בחינות בגרות במתמטיקה: החוויה

גיאומטריה, טריגונומטריה

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.0.1

28 בינואר 2019

תוכן עניינים

הקדמה

מתמטיקאים ידועים לשמצה כי הם מפרסמים והוכחות מסודרות וברורות, ומסתירים את העובדה שסל הניירות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות סתומים וטעויות. ההיעדר של **תהליכי** הפתרון עלול לתסכל תלמידים שמתייאשים כאשר הם לא מצליחים לפתור בעיות בניסיון הראשון. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקיים" ללא ניסיונות שלא צלחו, פתרונות שונים לאותה בעייה, ודיונים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

מסמך זה מכיל פתרונות לשאלות בפרק השני של הבחינות 806 בשנים תשע"ד עד תשע"ח. פרק 4 על גיאומטריה ופרק 5 על טריגונומטריה. השתדלתי לתאר את תהיליכי הפתרון, מלכודות אפשריים, וטעויות שנובעות מהיסח דעת או רשלנות.

הפתרונות מביאים ציטוטים של המשפטים המתקדמים מתוך רשימת המשפטים שהתלמידים רשאים לצטט ללא הוכחה. כל אחד זוכר ללא קושי שמשולשים חופפים לפי צ.צ.צ., אבל קשה יותר לזכור משפטים כגון שווין הזווית בין משיק למיתר.

מצאתי שיש חשיבות רבה לציורים גדולים שעליהם ניתן לרשום ערכים, נעלמים ובניות עזר בצורה ברורה. אני גם ממליץ להכין ציורים שונים לסעיפים שונים של אותה שאלה.

בסוף הפרקים רשמתי המלצות שגיבשתי לאורך העבודה.

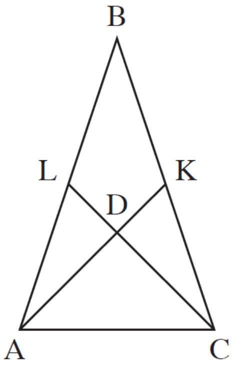
נספח א' מכיל "הוכחה" ידועה שכל משולש שווה שוקיים. עם כל החשיבות לציורים בהבנת דמויות גיאומטריות, ציור אינו מהווה הוכחה.

נספח ב' מכיל ציורים צבעוניים של מספר משפטים מתקדמים. דווקא בנושא כל כך מוחשי כגון גיאומטריה קל יותר לזכור ציור ולא תיאור מילולי מסורבל.

נספח ג' עוסק בבטריגונומטריה של מעגל היחידה. לדעתי לא כדאי לזכור זהויות כגון $\sin(180-\theta)=\sin\theta$, אלא לצייר מעגל יחידה קטן במחברת "ולראות" את הזהויות.

פרק 4 גיאומטריה

4.1 קיץ תשע"ח מועד ב



ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.

AK ו־ CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.

נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע $ALKC$.

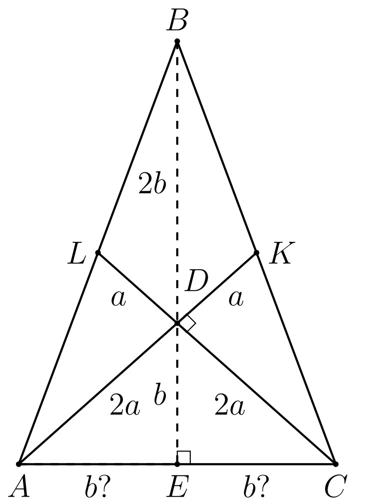
(1) הוכח: $\sphericalangle AML = 90^{o}$.

(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

סעיף א

כאשר יש תיכונים נחתכים מיד חושבים על משפט 45 "שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת", ובמשפט 46 "נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $1:2$". BE הוא התיכון מ־B ל־AC, שחותך את מפגש התיכונים האחרים ב־D. $BE \perp AC$ לפי משפט 6 "במשולש שווה שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". מכאן קל להראות שהתיכונים AK, CL שווים.



אם נוכיח ש־$AE = EC = DE$, נוכיח ש־$BD = 2b = 2DE = AE + ED = AC$. לפי משפט 6, BE הוא חוצה זווית של $\angle ABC$, וגם של $\angle ADC$ כי חוצה הזווית והתיכון מתלכדים. נתון ש־$AK \perp CL$ כך ש־$\angle ADC = 90°$, ולכן $\angle ADE, \angle CDE$ שוות ל־$\frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. במשולשים

ישר זווית $\triangle ADE, \triangle CDE$, זוויות חדות של $45°$, ולכן גם הזוויות $\angle DAE, \angle DCE$ שוות $45°$, והמשולשים שווה שוקיים. מכאן ש-$AE = EC = DE = b$.

אפשרות אחרת, פשוטה יותר, להוכיח $AE = EC = DE = b$ היא להשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר".

סעיף ב

כדאי לחשב S_{BLDK} על ידי חיסור שטח המצולע $ALDKC$ מהשטח של $\triangle ABC$, כי המצולע מורכב ממשולשים ישר זווית וחישוב השטח שלהם קל מאוד:

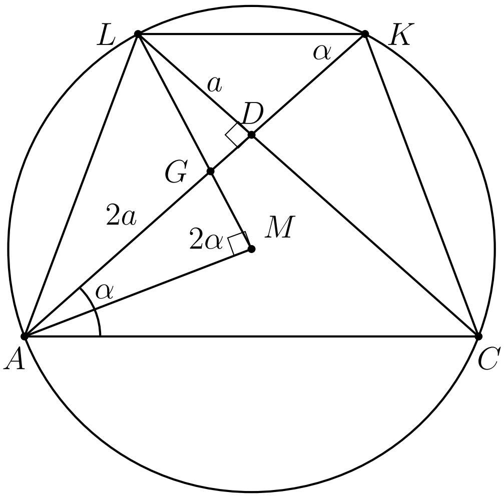
$$\begin{aligned} S_{ALDKC} &= 2S_{ADL} + S_{ADC} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DL + \frac{1}{2} AC \cdot DE \\ &= 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b \\ &= 2a^2 + b^2 \,. \end{aligned}$$

אפשר להניח שהיחס המבוקש אינו תלוי באורכם של הצלעות, לכן נחפש דרך להביע את שטח המצולע S_{ALDKC} כפונקציה של b בלבד. ממשפט פיתגורס על $\triangle ADE$:

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 &= (2a)^2 = 4a^2 \\ S_{ALDKC} &= 2a^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}(b^2 + b^2) + b^2 = 2b^2 \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} 2b \cdot 3b = 3b^2 \\ S_{BLDK} &= S_{ABC} - S_{ALDKC} = 3b^2 - 2b^2 = b^2 \\ \frac{S_{BLDK}}{S_{ABC}} &= \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{3} \,. \end{aligned}$$

סעיף ג (1)

לא התקדמתי בפתרון עד שציירתי תרשים חדש עם המעגל וראיתי שהזווית ההיקפית $\angle LKA$ נשענת על המיתר עליו נשענת הזווית המרכזית $\angle AML$, כך ש-$\angle AML = 2\angle LKA$ לפי משפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת". אבל לפי משפט 14 "קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", $LK \| AC$. $\angle KAC = \angle LKA = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות, והוכחנו בסעיף הקודם ש-$\alpha = 45°$, לכן, $\angle AML = 2\alpha = 90°$.

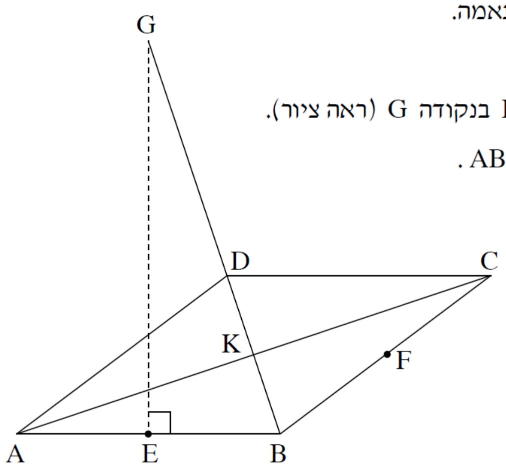


סעיף ג (2)

תחילה שמתי לב ש־$\triangle DGL \sim \triangle MGA$ כי במשלושים ישר זווית, הזוויות $\angle DGL = \angle MGA$ קודקודיות. גישה זו לא הצליחה כי לא מצאתי דרך לבטא את הקשר בין AD לבין AG, GD.
לבסוף שמתי לב שלמשולשים $\triangle LDA, \triangle LMA$ יתר משותף, והמשולש $\triangle LMA$ שווה שוקיים כי שני הצלעות AM, ML הם רדיוסים. ממשפט פיתגורס:

$$
\begin{aligned}
AM^2 + ML^2 &= AL^2 \\
2AM^2 &= AL^2 \\
LD^2 + AD^2 &= AL^2 \\
a^2 + AD^2 &= 2AM^2 \\
\frac{1}{4}AD^2 + AD^2 &= 2AM^2 \\
\frac{AM}{AD} &= \sqrt{\frac{5}{8}}\,.
\end{aligned}
$$

4.2 קיץ תשע"ח מועד א



ABCD הוא מעוין. E ו־ F הן אמצעי הצלעות AB ו־ BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל־ AB , החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M ,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC .

ב. הוכח שהמשולשים MFC , BKC , ו־ BFG דומים זה לזה.

נסמן ב־ R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ,

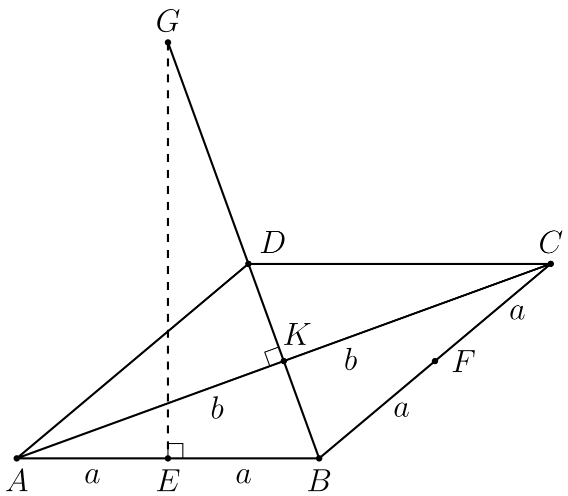
וב־ r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC .

ג. **(1)** הוכח כי $\frac{MF}{CF}=\frac{MC}{GB}$ וכי $\frac{MF}{CF}=\frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל־ $\frac{r}{R}$.

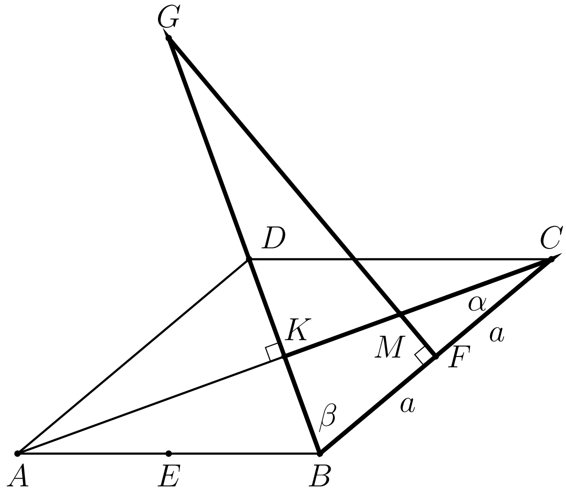
סעיף א

כדי להוכיח שהנקודה G היא מרכז של מעגל חוסם נשתמש במשפט 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת , שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש". צריך להוכיח ש־GE, GB הם אנכים אמצעיים. מעוין הוא מקבילית עם צלעות שווים, וכמקבילית, ניתן להשתמש במשפט 28 "במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה". סימנו בציר את אורכי האלכסון AC ב־b. ביחד עם משפט 35 "במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה", GB הוא אנך אמצעי ל־AC. נתון שנקודת E היא אמצע של AB, וש־GE הוא אנך ל־AB, ולכן G היא נקודת החיתוך של שני אנכים אמצעיים ומרכז של מעגל חוסם ל־$\triangle ABC$.



סעיף ב

ההוכחה שהמשולשים דומים תהיה קל יותר אם נצייר מחדש את התרשים תוך הדגשת צלעות המשולשים. לפי משפט 35 האלכסון AC הוא אנך אמצעי ל-DB. נתון שהנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את $\triangle BDC$, ולכן הנקודה GF שחותכת את CK ב-M היא אנך אמצעי ל-BC. הזווית α משותפת לשני משולשים ישר זווית, כך ש-$\triangle BKC \sim \triangle MFC$. הזווית β משותפת לשני משולשים ישר זווית, כך ש-$\triangle BFG \sim \triangle BKC$ ו-$\triangle BFG \sim \triangle BKC \sim \triangle MFC$.



סעיף ג (1)

היחס:

$$\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{BF} = \frac{MF}{CF}$$

מתקבל מדמיון המשולשים $\triangle BFG \sim \triangle MFC$ ו-$BF = CF$ כי F הוא אמצע הצלע BC.

מדמיון המשולשים $\triangle BKC \sim \triangle MFC$. מתקבל:

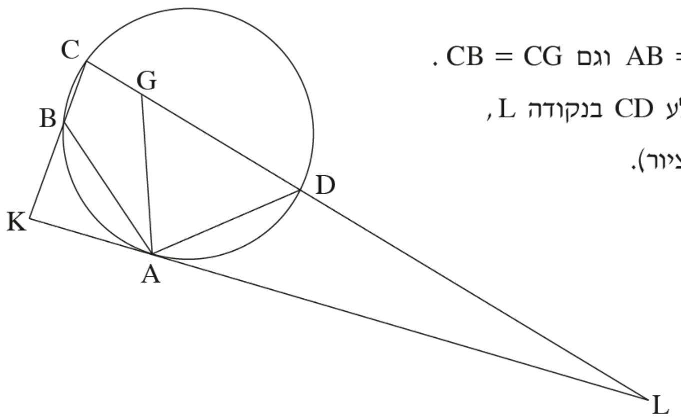
$$\begin{aligned}\frac{MF}{BK} &= \frac{CF}{CK}\\ \frac{MF}{CF} &= \frac{BK}{CK}\,.\end{aligned}$$

סעיף ג (2)

מהנתון שהנקודה M היא המכרז של המעגל החוסם את BDC, אנו מקבלים שהאלכסון MC שווה ל-r. בסעיף א הוכחנו שהנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את ABC, ולכן GB שווה ל-R. נחשב את יחס הרדיוסים תוך שימוש ביחס שחישבנו בסעיף ג 1 ומשפט 29 שהאלכסונים של מקבילית (מעוין) חוצים אחד את השני:

$$\frac{r}{R} = \frac{MC}{GB} = \frac{BK}{CK} = \frac{DB/2}{AC/2} = \frac{DB}{AC}$$

4.3 חורף תשע"ח



המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L ,

וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

א. הוכח כי $AD = AG$.

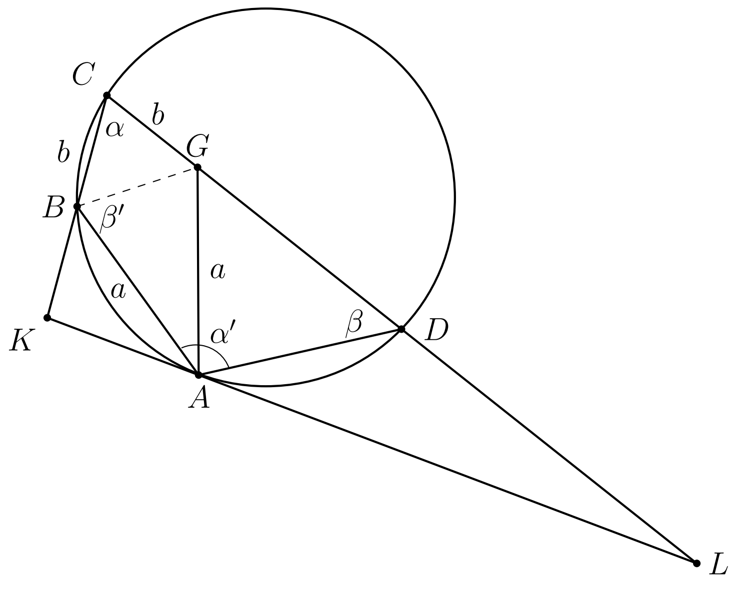
ב. **(1)** הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$

ג. הראה כי $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

סעיף א

נתון ש-$AB = AG, CB = CG$ כך ש-$ABCG$ הוא דלתון, אבל לא ברור בשלב זה אם זה יעזור בפתרון. נתון שהמרובע $ABCD$ חסום במעגל, ולפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$". סימנו זוויות α, β ו-$\alpha' = 180 - \alpha, \beta' = 180 - \beta$:



אם $AD = AG$ המשולש $\triangle GAD$ שווה שוקיים, ולפי הסימונים של הזוויות ננסה להוכיח ש-$\angle AGD = \angle ADG = \beta$. נזכור ש-$ABCG$ דלתון והזוויות הצדדיות שלו שוות, כך ש:

$$\angle AGC = \angle ABC = \beta' , \qquad \angle AGD = 180 - (180 - \beta) = \beta .$$

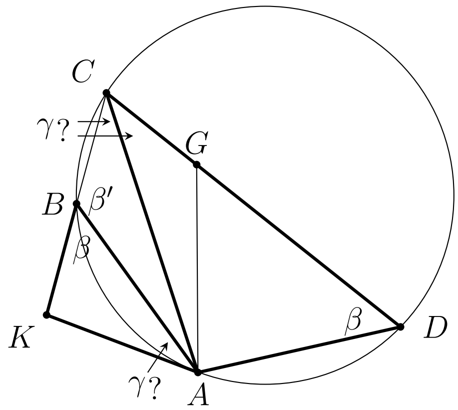
רשימת המשפטים לבגרות לא כוללת משפט על שוויון זוויות בדלתון, אז נצטרך להוכיח אותו. דלתון מוגדר כמרובע עם שני זוגות של צלעות סמוכות שוות, כך שהוא מורכב משני משולשים שווה שוקיים המוצמדים בבסיסיהם (קו מקווקוו בתרשים):

$$\angle ABC = \angle ABG + \angle GBC = \angle AGB + \angle BGC = \angle AGC .$$

סעיף ב (1)

נדגיש בתרשים את המשולשים $\triangle ABK, \triangle CDA$ שיש להוכיח שהם דומים. הוספנו לתרשים את הסימון $\angle ABK = \beta$, המשלים של $\angle ABC = \beta'$. אם נמצא עוד זוג של זוויות שוות נקבל שהמשולשים דומים לפי ז.ז. ננסה להוכיח ש-$\angle BAK = \angle ACD$.

$\angle BAK$ היא הזווית בין המשיק KA והמיתר AB. לפי משפט 79 "זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני", $\angle BAK = \angle BCA = \gamma$. לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש ...", $\angle BAK = \angle BCA = \angle ACD = \gamma$. מכאן ש-$\triangle ABK \sim \triangle CDA$ לפי ז.ז.



דרך אחרת להוכיח ש-$\angle BCA = \angle ACD$ היא לשים לב ש-$AB = AG = AD$. נשתמש במשפט 63 "במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו" ומשפט 71 "במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות", ונקבל $\angle BCA = \angle ACD$.

סעיף ב (2)

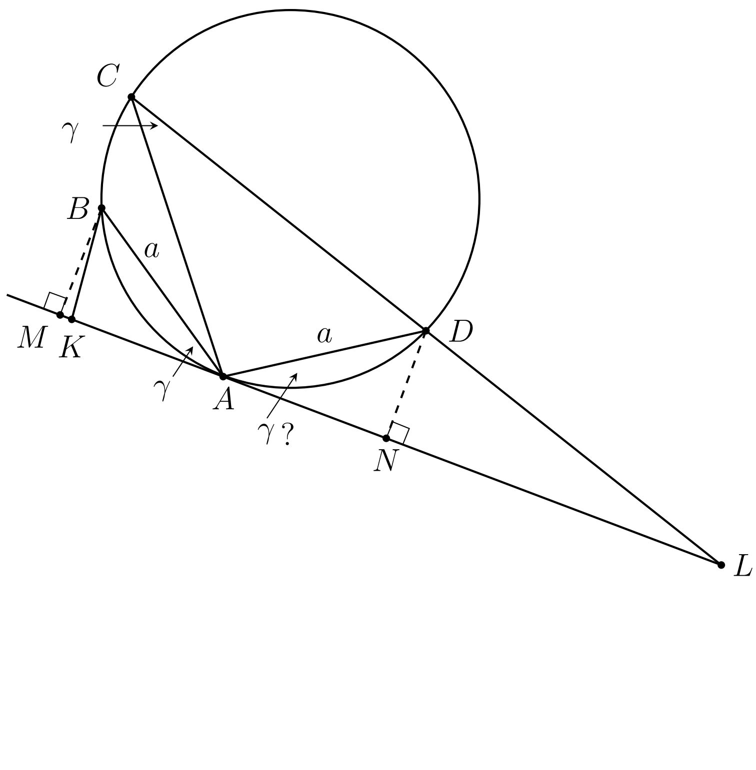
לפי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$ שהוכחנו בהחלק הראשון של הסעיף ולפי $AB = AD$:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{CD} &= \frac{BK}{AD} \\ AB \cdot AD &= BK \cdot CD \\ AD^2 &= BK \cdot CD\,. \end{aligned}$$

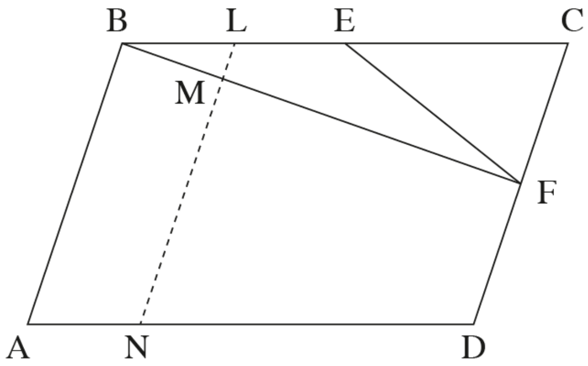
סעיף ג

LA, AK הם הבסיסים של המשולשים $\triangle LDA, \triangle KAB$ כך שנקבל את היחס המבוקש אם נוכיח שהגבהים שווים. הוכחנו שהיתרים ב־$\triangle ADN, \triangle ABM$ שווים $AB = AD = a$, כך שנשאר רק להוכיח שהזוויות שוות $\angle BAK = \angle DAL = \gamma$. הוכחנו ש־$\angle BAK = \angle DCA = \gamma$, ו־$\angle DAL$ היא הזווית בין המשיק LA והמיתר AD. הזווית $\angle DCA$ נשענת על מיתר זה, כך ש־$\angle DCA = \angle DAL$ לפי משפט 79, ו־$\angle BAK = \angle DCA = \angle DAL = \gamma$. כעת ניתן לחשב את השטחים:

$$\begin{aligned}
\frac{S_{LDA}}{S_{KAB}} &= \frac{(LA \cdot DN)/2}{(AK \cdot BM)/2} \\
DN &= AD \sin \angle DAL = a \sin \gamma \\
BM &= AB \sin \angle BAK = a \sin \gamma \\
\frac{S_{LDA}}{S_{KAB}} &= \frac{LA}{AK}\,.
\end{aligned}$$



4.4 קיץ תשע"ז מועד ב



המרובע ABCD הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC
והנקודה F היא אמצע הצלע CD
(ראה ציור).

