בחינות בגרות במתמטיקה: החוויה

אלגברה והסתברות

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci¯tea/benari/

גרסה 1.2.2

24 במרץ 2019

תוכן עניינים

הקדמה

מתמטיקאים ידועים לשמצה כי הם מפרסמים והוכחות מסודרות וברורות, ומסתירים את העובדה שסל הניירות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות סתומים וטעויות. ההיעדר של **תהליכי** הפתרון עלול לתסכל תלמידים שמתייאשים כאשר הם לא מצליחים לפתור בעיות בניסיון הראשון. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקיים" ללא ניסיונות שלא צלחו ודיונים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

מסמך זה מכיל פתרונות לשאלות $1, 2, 3$ (תנועה והספק, סדרות, הסתברות) של הבחינות 806 בשנים תשע"ד עד תשע"ח עם תיאורים של חוויותי בחיפוש פתרונות.

בסוף כל פרק רשמתי המלצות שגיבשתי לאורך העבודה.

תנועה והספק

הצעה של אביטל אלבוים־כהן כיוון אותי לפתח את הפתרון של הבעיות ההלו באמצעות תרשימים דו־ממדיים. מצאתי שהתרשימים מאוד עוזרים בזיהוי הקשרים בין קטעי התנועה ובכתיבת הנוסחאות. ניתן להיעזר בתרשימים דו־ממדיים גם בבעיות הספק שיש להן מבנה דומה לבעיות תנועה. התרשימים קלים מאוד לציור ומועילים גם אם קני המידה בכלל לא מדוייקים, כך שניתן להשתמש בהם כאשר פותרים בחינות.

בתרשימים הציר האופקי הוא ציר הזמן והציר האנכי הוא ציר המרחק בבעיות תנועה וציר העבודה בבעיות הספק. היתרון של ייצוג זה הוא שמהירויות וההספקים מוצגים כשיפועים של הקווים. ככל שהמהירות או ההפסק גבוה יותר, הקו תלול יותר. לכל דמות (מכונית, סירה, צבע, וכדומה) ציירתי קו עבור כל קטע בתנועה או בעבודה. בבעיות תנועה, יש לשים לב שבניגוד לתרשימים חד־ממדיים בהם אורך קו הוא מרחק הנסיעה, כאן מרחק הנסיעה הוא ההפרש בציר האנכי בין הנקודה ההתחלתית לנקודה הסופית.

אני ממליץ על המאמר "פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים" מאת אביטל אלבוים־כהן וג'ייסון קופר. על"ה גיליון 51, מרץ 2015, עמ' 14־19. הם מביאים פתרונות גיאומטריים עבור בעיות הספק.

סדרות

לדעתי, שאלות הסדרות הן הכי קלות לפתור, כדי בסופו של דבר יש יחסים ברורים בין איברים עוקבים בסדרה (חשבונית או הנדסית), וכן בין האיברים לסכומם. עם זאת, מצאתי שקל מאוד לטעות, למשל, אם מבלבלים בין האינדקסים של איברי הסדרה לבין ערכיהם.

חשבו לשים לב שתת־סדרה של סדרה חשבונית / הנדסית לא "יורשת" את התכונה חשבונית / הנדסית, להיפך, סדרה הבנוייה מתת־סדרות חשבוניות / הנדסיות אינה בהכרח סדרה שהיא חשבונית / הנדסית.

לפני שניגשים לפתרון של שאלה עם סדרה באורך n, כדאי לרשום וחשב סדרה עם מספר קטן של איברים. כך אפשר לקבל תחושה של היחסים בין איברי הסדרה, ונוסף, זה עוזר כדי להבין מתי לסדרה יש מספר זוגי של איברים ומתי יש מספר אי־זוגי של איברים.

הסתברות

החישובים בבעיות עם הסתברות הם בדרך כלל פשוטים, אבל קשה יחסית לתרגם את העלילה המילולית למשוואות הנכונות. הדבר נכון במיוחד כאשר השאלה שואלת על הסתברות מותנית. מצאתי עושר רב של ביטויים המכוונים להסתברות מותנית (סיכמתי אותם בסעיף ההמלצות), וזה לא מקל על הפתרון.

קושי נוסף נובע מהעובדה שיש שתי דרכים שונות לארגן את המידע הנתון והחישובים: בטבלה או בעץ. שאלה על משהו שהוא "גם א וגם ב" מכוון לחיתוך של הסתברויות, ומכוונת לטבלה, לעומת שאלה המנוסחת "א ואחר כך ב" מכוונות למכלפה של הסתברויות הכדאי להציג בעץ. ככל שפותרים יותר שאלות, קל יותר להבחין באפיונים של הבעייה ובחור את הדרך הנכונה למצוא פתרון.

פרק 1 תנועה והספק

1.1 קיץ תשע"ח מועד ב

המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.

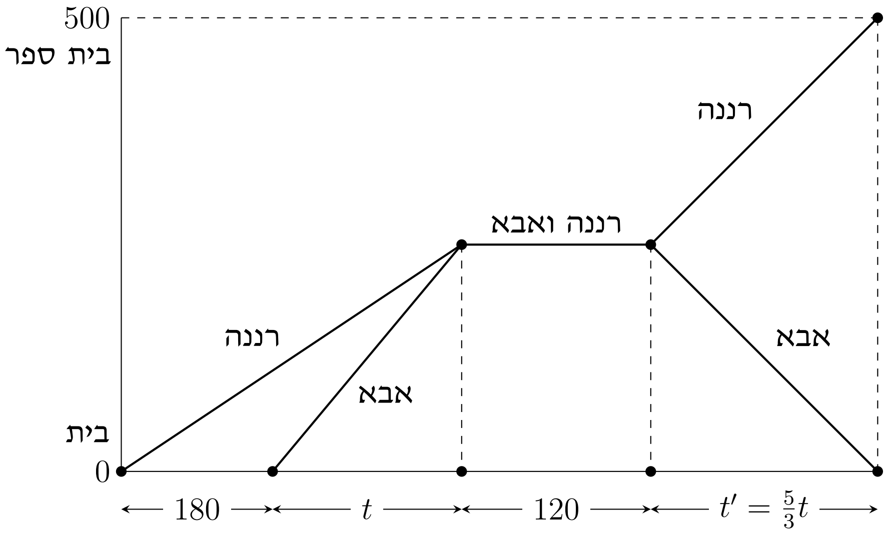
3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו — רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?



נסמן: $v =$ מהירות ההליכה של רננה, $t =$ הזמן עד למפגש בין רננה לאביה, $t' =$ הזמן מהפרידה בין רננה לאביה ועד ששניהם מגיעים ליעדם.

מהתרשים אפשר לראות שוויון בין מרחקים: רננה ואבא עד למפגש, אבא אל המפגש ובחזרה, וכן, שהמרחק לבית הספר מורכב משני קטעים שרננה הלכה. תחילה נשווה את המרחקים שאבא עובר מהבית עד למפגש ובחזרה כדי לקבל את t' כפונקציה של t:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2}t &= \frac{3}{2}t' \\
t' &= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}t = \frac{5}{3}t\,.
\end{aligned}
$$

סעיף א

עד למפגש המרחקים שעוברים רננה ואביה שווים:

$$v(t+180)=\frac{5}{2}t\,. \tag{1.1}$$

אנו זקוקים לשתי משוואות עם שני הנעלמים כדי למצוא את v. אי־אפשר למצוא משוואה שניה מהנתונים מהמפגש עד ליעדים, כי המרחקים והמהירויות לא בהכרח שווים. במקום זה נמצא דרך אחרת להשוות את המרחק שעוברים רננה ואבא מהבית עד למפגש.

עבור אבא נשתמש באותו ביטוי $\frac{5}{2}t$ שהשתמשנו במשוואה 1.1. עבור רננה נשים לב שניתן לחשב את המרחק כהפרש בין המרחק מהבית לבית הספר (500) לבין המרחק שרננה עוברת מהמפגש ועד לבית הספר (vt'):

$$\frac{5}{2}t=500-v\left(\frac{5}{3}t\right)\,. \tag{1.2}$$

ממשוואה 1.1 ניתן למצוא משוואה עבור t:

$$t=\frac{360v}{5-2v}\,. \tag{1.3}$$

נציב את משוואה 1.3 ב־ 1.2:

$$500-\frac{5}{3}v\left(\frac{360v}{5-2v}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{360v}{5-2v}\right)$$

נפשט את המשוואה ונקבל משוואה ריבועית עבור v:

$$\begin{aligned}6v^2+19v-25 &= 0\\(v-1)(6v+25) &= 0\,.\end{aligned}$$

המהירות חייבת להיות חיובית ולכן הפרתון היחיד הוא $v=1$.

סעיף ב

ממשוואה 1.1 נקבל $t=120$ ונסכם את פרקי הזמן על הציר האופקי בתרשים:

$$180+120+120+\frac{5}{3}\cdot 120=620$$

שניות.

הערה

שימו לב למלכודת שקל ליפול לתוכה: הזמנים נתונים בדקות והמהירויות נתונות במטרים שנייה!

1.2 קיץ תשע"ח מועד א

שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה $6:00$ זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

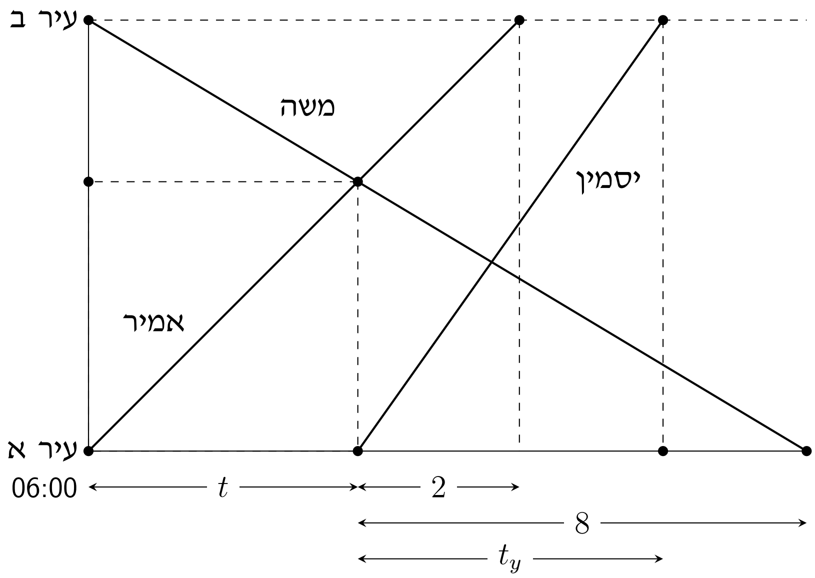
נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.

בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.

נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. **(1)** הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.



נסמן: t = הזמן עד ממפגש בין אמיר למשה, t_y = זמן הנסיעה של יסמין מעיר א לעיר ב, v_a, v_m, v_y = המהירויות של אמיר, משה ויסמין.

סעיף א

מהתרשים מאוד עוזר לראות שיש **שלושה** ביטויים עבור המרחק בין הערים: (א) הרחק שנסע אמיר, (ב)המרחק שנסע משה, ו־(ג) סכום המרחקים שנסעו אמיר ומשה עד למפגש:

$$tv_a + tv_m = (t+2)v_a = (t+8)v_m \,.$$

משני הביטויים הראשונים אנו מקבלים:

$$\frac{v_a}{v_m} = \frac{t}{2} \,.$$

נציב בשני הביטויים האחרונים:

$$(t+2)\cdot\frac{tv_m}{2}=(t+8)v_m\,.$$

v_m מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית t^2-16 עם הפתרון חיובי $t=4$.

שימו לב

יש נטייה לעצור כאן כאשר חישבנו את הזמן t, אבל עיון חוזר בשאלה מראה שהיא מבקשת את השעה של המפגש שהיא 10:00. לאחר שפותרים בעייה יש לעיין שוב בשאלה כדי לוודא שאנו מספקים את התשובה הנדרשת.

סעיף ב

המרחק בין הערים הוא $(t+2)v_a$. חישבנו ש־$t=4$ ולכן המרחק הוא $6v_a=6V$ (הסימון הנתון V שונה מ־v_a שבחרתי בתחלית הפתרון).

סעיף ג

נתון שיסמין מגיע לעיר ב אחרי אמיר ולפני משה. מהתרשים רואים ש:

$$2<t_y<8\,.$$

זמן הוא מרחק חלקי מהירות ואת המרחק חישבנו בסעיף ב:

$$2<\frac{6V}{v_j}<8\,.$$

מכאן ש:

$$\frac{3}{4}v_a<v_j<3v_a$$

כי כיווני האי־שוויון מתחלפים עם היפוך השבר.

1.3 חורף תשע"ח

בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא $\mathrm{V_1}$ והנפח של בריכה ב' הוא $\mathrm{V_2}$.

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

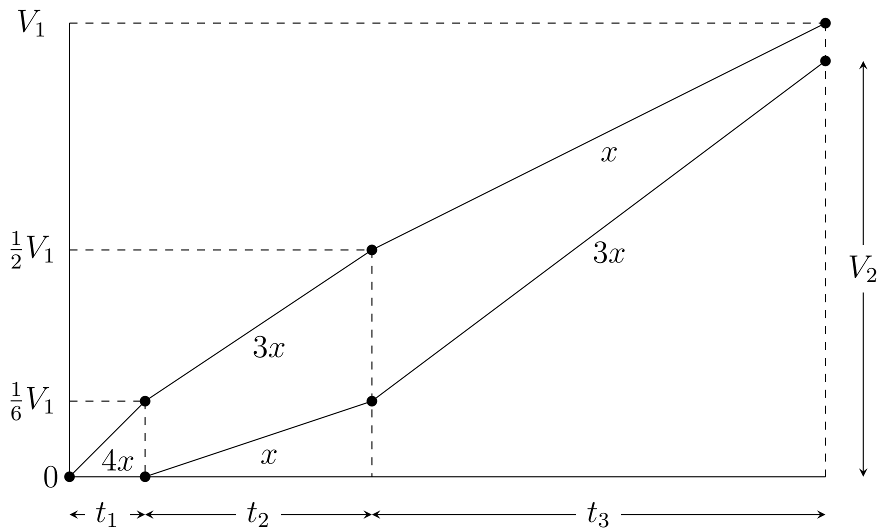
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{\mathrm{V_1}}{\mathrm{V_2}}$.



נסמן: $x =$ קצב המילוי של כל צינור ("בעלי אותו הספק"), $t_1, t_2, t_3 =$ פרקי הזמן בין העברת הצינורות.

הקו העליון בתרשים מתאר את המילוי של בריכה א, והקו התחתון מתאר את מילוי של בריכה ב. שימו לב שככל שיותר צינורות ממלאים בריכה, השיפוע של הקו תלול יותר.

יש לנו שלושה סוגים של נעלמים: x, שלושת ה־t_i ושני ה־V_i. אם נצליח להיפטר מ־x או מה־t_i, השני יצטמצם כאשר נחלק את ה־V_i.

נתחיל עם משוואות ההספק עבור בריכה א, כאשר בכל פרק זמן ממלאים את ההפרשים של הנפחים, למשל, בזמן t_2 בריכה א מתמלאת משישית לחצי:

$$\begin{aligned}
4xt_1 &= \frac{1}{6}V_1 \\
3xt_2 &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)V_1 \\
xt_3 &= \left(1-\frac{1}{2}\right)V_1 \,.
\end{aligned}$$

נשתמש במשוואת כדי לחשב את פרקי הזמן כתלות בנפח בבריכה:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{V_1}{24x} \\
t_2 &= \frac{V_1}{9x} \\
t_3 &= \frac{V_1}{2x}\,.
\end{aligned}$$

מהתרשים רואים שאפשר לבטא את הנפח של V_2 כסכום של שני חלקים: הנפח שמתמלא בפרק הזמן t_2 והנפח המתמלא בפרק הזמן t_3. כאשר נציב את המשוואות שקבלנו עבור בפרקי הזמן, נקבל את הנפח של V_2 כתלות ב־V_1 בלבד, כי המשתנה x מצטמצם:

$$\begin{aligned}
V_2 &= xt_2+3xt_3=\frac{xV_1}{9x}+\frac{3xV_1}{2x} \;=\frac{29}{18}V_1 \\
\frac{V_1}{V2} &= \frac{18}{29}\,.
\end{aligned}$$

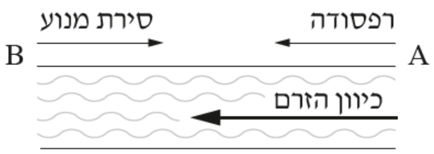
הערה

קיבלנו שהנפח של בריכה ב גדול מהנפח של בריכה א, עובדה שלא ידעתי כאשר ציירתי את התרשים עם נפח בריכה א גדול מנפח בריכה ב. אין לזה חשיבות. מטרת התרשים היא להציג את התסריט כדי שנוכל לכתוב את המשוואות הנכונות.

פרט מעניין הוא שפרק הזמן הראשון t_1 לא נחוץ לפתרון, כי המילוי של בריכה ב מתבצע בשני השלבים לאחר העברת הצינור הראשון.

1.4 קיץ תשע"ז מועד ב

העיירות A ו־ B נמצאות על גדת נהר הזורם
במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ־ A ל־ B .
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A .
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A
לכיוון העיירה B . הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.



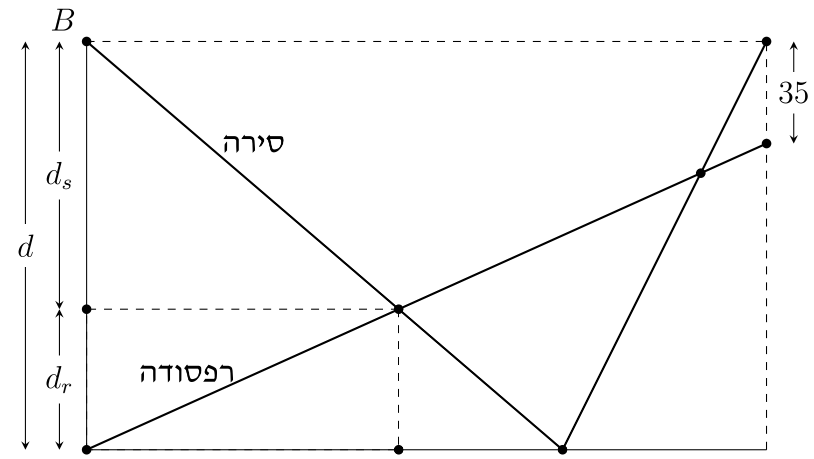
מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו־ 45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B .
כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B , הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B .

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

סעיף א



נסמן: d = מרחק בין שני הנמלים, d_r, d_s = מרחקי ההפלגה של הסירה והרפסודה עד למפגש הראשון, v_z = מהירות הזרם, v_s = מהירות הסירה במים עומדים. בתרשים ציר הזמן הוא בשעות.

