תרשימים דו־ממדיים עבור בעיות תנועה והספק

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

27/05/2018

מבוא

אביטל אלבוים־כהן העלתה את האפשרות להשתמש בתרשימים דו־ממדיים לפתרון בעיות תנועה. מצאתי שהתרשימים מאוד עוזרים בזיהוי הקשרים בין קטעי התנועה ובכתיבת הנוסחאות. ניתן להיעזר בתרשימים דו־ממדיים גם בבעיות הספק שיש להן מבנה דומה לבעיות תנועה.

מסמך זה מכיל תרשימים ופתרונות של בעיות התנועה וההספק משאלוני 806 מ תשע"ד. תחילה מופיעות בעיות תנועה ואחר כך בעיות הספק.

הדגש הוא על התרשים וכתיבת הנוסחאות וקיצרתי בחישובים. לקורא שזמנו קצר, אני מציע לעיין בבחינה של תשע"ה קיץ מועד ב', שם לדעתי התרומה המרשימה ביותר של השיטה.

בתרשימים הציר האופקי הוא ציר הזמן והציר האנכי הוא ציר המרחק בבעיות תנועה וציר העבודה בבעיות הספק. היתרון של ייצוג זה הוא שמהירויות וההספקים מוצגים כשיפועים של הקווים. ככל שהמהירות או ההספק גבוה יותר, הקו תלול יותר.

לכל דמות (מכונית, סירה, צבע, וכדומה) נצייר קו עבור כל קטע בתנועה או בעבודה. בבעיות תנועה, יש לשים לב שבניגוד לתרשימים חד־ממדיים בהם אורך קו הוא מרחק הנסיעה, כאן מרחק הנסיעה הוא ההפרש בציר האנכי בין הנקודה ההתחלתית לנקודה הסופית.

התרשימים קלים מאוד לציור ומועילים גם אם קני המידה בכלל לא מדוייקים, כך שניתן להשתמש בהם כאשר פותרים בחינות.

כהשלמה למסמך זה אני ממליץ על המאמר "פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים" מאת אביטל אלבוים־כהן וג'ייסון קופר. על"ה גיליון 51, מרץ 2015, עמ' 14־19. הם מביאים פתרונות גיאומטריים עבור בעיות הספק.

בעיות תנועה

חורף תשע"ד

נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ־ A ל־ B .

רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר

כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.

באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A .

מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.

הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B .

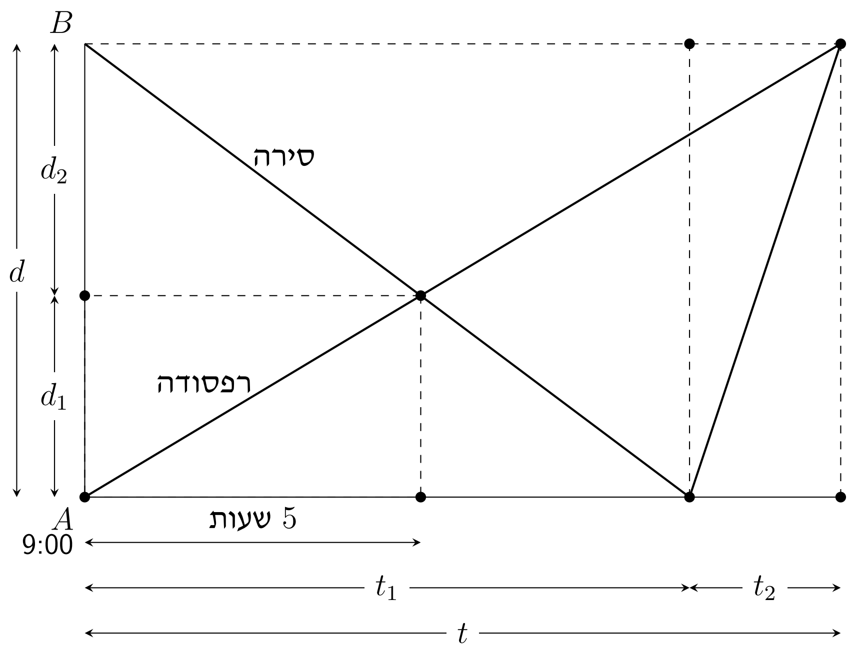
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.

נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.

האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.

מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

<u>הערה</u>: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



נסמן: d = מרחק בין שני הנמלים, t = זמן עד למפגש ב־ B, v = מהירות הזרם.
ניתן לחלק את הזמן t לשתי תקופות $t = t_1 + t_2$ לפי שני הקטעים בהם הפליגה הסירה במהירויות שונות. נכתוב משוואה המשווה את זמני ההפלגה עד למפגש ב־ B:

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{15 - v} + \frac{d}{15 + v}\,.$$

מפישוט המשוואה מתקבלת משוואה ריבועית ב־ v:

$$v^2 + 30v - 225 = 0$$

שהשורש החיובי שלה הוא $v = 6.21$.

את המרחק d בין הנמלים ניתן לחלק לשני קטעים, המרחק שהפליגה הסירה עד למפגש והמרחק שהפליגה הרפסודה עד למפגש $d = d_1 + d_2$. נכתוב משוואה המשווה את מרחק שני הקעטים למרחק בין הנמלים:

$$d = 5v + 5(15 - v)\,.$$

הפתרון הוא $d = 75$ (ללא תלות במהירות הזרם v).

את הזמן עד המפגש בנמל B אפשר לחשב לפי ההפלגה של הסירה או לפי ההפלגה של הרפסודה. כמובן שפשוט יותר לחשב עבור הקטע היחיד של הרפסודה:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{6.21} = 12.077\,.$$

לכן המפגש השני מתקיים לאחר השעה 09:00 בערב.

קיץ תשע"ד מועד א

משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B .

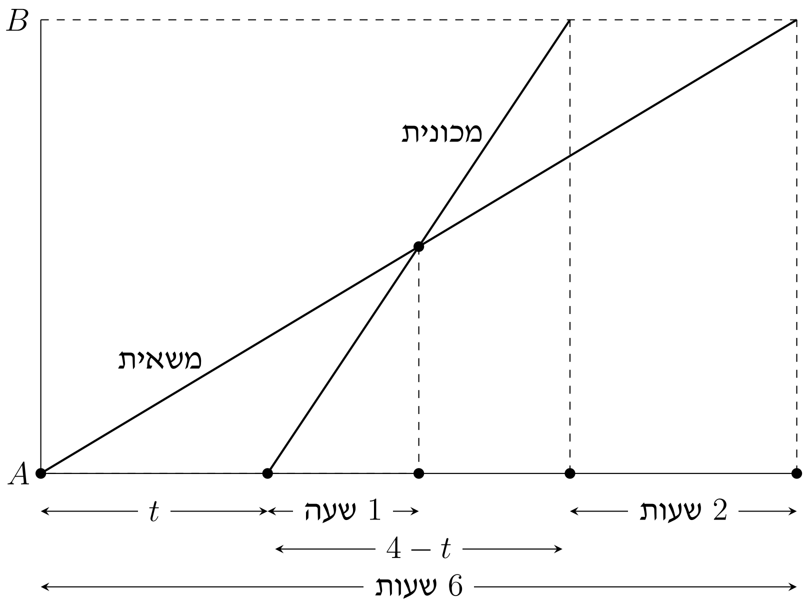
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A ,

והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.

המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.

המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.

מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).



נסמן: t = זמן יציאת המכונית, v_c = מהירות המכונית, v_m = מהירות המשאית.
נכתוב משוואות למרחקים שווים, מ־ A עד למפגש ומ־ A עד ל־ B:

$$\begin{aligned} v_m(t+1) &= v_c \cdot 1 \\ v_m \cdot 6 &= v_c(4-t)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות מתקבלת משוואה ריבועית ב־ t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

שיש לה שני פתרונות $t = 1$ שעה ו־ $t = 2$ שעות.

קיץ תשע"ד מועד ב

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

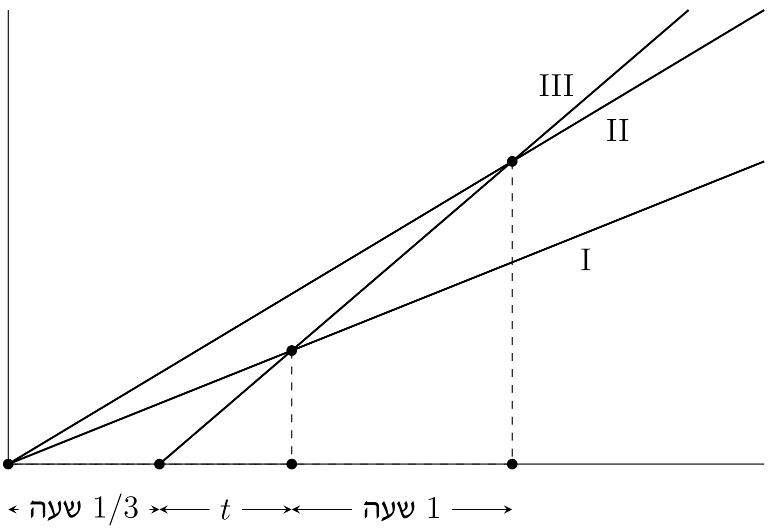
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.

רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.



נסמן: t = הזמן בין היציאה של III ועד למפגש שלו עם I, v = המהירות של III.
נתון: 6 = מהירות של I ו־ 7.5 = המהירות של II.
נכתוב את הנוסחאות למרחקים שווים, המרחק מהיציאה של I ועד המפגש שלו עם III, והמרחק מהיציאה של II ועד המפגש שלו עם III:

$$\begin{aligned} 6(t+1/3) &= vt \\ 7.5(1/3+t+1) &= v(t+1)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות מתקבלת משוואה ריבועית ב־ t:

$$1.5t^2+2t-2=0$$

שיש לה פתרון חיובי אחד $t=2/3$.

הזמן מהיציאה של III ועד המפגש שלו עם II הוא $t+1=5/3$ שעות.

קיץ תשע"ה מועד א

מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.

המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.

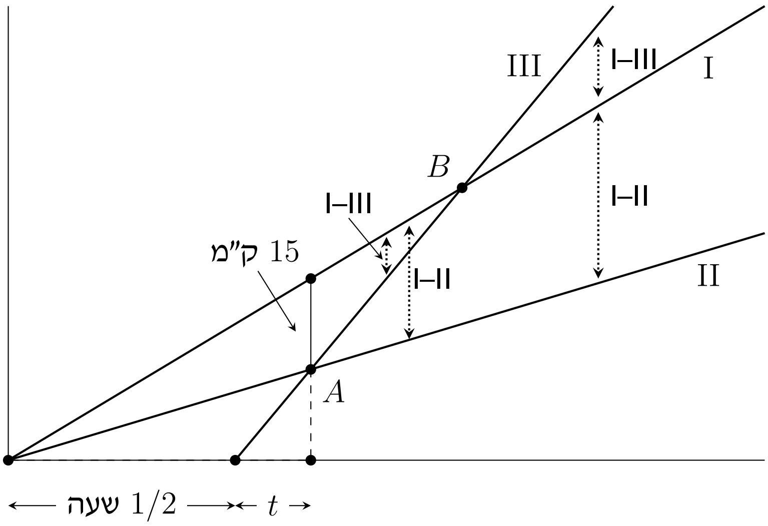
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.

ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.

המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.

א. מצא את המהירות של מכונית III.

ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.



נסמן t = הזמן בין היציאה של III ועד למפגש שלו עם II, v = המהירות של III.
נתון 50 = מהירות של I, 40 = המהירות של II.

סעיף א נכתוב את המשוואות למרחקים שווים, המרחק מהיציאה של II ועד למפגש שלו עם III, והמרחק מהיציאה של I ועד למפגש של II עם III ועוד 15 ק"מ:

$$\begin{aligned} 40(t+1/2) &= vt \\ 50(t+1/2) &= vt+15\,. \end{aligned}$$

מהמשוואות מתקבל $t=1$ ואח"כ $v=60$ קמ"ש.

סעיף ב: הוכחה מעיון בתרשים

נעיין בקווים מנוקדים בתרשים ונראה שהמרחקים לא יכולים שווים:

בנקודה A הרחקים שווים, אבל מנקודה זו ועד לנקודה B, המרחק I-II גדל והמרחק I-III קטן.

בנקודה B המרחק I-II חיובי והמרחק I-III שווה לאפס. מכאן והלאה, שני המרחקים גדלים באותו קצב כי הפרשי המהירויות שווים 10 קמ"ש.

סעיף ב: הוכחה בחישוב

נסמן $t_A =$ זמן מנקודה A, $t_B =$ זמן מנקודה B, $d_B =$ המרחק בין I ל־ II בנקודה B.

משמאל לנקודה B המרחקים שווים אם:

$$\begin{aligned} 15 + (v_1 - v_2)t_A &\stackrel{?}{=} 15 + (v_1 - v_3)t_A \\ 15 + (50 - 40)t_A &\stackrel{?}{=} 15 + (50 - 60)t_A\,, \end{aligned}$$

המביא לתנאי השקרי $10 = -10$.

מימין לנקודה B המרחקים שווים אם:

$$\begin{aligned} (v_3 - v_1)t_B &\stackrel{?}{=} d_B + (v_1 - v_2)t_B \\ (60 - 50)t_B &\stackrel{?}{=} d_B + (50 - 40)t_B\,. \end{aligned}$$

המשוואה נכונה רק אם $d_B = 0$ אבל אנחנו יודעים ש־ $d_B > 15$.

קיץ תשע"ה מועד ב

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו,

ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.

כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה,

ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.

מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו,

והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.

כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

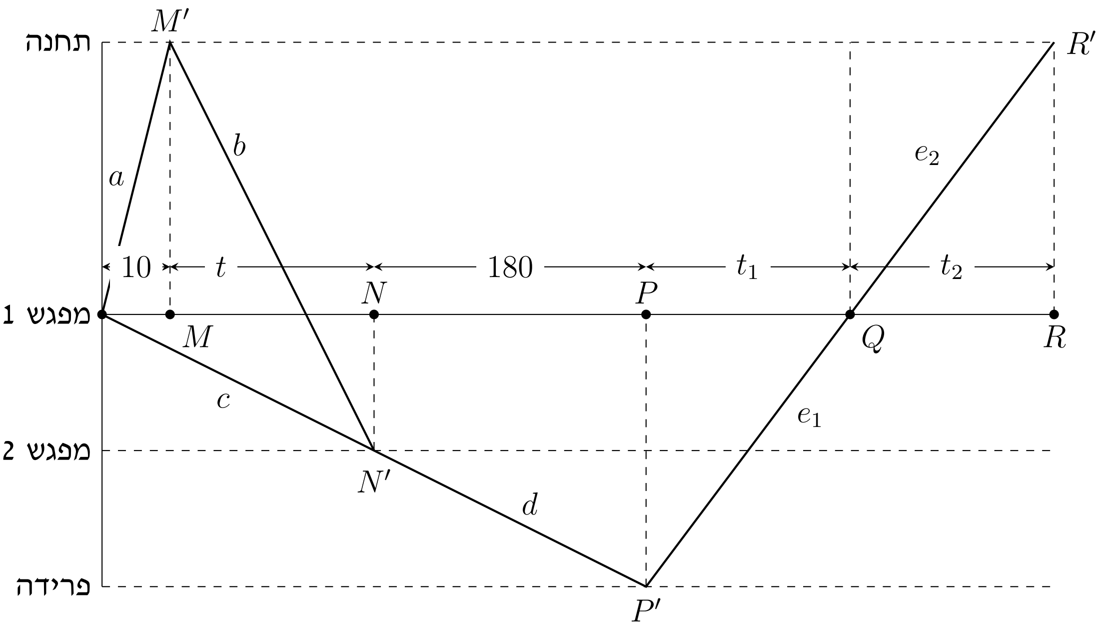
ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו

(בכיוון ההליכה שלה).

מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.

(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?



בתרשים סימנו את הקטעים:

a = יוסי נוסע באוטובוס

b = יוסי רץ לפגישה עם אמא

c = אמא הולכת עד למפגש עם יוסי

d = יוסי ואמא הולכים ביחד

$e_1 + e_2$ = יוסי רץ חזרה לתחנה

נסמן: t = הזמן שיוסי רץ מהתחנה כדי להשיג את אמא.

נסמן מהירויות: v_y = יוסי, v_a = אמא, v_b = אוטובוס.

נתון: $v_y = 2v_a$, $v_y = v_b/7$.

סעיף א NN' הוא המרחק ממפגש 1 למפגש 2. אמא הולכת לפי הקו c ולכן המרחק הוא $v_a(t+10)$. יוסי הולך לכיוון אחד לפי הקו a וחוזר לפי הקו b. **ההפרש** בין מרחקים יהיה שווה גם הוא ל־ NN'. נכתוב משוואה לשוויון המרחקים:

$$v_a(t+10) = v_y t - v_b 10.$$

לאחר הצבת יחסי המהירויות הנתונים:

$$\frac{v_y}{2}(t+10) = v_y t - 7v_y 10$$

נקבל $t = 150$ שניות.

סעיף ב הקו $e_1 + e_2$ מתאר את הריצה של יוסי בחזרה לתחנה. PP' הוא המרחק שאמא עברה בין מפגש 1 לבין נקודת הפרידה, וגם המרחק של e_1, הקטע הראשון של הריצה של יוסי בחזרה מנקודת הפרידה לכיוון התחנה. פרק הזמן שאמא הלכה בין מפגש 1 ועד נקודת הפרידה הוא $10 + 150 + 180 = 340$ שניות. יוסי רץ פי שניים מהר מאמא, ולכן את הדרך חזרה מנקודת הפרידה למפגש 1 הוא עובר ב $t_1 = 170$ שניות.

MM' הוא המרחק שהאוטובוס עבר ממפגש 1 ועד התחנה, והאוטובוס עובר מרחק זה ב 10 שניות. $RR' = MM'$ הוא גם המרחק שיוסי רץ בין מפגש 1 בחזרה לתחנה, אבל הוא רץ פי שבע לאט מהאוטובוס, ולכן את הדרך הוא עובר ב $t_2 = 70$ שניות.

נסכם ונקבל שיוסי רץ מנקודת הפרידה לתחנה ב $t_1 + t_2 = 240$ שניות.

חורף תשע"ו

רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.

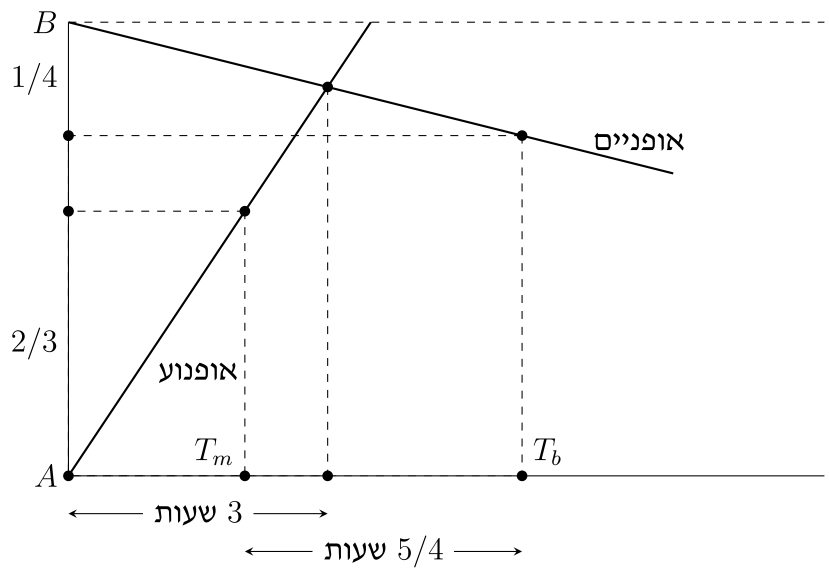
הם נפגשו כעבור 3 שעות.

רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב־ 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.

מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.



נסמן: v_b = מהירות אופניים, v_m = מהירות אופנוע, x = מרחק בין הערים.

סעיף א בשלוש שעות האופנוע והאופניים עוברים את כל המרחק בין הערים:

$$x = 3v_b + 3v_m\,.$$

זמן הנסיעה של האופניים A-T_b שווה לזמן הנסיעה של האופנוע A-T_m ועוד $5/4$ שעות:

$$\frac{x/4}{v_b} = \frac{2x/3}{v_m} + \frac{5}{4}\,.$$

נסמן את היחס בין המהירויות (התשובה הדרושה) $r = \frac{v_m}{v_b}$ ונקבל משוואה הריבועית:

$$3r^2 - 10r - 8 = 0\,.$$

השורש החיובי הוא $r = 4$.

סעיף ב ממשוואת המרחקים והיחס בין המהירויות נחשב:

$$x = 3v_b + 3v_m = 3 \cdot \frac{v_m}{r} + 3v_m = 3v_m \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{15}{4} v_m \, .$$

הזמן שהאופנוע עובר את המרחק x הוא $15/4$ שעות.

