מסתבר שלא כל כך קשה

לפתור בעיות בהסתברות

מוטי בן־ארי

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

במסמך זה נפתור את השאלות על הסתברות בבחינות הבגרות, שאלון 806. מצאתי שהבעיות עצמן קלות יחסית, בתנאי שמבינים את ניסוחי השאלות ואיך לתרגם אותן לחישובים המתאימים. בסוף המסמך סיכמתי את הניסוחים שמופיעים בשאלות.

חורף תשע"ח

למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3.

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א. מיכל תנצח אם (א) היא מטילה 4 לא משנה מה גלית מטילה, אירוע שההסתברות שלה היא 1, או (ב) מיכל מטילה 2 וגלית מטילה 1, אירוע שההסתברות שלה היא $\frac{n}{6}$, כאשר נסמן ב־n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1. המשוואה לניצחון של מיכל היא:

$$\frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12}\,,$$

והפתרון הוא $n=1$.

סעיף ב. גלית תנצח במשחק אם היא תנצח ב־$3,4,5$ סיבובים:

$$\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג. המילים **אם ידוע** מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון/גלית תנצח})=$$

$$\frac{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון}\cap\text{גלית תנצח})}{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})}\,.$$

ההסתברות במנה: כדי שגלית תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב־$2,3,4$ מהסיבובים הנותרים:

$$\frac{5}{12}\left[\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]=\frac{5}{12}\cdot 0.5534\,.$$

ההסתברות במכנה היא כמובן $\frac{5}{12}$, ולכן התשובה היא 0.5534.

קיץ תשע"ח, מועד א

בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

נסמן ב־N את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב־A את התלמידים שעברו את המבחן. נתון ש־$P(N)=0.37$. **מהם** עברו את הבחינה $\frac{35}{37}$, ההסתברות המותנית $P(A/N)$. נחשב:

$$P(A/N)=\frac{P(N\cap A)}{P(N)}=\frac{P(N\cap A)}{0.37}=\frac{35}{37}, \qquad P(N\cap A)=0.35\,.$$

עד כאן טבלת ההסתברויות היא:

	$\boldsymbol{A}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{N}$	0.35	0.02	0.37
$\overline{\boldsymbol{N}}$			0.63
			1.0

בהמשך נתון ש־

$$P(\overline{N}\cap\overline{A})=\frac{P(N\cap A)}{5}=\frac{0.35}{5}=0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

סעיף א.

$$P(N/\overline{A}) = \frac{P(N \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב. עבור יעל:

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459\,,$$

ועבור הדס:

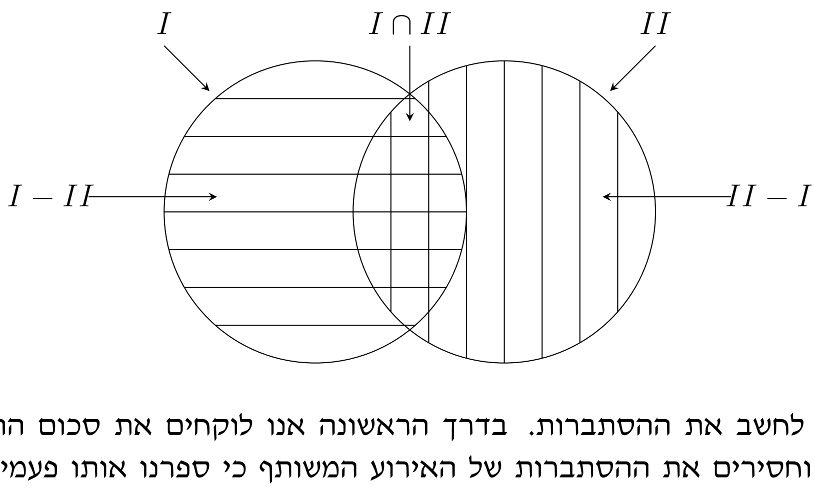
$$P(A/\overline{N}) = \frac{P(A \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889\,.$$

ליעל הסתברות גבוהה יותר לעבור את המבחן.

סעיף ג. שליש של שש הוא שניים. (שימו לב שלא לקרוא "שלושה" במקום "שליש"!) החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך של $P(\overline{N} \cap A)$ נמצא בטבלה:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(1-0.56)^4 = 0.1763\,.$$

סעיף ד. הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I, II" אומר שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**. באיור להלן שני עגולים המייצגים את שני האירועים I, II. האירוע "לפחות אחד משניהם" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו.



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים, וחסירים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II)\,.$$

בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד, כאשר הסימון $A-B$ הוא כל האיברים בקבוצה A שאינם בקבוצה B:

$$P(I \cup II) = P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II)\,.$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$P(N \cup \overline{A}) = P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44$$
$$P(N \cup \overline{A}) = P(N - \overline{A}) + P(\overline{A} - N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,.$$

קיץ תשע"ח, מועד ב

במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, <u>אינה</u> נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k. נמק.

סעיף א (1). שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיוק אחת** משלושת השאלות האחרות:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

סעיף א (2). כדי לעבור את המבחן עליו לצבור **לפחות** שלוש תשובות נכונות. יש להוסיף את ההסבתרויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב. דניאל צירך לענות נכון על שאלה אחת **בדיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת מתוך ארבע לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג. אם הדס ידעה ש־k מתוך 4 תשובות לא נכונות, ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה היא $\frac{1}{4-k}$, וההסתברות שהיא תענה תשובה לא נכונה היא $\frac{4-k-1}{4-k}$. כדי לקבל ציון **בדיוק** 100 הדס צריכה לבחור תשובות נכונות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בדיוק** 60 עליה לבחר תשובות לא נכונות לשתי השאלות הנותרות.

אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו, כי כאשר מחשבים את ההסתברות של "כל" או "אף אחד", $\binom{n}{k}=1$, וגם $(1-p)^0=1$ או $p^0=1$. לכן, מספיק לחשב את ההסתברות של האירוע לחזקת מספר השאלות:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 &= \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2\\ (3-k)^2 &= 1\\ k^2-6k+8 &= 0\,.\end{aligned}$$

הפתרונות הם $k=2,4$ אבל נתון ש־"אחת [מהתשובות] נכונה", לכן הפתרון היחיד הוא $k=2$.

חורף תשע"ז

אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל־ P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א. לפי המידע הנתון:

$$\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 = 3\binom{5}{5}p^5(1-p)^0 .$$

והפתרון הוא $p = \frac{5}{8}$.

סעיף ב. ההסתברות ל־$3,4,5$ פגיעות היא:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1-p)^0$$

נציב $p = \frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1). לדעתי, ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה: מה ההסתברות של **האירוע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנית: "**אם ידוע ש־**אביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"?

$$P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה}/\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5) =$$

$$\frac{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה} \cap \text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})} .$$

אפשר לפתור את הבעיה בשתי דרכים. נתחיל עם הדרך הפשוטה יותר. נתון שהסיכוי לפגוע במטרה אינו תלוי בניסיונות הקודמים, ולכן ההסתברויות בלתי תלויות והחישוב מצטמצם:

$$= \frac{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה}) \cdot P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}$$

$$P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)\,.$$

החישוב הוא:

$$\binom{4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^1=0.5188\,.$$

הדרך השנייה ארוכה יותר אבל מעניינת. האירוע של החיתוך בנוסחה להסתברות מותנית מורכבת משני אירועים: (א) לא משנה מה יצאה מהזריקה הראשונה, הזריקה השניה החטיאה, ושלושת הזריקות האחרונות פגעו. (ב) הזריקה הראשונה פגעה, הזריקה השניה החטיאה, ושתיים מתוך שלושת הזריקות האחרונות פגעו. הסתברות של האירוע המשותף היא:

$$1\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^3 \quad + \quad \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\left[\binom{3}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\frac{3}{8}\right]=0.1945\,.$$

נחלק ב־$\frac{3}{8}$, ההסתברות האביגיל החטיאה בזריקה השנייה, ונקבל 0.5188.

סעיף ג (2). לא משנה איזו זריקה החטיאה, הזריקות בלתי תלויות וחישוב ההסתברות של "תמר פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $2,3,4,5$" נותן אותה תוצאה כמו האירוע "אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $1,3,4,5$".

קיץ תשע"ז, מועד א

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א. נסמן ב־D את האירוע "לדייר יש קלנועית" ואת ההסתברות של האירוע ב־p. נתון ש:

$$\binom{9}{4}p^4(1-p)^5=24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0\,,$$

עם שני פתרונות $p = \frac{1}{5}, -\frac{1}{3}$. הסתברות חייבת להיות לא־שלילית ולכן התשובה היא $p = \frac{1}{5} = 0.2$.

סעיף ב. המילים "**ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(D = 4/D \geq 3) = \frac{P(D = 4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)}\,.$$

כאשר יש חפיפה בין שני ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותו. ברור שאם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל־4 אז הוא שווה ל־4:

$$P(D = 4/D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)}\,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(D = 4) = \binom{6}{4} 0.2^4 (1 - 0.2)^2 = 0.01536\,.$$

את הערך של $P(D \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה או כאחד פחות המשלים. נבחר את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים בביטוי:

$$1 - 0.2^0(1 - 0.2)^6 - \binom{6}{1} 0.2^1 (1 - 0.2)^5 - \binom{6}{2} 0.2^2 (1 - 0.2)^4 = 0.099\,,$$

והתשובה היא $\frac{0.01536}{0.099} = 0.15534$.

סעיף ג. הבחירה **האחרונה** תהיה "הצלחה" ויהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירות הקודמות:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1}\,.$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\left[\binom{5}{2} 0.2^2 (1 - .02)^3\right] \cdot 0.2 = 0.04096\,.$$

קיץ תשע"ז, מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

המילים "מוציאים באקראי ... **ולאחר מכן** שוב מוציאים באקראי" מכוונות לשימוש בעץ. נסמן ב־b את מספר הכדורים הכחולים בקופסה I. באיור 1, בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I, ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II.

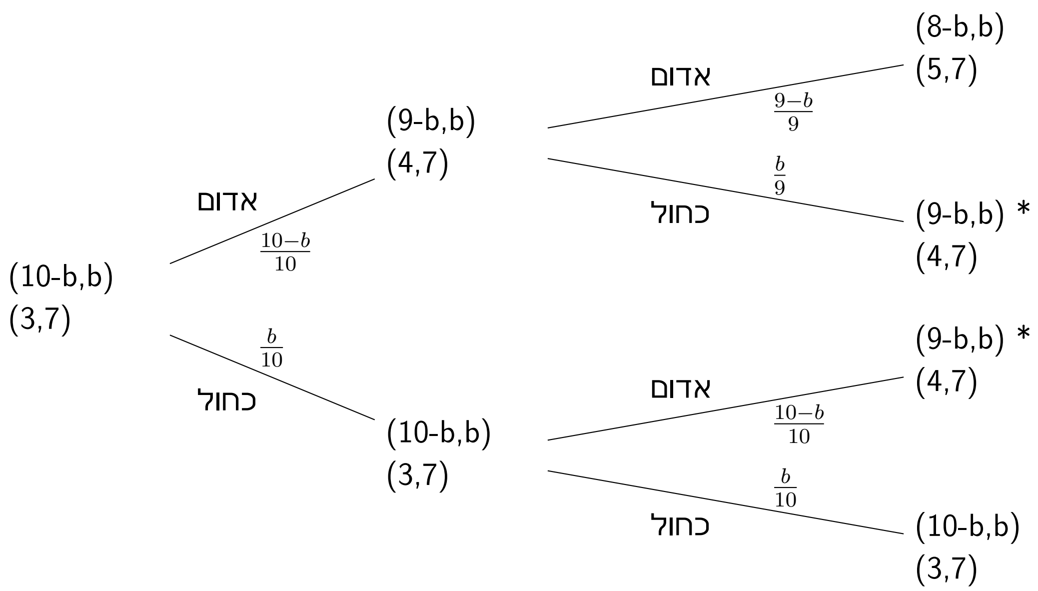
סעיף א. הכוכביות מסמנות את שתי האפשרויות בהן הוצאנו כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. נשווה את הסתברות הנתונה לסכום ההסתברויות של שני המסלולים:

$$\frac{10-b}{10}\cdot\frac{b}{9}+\frac{b}{10}\cdot\frac{10-b}{10}=\frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $b^2-10b+25=0$ שיש לה פתרון אחד $b=5$.

סעיף ב. לאחר הצבת $b=5$, נקבל עבור כל מצב את מספר הכדורים האדומים וכחולים בקופסה II, נוכל לחשב את ההסתברויות להוצאת כדור אדום מקופסה II, ונסכם את ההסתברויות לאחר הכפלתן בהסתברות להגיע לכל אחד מהמצבים:

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{5+7}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{4+7}\right)+$$
$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{4+7}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{3+7}\right)=0.3595\,.$$



איור 1: עץ ההסתברויות של הוצאת הכדורים מקופסה I

סעיף ג. המילים "**ידוע ש־**" מכוונת להסתברות מותנית:

$$P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה } II / \text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II) =$$

$$\frac{P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה } II \cap \text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II)}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה } II)}$$

ישארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו אברעה כדורים אדומים לפני הבחירה. ההסתברות במנה היא ההסתברות (הנתונה!) שנגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II, וחישבנו את ההסתברות במכנה בסעיף ב. התשובה היא:

$$\frac{\frac{19}{36}\cdot\frac{4}{11}}{0.3595} = 0.53385\,.$$

במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן <u>לא</u> יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא <u>לא</u> זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

סעיף א. ההסתברות שדן לא יזכה באף אחד מחמישת המשחקים היא $P(0)^5$. נתון שערך זה הוא $\frac{1}{32}$, ולכן $P(0)=\frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}\binom{5}{2}P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1}P(50)(1-P(50))^4\\ P(50) &= \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב. לפי ההסתברות המשלימה: $P(100)=1-P(0)-P(50)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

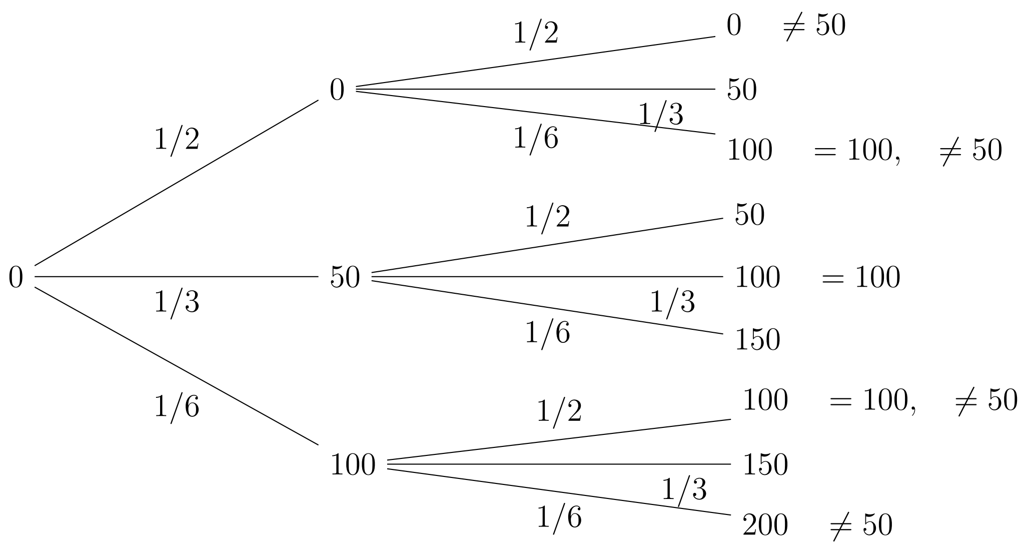
סעיף ג. המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{זכה ב־100 בשני משחקים/לא זכה ב־50 באף משחק}) =$$

$$\frac{P(\text{זכה ב־100 בשני משחקים}\cap\text{לא זכה ב־50 באף משחק})}{P(\text{זכה ב־100 בשני משחקים})}\,.$$

נתבונן בעץ המציג את תוצאות שני המשחקים (איור 2). סימנו את המסלולים שבהם דן זכה ב־100 והמסלולים בהם דן לא זכה ב־50 באף אחד משני המשחקים. חישוב ההסתברות המותנית:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{5}\,.$$



איור 2: עץ ההסתברויות של המשחקים

קיץ תשע"ו, מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן S = נבחנים שהצליחו, K = נבחנים מקיבוצים, M = נבחנים ממושבים, E = נבחנים מערים. ההסתברויות הנתונות הן:

$$P(K) = 0.20,\ P(M) = 0.40,\ P(E) = 0.40,\ P(S) = 0.70\,.$$

נחשב את שאר ההסתברויות. לפי הסתברות משלימה $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0.30$. נתון:

$$P(\overline{S}/M) = P(\overline{S} \cap M)/P(M) = \frac{1}{8}\,,$$

ולכן:

$$P(\overline{S} \cap M) = \frac{1}{8} P(M) = 0.05\,.$$

לפי ההגדרה:

$$P(S) = P(K \cap S) + P(M \cap S) + P(E \cap S)\,.$$

נסמן $P(K \cap S) = p$, ההסתברות שנבחנים מקיבוצים הצליחו. נתון:

$$P(E \cap S) = 2.5 P(K \cap S) = 2.5p\,,$$

ולכן:

$$0.70 = p + (0.40 - 0.05) + 2.5p\,,$$

ו־$p = 0.1$.