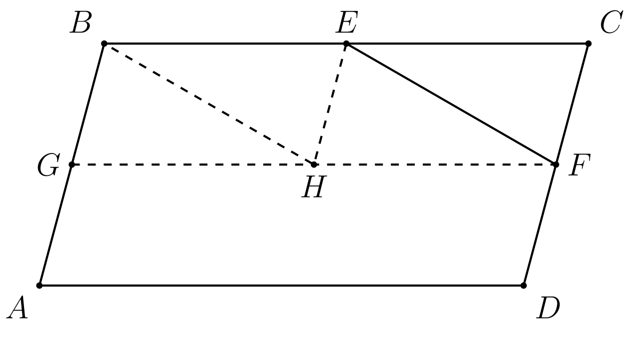
א. שטח המשולש ECF הוא S.
הבע את שטח המקבילית ABCD
באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל־ AB וחותך את BF ואת AD
בנקודות M ו־ N בהתאמה.
חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$.
האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

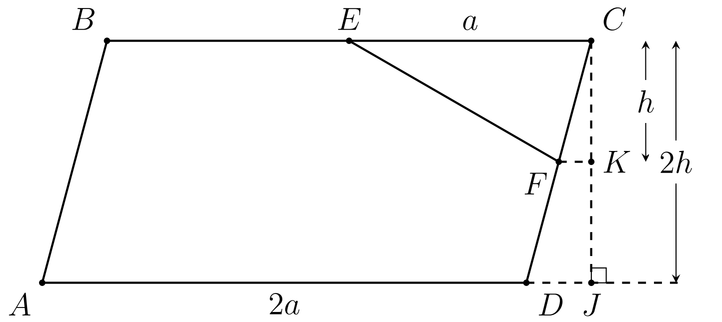
סעיף א

כדי לחשב את שטח המקבילית באמצעות שטח של משולש נפרק את המקבילית למשולשים. יהי GF מקביל ל־BC ו־EH מקביל ל־CD. לפי זוויות מתאימות ומשלימות, המרובעים $BEHG, ECFH$ הם מקביליות. בגלל ש־E היא נקודת האמצע של BC, H הוא נקודת האמצע של $GF = BC$. מכאן שהמשולשים $\triangle ECF, \triangle EHF$ חופפים, ו־$S_{EHF} = S_{ECF} = S$. באותה דרך נוכיח ש־$S_{BEH} = S_{BGH} = S$, ולכן $S_{BCFG} = 4S$. GF הוא קו אמצעים ומחלק את המקבילית לשני חלקים ששטחם שווה, כך ש־$S_{ABCD} = S_{BCFG} + S_{GFDA} = 8S$.



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 5א "שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו". הגובה של המקבילית באורך כפול מהגובה של המשולש לפי דמיון המשולשים $\triangle FCK, \triangle DCJ$:

$$S_{ECF} = \frac{1}{2}ah = S$$
$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2h = 4ah = 8S\,.$$

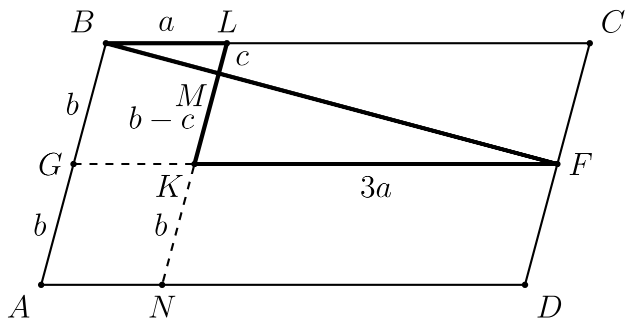


סעיף ב

נקבל יחס בין קטעי קו אם נמצא משולשים דומים שקטעי הקו הם צלעות שלהם. בתרשים להלן הדגשתי משולשים שיכולים להתאים. קטע האמצעים במקבילית מקביל לבסיסים $BC \| GF$, ומזוויות מתחלפות $\angle LBM = \angle MFK$ וזוויות קודקודיות $\angle LMB = \angle KMF$, מתקבל:

$$\triangle LMB \sim \triangle KMF\,.$$

בתרשים רשמנו את אורכי הקטעים תוך שימוש בנעלמים a, b, c.



$$\frac{c}{b-c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$
$$b = 4c$$
$$\frac{LM}{MN} = \frac{c}{2b-c} = \frac{a}{2 \cdot 4c - c} = \frac{1}{7}\,.$$

סעיף ג

כדי לחסום את המרובע $ABFD$, לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180°.

בתרשים להלן הוספתי את הנתון $BE = EF$. ראיתי פתרון שמשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" כדי להוכיח ש־$\angle BFC = 90^\circ$. הוכחה זו בעייתית כי משפט 86 לא מנוסח כ־"אם ורק אם". לא קשה להוכיח את הכיוון ההפוך כי כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה E נמצאות על מעגל שמרכזו E.

אפשר לפתור את השאלה ללא שימוש במשפט 86 תוך שימוש בעובדות ש: (א) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית, (ב) המשולשים $\triangle BEF, \triangle CEF$ שווה שוקיים, (ג) זוויות משלימות ב־E, נסמן את הזוויות של המשולש שווה שוקיים $\triangle BEF$ ב־α. מכאן ש־$\angle BEF = 180-2\alpha$ ולפי זוויות משלימות $\angle CEF = 2\alpha$. גם משולש $\triangle CEF$ הוא שווה שוקיים כך ש־$\angle ECF = \angle EFC = 90 - \alpha$. ניתן לחבר זוויות ולקבל $\angle BFC = \angle BFD = 90$.

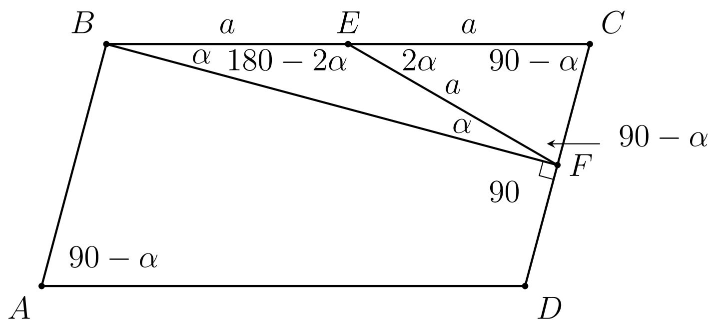
לפי משפט 26 "במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו" $\angle BAD = \angle BCD = 90 - \alpha$. כדי לחסום את המרובע $ABFD$ חייב להתקיים:

$$\angle BFD + \angle BAD = 90 + (90 - \alpha) = 180 - \alpha = 180\,.$$

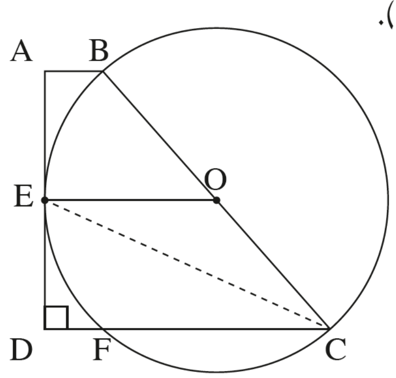
נתון ש־$\angle BAD$ היא זווית חדה שהיא פחות מ־90°:

$$\begin{aligned} 90 - \alpha &< 90 \\ \alpha &> 0 \\ 180 - \alpha &< 180\,, \end{aligned}$$

שסותר את הדרישה $180 - \alpha = 180$, לכן אי אפשר לחסום את המרובע במעגל.



4.5 קיץ תשע"ז מועד א



נתון מעגל שמרכזו O .

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$, $\sphericalangle ADC = 90^o$).

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E ,

והנקודות B ו־ C נמצאות על המעגל כך ש־ BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F , כמתואר בציור.

א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.

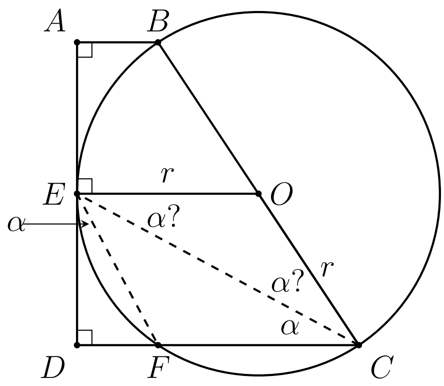
ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DFE$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

סעיף א

השאלה שואלת על זוויות ויש לנו קווים מקבילים, משיק, זווית ישרה. ננסה להסיק מסקנות על זוויות. מחברי השאלה סיפקו רמז: הקו EC. $\angle DEF$ היא הזווית בין המשיק ED לבין במיתר EF המסומן בתרשים. לפי משפט 79 "זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני", $\angle DEF$ שווה להזווית ההיקפית $\angle ECF$. סימנו את שתי הזוויות ב־α.

נקבל את הערך של $\angle BCD$ אם נידע את ערכה של $\angle ECO$. נתון ש־$AB\|DC, \angle ADC = 90^\circ$. המשיק מאונך לרדיוס EO, ולכן, $EO \perp AD, EO\|DC$, ו־$\angle OEC = \alpha = \angle ECB$ לפי זווית מתחלפות. המשולש $\triangle ECO$ שווה שוקיים ולכן $\angle ECO = \alpha$, ו־$\angle BCD = 2\alpha = 2\angle DEF$.



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 103 "אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק". לכן:

$$\begin{aligned} ED^2 &= DC \cdot DF \\ \frac{ED}{DF} &= \frac{DC}{ED} \\ \triangle EDF &\sim \triangle CDE\,. \end{aligned}$$

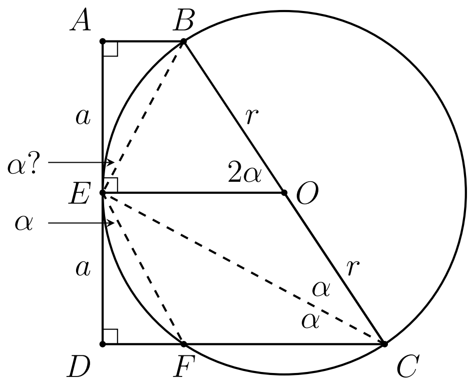
נשתמש במשפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת", בזוויות המתחלפות $\angle BCD = \angle BOE$ ובדמיון המשולשים $\triangle CDE \sim \triangle EDF$ שכבר הוכחנו:

$$\begin{aligned}
\angle BCD &= \angle BOE \\
&= 2 \cdot \angle BCE \\
\angle ECD &= \angle BCD - \angle BCE \\
&= \angle BCD - \angle BCD/2 \\
\angle DEF &= \angle BCD/2\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

שני המשולשים $\triangle DFE \cong \triangle ABE$ כי הם ישר זווית וצלע באחד המשולשים שווים לזווית וצלע מקבילים במשלוש השני, כי ביחד עם הזווית הישרה יש חפיפה לפי ז.צ.ז.

נתון ש-BC הוא קוטר שמרכזו O ולכן $BO = OC = r$. נפעיל את השפט 44 "בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה" על הטרפז $ABCD$, כדי לקבל $AE = DE = a$. נצייר את המיתר BE ונקווה שהזווית $\angle AEB$ בין המיתר ומשיק יהיה שווה לזווית $\angle DEF = \alpha$ במשלוש השני. לפי משפט 79, $\angle AEB = \angle ECO$, הזווית ההיקפית. אבל כבר הוכחנו שזווית זו שווה ל-$\angle ECO = \angle DEF = \alpha$.



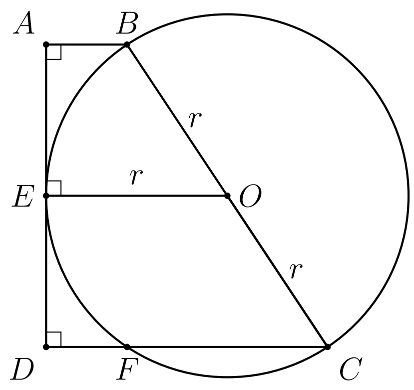
הוכחה אחרת מחשבת זוויות מהשולש שווה שוקיים $\triangle BOE$. $\angle BOE = 2\alpha$ ולכן $\angle BEO = \angle OBE = 90 - \alpha$ ו-$\angle AEB = \alpha = \angle DEF$. ביחד עם AE, ED, $\triangle ABE, \triangle DFE$ חופפים.

סעיף ג

האורך של BC הוא $2r$, כך שעלינו להוכיח ש־$DF + DC = 2r$. אם נפשט את התרשים נראה ש־EO הוא קטע אמצעים של הטרפז $ABCD$, כי $BO = OC = r$ ו־$AE = ED$ לפי הסעיף הקודם. לפי משפט 43 "קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם":

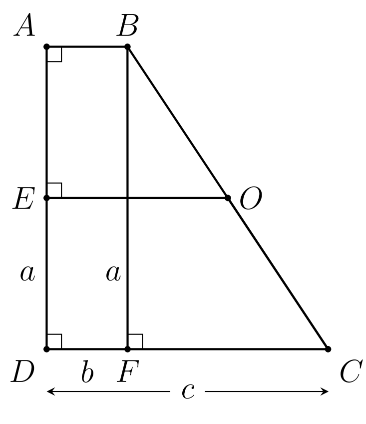
$$\begin{aligned} EO &= \frac{1}{2}(AB + DC) \\ &= \frac{1}{2}(DF + DC) = r\,, \end{aligned}$$

כי $AB = DF$ לפי משולשים חופפים שהוכחנו בסעיף הקודם, ו־EO הוא רדיוס. מכאן ש־$BC = 2r = DF + DC$.

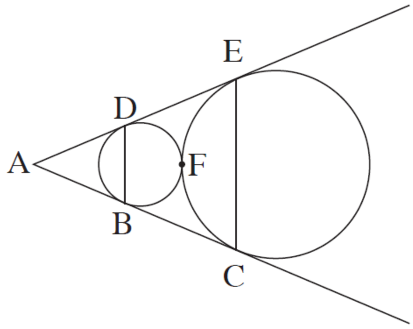


הוכחה אחרת משתמשת במשפט פיתגורס ומשפט 103 על משיק וקו חותך. נסמן את אורכי הצלעות באיור ונקבל:

$$\begin{aligned} a^2 &= bc \\ BC^2 &= (2a)^2 + (c-b)^2 \\ &= 4bc + c^2 - 2bc + b^2 \\ &= c^2 + 2bc + b^2 \\ &= (c+b)^2 \\ BC &= c + b = DC + DF\,. \end{aligned}$$



4.6 חורף תשע"ז



נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,

המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F .

AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו־ C ,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו־ E ,

כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו־ DE , בנקודות G ו־ H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב־ R את רדיוס המעגל הגדול וב־ r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי R · BD = r · CE .

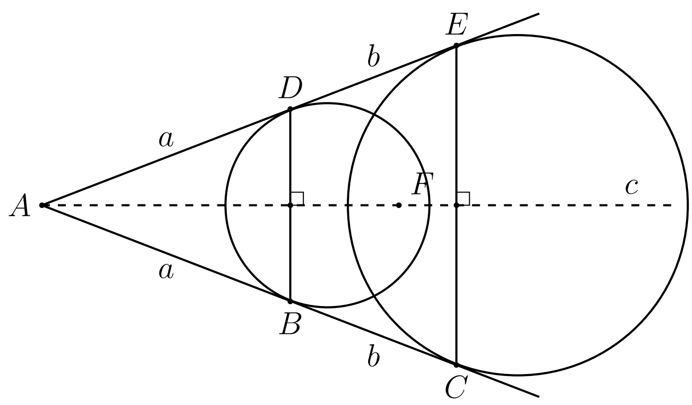
סעיף א

המשפט הרלוונטי ביותר הוא משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה". נפעיל אותו על AC, AE:

$$AD = AB = a$$
$$AE = AC = a + b$$
$$DE = BC = b\,.$$

אם נוכיח ש־$DB\|EC$, המרובע $BDEC$ יהיה טרפז לפי ההגדרה והוכחנו שהוא שווה שוקיים.

לפי התרשים $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ וזה יכול לתרום לפתרון. המשולשים דומים כי יש להם זווית משותפת ב־A והוכחנו ש־$\frac{AD}{AE} = \frac{a}{a+b} = \frac{AB}{AC}$, כך שהמשולשים דומים לפי צ.ז.צ. המשולשים $\triangle ADB, \triangle AEC$ שווה שוקיים, ולכן לפי משפט 6 "במשולש שווה שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". הקו c, חוצה הזווית $\angle A$, הוא גם גובה. מכאן שבסיסי המשולשים DB, EC מאונכים שניהם לקו c ו־$DB \perp EC$.



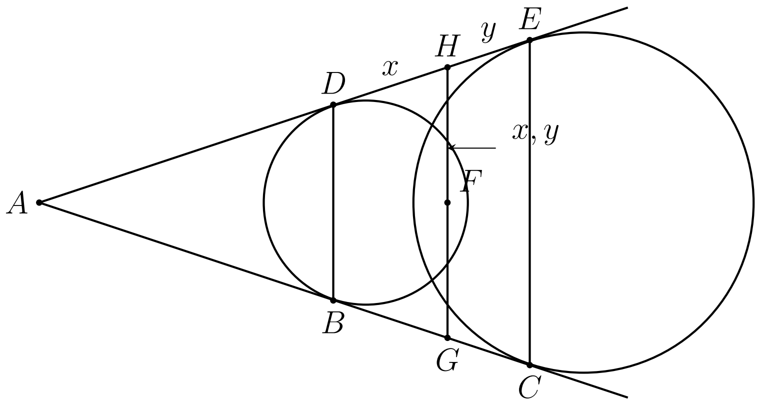
סעיף ב

במבט ראשון נראה שכדאי לעבוד עם משפט 43 "קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם", כאן, $GH = \frac{1}{2}(BD + CE)$. תחילה עלה בדעתי שאפשר להשתמש בנוסחה לשטח של טרפז שהיא:

$$S_{BDEC} = h \cdot \frac{1}{2}(BD + CE)\,,$$

אבל זה לא הוביל לפתרון. אחר כך חשבתי לחפש משולשים כדי להשתמש במשפט 14 "קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", אבל לא מצאתי משולש מתאים.

לאחר פישוט של התרשים שמתי לב ש-H, G הן נקודות הניתן להפעיל עליהן את משפט 80 שכבר השתמשתי בסעיף א. $DH = HF = x$ ו-$HE = HF = y$, ולכן $DH = HE$. אותה הוכחה מראה ש-$BG = GC$, ו-GH הוא קטע אמצעים של הטרפז.



סעיף ג

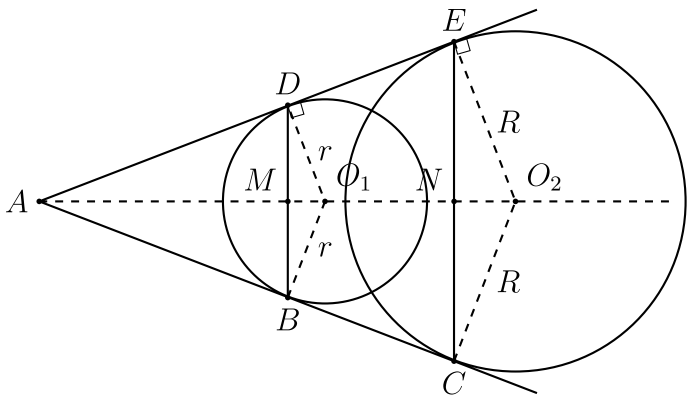
ניתן לכתוב את הטענה שיש להוכיח כיחס:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{r}{R}\,.$$

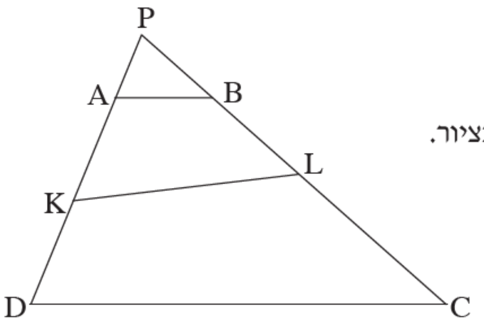
נוכיח ש-$\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$, כאשר O_1, O_2 הן מרכזי המעגלים. המשולשים מורכבים משני משולשים חופפים $\triangle MO_1D, \triangle MO_1B$ ו-$\triangle NO_2E, \triangle NO_2C$, כך שמספיק להוכיח דימיון של זוג משולשים קטנים. כבר הוכחנו ש-$DB \| EC$ והזווית בין רדיוס למשיק היא זווית ישרה, ולכן:

$$\angle MDO_1 = 90 - \angle MDA = 90 - \angle NEA = \angle NEO_2\,.$$

$\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$ לפי ז.ז.



4.7 קיץ תשע"ו מועד ב



4. נתון משולש PDC .

הנקודות B ו־ L מונחות על הצלע PC .

הנקודות A ו־ K מונחות על הצלע PD , כמתואר בציור.

נתון כי המרובע ABLK הוא בר־חסימה במעגל

וגם המרובע KLCD הוא בר־חסימה במעגל.

א. הוכח: AB ‖ DC .

נתון: 3 ס"מ = PA , 4 ס"מ = PB ,

שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר,

שטח המרובע ABCD הוא 24S סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD ? נמק.

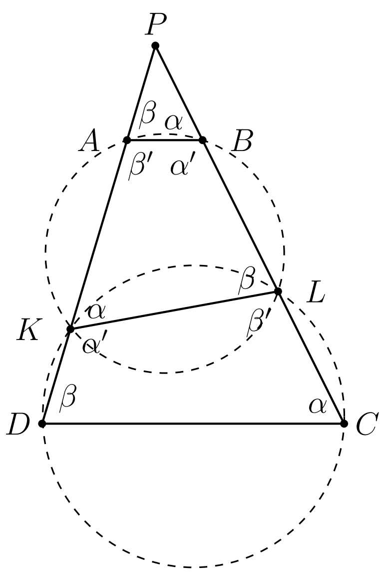
ג. מצא את אורך הצלע PD .

ד. נתון גם: 5 ס"מ = BL .

היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD .

סעיף א

שני מרובעים חסומים והמשפט המתאים הוא משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180°". נצייר את שני המעגלים החוסמים את המרובעים, ונבחר זוג זוויות נגדיות, למשל, $\angle LKA, \angle ABL$, במרובע $ABLK$. נסמן $\angle LKA = \alpha$ ונשתמש בקיצור $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ עבור הזווית הנגדית $\angle ABL$. לפי זוויות משלימות בנקודה B, $\angle ABP = \alpha$, ובנקודה K, $\angle LKD = \alpha'$. נפעיל שוב את משפט 56 כדי להסיק ש־$\angle LCD = \alpha$. מכאן ש־$AB \| DC$ לפי זוויות מתאימות.



סעיף ב

כדי להפעיל שוב את משפט 56 נצטרך להוכיח שהזוויות הנגדיות במרובע $ABCD$ מקיימות $\angle ADC + \angle ABC = 180, \angle BAD + \angle BCD = 180$. נסמן $\angle ADC = \beta$.

הוכחנו ש־$AB \| DC$, ולפי זוויות חד־מתאימות בנקודות A, D ו־B, C, וזוויות משלימות בנקודות A, B, נקבל $\angle PAB = \angle ADC = \beta$, $\angle PBA = \angle BCD = \alpha$.

אם המרובע $ABCD$ בר חסימה, $\alpha' + \beta = 180 - \alpha + \beta = 180$, כך ש־$\alpha = \beta$, אבל נתון ש־$PA \neq PB$. המסקנה היא שלא ניתן לחסום את המרובע $ABCD$.

סעיף ג

$\triangle PAB \sim \triangle PDC$ לפי ז.ז. אולם, זה לא עוזר: אמנם נתון היחס בין PA, PB, אבל יש שני זוגות של נעלמים PD, PC ו־AB, DC. מה שכן ניתן הוא שטחים של שני המושלים, ולפי משפט 100 ז "יחס הצלעות הוא השורש של יחס השטחים", נכול לחשב את יחס הצלעות:

$$\frac{PA}{PD} = \sqrt{\frac{S_{ABP}}{S_{PDC}}} = \sqrt{\frac{S_{ABP}}{S_{ABP} + S_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{S}{S + 24S}} = \frac{1}{5}\,.$$

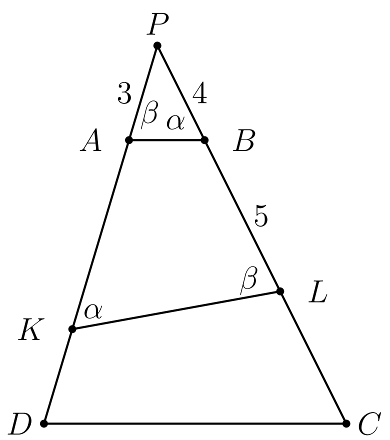
האורך של PD הוא $5 \cdot PA = 15$.

סעיף ד

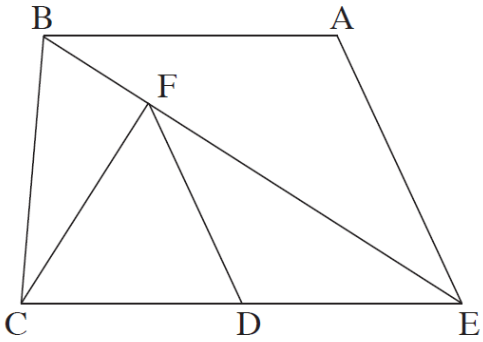
מהזוויות שחישבנו ורשמנו באיור, $\triangle PBA \sim \triangle PKL$ לפי ז.ז. יחס השטחים מתקבל מיחס אורכי הצלעות הנתונים ושחישבנו:

$$\frac{S_{PBA}}{S_{PKL}} = \left(\frac{PA}{PL}\right)^2 = \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_{KLCD} = S_{PDC} - S_{PKL} = 25S - 9S = 16S\,.$$



4.8 קיץ תשע"ו מועד א



נתון טרפז ABCE ‏(AB ∥ EC)

הנקודה F נמצאת על האלכסון BE

כך ש־ CF ⊥ BE .

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראה ציור).

