בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

מסמך זה מציג את התובנה של Gauss שניתן לבנות **heptadecagon**, מצולע משוכלל עם 17 צלעות באמצעות סרגל ומחוגה. ההצגה מבוססת על [1] אבל מכיל חישובים מפורטים של הפיתוח של הנוסחה של Gauss. מוצגת גם בנייה של ממש לפי [2], שוב עם חישובים מפורטים.

1 בנייה של מצולעים משוכללים

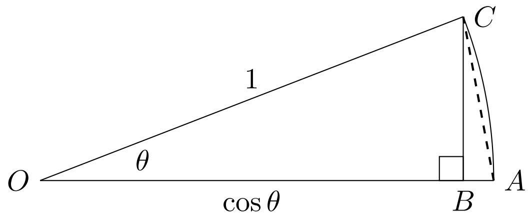
היסטוריה היוונים ידעו איך לבנות עם סרגל ומחוגה מצולעים משוכללים מסויים: משולש, ריבוע, מחומש ומספר מצולעים שמספר הצלעות שלהם הוא מכפלה שלהם, כגון מצולע משוכלל עם 15 צלעות. כמובן, בהינתן מצולע משוכלל עם n צלעות, קל לבנות מצולע עם $2n$ צלעות על ידי בניית חוצי הצלעות.

לא היית התקדמות במשך אלפיים שנה עד שבשנת 1796, קצת לפני יום הולדתו ה־19, Carl Friedrich Gauss התעורר בוקר אחד ולאחר "מחשבה מרוכזת" מצא דרך לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות. הישג זה עודד אותו להיות מתמטיקאי.

הבנייה של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היתה אבן דרך למשפט Gauss-Wantzel: מצולע משוכלל עם n צלעות ניתן לבנייה עם סרגל ומחוגה אם ורק אם n הוא מכפלה של חזקה של 2 ואפס או יותר מספרי Fermat ראשון **שונים** $2^{2^k}+1$. מספרי Fermat ראשונים ידועים הם $F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537$. היוונים ידעו לבנות מצולעים משוכללים עם 3 ו־5 צלעות. Gauss הראה שניתן לבנות מצולע עם 17 צלעות. מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי Magnus Georg Paucker ב־1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב־1832. ב־1894 Johann Gustav Hermes טען שבנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו נשמר באוניברסיטת Göttigen, במקרה שתרצו לבדוק אותו.

הקוסינוס של הזווית המרכזית כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע קו באורך $\cos\theta$, כאשר θ הוא הזווית המרכזית במעגל היחידה subtended by מיתר שהוא צלע של המצולע (איור 1). נתון קטע הקו $\overline{OB}=\cos\theta$, בנו אנך ב־B וסמן את החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב־C. אזי $\overline{OC}=1$ ו־$\cos\theta=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\cos\theta$, כך ש־$\theta=\cos^{-1}(\cos\theta)$. המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע.

פעולות חשבוניות שניתנות ליישם באמצעות בנייה נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ־1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות חיבור, חיסור, כפל, חילוק והוצאת שורש ריבועי.

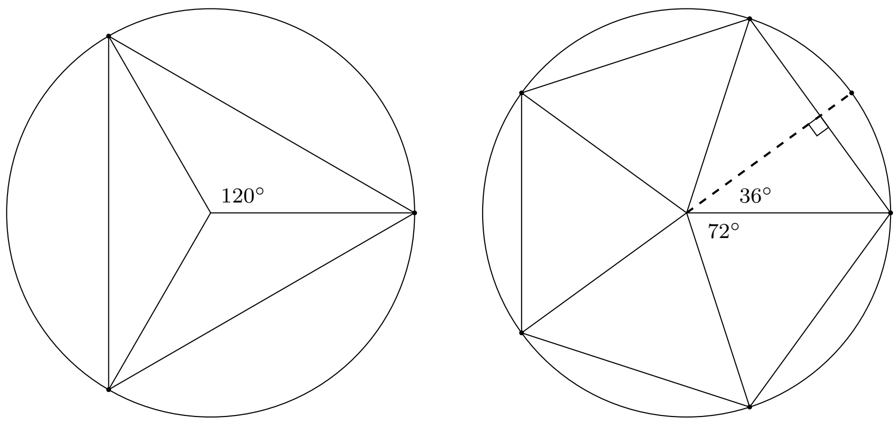


איור 1: בניית צלע מהקוסינו של הזווית מרכזית שהוא שכולא אותו

הזווית המרכזית של משולש שווה־צלעות היא $360^\circ/3 = 120^\circ$ (איור 2, שמאל) וניתן לחשב את הקוסינוס מהנוסחה לקוסינוס של שתי זוויות:

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

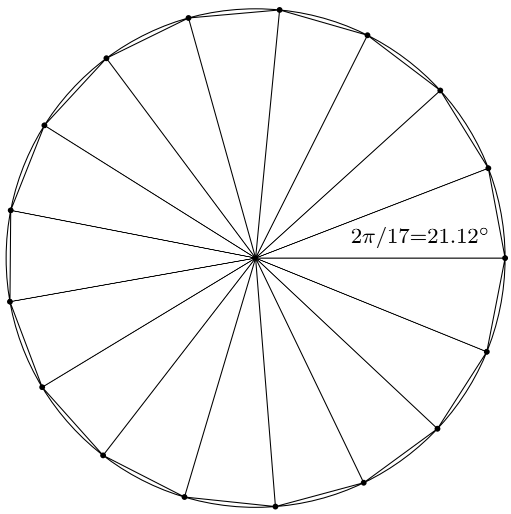
ברור ש־$-\frac{1}{2}$, מספר רציונלי, ניתן לבנייה. הזווית המרכזית של מחומש משוכלל היא $360^\circ/5 = 72^\circ$



איור 2: שולש שווה־צלעות (שמאל), מחומש משוכלל (ימין).

(איור 2, ימין). ניתן לחשב את $\cos 36^\circ$ מ־$\cos 90^\circ = \cos(72^\circ + 18^\circ)$, אבל החישובים מעט מייגעים (ראו [6]). ניתן לחשב את $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ על ידי שימוש בפעולות $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ כך שהערך ניתן לבייה. לאחר שבונים את הזווית 36° קל לבנות מחומש משוכלל על ידי הורדת אנך לרדיוס ב־36°. האנך יחתוך את המעגל ב־-36° וקטע הקו שנבנה הוא צלע של המחומש.

איור 3 מראה מצולע משוכלל עם 17 צלעות החסום על ידי מעגל היחידה. הזווית המרכזית היא $\dfrac{2\pi}{17}$ רדיאנים או $\dfrac{360^\circ}{17} \approx 21.12^\circ$. Gauss הראה ש:



איור 3: מצולע משוכלל עם 17 צלעות חסום על ידי מעגל היחידה

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.$$

ערך זה ניתן לחשב תוך שימוש בפעולות $\{+,-,\times,\div,\sqrt{}\}$ ולכן הוא ניתן לבנייה.

סעיפים 2, 3, 4 מביא את הרעיונות המתמטיים של Gauss, בתוספת החישובים המפורטים. ההוכחה מחייבת שימוש במספרים מרוכבים, אבל את רובה ניתן להבין ללא ידע במספרים מרוכבים אם אתם מוכנים לקבל מספר עובדות. העובדות הללו רשומות בקטעים מסומנים בטקסט. סעיף 5 מראה בנייה יעילה של $\cos\frac{2\pi}{17}$.

2 השורשים של אחד

המשפט הבסיס של אלגברה לכל פולינום במעלה n (עם מקדמים מרוכבים) בדיוק n שורשים (מרוכבים).

השורשים של אחד ומצולעים משוכללים נתבונן במשוואה $x^n-1=0$. שורש אחד הוא $x=1$. לפי המשפט הבסיסי של אלגברה קיימים $n-1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד ב־r כך ש־$r^n=1$. r נקרא **שורש של אחד**.

מספרים מרוכבים
השורש r הוא $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. לפי נוסחאת de Moivre:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n=\cos\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right)=1\,,$$

והוכחנו ש־r הוא שורש n של אחד.

נתבונן כעת ב־r^2. אנו רואים ש:

$$r^{2\cdot n} = (r^n)^2 = 1^2 = 1\,.$$

כך שהשורשים של $x^n - 1$, שורשי n של אחד, הם:

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\,.$$

אם n ראשוני (כגון 17) החזקות הללו שונות זו מזו, כך שהם כל שורשי ה־n של אחד.