קיץ תשע"ו מועד א

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

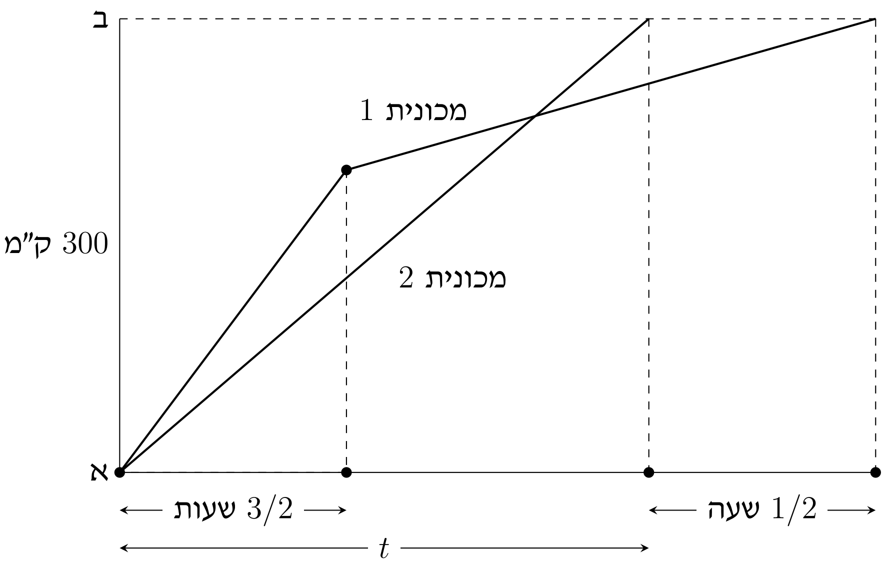
המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב־ 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ־ 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).



נסמן: v_1 = מהירות התחלתית של מכונית 1, v_2 = מהירות מכונית 2, t = זמן נסיעה של מכונית 2 מעיר א' עד לעיר ב'.
נתון: $v_1 = v_2 + 25$.

סעיף א נבתוב משוואות עבור המרחקים של שתי המכוניות:

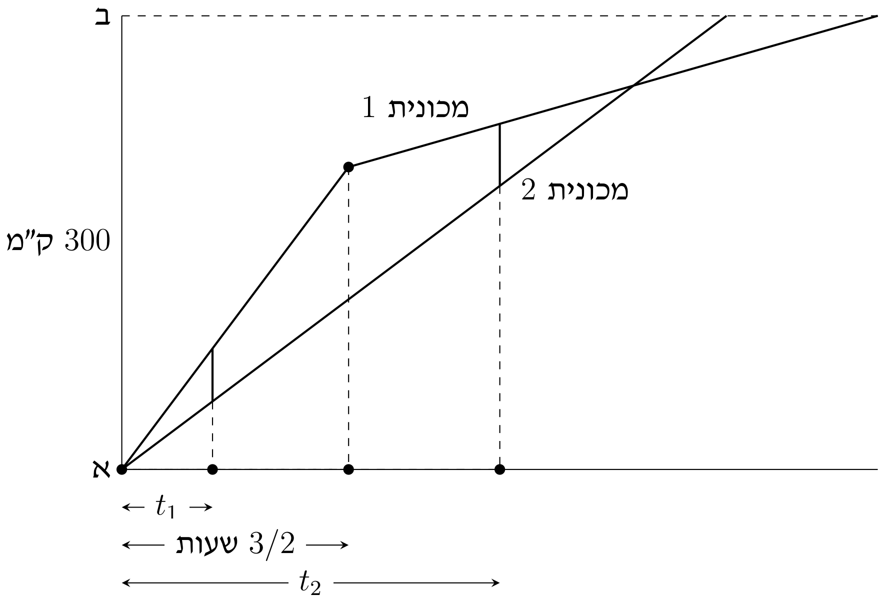
$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{v_1}{2}\left(\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) &= 300 \\ v_2 t &= 300\,. \end{aligned}$$

נציב ביטויים עבור v_1, t במשוואה הראשונה: $v_1 = v_2 + 25$, $t = 300/v_2$. נקבל משוואה ריבועית ב־ v_2:

$$v_2^2 - 125v_2 + 3750 = 0\,.$$

השורשים הם $50, 75$ ולפי השאלה $v_2 > 60$ כך שיש לבחור $v_2 = 75$ קמ"ש.

סעיף ב



הקווים האנכיים הכלואים בין הקווים של שתי המכוניות מסמנים מרחק של 12.5 ק"מ. קו אחד הוא לפני שינוי המהירות בזמן t_1 מתחילת הנסיעה וקו שני לאחר שינוי המהירות בזמן t_2 מתחילת הנסיעה.

בסעיף א' חישבנו $v_2 = 75$ ולכן $v_1 = v_2 + 25 = 100$.

נכתוב את המשוואות עבור הפרשי המרחקים:

$$\begin{aligned} 100t_1 - 75t_1 &= 12.5 \\ \left(100 \cdot \frac{3}{2} + 50\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right) - 75t_2 &= 12.5\,. \end{aligned}$$

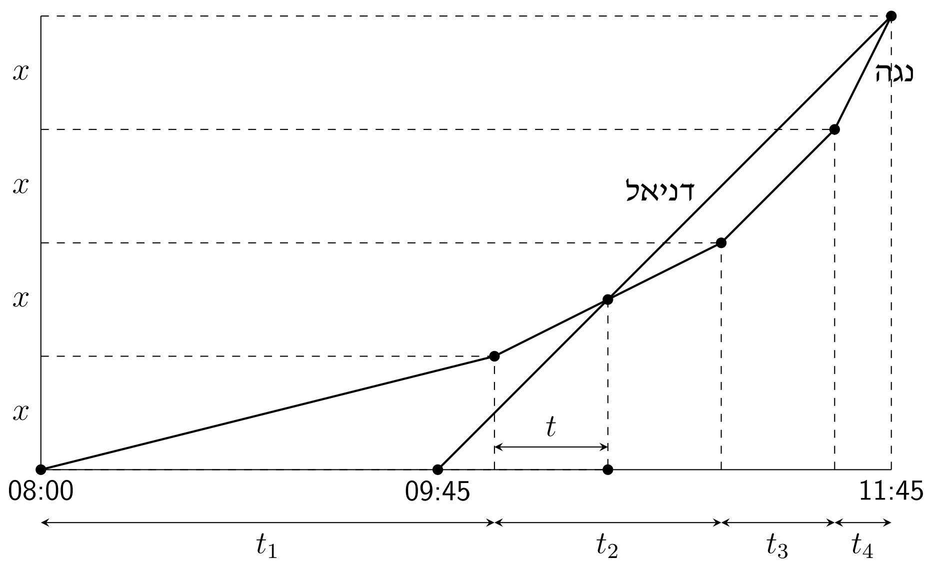
הפתרונות הם $1/2, 5/2$ שעות.

קיץ תשע"ז מועד א

1. נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.
בכל פעם, לאחר שעברה מִקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.
במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נֹגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול.
גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45.
באיזה מארבעת מִקְטָעֵי המסלול פגש דניאל את נֹגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?



נסמן: x = מרחק של מקטע, t_1, t_2, t_3, t_4 = זמני רכיבה של נגה במקטעים.
נתון: 40 = המהירות במקטע האחרון, לכן המהירויות של המקטעים האחרים הן $5, 10, 20$.

סעיף א נסכם את הזמנים של המקטעים:

$$\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{x}{40}\right)=\frac{15}{4}\,.$$

הפתרון הוא $x=10$ ולכן אורך המסלול הוא $4\cdot 10=40$ ק"מ.

סעיף ב המהירות של דניאל היא $40/2 = 20$ קמ"ש.