הזמן עד למפגש הראשון שווה עבור הסירה והרפסודה ויחס המהירויות של הסירה והזרם ידוע, כך שנכתוב את משוואות התנועה עד למפגש. נתון:

$$v_z = v_s/4\,. \tag{1.4}$$

במפגש הראשון:

$$d = d_s + d_r = \frac{15}{4}(v_s - v_z) + \frac{15}{4}v_z\,.$$

מהירות הזרם מתאפסת ומתקבל:

$$d = \frac{15}{4}v_s\,. \tag{1.5}$$

כעת נכתוב משוואות תנועה כדי להשוות את הזמנים עד וסוף הסיפור. בפרק הזמן שהסירה מפליגה ל־A ובחזרה ל־B (מרחק של $d+d$), הרפסודה מפליגה מ־A ומגיעה "כמעט" לנמל B:

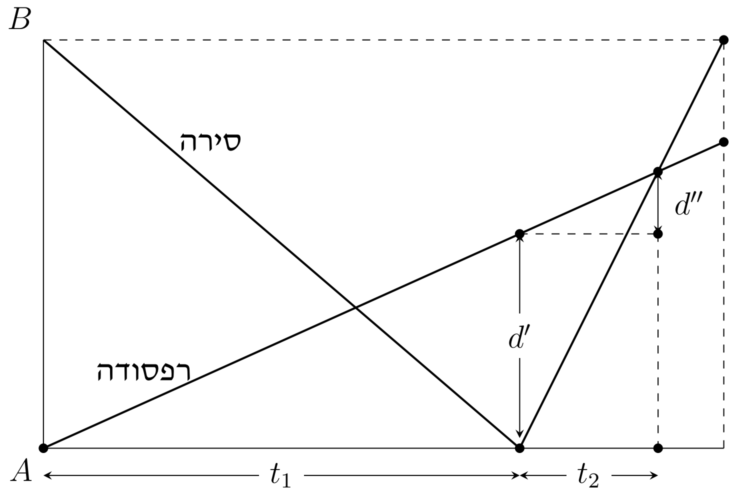
$$\frac{d}{v_s - v_z} + \frac{d}{v_s + v_z} = \frac{d-35}{v_z}\,.$$

מנוסחה (1.4) נציב עבור v_z, מנוסחה (1.5) נציב עבור d, ונקבל משוואה עם נעלם אחד בלבד, v_s.
הפתרון הוא $v_s = 20$ ו־$v_z = 5$ מנוסחה 1.4.

מנוסחה 1.5 מתקבל $d = 75$ שנצטרך במהשך.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם סימונים הקשורים למפגש השני.



נסמן: $t_1 =$ הזמן שהסירה מפליגה ל־A ל־B, $t_2 =$ הזמן שהסירה מפליגה מ־A למפגש השני, $d' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_1, $d'' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_2.

קל לחשב t_1 ממשוואת התנועה של הסירה:

$$t_1 = \frac{d}{v_s - v_z} = \frac{75}{20-5} = 5\,,$$

ולחשב שת המרחק d' מהמשוואה של הרפסודה:

$$d' = v_z t_1 = 5 \cdot 5 = 25\,.$$

נשאר לחשב את פרק הזמן t_2. בפרק הזמן זה, הסירה מפליגה מרחק $d' + d''$ והרפסודה מפליגה מרחק d''. המהירויות ידועות, כך שיש לנו שתי משוואות עבור t_2:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{d' + d''}{v_s + v_z} = \frac{25 + d''}{25} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{d''}{5}\,. \end{aligned}$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} d'' &= \frac{25}{4} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{5}{4}\,. \end{aligned}$$

שימו לב שהשאלה מבקשת את זמן ההפלגה של הרפסודה מנמל A ועד למפגש השני:

$$t_1 + t_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\,.$$

1.5 קיץ תשע"ז מועד א

נֹגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.

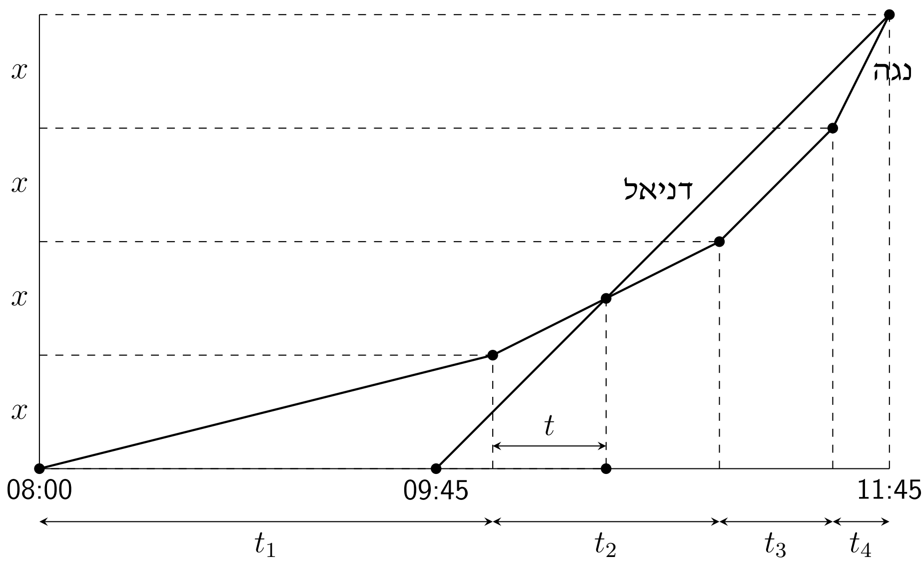
בכל פעם, לאחר שעברה מִקְטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.

במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.

נֹגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45 , ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול.
גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45 .
באיזה מארבעת מִקְטָעֵי המסלול פגש דניאל את נֹגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?



נסמן: x = המרחק של מקטע, t_1, t_2, t_3, t_4 = זמני רכיבה של נגה במקטעים.

נתון: 40 = המהירות במקטע האחרון, לכן המהירויות של המקטעים האחרים הן $5, 10, 20$.

סעיף א

נתון לנו הזמן הכולל והמהירויות (המהירות האחרונה אבל אפשר לחשב את האחרות), והנעלם היחיד הוא המרחק. נסכם את הזמנים של המקטעים:

$$\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + \frac{x}{40}\right) = \frac{15}{4}\,.$$

הפתרון הוא $x = 10$ ולכן אורך המסלול הוא 40 ק"מ.

סעיף ב

חישבנו את המרחק ונתון הזמן של דניאל. המהירות של דניאל היא $40/2 = 20$ קמ"ש.

יכול להיות שאפשר למצוא נוסחה עבור המפגש, אבל פשוט יותר לעובר מקטע מקטע ולבדוק אם המפגש מתקיים באותו מקטע.

נגה עוברת 10 ק"מ בכל מקטע. מה המרחק שעובר דניאל עד סוף המקטע הראשון?

$t_1 = 10/5 = 2$ כך שסוף המקטע הוא ב־ 10:00. דניאל רוכב רבע שעה מ־ 09:45 ועד 10:00 ולכן המרחק שהוא עובר הוא רק $20 \cdot \dfrac{1}{4} = 5$ ק"מ והמפגש לא התקיים במקטע הראשון.

מתי נגה מגיעה לסוף המקטע השני? $t_2 = 10/10 = 1$ כך שסוף המקטע הוא ב־11:00. בשעה ורבע בין 09:45 ל 11:00 דניאל רוכב $20 \cdot \dfrac{5}{4} = 25$ ק"מ, מרחק גדול מהמרחק של נגה, לכן המפגש מתקיים במקטע השני.

נשאר רק לחשב את פרק הזמן בתוך המקטע השני עד למפגש, שנסמן t. נכתוב משוואה למרחקים השווים של נגה ודניאל. נגה רכבה 10 ק"מ עד סוף הקטע הראשון ודניאל רכב 5 ק"מ. מסוף הקטע הראשון, הם רכבו t שעות, כל אחד במהירות שלו:

$$\begin{aligned} 10 + 10t &= 5 + 20t \\ t &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

כבר חישבנו שתחילת המקטע השני בשעה 10:00, ולכן שעת המפגש היא 10:30.

1.6 חורף תשע"ז

שני צינורות א' ו־ ב' מזרימים מים לבריכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ m שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ $2m$ שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ־ 4 שעות.

ביום מסוים הבריכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.

אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ־ $\frac{1}{2}$ הבריכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m.

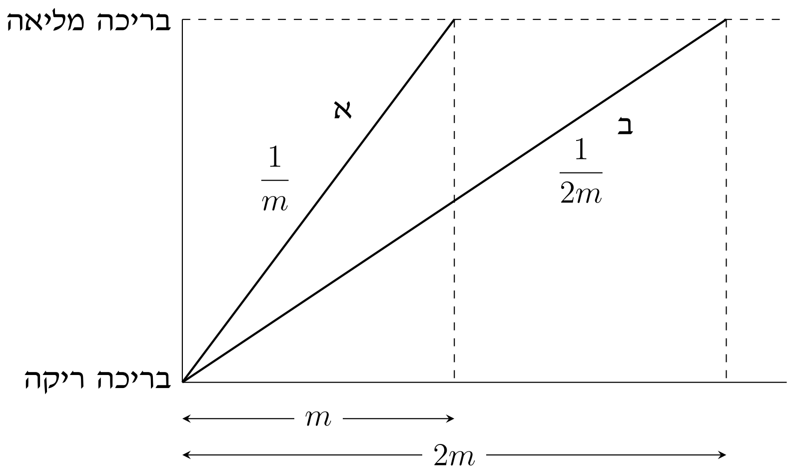
ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הבריכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב' רוקן מים מן הבריכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בבריכה וצינור ב' רוקן ממנה מים.

בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבריכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהבריכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את m.

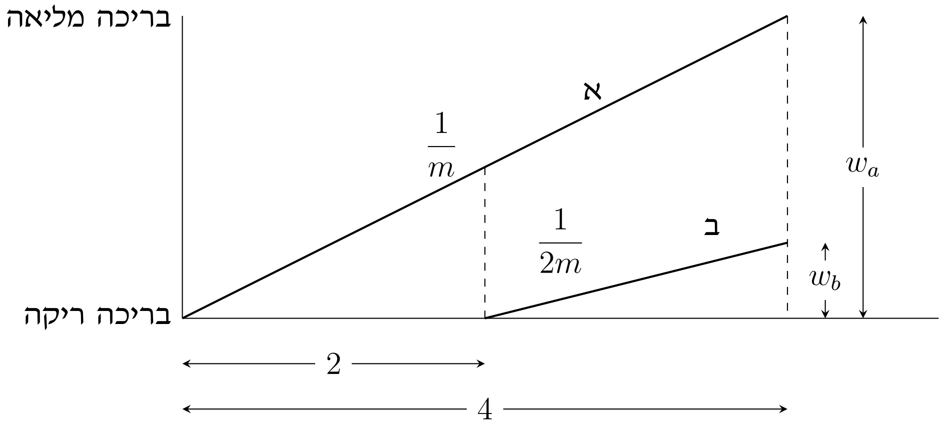
סעיף א



כאשר שני הצינורות פתוחים, ההספק הכולל הוא סכום ההספקים של הצינורות. לפי הנתונים:

$$1/\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}\right) > 4\,,$$

כך ש־$m > 6$.



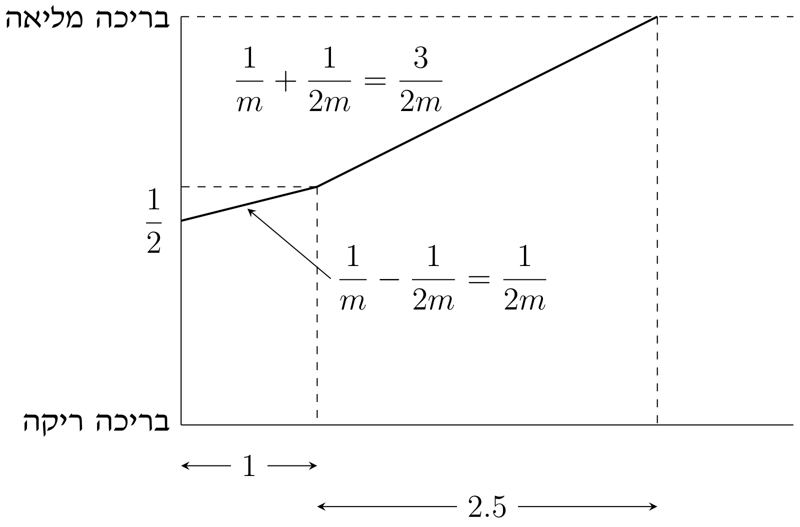
נסמן: $w_a =$ כמות המים שמילא צינור א, $w_b =$ כמות המים שמילא צינור ב.

כמות המים לאחר ארבע שעות שווה לסכום הכמויות שכל צינור מילא והיא לפחות מחצית הבריכה:

$$w_a + w_b = \frac{1}{m} \cdot 4 + \frac{1}{2m} \cdot 2 > \frac{1}{2}\,.$$

מכאן, $m < 10$.

סעיף ב



כדי למלא את הבריכה, מתחילים ממחצית הכמות, מוסיפים (מחסירים כי שלילי) את הכמות של השעה הראשונה, ומוסיפים את הכמות מהתקופה השניה של שעתיים וחצי:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) \cdot 2.5 = 1\,.$$

הפתרון הוא $m = 8.5$.

1.7 קיץ תשע"ו, מועד ב

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

גל התחיל לעבוד בשעה 8:00 , וסיים לעבוד בשעה 15:00 .

דני התחיל לעבוד לאחר השעה 8:00 ולפני השעה 9:00 , וסיים לעבוד בשעה 13:00 .

ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה 9:00.

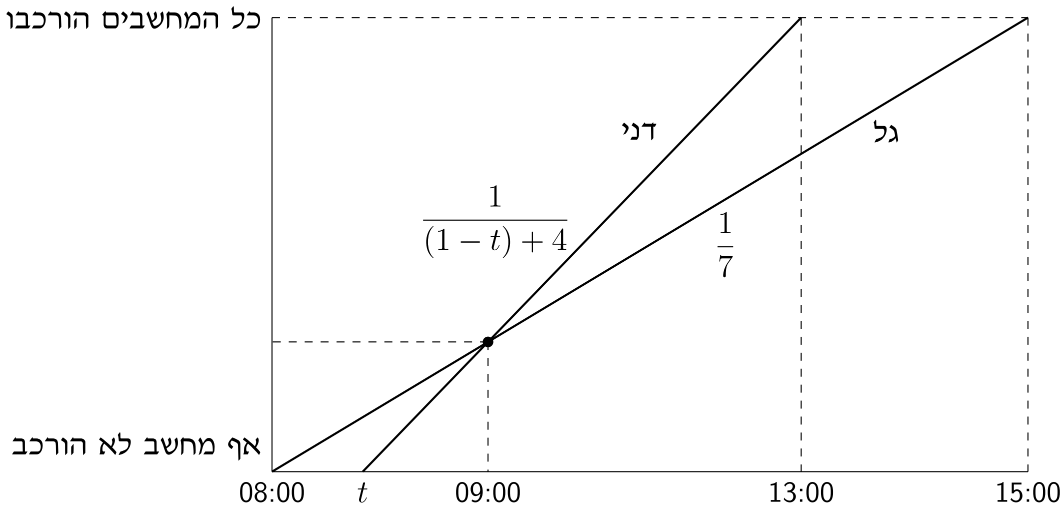
כמה זמן אחרי השעה 8:00 התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

סעיף א



נסמן: $t =$ הזמן שדני התחיל בהרכבה.

נשתמש בנתונים כדי למצוא ביטויים עבור ההספקים של דני וגל. נתייחס לסך המחשבים שהרכיב כל אחד כיחידת עבודה אחת. גל עבד שבע שעות ולכן ההספק שלו הוא $\frac{1}{7}$, ודני עבד $1-t$ עד לשעה 09:00 ואחר כך עוד ארבע שעות. ההספק שלו הוא $\frac{1}{(1-t)+4}$.

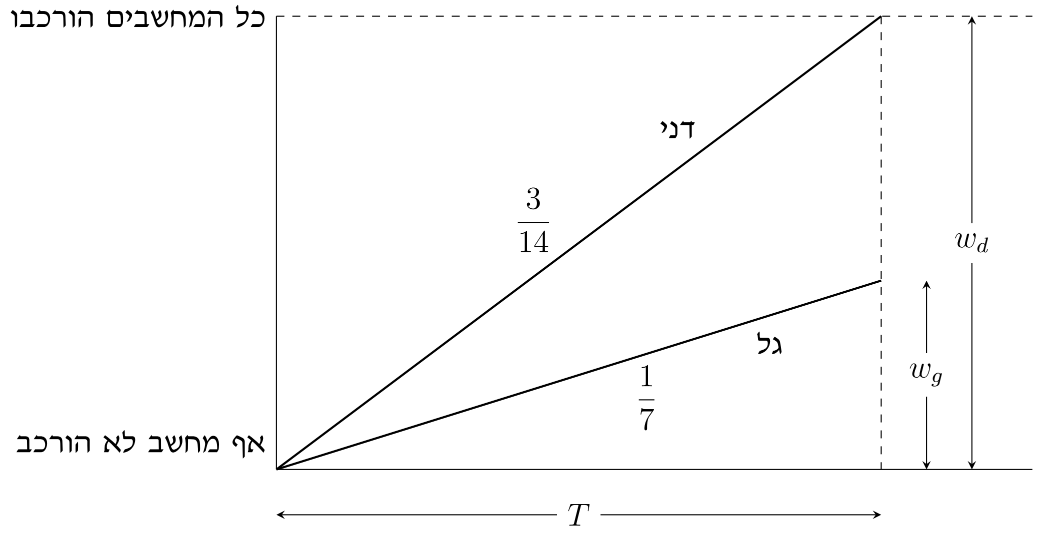
נתון שבשעה 0900 שניהם סיימו להרכיב אותו כמות של מחשבים:

$$\frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{5-t} \cdot (1-t)\,,$$

ולכן דני התחיל לעבוד $t = \frac{1}{3}$ שעה לאחר 08:00.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם המידע לסעיף זה.



נסמן: $T =$ הזמן ששניהם עבדו ביום השני. על התרשים סימנו גם את כמות העבודה שעשה כל אחד מהם: $w_g =$ העבודה של גל, $w_d =$ העבודה של דני.

בסעיף א הערנו שההספק של גל הוא $\frac{1}{7}$, וחישבנו שדני עבד:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{14}{3}$$

שעות. ההספק שלו הוא:

$$\frac{1}{\frac{14}{3}} = \frac{3}{14}\,.$$

נתון שהם סיימו אותה כמות עבודה כמו היום הראשון:

$$1 + 1 = w_g + w_d = \frac{1}{7}T + \frac{3}{14}T\,,$$

והפתרון הוא $T = \frac{28}{5}$.

1.8 קיץ תשע"ו מועד א

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב־ 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

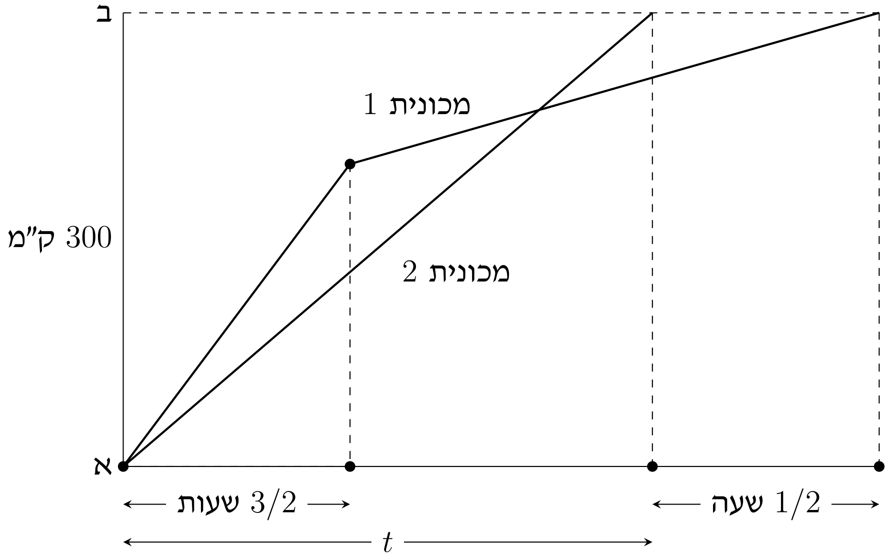
כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה

לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ־ 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).