שימו לב שהמילים "$\frac{1}{8}$ **מן** הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו" מכוונות להסתברות מותנית, לעומת המילים "ההסתברות לבחור באקראי **מבין כל** הנבחנים נבחן שהיה מהעיר **וגם** הצליח במבחן" מכוונות לחיתוך הסתברויות. המילה "מבין" בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר "מבין" מתייחס ל־"**כל** הנבחנים" אין הסתברות מותנית. לחילופין, ההסתברות לבחור אחד "מכל הנבחנים" היא 1, ולכן:

$$P(E \cap S / \text{כל הנבחנים}) = \frac{(P(E \cap S) \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(E \cap S)}{1} = P(E \cap S)\,.$$

נסכם את המידע בטבלה:

	E	***M***	***K***	
0.70	0.25	0.35	0.10	$\boldsymbol{S}$
0.30	0.15	0.05	0.10	$\boldsymbol{\overline{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

סעיף א. לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K \cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K \cap \overline{S}) + P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1). לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2). "לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל־"כולם לא מהמושב":

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

קיץ תשע"ו, מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

נסמן: $y =$ ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד, $a =$ ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

סעיף א. לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2}y^2(1-y)^2 + \binom{4}{3}y^3(1-y) = 10 \cdot \binom{4}{4}y^4(1-y)^0 .$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $4y^2+4y-3=0$ שהשורש החיובי היחיד שלה היא $y=\frac{1}{2}$.

סעיף ב. כדאי לצייר עץ של האירועים, אבל אוותר עליו בשאלה זו כי המצב פשוט. האפשרויות לקבל שוויון הן: (א) ניצחון אחד לאנה וליעל, או (ב) תיקו בשני המשחקים. ההסתברות לתיקו היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח:

$$\binom{2}{1}ya + (1-(y+a))^2 = 0.34 .$$

נציב $y=\frac{1}{2}$ ונקבל $a=0.3$.

סעיף ג. המילים "**אם ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{אנה תנצח במשחק השני}/\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון}) =$$

$$\frac{P(\text{אנה תנצח במשחק השני} \cap \text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})}{P(\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})} .$$

ההסתברות לשיוון בסבב השני נתונה. אם אנה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.3}{.34} = 0.4412 .$$

שימו לב שלא צריכים $\binom{2}{1}$ כי האירוע הוא שאנה תנצח במשחק **השני** ויעל תנצח במשחק **הראשון**.

חורף תשע"ה

ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

"יישוב גדול" אומר לי שניתן לבחור מספר רב של תושבים, לפחות שמונה תושבים כפי שנדרש.

סעיף א. כל קבוצה היא בחירה בלתי תלוייה:

$$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27},$$

וכדי לקבל את ההסתברות שלשתי הקבוצות יהיו בדיוק שני גברים, נעלה ערך זה בריבוע:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^2=\frac{64}{729}.$$

סעיף ב. המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(\text{לכל היותר שני גברים/בדיוק שני גברים})=$$

$$\frac{P(\text{לכל היותר שני גברים}\cap\text{בדיוק שני גברים})}{P(\text{לכל היותר שני גברים})}.$$

החיתוך במנה שקולה ל-"בדיוק שני גברים" (שחישבנו בסעיף א), כי "לכל היותר שני גברים" היא $0,1,2$ גברים. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{27}$$

והתשובה לשאלה היא:

$$\frac{8/27}{11/27}=\frac{8}{11}.$$

קיץ תשע"ה, מועד א

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

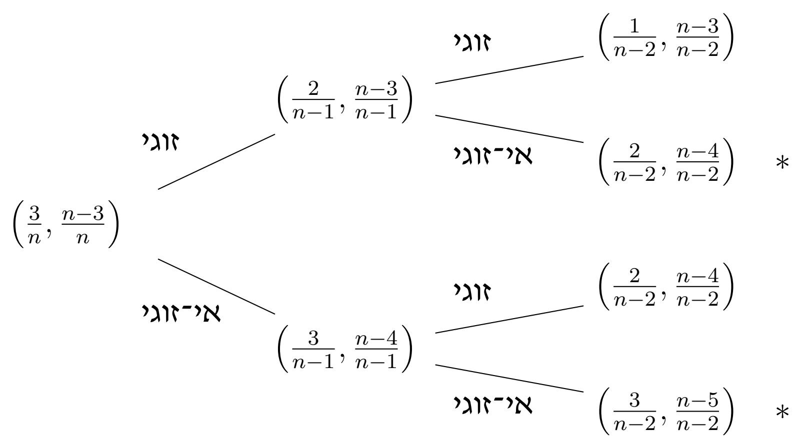
והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

נסמן n = מספר הספרות בקבוצה. מספר הזוגיים = 3, ומספר האי־זוגיים = $n-3$. השאלה מתארת בחירה של "הספרה הראשונה" ואחר כך "הספרה הראשונה", תיאור המכוון לעץ הסתברויות (איור 3). כדי לפשט את האיור רשמתי בכל צומת את ההסתברויות ולא את מספר הספרות.