הוכחה: שורש n של אחד נקרא פרימיטבי אם הוא אינו שורש m של אחד עבור $m < n$. אם n ראשוני, כל השורשים פרט ל־1 הם פרימיטיביים, וכל השורשים של אחד שונים זה מזה. אם לא, $r^i = r^j$ עבור $1 \leq i < j \leq n$ כלשהם, כך ש־$r^j/r^i = r^{j-i} = 1$ ו־r אינו פרימיטיבי.

מספרים מרוכבים

השורשים הם הקואורדינטות הפולאריות של הקודקודים של מצולע משוכלל, כאשר החלק הממשי הוא קואורדינטת ה־x והחלק הדמיוני הוא קואורדינטת ה־y.

עבור משולש שווה־צלעות השורשים הם $1 + i\cdot 0, \dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

עבור מחומש משוכלל הם:

$$1 + i\cdot 0, \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

הפולינום שמתקבל ממכפלת הגורמים הלינאריים נתבונן בפולינום המתקבל על ידי הכפלת כל הגורמים הלינאריים המתקבלים מהשורשים של אחד:

$$(x-1)(x-r)(x-r^2)\cdots(x-r^{n-1}) = x^n - 1\,.$$

נכפיל ונמצא שהמקדם של x^2 הוא:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}\,,$$

אבל, ברור שהמקדם שווה לאפס המקדם של x^2 ב־$x^n - 1$. נשמתמש בעובדה זו בעתיד בצורה:

$$r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = -1\,.$$

עבור מצולע משוכלל עם 17 צלעות המשוואה היא:

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1\,,$$

3 ההוכחה של Gauss שניתן לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות

Gauss ראה שאין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. במקום זה, נשים לב שהחזקות של r^3 נותנות את כל השורשים, אבל בסדר שונה:

$$r^1,\ r^{1\cdot3=3},\ r^{3\cdot3=9},\ r^{9\cdot3=27=10},\ r^{10\cdot3=30=13},\ r^{13\cdot3=39=5},\ r^{5\cdot3=15},\ r^{15\cdot3=45=11},$$
$$r^{11\cdot3=33=16},\ r^{16\cdot3=48=14},\ r^{14\cdot3=42=8},\ r^{8\cdot3=24=7},\ r^{7\cdot3=21=4},\ r^{4\cdot3=12},\ r^{12\cdot3=36=2},\ r^{2\cdot3=6}\,.$$

עבור $k < 17$, $r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k$, ולכן רשמנו את החזקות כשאריות לאחר חלוקה ב־17.

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל 16 השורשים בדיוק פעם אחת.

פסק זמן על משוואות ריבועיות נתבונן במשוואה הריבועית עם מקדם אחד ל־x^2:

$$y^2 + py + q = 0\,,$$

ונניח שהשורשים שלה הם: a, b. אזי:

$$(y-a)(y-b) = y^2 - (a+b)y + ab\,.$$

לכן $p = -(a+b)$ ו־$q = ab$, כך שאם **נתונים** $a+b$ ו־ab, נוכל לרשום את המשוואה הריבועית עבורה הם השורשים.[1]

כעת נשתמש בעובדה זו על משוואות ריבועיות כדי להראות שניתן לחשב את הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות באמצעות שורשים ריבועיים בלבד.

יהי a_0 החיבור של השורשים במקומות האי־זוגיים ברשימה לעיל:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי a_1 הסכום של השורשים במקומות הזוגיים ברשימה:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

לפי תוצאה שכבר מצאנו:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כעת עלינו לעבוד קשה מאוד כדי לחשב את a_0a_1! באיור 4 מופיע החישוב כאשר הערכים של r^ir^j רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. מתחת לכל שורש נמצא מספר המופעים שלו עד כה; בדקו שכל שורש מופיע בדיוק ארבע פעמיים כך שערכו של המכפלה הוא -4. מ־$a_0 + a_1 = -1$ ו־$a_0, a_1 = -4$, אנו יודעים ש־a_0, a_1 הם השורשים של המשוואה הריבועית:

$$y^2 + y - 4 = 0\,.$$

מהנוסחה לפתרון של משוואות ריבועיות מתקבל:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

[1] Po-Shen Lo השתמש בעובדה זו כדי לפתח שיטה מהירה למצוא את השורשים אל משוואה ריבועית. ראו [3] והמסמך על האתר שלי (הכתובת בכותרת לעיל, והקליקו על הקישור mathematics).