נתון: ∢CEB = ∢AEB

EA = 4a , ED = 3a

א. הוכח כי ΔEAB ~ ΔEDF .

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S .

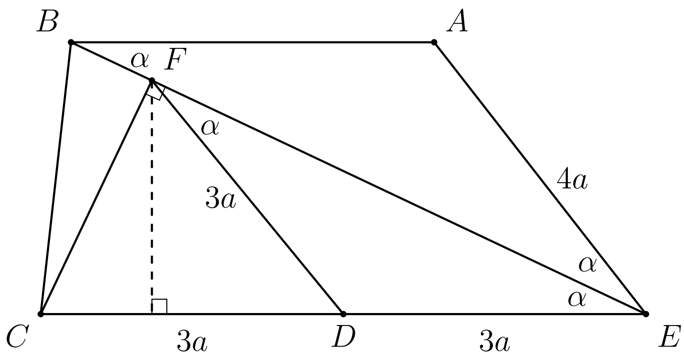
הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G .

הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .

סעיף א

נסמן את הזוויות $\angle AEB = \angle CEB = \alpha$ ונמסן את האורכים הנתונים. כעת קופץ לעין משפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר", ולכן $DF = CD = DE$, ו־$\triangle EDF$ שווה שוקיים, $\angle DFE = \alpha$. כמו כן, נתון ש־$AB \| EC$, כך ש־$\angle ABE = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות עם $\angle CEB$. לפי ז.ז. $\triangle EDF \sim \triangle EAB$.



סעיף ב

כדי לחשב את השטח של $\triangle CEF$ יש לנו בסיס CE ונבנה גובה מ־F ל־CE. חדי עין ישימו לב גובה זה משותף לשני המשולשים $\triangle CFD, \triangle DFE$. הבסיסים $CD = DE = 3a$ שווים, ולכן השטחים של שני המשולשים שווים.

בסעיף א הוכחנו ש־$\triangle CEB \sim AEB$, לפי משפט 100ז "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\frac{S_{DFE}}{S_{EAB}} = \left(\frac{DE}{AE}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4a}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{CEF} = S_{CFD} + S_{DFE} = 2\,S_{DFE} = \tfrac{9}{8}\,S\,.$$

סעיף ג

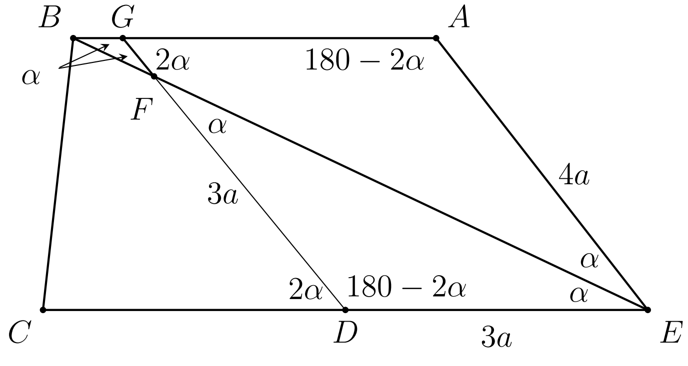
אנחנו צריכים לחשב את האורך של צלע של $\triangle BFG$ כדי לחשב את יחס השטחים. כבר הראינו ש־$\angle ABE = \angle BEC = \alpha$ ו־$\angle BFG = \angle DFE = \alpha$ הן זוויות קודקודיות. לכן $\triangle BFG \sim \triangle DFE$ לפי ז.ז. הזווית $\angle AGD = 2\alpha$ לפי משפט 13 "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה". המרובע $AGDE$ הוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". $GD = GF + FD$ וכעת ניתן לחשב את GF:

$$GF = GD - DF = AE - DF = 4a - 3a = a\,,$$

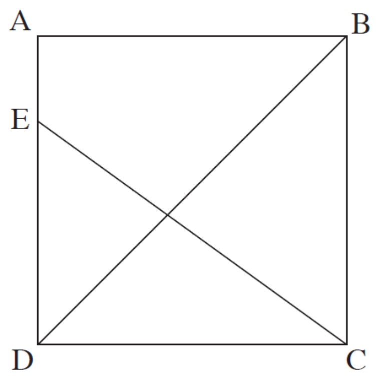
ולהשתמש שוב במשפט 101ז:

$$\frac{S_{BFG}}{S_{DFE}} = \left(\frac{a}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_{BFG} = \frac{1}{9}S_{DFE} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}S_{CEF} = \frac{1}{(9\cdot 2)}\frac{9}{8}S = \frac{1}{16}S\,.$$



4.9 חורף תשע"ו



בריבוע ABCD הנקודה E
נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
מעגל העובר דרך הנקודות E , D ו־ C
חותך את האלכסון BD בנקודה M ,
ואת הצלע BC בנקודה N .
הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B
ובין נקודת החיתוך של BD עם CE .

א. הוכח כי CD = EN .

ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE ,
ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

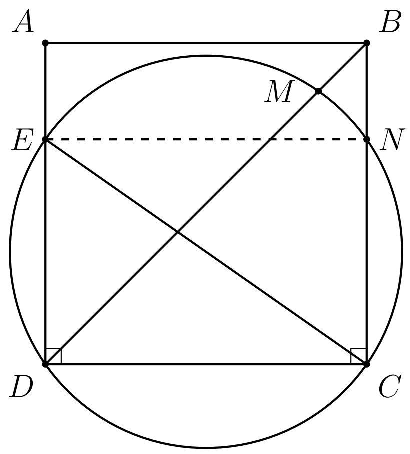
ג. הוכח כי BM · BD = AE · AD .

סעיף א

קשה להבין את השאלה אלא אם מציירים תרשים חדש עם הנקודות M, N והקו EN. המעגל מוגדר כך שהוא עובר דרך הנקודות C, D, E, ונתון גם שהנקודה N נמצאת על המעגל. מכאן ש־$ENDC$ הוא מרובע הסום במעגל. נשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־$180°$". $ABCD$ הוא ריבוע כך ש־$\angle ADC = \angle EDC = 90°$, $\angle BCD = \angle NCD = 90°$. לפי המשפט:

$$\angle ENC = 180 - \angle EDC = 90, \quad \angle NED = 180 - \angle NCD = 90\,.$$

מרובע שכל הזוויות שלו ישרות הוא מלבן ו־$CD = EN$.

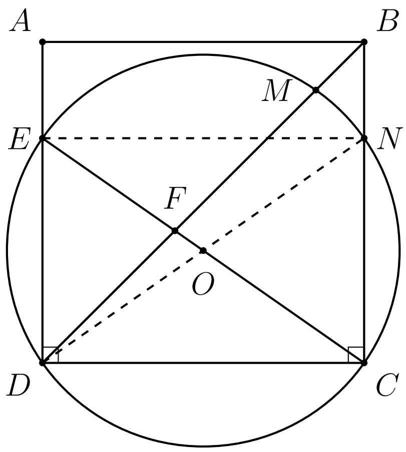


הוכחה אחרת משתמשת במשפט 74 "זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר". הנקודות C, D, E, N נמצאות על מעגל, $\angle EDC = 90^\circ$, כך ש־EC הוא קוטר לפי משפט 74 "זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר". לפי המשפט ההפוך (73) $\angle ENC = 90^\circ$. כדי להשלים את סכום הזוויות במרובע ל־360°, $\angle NED$ חייב להיות 90° ו־$ENDC$ הוא מלבן.

סעיף ב

בזבזתי הרבה זמן בנסיונות לפתור סעיף זה כי חשבתי להשוות אורכים לפי משולשים דומים או משפט פיתגורס. לבסוף נזכרתי במשפט 66 "במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר". בהוכחה השנייה לסעיף א ראינו ש־EC הוא קוטר, וקוטר הוא מיתר הקרוב ביותר למרכז המעקל (עובר דרכו) ולכן הוא ארוך יותר מכל מיתר שאינו קוטר. מה שנשאר לעשות הוא להוכיח ש־DM אינו קוטר.

נתון שהנקודה M נמצאת בין B לבין נקודת החיתוך המסומן ב־F. נתון גם ש־E נמצאת על AD ונניח שהכוונה היא ש־E שונה מנקודות הקצה A, D. הוכחנו ש־$EN \| AB$ ולכן אם E שונה מ־A גם N שונה מ־B, ו־M אינה מתלכדת עם N.



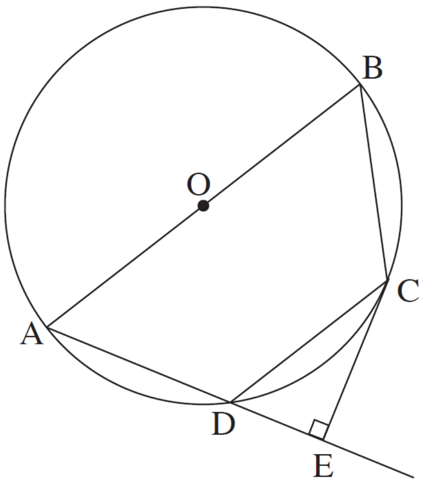
סעיף ג

הנטייה הראשונה היא להשתמש במשפט תאלס, אבל משפט זה מנוסח כחילוק ולא ככפל על קטעים של אותו קן. המשפט שמנוסח בכפל הוא משפט 102 "אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני". נשתמש במשפט זה עבור החותכים BC, BD היוצאים מנקודה B ונקבל $BM \cdot BD = BN \cdot BC$.

$AD = BC$ כי הם צלעות בריבוע $ABCD$, ו־$ED = NC$ כי הם צעלות של $ENCD$ שהוכחנו בסעיף א שהוא מלבן. מכאן:

$$BM \cdot BD = BN \cdot BC = (BC - NC) \cdot BD = (AD - ED) \cdot AD = AE \cdot AD\,.$$

4.10 קיץ תשע"ה מועד ב



מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O .

הצלע AB היא קוטר.

E היא נקודה על המשך AD כך ש־ $CE \perp AE$.

א. הוכח: $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.

ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.

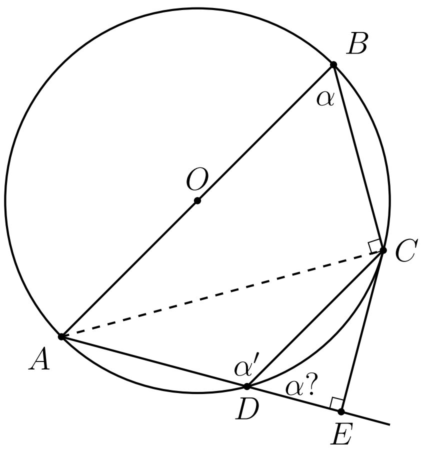
ג. הוכח כי CE משיק למעגל.

סעיף א

מרובע חסום במעגל מכוון למשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־$180°$". נתון גם שצלע שלו הוא קוטר והמשפט ררלוונטי הוא 73 "זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ($90°$)". כדי לקבל את המשולש $\triangle ABC$, נצייר את הקו AC

ו־$\angle ACB = 90°$ כי הוא נשען על קוטר.

נסמן זוויות לפי משפט (56): $\angle ABC = \alpha$, $\angle BAC = 180 - \alpha = \alpha'$. לפי זוויות משלימות בנקודה D, $\angle CDE = 180 - \alpha' = \alpha = \angle ABC$, ו־$\triangle CDE \sim \triangle ABC$ לפי ז.ז.

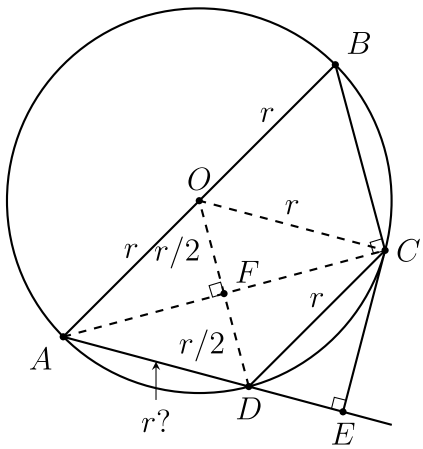


סעיף ב

בתרשים נראה שהמרובע $AODC$ הוא מקבילית, ואם כן, $OC\|AD$. נתון גם ש-$OD \perp AC$, כך שאם המרובע הוא מקבילית, הוא גם מעוין לפי משפט 36 "מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין". למעשה לא צריך להשתמש במשפט 36 כדי להוכיח שהמקבילית היא מעוין כי $OA = OC = r$. מכאן שסביר יותר שהנתון $OD \perp AC$ יעזור להוכיח ש-$AODC$ הוא מקבילית.

כעת נפנה לנתון על יחס השטחים של המשולשים. לפי משפט 100ז "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון", היחס הצלעות במשולשים הדומים הוא $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. מכאן ש-$CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$. אם נוכיח ש-$AD = r$ יהיה לנו את המקבילית (מעוין) שנחוץ כדי להוכיח ש-$OC\|AD$.

נחזור לנתון $OD \perp AC$. הוכחנו ש-$\triangle OCD$ הוא שווה שוקיים (למעשה הוא שווה צלעות), כך ש-CA הוא גובה ל-OD, ולפי משפט 6 "במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן $OF = FD = \frac{r}{2}$ ו-$\triangle OCF \cong \triangle DCF$.[1] אותה הוכחה מראה ש-$\triangle OAF \cong \triangle OCF$ ו-$\triangle DAF \cong \triangle OAF$. מכאן ש-$AD = OA = r$.



בפתרונות אחרים שראיתי, משתמשים בעובדה ש-$\triangle OCD$ הוא שווה צלעות שהזוויות שלו הן $60°$. לא מצאתי שערך זה נחוץ כדי להוכיח את הטענה.

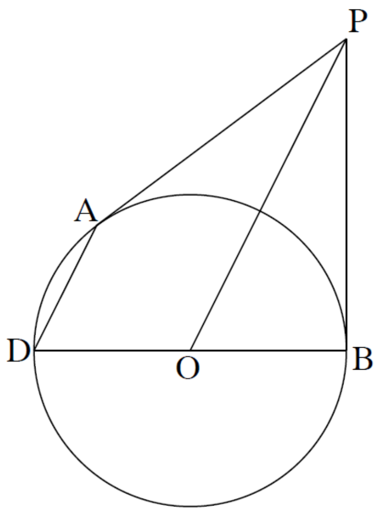
סעיף ג

המשפט היחיד שהמסקנה שלו היא שקו הוא משיק הוא משפט 78 "ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל", כאן $CE \perp OC$. כאן כן נשתמש בעובדה ש-$\triangle OCD, \triangle OAD$ הם שווה צלעות ו-$\angle OCD = \angle OAD = 60°$. בסעיף א הוכחנו ש-$\triangle ABC \sim \triangle CDE$, כך ש-$\angle CAB = \angle ECD$. בסעיף ב הוכחנו ש-$AC$ הוא חוצה זווית של $\angle OAD$. מכאן ש-

$$\angle ECO = \angle ECD + \angle OCD = \angle CAB + 60° = \frac{1}{2}\angle OAD + 60° = \frac{1}{2} \cdot 60° + 60° = 90° .$$

[1] החפיפה נובעת ממשפט 20 "משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים" לאחר שנטען שהזווית הישרה גדולה יותר מהזוויות האחרות. בספרי גיאומטריה משתמשים במשפט זה כך: שני משלושים ישר זווית חופפים עם היתר וצלע אחר שווים.

4.11 קיץ תשע"ה מועד א



PA ו־ PB משיקים למעגל שמרכזו O .

המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: PO ∥ AD .

הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש־ AC ⊥ DB.

ב. הוכח: ΔADC ~ ΔPOB .

PD חותך את AC בנקודה E .

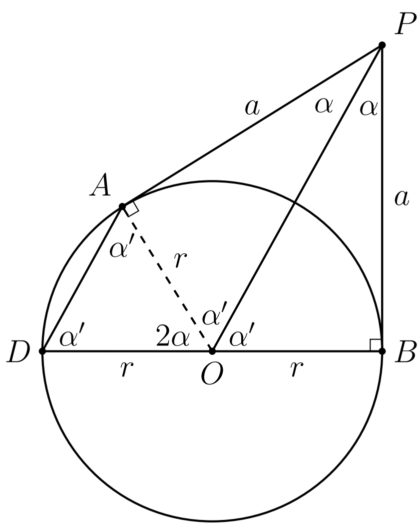
ג. הוכח: ΔDEC ~ ΔDPB .

ד. הוכח: AC = 2EC .

סעיף א

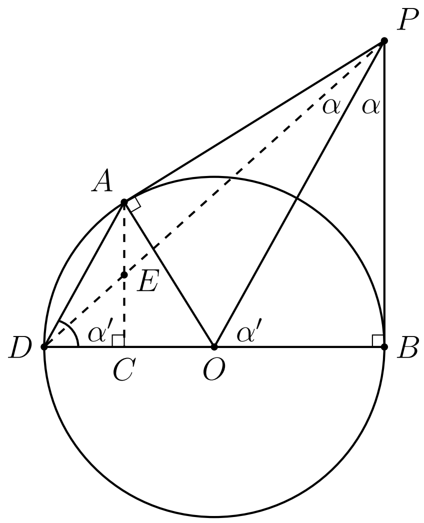
כאשר יש שני משיקים וקו מהנקודת החיתוך של המשיקים למרכז המעגל המשפטים האלה עשויים להיות קלוונטיים: משפט (77) "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", משפט (80) "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה", ומשפט (81) "קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים". באיור, הוספנו סימנים המציגים את המשפטים האלה.

ניתן להשלים את שאר הזוויות, כאשר השתמשנו בקיצור $\alpha' = 90° - \alpha$, תוך שימוש בעובדות שסכום הזוויות במשולש הוא $180°$, וסכום הזוויות המשלימות לזווית שטוחה הוא $180°$. משוויון הרדיוסים נקבל ש־$\triangle AOD$ הוא שווה שוקיים, ולכן $\angle ADO = \angle DAO = \alpha'$. מכאן ש־ $\angle ADO = \angle POB = \alpha'$ ו־$PD \| AD$ לפי זוויות מתאימות.



סעיף ב

הצעד הראשון הוא להוסיף לתרשים את הנקודה C ולסמן את הנתון ש-$AC \perp DB$. הרבה זוויות מופיעות בתרשים ולכן ננסה להוכיח דמיון לפי ז.ז. מסעיף א אנו יודעים ש-$\angle ADC = \angle POB =$ α', ולכן עבור המשולשים ישר הזווית $\triangle ADC \sim \triangle POB$.



סעיף ג

נוסיף את הנקודה E לתרשים. הזווית EDC של המשולש $\triangle DEC$ היא למעשה אותה זווית PDB של המשולש $\triangle DPB$, ולכן $\triangle DEC \sim \triangle DPB$ לפי ז.ז. במשולשים ישר זווית.

סעיף ד

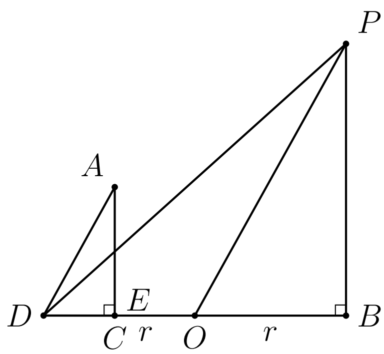
עלינו לחפש ערך אחד שהוא כפול מערך אחר. כמובן הקוטר DB כפול מהרדיוסים DO, OB. בסעיפים הקודמים הוכחנו ששני זוגות של משולשים דומים. נפשט את האיור וננסה להוכיח את המשוואה תוך שימוש במשולשים. עבור AC, מסעיף ב $\triangle ADC \sim \triangle POB$, ולכן:

$$\frac{AC}{PB} = \frac{DC}{OB} = \frac{DC}{r} \,.$$

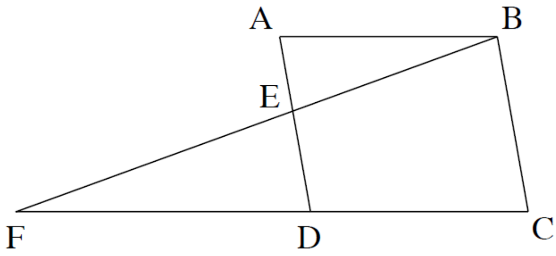
מסעיף ג $\triangle DEC \sim \triangle DPB$, ולכן:

$$\frac{EC}{PB} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2r} \,.$$

נציב את $PB \cdot DC$ ממשוואה אחת בשנייה ונקבל $AC = 2EC$.



4.12 חורף תשע"ה



במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש BED.

ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.

מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.

סעיף א

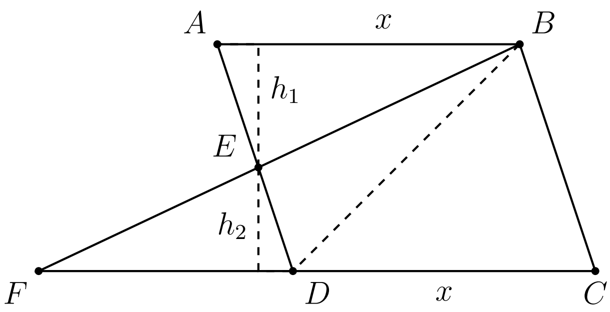
יש שתי דרכים לחשב את השטח של $\triangle BED$. הראשונה היא לחשב את השטח של $\triangle ABD$ ולהחסיר את השטח של $\triangle ABE$. לפי הסימונים בתרשים:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}x(h_1+h_2)\,, \qquad S_{AEB} = \frac{1}{2}xh_1\,.$$

אם נוכל לבטא את h_2 במונחים של h_1, נוכל להחשב את $S_{BED} = S_{ABD} - S_{AEB}$.

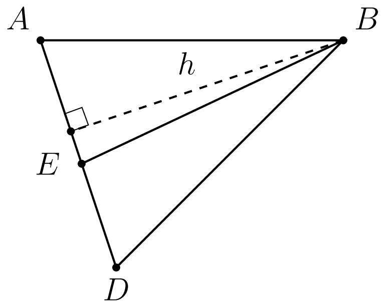
$\triangle ABE \sim \triangle DFE$ לפי ז.ז. בגלל הזוויות המתחלפות ב־A, D ו־B, F. לפי משפט 100ז "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\begin{aligned}
\frac{h_2}{h_1} &= \sqrt{\frac{S_{DEF}}{S_{ABE}}} = \sqrt{\frac{48}{27}} = \frac{4}{3} \\
S_{BED} &= S_{ABD} - S_{AEB} \\
&= \frac{1}{2}x\left(h_1 + \frac{4}{3}h_1\right) - \frac{1}{2}xh_1 \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}xh_1\right) = \frac{4}{3}\left(S_{ABE}\right) = \frac{4}{3}\cdot 27 = 36\,.
\end{aligned}$$



הדרך השנייה לחשב את השטח של $\triangle BED$ קשה לראות אבל החישוב מאוד פשוט. למשולשים $\triangle AEB, \triangle BED$ גובה זהה h מהנקודה B ועד AD. יחס השטחים הוא הריבוע של יחס הצלעות AE, ED במשולשים $\triangle ABE, \triangle DFE$ שחישבנו לעיל:

$$S_{BED} = \frac{4}{3} S_{AEB} = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36\,.$$



סעיף ב

לכאורה, לא צריך את הנתון על המרובע כי $\triangle ABE \sim \triangle DFE$. אבל עיון מדוקדק יגלה שהיחס שחישבנו הוא $\frac{AB}{FD}$ ולא $\frac{AB}{EF}$.

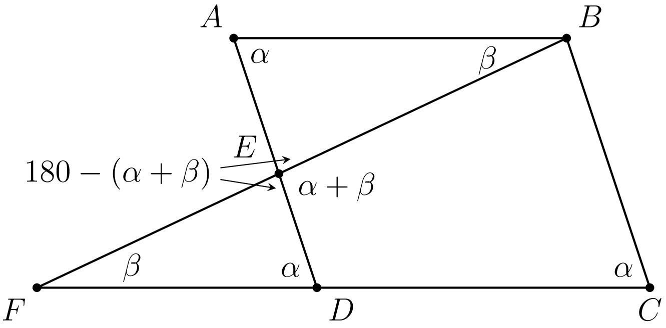
הנתון שהמרובע $BCDE$ בר חסימה במעגל מכוון למשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180°". נסמן זוויות ונראה אם יוצא מזה משהו מועיל. נסמן ב־α את הזוויות הנגדיות של המקבילית A, C ואת הזוויות המתאימות בנקודות C, D. נסמן ב־β את הזוויות המתחלפות ב־B, F.