נסמן: $v_1 =$ מהירות התחלתית של מכונית 1, $v_2 =$ מהירות מכונית 2, $t =$ זמן נסיעה של מכונית 2 מעיר א' עד לעיר ב'.

נתון: $v_1 = v_2 + 25$. השיפוע של הקו של מכונית 1 גדולה מהשיפוע של הקו של מכונית 2.

סעיף א

שתי המכוניות נסעו אותו מרחק מעיר א לעיר ב. נכתוב את משוואות התנועה של שתי המכוניות:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{v_1}{2}\left(\left(t - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) &= 300 \\ v_2 t &= 300\,. \end{aligned}$$

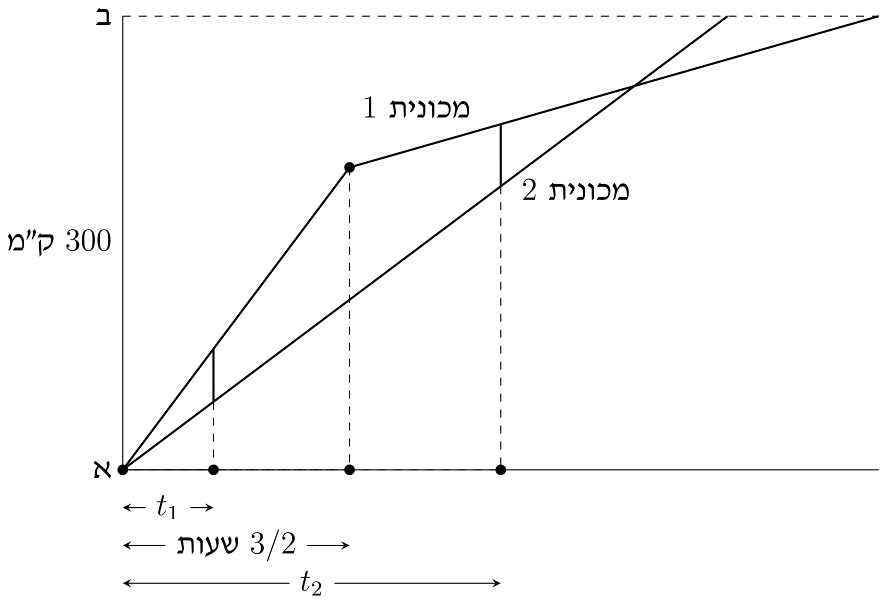
נציב $v_1 = v_2 + 25$, $t = 300/v_2$ במשוואה הראשונה ונקבל משוואה ריבועית ב־v_2:

$$v_2^2 - 125v_2 + 3750 = 0\,.$$

השורשים הם $50, 75$ ונתון ש־$v_2 > 60$ כך שיש לבחור $v_2 = 75$ קמ"ש.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם המידע עבור סעיף זה:



הקווים האנכיים הכלואים בין הקווים של שתי המכוניות מסמנים מרחק של 12.5 ק"מ. קו אחד הוא לפני שינוי המהירות בזמן t_1 מתחילת הנסיעה וקו שני לאחר שינוי המהירות.

בסעיף א' חישבנו $v_2 = 75$ ולכן $v_1 = v_2 + 25 = 100$.

נכתוב את המשוואות עבור הפרשי המרחקים:

$$\begin{aligned} 100t_1 - 75t_1 &= 12.5 \\ \left(100 \cdot \frac{3}{2} + 50\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right) - 75t_2 &= 12.5\,. \end{aligned}$$

הפתרונות הם $t = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$ שעות.

1.9 חורף תשע"ו

רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.

הם נפגשו כעבור 3 שעות.

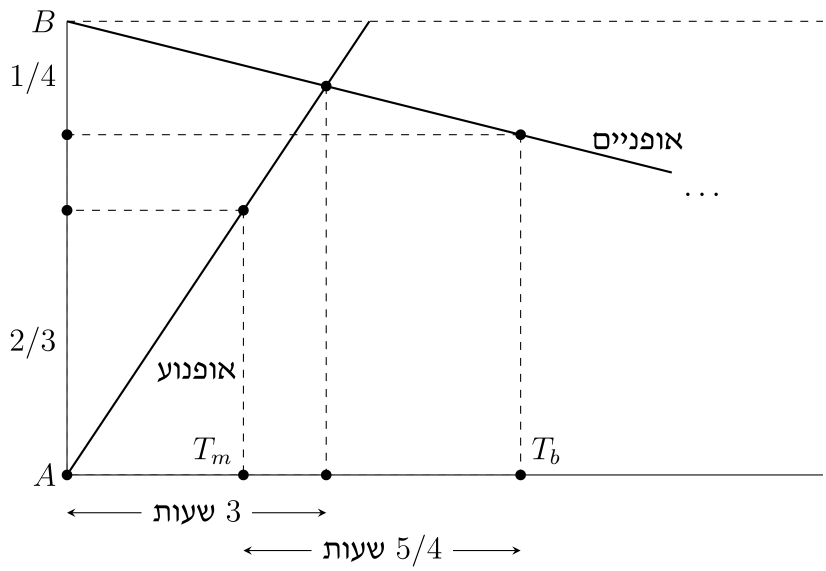
רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב־ 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.

מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

סעיף א



נסמן: v_b = מהירות אופניים, v_m = מהירות אופנוע, x = מרחק בין הערים, T_m = פרק הזמן שהאופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך, פרק הזמן שהאופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך.

כאשר שני כלי רכב היוצאים מנקודות שונות נפגשים, סכום המרחקים שהם עוברים הוא המרחק בין הנקודות. לא נתון המרחק, ולכן אנו משתמשים בנעלם:

$$x = 3v_b + 3v_m\,.$$

הנתון השני הוא הקשר בין זמני הנסיעה של חלקי המרחק בין היישובים:

$$\frac{x/4}{v_b} = \frac{2x/3}{v_m} + \frac{5}{4}\,.$$

נסמן את היחס בין המהירויות (התשובה הדרושה) $r = \frac{v_m}{v_b}$ ונקבל משוואה הריבועית:

$$3r^2 - 10r - 8 = 0\,.$$

השורש החיובי הוא $r = 4$.

סעיף ב

נתונה משוואת המרחק בין היישובים:

$$x = 3v_b + 3v_m \, .$$

נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א כדי לחשב את הזמן של נסיעת האופנוע:

$$\frac{x}{v_m} = \frac{3v_b + 3v_m}{v_m} = 3\frac{v_b}{v_m} + 3 = 3\frac{v_m/4}{v_m} + 3 = \frac{15}{4}$$

שעות.

1.10 קיץ תשע"ה מועד ב

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו,

ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.

כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה,

ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.

מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו,

והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.

כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

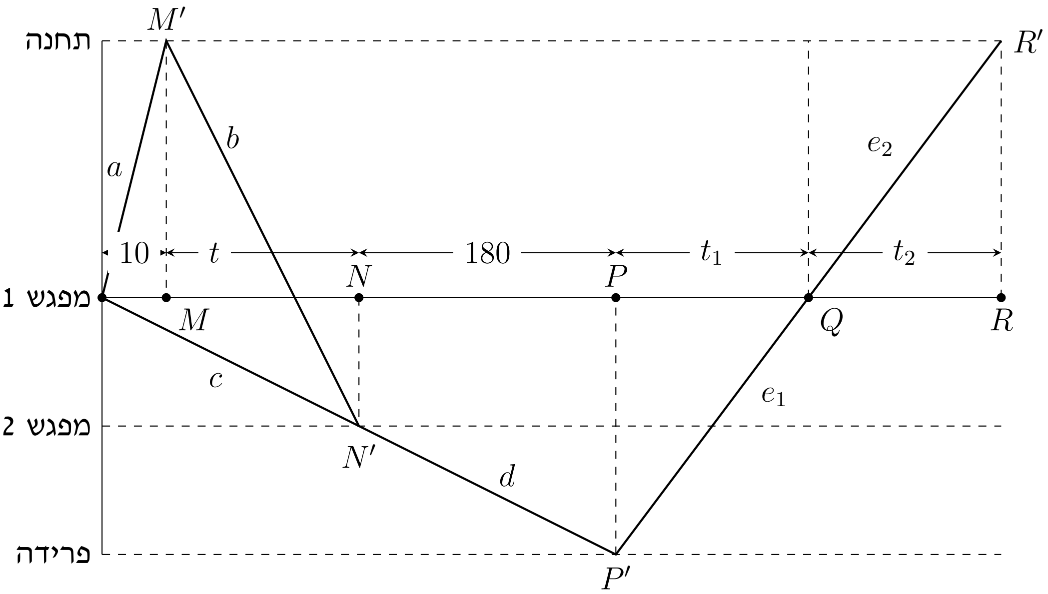
ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו

(בכיוון ההליכה שלה).

מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.

(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?



בתרשים סימנו את הקטעים:

$a =$ יוסי נוסע באוטובוס

$b =$ יוסי רץ לפגישה עם אמא

$c =$ אמא הולכת עד למפגש עם יוסי

$d =$ יוסי ואמא הולכים ביחד

$e_1 + e_2 =$ יוסי רץ חזרה לתחנה

נסמן זמן: t = הזמן שיוסי רץ מהתחנה כדי להשיג את אמא.

נסמן מהירויות: v_y = יוסי, v_a = אמא, v_b = אוטובוס.

נתון: $v_y = 2v_a$, $v_y = v_b/7$.

סעיף א

מצאתי שקשה לפתור את השאלה עד שציירתי את התרשים המופיע למעלה. את הזמן t נוכל לחשב ממשוואות התנועה מהמפגש הראשון (יוסי רואה את אימו) ועד למפגש השני (יוסי משיג את אימו). המרחק מסומן מהתרשים רואים שהמרחק NN' בתרשים. נוכל למצוא שתי משוואות עבור מרחק זה, אחד עבור אמא, קטע c:

$$v_a(t+10),$$

ואחד עבור יוסי, קטעים a, b:

$$-10v_b + tv_y\,.$$

שימו לב שבקטע a יוסי **מתרחק** מהמפגש ולכן המרחק הוא שלילי.

יש לנו שני ביטויים עבור אותו מרחק ולאחר הצבת יחסי המהירויות הנתונים נקבל את המשוואה:

$$\frac{v_y}{2}(t+10) = v_y t - 7v_y 10$$

שהפתרון שלה הוא $t = 150$ שניות.

סעיף ב

מהתרשים קל לראות **ששני** קטעי הקווים e_1, e_2 מתארים את הריצה של יוסי בחזרה לתחנה. רואים גם שהמרחק PP' של e_1 הוא גם המרחק שאמא הולכת, קטעים c, d. לפי התוצאה של סעיף א, לוקח לאמא $10 + 150 + 180 = 340$ שניות לעבור מרחק זה. נתון שיוסי רץ פי שניים מהר יותר מההליכה של אמא, ולכן $t_1 = 170$ שניות.

עבור הקטע השני e_2, המרחק RR' שווה למרחק MM', המרחק שהאוטובוס עבר מהמפגש הראשון ועד התחנה. נתון שהאוטובוס עובר מרחק זה ב־10 שניות, ונתון שמהירות הריצה של יוסי פי שבע לאט ממהירות הנסיעה של האוטובוס, כך ש־$t_2 = 70$.

נסכם ונקבל שיוסי רץ מנקודת הפרידה לתחנה ב $t_1 + t_2 = 240$ שניות.

הערה

שאלה זו שיכנע אותי שתרשים דו־ממיד זמן־מרחק חיוני בפתרון בעיות תנועה.

שימו לב למלכודת: זמן ההליכה היחד נתון בדקות ושאר הזמנים בשניות. אמנם המילה "דקות" מודגש אבל אפשר להתבלבל.

1.11 קיץ תשע"ה מועד א

מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.

המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.

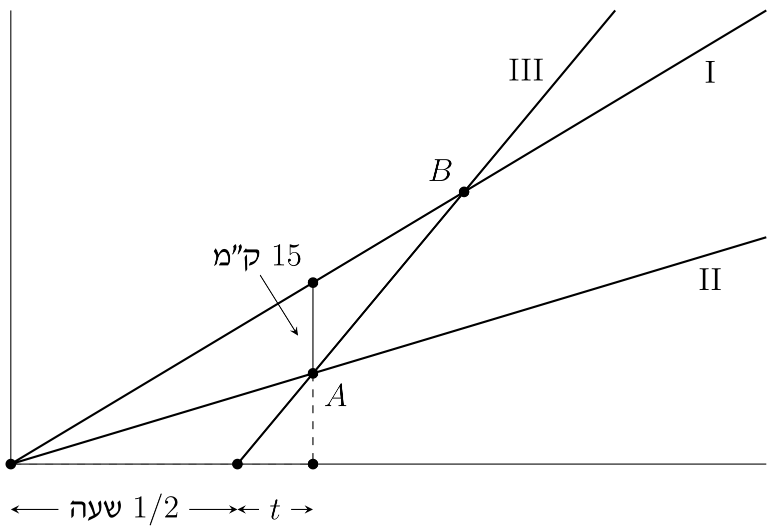
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.

ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.

המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.

א. מצא את המהירות של מכונית III.

ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.



המהירות של מכונית I גדולה מהמהירות של מכונית II, ולכן השיפוע שלו תלול יותר.

נסמן $t =$ הזמן בין היציאה של III ועד למפגש שלו עם II, $v_3 =$ המהירות של III.

נתון מהירות של I $v_1 = 50$, המהירות של II $v_2 = 40$.

סעיף א

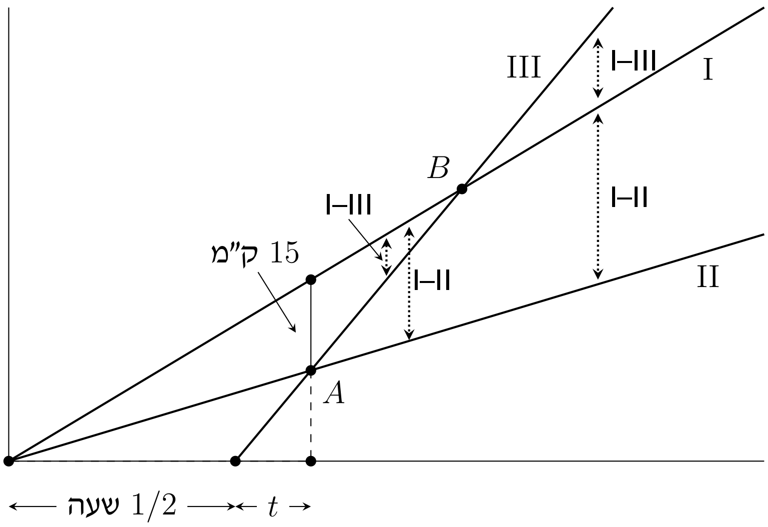
לאחר $t + 1/2$ שעות, המכוניות II ו־III עברו אותו מרחק, ומכונית I עבר אותו מרחק ועוד 15 ק"מ. נכתוב את משוואות התנועה לשני המקרים:

$$\begin{aligned} 40(t+1/2) &= v_3 t \\ 50(t+1/2) &= v_3 t + 15 \,. \end{aligned}$$

מהמשוואות מתקבל $t = 1$ ואח"כ $v_3 = 60$ קמ"ש.

סעיף ב

נוסיף סימונים לתרשים שיעזרו לנו לפתור את הבעייה:



נעיין בקווים מנוקדים בתרשים ונראה שהמרחקים לא יכולים שווים. בנקודה A הרחקים שווים, אבל מנקודה זו ועד לנקודה B, המרחק I-II גדל והמרחק I-III קטן.

בנקודה B המרחק I-II חיובי והמרחק I-III שווה לאפס. מכאן והלאה, שני המרחקים גדלים באותו קצב כי הפרשי המהירויות שווים 10 קמ"ש.

הוכחה בחישוב

נסמן $t_A =$ זמן מנקודה A, $t_B =$ זמן מנקודה B, $d_B =$ המרחק בין I ל־ II בנקודה B.

משמאל לנקודה B המרחקים שווים **אם**:

$$15 + (v_1 - v_2)t_A \stackrel{?}{=} 15 + (v_1 - v_3)t_A\,.$$

נציב $v_1 = 50, v_2 = 40, v_3 = 60$ ונקבל $10 = -10$, כך הטיעון לא יכול להיות נכון.

מימין לנקודה B המרחקים שווים **אם**:

$$(v_3 - v_1)t_B \stackrel{?}{=} d_B + (v_1 - v_2)t_B\,.$$

לאחר הצבה עבור המהירויות, נקבל שהטיעון נכון אם $d_B = 0$, אבל אנחנו יודעים ש־$d_B > 15$.

1.12 חורף תשע"ה

צַבָּעים ותיקים וצַבָּעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.

צַבָּע אחד ותיק ו־ 2 צַבָּעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב־ 25%

מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צַבָּעים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

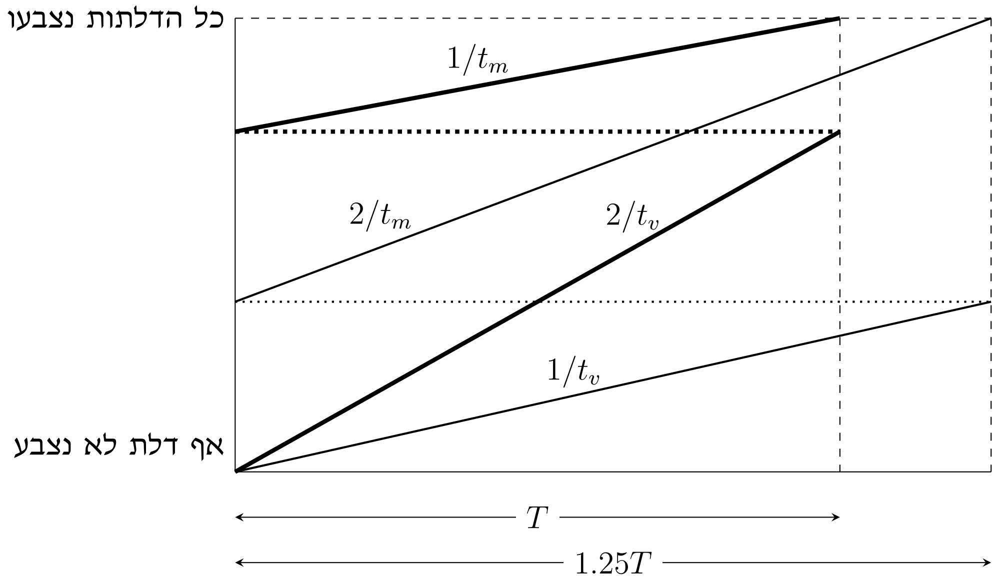
לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי

משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

סעיף א



נסמן את הזמנים לצביעת כל הדלתות. $t_v =$ הזמן שלוקח צבע ותיק, $t_m =$ הזמן שלוקח צבע מתלמד, $T =$ הזמן שלוקח שני צבעים ותיקים וצבע מתלמד אחד. למעשה, הערך של T לא חשוב ואפשר להשתמש ב־1 כיחידת זמן.