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \cdot \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
&\quad \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
&\quad \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
&\quad \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
&\quad \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^{10}} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
&\quad \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{2}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
&\quad \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
&\quad \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
&= -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 4: החישוב של a_0a_1

יהי b_0, b_1, b_2, b_3 הסכום של כל שורש רביעי החל מ־r^1, r^3, r^9, r^{10}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}
$$

בדקו ש־$b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$. נחשב את המכפלות (איורים 5, **??**).

$$
\begin{aligned}
b_0b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \cdot \\
&\quad (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
&= r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3 + \\
&\quad r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15} + \\
&\quad r^8 + r^{14} + r^7 + r^1 + \\
&\quad r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

איור 5: החישוב של b_0b_2

$$
\begin{aligned}
b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times \\
&\quad (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
&= r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9 + \\
&\quad r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11} + \\
&\quad r^7 + r^8 + r^4 + r^3 + \\
&\quad r^5 + r^6 + r^2 + r^1 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

איור 6: החישוב של $b_1 b_3$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\,,
\end{aligned}
$$

איור 7: החישוב של b_0

נסכם את החישובים: oT ezirammus eseht snoitatupmoc:

$$
\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0 b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1 b_3 &= -1\,,
\end{aligned}
$$

ולכן b_0, b_2 הם השורשים של:

$$y^2 - a_0 y - 1 = 0\,.$$

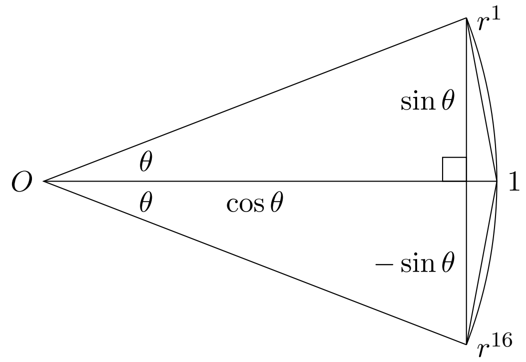
ו־b_1, b_3 הם השורשים של:

$$y^2 - a_1 y - 1 = 0\,.$$

מהנוסחה לפתרון משוואות ריבועיות ומהערכים שחישבנו קודם עבור a_0, a_1, מתקבלים השורשים b_0, b_1 (איור 7, 8).

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1-\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 8: החישוב של b_1



איור 9: בניית צלע מהזווית המרכזית שהוא כולא

לבסוף יהי, c_0, c_4 הסכום של כל שורש שמיני החל מ־r^1, r^{13}, בהתאמה:[2]

$$
\begin{aligned}
c_0 &= r^1 + r^{16} \\
c_4 &= r^{13} + r^4 \\
c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\
c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\
&= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1\,,
\end{aligned}
$$

כך ש־c_0, c_4 הם השורשים של:

$$y^2 - b_0 y + b_1 = 0$$

נראה שמספיק לחשב את השורש $c_0 = r^1 + r^{16}$ (איור 10).

[2] יש סכומים נוספים אבל שני אלה יספיקו

סיימנו כי:

$$c_0 = r_1 + r_{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) ,$$

כפי שניתן לראות באיור 9. קואורדינטות ה־y שוות עם סימנים הפוכים ולכן הסכום שלהם אפס. קואורדינטת ה-setanidrooc era lauqe tub htiw etisoppo sngis dna lecnac x נספר פעמיים.

הוכחנו שהקוסינוס שת הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות עם סרגל ומחוגה, כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) \;&=\; -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

מספרים מרוכבים

הקשר בין השורשים והקוסינוס ברור מהייצוג של השורשים כמספרים מרוכבים:

$$\begin{aligned}
c_0 \;&=\; r_1 + r_{16} \\
&=\; \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) \\
&=\; \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) .
\end{aligned}$$

4 פיתוח הנוסחה של Gauss

נפשט את הביטוי $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} \;&=\; -2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&=\; 2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad -4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&=\; 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} .
\end{aligned}$$

נזכור את הביטוי $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הביטוי הראשון, נרבע אותו ואז ניקח את השורש הריבועי:

$$\begin{aligned} 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2} \\ &= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})} \\ &= 2\sqrt{(18\cdot 34-4\cdot 17)+\sqrt{17}(2\cdot 34-2\cdot 18)} \\ &= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,. \end{aligned}$$

נציב את הביוטיים ונקבל את הנוסחה של Gauss:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\ & \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\ &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\ & \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \end{aligned}$$