נגה עוברת 10 ק"מ בכל מקטע. מה המרחק שעובר דניאל עד סוף המקטע הראשון? $t_1 = 10/5 = 2$ כך שסוף המקטע הוא ב־ 10:00. דניאל רוכב רבע שעה מ־ 09:45 ועד 10:00 ולכן המרחק שהוא עובר הוא רק $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ ק"מ והמפגש לא התקיים במקטע הראשון.

מתי נגה מגיעה לסוף המקטע השני? $t_2 = 10/10 = 1$ כך שסוף המקטע הוא ב 11:00. בשעה ורבע בין 09:45 ל 11:00 דניאל רוכב $20 \cdot \frac{5}{4} = 25$ ק"מ, מרחק גדול מנגה, והמפגש מתקיים במקטע השני.

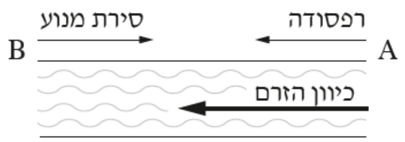
נסמן $t =$ הזמן בתוך מקטע 2 עד למפגש, ונכתוב משוואה למרחקים השווים של נגה ודניאל:

$$10 + 10t = 5 + 20t\,.$$

הפתרון הוא $t = 1/2$ ושעת המפגש היא 10:30.

קיץ תשע"ז מועד ב

1. העיירות A ו־ B נמצאות על גדת נהר הזורם
במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ־ A ל־ B .
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A .
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A
לכיוון העיירה B . הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.

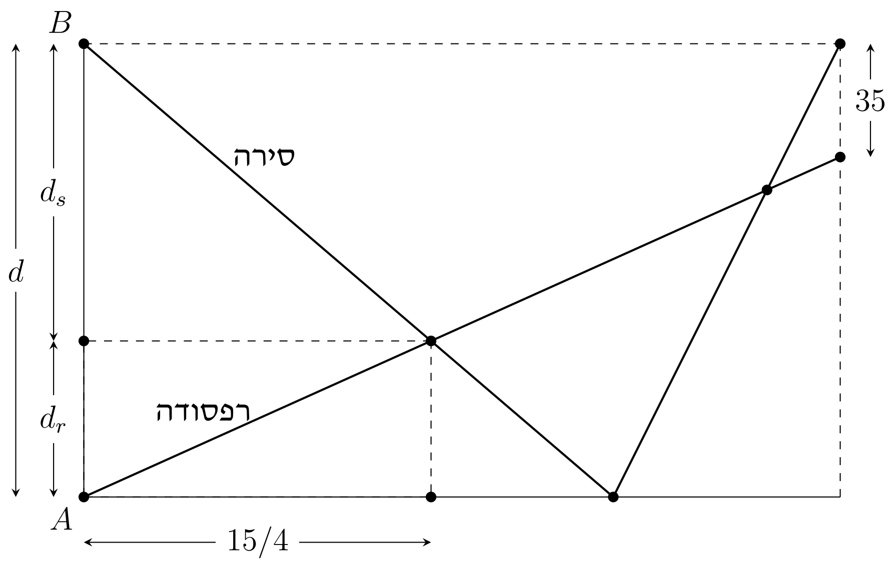


מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו־ 45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B .
כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B , הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B .

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?



נסמן: $d=$ מרחק בין שני הנמלים, $d_r, d_s=$ מרחקי ההפלגה של הסירה והרפסודה עד למפגש הראשון, $v_z=$ מהירות הזרם, $v_s=$ מהירות הסירה במים עומדים.

א. נתון:

$$v_z = v_s/4\,. \tag{1}$$

במפגש הראשון:

$$d = d_s + d_r = \frac{15}{4}(v_s - v_z) + \frac{15}{4}v_z\,.$$

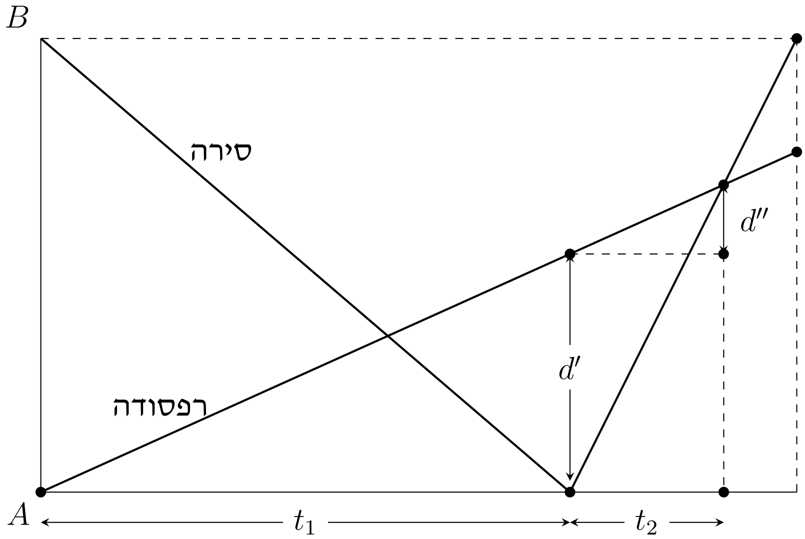
מהירות הזרם מתאפסת ומתקבל:

$$d = \frac{15}{4}v_s\,. \tag{2}$$

בפרק הזמן שהסירה מפליגה ל-A ובחזרה ל-B (מרחק של $d+d$), והרפסודה מפליגה מ-A ומגיעה "כמעט" לנמל B. נשווה זמנים:

$$\frac{d}{v_s - v_z} + \frac{d}{v_s + v_z} = \frac{d-35}{v_z}\,.$$

מנוסחה (**??**) נציב עבור v_z, מנוסחה (**??**) נציב עבור d, ונקבל $v_s = 20$. מאותן נוסחאות נקבל $v_z = 5$ ו-$d = 75$.



ב. נסמן: $t_1 =$ הזמן שהסירה מפליגה ל-A, $t_2 =$ הזמן שהסירה מפליגה מ-A למפגש השני, $d' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_1, $d'' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_2.

מהפלגה הסירה:

$$t_1 = \frac{d}{v_s - v_z} = \frac{75}{20-5} = 5\,,$$

ומהפלגה הרפסודה: $d' = v_z t_1 = 5 \cdot 5 = 25$.

בפרק הזמן t_2 הסירה מפליגה מרחק $d' + d''$ והרפסודה מפליגה מרחק d''. נשווה זמנים:

$$t_2 = \frac{d' + d''}{v_s + v_z} = \frac{d''}{v_z}, \quad \frac{25 + d''}{25} = \frac{d''}{5}\,.$$

נקבל $d'' = 25/4$ ו-$t_2 = d''/v_z = 5/4$.