סכום הזוויות במשולש הוא 180 ולכן הזוויות הקודקודיות ב־E שוות ל־$180 - (\alpha + \beta)$. לפי זוויות משלימות $\angle BED = \alpha + \beta$. נפעיל את משפט 56 ונקבל:

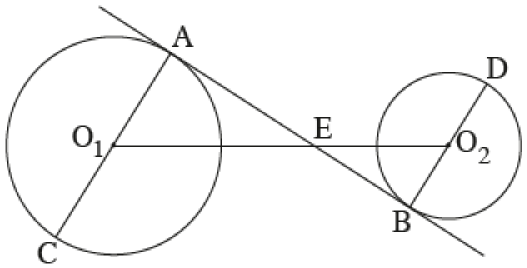
$$\begin{aligned}
\angle BCD + \angle BED &= 180\\
\alpha + \alpha + \beta &= 180\\
\alpha &= 180 - (\alpha + \beta)\\
\angle ABE &= \angle EBA\\
\angle DFE &= \angle EFD\,.
\end{aligned}$$

המשולשים $\triangle ABE, \triangle DFE$ שווה שוקיים! נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{4}\,.$$



4.13 קיץ תשע"ד מועד ב



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1.

BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2.

ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2

בנקודות A ו־ B בהתאמה.

המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2

בנקודה E (ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ

רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ

אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

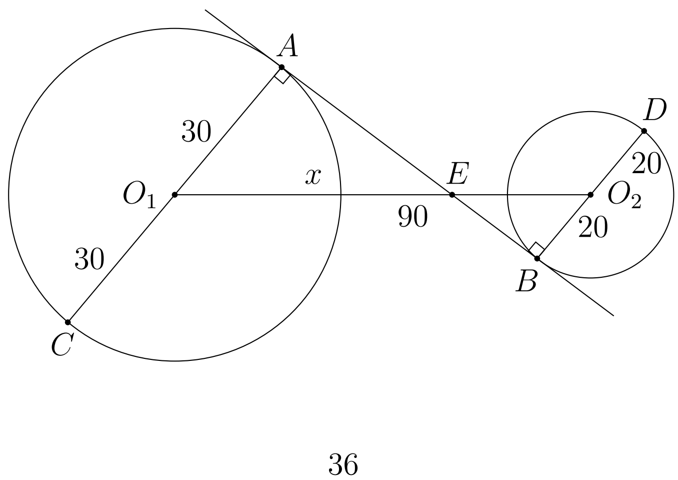
ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.

סעיף א (1)

כדי לסבך מעט את השאלה ביקשו את היחס בין O_1E ל־O_1C, אבל $O_1A = O_1C$ כי הם רדיוסים. אם נוכיח ש־$\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$, נוכל להחשב את היחס המבוקש.

AB משיק לשני המעגלים ולכן $\angle O_1AE = \angle O_2BE = 90^\circ$ לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה". $\angle AEO_1 = \angle BEO_2$ כי הן זוויות קודקודיות. מכאן ש־$\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$ לפי ז.ז. נסמן ב־x את אורכו של O_1E ונקבל:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{x}{90-x} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{30}{20}$$
$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{O_1E}{O_1A} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}\,.$$



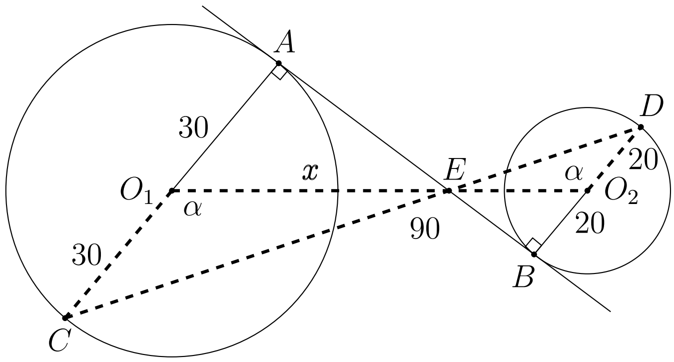
סעיף א (2)

נראה שאפשר להשתמש באותה שיטה כדי להוכיח שהמשולשים $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ דומים. אבל, כפי שמרמז סעיף ב, איננו יודעים שהנקודה E נמצאת על הקו הישר CD, ולכן איננו יכולים להניח ש-$\angle O_1EC, \angle O_2ED$ הן זוויות הקודקודיות (שוות). במקום זה, נשתמש בעובדה שהקוטרים מקבילים ולהוכיח בצורה ישירה שהמשולשים דומים.

$AC\|DB$ כי שניהם ניצבים לקו O_1O_2, ולכן $\angle CO_1E = \angle DO_2E = \alpha$ כי הן זוויות מתחלפות. כל הרדיוסים של מעגל שווים, כך ש-$O_1C = O_1A, O_2B = O_2D$. הוכחנו ש-$\triangle EO_1A \sim \triangle EO_2B$, ולכן

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{O_1C}{O_2D}\,,$$

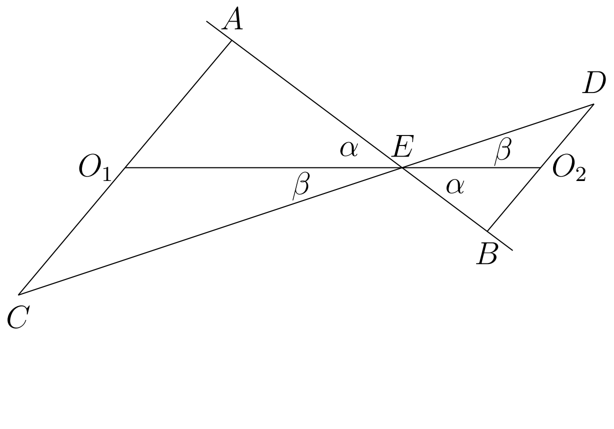
ו-$\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$.



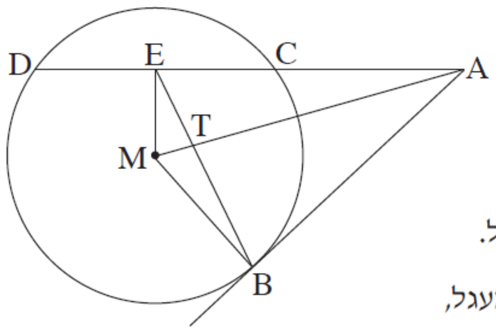
סעיף ב

נתבונן בזוויות סביב הנקודה E שנמצאת על CD אם הזווית $\angle AED$ משלימה לזווית $\angle AEC$. הוכחנו $\triangle O_1EC \sim \triangle O_2ED$ ו-$\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$, ונסמן את הזוויות השוות α, β. נתון ש-AB הוא קו ישר ו-$\angle AED$ משלימה ל-$\angle DEB$, כך ש-$\angle AED = 180^\circ - (\alpha+\beta)$. נבדוק עם $\angle AED$ משלימה ל-$\angle AEC$:

$$\angle AED + \angle AEC = (180^\circ - (\alpha+\beta)) + (\alpha+\beta) = 180^\circ\,.$$



4.14 קיץ תשע"ד מועד א



מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B,

ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו־ D.

הנקודה E היא אמצע המיתר DC.

הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה בְּמעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB, שהוא בר חסימה בְּמעגל,
נפגשים בנקודה T.

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC.

הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ, $MT = 1$ ס"מ.

מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB.

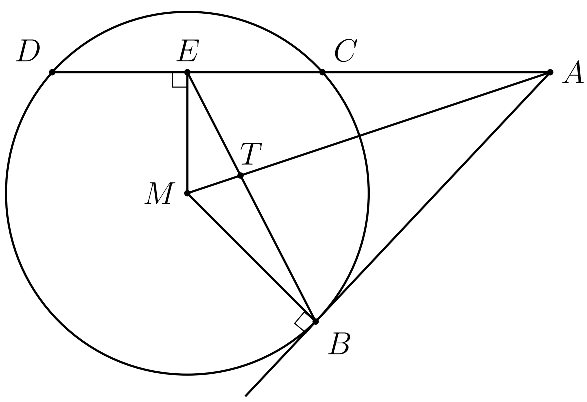
סעיף א

משפטים רלוונטיים: (103) "אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק", $AB^2 = AC \cdot AD$. (77) "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", $MB \perp AB$. (68) "קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר", $ME \perp DC$. (56) "ניתן לחסום מרובע במעגל רק אם סכום הזוויות הנגדיות שווה ל־$180°$", ב־$AEMB$:

$$\angle MEA + \angle MBA = \angle EMB + \angle EAB = 180° .$$

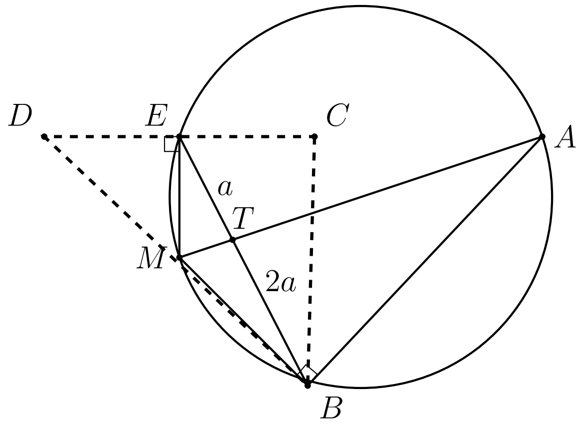
מ־$MB \perp AB$ ו־$ME \perp DC$, $\angle MEA + \angle MBA = 180°$. לפי משפט (106) "סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180°(n-2)$", סכום הזוויות הפנימיות של מרובע הוא $360°$, ולכן:

$$\angle EMB + \angle EAB = 360° - (\angle MEA + \angle MBA) = 180° .$$



סעיף ב

באיור למטה מופיע המידע הרלוונטי בלבד: המעגל החוסם את המרובע $AEMB$, האלכסונים שלו AM, EB והמשולש BDC. AM, EB הם מיתרים נחתכים של המעגל החוסם. לפי משפט (101) "אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני", $TB \cdot TE = MT \cdot TA$. אם נוכיח $TE = TB/2$, נקבל הוכחה להמשוואה בשאלה. נתון שהנקודה T היא מפגש התיכונים ב-$\triangle BDC$ ולפי משפט (46) "נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$", כאן $TB/TE = 2/1$ או $TE = TB/2$.



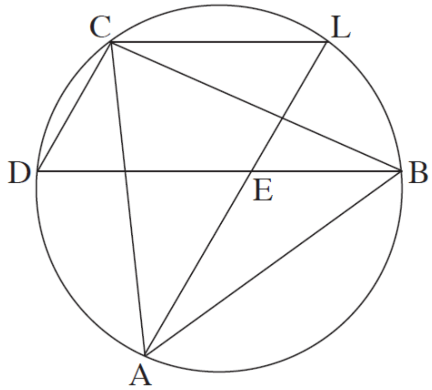
סעיף ג

רדיוס המעגל החוסם הוא קו מהמרכז לאחת הקוקודים A, E, M, B. אין אנו יודעים את מרכז המעגל, אבל נראה ש-MA יכול להיות קוטר ואז נקבל את הרדיוס כמחצית הקוטר.

מסעיף א $\angle MBA$ היא זווית ישרה, ולפי משפט (74) "זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר", MA הוא קוטר. עם הערכים הנתונים נחשב את הרדיוס תוך שימוש בנוסחאות מסעיף ב:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2}MA \\
&= \frac{1}{2}(MT+TA) \\
&= \frac{1}{2}\left(MT+\frac{TB^2}{2MT}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(MT+\frac{4TE}{2MT}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 4\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\right) \\
&= 3\,.
\end{aligned}$$

4.15 חורף תשע"ד



משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל.

נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל כך ש־ BD || LC .

המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע LEDC הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי $\triangle$ADE הוא משולש שווה־צלעות.

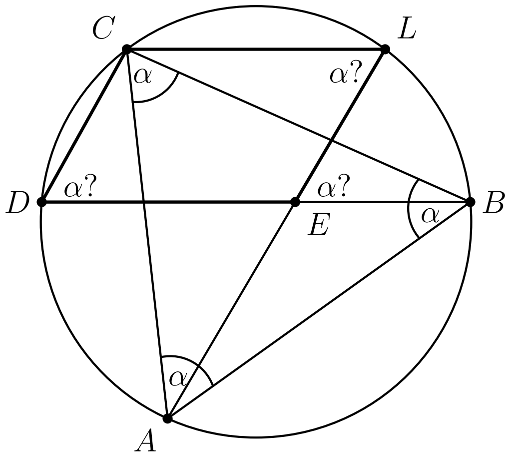
(2) הוכח כי LC + LB = LA .

סעיף א

אין לנו מידע על המיתרים המגדירים את המרובע, לכן ננסה להוכיח שהוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". כאשר יש "מספר רב" של מיתרים, סביר שיש זוויות שוות לפי משפט 72 "במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו". נסמן את הזוויות של המשולש שווה צלעות $\triangle ABC$ ב־$\alpha = 60^\circ$.

$\angle CLA = \angle CBA = \alpha$ כי הן נשענות על המיתר AC. $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ כי הן נשענות על המיתר BC. נתון ש־$BD \| LC$, אז $\angle LEB = \angle CLA = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

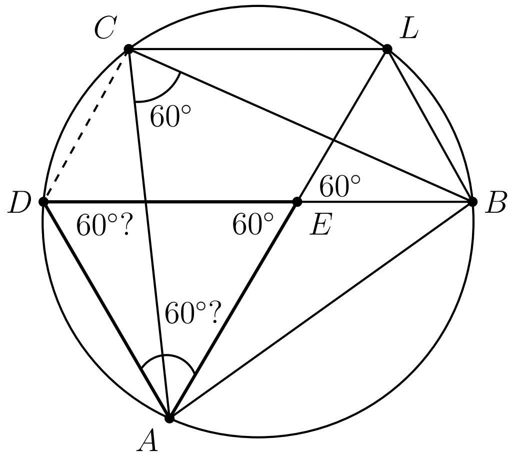
מה עם זוג הזוויות הנגדיות השני במרובע? $\angle LED = 180 - \alpha$ לפי זוויות משלימות בנקודה E. נתון ש־$BD \| LC$ ולכן $\angle LCD = 180 - \angle DCB = 180 - \alpha$ לפי זוויות חד־צדדיות על CD.



סעיף ב (1)

שוב אין לנו מידע על אורכי הצלעות, לכן ננסה להוכיח שכל הזוויות של המשולש $\triangle ADE$ שוות. מספיק להוכיח ששתי זוויות שוות ל־60° כי השלישית צריכה להשלים ל־180°.

בסעיף א הוכחנו ש־$\angle LEB = \angle CLA = \angle CBA = 60^\circ$. מכאן ש־$\angle DEA = \angle LEB = 60^\circ$ לפי זוויות קודקודיות. כי הן זוויות קודקודיות. ננסה להוכיח ש־$\angle DAE = \angle DAL = 60^\circ$ או $\angle ADE = \angle ADB = 60^\circ$ על ידי חיפוש זוויות הנשענת על המיתר DL או AB. אכן, $\angle ADB =$ ו־$\angle ACB = 60^\circ$ נשענות על המיתר AB.



סעיף ב (2)

מהחלק הראשון של הסעיף אנו יודעים ש־$\triangle ADE$ שווה צלעות, $AE = DE$, ו־$LC = DE$ כי הם צלעות נגדיים של המקבילית. לכן $AE = LC$ ו:

$$LA - LC = (LE + AE) - LC = (LE + LC) - LC = LE\,.$$

נשאר להוכיח $LE = LB$. הוכחנו ש־$\angle LEB = 60^\circ$, כך שאם נוכיח שאחת מ־$\angle EBL, \angle ELB$ שווה ל־60° נקבל משלוש שווה צלעות. שוב נחפש זוויות הנשענות על אותו מיתר ונקבל ש־$\angle BLA = \angle BCA = 60^\circ$ כי שתיהן נשענות על המיתר AB.

תוך כי נסיונות לפתור את השאלה, מצאתי הוכחה אחרת מעניינת. $\angle LBD, \angle DCL$ נשענות על אותו קשת אבל **מצדדים נגדיים**. זווית היקפית שנשענת על קשת שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (משפט 69), ולכן אם סכום שתי הקשתות הוא כל המעגל, סכום הזוויות שווה 180°. במקבילית, $\angle DCL = 120^\circ$, ולכן:

$$\angle LBE = \angle LBD = 180^\circ - \angle DCL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ\,.$$

4.16 המלצות

- חשוב לצייר תרשימים **ברורים וגדולים** עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המצטבר על הזוויות והצלעות ויש לדאוג שיהיה מספיק מקום.

- כאשר לשאלה יש מספר סעיפים כדאי לצייר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.

- **אין לסמוך על התרשים**. לעתים, מה שנראה ברור בתרשים הוא בדיוק מה שעלינו להוכיח. בנספח א' הבאתי הוכחה שכל משולש הוא שווה שוקיים כאשר ההוכחה מסתמכת על תרשים שאינו נכון. מטרת התרשימים היא לחפש קשרים בין זוויות, צלעות, משיקים, וכו', כדי להעלות השערות על דרכים אפשרויות להוכחת הטענות.

- אני מעדיף לסמן זוויות עם אותיות יווניות כגון α, ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה $\angle ABC$. הסיבה היא שקשה יותר לעקוב אחר הנקודות השונות של הזוויות מלעקוב אחר סימן בודד.

- רצוי לרשום את המשפטים שיכולים להיות רלוונטיים לפני שמנסים לפתור את השאלה כי זה יכול לכוון לפתרון. כמובן שלא כל המשפטים יהיו נחוצים. לעתים קרובות שאלה מתבססת על משפט מתקדם אחד, כגון הזוויות של מרובע החסום במעגל, הזווית בין משיק למעגל או השוויון של כל זווית היקפית הנשענת על מיתר. לכן, ההיכרות עם משפטים אלה יקל על מציאת פתרונות השאלות.

- יש משפטים שזוכרים בקלות כי הם די אינטואטיביים, למשל, שמשולשים חופפים לפי צ.צ.צ. ודומים לפי ז.ז. יש משפטים אחרים שקשה יותר לזכור אותם ושהוכחת נכונותם לא קלה. למשל, אני מתקשה לזכור איך להפעיל את המשפט על משיק ומיתר. בנספח ב' הבאתי תרשימיים צבעוניים של מבחר משפטים בתקווה שהתרשימים יקלו עליכם לזכור אותם, בוודאי יחסית לניסוחים מילוליים מסורבלים.

- כאשר שואלים על שטחים של משולשים יש לחפש גבהים משותפים. אנו רגילים לראות גבהים שיורדים מנקודה לקו אופקי, אבל גבהים יכולים להופיע מכל נקודה לקו ממול ללא קשר למצג של המשולש על הנייר.

- כדי להוכיח חפיפה של משלושים ישר זווית, מספיק להוכיח שוויון של צלע אחד וזווית חדה אחת מכל משולש. אם הצלע הוא בין זווית חדה לבין הזווית הישרה, החפיפה היא מיידית לפי ז.צ.ז. אם הצלע הוא בין שתי הזוויות החדות (היתר), זווית שערכה α ושנייה שערכה β, אזי $\beta = 90^\circ - \alpha$, ושוב יש ז.צ.ז. אני מניח שבבחינה צריך לרשום איך מגיעים מזווית חדה וצלע לז.צ.ז., אבל כאשר מחפשים הוכחה לחפיפה קיצור דרך זה יכול להועיל.

פרק 5 טריגונומטריה

5.1 קיץ תשע"ח מועד ב

ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = AC) .

BD הוא חוצה זווית במשולש ABC .

המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E .

גודל הזווית ABC הוא 2β .

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE .

אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC .

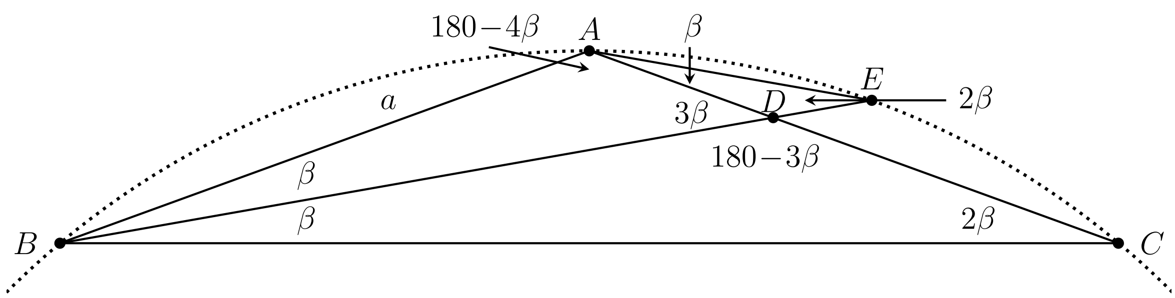
ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב־ a את אורך השוק AB .

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC .

בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

להלן התרשים עם הזוויות הנתונות ב־B, C ולאחר חישוב הזוויות האחרות לפי סכום של זוויות של משולש. כמו כן, $\angle EAC = \angle EBC = \beta$, $\angle AEB = \angle ACB = 2\beta$, כי הן נשענות על אותן קשתות. התרשים נראה דחוס, אבל ציירתי אותו לפי הזוויות המתקבלות במהלך הפתרון.



סעיף א

$\triangle ABC$ משולש שוקיים ולכן מייד יש לנו:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180-4\beta) = \frac{a^2}{2} \sin 4\beta\,.$$

כדי שהיחס יהיה ביטוי ב־β בלבד, עלינו למצוא ביטוי ל־$S_{\triangle ADE}$ כדי ש־a^2 יצטמצם.

נחפש משולשים כדי לבטא AE, AD כביטויים ב־a, β כדי ש־a^2 יצטמצם. ב־$\triangle ABD, \triangle ADE$ צלע אחד הוא באורך a וצלע שני באורך AD, AE. לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{\sin\beta} &= \frac{a}{\sin 2\beta} \\
AE &= \frac{a\sin\beta}{\sin 2\beta} \\
\frac{AD}{\sin\beta} &= \frac{a}{\sin 3\beta} \\
AD &= \frac{a\sin\beta}{\sin 3\beta} \\
S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin 2\beta}\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin 3\beta}\cdot\sin\beta \\
&= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\beta}{\sin 2\beta\sin 3\beta} \\
\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} &= \frac{\sin 4\beta\sin 2\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta}\,.
\end{aligned}$$

פתרון אחר משתמש בחוק הסינוסים כדי להשוות שני ביטויים עבור הרדיוס של החעגל החוסם.

סעיף ב

נשתמש בחוק הסינוסים על $\triangle ABE$ עם צלע BE, ומ־$R = BE$ הרדיוס יצטמצם:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{BE}{\sin(180-4\beta+\beta(} = \frac{BE}{\sin 3\beta} = \frac{R}{\sin 3\beta} \\
2\sin 3\beta &= 1 \\
3\beta &= 30^\circ \\
\beta &= 10^\circ\,.
\end{aligned}$$

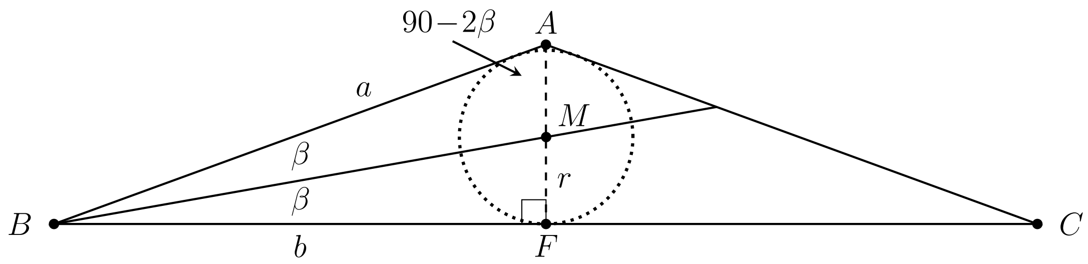
נכון שגם $\sin 3\cdot 50 = \frac{1}{2}$, אבל לא ייתכן שלמשולש שתי זוויות של $2\cdot 50 = 100$.

עם ערכו של β נוכל לחשב את יחס השטחים:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 4\beta\sin 2\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta} = \frac{\sin 40\sin 20\sin 30}{\sin^3 10} = 20.99^\circ\,.$$

סעיף ג

לפי משפט 6 ״במשולש שווה שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים״, כך שחוצה הזווית $\angle BAC$ ניצב ל־BC בנקודה F. לפי משפט 49 ״שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש״, הנקודה המסומנת M בתרשים היא מרכז המעגל החסום.



נשאר רק להשתמש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות. ב־$\triangle ABF$:

$$\begin{aligned}\sin(90-2\beta) &= \frac{b}{a}\\ b &= a\cos 2\beta\,.\end{aligned}$$

ב־$\triangle BMF$:

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{r}{b}\\ r &= a\cos 2\beta\tan\beta\\ &= a\cos 20\tan 10 = 0.1657a\,.\end{aligned}$$

5.2 קיץ תשע"ח מועד א

ABC הוא משולש ישר זווית ($\measuredangle ABC = 90^{o}$).