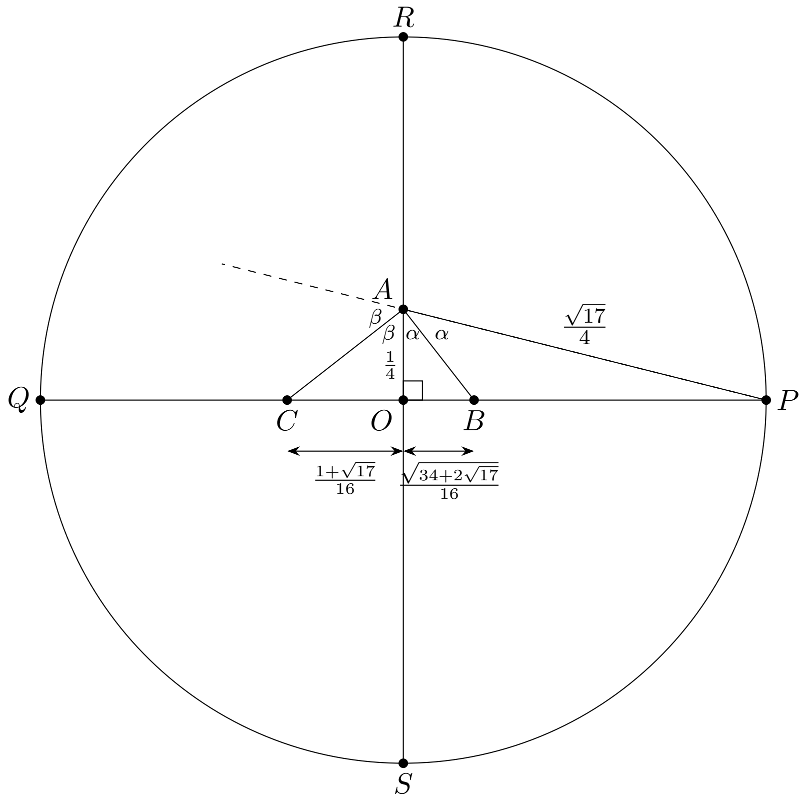
נחשב את הביטוי עם מחשבון ונקבל $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\approx 0.298$ ו־$\cos^{-1}0.298\approx 0.3699$ רדיאנים או 21.2926°. הערך הנכון הוא $\frac{2\pi}{17}\approx .3696$ רדיאנים או $\frac{360^\circ}{17}\approx 21.176^\circ$.

5 בנייה עם סרגל ומחוגה

מספר בניות נמצאות ב־[5]. כאן אביא את הבנייה מ־[2] כי הבנייה היא של $\cos\frac{2\pi}{17}$ שחישבנו. הבנייה משתמשת רק במשפט פיתגורס ובמשפט חוצי הזוויות [4].

נבנה מעגל יחידה שמרכזו O, המרכז של מערכת צירים, ויהי החיתוכים שלו עם הצירים P,Q,R,S.

נבנה A כך ש־$\overline{OA}=\frac{1}{4}\overline{OR}$. לפי משפט פיתגורס, $\overline{AP}=\sqrt{(1/4)^2+1^2}=\sqrt{17}/4$.



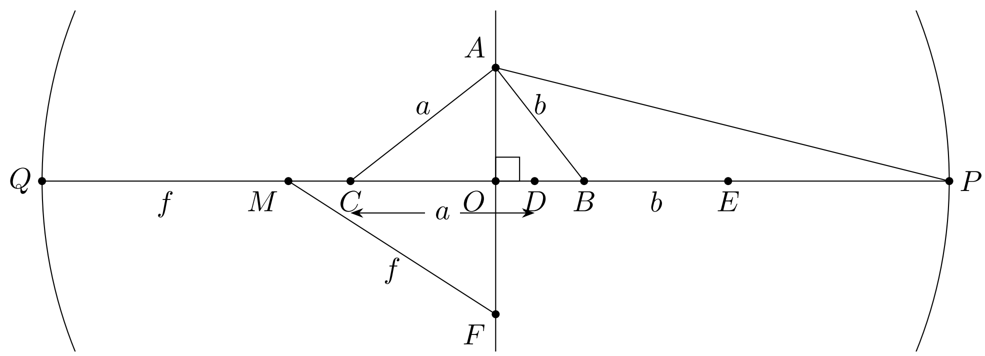
יהי B החיתוך של חוצה הזווית הפנימי של $\angle OAP$ וציר ה־x, ויהי C החיתוך החיצוני של חוצה הזווית החיצוני של $\angle OAP$ וציר ה־x. לפי משפט חוצה הזווית הפנימית:

$$\begin{aligned}
\frac{OB}{BP} &= \frac{AO}{AP}\\
\frac{OB}{1-OB} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
OB &= \frac{1}{1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1}{1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}}\\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16}\,.
\end{aligned}$$

ולפי משפט חוצה הזווית החיצוני:

$$\begin{aligned}
\frac{OC}{CP} &= \frac{AO}{AP}\\
\frac{OC}{1-OC} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
OC &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1}{-1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}\,.
\end{aligned}$$

בנו D על OP כך ש-$CD = CA$:



$$\begin{aligned}
CD = CA &= \sqrt{OA^2+OC^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

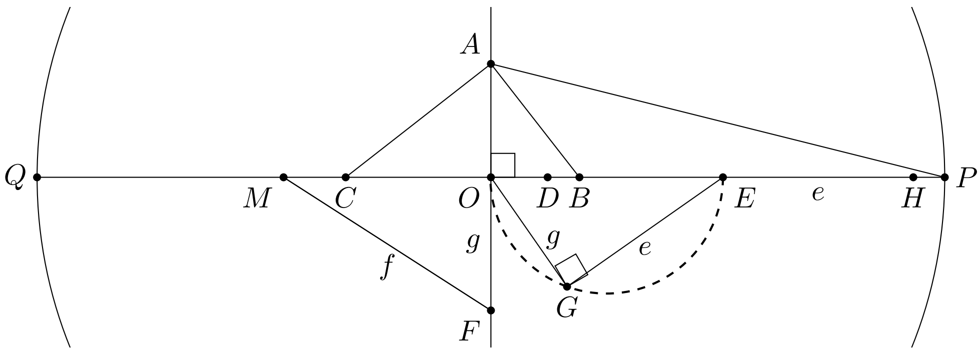
נבנה E על OP כך ש-$BE = BA$:

$$\begin{aligned}
BE = BA &= \sqrt{OA^2+OB^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

בנו M, sa eht tniopdim fo QD ובנו F על OS כך ש־$MF = MQ$:

$$
\begin{aligned}
MF = MQ &= \frac{1}{2}QD \\
&= \frac{1}{2}(QC + CD) = \frac{1}{2}((1 - OC) + CD) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) .
\end{aligned}
$$

בנו מעגל שקטרו OE. בנו מיתר $OG = OF$. שימו לב ש־$MO = 1 - MQ = 1 - MF$:



$$
\begin{aligned}
OG = OF &= \sqrt{MF^2 - MO^2} = \sqrt{MF^2 - (1 - MF)^2} \\
&= \sqrt{2MF - 1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) - 1} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned}
$$

יהי E החיתוך של המעגל עם OP; לפי ההגדרה, OE הוא קוטר של המעגל כך ש־$\angle OGE$ היא זווית

ישרה. בנו H על OP כך ש-$EH = EG$:

$$\begin{aligned}
EH = EG &= \sqrt{OE^2 - OG^2} = \sqrt{(OB+BE)^2 - OG^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17}) + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + (34-2\sqrt{17})\right) + \overline{\left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned}$$

נחשב את OE:

$$\begin{aligned}
OE = OB + BE &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}$$

לבסוף, $OH = OE + EH$ שהוא $\cos\frac{2\pi}{17}$ כפי שמופיע באיור 10.

References

[1] Jörg Bewersdorff. *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. American Mathematical Society, 2006.

[2] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette*, 67(442):290–292, 1983. `https://wwww.jstor.org/stable/3617271`.

[3] Po-Shen Lo. A different way to solve quadratic equations, 2019. `https://www.poshenloh.com/quadratic/`.

[4] Wikipedia contributors. Angle bisector theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Angle_bisector_theorem&oldid=984147660`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].

[5] Wikipedia contributors. Heptadecagon — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Heptadecagon&oldid=975964212`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].

[6] Wikipedia contributors. Pentagon — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pentagon&oldid=983136827`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0+\sqrt{b_0^2-4b_1}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2}+ \\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2-4\left[\frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2-16\left[(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})-} \\
&\quad \overline{\left[(-16-16\sqrt{17})+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 10: החישוב של c_0