הסבר על התרשים

הצבעים עובדים במקביל אבל הציר בתרשים מראה **חלוקת העבודה**, כאילו שצבע (או זוג צבעים) מסיים את חלקו בעבודה ואחר כך הצבע (או הזוג) השני מתחיל את חלקו. ההספקים מתקבלים מעבודה חלקי זמן. כאשר יש זוג צבעים הם רשומים כצבע אחד עם הספק כפול. הקווים הדקים מראים צבע אחד ותיק $(1/t_v)$ ושני צבעים מתלמדים $(2/t_m)$. הקווים העבים מראים שני צבעים ותיקים $(2/t_v)$ וצבע אחד מתלמד $(1/t_m)$.

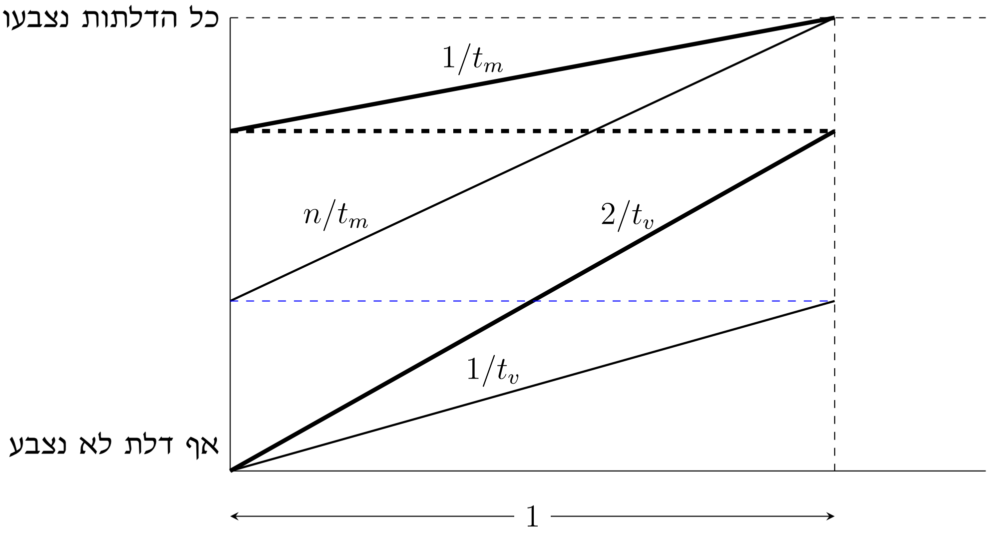
שני ההרכבים סיימו את העבודה ומכאן שמשוואת ההספק נותנת אותו ערך עבור שני ההרכבים. (זיכרו שקבענו שהזמנים הם 1 ו־1.25 עבור שני ההרכבים.):

$$\frac{2}{t_v} \cdot 1 \; + \; \frac{1}{t_m} \cdot 1 \; = \; \frac{1}{t_v} \cdot 1.25 \; + \; \frac{2}{t_m} \cdot 1.25 \, .$$

הפתרון הוא:

$$\frac{t_m}{t_v} = 2 \, .$$

סעיף ב



נסמן $n =$ מספר הבצעים המתלמדים. העבודה של שני ההרכבים שווה ולכן:

$$\frac{2}{t_v} + \frac{1}{t_m} = \frac{1}{t_v} + \frac{n}{t_m} \, .$$

נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א ונקבל:

$$n = \frac{t_m}{t_v} + \frac{t_m}{t_m} = 2 + 1 = 3 \, .$$

1.13 קיץ תשע"ד מועד ב

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

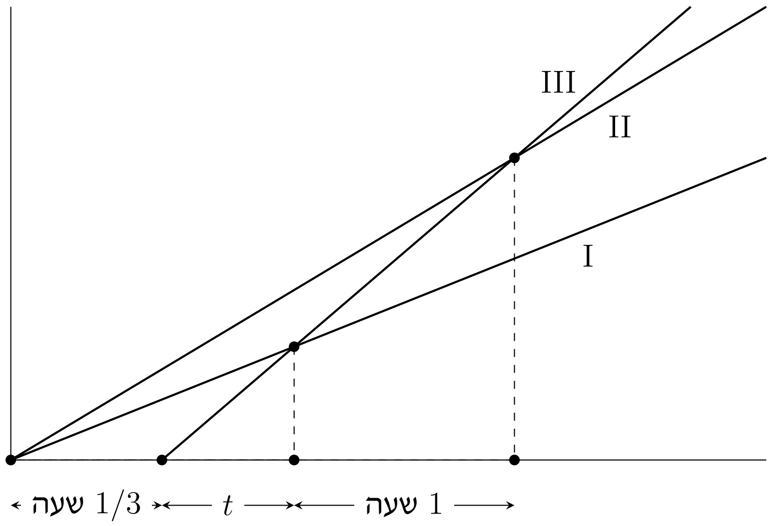
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.

רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.



נסמן: t = הזמן בין היציאה של III ועד למפגש שלו עם I, v = המהירות של III.

נתון: 6 = מהירות של I ו־ 7.5 = המהירות של II. שימו לב לשיפועים של הקווים.

בכל מפגש בין שתי דמויות המרחקים שווים. המפגש בין I ל־III:

$$6(t+1/3) = vt\,,$$

והמפגש בין II ו־III:

$$7.5(1/3+t+1) = v(t+1)\,.$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ביטוי עבור v ונציב במשוואה השנייה. נקבל משוואה ריבועית ב־t:

$$1.5t^2+2t-2=0\,,$$

שיש לה פתרון חיובי אחד $t=2/3$.

הזמן מהיציאה של III ועד המפגש שלו עם II הוא $t+1=5/3$ שעות.

1.14 קיץ תשע"ד מועד א

משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B .

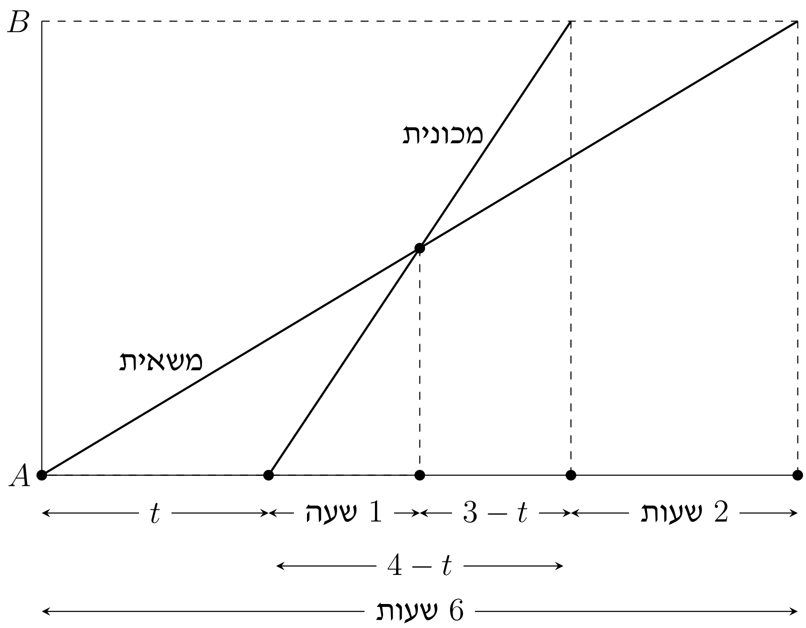
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A ,

והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.

המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.

המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.

מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).



בתרשים חשוב לרשום את כל פרק זמן, במיוחד כדי לקבל את זמן הנסיעה של המכונית.

נסמן: $t =$ זמן יציאת המכונית, $v_c =$ מהירות המכונית, $v_m =$ מהירות המשאית.

נכתוב משוואות למרחקים שווים, מ־ A עד למפגש ומ־ A עד ל־ B:

$$\begin{aligned} v_m(t+1) &= v_c \cdot 1 \\ v_m \cdot 6 &= v_c(4-t)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות מתקבלת משוואה ריבועית ב־ t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

שיש לה שני פתרונות $t = 1$ שעה ו־ $t = 2$ שעות.

1.15 חורף תשע"ד

נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ־ A ל־ B .

רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.

באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A .

מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.

הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B .

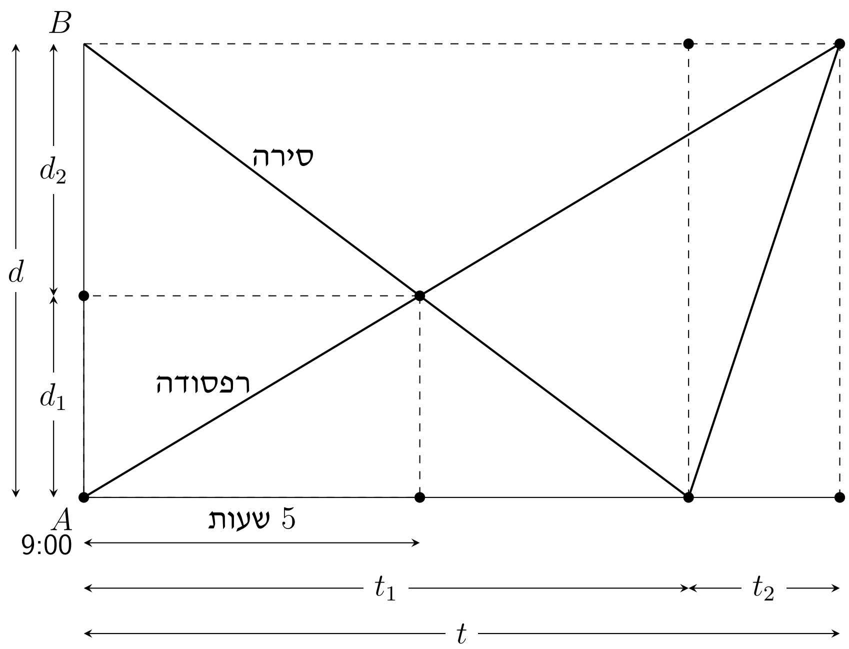
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.

נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.

האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.

מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

הערה: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



נסמן: $d =$ מרחק בין שני הנמלים, $d_1 =$ מרחק בין A למפגש, $d_2 =$ מרחק בין B למפגש.
$t =$ זמן עד למפגש ב־B, $v =$ מהירות הזרם.

מהירות הזרם היא נתון חשוב בפתרון הבעייה כי המהירויות של הסירה והרפסודה תלויות בה. כאשר הסירה מפליגה מ־B ל־A ובחזרה ל־B, היא עוברת מרחק כפול מהמרחק שהרפסודה עוברת באותו פרק זמן. נשווה את משוואות התנועה לפרק זמן זה:

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{15 - v} + \frac{d}{15 + v}\,.$$

d הצטמצם ונקבל משוואה ריבועית במהירות הזרם v:

$$v^2 + 30v - 225 = 0\,.$$

השורש החיובי שלה הוא $v = 6.21$.

עכשיו שאנחנו יודעים את המהירויות והזמן עד למפגש נתון, ננסה לחשב את המרחק d, שהוא הסכום של המרחקים שעוברים הרפסודה והסירה:

$$d = 5v + 5(15 - v)\,.$$

הפתרון הוא $d = 75$ (ללא תלות במהירות הזרם v).

את הזמן עד המפגש בנמל B אפשר לחשב לפי ההפלגה של הסירה או לפי ההפלגה של הרפסודה. כמובן שפשוט יותר לחשב עבור הקטע היחיד של הרפסודה:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{6.21} \approx 12.08\,.$$

בכל זאת נבדוק לפי הסירה:

$$t = \frac{d}{15 - v} + \frac{d}{15 + v} = \frac{75}{8.79} + \frac{75}{21.21} = 8.532 + 3.536 \approx 12.07\,.$$

בגלל עיגול של החישובים יש הבדל קטן בין שתי התוצאות.

הסירה והרפסודה יצאו בשעה 09:00 בבוקר וההפלגות לקחו יותר מ־12 שעות, כך המפגש השני התקיים לאחר השעה 09:00 בערב.

1.16 המלצות

- הקושי בפתרון של הבעיות הללו נובע מהצורך לתרגם את התיאורים המילוליים למשוואת. אפשר בקלות להתבלבל כאשר מתרגמים ביטויים כגון "לפני", "אחרי", "מהר יותר", וכו'. כדי לפתור את הבעיות יש להכין תרשים בו יצויין המסלול של כל דמות בשאלה.
- מצאתי שיש יתורונות מובהקים לשימוש בתרשימים דו־ממדיים כאשר הציר האופקי הוא הזמן והציר האנכי הוא המרחק. היתרונות הם:
  - נקודות המפגש בין הדמויות ברורות. זה חשוב כי בדרך כלל תכונות כגון מהירויות וכיוונים משתנות בנקודות המפגש.
  - המהירות של כל דמות משתקפת מהשיפוע את כל קטע קו. קל לוודא אם המהירויות שיופיעו במשוואות תואמות את התיאורים בשאלות, כגון "פי ארבע".
- מומלץ להכין תרשימים גדולים וברורים כדי סימנים שמוסיפים ממידע נתון או ממידע המתקבל מחישובים יהיו קריאים. לעתים, כדאי להכין תרשימים חדשים לכל סעיף כדי שמדע הנחוץ רק לסעיף אחד לא יקשה על עיון במידע הנחוץ לסעיף אחר.
- מצאתי שאפשר "לקרוא" את המשוואות ישירות מהתרשימים. לחילופין אפשר גם לסדר את הנתונים בטבלה כמקובל.
- נקודות מפגש נוחות מאוד לכתיבת זוג משוואות תנועה עם אותם נעלמים. הזמנים האם אותם זמנים (לפעמים בתוספת קבוע), והמרחקים שווים (אם הדמויות נוסעות בותו כיוון), או שסכום המרחקים שווה למרחק בין נקודות הקצה (כאשר הדמויות נוסעות אחת כלפי השנייה).
- פתרון המשוואות עצמן הוא בדרך כלל קל: שני משוואות עם שני נעלמים, כאשר המשוואות שיש לפתור הן לינאריות או ריבועיות.

פרק 2 סדרות

2.1 קיץ תשע"ח מועד ב

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית,
וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. **(1)** רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב־ n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האין־סופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

סעיף א

כדי להוכיח שסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה היא הנדסית, לא כדאי לחשב מנה של שני איברים עוקבים, כי איברים לא יצטמצמו. במקום זה, יש להציב את כלל הנסיגה כדי לקבל ערך של איבר כתלות של איבר אחר:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n} = -\frac{c^{n-2}}{-\frac{c^{n-3}}{a_{n-1}}} = ca_{n-1} .$$

המנה $a_{n+1}/a_{n-1} = c$ קבועה ולא תלוי ב־n. ההוכחה נכונה עבור כל זוג של איברים שיש הפרש של שניים במקומות שלהם בסדרה, ולכן ההוכחה נכונה גם עבור זוגות של מספרים זוגיים וגם עבור זוגות של מספרים א־זוגיים.

סעיף ב (1)

הסדרות של הזוגיים והאי־זוגיים הן סדרות הנדסיות **נפרדות** ויש לחשב את האיברים בנפרד:

$$a_1 = -\frac{1}{c}, \quad a_3 = ca_1 = -1, \quad a_5 = ca_3 = -c, \quad a_7 = ca_5 = -c^2$$
$$a_2 = -\frac{c^{1-2}}{a_1} = -\frac{c^{-1}}{-\frac{1}{c}} = 1, \quad a_4 = ca_2 = c, \quad a_6 = ca_4 = c^2 .$$

שבעת האיברים הראשונים של הסדרה הם:

$$-\frac{1}{c}, 1, -1, c, -c, c^2, -c^2 .$$

סעיף ב (2)

כאשר מסכמים את האיברים הם מצטמצמים פרט לאיבר הראשון, ולכן $S_7 = -\frac{1}{c}$.

סעיף ב (3)

כאשר יש מספר אי־זוגי של איברים המתחילים ממקום אי־זוגי, מספר האיברים האי־זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים. נבדוק דוגמה:

$$a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\,a_5\,,\,a_6\,,\,a_7\,,\,a_8\,,\,a_9\,.$$

מספר האיברים הוא 9, מהם 5 אי־זוגיים ו־4 זוגיים.

נצטרך לסכם את זוגיים והאי־זוגיים בנפרד, כי הסדרה המקורית אינה הנדסית. עבור שתי התת־סדרות, המנה הוא c, אבל האיבר הראשון שונה $-\frac{1}{c}, 1$:

$$S_{odd} + S_{even} = -\frac{1}{c}\frac{c^n-1}{c-1} + 1\cdot\frac{c^{n-1}-1}{c-1} = -\frac{1}{c}\,,$$

לא תלוי ב־n.

סעיף ג (1)

כאן הסדרה נתונה על ידי נוסחה ולא כלל נסיגה ולכן ניתן לחשב ישירות את המנה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{2}{a_{n+1}a_{n+2}}}{\dfrac{2}{a_n a_{n+1}}} = \frac{\dfrac{1}{a_{n+2}}}{\dfrac{1}{a_n}} = \frac{1}{\dfrac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{c}\,.$$

סעיף ג (2)

סדרה יורדת אם $0 < q = \dfrac{1}{c} < 1$. נתון $c > 0$, ולכן הסדרה יורדת אם $c > 1$.

סעיף ג (3)

עבור סדרה הנדסית יורדת:

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{b_1}{1-(1/c)} \\ &= \frac{-2}{a_1\cdot a_2}\cdot\frac{c}{c-1} \\ &= \frac{-2}{-\dfrac{1}{c}\cdot 1}\cdot\frac{c}{c-1} \\ &= \frac{2c^2}{c-1}\,. \end{aligned}$$

2.2 קיץ תשע"ח מועד א

a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו־ q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (IV-I) . רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I) $q < 0$

II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$

III) $a_1 < 0$

IV) $a_1 > 0$ או $q < 0$

נסמן ב־ T את סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הבע את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

סעיף א

השאלה יפה כי היא דורשת חשיבה, לא חישובים! נבדוק את הטענות על סדרה מוכרת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2\,.$$

אם נהפוך את כל הסימנים למינוס, נקבל סדרה שסכומה שלילי:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = -2\,.$$

ברור שהמנה עדיין חיובית:

$$\frac{-2^{-(n+1)}}{-2^{-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}\,.$$

לכן אפשר לפסול מייד תשובות I, II, IV ונשאר רק תשובה III.

נעבור לסדרה כללית. סדרה הנדסית מתכנסת רק אם $|q| < 1$. מהנוסחה עבור הסכום:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < 0\,,$$

ניתן לראות ש־a_1 שלילי כי המכנה חיובי $0 < 1 - q < 2$.

