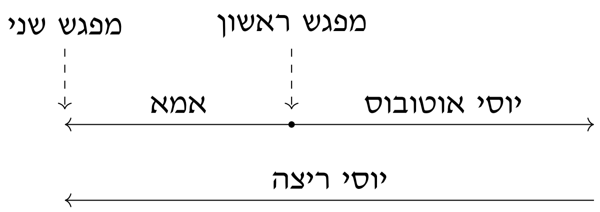
מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.

(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?

סעיף א

תרשים תנועה



המפגש הראשון הוא הנקודה בה יוסי יושב באוטובוס ורואה את אימו. הוא נוסע ימינה עד התחנה ואז רץ שמאלה כדי להשיג את אימו במפגש השני.

סימונים

מהירויות: אמא v_e, יוסי בריצה v_r, יוסי באוטובוס v_a.

זמנים: אמא t_e, יוסי בריצה t_r, יוסי באוטובוס t_a.

פתרון

המרחק שיוסי רץ שווה לסכום המרחקים שאמו הולכת ושל נסיעתו באוטובוס:

$$v_r t_r = v_e t_e + v_a t_a \,. \qquad (1)$$

נתון: יוסי משיג את אמא לאחר פרק הזמן בו שנסע באוטובוס וגם רץ:

$$t_e = t_a + t_r \,. \qquad (2)$$

נתון יחסי המהירויות:

$$v_r = 2v_e = v_a/7\,.$$

שנציב עבור v_e, v_a במשוואה (1):

$$\begin{aligned} v_r t_r &= v_e t_e + v_a t_a \\ v_r t_r &= \frac{v_r}{2} t_e + 7 v_r t_a \\ t_r &= \frac{t_e}{2} + 7 t_a \\ t_e &= -14 t_a + 2 t_r\,. \end{aligned}$$

ביחד עם משוואה (2) יש לנו שתי נוסחאות עבור t_e:

$$t_a + t_r = t_e = -14 t_a + 2 t_r$$

נתון נוסף הוא שזמן הנסיעה באוטובוס t_a שווה ל־ 10 שניות. לכן:

$$\begin{aligned} 10 + t_r &= -140 + 2 t_r \\ t_r &= 150\,. \end{aligned}$$

סעיף ב נתון: יוסי הולך ביחד עם אמו ובקצב שלה למשך 3 דקות. מכאן שהמרחק שהלכו הוא $3v_e$. כדי לחזור לתחנת האוטובוס, יוסי חייב לרוץ מרחק זה ועוד המרחק שרץ קודם כדי להשיג את אמו שהוא $150v_4$. נסמן ב־ t_h את הזמן שיוסי רץ בהחזרה. נרכיב את הכל הנתונים ונקבל:

$$\begin{aligned} t_h &= \frac{3v_e + 150 v_r}{v_r} \\ &= 150 + \frac{3v_e}{v_r} \\ &= 150 + \frac{3v_e}{2v_e} \\ &= 151.5\,. \end{aligned}$$

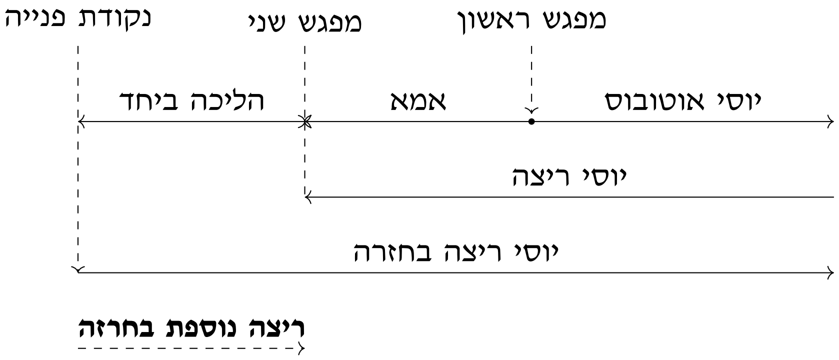
שגיאה! משהו לא הגיוני. רק עוד 1.5 שניות? עיון חוזר בשאלה מגלה שהם הלכו ביחד 3 **דקות** שהן 180 שניות. לכן התשובה הנכונה היא:

$$t_h = 150 + \frac{180 \cdot v_e}{2v_e} = 240\,.$$

עבדנו קשה מדי הזמן שיוסי רץ מורכב מהזמן לחזור לנקודת המפגש ועוד הזמן מהמפגש לתחנה. אבל כבר חישבנו שהזמן לחזור מהמפגש לתחנה הוא 150 שניות. למספר זה נחבר את הזמן הדרוש לרוץ את המרחק שהלכו ביחד במשך שלוש דקות. מהירות הריצה היא פי שנים ממהירות ההליכה, ולכן $t_h = 150 + 180/2 = 240$.

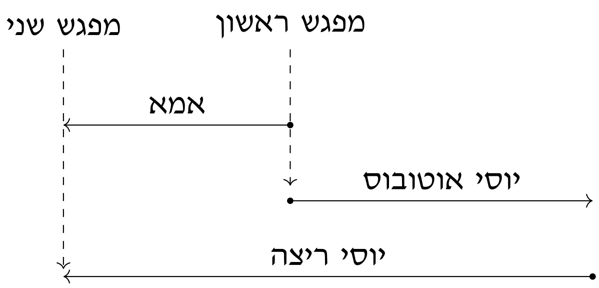
מסקנות

- **קרא בעיון את השאלה.** כל מילה חשובה. כאן יש מוקש בהחלפת היחידות משניות לדקות אבל המוקש מודגש וניתן לנחש שלהדגשה יש משמעות!
- פתרתי את חלק ב׳ בצורה מסובכת מדי. ייתכן שהייתי שם לב לדרך הפשוטה לו טרחתי לעדכן את תרשים התנועה:



בתרשים המורחב, יוסי מצטרף לאמו במפגש השני והם הולכים ביחד בקצב הליכה של אמו עד לנקודת הפנייה חזרה של יוסי. כמובן שהמרחק מנקודת הפנייה עד למפגש השני שווה למרחק מהמפגש השני ועד לנקודת הפנייה.