השאלה מבקשת את זמן ההפלגה של הרפסודה מנמל A ועד למפגש השני:

$$t_1 + t_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\,.$$

קיץ תשע"ח מועד א

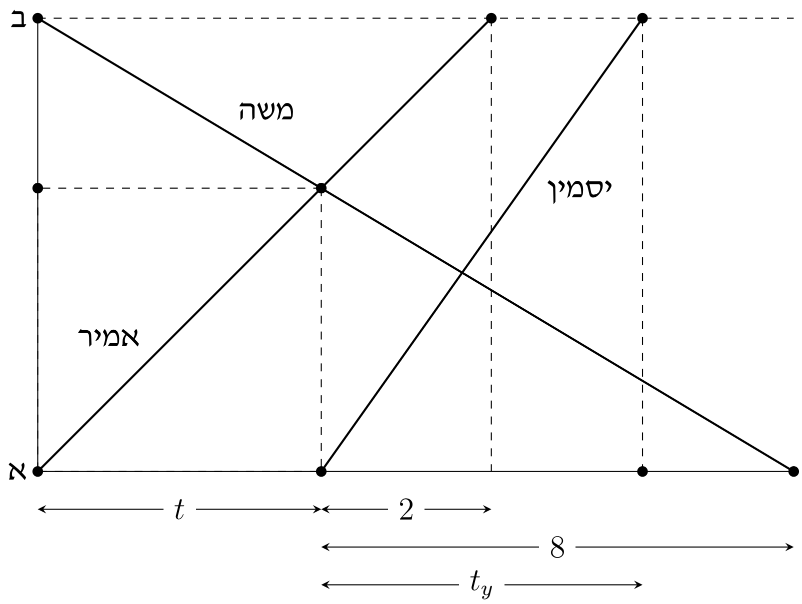
1. שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.
אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.
אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה,
ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V .
בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.
נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.



נסמן: t = הזמן עד ממפגש בין אמיר למשה, t_y = זמן הנסיעה של יסמין מעיר א לעיר ב, v_y, v_m, y_a = המהירויות של אמיר, משה ויסמין.

סעיף א

מהתרשים רואים שיש שלושה ביטויים עבור המרחק בין הערים: סכום המרחקים שנסעו אמיר ומשה עד למפגש, והמרחקים שנסעו אמיר ומשה:

$$tv_a + tv_m = (t+2)v_a = (t+8)v_m\,.$$

משני הביטויים הראשונים אנו מקבלים $\dfrac{v_a}{v_m} = \dfrac{t}{2}$. נציב בשני הביטויים האחרונים:

$$(t+2)\cdot\frac{tv_m}{2} = (t+8)v_m\,.$$

v_m מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית עם הפתרון חיובי $t = 4$. המפגש התקיים בשעה $10:00$.

סעיף ב

המרחק בין הערים הוא $(t+2)v_a = 6v_a$.

סעיף ג

מהתרשים רואים ש:

$$2 < t_y < 8\,.$$

זמן הוא מרחק חלקי מהירות ואת המרחק חישבנו בסעיף ב:

$$2 < \frac{6v_a}{v_j} < 8\,,$$

או:

$$\frac{1}{3v_a} < \frac{1}{v_j} < \frac{4}{3v_a}\,.$$

כיווני האי־שוויון מתחלפים עם היפוך השבר:

$$\frac{3}{4}v_a < v_j < 3v_a\,.$$

בעיות הספק

חורף תשע"ה

1. צַבָּעים ותיקים וצַבָּעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.

צַבָּע אחד ותיק ו־ 2 צַבָּעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב־ 25%

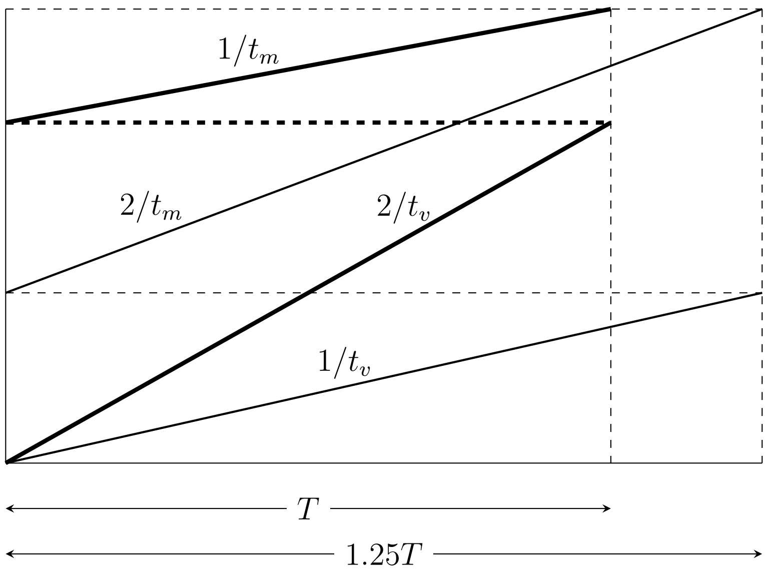
מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צַבָּעים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

סעיף א



נסמן את הזמנים לצביעת כל הדלתות. $t_v =$ הזמן שלוקח צבע ותיק, $t_m =$ הזמן שלוקח צבע מתלמד, $T =$ הזמן שלוקח שני צבעים ותיקים וצבע מתלמד אחד.

הסבר על התרשים: אמנם הצבעים עובדים במקביל אבל מבחינת התרשים הם **מחלקים** את עבודה (הציר האנכי). לכן בתרשים מסומן כאילו שצבע (או זוג צבעים) מסיים את חלקו בעבודה ואחר כך הצבע (או הזוג) השני מתחיל את חלקו. מה שחשוב לראות הוא ששני החלקים מסתכמים ליחידת העבודה המליאה. השתמשתי בקווים בעובי שונה ובצבע שונה כדי לבדל את שני ההרכבים: שני ותיקים ומתלמד לעומת ותיק ושני מתלמדים.

ההספקים מתקבלים מעבודה חלקי זמן ורשומים כשיפועים על התרשים. אפשר להתייחס לזוג צבעים כצבע אחד עם הספק כפול.

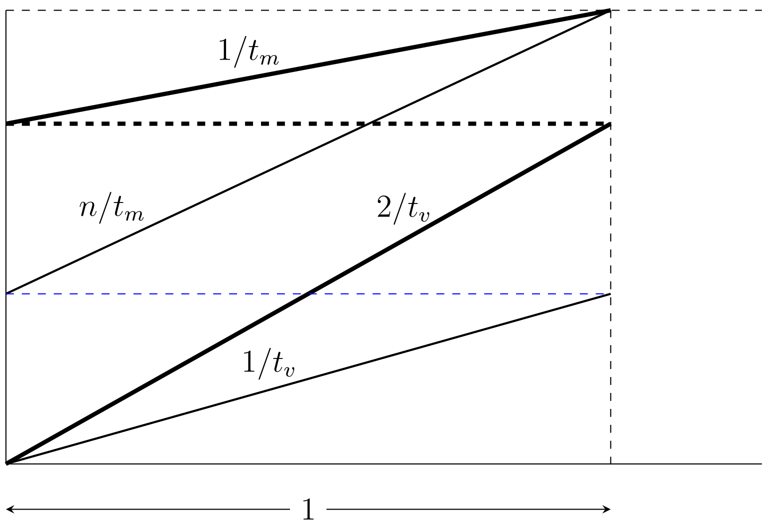
מהתרשים רואים ששני ההרכבים סיימו את העבודה ומכאן המשוואה:

$$\frac{2}{t_v}T + \frac{1}{t_m}T = \frac{1}{t_v} \cdot 1.25T + \frac{2}{t_m} \cdot 1.25T\,.$$

נחלק ב־ T (שבעצם מיותר כי כל יחידת זמן, אפילו 1, מתאימה), נכפיל ב־ t_m, ונקבל:

$$\frac{t_m}{t_v} = 2\,.$$

סעיף ב



הפעם נשתמש ב־ 1 כיחידת זמן. העבודה של שני ההרכבים שווה ולכן:

$$\frac{2}{t_v} + \frac{1}{t_m} = \frac{1}{t_v} + \frac{n}{t_m}\,.$$

נכפיל ב־ t_m, נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א' ונקבל:

$$2 = \frac{t_m}{t_v} = n - 1\,,$$

והתשובה היא $n = 3$.