סעיף ב

כאן מדובר בתת־סדרות של סדרה הנדסית, ועוד תת־סדרות שאיבריהן במקום קבוע אחד מהשני (הפרש של שני מקומות: זוגי לזוגי או אי־זוגי לאי־זוגי). לכן, המנה של כל אחת מהסדרות היא q^2, והסכומים הם:

$$T = \frac{a_1}{1-q^2}, \qquad R = \frac{a_1 q}{1-q^2}\,.$$

מהמשוואה הנתונה $T + pR = 0$, נקבל $1 + pq = 0$ ו־ $p = -\dfrac{1}{q}$.

סעיף ג

הסדרה לא מתכנסת כי $|q| < 1$ גורר $|p| > 1$.

סעיף ד

שימו לב שהשאלה שואלת על **הסדרה המקורית** a_n ולא על b_n! נתון ש־p שלילי ולכן $q = -\dfrac{1}{p}$ חיובי. נתון שהסדרה מתכנסת ולכן $0 < q < 1$. מצאנו בסעיף א ש־a_1 שלילי ולכן $a_{n+1} > a_n$, כי מכפלה של מספר שלילי x עם מספר חיובי פחות מ־1 מקטינה את הערך המוחלט $|x|$ ומורידה את $-|x|$.

נבדוק בדוגמה: אם $a_n = -6, q = \frac{1}{2}$, אז:

$$a_{n+1} = a_n q = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \;>\; -6 = a_n\,.$$

2.3 חורף תשע"ח

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ־ 0.

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. **(1)** האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

שאלה זו מתאפיין בהצבה של נוסחאות לאיברים מסויימים לתוך הנוסחאות הכלליות.

סעיף א

נציב $a_1 + (n-1)d$ במשוואה $a_7 = -a_{17}$:

$$\begin{aligned}
&a_7 = a_1 + 6d = -(a_1 + 16d) = -a_{17}\\
&a_1 + 11d = 0\\
&a_{12} = a_1 + 11d = 0\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב (1)

נשווה את $-a_1$ לנוסחה לאיבר כללי:

$$-a_1 = a_n = a_1 + (n-1)d\,.$$

נציב $a_1 = -11d$ שישבנו בסעיף א:

$$-(-11d) = -11d + (n-1)d\,.$$

d מצטמצם ונקבל $n = 23$.

סעיף ב (2)

נציב $a_1 = -11d$ בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2\cdot -11d + (n-1)d) = \frac{dn}{2}(n-23) = 0\,.$$

נתון שההפרש d שונה מאפס וש־n מספר טבעי ולכן חיובי, כך שהביטוי מתאפס רק עבור $n = 23$.

סעיף ג

אם איבר חיובי וההפרש חיובי, המכפלה של שני איברים עוקבים היא חיובית, וכך גם אם שניהם שליליים. האפשרות היחידה לקבל מכפלה שלילית היא איבר שלילי והפרש חיובי או איבר חיובי והפרש שלילי:

$$\begin{aligned} &a_k < 0,\ a_{k+1} > 0 \\ &a_k > 0,\ a_{k+1} < 0\,. \end{aligned}$$

אבל ידוע שאחד האיברים בסדרה (a_{12}) הוא אפס:

$$\begin{aligned} &a_k < 0,\ a_{k+1} = 0,\ a_{k+2} > 0 \\ &a_k > 0,\ a_{k+1} = 0,\ a_{k+2} < 0\,, \end{aligned}$$

ולכן המכפלה של זוג איברים עוקבים חייבת להיות חיובית או אפס.

סעיף ד

נרשום את הסדרה לפי מה שיודע לנו ש־$a_{12} = 0$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{11},\ 0,\ -a_{11},\ \ldots,\ -a_2,\ -a_1,\ \ldots\,.$$

או ש־11 האיברים הראשונים שליליים אם ההפרש חיובי, או כל האיברים לאחר האיבר $a_{12} = 0$ שליליים אם ההפרש שלילי.

2.4 קיץ תשע"ז מועד ב

2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $1 < n$ באמצעות n ו־ k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \ldots$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב־ a_2).

ג. חשב את T .

שאלה זו שונה משאלות אחרות כי נתון ביטוי עבור **הסכומים** ולא עבור האיברים בסדרה.

סעיף א

ניתן לחשב את האיברים על ידי שימוש בנוסחה עבור S_n. האיבר הראשון מתקבל ישירות מהנוסחה:

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9}\,,$$

והאיבר הכללי מתקבל על ידי ההפרש בין הנוסחאות לסכומים עוקבים:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{2}{3^{n+1}}\,.$$

סעיף ב

המנה $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ לא תלויה ב־k. במבט ראשון נראה שהתשובה היא שהסדרה היא הנדסית עבור כל ערך של k, אולם זו **טעות**. המנה המתקבלת מ־$\frac{a_2}{a_1}$ חייבת להיות **שווה** למנה המתקבלת מהמקרה הכללי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. נחשב:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3(9k-1)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}\,.$$

הפתרון היחיד הוא $k = \frac{1}{3}$.

עבור הסעיף הבא נצטרך את האיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\,,$$

סעיף ג

האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא:

$$a'_1 = a_2^2 = (a_1 q)^2 = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{729}\,,$$

הסדרה החדשה היא הנדסית:

$$\left(\frac{a_{3(k+1)-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = \left(\frac{q a_{3k+1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = \left(\frac{q^2 a_{3k}}{a_{3k-1}}\right)^2 = \left(\frac{q^3 a_{3k-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}\,.$$

הסכום מתקבל מהנוסחה לסדרה הנדסית אינסופית עבור a', q':

$$S' = \frac{a'_1}{1 - q'} = \frac{\frac{4}{729}}{1 - \frac{1}{729}} = \frac{1}{182}\,.$$

2.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הסדרה $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

b_n ו־ c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n .

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב־ A_n ,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב־ B_n ,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב־ C_n .

ב. הראה ש־ $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי־שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

הנוסחה ל־a_n אינה כלל נסיגה כי איברים של הסדרה לא מופיעים בצד הימני של המשוואה. נתון שהסדרות b_n, c_n הנדסיות אך לא נתון אם הסדרה המקורית a_n הנדסית או לא.

סעיף א $(1,2)$

נתון ש־$a_n = b_n - c_n$, לכן כדי לקבל ערך של איבר בסדרה b_n, נצטרך לחשב את הערכים a_n, c_n, ובאופן דומה עבור איברים בסדרה c_n. נתון שני ערכים b_6, c_3 וקל לחשב איברים ב־a_n כי הם נתונים כפונקציה של n בלבד:

$$a_3 = \frac{(2^3+1)(2^3-1)}{2^3} = \frac{63}{8} \qquad a_6 = \frac{(2^6+1)(2^6-1)}{2^6} = \frac{65\cdot 63}{64}$$

$$b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8 \qquad c_6 = b_6 - a_6 = 64 - \frac{65\cdot 63}{64} = \frac{1}{64}\,.$$

כדי לחשב את מנה של c_n והמנה של b_n נשתמש בעובדה שהן סדרות הנדסיות וכדי לקבל את האיבר השישי מהאיבר השלישי יש להכפיל במנה לחזקת שלוש:

$$b_6 = b_3 q_b^3 \qquad q_b = \sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad b_3 = b_1 q_b^2 \qquad b_1 = \frac{b_3}{q_b^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c_6 = c_3 q_c^3 \qquad q_c = \sqrt[3]{\frac{c_6}{c_3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \qquad c_3 = c_1 q_c^2 \qquad c_1 = \frac{c_3}{q_c^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

סעיף ב

הטיעון נובע מחוקי הקיבוץ והחילוף של מספרים שלמים:

$$\begin{aligned} C_n &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= B_n - A_n\,. \end{aligned}$$

סעיף ג

הוכחנו ש־$C_n = B_n - A_n$, ונתונה שהסדרה c_n הנדסית. מסעיף א $c_1 = \frac{1}{2}$, $q_c = \frac{1}{2}$, ולכן:

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 1 - 2^{-n}\,.$$

בדיקה במחשבון מראה ש:

$$0.9 \not< 1 - 2^{-3} = 0.875 < 1$$

$$0.9 < 1 - 2^{-4} = 0.938 < 1\,.$$

לא לעצור כאן! השאלה מבקשת את **כל הערכים** של n המקיימים את האי־שוויון, ולכן התשובה המליאה היא כל מספר גדול או שווה ל־4, כי כאשר n גדל מעל ל־4, הערך של $1 - 2^{-n}$ עולה (ולכן גדול מ־0.9) אבל תמיד פחות מ־1.

2.6 חורף תשע"ז

נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$, $a_1 = -1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

סעיף א

נחשב את המנה על ידי הצבה עבור b_n לפי ההגדרה, ואחר כך הצבה עבור a_{n+1} לפי כלל הנסיגה. נקבל מנה קבועה ולכן הסדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{\frac{4a_n + 3}{a_n} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{3(2a_n + 1)}{2a_n + 1} = 3 \,.$$

סעיף ב

לא נתון שהסדרה a_n הנדסית, אבל בסעיף א הוכחנו שהסדרה b_n הנדסית, ולכן ניתן לבטא את סכום הסדרה $\frac{1}{a_n}$ כסכום של הסדרה b_n על ידי ההצבה $\frac{1}{a_i} = b_i - 2$:

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = (b_1 - 2) + \cdots + (b_n - 2) = b_1 + \cdots + b_n - 2n \,.$$

נתון ש $a_1 = -1$, כך ש־$b_1 = \frac{1}{a_1} + 2 = 1$ ובסעיף א חישבנו $q_b = 3$. סכום הסדרה של $\frac{1}{a_n}$ הוא:

$$b_1 + \cdots + b_n - 2n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} - 2n = \frac{3^n - 4n - 1}{2} \,.$$

סעיף ג

לפי ההגדרה של b_n נוכל לבטא את הסכום כך:

$$(b_1 - 2) - (b_2 - 2) + \cdots + (b_{n-1} - 2) - (b_n - 2) \,.$$

נתון שמספר האיברים זוגי ולכן סכום הקבועים מתאפס. המנה של הסדרה היא -3 והסכום הוא:

$$b_1 - b_2 + \cdots + b_{n-1} - b_n = \frac{1((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = \frac{(-3)^n - 1}{-4} = \frac{1 - 3^n}{4} \,,$$

כי מספר האיברים זוגי ולכן $(-3)^n = 3^n$.

2.7 קיץ תשע"ו מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3,

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.

(2) נתון כי היחס שמופיע בתת־סעיף (1) שווה ל־ 1.9.

סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

סעיף א (1)

מספר האיברים החדשים הוא $n-1$, כפי שרואים אם רושמים את הסדרה:

$$a_1,\ a_1',\ a_2,\ a_2',\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_{n-1}',\ a_n\,.$$

נתון שהסדרה החדשה גם היא חשבונית. הפרש הסדרה אינו מספר שלם אלא 1.5! אז מה? נחשב את היחס בין סכומי הסדרות, כאשר האיבר a_1 מצטמצם:

$$\frac{S_{new}}{S_{old}} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1+1.5(2n-1-1))}{\frac{n}{2}(2a_1+3(n-1))} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1+3(n-1))}{\frac{n}{2}(2a_1+3(n-1))} = \frac{2n-1}{n}\,.$$

סעיף א (2)

מ־$1.9 = \frac{2n-1}{n}$ נקבל $n=10$. אם הסדרה הנתונה חשבונית וגם הסדרה החדשה חשבונית, סדרת האיברים החדשים היא חשבונית עם אותו הפרש כמו בסדרה המקורית, 3. האיבר הראשון של האיברים החדשים הוא $a_1' = a_1 + 1.5$, ונתון סכום האיברים החדשים:

$$\frac{10-1}{2}(2(a_1+1.5)+((10-1)-1)\cdot 3) = 130.5\,,$$

והפתרון הוא $a_1 = 1$.

סעיף ב

נתון שהסדרה המתקבלת לאחר הכנסת k איברים חדשים בין איברים סמוכים של הסדרה הנתונה:

$$a_i,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k,\ a_{i+1}$$

היא חשבונית. ההפרשים בין האיברים החדשים חייבים להיות שווים וסכומם שווה להפרש של הסדרה הנתונה שהוא 3. יש $k+1$ הפרשים שערכם $\frac{3}{k+1}$.

2.8 קיץ תשע"ו מועד א

2. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : S_1 , S_2 , S_3 , ...

נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0 .

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.

ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום

$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{20} - b_{19})$.

סעיף א

האיברים a_4, a_8, a_{12}, a_{16} מהווים סדרה חשבועית עם הפרש d^4. נתון הסכום של הסדרה:

$$\begin{aligned}(a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 15d) &= 224\\ a_1 + 9d &= 56\,.\end{aligned}$$

יש לנו משוואה אחת עם שני נעלמים. לא נתייאש וננסה בכל זאת לחשב את הסכום S_{19}:

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064\,.$$

סעיף ב

נשווה את המשוואה הנתונה $S_n = n \cdot a_n$ לנוסחה עבור סכום של סדרה חשבונית:

$$\begin{aligned}n \cdot a_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)\\ n(a_1 + (n-1)d) &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)\,.\end{aligned}$$

נפשט את המשוואה ונקבל $d = d/2$ שהפתרון היחיד שלה הוא $d = 0$.

סעיף ג

נציב 0 עבור d: $a_1 + 9d = a_1 + 0 = 56$.

סעיף ד

במבט ראשון נראה שכדאי לצמצם את סכום הסדרה ל־$b_{20} - b_1$, אבל זה מבוי סתום כי אין לנו דרך לחשב את איברי הסדרה b_n. במקום זה נחשב את $(b_{i+1} - b_i)$ וניעזר במשוואה הנתונה:

$$b_{i+1} - b_i = a_i + S_i = (a_1 + (i-1) \cdot 0) + \frac{i}{2}(2a_1 + (i-1) \cdot 0) = a_1(1+i)\,.$$

הסכום הוא:

$$a_1(2 + 3 + \cdots + 20) = 56 \cdot \frac{19}{2}(2 \cdot 2 + (19-1) \cdot 1) = 11704\,.$$

2.9 חורף תשע"ו

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ ,\ \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב־ 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו־ II:

$$\text{I.}\quad a_1 \cdot a_2\ ,\ a_2 \cdot a_3\ ,\ a_3 \cdot a_4\ ,\ \dots\ ,\ a_n \cdot a_{n+1}\ ,\ a_{n+1} \cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\ ,\ \frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}\ ,\ \frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}\ ,\ \dots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730 .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I .

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II .

סעיף א

נתון:

$$(1)\, a_4 - a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad (2)\, a_6 - a_1 = 31\,.$$

נציב $a_n = a_1 q^{n-1}$ עבור a_2, a_3, a_4, ב־(1), ונקבל שלוש תשובות $q = 1, q = 2, q = -2$.

נתון שהסדרה **עולה** ולכן $q = 2$. נציב $a_1 q^5 = 32 a_1$ עבור a_6 ב־(2), ונקבל $a_1 = 1$.

סעיף ב (1)

עבור סדרה I:

$$q_I = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n\, q^2}{a_n} = q^2 = 4\,,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית עולה. עבור סדרה II:

$$q_{II} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) / \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{q+q}{q+q} = 1\,.$$

הסדרה הנדסית אבל **לא עולה**.

סעיף ב (2)

מסכום הסדרה ניתן לחשב את מספר האיברים בסדרה:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 + \cdots + a_{n+1} \cdot a_{n+2} &= 2730 \\ (1 \cdot 2) \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} &= 2730 \\ 4^{n+1} &= 4096 \\ n &= 5\,. \end{aligned}$$

שימו לב! אמנם $n=5$ אבל מספר האיברים בסדרה I הוא $n+1=6$:

$$(1)\, a_1 \cdot a_2, \quad (2)\, a_2 \cdot a_3, \quad (3)\, a_3 \cdot a_4, \quad (4)\, a_4 \cdot a_5, \quad (5)\, a_5 \cdot a_6, \quad (6)\, a_6 \cdot a_7\ (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\,.$$

סעיף ב (2)

חישבנו $q_{II}=1$. נחשב את a_1^{II}:

$$a_1^{II} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4\,.$$

שימו לב! מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

$$(1)\, \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \quad (2)\, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \quad (3)\, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \quad (4)\, \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5}, \quad (5)\, \frac{a_6}{a_5} + \frac{a_7}{a_6} \left(= \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)\,.$$

ולכן סכום האיברים הוא:

$$a_1^{II} + a_1^{II} \cdot 1 + a_1^{II} \cdot 1^2 + \cdots + a_1^{II} \cdot 1^4 = 4 \cdot 5 = 20\,.$$

2.10 קיץ תשע"ה, מועד ב

.2 נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,

וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל־ $3\frac{7}{16}$.

מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

סעיף א

החילוק של איברים במרחק שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} b_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n b_n} b_n} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב

נחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי־זוגיים:

$$\begin{aligned}
S_{odd} &= b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = b_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_1 \\
S_{even} &= b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = b_2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2^1 b_1}\,.
\end{aligned}$$

מ:

$$S_{odd} + S_{even} = \frac{15}{8}\left(b_1 + \frac{1}{2b_1}\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16}\,.$$

נקבל משוואה ריבועית $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$ שיש לה שני פתרונות $b_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$.

2.11 חורף תשע"ו

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ ,\ \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב־ 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו־ II:

$$\text{I.}\quad a_1\cdot a_2\ ,\ a_2\cdot a_3\ ,\ a_3\cdot a_4\ ,\ \dots\ ,\ a_n\cdot a_{n+1}\ ,\ a_{n+1}\cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\ ,\ \frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}\ ,\ \frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}\ ,\ \dots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730 .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I .

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II .

סעיף א

שימו לב ששואלים על **ההפרשים** של סדרה **הנדסית**.

המנתון הראשון:

$$\begin{aligned} a_4-a_3 &= 4(a_2-a_1)\\ a_1q^3-a_1q^2 &= 4(a_1q-a_1)\\ q^2(q-1) &= 4(q-1)\,. \end{aligned}$$

פתרון אחד של המשוואה הוא $q=1$ אבל נתון שהסדרה עולה ולכן $q\neq 1$. אם $q\neq 1$, נחלק ב־$q-1$ ונקבל $q^2=4$. כאשר המנה שלילי, הסימנים של איברי הסדרה מתחלפים, אז הפתרון היחיד הוא $q=2$.

מהנתון השני:

$$\begin{aligned} a_6-a_1 &= 31\\ a_1q^5-a_1 &= 31\\ 32a_1-a_1 &= 31\\ a_1 &= 1\,. \end{aligned}$$

סעיף ב (1)

עבור סדרה I:

$$q_I=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_n\,q^2}{a_n}=q^2=4\,,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית עולה.

עבור סדרה II:

$$q_{II} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) / \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{q+q}{q+q} = 1\,.$$

הסדרה הנדסית אבל **לא עולה**.