- אפשר להפריד את המסלולים של יוסי ושל אימו בתרשים התנועה:

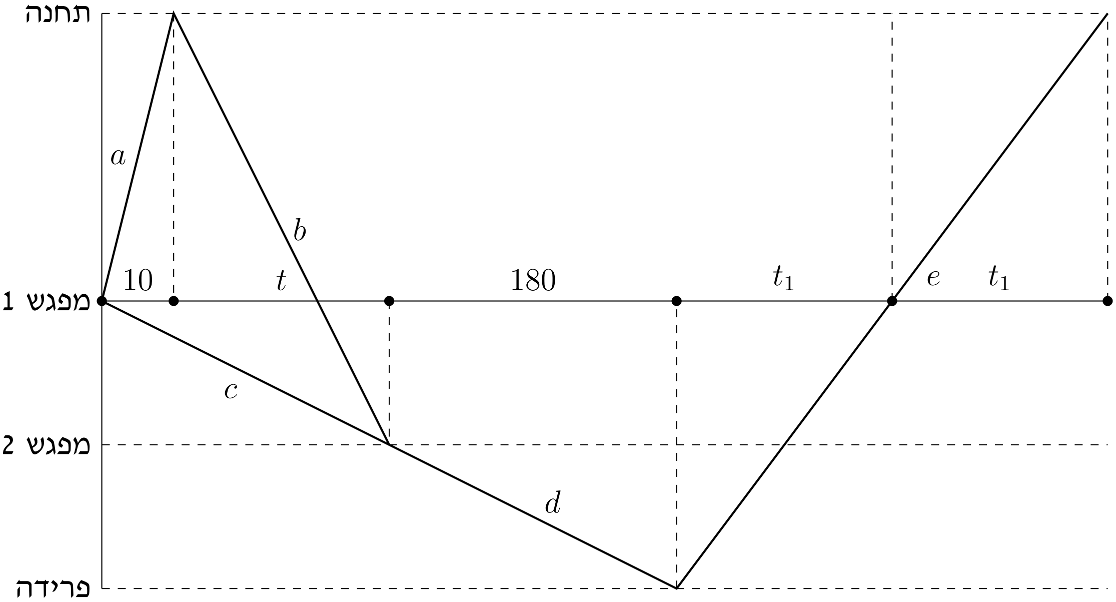


- מקובל לארגן את הנתונים בטבלה:

	זמן שניות	מהירות ק״מ לשניה	מרחק ק״מ
יוסי אוטובוס	10	$14v$	$140v$
יוסי ריצה	t	$2v$	$2vt$
אימא	$t+10$	v	$v(t+10)$

תרשים תנועה דו־ממיד

ניתן לפתור את הבעיה בקלות אם נסתייע בתרשים דו־ממדי של התנועה, כאשר הציר האופקי הוא זמן והציר האנכי הוא מרחק:



$a =$ יוסי נוסע באוטובוס
$b =$ יוסי רץ
$c =$ אמא הולכת
$d =$ יוסי ואמא הולכים ביחד
$e =$ יוסי רץ
נסמן מהירויות: $v_y =$ יוסי, $v_a =$ אמא, $v_b =$ אוטובוס.
נתונים וסימונים של זמן רשומים על ציר הזמן בקטעים בין הנקודות.

סעיף א נתון: $v_y = 2v_a$, $v_y = v_b/7$. המרחק שאמא עוברת בין מפגש 1 למפגש 2 שווה למרחק מהתחנה למפגש 2 פחות המרחק ממפגש 1 לתחנה:

$$v_a(t+10) = v_y t - v_b 10.$$

לאחר הצבת הנתונים על המהירויות:

$$\frac{v_y}{2}(t+10) = v_y t - 7v_y 10$$

נקבל $t = 150$.

סעיף ב אמא הולכת ממפגש 1 לנקודת הפרידה ב $340 = 180 + 150 + 10$ שניות. יוסי רץ פי שניים מהר יותר מאמא, ולכן את הדרך חזרה למפגש 1 הוא עובר ב $t_1 = 170$ שניות.
האוטובוס נוסע ממפגש 1 לתחנה ב 10 שניות. יוסי רץ פי שבע לאט יותר מהאוטובוס, ולכן את הדרך ממפגש 1 לתחנה הוא עובר ב $t_2 = 70$ שניות.
את הדרך חזרה מנקודת הפרידה לתחנה יוסי עובר ב $t_1 + t_2 = 240$ שניות.

חורף תשע"ה, שאלה 2

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_1 = 4$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

סעיף א סכום שני איברי האמצע לפי הנוסחה הנתונה:

$$\begin{aligned} a_{50} + a_{51} &= 4n + 2 \\ &= 4 \cdot 50 + 2 \\ &= 202\,. \end{aligned}$$

סעיף ב סדרה היא חשבונית אם ההפרש בין שני איברים עוקבים קבוע ולא תלוי ב־ n.
לאיברים הזוגיים:

$$\begin{aligned} a_{2k+2} - a_{2k} &= a_{2k+2} + a_{2k+1} - a_{2k+1} - a_{2k} \\ &= (a_{2k+1} + a_{2k+2}) - (a_{2k} + a_{2k+1}) \\ &= (4(2k+1) + 2) - (4(2k) + 2)) \\ &= 8k + 4 + 2 - 8k - 2 \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

לאיברים האי־זוגיים:

$$\begin{aligned} a_{2k+3} - a_{2k+1} &= a_{2k+3} + a_{2k+2} - a_{2k+2} - a_{2k+1} \\ &= (a_{2k+2} + a_{2k+3}) - (a_{2k+1} + a_{2k+2}) \\ &= (4(2k+2) + 2) - (4(2k+1) + 2)) \\ &= 8k + 8 + 2 - 8k - 4 - 2 \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

סעיף ג אם לסדרה 101 איברים, האיבר באמצע הסדרה הוא a_{51} שהוא מספר במקום אי־זוגי בסדרה, וניתן לחשב אותו לפי הנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$ כאשר הנוסחה מתייחסת רק לסדרת האיברים במקומות האי־זוגיים $b_{2(k-1)+1}, 1 \leq k \leq 26$:

$$b_1 = a_{2\cdot 0+1} = a_1, \quad b_2 = a_{2\cdot 1+1} = a_3, \quad \ldots, \quad b_{26} = a_{2\cdot 25+1} = a_{51}\,.$$

לכן:

$$a_{51} = b_{26} = b_1 + (k-1)\cdot d = 4 + 25\cdot 4 = 104\,.$$

סעיף ד מהנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$S = \frac{101}{2}(2\cdot 4 + (101-1)\cdot 4) = \frac{101}{2}\cdot 408 = 20604\,.$$

שגיאה! הוכחנו שהאיברים הזוגיים הם סדרה חשבונית והאיברים האי־זוגיים הם סדרה חשבונית, אבל לא הוכחנו **שכל** האיברים הם סדרה חשבונית אחד. אם בודקים מספר איברים מתחילת הסדרה נראה מיד שהסדרה כולה אינה חשבונית:

$$4, {}^{2}, 8, {}^{6}, 12, {}^{10}, 16, {}^{14}, \ldots \tag{3}$$

המספרים הזוגיים מופיעים מעט גבוה יותר כדי להדגיש שתת־הסדרות הן סדרות חשבוניות אבל הסדרה כולה אינה חשבונית.

הפתרון הוא לסכם את כל אחת משתי הסדרות בנפרד ולחבר את הסכומים:

$$\begin{aligned}
S_{odd} &= \tfrac{51}{2}(2\cdot 4 + 50\cdot 4) = \tfrac{51}{2}\cdot 208 = 5304 \\
S_{even} &= \tfrac{50}{2}(2\cdot 2 + 49\cdot 4) = \tfrac{50}{2}\cdot 200 = 5000 \\
S_{odd} + S_{even} &= 10304\,.
\end{aligned}$$

מסקנות

- אין בהכרח קשר בין סדרה לבין תת־הסדרות שלה, לכן יש להקפיד על קריאה מדוייקת של השאלה כדי לוודא באיזו סדרה מדוברת. כאן ראינו שסדרה המורכבת משתי סדרות חשבוניות אינה בהכרח חשבונית. ההיפך גם נכון. נתון הסדרה החשבונית:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 10, a_6 = 12, a_7 = 14, a_8 = 16, \ldots$$

  תת־הסדרה a_n כאשר n הוא מספר ראשוני היא לא סדרה חשבונית:

$$a_2 = 4, a_3 = 6, a_5 = 10, a_7 = 14, a_{11} = 22, a_{13} = 26, \ldots$$

- יש להקפיד בניסוחים להבדיל בין איברי הסדרה ומקומותיהם בסדרה. במדעי המחשב משתמשים במונח קצר וברור index לתיאור מקום בסדרה.

- בשאלות על סדרות כדאי לרשום מספר איברים מתחילת הסדרה כדי לקבל מבט כללי על הסדרה. סדרת המספרים ב־ (3) מראה בצורה ברורה שהסדרה המקורית אינה חשבונית.

קיץ תשע"ה מועד ב, שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5 , a_9 , a_{13} , ... , a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה <u>הנתונה בפתיח</u> הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

סעיף א ניתן לבטא את הערכים של איברים עוקבים על ידי הוספת ההפרש לאיבר הראשון:

$$a_{n+1} = a_n + d,\ a_{n+2} = a_n + 2d\,.$$

מהנוסחה הנתונה הראשונה:

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_n^2 &= 216 \\ (a_n + 2d)^2 - a_n^2 &= 216 \\ a_n^2 + 2a_nd + 4d^2 - a_n^2 &= 216 \\ 2a_nd + 4d^2 &= 216 \\ a_nd + 2d^2 &= 108\,. \end{aligned}$$

מהנוסחה הנתונה השנייה:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} + a_{n+2} &= 54 \\ a_n + a_n + d + a_n + 2d &= 54 \\ 3a_n + 3d &= 54 \\ a_n &= \frac{54 - 3d}{3} \\ a_n &= 18 - 3d\,. \end{aligned}$$

אם נציב את הביטוי עבור a_n במשוואה הראשונה נקבל משוואה ריבועית ב־ d:

$$\begin{aligned} (18 - 3d)d + 2d^2 &= 108 \\ 18d - 3d^2 + 2d^2 - 108 &= 0 \\ -d^2 + 18d - 108 = 0 \end{aligned}$$

שפתרונה היא:

$$d = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 432}}{-2}\,.$$

שגיאה! הביטוי בשורש לא יכול להיות שלילי. החשד המיידי הוא שגיאה בחישובים ואכן יש כאן שתיים. השגיאה הראשונה היא טעות במכפלה:

$$\begin{aligned}
a_{n+2}^2 - a_n^2 &= 216\\
(a_n + 2d)^2 - a_n^2 &= 216\\
a_n^2 + 4a_nd + 4d^2 - a_n^2 &= 216\\
4a_nd + 4d^2 &= 216\\
a_nd + d^2 &= 54\,.
\end{aligned}$$

השגיאה השנייה גם היא טעות פשוטה בחישוב:

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n+1} + a_{n+2} &= 54\\
a_n + a_n + d + a_n + 2d &= 54\\
3a_n + 3d &= 54\\
a_n + d &= 18\,.
\end{aligned}$$

מההצבה מקבלים תוצאה הגיונית:

$$\begin{aligned}
(18 - d)d + d^2 &= 54\\
18d - d^2 + d^2 &= 54\\
18d &= 54\\
d &= 3\,.
\end{aligned}$$

שים לב שלא גמרנו לפתור את השאלה שביקשה את ערכו של a_n:

$$a_n = 18 - d = 18 - 3 = 15\,.$$

סעיף ב נחשב את האיבר a_5:

$$a_5 = a_1 + 4d = -21 + 4 \cdot 3 = -21 + 12 = -9\,. \tag{4}$$

נרשום את סדרת האיברים כדי לוודא שלא טעינו במקדם 4 של d:

$$a_1 = -21,\ a_2 = -18,\ a_3 = -15,\ a_4 = -12,\ a_5 = -9\,.$$

בסדרה החדשה האינדקסים קופצים בהפרשים של 4 יחסית לסדרה המקורית. מהשוואה (4) רואים שההפרש של הסדרה החדשה הוא $4 \cdot 3 = 12$, אבל כדי לוודא נרשום את הסדרה:

$$a_5 = -9,\ a_6 = -6,\ a_7 = -3,\ a_8 = -0,\ a_9 = 3\,,$$

ואכן ההפרש בין -9 ל 3 הוא 12.
בסדרה החדשה, ניתן לרשום את האינדקס של האיבר הראשון כ־ $5 = 4 \cdot 1 + 1$ והאינדקס של האיבר האחרון הוא $4k + 1$, כך שיש k איברים בסדרה השנייה.

סכום הסדרה החדשה נתונה ונשתמש בנוסחה לסכום הסדרה:

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}(2\cdot -9+(k-1)\cdot 12) &= 450\\ \frac{k}{2}(-18+12k-12) &= 450\\ 6k^2-15k-450 &= 0\\ 2k^2-5k-150 &= 0\,.\end{aligned}$$

פתרון המשוואה הריבועית:

$$k=\frac{5\pm\sqrt{25+8\cdot 150}}{4}=\frac{5\pm 35}{4}=\frac{40}{4}=10$$

כי מספר האיברים חיובי.

מסקנות

- אין מנוס מבדיקת החישובים שוב ושוב. בדוק את החישובים מייד, לאחר סיום הפתרון, ואם יש זמן לאחר השלמת הבחינה.
- שימוש במחשבון לא פותר מבדיקת החישובים כי טעויות בהקלדה הן שכיחות כמו טעויות בחישוב.
- מומלץ "לבזבז" עוד כמה שניות כדי לרשום חישובים לפרטי פרטים. אני חישבתי ריבוע של ביטוי בראש ויכול להיות שכתיבת הריבוע כמכפלה היתה מונעת את הטעות:

  $$(a_n+2d)^2-a_n^2=(a_n+2d)(a_n+2d)-a_n^2\,.$$

  מאותה סיבה, כדאי לפשט משוואות לפני שפותרים אותן:

  $$\begin{aligned}3a_n+3d &= 54\\ a_n+d &= 18\,.\end{aligned}$$

  זה נחמד אם אתה זוכר ש־ 54 מתחלק ב־ 3, אבל גם אם לא, כדאי לבדוק בחילוק או אפילו במחשבון כי יש פחות סיכוי לטעות עם מספרים קטנים.
- אפשרות אחרת היא לפרק את הפולינום:

  $$a_{n+2}^2-a_n^2=(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n)\,.$$

  הצבה של $a_{n+2}=a_n+2d$ מובילה מיד לפתרון. אכן, ראיתי תלמידים רבים המסרבים לבדוק פירוק של פולינומים, גם כאשר הפירוק יכול לספק הבנה טובה של חישוב.

חורף תשע"ה, שאלה 3

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

אתחיל עם פתרון נכון ואחר כך אציג פתרון חלופי שגוי.

פתרון ראשון

סעיף א נסמן ב־A את האירוע של משתתף בחוג לריקודי עם וב־T את האירוע של משתתף בחוג לתיאטרון. x הוא ההסתברות של האירוע T ולפי המידע הנתון, ההסתברות של האירוע A הוא $2x$:

	$\overline{T}$	T	
$2x$		$p(A\cap T)$	A
			$\overline{A}$
1		x	

לפי המידע הנתון, כולל הקביעה שהאירועים בלתי תלויים:

$$.6 \cdot p(T) = p(A\cap T) = P(A)\cdot P(T)\,.$$

לכן:

$$\begin{aligned} 0.6x &= 2x\cdot x \\ 0.6 &= 2x \\ x &= 0.3 \end{aligned}$$

נרשום ערכים מספריים בטבלה:

	$\overline{T}$	T	
0.6		0.18	A
0.4			$\overline{A}$
1	0.7	0.3	

תשובה לסעיף זה של השאלה היא 18%.

סעיף ב אנו צריכים עכשיו את ההסתברות המותנית כי בוחרים מתוך המשתתפים בריקודי עם:

$$p(T/A) = \frac{p(T \cap A)}{p(A)} = \frac{0.18}{0.6} = 0.3\,,$$

או:

$$p(T/A) = \frac{p(T \cap A)}{p(A)} = \frac{p(T)p(A)}{p(A)} = p(T) = 0.3\,.$$

מנוסחת ברנולי נקבל את ההסתברות של לפחות שני משתתפים בחוג לתיארטון כאחד פחות ההסתברות של אפס או אחד משתתפים בחוג לתיאטרון:

$$1 - \left(\begin{array}{c} 6 \\ 0 \end{array}\right)(0.3^0)(0.7^6) - \left(\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array}\right)(0.3^1)(0.7^5) = 1 - 0.1176 - 0.3025 = 0.57987\,.$$

פתרון שני פרט לקביעה שהאירועים בלתי־תלויים, הבעיה מנוסחת כבעיה על קבוצות ולא כבעיה בהסתברות, לכן ניסיתי לפתור בצורה אחרת. נסמן:

מספר המשתתפים **רק** בחוג ריקודי עם = A.

מספר המשתתפים **רק** בחוג לתיאטרון = T.

מספר המשתתפים **בשני החוגים** = S.

מכאן שמספר המשתתפים בריקודי עם הוא $A+S$ ומספר המשתתפים בתיאטרון הוא $T+S$.

לפי המידע בבעיה:

$$\begin{aligned} A+S &= 2(T+S) \\ A &= 2T+S \\ 0.6(T+S) &= S \\ T &= \frac{S-0.6S}{0.6} = \frac{2}{3}S \\ A &= 2\cdot\frac{2}{3}S + S = \frac{7}{3}S \end{aligned}$$

החלק של התושבים המשתתפים בשני החוגים הוא:

$$\frac{S}{S+A+T} = \frac{S}{S+\frac{7}{3}S+\frac{2}{3}S} = \frac{3}{12}\,,$$

והתשובה היא 25%.

מה הבעיה עם הפתרון? התוצאה חשודה כי לא השתמשנו במידע שהאירועים בלתי תלויים. הבעיה היא בהנחה **שכל** התושבים משתתפים בלפחות חוג אחד. אם מסתכלים שוב על הטבלה, חסר נתון למשבצת $\overline{A} \cap \overline{T}$. אם יש תושבים שלא משתתפים בחוגים, יש נעלם נוסף וצריכים להשתמש במידע על אירועים בלתי־תלויים, וזה מחזיר אותנו לפתרון על ידי הסתברות ולא קבוצות.

מה מקור ההנחה? ניתן לפרש את המשפט הראשון בשאלה כך שהוא מפרט את עיסוקם של כל תושבי בעיר.

מסקנות אסור להניח שתיאור של קבוצות מכסה את כל המרחב אלא אם כתוב כך במפורש. למשל, בסעיף ב׳ כתוב: כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, **ורק הם**.

קיץ תשע"ד מועד ב, שאלה 3

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

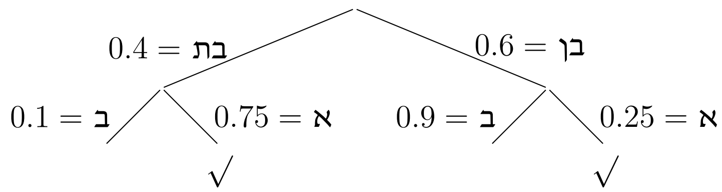
ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

סעיף א בונים עץ לפי המידע בשאלה:



ההסתברות שתלמיד בוחר מסלול א' מתקבלת מסכום ההסתברויות המסומנות:

$$0.4 \times 0.75 + 0.6 \times 0.25 = 0.45\,.$$

שגיאה! רואים שהעץ לא הגיוני כי כאשר יוצאים שני צאצאים מצומת, סכום ההסתברויות צריך להיות אחד. מקור הטעות הוא בקריאה לא נכונה של המשפט: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות. פירשתי את ההסתברות המותנית בצור הפוכה כאילו שזה אחוז התלמידות שבחרו במסלול א'.

פתרון א נשתמש בנוסחה להסתברות מותנית:

$$p(\text{bat} \cap \text{aleph}) = p(\text{bat}/\text{aleph})p(\text{aleph}) = p(\text{aleph}/\text{bat})p(\text{bat})\,.$$

ומכאן:

$$p(\text{aleph}) = \frac{p(\text{aleph}/\text{bat})p(\text{bat})}{p(\text{bat}/\text{aleph})} = \frac{(1-0.1)\times 0.4}{0.75} = 0.48\,.$$

פתרון ב נשתמש בנוסחה להסתברות מותנית בשני שלבים:

$$0.1 = p(\text{bet}/\text{bat}) = \frac{p(\text{bet} \cap \text{bat})}{p(\text{bat})} = \frac{p(\text{bet} \cap \text{bat})}{0.4}\,,$$

$$p(\text{bet} \cap \text{bat}) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$$

נציב בטבלה את הערכים הידועים והערך שחישבנו:

	bat	ben	
aleph	0.36		
bet	0.04		
	0.4	0.6	1

ונקבל ש־ $p(\text{bat} \cap \text{aleph}) = 0.36$. נשתמש שוב בנוסחה להסתברות מותנית:

$$p(\text{bat}/\text{aleph}) = \frac{p(\text{bat} \cap \text{aleph})}{p(\text{aleph})}\,,$$

ונקבל:

$$p(\text{aleph}) = \frac{p(\text{bat} \cap \text{aleph})}{p(\text{bat}/\text{aleph})} = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,.$$

הפתרון הראשון נראה פשוט יותר אבל השני יכול להתאים למי שרגיל לעבוד עם טבלאות.

סעיף ב עם הפתרון ש־ $p(\text{aleph}) = .48$ נוכל להשלים את הטבלה:

	bat	ben	
aleph	0.36	0.12	0.48
bet	0.04	0.48	0.52
	0.4	0.6	1

נחשב:

$$\begin{aligned} p(\text{aleph} \cap \text{bat}) &= 0.36 \\ p(\text{aleph})p(\text{bat}) &= 0.48 \times 0.4 = 0.192\,, \end{aligned}$$

והמאורעות אינם בלתי תלויים.

סעיף ג אם נבחר בת אחת ההסתברות שהיא בחרה מסלול א' היא: $p(\text{aleph} \cap \text{bat}) = 0.36$.
ההסתברות שלפחות בת אחת מתוך שתיים בחרה מסלול א' היא:

$$\binom{2}{1} 0.36 \times (1 - 0.36) + \binom{2}{2} 0.36 \times 0.36 = 0.46 + 0.13 = 0.59\,.$$

שגיאה! בחרו רק בנות ולכן מדובר בהסתברות מותנית:

$$p(\text{bet}/\text{bat}) = 0.1,\ p(\text{aleph}/\text{bat}) = 0.9\,.$$

פתרון א בת אחת מתוך אחת בחרה מסלול א': 0.9.
נבדוק תחילה מה ההסתברות שלפחות בת אחת **מתוך שתיים** בחרה מסלול א'. מנוסחת ברנולי:

$$\binom{2}{1} 0.9 \times (1-0.9) + \binom{2}{2} 0.9 \times 0.9 = 0.18 + 0.81 = 0.99\,.$$

ולכן מספר הבנות שנבחרו הוא 2.

פתרון ב עדיף לא לפתור בניסוי וטעיה אלא לזהות את הנעלם–מספר הבנות שנבחרו–ולמצוא משוואה עם הנעלם. ההסתברות שאף בת לא בחרה במסלול א' היא $1-0.9=0.1$. ההסתברות שאף בת מתוך n בנות לא בחרה במסלול א' היא $(0.1)^n$ ונתון שהסתברות זו היא $1-0.99=0.01$. מספר הבנות הוא פתרון המשוואה:

$$(0.1)^n = 0.01\,,$$

שהוא $n=2$.

מסקנות

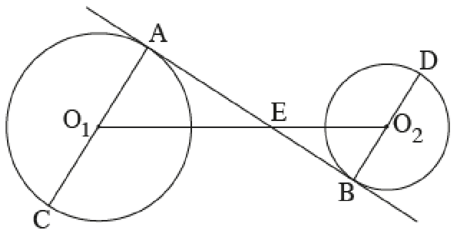
- בניסוח שאלות בהסתברות לא נאמר במפורש "הסתברות מותנית", ועליך להבין מתוך מילים כגון "מן", "מבין" שמדובר בהסתברות מותנית. מכאן יש לקרוא שאלות אלו במשנה זהירותכדי לוודא שהבנת נכון.
- צריך לשקול אם להשתמש בטבלה או בעץ או לוותר עליהם ולהסתפק בנוסחאות לבד. אם הפתרון לא יוצא בשיטה אחת כדאי לנסות שיטה אחרת.
- אמנם הנוסחה להסתברות מותנית והנוסחה של בייס נתונות, אבל אני מעדיף להסתכל עליהן ביחד כך:

$$p(A/B)p(B) = p(A \cap B) = p(B/A)p(A)\,.$$

אני מוצא שקל לזכור את הנוסחאות האלו וקל להציב ערכים ידועים כדי לפתור שאלה.

- בשאלה הדורשת לבחור פריט מתוך אוכלוסיה אפשר להעדיף שימוש בטבלה ולא בעץ.

קיץ תשע"ד מועד ב, שאלה 4



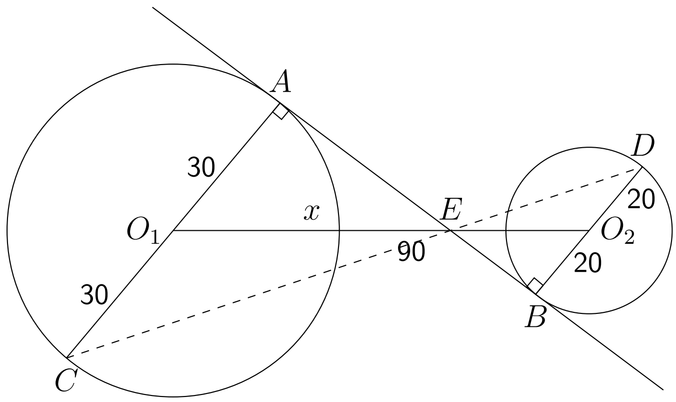
AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1 .
BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2 .
ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2
בנקודות A ו־ B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ
רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD .

סעיף א



(1) הקו AB משיק לשני המעגלים ולכן הזוויות $\angle O_1AE, \angle O_2BE$ ישרות. הזוויות הקודקודיות $\angle AEO_1, \angle BEO_2$ גם הן שוות. מכאן שהמשולשים $\triangle O_1AE, \triangle O_2BE$ דומים. נסמן ב x את הקטע O_1E ונקבל את היחס:

$$\frac{x}{30} = \frac{O_1E}{O_1A} = \frac{O_2E}{O_2B} = \frac{90-x}{20}\,.$$

נפתור את המשוואה עבור x ונקבל $50x = 2700$ ו $x = 54$. לכן:

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}\,.$$

(2) המשיק AB ניצב ל AC, BD ולכן קווים אלה מקבילים, והזוויות המתחלפות $\angle CO_1E$, $\angle DO_2E$ שוות. הזוויות הקודקודיות $\angle O_1EC, \angle O_2ED$ גם שוות ולכן המשולשים דומים:

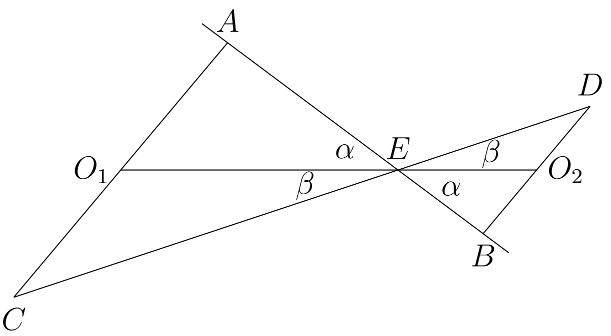
$$\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D\,.$$

סעיף ב

הפתעה ושגיאה! ברור מהציור שהנקודה E נמצאת על הקו CD, אבל מסתבר שצריך להוכיח את הטענה, ולכן ההוכחה הקודמת שגויה. למרות שהמשולשים $\triangle O_1EC, \triangle O_2ED$ דומים, ייתכן שהזוויות $\angle O_1EC, \angle O_2ED$ אינן זוויות קודקודיות.
אפשר לתקן את הוכחה על ידי שימוש בעובדה שהוכחנו בסעיף א ש $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$.
ערכי הרדיוסים שווים ואנו מקבלים יחס:

$$\frac{O_1C}{O_2D} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{O_1E}{O_2E}\,,$$

והדמיון בין המשולשים $\triangle O_1EC, \triangle O_2ED$ נובע מהיחס בין שני צדדים והשווין של הזווית המתחלפות ביניהם $\angle CO_1E, \angle DO_2E$.
נתבונן בזוויות סביב הנקודה E:



בגלל המשולשים הדומים $\triangle O_1EC, \triangle O_2ED$ ו $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$ הזוויות המסומנות α שוות וגם הזוויות המסומנות β. לפי נתוני השאלה, AB הוא קו ישר ולכן:

$$\angle AED = 180^\circ - \alpha - \beta\,.$$

מכאן ש

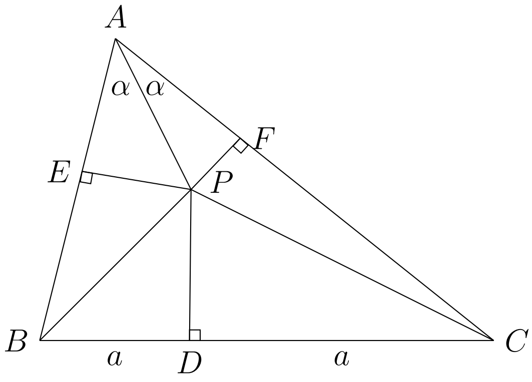
$$\angle CED = 180^\circ - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180^\circ\,,$$

ולכן CD קו ישר.

מסקנה לעולם אין לסמוך על ציור!

אין לסמוך על ציור

כדי להדגים את המלכודת הממתינה למי שמסתמך על ציור, אביא הוכחה **שכל** משולש הוא משולש שווי שוקיים! בציור להלן P היא נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle A$ לבין האנך האמצעי של BC. D, E, F הן נקודות החיתוך של האנכים מ P אל הצלעות.



AP הוא חוצה הזווית של הזווית $\angle A$. המשולשים $\triangle APE, \triangle APF$ הם ישר זווית עם זוויות שוות וצלע AP משותף כך שהם חופפים. PD הוא אנך אמצעי כך ש $BD = DC$ ולכן המשולשים $\triangle DPB, \triangle DPC$ חופפים. מכאן ש $PB = PC$. המשלושים $\triangle EPB, \triangle FPC$ הם ישר זווית עם יתר שווה ולכן גם הם חופפים. ניתן להסיק ש $AE + EB = AF + FC$ והמשולש $\triangle ABC$ שווה שוקיים.

ההוכחה נכונה ויחסית פשוטה, אז מה הבעיה? הבעיה היא שהציור אינו נכון! אם תבנו את הציור תוך מדידת הזווית $\angle A$ ומציאת נקודת האמצע D, תגלו שהנקודות P ו־ E או F נמצאות **מחוץ** למשולש.

חורף תשע"ד, שאלה 5

במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך

את הצלעות BC ו־ BA בנקודות E ו־ D בהתאמה (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

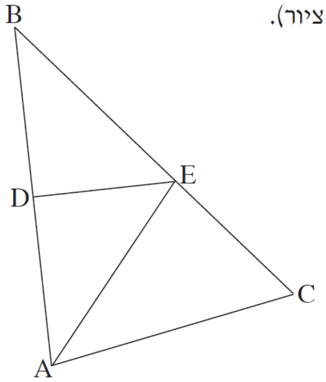
א. (1) הבע באמצעות α ו־ β את $\sphericalangle EAC$.

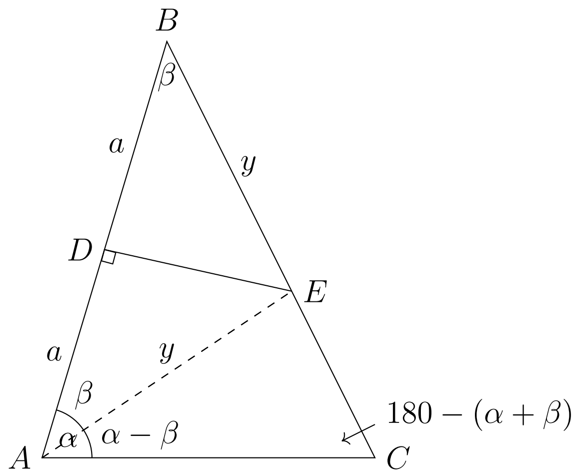
(2) הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

נתון גם: AE חוצה־זווית BAC,

AC = 10 ס"מ , $\beta = 40^o$.

ב. חשב את הרדיוס של המעגל ה<u>חסום</u> במשולש ABC .





סעיף א

(1) המשולשים $\triangle ADE, \triangle BDE$ חופפים בגלל שני צלעות שווים והזווית (הישרה) ביניהם. לכן, הזווית $\angle DAE = \beta$ והזווית $\angle EAC = \alpha - \beta$.
דרך אחרת לראות את החפיפה היא לשים לב שהקטעים המסומנים y שווים כי הנקודה E היא על האנך האמצעי ולכן במרחק שווה מקצות הקטע A, B.

(2) היתרים AE, EB שווים ומסומנים והזווית $\angle ECA = 180 - (\alpha + \beta)$. לפי משפט הסינוסים במשולש $\triangle ECA$:

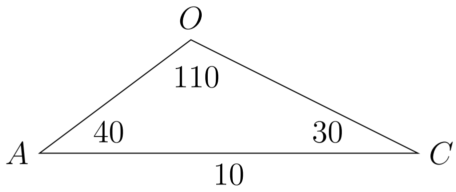
$$\frac{CE}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AE}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{EB}{\sin(180 - (\alpha + \beta))},$$

ולכן:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin 180 - (\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

סעיף ב

נתון $\angle ABC = \beta = 40$ והוכחנו ש $\angle BAE = \beta$. נתון גם ש AE חוצה זווית כך ש $\angle EAC = \angle BAE = 40$. במשולשים החופפים ישר־הזווית נקבל $\angle BED = \angle AED = 90 - 40 = 50$.
הזווית המשלימה $\angle CEA$ היא $180 - 50 - 50 = 80$ ולכן $\angle ECA = 180 - 80 - 40 = 60$.
מרכז המעגל החסום במפגש של חוצי הזוויות. חוצה הזוית ב C יפגוש את חוצה הזוית ב A:

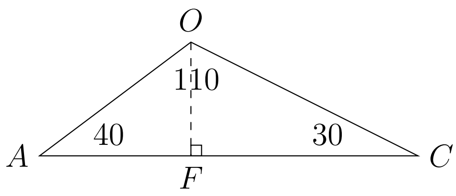


נתון $AC = 10$ ולפי חוק הסינוסים:

$$\frac{10}{\sin 110} = \frac{AO}{\sin 30}\,,$$

$$AO = \frac{10 \sin 30}{\sin 100} = 5.3\,.$$

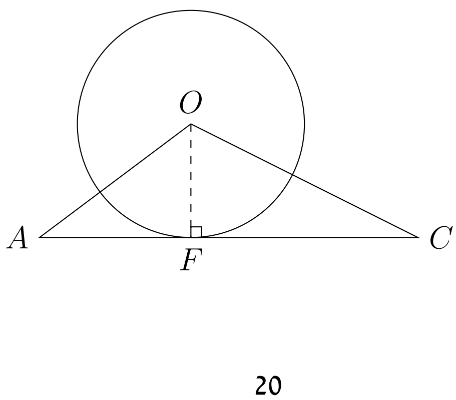
שגיאה! רדיוס המעגל החסום הוא לא המרחק OA אלא הניצב OF לצלע AC, כי AC הוא המשיק למעגל והניצב מהמרכז למשיק הוא הרדיוס.



החישוב פשוט: $OF = AO \sin 40 = 5.3 \sin 40 = 3.4$.

מסקנות

- אי־אפשר להדגיש מספיק את החשיבות של קריאה מדוקדקת של השאלה במבחן. במיוחד חשוב להבין מה הפתרון הנדרש.
- מקרה אחר שנתקלתי בו היה דרישה לחשב את **כל** הזוויות במשולש ואין לעצור לאחר חישוב זווית אחת או שתיים אפילו שברור איך להשלים את הפתרון.
- הייתי צריך לצייר את המעגל ואז הייתי רואה ש OF הוא הרדיוס.



חורף תשע"ד, שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות בדיוק.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x = -1$

ועל ידי ציר ה־ x , שווה ל־ $\frac{1}{2}$.

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (מצא ערכים מספריים).

א. (1) לא יכול להיות ש $x^2 - x + a = 0$ כי $a > 1$ ותמיד $x^2 \ge x$. לכן אין אס' אנכיות.
נבדוק אס' אופקיות על ידי חילוק בגורם עם המעלה הגבוהה ביותר:

$$\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}} .$$

כאשר $x \leftarrow \pm\infty$, $\frac{a}{x^2} \leftarrow 0$, $\frac{1}{x} \leftarrow 0$, והביטוי שואף ל 1. מכאן שיש אס' אופקית ב $y = 1$.

(2) הפונקציה מוגדרת לכל מספר ממשי לכן ייתכנו רק נקודות קיצון כאשר הנגזרת מתאפסת:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + a) - (2x - 1)(x^2 + x - a)}{(x^2 - x + a)^2} = 0 .$$

בהשמטת המכנה שהוא חיובי:

$$\begin{aligned}(2x^3 - 2x^2 + 2xa + x^2 - x + a) - (2x^3 + 2x^2 - 2xa - x^2 - x + a) &= 0\\ -2x^2 + 4xa &= 0 .\end{aligned}$$

הנגזרת מתאפסת בנקודות:

$$(0, -1), \left(2a, \frac{4a^2 + a}{4a^2 - a}\right) = \left(2a, \frac{4a + 1}{4a - 1}\right) .$$

כדי לקבוע את סוג נקודות הקיצון, נבדוק את הסימן של הנגזרת השניה, ושוב ניתן להשמיט את המכנה החיובי של הנגזרת הראשונה כדי לקבל את הסימן של הנגזרת השנייה:

$$(-2x^2 + 4ax)' = -4x + 4a.$$

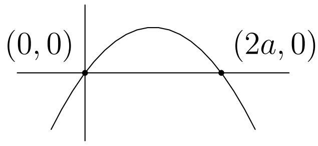
הביטוי חיובי כאשר $x = 0$ ונקודת הקיצון היא מינימום. הביטוי שלילי כאשר $x = 2a$ ונקודת הקיצון היא מקסימום.

שגיאה קבלנו את התשובה הנכונה אבל הנימוק לא בהכרח נכון. חישוב הנגזרת של מנה הוא:

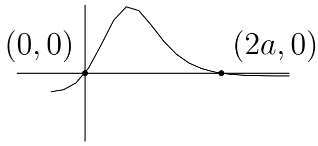
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.$$

הפונקציה g מופיעה גם במונה ולא רק במכנה ואסור להשמיט אותה בחישוב הנגזרת השניה.

הנה גרף של המונה של הנגזרת הראשונה $-2x^2+4ax$:



והנה הגרף של הנגזרת הראשונה:



כצפוי צורת הגרף שונה אבל לא הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת, ולכן גם לא המעבר של הנגזרת מחיובי לשלילי או משלילי לחיובי.

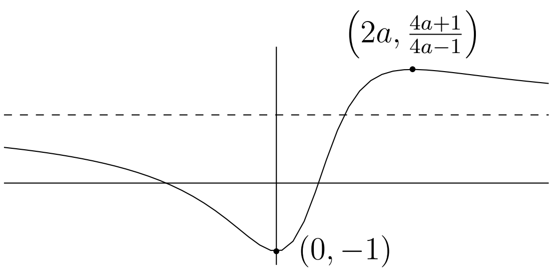
הנגזרת השניה היא בעצם השיפוע של הנגזרת הראשונה, ואת זה ניתן לבדוק בחישוב השינוים בסימני הערכים סביב הערכים בהם הנגזרת הראשונה מתאפסת. (אנו מסתמכים על הרציפות של הפונקציה.) כדי לבדוק את שינוי הסימנים אכן אפשר להשמיט את המכנה:

x	-1	0	a	$2a$	$3a$
$-2x^2+4ax$	$-2-4a$	0	$2a^2$	0	$-6a^2$
	<0	0	>0	0	<0

.

השיפוע חיובי ב 0 ויש כאן מינימום. השיפוע שלילי ב $2a$ ויש כאן מקסימום.

(3) בגלל ש $a>1$ נקודת הקיצון השניה נמצאת מעל לאס' $y=1$ ומכאן גרף הפונקציה הוא:



ב. נתון תחום $x \le 0$, הישר $x=-1$ וציר ה־x. חישוב השטח הוא:

$$\frac{1}{2} = \int_{-1}^{0} f'(x) = \int_{-1}^{0} (-2x^2+4xa)dx\,.$$

שגיאה אנחנו רגילים לבדוק נקודות קיצין תוך התעלמות ממכנה חיובי. אבל כאן עלינו לבצע אינטגרציה של הנגזרת ולא רק של המונה שלו. בנוסף, האינטגרל של הנגזרת הוא הפונקציה הנתונה, כך שאין בכלל צורך בחישוב מייגע.

$$\frac{1}{2} = \int_{-1}^{0} f'(x) = f(0) - f(-1) = -1 - \frac{-a}{a+2} = \frac{-2}{a+2}\,.$$

מפתרון המשוואה $\frac{1}{2} = \frac{-2}{a+2}$ מקבלים $a = -6$.

שגיאה נזכור שהשאלה קבעה ש $a > 1$. אפשר גם שים לב ששטח לא יכול להיות שלילי. מעיון בגרף או מבדיקת כמה ערכים, נגלה שהנגזרת הראשונה שלילית כאשר $x < 0$. עלינו לבצע אניטגרציה לשלילת הפונקציה כדי לקבל:

$$\frac{1}{2} = \int_{-1}^{0} -f'(x) = -f(0) + f(-1) = 1 + \frac{-a}{a+2} = \frac{2}{a+2}\,.$$

מפתרון המשוואה $\frac{1}{2} = \frac{2}{a+2}$ מקבלים $a = 2$.

אמנם מצאנו את הערך של a אבל השאלה דרשה את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה־x. בגלל שהמכנה חיובי יש לחשב את ערכי x בהם המונה מתאפס:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

ונקודות החיתוך הן $(-2,0), (1,0)$. עיון בגרף מראה שהתשובה מתאימה.

מסקנות אי אפשר להפריז בחשיבות של קריאה מדוקדקת של השאלה ועבודה מסודרת:

- לקחנו רק את המונה של נגזרת במקום הנגזרת עצמה.
- עצרנו בשמחה לאחר חישוב a בלי לשים לב שהשאלה דרשה נקודות חיתוך.
- לפני חישוב שטח יש לבדוק אם השטח או חלקו נמצא מתחת לציר ה x ולהיערך בהתאם.
- לפעמים כותבי הבחינה מניחים סוכריות ולא רק מלכודות. כאן הם ביקשו לבצע אינטגרציה של נגזרת כאשר הפונקציה עצמה נתונה.

בבדיקה האם יש מינימום או מקסימום כאשר הנגזרת הראשונה מתאפסת, לא תמיד כדאי לחשב במפורש את הנגזרת השניה. אפשר לבדוק ערכים של הנגזרת הראשונה כדי לזהות את השיפועים.