קיץ תשע"ו, מועד ב'

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

   א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

   גל התחיל לעבוד בשעה $8:00$, וסיים לעבוד בשעה $15:00$.

   דני התחיל לעבוד לאחר השעה $8:00$ ולפני השעה $9:00$, וסיים לעבוד בשעה $13:00$.

   ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה $9:00$.

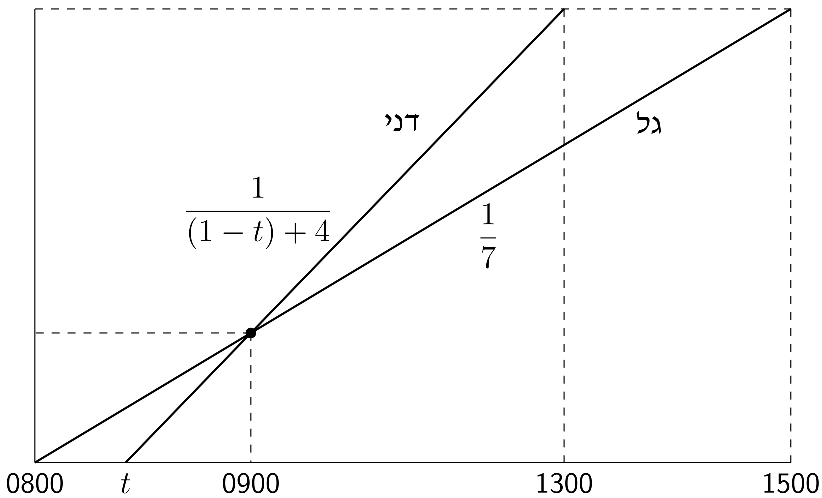
   כמה זמן אחרי השעה $8:00$ התחיל דני לעבוד?

   ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

   ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

   כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

סעיף א

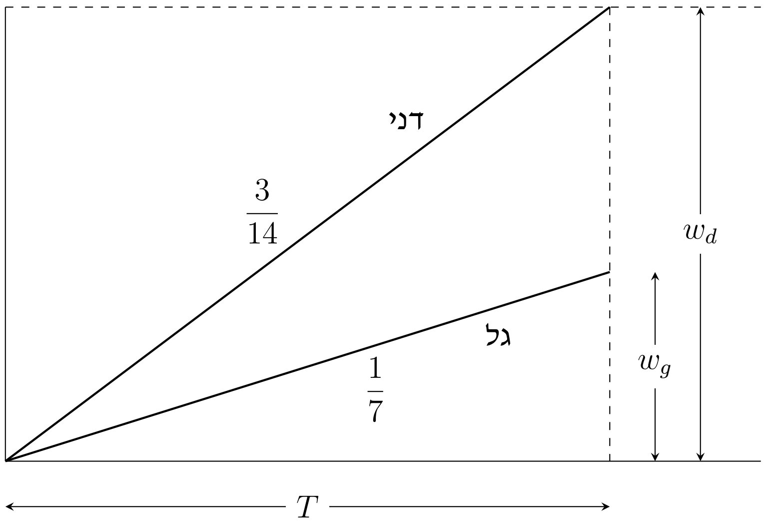


נסמן: $t =$ הזמן שדני התחיל בהרכבה.
ההספקים הרשומים על התרשים מתקבלים מהנתונים על הזמן להשלמת ההרכבה.
נתון שבשעה 0900 שניהם סיימו להרכיב אותו כמות של מחשבים:

$$\frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{5-t} \cdot (1-t)\,.$$

מתקבל שדני התחיל לעבוד $\frac{1}{3}$ שעה לאחר 0800.

סעיף ב



נסמן: $T =$ הזמן ששניהם עבדו ביום השני. על התרשים סימנו גם את כמות העבודה שעשה כל אחד מהם: $w_g =$ העבודה של גל, $w_d =$ העבודה של דני.

מסעיף א' אנו יודעים מתי דני התחיל לעבוד ביום הראשון וניתן לחשב שההספק שלו:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)+4}=\frac{3}{14}\,.$$

נתון שהם סיימו אותה כמות עבודה כמו היום הראשון כאשר כל אחד סיים יחידה שלמה של עבודה. מתקבלת המשוואה:

$$1+1=w_g+w_d=\frac{1}{7}T+\frac{3}{14}T\,,$$

והפתרון הוא $T=\frac{28}{5}$.

חורף תשע"ז

1. שני צינורות א' ו־ ב' מזרימים מים לברֵכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ m שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ 2m שעות.

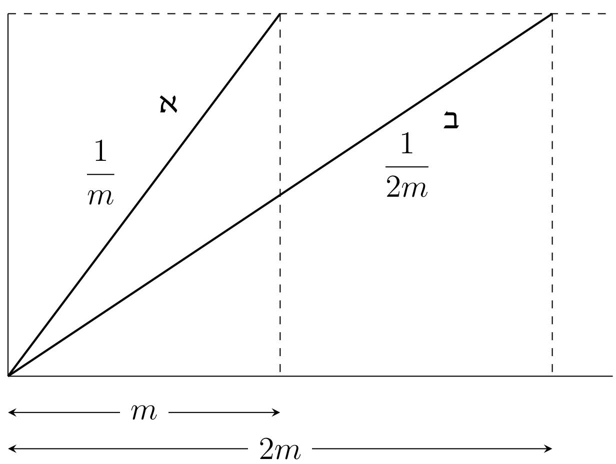
כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ־ 4 שעות.

ביום מסוים הברֵכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.
אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.
בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ־ $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m .

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב' רוקן מים מן הברֵכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בברֵכה וצינור ב' רוקן ממנה מים.
בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הברֵכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.
נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהברֵכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.
מצא את m .

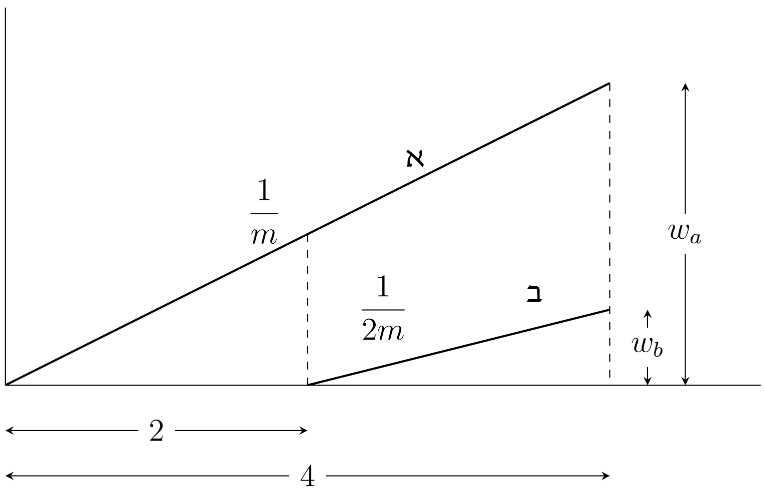
סעיף א



כאשר שני הצינורות פתוחים, ההספק הכולל הוא סכום ההספקים של הצינורות. לפי הנתונים:

$$1/\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}\right) > 4\,,$$

כך ש־ $m > 6$.