סעיף ב (2)

מסכום הסדרה ניתן לחשב את מספר האיברים בסדרה:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 + \cdots + a_{n+1} \cdot a_{n+2} &= 2730 \\ (1 \cdot 2) \cdot \frac{4^{n+1}-1}{4-1} &= 2730 \\ 4^{n+1} &= 4096 \\ n &= 5\,. \end{aligned}$$

שימו לב! אמנם $n = 5$ אבל מספר האיברים בסדרה I הוא $n+1 = 6$:

$$(1)\, a_1 \cdot a_2,\ \ (2)\, a_2 \cdot a_3,\ \ (3)\, a_3 \cdot a_4,\ \ (4)\, a_4 \cdot a_5,\ \ (5)\, a_5 \cdot a_6,\ \ (6)\, a_6 \cdot a_7\ (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\,.$$

סעיף ב (3)

חישבנו $q_{II} = 1$. נחשב את a_1^{II}:

$$a_1^{II} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4\,.$$

שימו לב! מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

$$(1)\, \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2},\ \ (2)\, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3},\ \ (3)\, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4},\ \ (4)\, \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5},\ \ (5)\, \frac{a_6}{a_5} + \frac{a_7}{a_6}\left(= \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right).$$

$q_{II} = 1$ ולכן **כל** איברי הסדרה שווים ל-$a_1 = 4$. הסכום הוא: $4 \cdot 5$.

2.12 קיץ תשע"ה מועד ב

2. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,
וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל־ $3\frac{7}{16}$.
מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

סעיף א

החילוק של איברים במרחק שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \dfrac{1}{2^n \cdot b_n} \cdot b_n} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב

אנחנו לא יודעים אם הסדרה כולה היא הנדסית, לכן נחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי־זוגיים:

$$\begin{aligned} S_{odd} &= b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = b_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_1 \\ S_{even} &= b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = b_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2^1 b_1}\,. \end{aligned}$$

מ:

$$S_{odd} + S_{even} = \frac{15}{8}\left(b_1 + \frac{1}{2b_1}\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16}\,.$$

נקבל משוואה ריבועית $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$ שיש לה שני פתרונות $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{3}{2}$.

2.13 קיץ תשע"ה מועד א

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ldots,\ a_n\ ,\ldots$.

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא $20{,}460$.

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

סעיף א

נתון:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + qa_n\right)$$

עבור $n \geq 2$. a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית $2q^2 - 5q + 2 = 0$ שיש לה שני פתרונות $q = \frac{1}{2}, q = 2$. נתון שהסדרה יורדת ולכן $q_a = \frac{1}{2}$.

סעיף ב (1)

$$q_b = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\dfrac{(a_n)^2}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}} = \frac{a_n q^2}{(a_n q)^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_n q} = \frac{1}{q} = 2\,.$$

סעיף ב (2)

מ:

$$S_{10} = \frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 20460$$

מתקבל $b_1 = 20$. השאלה מבקשת את סכום **הסדרה המקורית** a_n. כבר חישבנו את המנה q_a וניתן לחשב את a_1 מהנוסחה עבור b_n:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1 q_a}{(a_1)^2} = \frac{1}{2a_1} \\
a_1 &= \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{40} \\
S_a &= \frac{a_1}{1 - q_a} = \frac{1}{40\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{20}\,.
\end{aligned}$$

2.14 חורף תשע"ה

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$
$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

שימו לב שלא נתון שהסדרה כולה היא חשבונית.

סעיף א

כדאי לרשום את איברי הסדרה כדי לוודא מהם האיברים האמצעיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50}.$$

ניתן לחשב את הסכום מהגדרת הסדרה:

$$a_{50} + a_{51} = 4 \cdot 50 + 2 = 202 .$$

סעיף ב

במבט ראשון השאלה נראית בעייתית כי נתונה נוסחה לחישוב איברים סמוכים זה לזה $a_n + a_{n+1}$, אבל האיברים הזוגיים נמצאים במרחק שני מקומות זה מזה וכך גם האיברים האי־זוגיים $a_{n+2} - a_n$. חבל שאין לנו $a_{n+1} - a_n$ ו־$a_{n+2} - a_{n+1}$. צמד הביטויים האלה יכול לרמוז ל־"טריק" ידוע במתמטיקה: אם נוסיף ונחסיר את אותו ערך לביטוי, ערך הביטוי לא משתנה:

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_k &= a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k \\ &= (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) \\ &= (4(k+1) + 2) - (4k + 2) \\ &= 4 . \end{aligned}$$

ההפרש קבוע ולא תלוי בזוגיות, ולכן הזוגיים והאי־זוגיים מהווים סדרות חשבוניות.

סעיף ג

לא ידוע שהסדרה a_n חשבונית, אבל a_{51} הוא איבר בסדרת **האי־זוגיים**. נרשום את הסדרה כדי לדייק בספירת האיברים הזוגיים והאי־זוגיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}^{50}.$$

ברור שמספר האיברים האי־זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים, 51 אי־זוגיים ו־50 זוגיים. a_{51} הוא האיבר ה־25 העומד באמצע הסדרה. האיבר הראשון של המספרים האי־זוגיים נתון, $a_1 = 4$, ואת ההפרש $d = 4$ חישבנו בסעיף הקודם. מכאן:

$$a_{51} = a_1 + 25d = 4 + 25 \cdot 4 = 104\,.$$

סעיף ד

נחשב את סכום הסדרה כחיבור של סכום האי־זוגיים וסכום הזוגיים. $a_1 = 4$ נתון, וניתן לחשב לפי הנוסחה הנתונה:

$$a_2 = a_{1+1} = 4 \cdot 1 + 2 - a_1 = 4 + 2 - 4 = 2\,.$$

כבר חישבנו שהפרשים של שתי תת־הסדרות הם 4. מספר האי־זוגיים הוא 51 ומספר הזוגיים הוא 50. הסכום הוא:

$$S = S_{odd} + S_{even} = \frac{51}{2}(2 \cdot 4 + 50 \cdot 4) + \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 4) = 5304 + 5000 = 10304\,.$$

2.15 קיץ תשע"ד מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,...$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, $a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2}$, מקיימים:

$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$a_5\ ,\ a_9\ ,\ a_{13}\ ,\ ...\ ,\ a_{4k+1}$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה ה<u>נתונה בפתיח</u> הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

סעיף א

הסדרה חשבונית ולכן ניתן להשתמש להציב בתוך המשוואות הנתונות ולקבל שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned}(a_n+2d)^2-a_n^2 &= 216\\ 4a_nd+4d^2 &= 216\\ a_n+(a_n+d)+(a_n+2d) &= 54\\ 3a_n+3d &= 54\,.\end{aligned}$$

הפתרון הוא $d=3, a_n=15$.

סעיף ב

הסדרה החדשה חשבונית שאיבריה $a'_1, a'_2, \ldots$ הם:

$$\overbrace{a_5=a_1+4d}^{a'_1},\quad a_6=a_5+5d,\quad a_7=a_5+6d,\quad a_8=a_5+7d,\quad \overbrace{a_9=a_5+8d}^{a'_2}\,.$$

בסדרה החדשה $d'=4d=12$ ו־$a'_1=a_5=-21+4d=-9$. מסכום הסדרה החדשה:

$$\frac{k}{2}(2a'_1+(k-1)d')=\frac{k}{2}(-18+(k-1)\cdot 12)=450$$

מתקבלת משוואה ריבועית $2k^2-5k-150=0$ שהשורש החיובי שלה הוא $k=10$.

2.16 קיץ תשע"ד מועד א

2. בסדרה חשבונית יש 3n איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0 .

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0 .

סכום כל איברי הסדרה הוא 726 .

מצא את הפרש הסדרה.

סעיף א

כדי לדייק עם האינדקסים כדאי לרשום את הסדרה עם סימון של הסדרות החלקיות:

$$\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{S_1}, \overbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}}^{S_2}, \overbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{3n}}^{S_3}}_{S_{3n}}\,.$$

נתון $S_3 = 2S_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}(2(a_1+2nd)+(n-1)d) &= 2\cdot\frac{n}{2}(2(a_1+nd)+(n-1)d)\\
2a_1+(5n-1)d &= 4a_1+(6n-2)d\\
2a_1+(n-1)d &= 0\,.
\end{aligned}$$

הביטוי בצד השמאלי של המשוואה האחרונה הוא הסכום S_1.

דרך אחרת לפתור את הבעיה היא להחסיר את סכום התת־הסדרות מסכום הסדרה כולה:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_{3n}-(S_2+S_3) = S_{3n}-(S_2+2S_2) = S_{3n}-3S_2\\
&= \frac{3n}{2}(2a_1+(3n-1)d) - 3\cdot\frac{n}{2}(2(a_1+nd)+(n-1)d)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

בבחינה של חורף תשע"ב אורך הסדרה הוא $2n-1$, ונתונים הסכומים של n האיברים הראשונים ו־n האיברים האחרונים. רק רישום זהיר של הסדרה יבהיר שיש חפיפה בין שתי תת־הסדרות:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}\!\!\!\!\underbrace{, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}\,.$$

בדוגמה קל יותר לשים לב לחפיפה. עם $n=4$:

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, a_4}^{4}\!\!\!\!\underbrace{, a_5, a_6, a_7}_{4}\,.$$

סעיף ב

נתון סכום הסדרה ועלינו למצוא d למרות שאין לנו a_1. נבדוק אם הנתון השני יכול לעזור:

$$a_5 + a_7 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 0\,.$$

מכאן ש־$a_1 = -5d$.

בסעיף א חישבנו ש־$S_1 = 0$ ונציב עבור a_1:

$$\frac{n}{2}(-10d + (n-1)d) = 0\,.$$

d לא יכול להיות 0 כי אחרת מהנתון שהסכום של שני איברים הוא אפס אפשר להסיק שכל איברי הסדרה הם אפס. זה סותר את הנתון שהסכום הוא מספר חיובי. לכן אפשר לחלק את המשוואה ב־d ונקבל $n = 11$.

נציב עבור a_1, n בנוסחה ל־S_{3n}:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d) \\ &= \frac{33}{2}(-10d + (33-1)d) \\ &= \frac{33}{2} \cdot 22d = 363d = 726\,, \end{aligned}$$

ונקבל $d = 2$.

2.17 חורף תשע"ד

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1 \ , \ -a_2 \ , \ a_3 \ , \ -a_4 \ , \ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2} \ , \ \frac{1}{a_3} \ , \ \frac{1}{a_4} \ , \ \ldots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

סעיף א

המנה של הסדרה השלישית קבועה כי נתון שהסדרה הראשונה הנדסית:

$$\frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \,.$$

סעיף ב

נשתמש בשני הסכומים הנתונים כדי לכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{1-q} &= 6 \\ \frac{-a_2}{1-(-q)} &= -3\,. \end{aligned}$$

הפתרון הוא $q = \frac{1}{3}$ ו־$a_2 = 4$.

בסדרה השלישית, האיבר הראשון הוא $\frac{1}{4} = \frac{1}{a_2}$ וההפרש הוא $\frac{1}{d} = 3$ מהסכום השלישי ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} &= 273.25 \\ 3^n &= 2187 \\ n &= 7\,, \end{aligned}$$

כאשר בדקנו חזקות של 3 עד שהתקבל 2187.

2.18 המלצות

- **חובה לקרוא את השאלות בזהירות רבה.** בבחינה של קיץ תשע"ה א, סעיף ב שואלת על סדרה חדשה b_n אבל בסוף חוזרת ומבקשת למצוא את הסכום של הסדרה הנתונה a_n.

- שימו לב אם סדרה היא חשבונית, הנדסית או לא זו ולא זו.

- ברוב השאלות נתונה סדרה ומוגדרת סדרה חדשה המובססת על הסדרה הנתונה. **אין בהכרח קשר** בין תכונה של הסדרה המקורית והסדרה החדשה. להלן שתי סדרות חשבוניות, אבל כאשר משלבים את שתיהן, מתקבלת סדרה שאיננה חשבונית:

$$1,\quad 4,\quad 7,\quad 10,\quad 13,\quad \ldots$$

$$2,\quad 5,\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad \ldots$$

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 7,\quad 8,\quad 10,\quad 11,\quad 13,\quad 14,\quad \ldots$$

- כאשר מבקשים להוכיח שתת־סדרת הזוגיים חשבונית או הנדסית וגם תת־סדרת האי־זוגיים, הוכחה אחת תספיק כי אם $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ קבוע, לא משנה אם n זוגי או אי־זוגי.

- כדאי לרשום את איברי הסדרה כדי לדייק במקומות של האיברים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50}$$

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}_{50}, a_{51}, \underbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}_{50}\,.$$

- מקרה מעניין הוא תת־סדרות חופפות (בחינה של חורף תשע"ב שלא נמצאת במסמך זה):

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}$$

$$a_1, a_2, \ldots, \underbrace{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}$$

- קיימות שתי דרכים לסכם מספר תת־סדרות (בחינה של קיץ תשע"ד א). דרך אחת היא לסכם כל תת־סדרות בנפרד עם ערכי ה־d, a_1 או n, q שלהן. זה קורה לעתים קרובות כאשר השאלה מבקשת לחשב סכום של סדרה, אבל ידוע רק שתת־סדרות חשבוניות או הנדסיות, למשל, זוגיים ואי־זוגיים (בחינה של קיץ תשע"ח ב).

- דרך אחרת היא לחבר הסכומים של תת־סדרות ולהחסיר את התוצאה מסכום הסדרה כולה:

$$S_1 = S_n - (S_2 + S_3)\,.$$

- בסדרה קיימים ארבעה נעלמים d, a_1 או S, n, q. כדי למצוא את ערכו של נעלם אחד, צריך לדעת את ערכי שלושת הנעלמים האחרים (או שניים אם לא מדובר בסכום). לפעמים, מספיק לדעת את הקשר בין שני נעלמים, כגון $a_1 + 11d = 0$ בבחינה של הורף תשע"ח.

- הבחינה של חורף תשע"ו מעניינת כי מספר האיברים הוא לא הערך של המספר n המופיע בשאלה. חשוב לרשום דוגמה מספרית כדי לוודא מהו מספר האיברים:

$$(1)\, a_1 \cdot a_2,\quad (2)\, a_2 \cdot a_3,\quad \cdots\quad (5)\, a_5 \cdot a_6 = (a_n \cdot a_{n+1}),\quad (6)\, a_6 \cdot a_7\; (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\,.$$

- טריק שימושי הוא לחבר ולהחסיר את אותו ערך בביטוי (בחינה חורף תשע"ה):

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k = (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k)\,.$$

- הכנסת איברים חדשים בתוך סדרה לא בהכרח שומרת על הסדרה כחשבונית או הנדסית. השורה הראשונה להלן היא סדרה חשבונית. בשורה השנייה הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה היא חשבונית. בשורה השלישית הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה איננה חשבונית.

$$1,\quad 5,\quad 9,\quad 13,\quad 17$$

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\quad 13,\quad 15,\quad 17$$

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 6,\quad 9,\quad 10,\quad 13,\quad 14,\quad 17$$

בבחינה של קיץ תשע"ו ב כתוב במפורש שהסדרה חדשה חשבונית.

- בחישוב הפרש או מנה, כדאי להציב ב־a_{n+1} או a_{n-1} ביטוי שיש בו a_n. הנה דוגמה מהבחינה של קיץ תשע"ה א:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + qa_n\right)\,.$$

a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית ב־q.

פרק 3 הסתברות

3.1 קיץ תשע"ח מועד ב

במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k. נמק.

שאלה זו ארוכה במיוחד, אבל לא קשה במיוחד, כי ניתן לפתור את כל הסעיפים באמצעות נוסחת ברנולי בלבד.

סעיף א (1)

שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיוק אחת** משלושת השאלות האחרות:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

סעיף א (2)

כדי לעבור את המבחן עליו לצבור **לפחות** שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם יש להוסיף את ההסבתרויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת **בדיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$ ולא $\frac{1}{4}$ כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג

השאלה בסעיף זה דומה לשאלות בסעיפים הקודמים, רק במקום מספר קבוע של תשובות נכונות / לא נכונות ידועות, המספר ניתן על ידי פרמטר.

אם הדס ידעה ש־k מתוך 4 תשובות לא נכונות, ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה היא $\frac{1}{4-k}$, וההסתברות ענתה תשובה לא נכונה היא $\frac{4-k-1}{4-k}$, כי $1 = \frac{4-k-1}{4-k} + \frac{1}{4-k}$. כדי לקבל ציון **בדיוק** 100 הדס צריכה לבחור תשובות נכונות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בדיוק** 60 עליה לבחר תשובות לא נכונות לשתי השאלות הנותרות.

אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו, כי כאשר מחשבים את ההסתברות של "הכל" או "אף אחד", $\binom{n}{k} = 1$, וגם $(1-p)^0 = 1$ או $p^0 = 1$, ולכן, מספיק לחשב את ההסתברות של האירוע לחזקת מספר השאלות:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $k^2 - 6k + 8 = 0$ שהפתרונות שלה הם $k = 2, k = 4$. הפרמטר k מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן **אינן** נכונות, ונתון (בשורה השנייה של השאלה) שתשובה אחת נכונה, כך שיש לפסול את הפתרון $k = 4$ ולבחור $k = 2$.

3.2 קיץ תשע"ח מועד א

בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

לפני שניגש לפתור את השאולות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון. נסמן ב־N את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב־A את התלמידים שעברו את המבחן.

די ברור שאם 37% נעזרו בחבריהם ו־35 מהם עבור אז $P(N \cap A) = 0.35$, אבל בכל זאת נחשב בצורה פרומלית. נתון ש־$P(N) = 0.37$. **מהם** עברו את הבחינה $\frac{35}{37}$, כך שערך זה הוא ההסתברות המותנית $P(A/N)$. נחשב:

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{P(N \cap A)}{0.37} = \frac{35}{37} \\ P(N \cap A) &= 0.35\,. \end{aligned}$$

עד כאן טבלת ההסתברויות היא:

	A	$\overline{A}$	
N	0.35	0.02	0.37
$\overline{N}$			0.63
			1.0

בהמשך נתון ש:

$$P(\overline{N}\cap\overline{A}) = \frac{P(N\cap A)}{5} = \frac{0.35}{5} = 0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\boldsymbol{A}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{N}$	0.35	0.02	0.37
$\overline{\boldsymbol{N}}$	0.56	0.07	0.63
	0.91	0.09	1.0

סעיף א

נקרא את השאלה בעיון: "בחרו ... תלמיד ... שלא עבר את המבחן. מה ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?" הניסוח שני שלבים מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N/\overline{A}) = \frac{P(N\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב

"ידוע ש" מכוון להסתברות מותנית, כי השאלה אם התלמידה עברה את המבחן או לא, תלוי בעובדה שאנו יודעים שהיא נעזרה או לא נעזרה בחברים.

עבור יעל ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/N) = \frac{P(A\cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459\,,$$

ועבור הדס ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/\overline{N}) = \frac{P(A\cap\overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889\,.$$

ליעל הסתברות גבוהה יותר לעבור את המבחן.