איור 3: עץ ההסתברויות של בחירת הספרות

סעיף א. המספר יהיה אי־זוגי אם **הבחירה השנייה** היא של ספרה אי־זוגית. המסלולים האלה מסומנים בכוכביות באיור. נשווה את סכום ההסתברויות של המסלולים לערך הנתון:

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $n^2 - 8n + 7 = 0$ שיש לה שני פתרונות לא־שליליים $n = 1, n = 7$.
נתון שיש לפחות שלוש ספרות, לכן מספר הספרות הוא 7. שימו לב שהשאלה מבקשת את מספר הספרות **האי־זוגיות** ולכן התשובה היא $7 - 3 = 4$.

סעיף ב. המילים "**אם ידוע ש־**" מכוונות להסתברות מותנית. במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית:

$$\begin{aligned}
&P(\text{שתי ספרות זוגיות/ספרה אחרונה זוגית}) = \\
&\frac{P(\text{שתי ספרות זוגיות} \cap \text{ספרה אחרונה זוגית})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})} = \\
&\frac{P(\text{שתי ספרות זוגיות})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})}\,.
\end{aligned}$$

את החיתוך אפשר לפשט כי אם שתי הספרות זוגיות, הספרה האחרונה חייבת להיות זוגית.

ניתן לחשב את ההסתברות "ספרה אחרונה זוגית" במכנה לפי המידע בעץ ההסתברויות או פשוט לשים לב שהיא המשלימה לערך הנתון בסעיף א של "הספרה האחרונה אי־זוגית". נחשב את ההסתברות במנה לפי המסלול הבודד בעץ ההסתברויות (איור 4) של בחירה של שתי ספרות זוגיות:

$$\frac{\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}}{1-\dfrac{4}{7}} = \frac{1}{3}\,.$$

סעיף ג. הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונת הן זוגיות או אי־זוגיות:

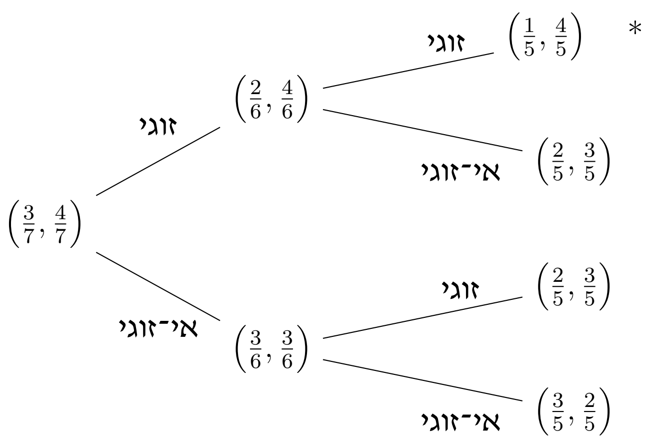
$$\begin{aligned}
2k_1 + 2k_2 + 2k_3 &= 2(k_1 + k_2 + k_3) \\
2k_1 + 2(k_2+1) + 2(k_3+1) &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1)\,.
\end{aligned}$$

שני האירועים (בחירת הספרות) בלתי תלויים, ולכן אפשר לבטא את החיתוך כמכפלה:

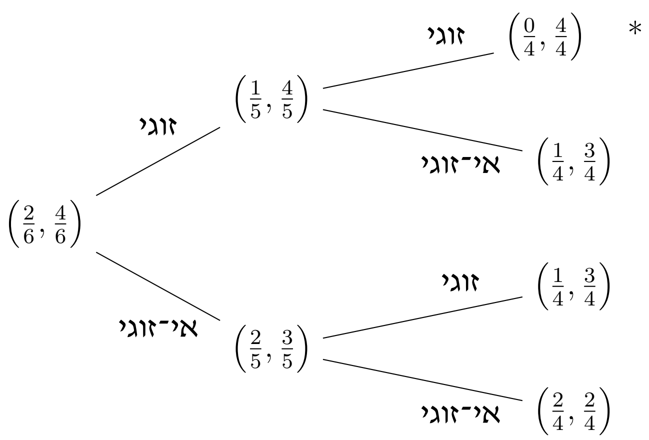
$$\begin{aligned}
&P(\text{סכום זוגי/ספרה ראשונה זוגית}) = \\
&\frac{P(\text{סכום זוגי} \cap \text{ספרה ראשונה זוגית})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} = \\
&\frac{P(\text{סכום זוגי}) \cdot P(\text{ספרה ראשונה זוגית})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} = \\
&P(\text{סכום זוגי})\,.
\end{aligned}$$

שימו לב שלאחר הבחירה הראשונה של אמילי מספר הספרות הוא שש. לפי עץ ההסתברויות החדש (איור 5) ההסתברות היא:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{15}\,.$$



איור 4: עץ ההסתברויות של בחירת הספרות



איור 5: עצי ההסתברויות של בחירת הספרות

קיץ תשע"ה, מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

סעיף א (1). נסמן $b=$ ההסתברות להביא אוכל מהבית. לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2}b^2(1-b)^2 = 6\cdot\binom{4}{1}b(1-b)^3\,.$$

פתרון המשוואה הוא $b=\frac{4}{5}$.

סעיף א (2). "לפחות אחד אבל לא כולם" היא המשלים ל־"לא אפס ולא כולם":

$$1-\left(\frac{1}{5}\right)^8-\left(\frac{4}{5}\right)^8=0.8322\,.$$

סעיף ב (1). בעץ ההסתברויות באיור 6 הכוכבית מראה את מהמסלול עבור "אוכל בקפטריה":

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}=\frac{2}{25}\,.$$

סעיף ב (2). המילה "**מבין**" מכוונת להסתברות מותנית, כאשר קבוצת "מביא אוכל" היא תת־קבוצה של "אוכלים" והחישוב מצטמטם:

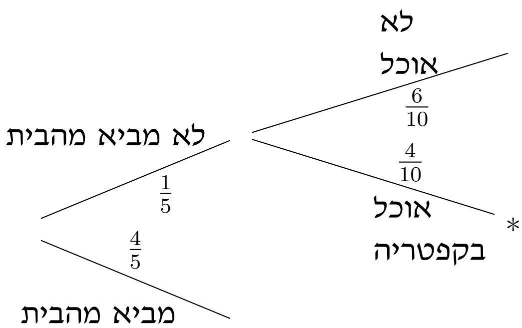
$$P(\text{מביא אוכל}/\text{אוכלים}) =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל}\cap\text{אוכלים})}{P(\text{אוכלים})} =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכלים})}\,.$$

החישוב הוא:

$$\frac{4/5}{\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{25}} = \frac{10}{11}\,.$$



איור 6: עץ ההסתברויות של אפשרויות האכילה

חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן T = מספר המשתתפים בתאטרון, R = מספר המשתתפים בריקודי עם. המילה "**מבין**" מכוונת להתסברות מותנית. נתון $P(R/T)=0.6$ וגם שהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$0.6 = P(R/T) = \frac{P(R\cap T)}{P(T)} = \frac{P(R)\cdot P(T))}{P(T)} = P(R)\,.$$

ביחד עם הנתון $P(R)=2P(T)$ נתחיל למלא את הטבלה:

	$\overline{\boldsymbol{T}}$	$\boldsymbol{T}$	
0.60			$\boldsymbol{R}$
0.40			$\overline{\boldsymbol{R}}$
1.0	0.70	0.30	

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18\,,$$

ואז יש לנו מספיק נתונים למלא את הטבלה:

	$\overline{\boldsymbol{T}}$	$\boldsymbol{T}$	
0.60	0.42	0.18	$\boldsymbol{R}$
0.40	0.28	0.12	$\overline{\boldsymbol{R}}$
1.0	0.70	0.30	

סעיף א. חישבנו ש־$P(R \cap T) = 0.18$.

סעיף ב. המילים "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, **ורק הם**" מכוונות להסתברות מותנית. אם ידוע שתושב משתתף בריקודי עם, ההסתברות שהוא משתתף גם בתאטרון היא:

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.18}{.060} = 0.3\,.$$

כדי לחשב "לפחות שניים" עדיף לחשב את המשלים ל־"אפס או אחד":

$$1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798\,.$$

קיץ תשע"ד, מועד א

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

סעיף א. איור 7 (למעלה) מראה את צבירת הנקודות של **אבא** בשני הסיבובים. המצבים בהם אבא צובר **יותר** מנקודה אחת מסומנים בכוכבית. ההסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32 .$$

סעיף ב. איור 7 (למטה) מראה את צבירת הנקודות של **דני** בשני הסיבובים. המצבים בהם דני צובר **לפחות** נקודה אחת מסומנים בכוכבית. ההסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.68 .$$

סעיף ג. המילים "**ידוע כי**" מכוונות להסתברות מותנית והחיתוך מצטמצם כי אם יש תיקו אחד וניצחון של דני אז דני צבר לפחות נקודה אחת:

$$P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני} / \text{דני צבר לפחות נקודה אחת}) =$$

$$\frac{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת} \cap \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})} =$$

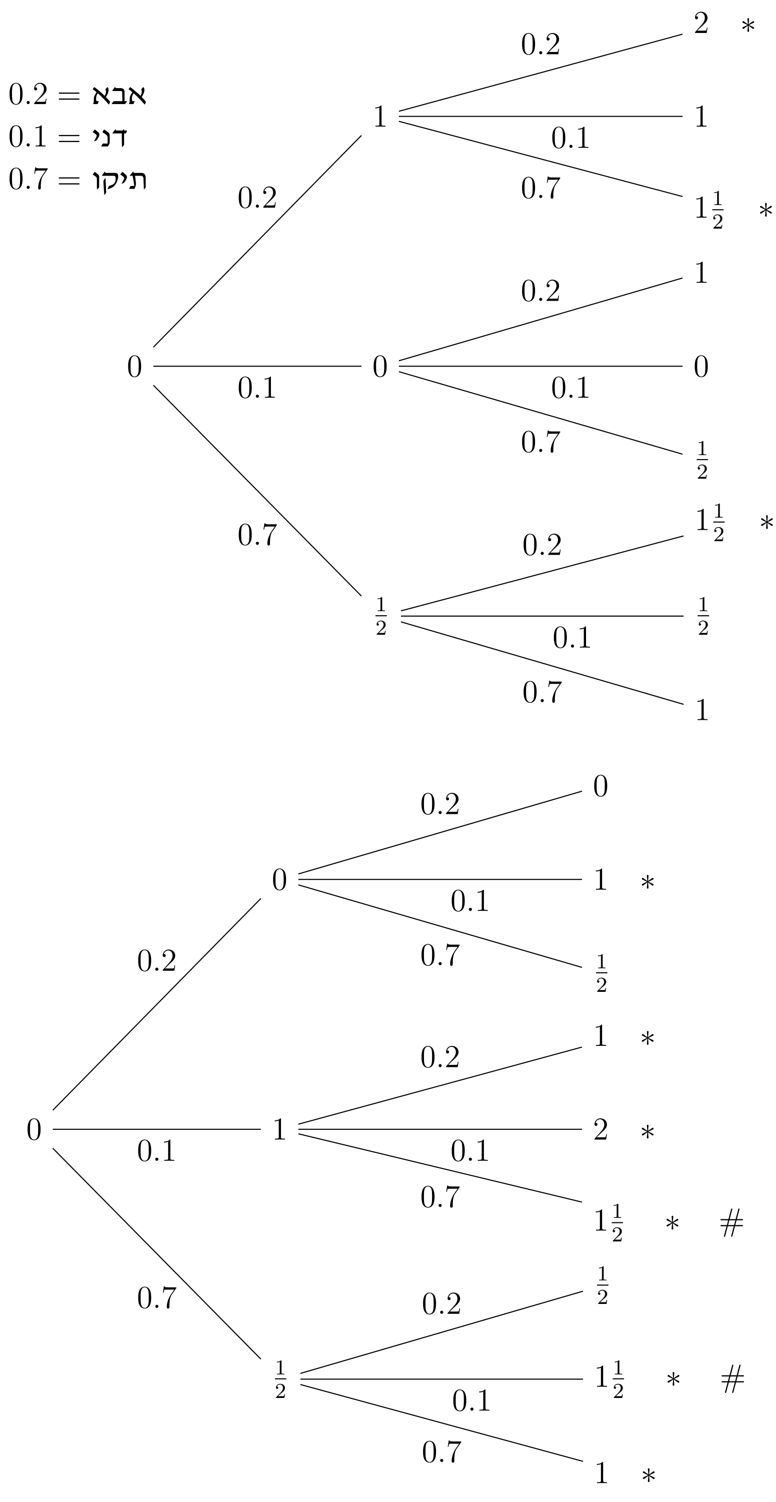
$$\frac{P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})} .$$

נחשב את המנה על ידי חיבור ההסתברויות של שני מסלולים בעץ המסומנים ב־#:

$$\frac{0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = .2059 .$$

סעיף ד. בסעיף ב חישבנו את ההסתברות של האירוע בכל סיבוב, ונשאר רק לחשב:

$$\binom{4}{2}(0.68)^2(0.32)^2 = 0.2841\,.$$



איור 7: עץ ההסתברויות של צבירת נקודות של אבא (למעלה) ודני (למטה)

קיץ תשע"ד, מועד ב

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי: מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).
מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת" והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99 .
(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)
כמה בנות נבחרו?

נמלא את הטבלה ממידע הנתון. נתון ש־0.4 מהתלמידים הן בנות. 10% מהם בחרו במסלול ב, ולכן נרשום $0.1\times 0.4 = .04$ מעל לתא עם הנתון הראשון. הסתברות המשלימה היא $0.4-0.04 = 0.36$. נתון ש־75% מהתלמידים שבחרו במסלול א הן בנות: $0.75\cdot א = 0.36$, ולכן 0.48 מהתלמידים בחרו מסלול א. ניתן למלא את שאר התאים בטבלה לפי ההסתברויות המשלימות:

	בנות	בנים	
א	$.4-.04=$ $.36$	$.48-.36=$ $.12$	$.36/.75=$ $.48$
ב	$.1\times .4=$ $.04$	$.52-.04=$ $.48$	$1-.48=$ $.52$
	נתון 0.4	$1-.4=$ $.6$	1

בצורה יותר מפורשת תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$0.1 = P(\text{בנות/מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנות})} = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{0.4}.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול ב} \cap \text{בנות}) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04\,.$$

לפי הסתברות משלימה:

$$P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות}) = 0.40 - 0.04 = 0.36\,.$$

נמשיך עם הנתון הנוסף:

$$0.75 = P(\text{מסלול א}/\text{בנות}) = \frac{P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות})}{P(\text{מסלול א})} = \frac{0.36}{P(\text{מסלול א})}\,.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול א}) = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,.$$

סעיף א. הסעיף מבקש $P(\text{מסלול א})$ וחישבנו שערכו 0.48. לכאורה, נראה שמדובר בהסתברות מותנית, אבל מה שידוע הוא שבחרנו **תלמיד כלשהו**, וההסתברות היא אחת.

סעיף ב.

$$\begin{aligned} P(\text{מסלול א} \cap \text{התלמיד הוא בת}) &= 0.36 \\ P(\text{התלמיד הוא בת}) \cdot P(\text{מסלול א}) &= 0.4 \cdot 0.48 = 0.192\,. \end{aligned}$$

האירועים **אינם** בלתי תלויים.

סעיף ג. כדי לחשב "**לפחות אחת**", נחשב שת ההסתברות המשלימה ל־"**אף אחת**". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב:

$$P(\text{מסלול ב}/\text{בת}) = \frac{P(\text{מסלול ב} \cap \text{בת})}{P(\text{בת})} = \frac{0.04}{0.4} = 0.1\,.$$

נפתור את המשוואה:

$$(0.1)^n = 1 - 0.99 = 0.01\,,$$

ונקבל $n = 2$.

סיכום

- **קרא בזהירות את השאלה**. לעתים השאלות ארוכות (בחינות של קיץ תשע"ה א, קיץ תשע"ח ב) וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.
- כמעט כל הבחינות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!
  - הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים "**אם ידוע ש-**" או "**ידוע כי**".
  - בבחינה של חורף תשע"ז כתוב "**אם** . . . , **מהי ההסתברות** . . .". לא לגמרי ברור שלמילה "אם" יש משמעות של "אם ידוע", אבל זאת הכוונה.
  - לעתים קרובות (למשל, בבחינה של קיץ תשע"ה ב) כתוב "**מה ההסתברות לבחור** . . . **מבין** . . .".
  - יוצא מן הכלל: בבחינה של קיץ תשע"ו א כתוב "**מבין** כל הנבחנים" והמילה "מבין" בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר "מבין" מתייחס ל-"**כל** הנבחנים" אין הסתברות מותנית, או ההסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1, והחיתוך מצטמצם:

$$P(X/\text{כל הנבחנים}) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X)\,.$$

מצב דומה מופיע בבחינה של קיץ תשע"ד ב ("בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת)"), ובבחינה של קיץ תשע"ח ב ("מן התלמידים שנגשו למבחן").

  - בבחינה של קיץ תשע"ח א הניסוח הוא: "$X\%$ . . . נעזרו . . . .. $\dfrac{k}{n}$ **מהם** עברו את הבחינה".
  - בבחינה של חורף תשע"ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב-** . . ., **ורק הם**.
- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבחינה של קיץ תשע"ז א יש לחשב $P(D = 4 \cap D \geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב $P(D = 4)$.
- כאשר יש חיתוך בין שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם (בחינה של קיץ תשע"ה א):

$$\frac{P(\text{ספרה ראשונה זוגית} \cap \text{סכום זוגי})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$
$$\frac{P(\text{ספרה ראשונה זוגית}) \cdot P(\text{סכום זוגי})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$
$$P(\text{סכום זוגי})\,.$$

מצב דומה מופיע בבחינות של חורף תשע"ז וחורף משע"ח.

- בבחינה של חורף תשע״ד נתון $P(T/R)$ וגם נתון ששני אירועים הם **בלתי תלויים**. החיתוך שווה למכפלת ההסתברויות והחישוב מצטמצם:

$$P(T/R) = \frac{P(T\cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)\cdot P(R)}{P(R)} = P(T)\,.$$

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה ״הצלחות״ צריכות להיות וגם כמה ״כשלונות״. מקרה מעניין נמצא בבחינה של קיץ תשע״ח ב כאשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמש (20 נקודות כל אחת), אז ההסתברות לקבל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי הצלחות (20 נקודות כל אחת).

- בבחינה של קיץ תשע״ז א כתוב ״**בוחרים באקראי** ...**, עד של־** 3 מהם **בדיוק** יש קלנועית״. המשמעות של ״עד ש־״ היא שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא ״הצלחה״. במקרה זה נשארו שתי ״הצלחות״ שיש לחשב את ההסתברות שלהן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של ״הצלחה״ בבחירה האחרונה:

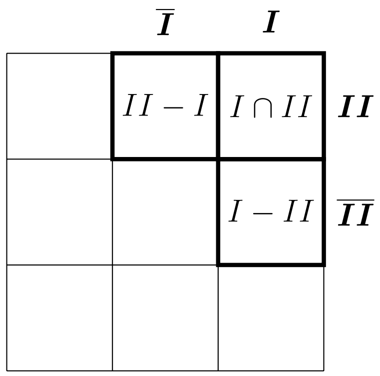
$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad\overbrace{+}^{1/1}\,.$$

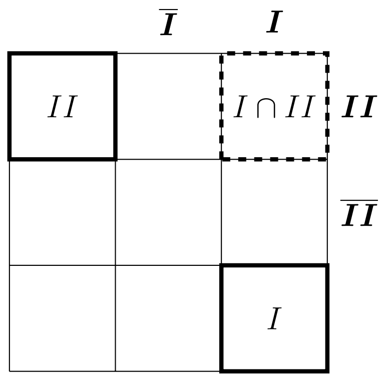
- בבחינה של קיץ תשע״ז ב הביטוי ״מוציאים באקראי ...״, ובהמשך הביטוי ״מוציאים באקראי **שוב** ...״ מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבחינה של קיץ תשע״ח א, המשמעות של הניסוח ״**לפחות אחת** משתי הטענות I, II״ היא שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II, **או שניהם**, המסומן $I\cup II$. יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני האירועים וחיסור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה, או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני המסומן $I-II, II-I$:

$$\begin{aligned} P(I\cup II) &= P(I)+P(II)-P(I\cap II)\\ P(I\cup II) &= P(I-II)+P(II-I)+P(I\cap II)\,. \end{aligned}$$

הערכים לחישוב $P(I\cup II)$ בשתי הדרכים מסומנים בטבלה להלן, כאשר התא המקווקו מופיע פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:





- בבחינה של חורף תשע"ו נתון ההסתברות p ש־"לא יזכה **באף משחק** מתוך n משחקים". גם בבחינה של קיץ תשע"ח ב צריכים לחשב את ההסבתרות של תשובה נכונה **לכל** השאלות או תשובה נכונה **לאף אחת** מהשאלות. אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,.$$

אם $k=0$ או $k=n$, $\binom{n}{k}=1$. גם $p^n(1-p)^0=p^n\cdot 1$ או $p^0(1-p)^n=1\cdot(1-p)^n$, ונשאר רק גורם אחד p^n או $(1-p)^n$.

- בבחינות של קיץ תשע"ו א, ב יש שלוש תוצאות אפשרויות במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי ההסתברויות האחרות. בבחינה של מועד ב, ההסתברות לתיקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצח פחות ההסתברות אנה תנצח:

$$P(\text{תיקו})=1-\left(P(\text{יעל})+P(\text{אנה})\right)=1-P(\text{יעל})-P(\text{אנה})\,.$$

- במספר בחינות (חורף תשע"ה, קיץ תשע"ד ב, קיץ תשע"ה ב) כתוב "ישוב גדול", "עיר גדולה", "אוניברסיטה גדולה". אני מניח שבמילה "גדול" מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כפי שדרוש בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים באוניברסיטה.