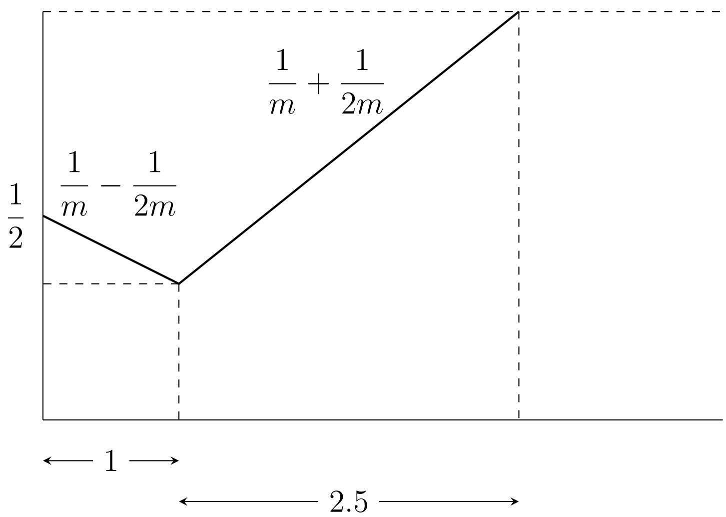
נסמן: $w_a =$ כמות המים שמילא צינור א', $w_b =$ כמות המים שמילא צינור ב'.

כמות המים בבריכה לאחר ארבע שעות שווה לסכום הכמויות שכל צינור מילא והיא לפחות מחצית הבריכה:

$$w_a + w_b = \frac{1}{m} \cdot 4 + \frac{1}{2m} \cdot 2 > \frac{1}{2}\,.$$

מכאן, $m < 10$.

סעיף ב



כדי למלא את הבריכה, מתחילים ממחצית הכמות, מוסיפים (מחסירים כי שלילי) את הכמות של השעה הראשונה, ומוסיפים את הכמות מהתקופה השניה של שעתיים וחצי:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) \cdot 2.5 = 1\,.$$

הפתרון הוא $m = 8.5$.

חורף תשע"ח

1. בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא V_1 והנפח של בריכה ב' הוא V_2 .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

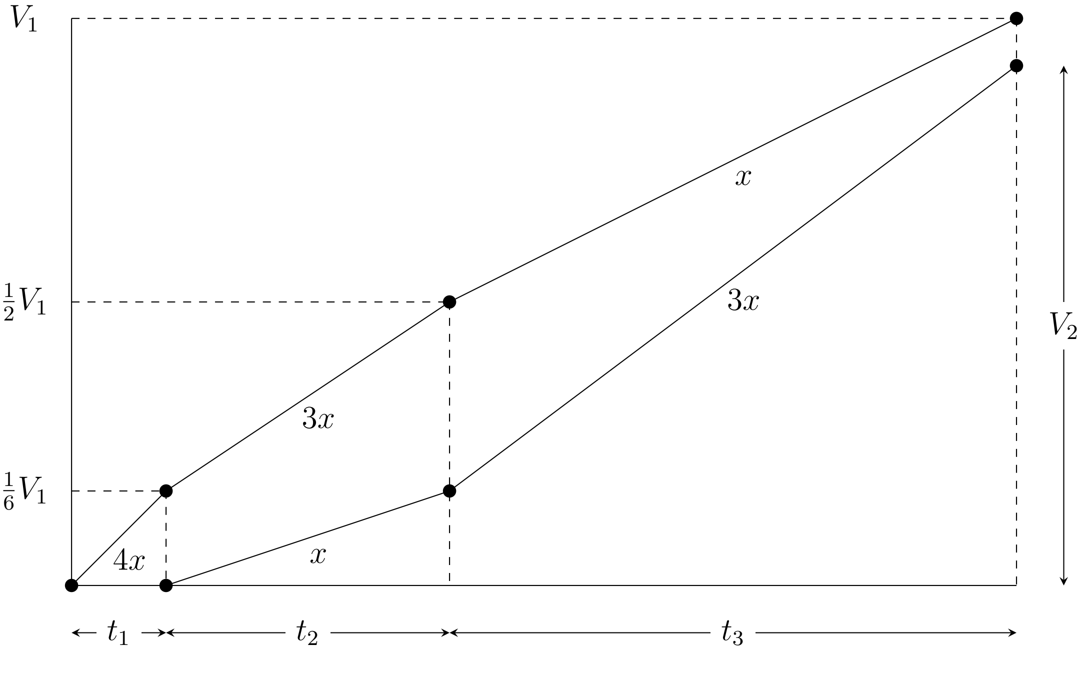
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.



נסמן: $x =$ קצב המילוי של כל צינור בנפרד. $t_1, t_2, t_3 =$ פרקי הזמן לכל חלוקה של הצינורות בין הבריכות. הקו העליון בתרשים מתאר את המילוי של בריכה א', והקו התחתון מתאר את מילוי של בריכה ב'.

נכתוב את המשוואות ההספק עבור בריכה א':

$$4xt_1 = \frac{1}{6}V_1, \quad 3xt_2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})V_1, \quad xt_3 = (1 - \frac{1}{2})V_1\,,$$

ונשתמש בהן כדי לחשב את פרקי הזמן כתלות בנפח בבריכה:

$$t_1 = \frac{V_1}{24x}, \quad t_2 = \frac{V_1}{9x}, \quad t_3 = \frac{V_1}{2x}\,.$$

מהתרשים אנו רואים שאפשר לבטא את הנפח של V_2 כסכום של שני חלקים נפרדים: הראשון בפרק הזמן t_2 והשני בפרק הזמן t_3. כאשר נציב את המשוואות שקבלנו עבור בפרקי הזמן, נקבל את הנפח של V_2 כתלות ב־V_1 בלבד, כי המשתנה x מצטמצם:

$$V_2 = xt_2 + 3xt_3 = \frac{xV_1}{9x} + \frac{3xV_1}{2x} \ = \frac{29}{18}V_1 \,.$$

מכאן קבלנו את התשובה הדרושה, היחס בין שני הנפחים:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29} \,.$$

- לא היה צורך במידע על ההספק בפרק הזמן הראשון כאשר רק בריכה א' מתמלאת.
- מהתשובה אנו רואים שהנפח של בריכה ב' גדול מהנפח של בריכה א'. לא ידענו זאת לפני שפתרנו את השאלה, והתרשים מראה את המצב ההפוך. אין לזה חשיבות. מטרת התרשים היא להציג את התסריט כדי שנוכל לכתוב את המשוואות הנכונות. כאן, חשוב לשים לב שפרק הזמן הראשון לא נחוץ לפתרון, ושהמילוי של בריכה ב' מתבצע בשני שלבים שזמנם זהים לזמנם של שלבי המילוי של בריכה א'.