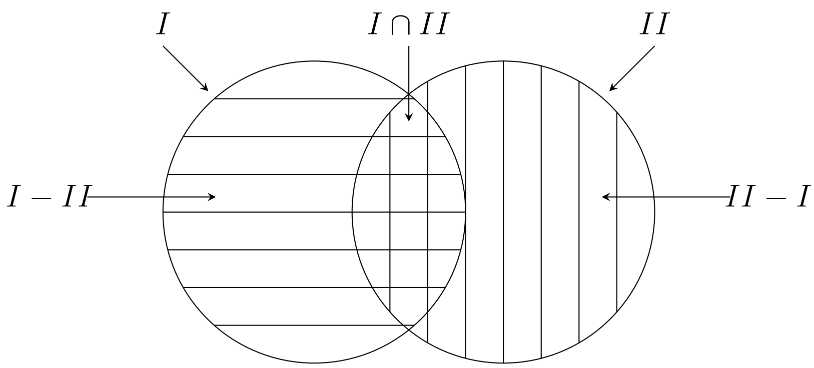
סעיף ג

שליש של שש הוא שניים. (שימו לב שלא לקרוא "שלושה" במקום "שליש"!) החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך $P(\overline{N}\cap A) = 0.56$ נמצא בטבלה:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(1-0.56)^4 = 0.1763\,.$$

סעיף ד

הניסוח "**לפחות אחת**" משתי הטענות I, II אומר שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**. בתרשים להלן שני העגולים המייצגים את שני האירועים I, II, והאירוע "לפחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו:



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים, ומחסירים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II)\,.$$

בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד, כאשר הסימון $A-B$ הוא כל האיברים בקבוצה A שאינם בקבוצה B:

$$P(I \cup II) = P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II)\,.$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	
0.37	0.02	0.35	$\boldsymbol{N}$
0.63	0.07	0.56	$\overline{\boldsymbol{N}}$
1.0	0.09	0.91	

	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	
0.37	0.02	0.35	$\boldsymbol{N}$
0.63	0.07	0.56	$\overline{\boldsymbol{N}}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$\begin{aligned} P(N \cup \overline{A}) &= P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44 \\ P(N \cup \overline{A}) &= P(N - \overline{A}) + P(\overline{A} - N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,. \end{aligned}$$

3.3 חורף תשע"ח

למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2 , ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4 .

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א

נסמן ב־n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1.

מיכל תנצח אם היא מטילה 4 (הסתברות $\frac{3}{6}$), לא משנה מה גלית מטילה (הסתברות 1), או אם היא מטילה 2 (הסתברות $\frac{3}{6}$), וגלית מטילה 1 (הסתברות $\frac{n}{6}$):

$$\frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12}\,,$$

והפתרון הוא $n=1$.

סעיף ב

גלית תנצח אם היא תנצח ב־$3,4,5$ סיבובים. ההסתברות לניצחון בכל סיבוב היא $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$:

$$\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג

המילים **אם ידוע** מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון}/\text{גלית תנצח})=\frac{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון}\cap\text{גלית תנצח})}{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})}\,.$$

ההסתברות במנה: כדי שגלית תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב־$2,3,4$ מהסיבובים הנותרים:

$$\frac{5}{12}\left[\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]=\frac{5}{12}\cdot 0.5534\,.$$

ההסתברות במכנה היא $\frac{5}{12}$ ולכן התשובה היא 0.5534.

3.4 קיץ תשע"ז מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

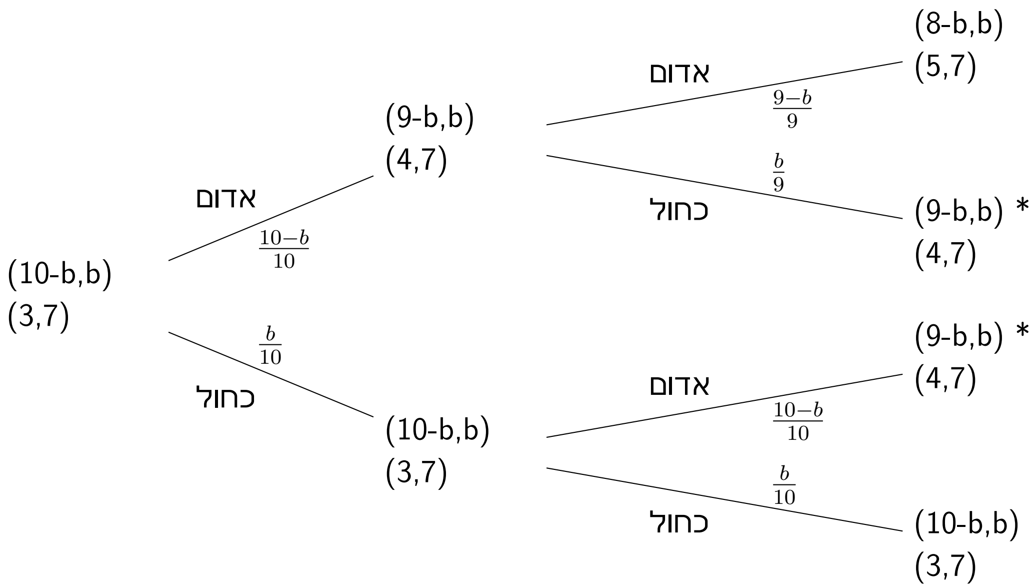
חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?



המילים "מוציאים באקראי ... **ולאחר מכן** שוב מוציאים באקראי" מכוונות לשימוש בעץ. נסמן ב־b את מספר הכדורים הכחולים בקופסה I. בתרשים בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I, ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II.

סעיף א

הכוכביות מסמנות את שתי האפשרויות בהן הוצאנו כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. נשווה את הסתברות הנתונה לסכום ההסתברויות של שני המסלולים:

$$\frac{10-b}{10}\cdot\frac{b}{9}+\frac{b}{10}\cdot\frac{10-b}{10}=\frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $b^2-10b+25=0$ שיש לה פתרון אחד $b=5$.

סעיף ב

בתרשים רשום מספר הכדורים האדומים מתוך כל הכדורים בקופסה II. מלמעלה למטה:

$$\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12},\;\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11},\;\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11},\;\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}\,.$$

את ההסתברויות להגיע לכל אחד מהמצבים נקבל לאחר הצבת $b=5$. נסכם את ההסתברויות להוציא כדור אדום:

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+$$
$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=0.3595\,.$$

סעיף ג

המילים "**ידוע ש-**" מכוונת להסתברות מותנית:

$$P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה } II / \text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II)=$$

$$\frac{P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה } II \cap \text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II)}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II)}$$

ישארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו אברעה כדורים אדומים לפני הבחירה. ההסתברות במנה היא $\frac{19}{36}$, ההסתברות (הנתונה!) שנגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית, כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II, 4 מתוך 11 כדורים. חישבנו את ההסתברות במכנה בסעיף ב:

$$\frac{\frac{19}{36}\cdot\frac{4}{11}}{0.3595}=0.53385\,.$$

3.5 קיץ תשע"ז מועד א

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א

נסמן ב־D את האירוע "לדייר יש קלנועית" ואת ההסתברות של האירוע ב־p. לפי נוסחת ברנולי נתון ש:

$$\binom{9}{4}p^4(1-p)^5 = 24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3 \,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0 \,,$$

הפתרון החיובי היחיד הוא $p = \frac{1}{5} = 0.2$.

סעיף ב

המילים "**ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(D=4/D \geq 3) = \frac{P(D=4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)} \,.$$

כאשר יש חפיפה בין שני ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותו: ברור שאם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל־4 אז הוא שווה ל־4, וניתן לפשט את המשוואה להסתברות מותנית:

$$P(D=4/D \geq 3) = \frac{P(D=4)}{P(D \geq 3)} \,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(D=4) = \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 = 0.01536 \,.$$

את המנה $P(D \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה:

$$\binom{6}{3}0.2^3(1-0.2)^3 + \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 + \binom{6}{5}0.2^5(1-0.2)^1 + \binom{6}{6}0.2^6(1-0.2)^0 = 0.099 \,,$$

או כאחד פחות המשלים:

$$1-0.2^0(1-0.2)^6-\binom{6}{1}0.2^1(1-0.2)^5-\binom{6}{2}0.2^2(1-0.2)^4=0.099\,,$$

כמובן שכדאי לבחור את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים לחשב.

התשובה לשאלה היא:

$$P(D=4/D\geq 3)=\frac{P(D=4)}{P(D\geq 3)}=\frac{0.01536}{0.099}=0.15534\,.$$

סעיף ג

המשמעות של "**עד ש**" היא שהבחירה **האחרונה** תהיה "הצלחה" ויהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירות הקודמות:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad\overbrace{+}^{1/1}\,.$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\left[\binom{5}{2}0.2^2(1-.02)^3\right]\cdot 0.2=0.04096\,.$$

3.6 חורף תשע"ז

אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל־ P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א

נכתוב משאווה עם נוסחת ברנולי לפי המידע הנתון:

$$\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 = 3\binom{5}{5}p^5(1-p)^0 .$$

הגורם p^4 מצטמצם והפתרון הוא $p = \frac{5}{8}$.

סעיף ב

אביגיל תנצח אם היא פוגעת ב־$3, 4, 5$ זריקות. ההסתברות היא:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1-p)^0.$$

נציב $p = \frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1)

לדעתי, ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **האירוע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנית: "**אם ידוע ש־**אביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? הנוסחה היא:

$$P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה/אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5) =$$

$$\frac{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה} \cap \text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}\,.$$

אפשר לפתור את הבעיה בשתי דרכים. נתחיל עם הדרך הפשוטה יותר. נתון שהסיכוי לפגוע במטרה אינו תלוי בניסיונות הקודמים, ולכן ההסתברויות בלתי תלויות והחישוב מצטמצם:

$$= \frac{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה}) \cdot P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}$$

$$P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)\,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3}\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188\,.$$

הדרך השנייה ארוכה יותר אבל מעניינת. האירוע של החיתוך בנוסחה להסתברות מותנית מורכבת משני אירועים: (א) לא משנה מה יצאה מהזריקה הראשונה, הזריקה השניה החטיאה, ושלושת הזריקות האחרונות פגעו. (ב) הזריקה הראשונה פגעה, הזריקה השניה החטיאה, ושתיים מתוך שלושת הזריקות האחרונות פגעו. הסתברות של האירוע המשותף היא:

$$1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \quad + \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8}\right] = 0.1945\,.$$

נחלק ב־$\frac{3}{8}$, ההסתברות האביגיל החטיאה בזריקה השנייה, ונקבל 0.5188.

סעיף ג (2)

לא משנה איזו זריקה החטיאה, הזריקות בלתי תלויות וחישוב ההסתברות של "תמר פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $2,3,4,5$" נותן אותה תוצאה כמו האירוע "אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $1,3,4,5$".

3.7 קיץ תשע"ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

נסמן: y = ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד, a = ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

סעיף א

לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2}y^2(1-y)^2+\binom{4}{3}y^3(1-y)=10\cdot\binom{4}{4}y^4(1-y)^0\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $4y^2+4y-3=0$ שהשורש החיובי שלה היא $y=\frac{1}{2}=0.5$.

סעיף ב

האפשרויות לקבל שוויון הן: (א) ניצחון אחד לאנה וליעל, או (ב) תיקו בשני המשחקים. ההסתברות לתיקו היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח:

$$\binom{2}{1}ya+(1-(y+a))^2=0.34\,.$$

נציב $y=0.5$ ונקבל $a=0.3$.

סעיף ג

המילים "**אם ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{אנה תנצח במשחק השני}/\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})=$$

$$\frac{P(\text{אנה תנצח במשחק השני}\cap\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})}{P(\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})}\,.$$

ההסתברות לשיוון בסבב השני נתונה. אם אנה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34}=\frac{0.5\cdot 0.3}{.34}=0.4412\,.$$

שימו לב שלא צריכים $\binom{2}{1}$ כי האירוע הוא שאנה תנצח במשחק **השני** ויעל תנצח במשחק **הראשון**.

3.8 קיץ תשע"ו מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

לפני שניגש לפתרון השאלות, ננסה למלא את טבלת ההסתברויות.

נסמן S = נבחנים שהצליחו, K = נבחנים מקיבוצים, M = נבחנים ממושבים, E = נבחנים מערים. ההסתברויות הנתונות הן:

$$P(K) = 0.20,\ P(M) = 0.40,\ P(E) = 0.40,\ P(S) = 0.70\,.$$

נתון:

$$P(\overline{S}/M) = P(\overline{S} \cap M)/P(M) = \frac{1}{8}\,,$$

ולכן:

$$P(\overline{S} \cap M) = P(\overline{S}/M) \cdot P(M) = \frac{1}{8} \cdot 0.40 = 0.05\,.$$

סיכום ביניים:

	$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{E}$	
$\boldsymbol{S}$		0.35		0.70
$\overline{\boldsymbol{S}}$		0.05		0.30
	0.20	0.40	0.40	1.0

הנתון האחרון הוא: $P(E \cap S) = 2.5P(K \cap S)$, ולכן:

$$P(S) = 0.70 = P(K \cap S) + 0.35 + 2.5P(K \cap S)\,,$$

ו־$P(K \cap S) = 0.1, P(E \cap S) = 0.25$. נסכם את המידע בטבלה:

	E	M	K	
0.70	0.25	0.35	0.10	S
0.30	0.15	0.05	0.10	$\overline{S}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

שימו לב שהמילים "$\frac{1}{8}$ **מן** הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו" מכוונות להסתברות מותנית, לעומת המילים "ההסתברות לבחור באקראי **מבין כל** הנבחנים נבחן שהיה מהעיר **וגם** הצליח במבחן" מכוונות לחיתוך הסתברויותף כי ההסתברות לבחור אחד "מכל הנבחנים" היא 1:

$$P(E \cap S/\text{כל הנבחנים}) = \frac{(P(E \cap S) \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(E \cap S)}{1} = P(E \cap S)\,.$$

סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית וההנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם ממושב:

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K \cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K \cap \overline{S}) + P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית וההנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם מעיר:

$$P(\overline{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2)

"לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל־"כולם לא מהמושב":

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

3.9 חורף תשע"ו

במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

סעיף א

ההסתברות שדן לא יזכה באף אחד מחמישת המשחקים היא $P(0)^5$. נתון שערך זה הוא $\frac{1}{32}$, ולכן $P(0) = \frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}\binom{5}{2}P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1}P(50)(1-P(50))^4\\ P(50) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

סעיף ב

לפי ההסתברות המשלימה: $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

סעיף ג

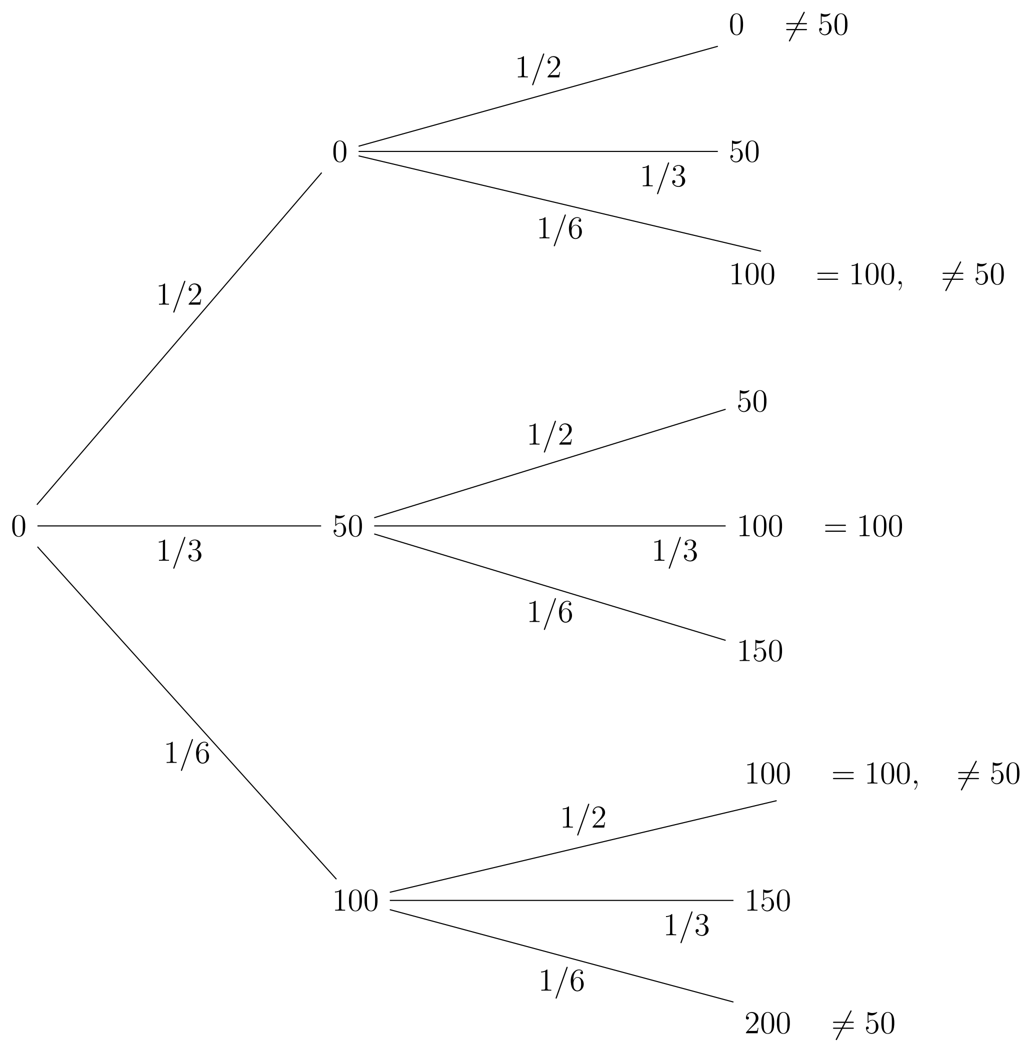
המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{לא זכה ב־50 באף משחק}/\text{זכה ב־100 בשני משחקים}) =$$

$$\frac{P(\text{לא זכה ב־50 באף משחק} \cap \text{זכה ב־100 בשני משחקים})}{P(\text{זכה ב־100 בשני משחקים})}.$$

נתבונן בעץ המופיע בעמוד הבא שמציג את תוצאות שני המשחקים. סימנו את המסלולים שבהם דן זכה ב־100 והמסלולים בהם דן לא זכה ב־50 באף אחד משני המשחקים. חישוב ההסתברות המותנית:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.$$


0
1/2
1/3
1/6
0
50
100
1/2
1/3
1/6
0 ≠ 50
50
100 = 100, ≠ 50
50
100 = 100
150
100 = 100, ≠ 50
150
200 ≠ 50

3.10 קיץ תשע"ה מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

סעיף א (1)

נסמן $b =$ ההסתברות להביא אוכל מהבית. לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2} b^2(1-b)^2 = 6 \cdot \binom{4}{1} b(1-b)^3 \, .$$

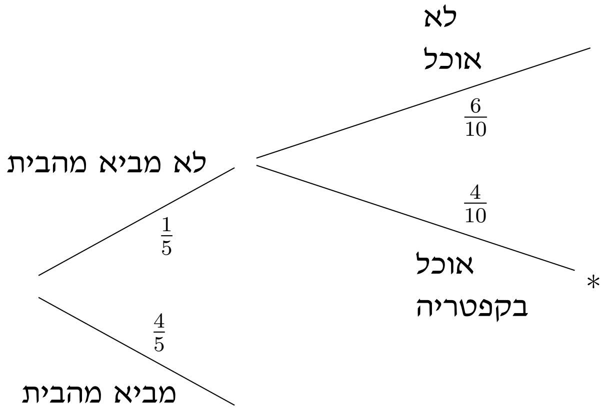
פתרון המשוואה הוא $b = \frac{4}{5}$.