M היא נקודה על היתר כך ש־ $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.

נתון: $\measuredangle ABM = 30^{o}$, $BM = 8$.

א. **(1)** סמן: $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC .

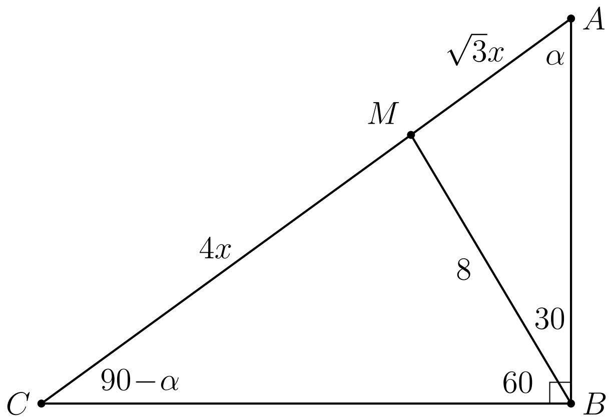
(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו־ CMB .

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו־ CBM ב־ O_1 ו־ O_2 בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2 .

נסמן $\angle BAM = \alpha, \angle BCM = 90-\alpha$.



סעיף א

(1) לשני המשולשים $\triangle ABM, \triangle CMB$ צלע עם הנעלם x, זווית ידועה אחת, וזווית שנייה עם הנעלם α. מחוק הסינוסים נקבל שתי משוואות עם שני הנעלמים שאפשר לפתור אתכדי לקבל משוואה אחת עם הנעלם α בלבד:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}x}{\sin 30} &= \frac{8}{\sin\alpha} \\
x &= \frac{8\sin 30}{\sqrt{3}x\sin\alpha} \\
\frac{4x}{\sin 60} &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)} \\
x &= \frac{8\sin 60}{4x\cos\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{3}\sin\alpha} &= \frac{\sqrt{3}}{4\cdot 2\cos\alpha}\\ \tan\alpha &= \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

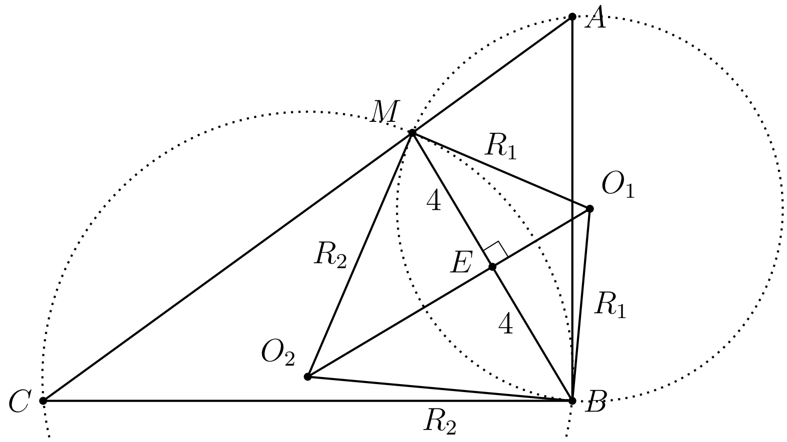
לכן, $\angle BAC=\alpha=53.13$, ולא נשכח לרשום גם $\angle BCA=90-\alpha=36.87$.

(2) לפי חוק הסינוסים עבור $\triangle ABM$, $\triangle CMB$:

$$\begin{aligned}2R_1 &= \frac{8}{\sin\alpha}\\ R_1 &= 5\\ 2R_2 &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)}\\ R_2 &= 20/3\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

(1) נצייר התרשים חדש עם המעגלים החוסמים. ניתן לראות ש־$O_1M=O_1B$ כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את $\triangle ABM$, ו־$O_2M=O_2B$ כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את $\triangle CBM$. לפי ההגדרה מרובע עם שני זוגות של צלעות שכנים שהם שווים הוא דלתון.



(2) לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו", $MB\perp O_1O_2$ וחוצה אותו. את האורך של O_1O_2 ניתן לחשב כסכום האורכים ממרכזי המעגלים ועד לנקודת החיתוך של האלכסונים. נשמתמש במשפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}O_1O_2=O_1E+O_2E &= \sqrt{R_1^2-16}+\sqrt{R_2^2-16}\\ &= \sqrt{5^2-16}+\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2-16}\\ &= 3+\frac{16}{3}=\frac{25}{3}\,.\end{aligned}$$

5.3 חורף תשע"ח

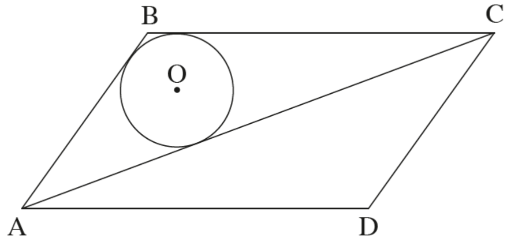
נתונה מקבילית ABCD . AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3

מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה;

. OA = 10



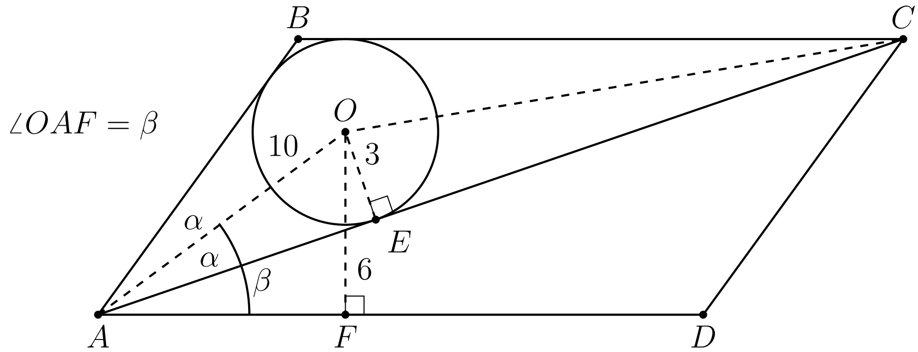
א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC .

ג. חשב את שטח המקבילית.

E, F הן נקודות המפגש של האנכים מ־O עם AC, AD. לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", AO, CO הם חוצי הזוויות BAC, BCA, בהתאמה. המונח "חוצה זוויות" נתפס לי בראש ו"פתרתי" את הבעיה תוך הנחה שאלכסון של מקבילית חוצה את הזווית: $\angle BAC = \angle CAD$. כמובן שזה נכון רק עבור מעוין.

נסמן את הזוויות בנקודה A עבור המשולשים ישר־זווית $\triangle AOE, \triangle AOF$ שנוצרו על ידי האנכים: $\alpha = \angle OAE, \beta = \angle OAF$.



סעיף א

לפי התרשים $\angle BAD = \alpha+\beta$. נחשב α, β מהפונקציות הטריגונומטריות במשולשים ישר־זווית:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= 3/10\\
\alpha &= 17.46\\
\sin\beta &= 6/10\\
\beta &= 36.87\\
\angle BCD = \angle BAD &= \alpha+\beta = 54.33\\
\angle ABC = \angle ADC &= \frac{360-2(\alpha+\beta)}{2} = 125.67\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

האלכסון AC הוא צלע של $\triangle ABC$ והזוויות שלו ידועים, אבל אי־אפשר להשתמש בחוק הסינוסים כי אורכי הצלעות לא ידועים. מהתרשים רואים שהאלכסון מורכב משני קטעי קו AE, EC שהם צלעות של משולשים ישר־זווית $\triangle AOE, \triangle COE$. AE מתקבל ממשפט פיתגורס:

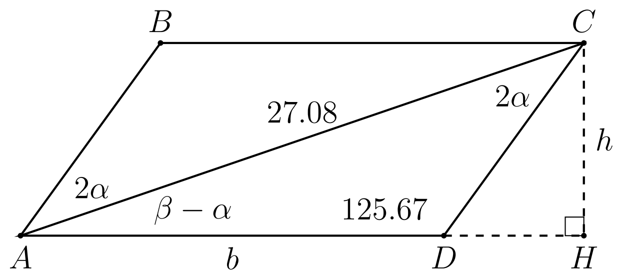
$$AE = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9.54\,.$$

נשתמש בחוק הסינוסים ב־$\triangle COE$ (ונימנע מהפיתוי לקבוע ש־$\angle OCE = \alpha$). לפי זוויות מתחלפות במקבילית $\angle BCA = \angle CAD = \beta - \alpha$ ו:

$$\begin{aligned}
\angle OCE = \frac{\angle BCA}{2} &= \frac{\beta - \alpha}{2} \\
&= \frac{36.87 - 17.46}{2} = 9.71 \\
\angle COE &= 180 - 90 - \angle OCE = 80.29 \\
\frac{EC}{\sin 80.29} &= \frac{3}{\sin 9.71} \\
EC &= 17.54 \\
AC = AE + EC &= 9.54 + 17.54 = 27.08\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

שטח של מקבילית הוא הבסיס כפול הגובה:



$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sin 2\alpha} &= \frac{27.08}{\sin 125.67} \\
b &= 19.08 \\
\sin(\beta - \alpha) &= \frac{h}{27.08} \\
h &= 9 \\
S_{ABCD} = bh &= 171.71\,.
\end{aligned}$$

אפשרות אחרת היא להשתמש בנוסחה הטריגונומטרית כדי לחשב $S_{\triangle ABC}$ ולהכפיל בשניים.

5.4 קיץ תשע"ז מועד ב

ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$).

$\sphericalangle C = 60^o$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו־ AD , באמצעות a ו־ b .

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b .

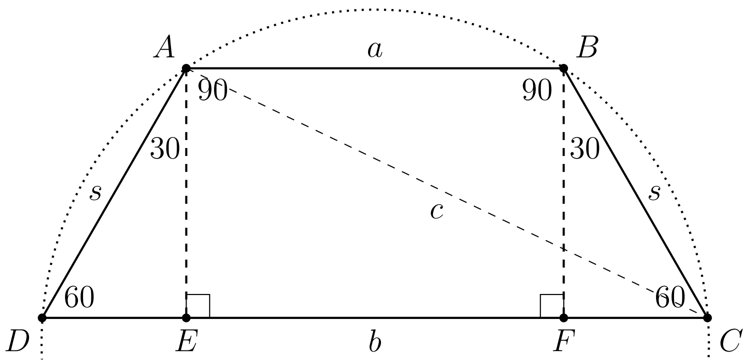
ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R .

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD .

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r .

סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180", ולכן $\angle DAB = 120$. נוריד גבהים מ־A, B ל־CD החותחכים אותו ב־E, F. $\triangle AED, \triangle BFC$ הם משולשים ישר־זווית. בתרשים השלמנו את הזוויות במשולשים ל־180. לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים", $ABCD$ שווה שוקיים.



$AE = BF$ כך ש־$\triangle AED \cong \triangle BFC$. מכאן:

$$\begin{aligned}\cos 60 &= \frac{(b-a)/2}{s} = \frac{1}{2}\\ s &= b - a\,.\end{aligned}$$

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על $\triangle ACD, \triangle ACB$. נסמן ב־$c$ את אורך האלכסון AC.

$$\begin{aligned}c^2 &= s^2 + b^2 - 2sb\cos 60\\ &= s^2 - sb + b^2\\ c^2 &= s^2 + a^2 - 2sa\cos 120\\ &= s^2 + sa + a^2\end{aligned}$$

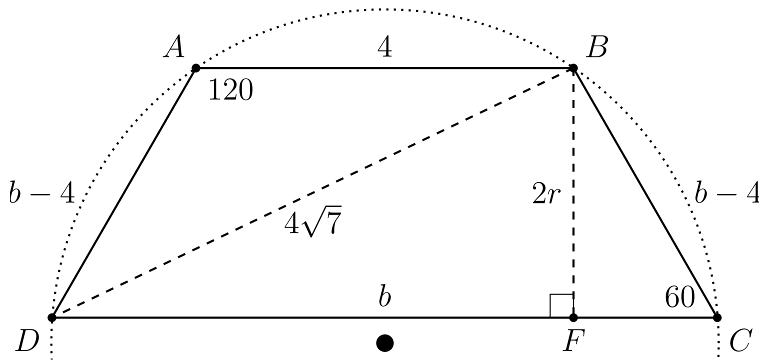
נשווה את שתי הנוסחאות ל־c^2 ונפתור עבור s:

$$\begin{aligned} s(b+a) &= b^2-a^2=(b+a)(b-a) \\ s &= b-a\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

שקלתי להשתמש בחוק הסינוסים במשולש $\triangle ADB$: פעם אחת לחשב $\angle ADB$ ופעם שנייה לחשב את s. עדיף להשתמש בחוק הקוסינוסים ב־$\triangle ADB$ כי אנו יודעים ש־$s=b-a=b-4$:

$$\begin{aligned} (4\sqrt{7})^2 &= 4^2+(b-4)^2-2\cdot 4\cdot (b-4)\cdot \cos 120 \\ b^2-4b-96 &= 0 \\ (b-12)(b+8) &= 0 \\ b &= 12\,. \end{aligned}$$



סעיף ג

(1) שימו לב שהאלכסון BD הוא **לא** הקוטר של המעגל החוסם שמסומן בנקודה השחורה הגדולה. לפי חוק הסינוסים ב־$\triangle ADB$:

$$R=\frac{4\sqrt{7}}{2\sin 120}=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=6.11\,.$$

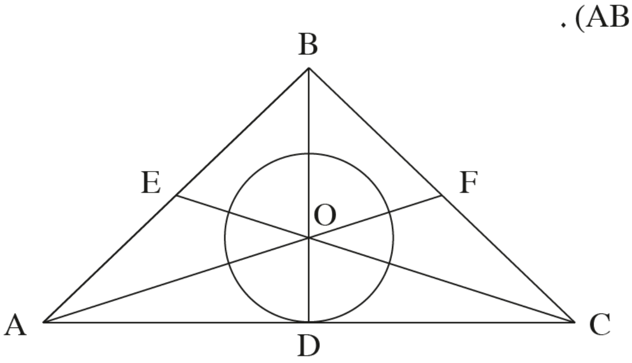
(2) לפי משפט 57, "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$\begin{aligned} a+b &\stackrel{?}{=} s+s \\ a+b &\stackrel{?}{=} (b-a)+(b-a) \\ 3a &\stackrel{?}{=} b \\ 3\cdot 4 &= 12\,. \end{aligned}$$

(3) AB, CD הם משיקים מקבילים למעגל החסום, ולכן $BF=2r$:

$$\begin{aligned} \sin 60 &= \frac{2r}{s}=\frac{2r}{b-a}=\frac{2r}{8} \\ r &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8=2\sqrt{3}=3.464\,. \end{aligned}$$

5.5 קיץ תשע"ז מועד א



ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = BC) .

CE , AF ו־ BD הם תיכונים במשולש,

הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).

א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC

בנקודה D .

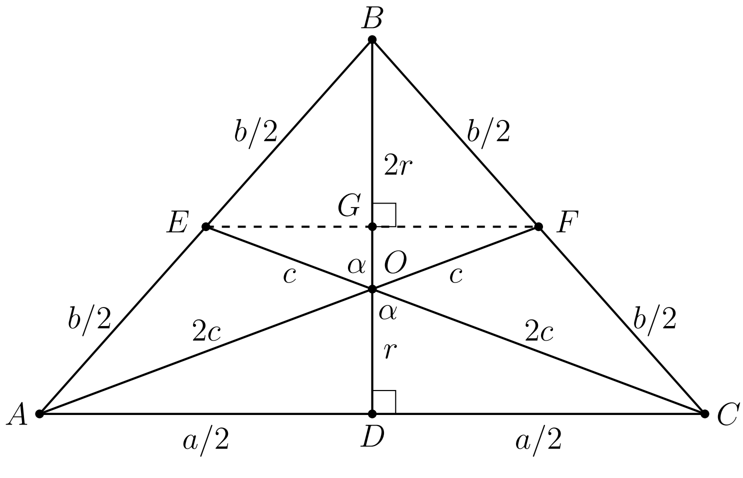
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC .

ב. חשב את גודל הזווית ACE .

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

סעיף א

נסמן בתרשים לפי: $\triangle ABC$ שווה שוקיים, AF, BD, CF תיכונים. משפט 46 "נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $1:2$". $AF = CE$ כי $\triangle CAF \cong \triangle ACE$ לפי צ.ז.צ. כי $\triangle ABC$ שווה־שוקיים.



נשתמש במשפט 91 "משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים", כך ש־$\frac{a}{2} = \frac{AC}{2} = EF$. גם $\triangle EBF$ הוא שווה־שוקיים, ולכן, $\frac{a}{4} = \frac{EF}{2} = EG$.

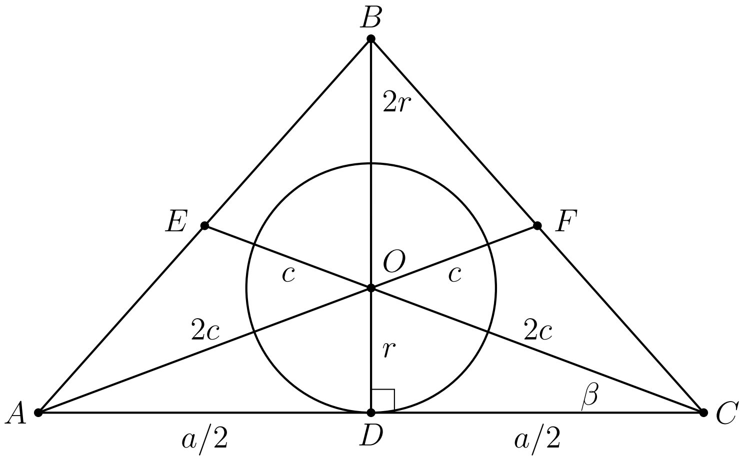
$$\begin{aligned}
S_{BOE} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot BG + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot GO = \frac{a}{8}(BG+GO) = \frac{a}{8}\cdot 2r = \frac{ar}{4}\\
S_{COD} &= \frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{a}{2} = \frac{ar}{4}\,.
\end{aligned}$$

פתרון אחר מתקבל מהנוסחה הטריגונומטרית לשטח עם הזוויות הקודקודיות α:

$$\begin{aligned}
S_{BOE} &= \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot c\cdot\sin\alpha\\
S_{COD} &= \frac{1}{2}\cdot r\cdot 2c\cdot\sin\alpha\,.
\end{aligned}$$

פתרון זה הרבה יותר קל רק קשה לי להיגמל מגישה גיאומטרית לחשב שטח מבסיס וגובה!

סעיף ב



נתון:

$$\begin{aligned}
S_O &= \pi r^2 = \frac{1}{2}ar = S_{AOC}\\
a &= 2\pi r\,.
\end{aligned}$$

נציב עבור a בחישוב פונקציה טריגונומטרית עבור הזווית $\beta = \angle ACE$:

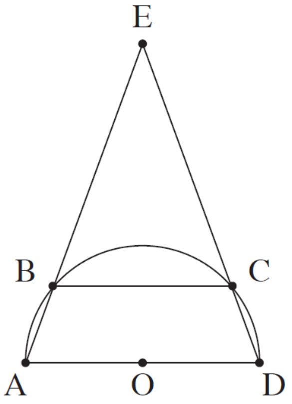
$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{r}{a/2} = \frac{2r}{2\pi r} = \frac{1}{\pi}\\
\beta &= \arctan\frac{1}{\pi} = 17.66^\circ\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

בתרשים סימנו $OE = c$. נחשב פונקציה טריגונומטרית עבור הזווית β ב־$\triangle COD$:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{r}{2c}\\
c &= \frac{r}{2\sin\beta}\\
&= 1.648r\,.
\end{aligned}$$

5.6 חורף תשע"ז



נתון טרפז ABCD ‏($BC \parallel AD$)

החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R

כך ש־ AD הוא קוטר של חצי המעגל.

המשכי השוקיים AB ו־ DC נפגשים

מחוץ למעגל בנקודה E ‏(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle EAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו־ α את אורך הקטע BC .

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α ? נמק.

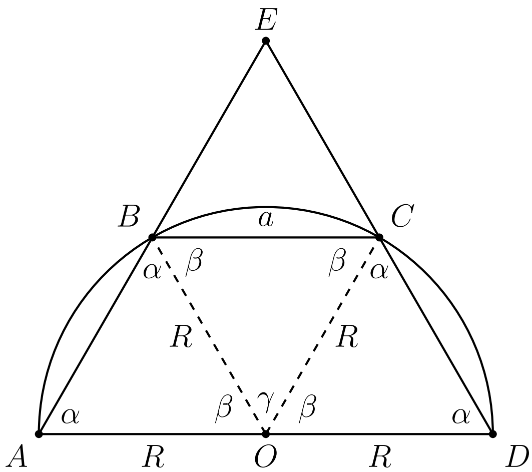
ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD .

מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R ?

סעיף א

להלן ההצדקה לסימונים של הזוויות בתרשים להלן. הרדיוסים של המעגל שווים $OA = OB = OC = OD = R$, לכן $\triangle ABO$ שווה־שוקיים, ו־$\angle BAO = \angle ABO = \alpha$. כדי להשלים זוויות של $\triangle ABO$ ל־180, $\angle AOB = 180 - 2\alpha$ שנסמן β. לפי זוויות מתחלפות, $\angle BCO = \angle AOB = \beta$ ו־$\angle BCO = \angle CBO = \beta$ כי $\triangle BOC$ שווה שוקיים. נשלים את הזוויות של $\triangle BOC$ ונקבל $\angle BOC = 180 - 2\beta$ שנסמן γ. לפי זוויות מתחלפות $\angle COD = \angle BCO = \beta$. $\triangle COD$ שווה שוקיים, ולכן $\angle CDO = \angle OCD = (180 - \beta)/2 = \alpha$.

אפשר גם להשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־$180°$. לאחר שהסקנו ש־$\angle OAB = \angle ABO = \alpha$ ו־$\angle AOB = \angle CBO = 180 - 2\alpha = \beta$, אפשר לחשב ש־$\angle CDO = \alpha$ ומשם את שאר הזוויות.



לפני שנמשיך נרשום כמה זהויות טריגונומטריות שימושיות:

$$\begin{aligned}
\cos(180-\theta) &= -\cos\theta \\
\sin(180-\theta) &= \sin\theta \\
\cos 2\theta &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
\sin 2\theta &= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

נחשב $a = BC$ לפי חוק הסינוסים ולפי חוק הקוסינוסים ב־$\triangle BOC$, ותחליטו איזו שיטה עדיפה.
לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\gamma} &= \frac{R}{\sin\beta} \\
a &= \frac{R\sin(180-2\beta)}{\sin\beta} = \frac{R\sin 2\beta}{\sin\beta} \\
&= \frac{R(2\sin\beta\cos\beta)}{\sin\beta} \\
&= 2R\cos\beta = 2R\cos(180-2\alpha) \\
&= -2R\cos 2\alpha\,.
\end{aligned}$$

לפי חוק הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}
a^2 &= R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cos\gamma \\
&= 2R^2(1-\cos(180-2\beta)) = 2R^2(1+\cos 2\beta) \\
&= 2R^2(1+\cos^2\beta - \sin^2\beta) \\
&= 2R^2(2\cos^2\beta) \\
a &= 2R\cos\beta = 2R\cos(180-2\alpha) \\
&= -2R\cos 2\alpha\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

האורך של צלע חייב להיות חיובי $a = -2R\cos 2\alpha > 0$, ולכן $\cos 2\alpha < 0$ ו־2α נמצא ברביע השני:

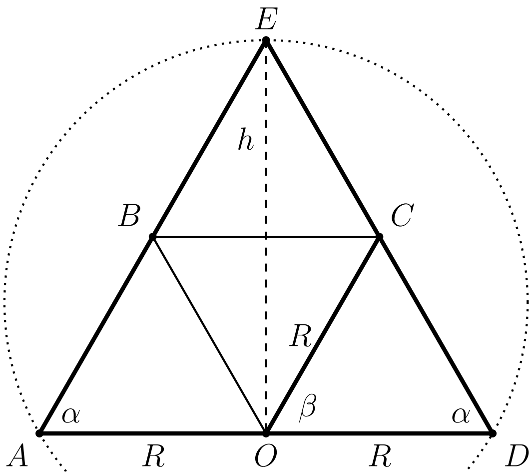
$$\begin{aligned}
90 < 2\alpha \leq 180 \\
45 < \alpha \leq 90\,.
\end{aligned}$$

$\alpha \neq 90$ כי הזוויות הבסיס של משולש שווה־שוקיים חייבים להיות פחות מ־90.

סעיף ג

נתון יחס של השטחים של שני משולשים. נחשב את השטחים של שני המשולשים ונראה מה יוצא.
נחשב $S_{\triangle AED}$ לפי הנוסחה הגיאומטרית. הגובה של $\triangle AED$ הוא $h = R\tan\alpha$, ו:

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot h = R^2\tan\alpha\,.$$



נחשב $S_{\triangle COD}$ לפי הנוסחה הטריגונומטרית:

$$\begin{aligned} S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin\beta \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha\,. \end{aligned}$$

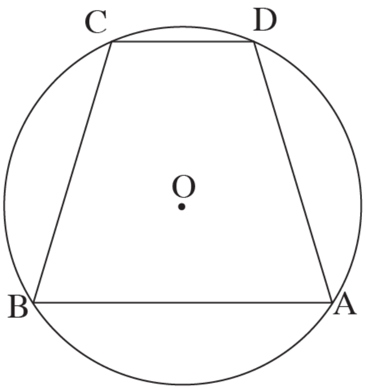
לפי היחס נתון בין השטחים:

$$\begin{aligned} tR^2 \tan\alpha &= 9 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{1}{3} \\ \sin\alpha &= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,. \end{aligned}$$

במשולש $\triangle DOE$ יש לנו $R = DE \cos\alpha$. נשתמש בחוק הסינוסים כדי לחשב r, הרדיוס של המגעל שחוסם $\triangle AED$:

$$\begin{aligned} 2r &= \frac{DE}{\sin\alpha} \\ \frac{r}{R} &= \frac{1}{2 \sin\alpha \cos\alpha} \\ &= \frac{1}{2(2\sqrt{2}/3)(1/3)} \\ &= \frac{9}{4\sqrt{2}} = 1.591\,. \end{aligned}$$

5.7 קיץ תשע"ו מועד ב



במעגל חסום טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).

רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h .

נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ R .

ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ h .

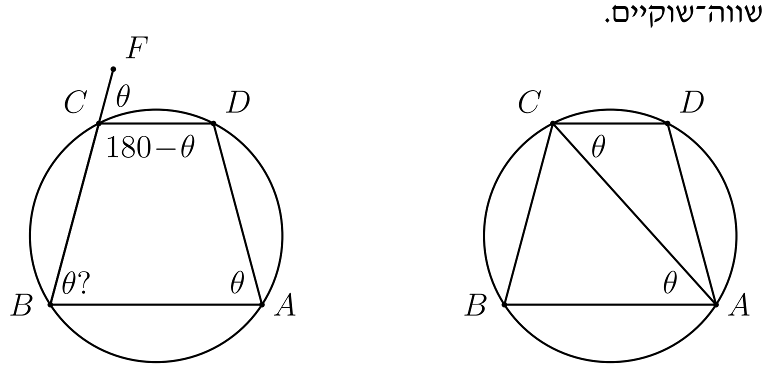
ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\dfrac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

מצא את α .

מהתרשים נראה שהטרפז שווה־שוקיים, אבל אין לסמוך על תרשימים. השקעתי זמן רב עד שעלה בדעתי האפשרות שטרפז חסום במעגל חייב להיות שווה־שוקיים. המשפט לא מופיע ברשימת המשפטים שניתן לצטט בבחינת הבגרות ויש להוכיח אותו. בספרי לימוד המשפט לא מובלט ומופיע רק כדוגמה או תרגיל. אני אביא שתי הוכחות: אחת שלי ואחת המופיעה בספרים.

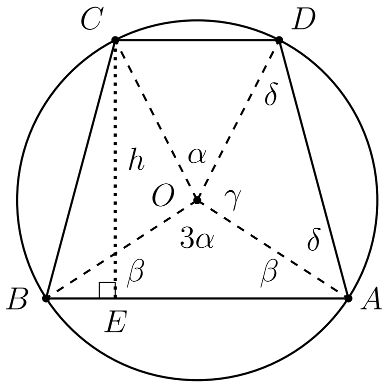
ההוכחה מהספרים (רשים ימני למטה): $\angle ACD = \angle CAB$ לפי זוויות מתחלפות ולכן גם המיתרים הכלואים שווים $CB = AD$.

ההוכחה שלי (תרשים שמאלי למטה): המשפט הראשון שחשבתי עליו כאשר קראתי את השאלה הוא משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־$180°$". נסמן $\angle DAB = \theta$, ולפי המשפט $\angle DCB = 180-\theta$. לפי זוויות משלימות ומתאימות $\angle DCF = \theta$. $\angle ABC = \theta$. לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים", הטרפז שווה־שוקיים.



סעיף א

בארבעת המשולשים עם קודקוד O, הצלעות המקווקוות הם רדיוסים שאורכם R, והמשולשים שווה שוקיים. $\triangle COB \cong \triangle DOA$ לפי צ.צ.צ. כי הטרפז שווה שוקיים. מכאן ש־$\angle COB \cong \angle DOA$, וניתן לסמן את הזוויות לפי החישובים מימין לתרשים. החישוב של γ מוצדק כי סכום הזוויות סביב נקודה הוא 360. השורה האחרונה מציגה את התשובה לשאלה כי $\angle DAB = \beta + \delta$.



$$\begin{aligned}\beta &= \frac{180-3\alpha}{2}\\ \gamma &= \frac{360-(\alpha+3\alpha)}{2} = 180-2\alpha\\ \delta &= \frac{180-\gamma}{2} = \frac{180-(180-2\alpha)}{2} = \alpha\\ \beta+\delta &= \frac{180-\alpha}{2}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

כדי חשב אורך של שוק נחפש משולש שאחד מצלעותיו הוא DA. לפי חוק בסינוסים ב־$\triangle DOA$:

$$\begin{aligned}\frac{DA}{\sin\gamma} &= \frac{R}{\sin\delta}\\ \frac{DA}{\sin(180-2\alpha)} &= \frac{R}{\sin\alpha}\\ DA &= \frac{R\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \frac{R\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2R\cos\alpha\,.\end{aligned}$$

סעיף ג

בתרשים ציירנו את הגובה מהנקודה C כדי לא להסתיר את הסימונים ב־$\triangle DOA$. $CB = DA$ הוא גם שוק. נשתמש בהגדרה של סינוס במשולש $\triangle CBE$:

$$\frac{h}{CB} = \sin\angle CBE = \sin\left(\frac{180-3\alpha}{2}+\alpha\right) = \sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

כי $\angle CBE = \angle DAB = \beta+\delta$. התשובה היא $CB = \dfrac{h}{\cos(\alpha/2)}$.

סעיף ד

בנוסחה הטריגונטמרית עבור $S_{\triangle COD}$ יופיעו אורכי הצלעות R והזווית α. אנו רוצים נוסחה עם h ו־α כדי להשוות לביטוי הנתון. נשווה את הביטויים עבור שוקי הטרפז מהסעיפים הקודמים:

$$\begin{aligned}2R\cos\alpha &= \frac{h}{\cos(\alpha/2)}\\ R &= \frac{h}{2\cos\alpha\cos(\alpha/2)}\,.\end{aligned}$$

נציב בנוסחה לשטח, נשווה לנוסחה הנתונה לשטח ונצמצם:

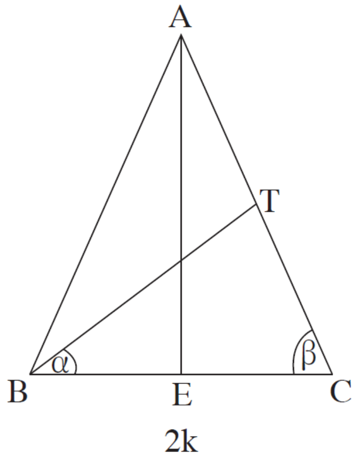
$$\begin{aligned}
S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2}\cdot OC\cdot OD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{4}\cdot\frac{1}{(\cos\alpha\cos(\alpha/2))^2}\cdot\sin\alpha\\
\frac{h^2}{12\cos^2(\alpha/2)} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{4}\cdot\frac{1}{(\cos\alpha\cos(\alpha/2))^2}\cdot\sin\alpha\\
\frac{1}{12} &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha\\
\frac{1}{12} &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha\,.
\end{aligned}$$

נקבל משוואה ריבועית ב־$\sin\alpha$, ונבחר את השורש $\frac{1}{2}$ כי הערך של סינוס לא יכול להיות -2:

$$\begin{aligned}
2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-2 &= 0\\
(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+2) &= 0\\
\sin\alpha &= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

הערך היחיד ש־α יכול לקבל הוא 30° כי זוויות הבסיס של טרפז חייבים להיות פחות מ־90°.

5.8 קיץ תשע"ו מועד א



נתון משולש שווה־שוקיים ABC ‏(AB = AC) .

AE הוא גובה לבסיס BC,

ו־ BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle TBC = \alpha$, $BC = 2k$

(1) הבע את האורך של TC באמצעות k ו־ β בלבד.

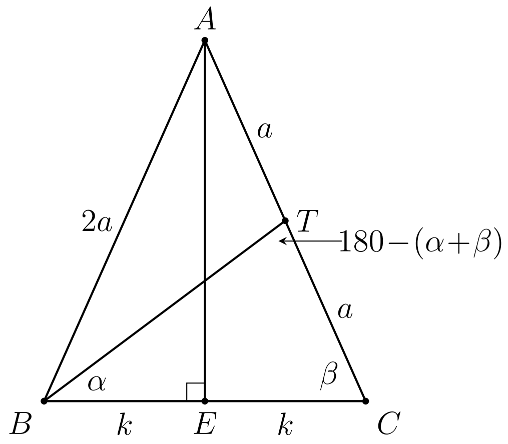
(2) היעזר בתת־סעיף א(1), והראה כי

$$\sin(\alpha+\beta) = 4\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

נתון גם: TE = 5 ס"מ , k = 4 ס"מ .

(1) מצא את β .

(2) מצא את α .



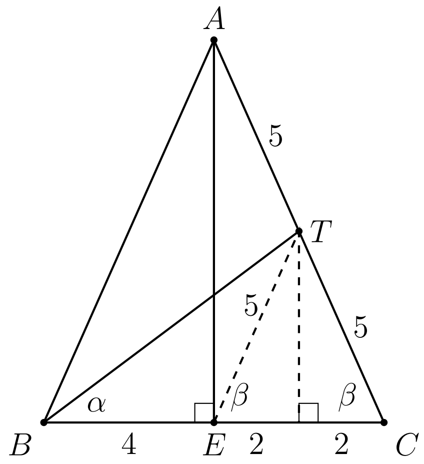
(1) לפי הגדרת קוסינוסים ב־$\triangle AEC$:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{k}{2a} \\ TC = a &= \frac{k}{2\cos\beta}\,. \end{aligned}$$

(2) נחפש משולש עבורו חוק הסינוסים ייתן משוואה בה יצטמצם k או a. $\triangle TBC$ מתאים:

$$\begin{aligned} \frac{2k}{\sin(180-(\alpha+\beta))} &= \frac{a}{\sin\alpha} \\ \frac{2k}{\sin(\alpha+\beta)} &= \frac{k/(2\cos\beta)}{\sin\alpha} \\ \sin(\alpha+\beta) &= 4\sin\alpha\cos\beta\,. \end{aligned}$$

(1) נוסיף את אורכי הצלעות הנתונים ונשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" כדי להסיק ש־$TE = TA = TC = 5$ ו־$\triangle ETC$ שווה־שוקיים:



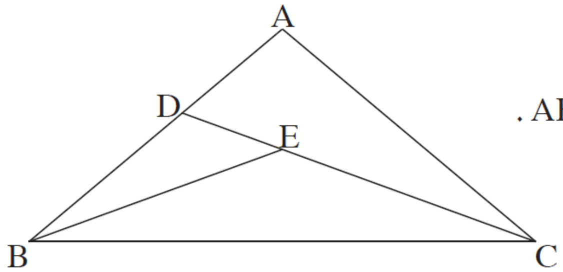
נוריד גובה מ־T שהוא אנך אמצעי במשולש שווה־שוקיים $\triangle ETC$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{2}{5} \\
\beta &= 66.4^\circ\,.
\end{aligned}$$

(2) לפי סעיף (1) וסעיף (2) הקודם:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= 4\sin\alpha\cos\beta \\
\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta &= 4\sin\alpha\cos\beta \\
\sin\alpha\cdot\frac{2}{5} + \cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} &= 4\sin\alpha\cdot\frac{2}{5} \\
\sqrt{21}\cos\alpha &= 6\sin\alpha \\
\tan\alpha &= \frac{\sqrt{21}}{6} \\
\alpha &= 37.37^\circ\,.
\end{aligned}$$

5.9 חורף תשע"ו



במשולש שווה־שוקיים ABC ‏(AB = AC)

זווית הבסיס היא 2α .

הנקודה E היא מפגש חוצי־הזווית במשולש ABC .

המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D

(ראה ציור).

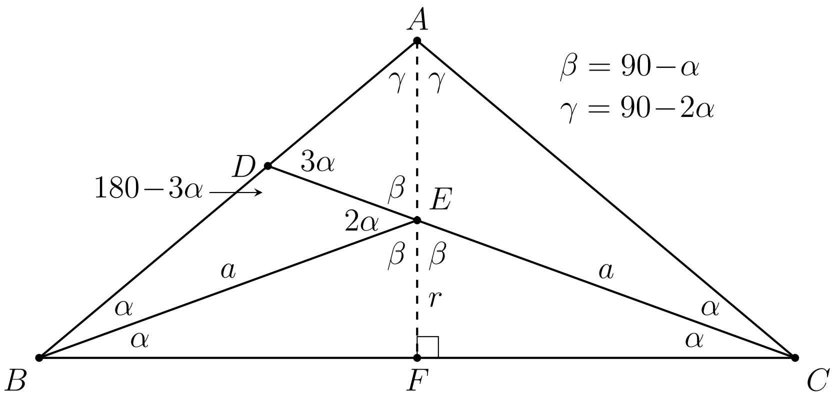
נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90^o$.

א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל ה<u>חסום</u> במשולש ABC .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל ה<u>חסום</u> במשולש ABC הוא 2 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AE .

נתון שהנקודה E היא מפגש חוצי הזוויות. לפי משפט 6 "במשולש שווה שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן חוצה הזווית $\angle BAC$ עובר דרך E וחותך את BC בנקודה F בזווית ישרה. לפני שניגש לשאלות, נסמן זוויות תוך שימוש רק במשפטים פשוטים כגון סכום הזוויות במשולש הוא 180.



$\triangle EFC \cong \triangle EFB$ לפי צלע־צלע במשולש ישר־זווית: F היא נקודת האמצע של BC ו־EF הוא צלע משותף. לכן $\angle BEF = \angle CEF = 90-\alpha$ שנסמן β.

בדרך דומה נראה ש־$\angle BAF = \angle CAF = 90-2\alpha$ שנסמן γ.

$\angle AED = \beta$ לפי זוויות קודקודיות, ו־$\angle ADE = 180 - \beta - \gamma = 3\alpha$.

לבסוף, $\angle BDE = 180-3\alpha$ לפי זוויות משלימות.

סעיף א

נתון היחס $\frac{EC}{DE}$ כתלות ב־α, ולכן נחפש משלוש שעבורו חוק הסינוסים ייתן יחס אחר כתלות ב־α, ואז תהיה לנו משוואה ב־α בלבד. אמנם EC, DE הם צלעות במשולשים שונים, אבל כבר הוכחנו ש־$\triangle EFC \cong \triangle EFB$ כך ש־$EB = EC$. לפי חוק הסינוסים ב־$\triangle BDE$:

$$
\begin{aligned}
\frac{EB}{\sin(180-3\alpha)} &= \frac{DE}{\sin\alpha}\\
\frac{EB}{DE} &= \frac{\sin(180-3\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\\
\sin 3\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\alpha &= 20^\circ\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ב

לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", הנקודה E היא מרכז המעגל החסום שמשיק לצלע המשולש ב־F. $r = EF$ הוא הרדיוס של המעגל החסום.

כעת צריך להיזהר שלא לקבוע ש־E היא מרכז המעגל החוסם כי אין אנו יודעים שחוצי הזוויות האחרות הם גם אנכים אמצעיים. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים על המשולש $\triangle ABC$. נבחר את הזווית $\angle BAC = 180-4\alpha$, כי אפשר לחשב את אורך הצלע הנגדי BC כתלות ב־r, α:

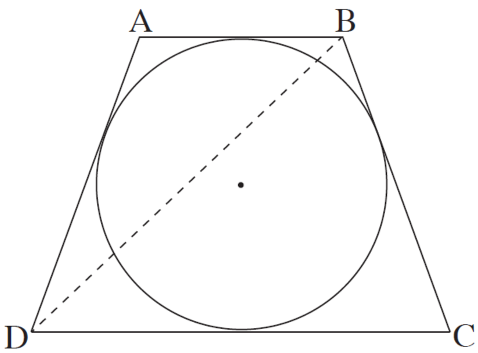
$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{r}{BF} = \frac{r}{BC/2}\\
2R &= \frac{BC}{\sin(180-4\alpha)} = \frac{2r}{\sin 4\alpha \tan\alpha}\\
\frac{R}{r} &= \frac{1}{\sin 4\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{1}{\sin 80\cdot\tan 20} = 2.79\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ג

נתון $R - r = 2$. נציב $R = 2.79r$ שחישבנו בסעיף ב, ונקבל $r = 2/(2.79-1) = 1.117$. אין לנו מספיק מידע על המשולשים $\triangle AED, \triangle AEC$, ולכן נחשב $AF = AE + EF = AE + r$:

$$
\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{AE + r}{BF} = \frac{AE + r}{r/\tan\alpha}\\
AE &= \frac{r(\tan 2\alpha - \tan\alpha)}{\tan\alpha}\\
&= \frac{1.117(\tan 40 - \tan 20)}{\tan 20} = 1.458\,.
\end{aligned}
$$

5.10 קיץ תשע"ה מועד ב



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה־שוקיים ABCD

$(AB \parallel DC)$, כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle BCD = 70^{o}$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

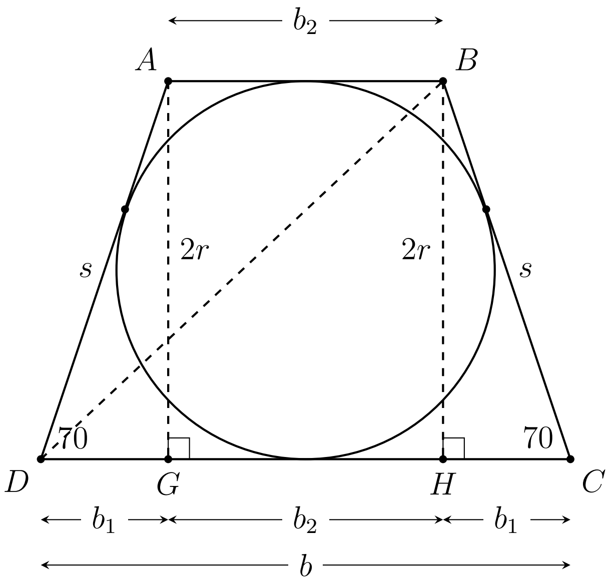
(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז

ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

נוריד אנך מ־A שחותך את DC ב־G, ואנך מ־B שחותך את DC ב־H. בטרפז $AB \| DC$ ולכן $ABHG$ הוא מלבן. לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", האנך מנקודת ההשקה של מעגל עם AB עובר דרך מרכז המעגל והוא ניצב לנקודת ההשקה עם DC. מכאן ש־$AG = EF = BF = 2r$.

נסמן $AB = GH = b_2$. הטרפז שווה־שוקיים ולפי משפט 39 "בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו", $\angle ADC = \angle BCD = 70^\circ$, $\angle DAG = \angle CBH = 20^\circ$. ביחד עם $AD = BC$ בטרפז שווה־שוקיים, $\triangle ADG \cong \triangle BCH$. נסמן $DG = HC = b_1$ ונקבל ש־$DC = 2b_1 + b_2$ שנסמן b.



סעיף א

(1) נחפש משפט הקושר צלעות של מרובע עם הרדיוס של המעגל החוסם. משפט 57 "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$2s = b + b_2 = (b_1 + b_2 + b_1) + b_2 = 2(b_1 + b_2)\,.$$

ממשוואה זו נחשב משוואת נוספות שיעזרו לנו בהמשך:

$$s = b_1 + b_2, \quad b = 2b_1 + b_2 = s + b_1\,.$$

לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומרטיות ב־$\triangle ADC$, נוכל לקשר את r לצלעות:

$$\begin{aligned}
\tan 70 &= \frac{2r}{b_1}\\
\sin 70 &= \frac{2r}{s}\\
b &= s + b_1\\
&= 2r\left(\frac{1}{\sin 70} + \frac{1}{\tan 70}\right)\\
&= 2.856r\,.
\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{2r}{\sin 70} = 2.128r$.

(3) האלכסון הוא היתר של $\triangle BDH$ שצלעותיו ידועים:

$$\begin{aligned}
DB^2 &= (b_1 + b_2)^2 + (2r)^2 = s^2 + (2r)^2\\
&= \left(\frac{2r}{\sin 70}\right)^2 + 4r^2\\
DB &= 2r\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 70}\right)^2 + 1} = 2.921r\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

במבט ראשון נראה שכדאי להשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180°", אבל אין בו צורך. שימו לב שהמרכז של המעגל החוסם לא חופף את המרכז של המעגל החסום, כך שאי־אפשר לחשב R, הרדיוס של המעגל החסום, כמרחק ממרכז המעגל החוסם לאחת מקודקודי הטרפז. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים ב־$\triangle BCD$:

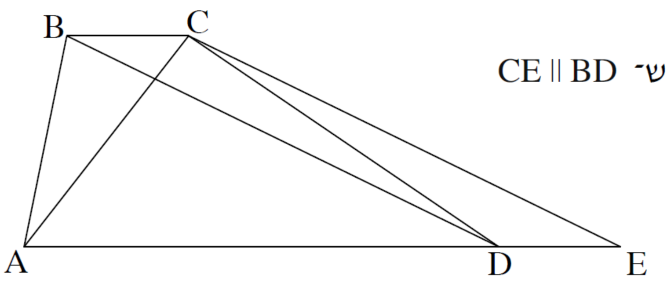
$$\begin{aligned}
2R &= \frac{DB}{\sin BCD} = \frac{2.921r}{\sin 70}\\
\frac{r}{R} &= \frac{2\cdot\sin 70}{2.921} = 6.434\,.
\end{aligned}$$

5.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$).

הנקודה E נמצאת על המשך AD כך ש־ $CE \parallel BD$

(ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DBC$

$DB = 1.8AC$

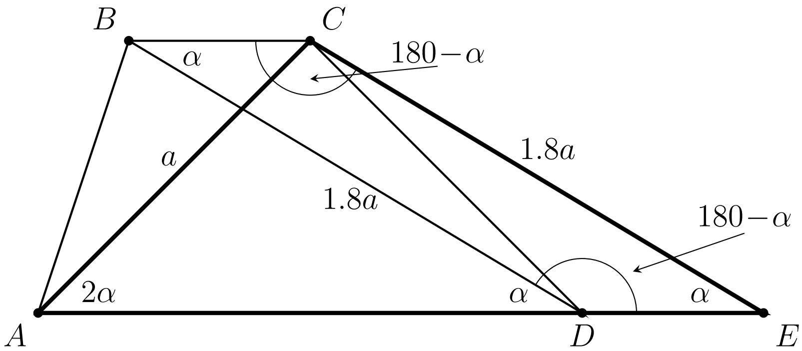
א. מצא את גודל הזווית CEA.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.

מצא את גובה הטרפז.

סעיף א

נסמן זוויות לפי זוויות מתחלפות, מתאימות ופנימיות: $\angle CBE = \angle BDA = \angle CEA = \alpha$, $\angle BCE = \angle BDE = 180 - \alpha$.



משולש־$\triangle CEA$ לאחר שנוכיח ש־$CD = DB = 1.8a$. נתון $BC \| AD$, $CE \| BD$, ולפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית", $BCED$ היא מקבילית.

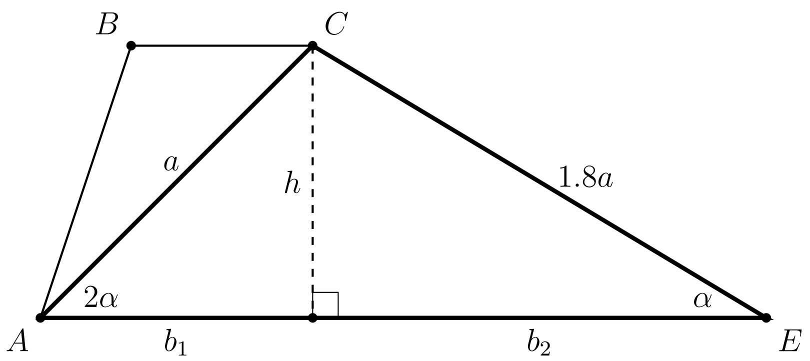
$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{1.8a}{\sin 2\alpha} = \frac{1.8a}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\
\cos\alpha &= 0.9 \\
\alpha &= 25.84\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ב

נרשום את כל הזוויות ב־$\triangle ACE$:

$$
\begin{aligned}
\angle CEA = \alpha &= 25.84 \\
\angle CAE = 2\alpha &= 51.68 \\
\angle ACE = 180 - 3\alpha &= 102.48\,.
\end{aligned}
$$

מהתרשים אפשר לראות ש־$S_{\triangle ACE}$ מורכב מסכום השטחים של שני משולשים עם אותו גובה:

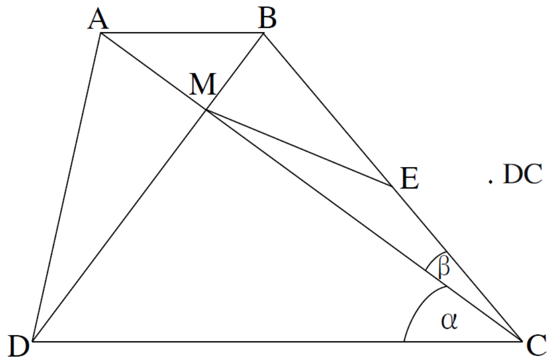


$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}(b_1+b_2)h \\
b_1 &= \frac{h}{\tan 2\alpha} \\
b_2 &= \frac{h}{\tan\alpha} \\
S_{ACE} &= \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{\tan 2\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}\right) \\
87.873 &= \frac{1}{2}h^2(6.79+2.06) = 1.428h^2 \\
h &= 7.846\,.
\end{aligned}
$$

פתרון אחר משתמש בנוסחה הטריגונומטרית לשטח:

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot \sin\angle ACE \\
&= \frac{1}{2}\cdot a\cdot 1.8a\cdot \sin(180-3\alpha) \\
87.873 &= 0.87873a^2 \\
a &= 10 \\
h &= a\sin 2\alpha = 7.846\,.
\end{aligned}
$$

5.12 חורף תשע"ה



אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה

ונפגשים בנקודה M .

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.

א. הבע באמצעות a , α ו־ β

את האורך של ME .

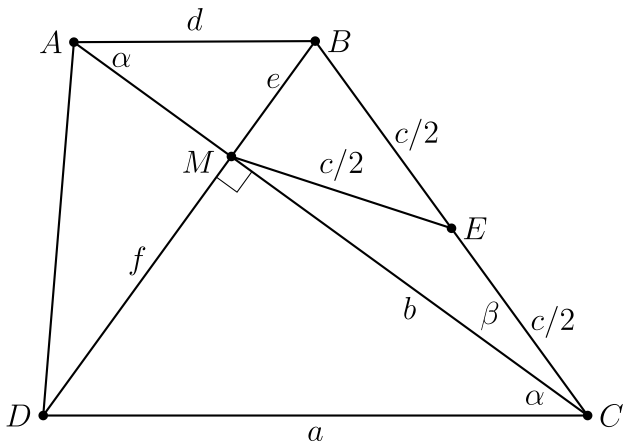
נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, a = 6.6 ס"מ .

ב. מצא את האורך של AB .

נתון גם: BM = 1.3 ס"מ .

ג. מצא את הזווית DCB .

נמסן את הצלעות בתרשים.



סעיף א

$\triangle BMC$ ישר זווית ונתון ש־ME הוא תיכון ליתר. לפי משפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר", $ME = c/2$. לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{b}{c} \\
\cos\alpha &= \frac{b}{a} \\
ME &= \frac{c}{2} = \frac{b}{2\cos\beta} \\
&= \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

למשולשים $\triangle AMB, \triangle CMB$ צעל משותף $MB = e$. לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} \\
\sin\alpha &= \frac{e}{d} \\
AB = d &= \frac{e}{\sin\alpha} = \frac{b\tan\beta}{\sin\alpha} \\
&= \frac{a\cos\alpha\tan\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\tan\beta}{\tan\alpha} \\
&= 6.6\cdot\frac{1}{3} = 2.2\,.
\end{aligned}$$

הוכחת אחרת משתמשת במשולשים דומים. $\angle BAM = \angle MCD = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות, ו-$\triangle ABM \sim \triangle DMC$:

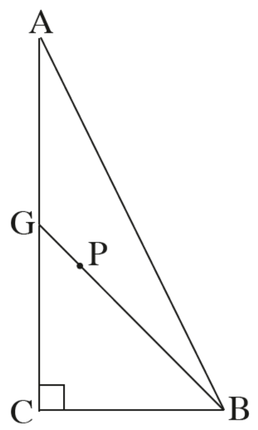
$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} \\
\tan\alpha &= \frac{f}{b} \\
\frac{e}{f} &= \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3} \\
\frac{d}{a} &= \frac{e}{f} = \frac{1}{3} \\
AB = d &= \frac{6.6}{3} = 2.2\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

ממשפט פיתגורס $b = \sqrt{a^2 - f^2} = 5.32$, ו:

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} = \frac{1.3}{5.32} = 0.2444 \\
\beta &= 13.73 \\
\tan\alpha &= 3\tan\beta = 0.7331 \\
\alpha &= 36.24 \\
\angle DCB &= \alpha + \beta = 49.97\,.
\end{aligned}$$

5.13 קיץ תשע"ד מועד ב



במשולש ישר־זווית ACB ($\sphericalangle ACB = 90^o$)

נקודה G היא אמצע הניצב AC .

נקודה P נמצאת על GB כך ש־ $BG = 4 \cdot PG$ (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R .

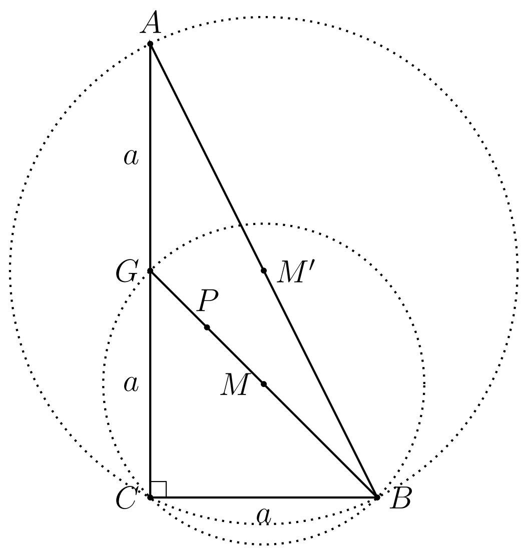
נתון: $GC = BC$.

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB .

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB .

מצאתי ששאלה זו קשה יחסית לשאלות אחרות בטריגונטמטריה. אתן שתי הוכחות לסעיף ב.

נסמן $R, M =$ מרכז המעגל החוסם את $\triangle CGB$ והרדיוס שלו, ו־$R', M' =$ מרכז המעגל החוסם את $\triangle ACB$ והרדיוס שלו. שימו לב שבתרשים הנקודות M, M' נמצאות על הצלעות GB, AB, אבל אנו חייבים להוכיח את הטענה אם רוצים להשתמש בה.



סעיף א

נשתמש בחוק הסינוסים ובמשפט פיתגורס, תחילה עבור $\triangle CGB$:

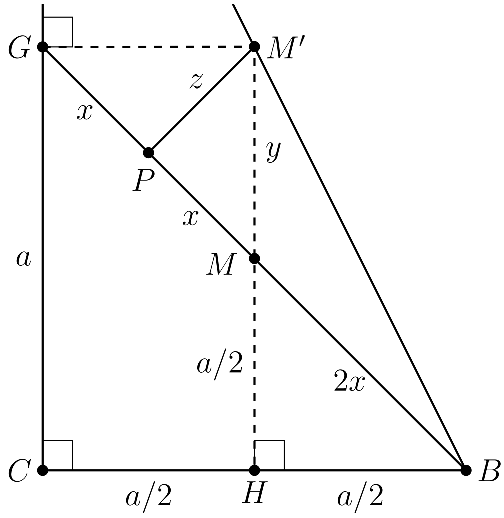
$$R = \frac{BG}{2\sin 90} = \frac{BG}{2} = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,,$$

ואחר כך עבור $\triangle ACB$:

$$R' = \frac{AB}{2\sin 90} = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2+(2a)^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R\,.$$

סעיף ב

M', מרכז המעגל החוסם את $\triangle ACB$, הוא נקודת החיתוך של האנכים האמצעיים $GM' \perp AC$ ו־$M'H \perp BC$. $CH = HB = \frac{a}{2}$.



אם נמצא משולש שעבורו נוכל לחשב שני צלעות והזווית הכלואה ביניהם, נוכל להשתמש בחוק הקוסינוסים. ננסה את $\triangle MPM'$. $CG \| MH$ ולכן לפי משפט 91 "משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים":

$$\frac{GC}{MH} = \frac{CB}{HB} = \frac{a}{a/2} = 2\,,$$

ו־$MH = \frac{a}{2}$. אבל $GCHM'$ הוא מלבן, ולכן:

$$y = MM' = M'H - MH = GC - MH = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}R = \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

שוב לפי משפט תאלס המורחב:

$$\frac{GB}{MB} = \frac{GC}{MH} = 2\,,$$

ו־$MB = GM$ שנסמן $2x$. נתון $GB = 4\cdot PG$, כך ש־$PG = \frac{1}{4}(2x+2x) = x$. לבסוף, $PM = 4x - (2x) - x = x$. את x ניתן לחשב לפי משפט פיתגורס ב־$\triangle CGB$:

$$\begin{aligned}(4x)^2 &= a^2 + a^2\\ x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{2}R = \frac{R}{2}\,.\end{aligned}$$

$\triangle MHB$ הוא משולש ישר־זווית, כך ש־$\angle BMH = 45$ ו־$\angle PMM' = 45$ לפי זוויות קודקודיות.

כעת יש לנו מספיק נתונים להשתמש בחוק הקוסינוסים. נסמן $z = PG$:

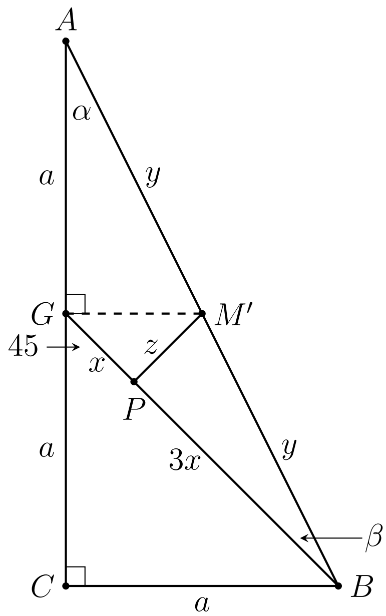
$$
\begin{aligned}
z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\angle PMM' \\
&= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\cos 45 \\
&= R^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \\
z &= \frac{R}{2}\,.
\end{aligned}
$$

* * *

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על $\triangle PM'B$. GM', האנך האמצעי לצלע AC חותך את AB ב־M' (בלי להסתמך על M' כמרכז המעגל החסום את $\triangle ACB$). $GM' \| CB$ ולכן לפי משפט תאלס (הרגיל)

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AM'}{M'B}\,,$$

ונסמן $y = AM' = M'B$.



ולפי פיתגורס ב־$\triangle GCB$:

$$
\begin{aligned}
(4x)^2 &= a^2 + a^2 \\
x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{2}R = \frac{R}{2}\,.
\end{aligned}
$$

לפי פיתגורס ב־$\triangle ACB$:

$$\begin{aligned}
(2y)^2 &= (2a)^2 + a^2 \\
y &= \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R\,.
\end{aligned}$$

נחשב את הזוויות α, β:

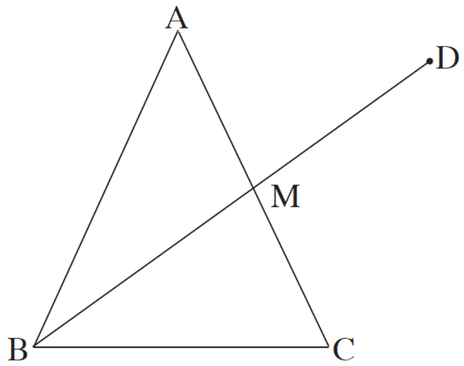
$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{2}R}{2\sqrt{(5/2)}R} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\
\alpha &= 26.57 \\
\beta &= 180 - \angle AGB - \alpha = 180 - 135 - 26.57 = 18.43\,.
\end{aligned}$$

נשמתש בחוק הקוסינוסים ב־$\triangle PM'B$:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (3x)^2 + y^2 - 2 \cdot 3x \cdot y \cdot \cos\beta \\
&= \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}R\right)^2 - 2 \cdot \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot 0.9487 \\
&= 0.25R^2 \\
z &= \frac{R}{2}\,.
\end{aligned}$$

אני מעדיף את הפתרון הראשון. אמנם התרשים מעט יותר מסובך אבל החישובים הרבה יותר פשוטים.

5.14 קיץ תשע"ד מועד א



במשולש שווה־שוקיים ABC ‏(AB = AC),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 50^{\circ}$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB.

ממשיכים את BM עד הנקודה D.

נתון גם:

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

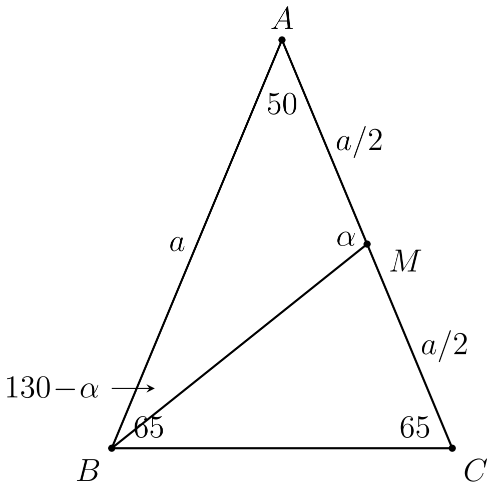
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD.

נסמן $\alpha = \angle AMB$. נתון $\angle BAC = 50$ ובמשולש שווה־שוקיים:

$$\angle ABC = \angle ACB = (180 - 50)/2 = 65\,.$$

נחשב $\angle ABM = 180 - 50 - \alpha = 130 - \alpha$.



סעיף א

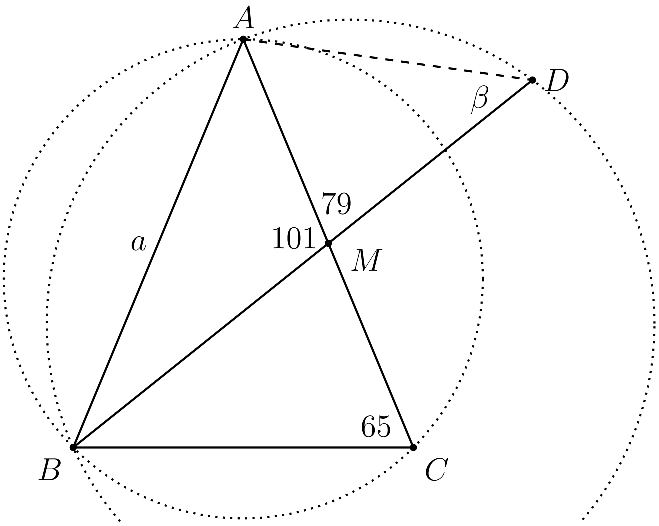
נחפש משולש שעליו אפשר להפעיל את חוק הסינוסים. נתון ש־BM הוא תיכון ל־AC. נסמן את AB, AM עם הנעלם a, ונפעיל את משפט הסינוים על $\triangle ABM$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{a/2}{\sin(130-\alpha)}\\
\sin\alpha &= 2\sin(130-\alpha)\\
&= 2\sin 130\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos 130
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1.53\cos\alpha + 1.29\sin\alpha \\
\tan\alpha &= \frac{-1.53}{0.29} \\
\alpha &= -79.27^\circ = 100.73^\circ \approx 101^\circ\,.
\end{aligned}
$$

בהמשך נעבוד עם קירובים למעלה שלמה.

סעיף ב



חישבנו $\angle AMD = 79^\circ$ בסעיף הקודם. נצטרך לחשב אחת מ-$\angle MAD, \angle ADM$, והזווית השלישית תתקבל מסכום הזוויות במשולש. מהתרשים אנו רואים שהצלע AB מול הזווית $\beta = \angle ADM$ הוא באורך a, ו-AB הוא גם צלע מול $\angle AMB = 101$. לפי חוק הסינוסים ב-$\angle ACB$, $\angle ADB$:

$$
\begin{aligned}
2R_{ABC} &= \frac{a}{\sin 65} = 2\cdot 10 \\
a &= 18.126 \\
2R_{ABD} &= \frac{a}{\sin\beta} = \frac{18.126}{\sin\beta} = 2\cdot 14 \\
\beta &= 40.34\,.
\end{aligned}
$$

הזוויות של $\triangle AMD$ הן (בקירוב למעלה שלמה) $79^\circ, 40^\circ, 61^\circ$.

5.15 חורף תשע"ד

במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך

את הצלעות BC ו־ BA בנקודות E ו־ D בהתאמה (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

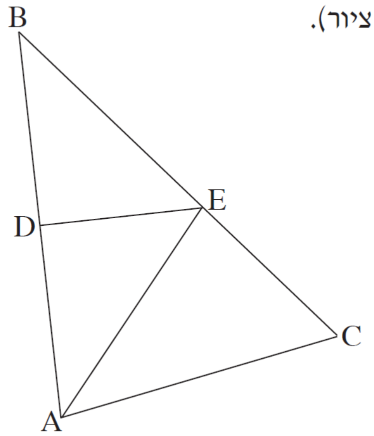
א. (1) הבע באמצעות α ו־ β את $\sphericalangle EAC$.

(2) הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

נתון גם: AE חוצה־זווית BAC ,

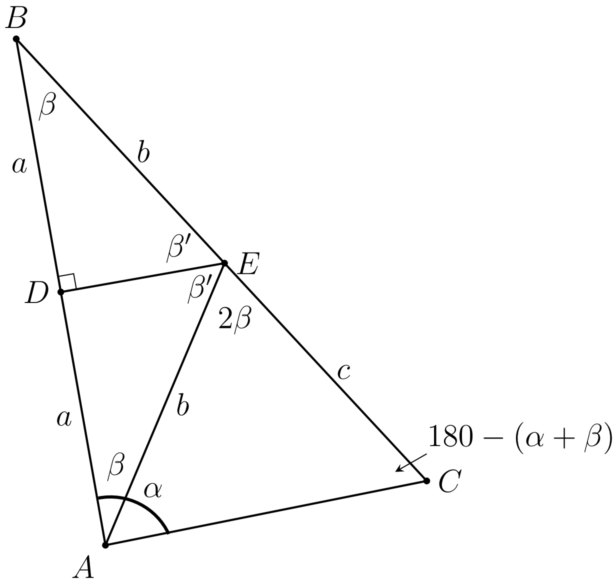
$\beta = 40^o$, $AC = 10$ ס"מ .

ב. חשב את הרדיוס של המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC .



סעיף א

(1) נתון ש־DE הוא האנך האמצעי ל־AB, ולכן $\triangle AED \cong BED$ לפי צ.ז.צ. נסמן את שאר הזוויות לפי זוויות משלימות וסכום זוויות המשולש, כאשר קיצרנו $\beta' = 90 - \beta$. התשובה היא $\angle EAC = \alpha - \beta$.



(2) נסמן $BE = b$,$EC = c$. השאלה מבקשת את היחס $\frac{c}{b}$. מהתרשים נראה ש־$\angle BAC = \alpha = 90$ ונוכל להשתמש במשפט תאלס, אבל אי אפשר להסתמך על התרשמות מהתרשים. הראנו ש־$\triangle AED \cong BED$, כך ש־$AE = BE = b$, ונוכל להשתמש במשפט הסינוסים ב־$\triangle AEC$:

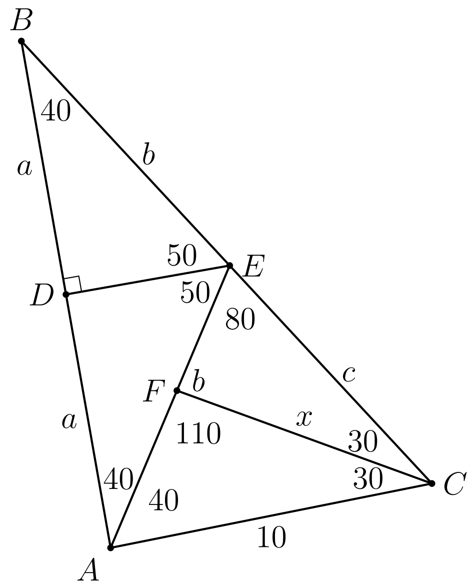
$$\frac{c}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{b}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

סעיף ב

המשפט הרלוונטי הוא 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש". נתון חוצה זווית AE ב־A. נבנה חוצה זוית שני. ננסה ב־C כי ידוע $AC = 10$ ונוכל להשתמש במשפט הסינוסים ב־$\triangle ACF$, כאשר F היא נקודת החיתוך עם חוצה הזוויות AE, ולכן היא המרכז של המעגל החסום.

נתון ש־$\beta = 40$ וזה מאפשר לנו להשלים זוויות בתרשים:



לפי משפט הסינוסים:

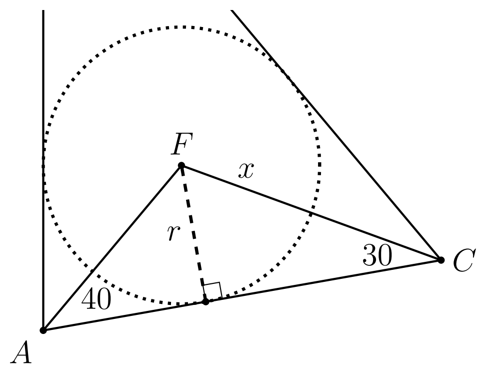
$$\frac{x}{\sin 40} = \frac{10}{\sin 110}$$

$$x = 6.84\,.$$

לא לעצור כאן! השאלה מבקשת את הרדיוס של המעגל החסום ולא המרחק אל מרכז המעגל.

נוריד אנך מ־F לצלע AC ולחשב: $r = x\sin 30 = 3.42$.

כדי להראות את המעגל החסום, ציירתי תרשים חדש עם ערכי זוויות מדוייקים:



5.16 המלצות

- חשוב לצייר תרשימים **ברורים וגדולים** עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המצטבר על הזוויות והצלעות ויש לדאוג שיהיה מספיק מקום.
- כאשר לשאלה יש מספר סעיפים כדאי לצייר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.
- אני מעדיף לסמן זוויות עם אותיות יווניות כגון α, ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה $\angle ABC$, כי קשה יותר לעקוב אחר הנקודות המגדירות את הזווית.
- השלימו זוויות ככל האפשר תוך שימוש בסכום הזוויות במשולש, ובזוויות משלימות. כדי להקל על החישובים אני משתמש בנעלמים נוספים כדי לקצר ביטויים, למשל, $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$.
- שימו לב שאין עקביות בסימון A, B, C, D של הקודקודים של משולש או מרובע.
- בשאלות על טריגונומטריה בדרך כלל עדיף להשתמש בנוסחה לשטח משולש:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \,,$$

ולא בחישוב של מחצית מכפלת הבסיס והגובה.

- עבור מעגל חוסם, המשפט הרלוונטי הוא 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת , שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש". ניתן בקלות למצוא את רדיוס המעגל מחוק הסינוסים:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} \,.$$

- עבור מעגל חסום, המשפט הרלוונטי הוא 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש". אין נוסחה עבור רדיוס המעגל אבל אפשר למצוא אותו כאורך הגובה מהמרכז לאחד הצלעות.
- טרפזים מאוד אהובים על ידי כותבי הבחינות. שננו משפטים 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל־180" ו־57 "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות".
- שימו לב שהמרכז המעגל החוסם לא חופף את מרכז המעגל החסום אלא במקרים מיוחדים כגון משולש שווה־צלעות וריבוע.
- לעיתים קרובות נשתמש בזהויות $\sin\theta = \sin(180-\theta)$ ו־$\sin(90-\theta) = \cos\theta$. ראו נספח ג'.
- לעתים קרובות התשובה לשאלה תהיה ערך ממשי לזווית או אורך. אני מעדיף להישאר עם נעלמים כל עוד הדבר אפשרי ורק בסוף להשתמש במחשבון כדי לחשב ערכים.

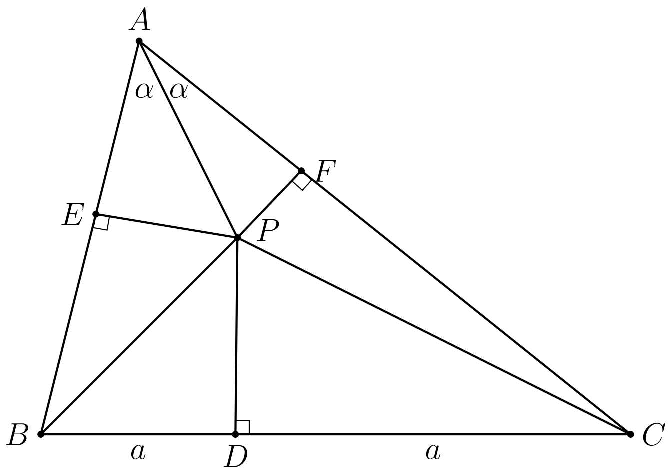
נספח א' אין לסמוך על איורים

הנה הוכחה "נכונה" **שכל** משולש שווה שוקיים!

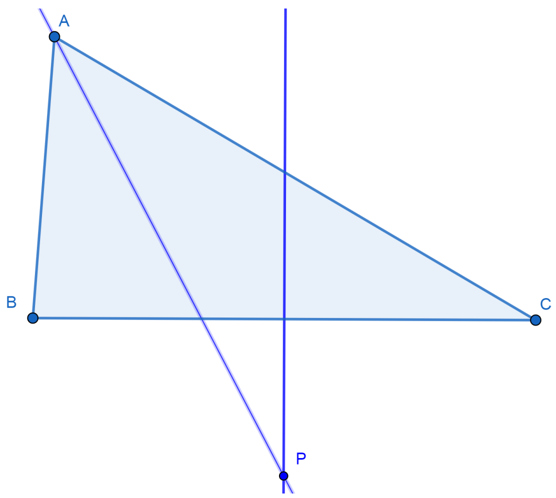
נתון משולש שרירותי ABC, תהי P נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle BAC$ לבין האנך האמצעי של BC. סימנו ב־D, E, F את נקודות החיתוך של האנחים מ־P לצלעות BC, AB, AC. $\triangle APF \cong \triangle APE$ כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות α וצלע AP משותף.

$\triangle DPC \cong \triangle DPB$ לפי צ.ז.צ. כי PD הוא צלע משותף, ו־$BD = DC = a$ כי PD הוא האנך האמצעי ל־BC. $\triangle FPC \cong \triangle EPB$, כי $EP = PF$ לפי החפיפה הראשונה, ו־$PB = PC$ לפי החפיפה השנייה. נחבר את השוויונות ונקבל ש־$\triangle ABC$ שווה שוקיים:

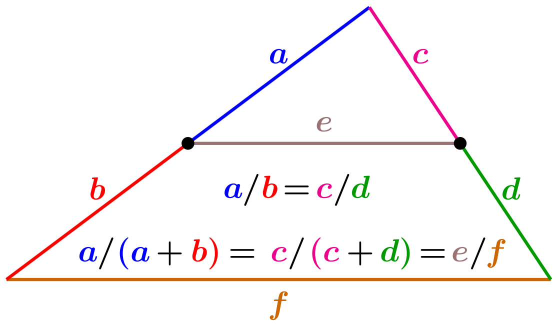
$$AB = AE + EB = AF + FC = AC\,.$$

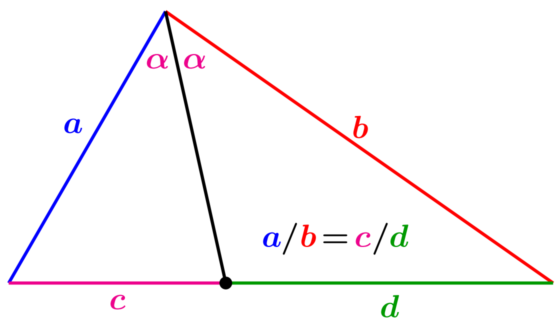


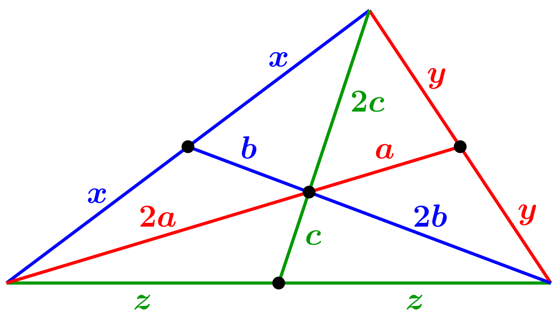
הבעיה בהוכחה היא שהאיור אינו נכון כי הנקודה P נמצאות **מחוץ** למשולש:

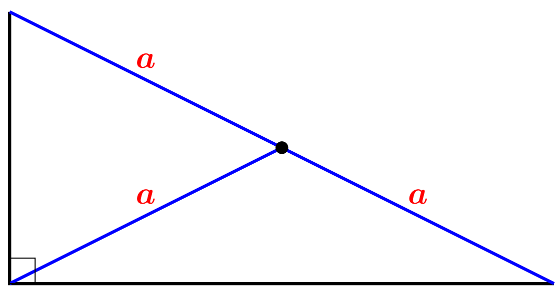


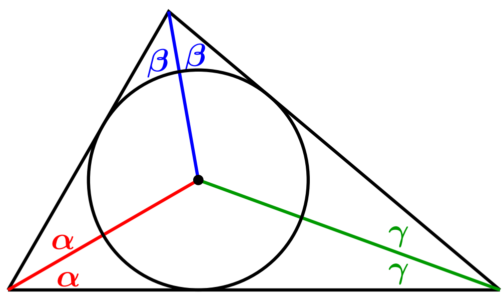
נספח ב' ייצוג גרפי של משפטים בגיאומטריה

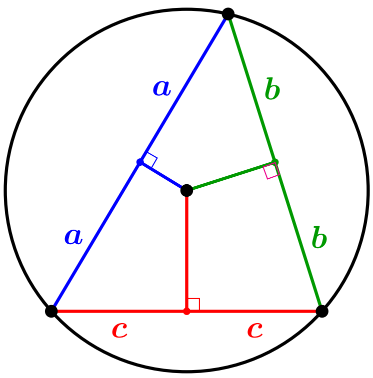


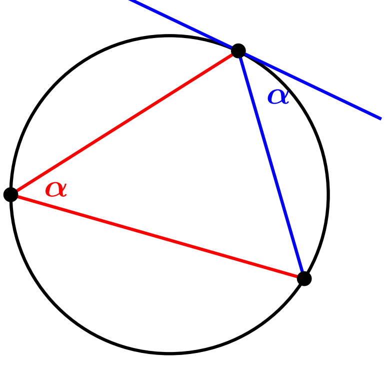


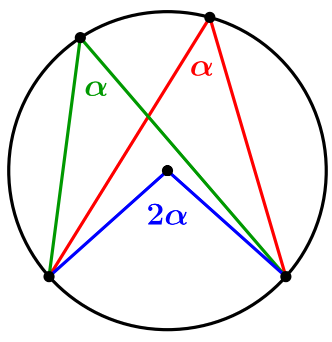


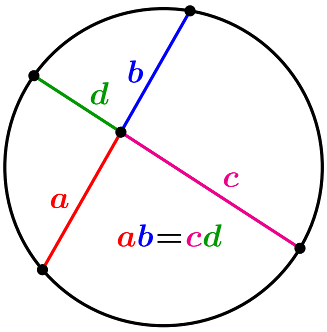




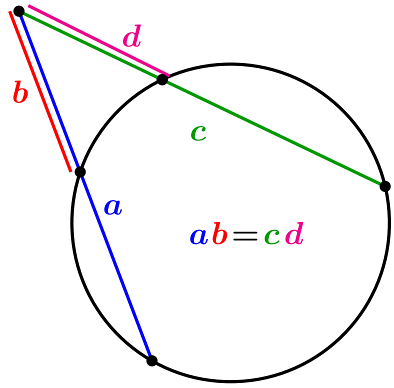




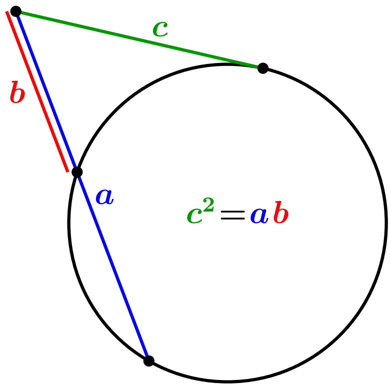




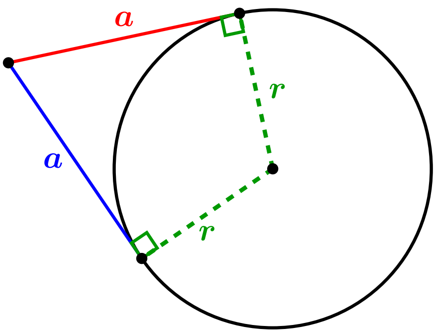
b
d
c
a
ab=cd



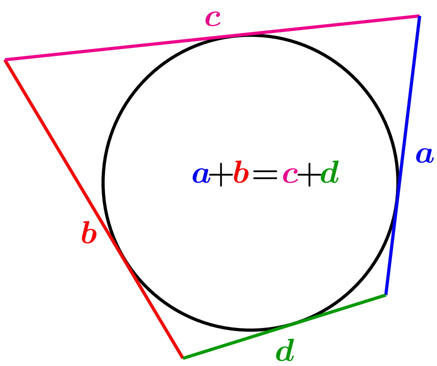
d
b
c
a
ab=cd



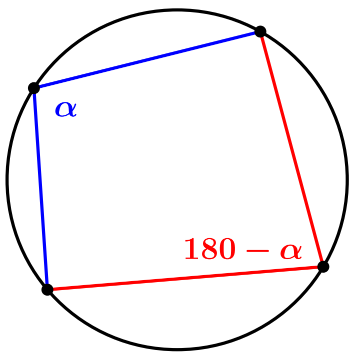
c
b
a
c²=ab



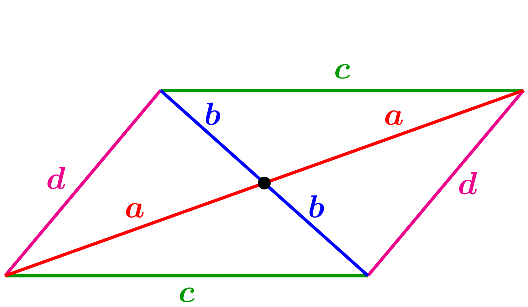
a
r
a
r



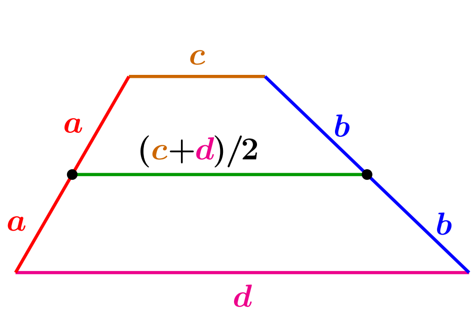
c
a
a+b=c+d
b
d



α
180 − α



c
b
a
d
a
b
d
c

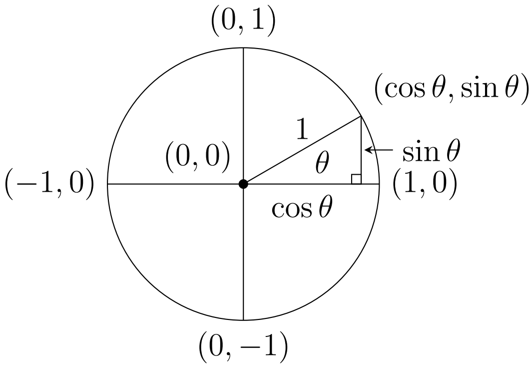


c
a
b
(c+d)/2
a
b
d

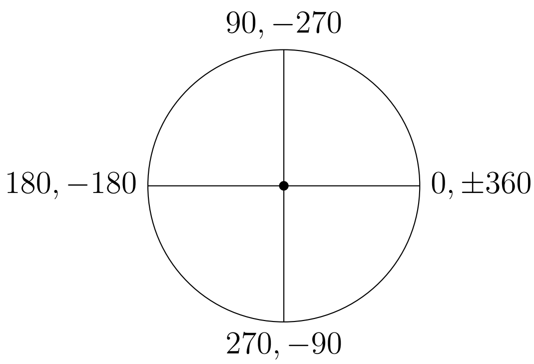
נספח ג' מעגל היחידה

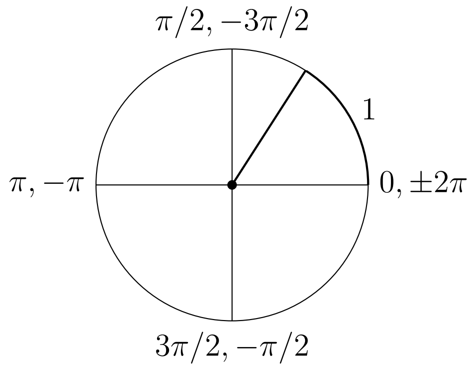
ג'.1 רביעים של מעגל היחידה

מעגל שהרדיוס שלו 1 נקרא **מעגל היחידה**.



הצירים את מעגל היחידה באופן טבעי לארבעה **רבעים**. זוויות נמדדות **מעלות** בין 0° ל־360°, כאשר הכיוון החיובי הוא נגד כיוון השעון. יחידה אחרת לזווית היא ה־**רדיאן**. רדיאן אחד הוא הזווית כולאת קשת על היקף המעגל שאורכו שווה לרדיוס. במעגל היחידה הרדיוס הוא 1 ולכן אורך ההיקף הוא 2π. כאשר קרן מסתובבת לאורך כל ההיקף (נגד כיוון השעון) היא עוברת מזווית 0 רדיאנים לזווית 2π רדיאנים. רדיאן אחד שווה בערך 57.3 מעלות.



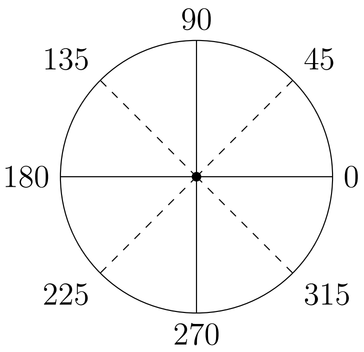


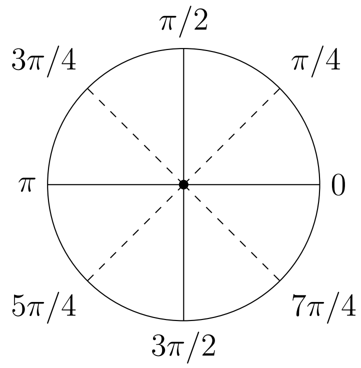
מהחיתוכים של הצירים עם מעגל היחידה נקבל את ערכי הסינוס והקוסינוס של הזוויות:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
90	$\pi/2$	1	0
180	π	0	-1
270	$3\pi/2$	-1	0

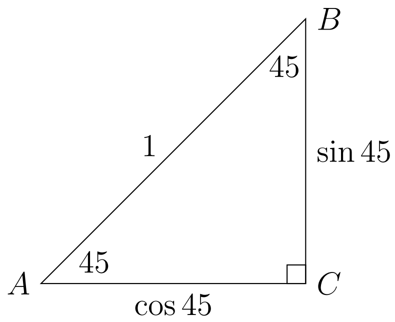
ג'.2 חלוקת מעגל היחידה ל 8 קטעים

תחילה נחלק כל רביע בחצי ונקבל 8 קטעים. הזווית של כל קטע הוא 45° או $\pi/4$ רדיאנים:





במשולש $\triangle ABC$ אם הזווית $\angle BAC$ הוא 45°, הזווית הנגדית $\angle ABC$ חייבת להיות גם היא 45° כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה 180°. המשולש שווי־שוקיים כך שערכי הסינוס והקוסינוס שווים.



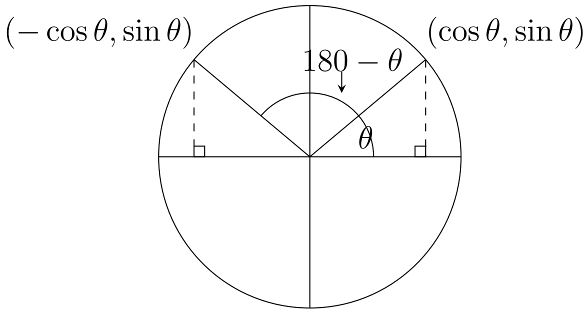
ממשפט פיתגורס:

$$
\begin{aligned}
\sin^2 45 + \cos^2 45 &= 1 \\
2\sin^2 45 &= 1 \\
\sin 45 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos 45 &= \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

ג'.3 סינוס וקוסינוס של זוויות הגדולות מ־90°

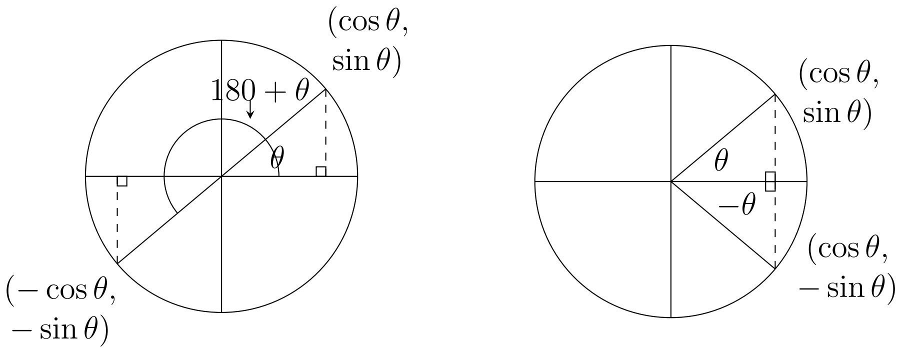
עכשיו שאנו יודעים את ערכי הסינוס והקוסינוס של 45°, נוכל לשאול על הזוויות הסימטריות 135°, 225°, 315°. בעזרת חברינו מעגל היחידה, נמצא מיד את ערכי הסינוס והקוסינוס שלהן.

תחילה נחשב את הערכים עבור זווית שרירותית θ ברביע הראשון. היטלי הקרניים על הצירים x, y שווים כך שיש רק לשנות את הסימנים. ברביע השני:



$$
\begin{aligned}
\cos 135 &= \cos(180-45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sin 135 &= \sin(180-45) = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

נסתכל על הרביע השלישי והרביע הרביעי:



עבור הרביע השליש:

$$
\begin{aligned}
\cos 225 &= \cos(180+45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sin 225 &= \sin(180+45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

עבור הרבע הרביעי, נוח להשתמש בזווית השלילית $-\theta$ במקום הזווית החיובית $360-\theta$:

$$
\cos 315 = \cos(-45) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}
$$
$$
\sin 315 = \sin(-45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.
$$

נסכם את הערכים בטבלה:

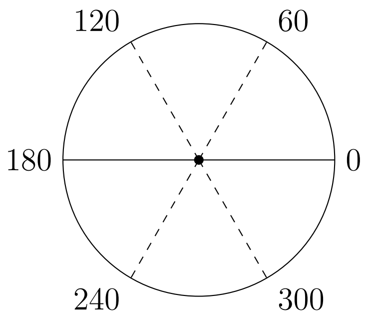
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
θ	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$180-\theta$	$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$
$180+\theta$	$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$
$-\theta$	θ	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

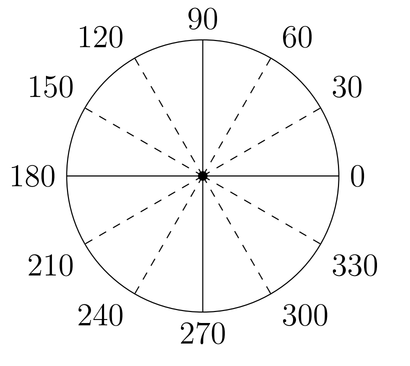
ועבור 45°:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

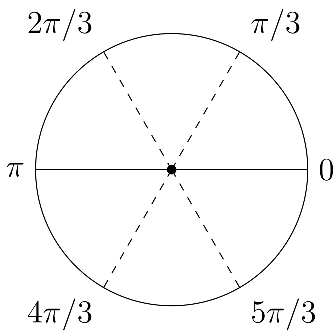
4.ג' הסינוס והקוסינוס של 30° ו 60°

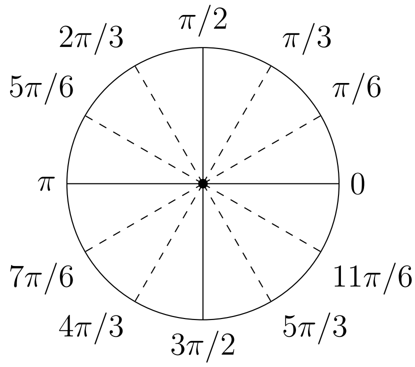
את מעגל היחידה ניתן לחלק ל־6 קטעים של 60° או ל־12 קטעים של 30°:



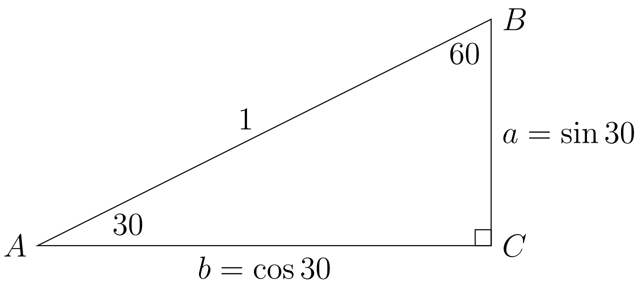


ברדיאנים:

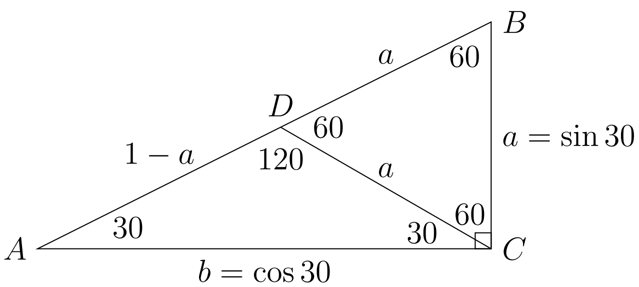




נחשב תחילה את הסינוס של $30°$. במשולש ישר־זווית:



צייר קו מ־C אל היתר כך שהזווית עם הצלע AC היא $30°$:



מעובדות על זוויות במשולש השלמנו בציור את שאר הזוויות. המשולש $\triangle BCD$ שווי־צלעות ואורך כל צלע הוא $a = \sin 30$. בנוסף, $\triangle ACD$ שווי־שוקיים כך ש־$a = 1 - a$ (זכור שהמשולש נמצא במעגל היחידה ואורך היתר הוא 1). מכאן:

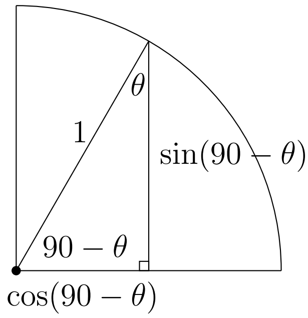
$$\sin a = a = 1 - a = \frac{1}{2}\,.$$

מהנוסחה $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ מתקבל ערך הקוסינוס:

$$\cos 30 = \sqrt{1 - \sin^2 30} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

ג'.5 סינוס וקוסינוס של $(90-\theta)$

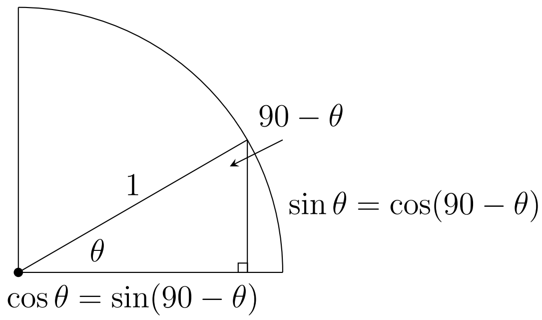
נפנה עכשיו לחישוב של סינוס וקוסינוס של 60°. מ־ $90-30=60$, את הקשר בין 60° ו־ 30° ניתן לראות מהזוויות של $90-\theta$ במעגל היחידה:



הזווית בנקודה שהמשולש נושק למעגל היחידה היא θ, כך שהפונקציות הטריגונומטריות של $90-\theta$ מתקבלות מאלו של θ על ידי החלפת הצלעות "נגדי" ו־"צדדי" בהגדרות:

$$\begin{aligned}\cos(90-\theta) &= \sin\theta\\ \sin(90-\theta) &= \cos\theta\,.\end{aligned}$$

דרך אחרת לראות את הקשר היא לשים לב שהמשולש חופף את המשולש לחשב $\sin\theta$ ו־ $\cos\theta$:



מכאן:

$$\begin{aligned}\cos 60 &= \cos(90-30) = \sin 30 = \frac{1}{2}\\ \sin 60 &= \sin(90-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של כפולות של $30°$, $60°$ מתקבלים ממעגל היחידה כפי שראינו:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
180	π	0	-1
210	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
240	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
270	$3\pi/2$	-1	0
300	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
330	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$