סעיף א (2)

"לפחות אחד אבל לא כולם" היא המשלים ל-"לא אפס ולא כולם":

$$1 - \left(\frac{1}{5}\right)^8 - \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.8322 \, .$$

סעיף ב (1)



בעץ ההסתברויות הכוכבית מראה את מהמסלול עבור "אוכל בקפטריה":

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}\,.$$

סעיף ב (2)

המילה "**מבין**" מכוונת להסתברות מותנית וקבוצת "מביא אוכל" היא תת־קבוצה של "אוכלים":

$$P(\text{מביא אוכל}/\text{אוכלים}) =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל} \cap \text{אוכלים})}{P(\text{אוכלים})} =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכלים})}\,.$$

החישוב הוא:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{2}{25}} = \frac{10}{11}\,.$$

3.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

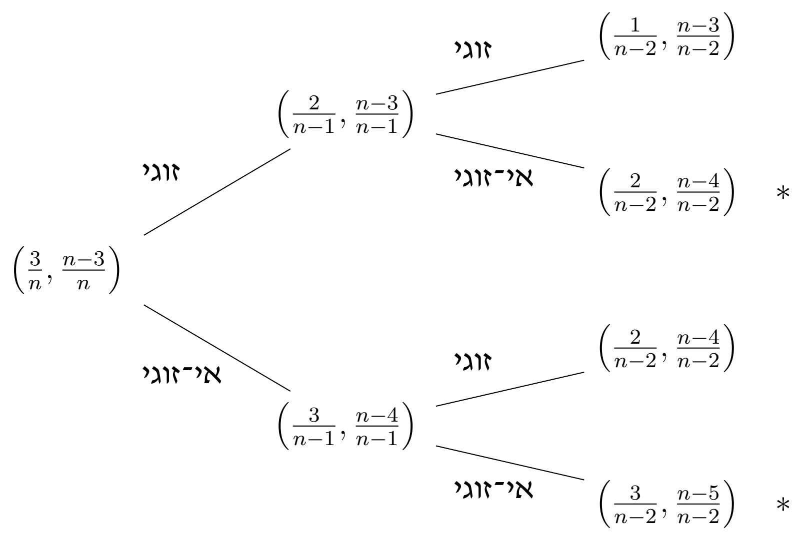
אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

נסמן n = מספר הספרות בקבוצה. מספר הזוגיים $= 3$, ומספר האי־זוגיים $= n - 3$.

בחירה של ספרת העשרות ואחר כך ספרת היחידות מכוונת לעץ הסתברויות. כדי לפשט את התרשים רשמתי בכל צומת את ההסתברויות ולא את מספר הספרות.



סעיף א

המספר שיוני בחר יהיה אי־זוגי רק אם **הבחירה השנייה** היא ספרה אי־זוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכביות. נשווה את סכום ההסתברויות של המסלולים לערך הנתון:

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \;+\; \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $n^2 - 8n + 7 = 0$ שיש לה שני פתרונות חיוביים $n = 1, n = 7$. נתון שיש לפחות שלוש ספרות, לכן מספר הספרות הוא 7.

שימו לב שהשאלה מבקשת את מספר הספרות **האי־זוגיות** ולכן התשובה היא $7 - 3 = 4$.

סעיף ב

המילים "**אם ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית. במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית:

$$P(\text{ספרה אחרונה זוגית}/\text{שתי ספרות זוגיות}) =$$

$$\frac{P(\text{ספרה אחרונה זוגית} \cap \text{שתי ספרות זוגיות})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})} =$$

$$\frac{P(\text{שתי ספרות זוגיות})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})}\,.$$

את החיתוך אפשר לפשט כי אם שתי הספרות זוגיות הספרה האחרונה חייבת להיות זוגית.

ניתן לחשב את ההסתברות "ספרה אחרונה זוגית" במכנה לפי המידע בעץ או פשוט לשים לב שהיא המשלימה לערך הנתון בסעיף א של "הספרה האחרונה אי־זוגית". נחשב את ההסתברות במנה לפי המסלול העליון בעץ עבור בחירה של שתי ספרות זוגיות:

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{1}{3}\,.$$

סעיף ג

הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונת הן זוגיות או אי־זוגיות:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 &= 2(k_1 + k_2 + k_3) \\ 2k_1 + 2(k_2+1) + 2(k_3+1) &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1)\,. \end{aligned}$$

שני האירועים (בחירת הספרות) בלתי תלויים, ולכן אפשר לבטא את החיתוך כמכפלה:

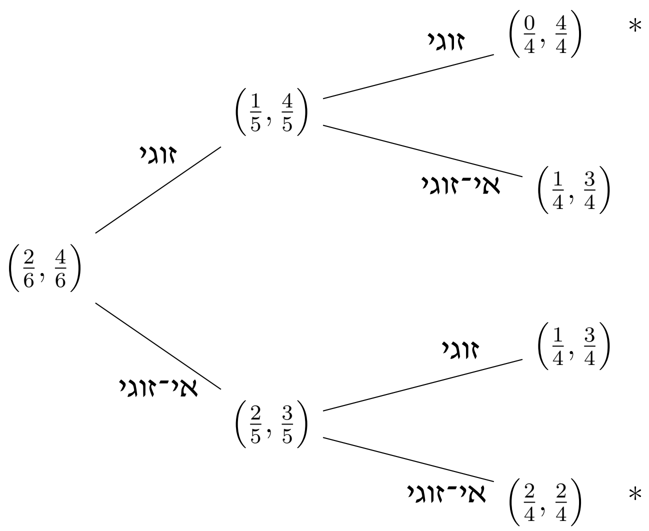
$$P(\text{ספרה ראשונה זוגית}/\text{סכום זוגי}) =$$

$$\frac{P(\text{ספרה ראשונה זוגית} \cap \text{סכום זוגי})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$

$$\frac{P(\text{ספרה ראשונה זוגית}) \cdot P(\text{סכום זוגי})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$

$$P(\text{סכום זוגי})\,.$$

שימו לב שלאחר הבחירה הראשונה של אמילי מספר הספרות הוא שש. הנה עץ ההסתברויות לאחר בחירה הראשונה, כאשר הכוכביות מסמנות את המסלולים לסכום זוגי (שני מספרים זוגיים או שני מספרים אי־זוגיים):



ההסתברות היא:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15} \,.$$

3.12 חורף תשע"ה

ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

"יישוב גדול" אומר לי שניתן לבחור מספר רב של תושבים, לפחות שמונה תושבים כפי שנדרש.

סעיף א

כל קבוצה היא בחירה בלתי תלוייה. לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}\,.$$

כדי לקבל את ההסתברות שלשתי הקבוצות יהיו בדיוק שני גברים, נעלה ערך זה בריבוע:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^2=\frac{64}{729}\,.$$

סעיף ב

המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{בדיוק שני גברים}/\text{לכל היותר שני גברים})=$$

$$\frac{P(\text{בדיוק שני גברים}\cap\text{לכל היותר שני גברים})}{P(\text{לכל היותר שני גברים})}\,.$$

החיתוך במנה שקולה ל־"בדיוק שני גברים" (שחישבנו בסעיף א), כי "לכל היותר שני גברים" היא $0,1,2$ גברים. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{27}$$

והתשובה לשאלה היא:

$$\frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}}=\frac{8}{11}\,.$$

3.13 קיץ תשע"ד מועד ב

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א' " הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99 .

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

נתון ש־0.4 מהתלמידים הן בנות. 10% מהם בחרו במסלול ב: $0.1 \times 0.4 = .04$. נתון ש־75% מהתלמידים שבחרו במסלול א הן בנות: $0.75 \cdot \text{א} = 0.36$, ולכן $\text{א} = 0.36/0.75 = 0.48$ מהתלמידים בחרו מסלול א. נמלא את הטבלה לפי ההסתברויות המשלימות:

	בנות	**בנים**	
א	$.4 - .04 = .36$	$.48 - .36 = .12$	$.36/.75 = .48$
ב	$.1 \times .4 = .04$	$.52 - .04 = .48$	$1 - .48 = .52$
	נתון 0.4	$1 - .4 = .6$	1

בצורה יותר מפורשת תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$0.1 = P(\text{בנות/מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנות})} = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{0.4}.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול ב} \cap \text{בנות}) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04\,.$$

נמשיך עם הנתון הנוסף:

$$0.75 = P(\text{מסלול א/בנות}) = \frac{P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות})}{P(\text{מסלול א})} = \frac{0.36}{P(\text{מסלול א})}\,.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול א}) = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,.$$

סעיף א

הסעיף מבקש $P(\text{מסלול א})$ וחישבנו שערכו 0.48.

סעיף ב

$$\begin{aligned} P(\text{מסלול א} \cap \text{התלמיד הוא בת}) &= 0.36 \\ P(\text{התלמיד הוא בת}) \cdot P(\text{מסלול א}) &= 0.4 \cdot 0.48 = 0.192\,. \end{aligned}$$

האירועים **אינם** בלתי תלויים.

סעיף ג

כדי לחשב "**לפחות אחת**", נחשב שת ההסתברות המשלימה ל-"**אף אחת**". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב:

$$P(\text{בת/מסלול ב}) = \frac{P(\text{בת} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בת})} = \frac{0.04}{0.4} = 0.1\,.$$

נפתור את המשוואה:

$$(0.1)^n = 1 - 0.99 = 0.01\,,$$

ונקבל $n = 2$.

3.14 קיץ תשע"ד מועד א

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

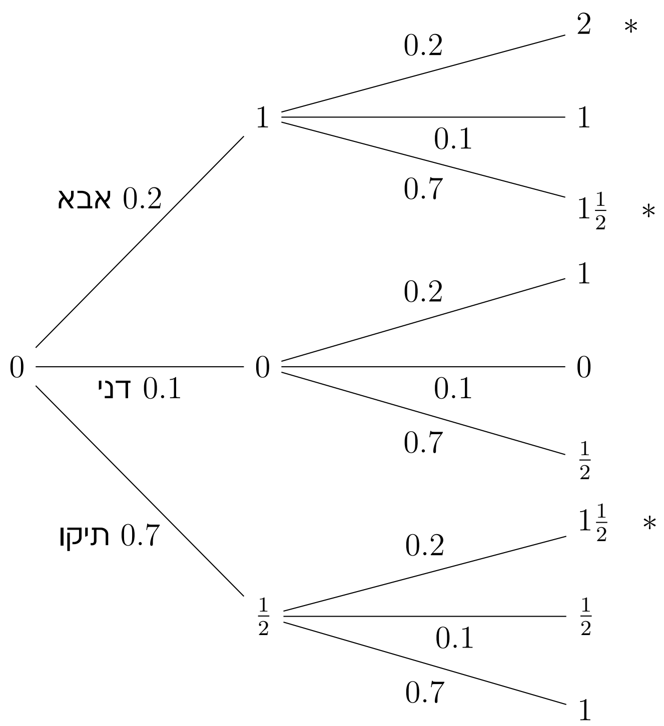
ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

סעיף א

עץ ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של אבא בשני הסיבובים, כאשר המצבים בהם אבא צובר **יותר** מנקודה אחת מסומנים בכוכבית. ההסתברות של האירוע היא:

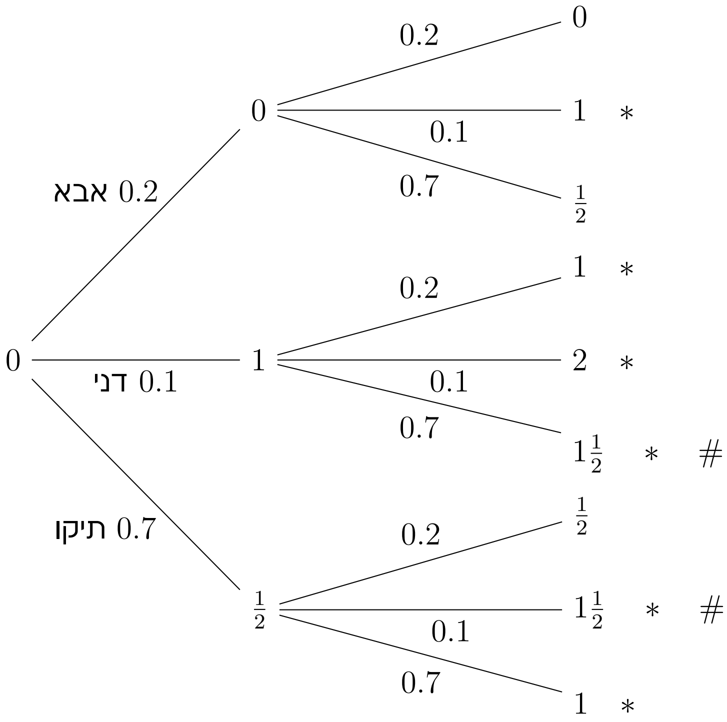
$$0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32\,.$$



סעיף ב

עץ ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של דני בשני הסיבובים, כאשר המצבים בהם דני צובר **לפחות** מנקודה אחת מסומנים בכוכבית. ההסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.2 \,+\, 0.1 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1 \,+\, 0.7 \cdot 0.7 \,=\, 0.68\,.$$



סעיף ג

המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית והחיתוך מצטמצם כי אם יש תיקו אחד וניצחון של דני אז דני צבר לפחות נקודה אחת:

$$P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת/תיקו אחד, ניצחון אחד לדני}) =$$

$$\frac{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת} \cap \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})} =$$

$$\frac{P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})}\,.$$

נחשב את המנה על ידי חיבור ההסתברויות של שני מסלולים בעץ המסומנים ב־$\#$:

$$\frac{0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = .2059\,.$$

סעיף ד

סעיף ב חישבנו את ההסתברות של האירוע בכל סיבוב, ונשאר רק לחשב:

$$\binom{4}{2}(0.68)^2(0.32)^2 = 0.2841\,.$$

3.15 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם.
עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן $T =$ מספר המשתתפים בתאטרון, $R =$ מספר המשתתפים בריקודי עם. המילה "**מבין**" מכוונת להתסברות מותנית. נתון $P(R/T) = 0.6$ וגם שהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$0.6 = P(R/T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{P(R) \cdot P(T)}{P(T)} = P(R)\,.$$

ביחד עם הנתון $P(R) = 2P(T)$ נתחיל למלא את הטבלה:

	$\boldsymbol{T}$	$\overline{\boldsymbol{T}}$	
$\boldsymbol{R}$			0.60
$\overline{\boldsymbol{R}}$			0.40
	0.30	0.70	1.0

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18\,,$$

ואז יש לנו מספיק נתונים למלא את הטבלה:

	$\boldsymbol{\overline{T}}$	$\boldsymbol{T}$	
0.60	0.42	0.18	$\boldsymbol{R}$
0.40	0.28	0.12	$\boldsymbol{\overline{R}}$
1.0	0.70	0.30	

סעיף א

חישבנו ש־$P(R \cap T) = 0.18$.

סעיף ב

המילים "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, **ורק הם**" מכוונות להסתברות מותנית. אם ידוע שתושב משתתף בריקודי עם, ההסתברות שהוא משתתף גם בתאטרון היא:

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.18}{.60} = 0.3\,.$$

כדי לחשב "לפחות שניים" עדיף לחשב את המשלים ל־"אפס או אחד":

$$1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798\,.$$

3.16 המלצות

- **קרא בזהירות את השאלה.** לעתים השאלות ארוכות (בחינות של קיץ תשע"ה א, קיץ תשע"ח ב) וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.

- כמעט כל הבחינות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!

  - הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים "**אם ידוע ש־**" או "**ידוע כי**".
  - בבחינה של חורף תשע"ז כתוב "**אם** . . . , **מהי ההסתברות** . . .". לא לגמרי ברור שלמילה "אם" יש משמעות של "אם ידוע", אבל זאת הכוונה.
  - לעתים קרובות (בחינה של קיץ תשע"ה ב) כתוב "**מה ההסתברות לבחור** . . . **מבין** . . .".
  - יוצא מן הכלל: בבחינה של קיץ תשע"ו א כתוב "**מבין** כל הנבחנים" והמילה "מבין" בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר "מבין" מתייחס ל־"**כל** הנבחנים" אין הסתברות מותנית, או ההסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1, והחיתוך מצטמצם:

$$P(X/\text{כל הנבחנים}) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X)\,.$$

  מצב דומה מופיע בבחינה של קיץ תשע"ד ב ("בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת)"), ובבחינה של קיץ תשע"ח ב ("מן התלמידים שנגשו למבחן").

  - בבחינה של קיץ תשע"ח א הניסוח הוא: "$n\%$ נעזרו בחבריהם (נקרא לאירוע A) ו־$\dfrac{k}{n}$ **מהם** עברו את הבחינה" (נקרא לאירוע B). ברור ש־$P(B\cap A) = k$, אבל נבדוק לפי הנוסחה להסתברות מונתית:

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)}{n} = \frac{k}{n} \\ P(B\cap A) &= k\,. \end{aligned}$$

  - בבחינה של חורף תשע"ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב־** . . ., **ורק הם**.

- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבחינה של קיץ תשע"ז א יש לחשב $P(D = 4 \cap D \geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל־4, אז הוא שווה ל־4, ולכן מספיק לחשב $P(D = 4)$.

- אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B)\,.$$

מצב זמ מופיע בבחינות של חורף תשע"ז, חורף משע"ח, קיץ תשע"ה א, חורף תשע"ד.

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות וגם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבחינה של קיץ תשע"ח ב כאשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמש (20 נקודות כל אחת), אז ההסתברות לקבל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי הצלחות (20 נקודות כל אחת).

- בבחינה של קיץ תשע"ז א כתוב "**בוחרים באקראי** ..., **עד של־** 3 מהם **בדיוק** יש קלנועית". המשמעות של "עד ש־" היא שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה נשארו שתי "הצלחות" שיש לחשב את ההסתברות שלהן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של "הצלחה" בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1}\ .$$

- בבחינה של קיץ תשע"ז ב הביטוי "מוציאים באקראי ...", ובהמשך הביטוי "מוציאים באקראי **שוב** ..." מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבחינה של קיץ תשע"ח א, המשמעות של הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I, II היא שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II, **או שניהם**, המסומן I ∪ II. יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני האירועים וחיסור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה, או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני המסומן I−II, II−I:

$$\begin{aligned} P(I \cup II) &= P(I) + P(II) - P(I \cap II) \\ P(I \cup II) &= P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II)\,. \end{aligned}$$

- בבחינה של קיץ תשע"ח ב יש לחשב את ההסבתרות של תשובה נכונה **לכל** ($k = n$) השאלות או תשובה נכונה **לאף אחת** ($k = 0$) מהשאלות, כאשר ההסתברות לתשובה נכונה אחת היא p. אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי הכללית:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

אם $k = 0$, $\binom{n}{0} = 1$, $p^0(1-p)^{n-0} = (1-p)^n$.

אם $k = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $p^n(1-p)^{n-n} = p^n$.

- בבחינות של קיץ תשע"ו א, ב יש שלוש תוצאות לפעולה במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי ההסתברויות האחרות. בבחינה של מועד ב, ההסתברות לתיקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצח פחות ההסתברות אנה תנצח:

$$P(\text{תיקו}) = 1 - (P(\text{יעל}) + P(\text{אנה})) = 1 - P(\text{יעל}) - P(\text{אנה})\,.$$

- במספר בחינות (חורף תשע"ה, קיץ תשע"ד ב, קיץ תשע"ה ב) כתוב "ישוב גדול", "עיר גדולה", "אוניברסיטה גדולה". אני מניח שבמילה "גדול" מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כפי שדרוש בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים.