איך לשמור על מוזיאון

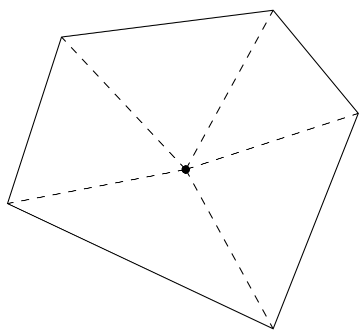
מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

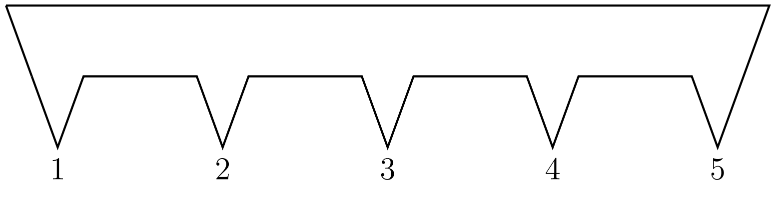
מסמך זה מבוסס על פרק 39 של Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK (Fifth Edition).* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014. הוספתי הרבה איורים והוכחות.

1 מבוא

ב־1973 Victor Klee שאל כמה שומרים נחוצים כדי לראות את כל הקירות של מוזיאון כדי לוודא שלא גונבים את הציורים. אם הקירות של המוזיאון מהווים מצולע משוכלל או אפילו מצולע קמור, אפשר להסתפק בשומר אחד:

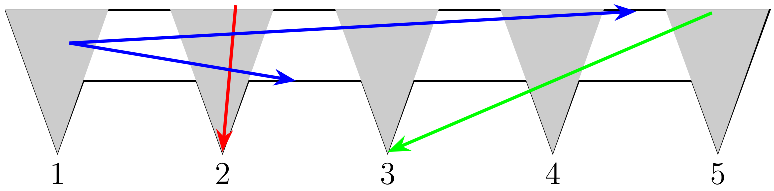


מה עם מוזיאון עם קירות בצורה של מסור:



וודא על ידי ספירה שיש 15 קירות.

נכסה בהצללה את המשולשים המוגדרים על ידי כל שן אל המסור:

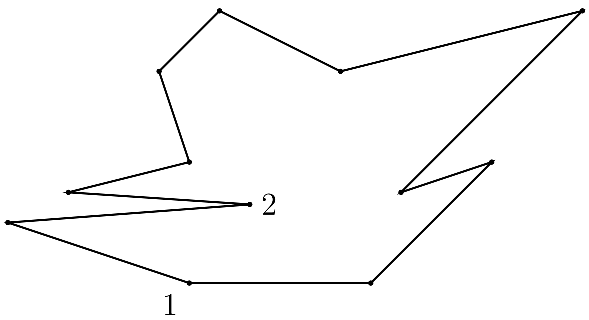


שומרת הניצבת בכל מקום בתוך אחד המשולשים יכולה לצפות על כל הקירות של המשולש (חץ אדום). בנוסף, אם השומרת ניצבת בקירבת הקיר העליון לאורך כל המוזיאון, היא יכולה לצפות על כל הקירות האופקיים (חצים כחולים). ברור ש־ $5 = \frac{15}{3}$ שומרות מספיקות כדי לשמור על כל המוזיאון. אם המשולשים המוצללים לא חופפים, שומרת במשולש אחד לא יכולה לראות את כל הקירות של משולש אחר, לכן חייבים להעסיק 5 שומרות.

ניתן להכליל את הדוגמה ל־$\frac{n}{3}$ שיניים עם n קירות, ולכן אפשר להסיק **שלפחות** $\frac{n}{3}$ שומרות נחוצות בכל מוזיאון. המשפט שלהלן טוען ש־$\frac{n}{3}$ שומרות מספיקות כדי לשמור על כל מוזיאון.

משפט 1 ניתן לשמור על כל מוזיאון עם n קירות עם $\frac{n}{3}$ שומרות.[1]

ניקח מצולע שרירותי, ייתכן עם קודקודים קעורים. קודקוד הוא **קמור** אם הזווית הפנימית פחות מ־$180°$. קודקוד הוא **קעור** אם הזווית הפנימית גדולה מ־$180°$. במצולע באיור להלן, קודקוד 1 קמור וקודקוד 2 קעור.



הגדרה 1 ניתן **לתלת** *(triangulate)* מצולע אם ניתן לצייר **אלכסונים**–קטעי קו שאינם נחתכים המחברים קודקודים והנמצאים בתוך המצולע לכל אורכם–כך שהשטח הפנימי של המצולע מכוסה על ידי משולשים זרים אחד מהשני.

משפט 2 ניתן לתלת כל מצולע.

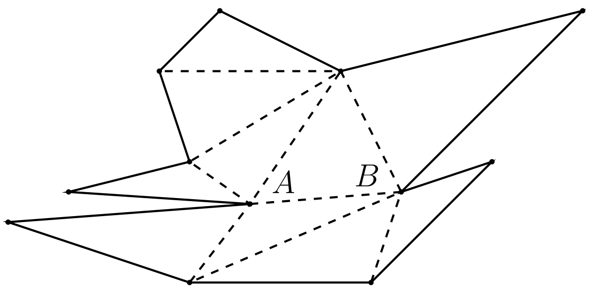
אנו דוחים את ההוכחה של משפט 2 לשלב מאוחר יותר.

[1] אם n לא מתחלק ב־3 מספר השומרות הנחוצות הוא $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. למשל, 4 שומרות מספיקות כדי לשמור על מוזיאונים עם $12, 13, 14$ קירות כי $4 = \lfloor \frac{12}{3} \rfloor = \lfloor \frac{13}{3} \rfloor = \lfloor \frac{14}{3} \rfloor$. לשם הפשטות נתעלם מסיבוך זה.

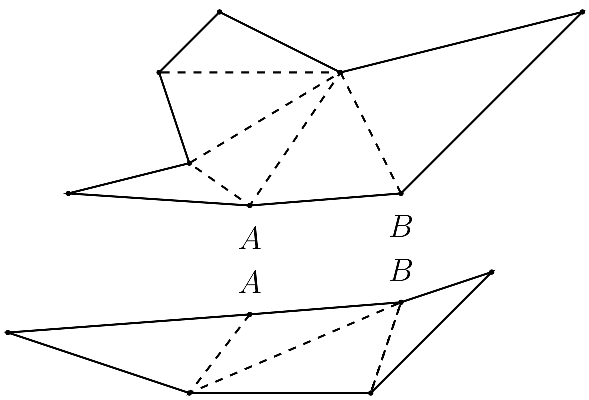
הגדרה 2 ניתן **לצבוע מצולע בשלושה צבעים** אם קיים מיפוי $c : V \mapsto$ {אדום,כחול,ירוק}, כך ששני הקודקודים של צלע מקבלים צבעים שונים.

משפט 3 ניתן לצבוע מצולע מתולת בשלושה צבעים.

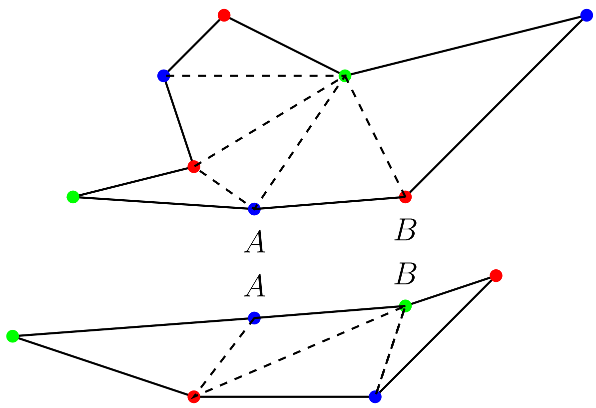
הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים. ברור, שניתן לצבוע משולש בשלושה צבעים. ניתן מצולע עם $n > 3$ קודקודים. חייבים לצייר לפחות אלכסון אחד כדי לתלת את המצולע. בחר אלכסון שרירותי $\overline{AB}$:



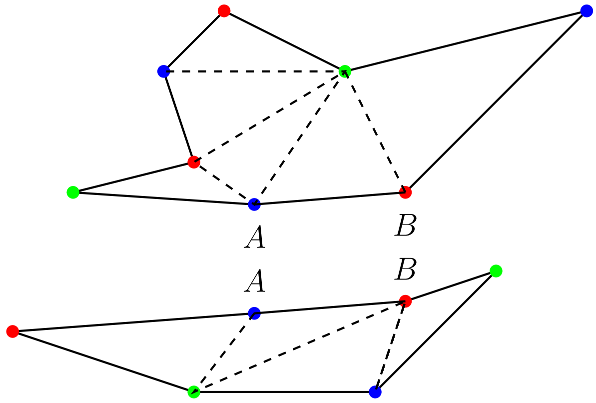
וחלק את המצולע לאורך אלכסון זה לשני מצולעים קטנים יותר:



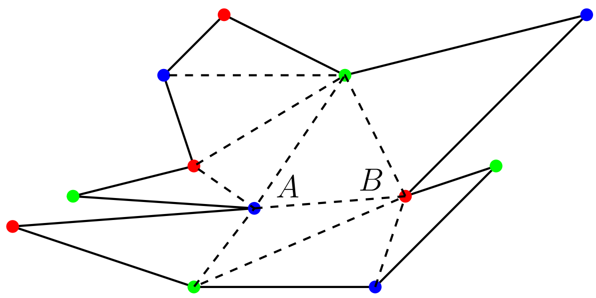
לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע כל אחד מהמצולעים הללו בשלושה צבעים:



השיוך של צבעים לקודקודים הוא שרירותי, כך שאם הקודקודים A, B מקבלים צבעים שונים בשני המצולעים, ניתן לשנות את הצבעים באחד מהם כך שהצבעים של A, B שווים בשני המצולעים. כאן אנו מחליפים **אדום** ו־**ירוק** במצולע התחתון:



כעת ניתן להדביק את שני המצולעים ביחד כדי לשחזר את המצולע המקורי עם n קודקודים. המצולע יהיה צבוע בשלושה צבעים:

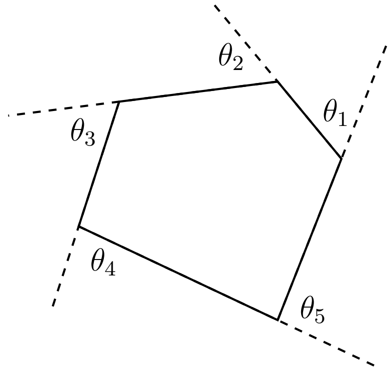


הוכחה של משפט 1 לפי משפט 2 ניתן לתלת את המצולע ולפי משפט 3 ניתן לצבוע את המצולע בשלושה צבעים. כל שלושת הקודקודים של כל משולש חייבים להיות צבועים בצבעים שונים כדי לקיים את התנאי שהמצולע צבוע בשלושה צבעים. בגלל שהמצולע צבוע בשלושה צבעים, צבע אחד לפחות, נניח אדום, מופיע לכל היותר $\frac{n}{3}$ פעמים, ובכל משולש חייב להיות קודקוד צבוע אדום. אם נציב שומרת בכל קודקוד אדום, היא יכולה לראות על הקירות של כל המשולשים שקודקוד זה הוא אחד מהקודקודים שלו. כל המשולשים של תילות המצולע כוללים את כל הצלעות של המצולע, ולכן $\frac{n}{3}$ שומרות מספיקות כדי לראות את כל הקירות של המוזיאון.

כעת נוכיח את משפט 2 שניתן לתלת כל מצולע.

משפט 4 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע עם n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.

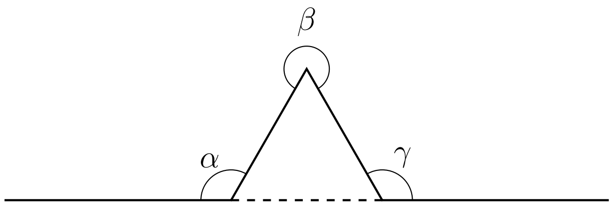
הוכחה תחילה נוכיח את המשפט עבור מצולעים קמורים. נסמן את **הזוויות החיצוניות** ב־θ_i:



אם נזיז קו מקווקוו אחד לשני הזוויות החיצוניות ישלימו מעגל כך ש־$\sum_1^n \theta_i = 360^\circ$. עבור כל זווית חיצונית θ_i, נסמן את הזווית הפנימיות של אותו קודקוד ב־ϕ_i. נחשב:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \theta_i &= \sum_1^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\
\sum_1^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n-2)\,.
\end{aligned}$$

נבדוק מה קורה אם נוסיף קודקוד קעור:



קיים משולש המורכב משני הצלעות שנוגעים בקודקוד הקעור והצלע המסומן בקו מקווקוו המחבר את הקודקודים שאחרים של הצלעות הללו. נסכם את הזוויות של המשולש:

$$\begin{aligned}
&(180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ \\
&\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 180^\circ\,.
\end{aligned}$$

סכום הזוויות הפנימיות גדל ב־$\alpha+\beta+\gamma$ ומספר הקודקודים גדל בשלוש, כך שהמוואה במפשט נשמרת:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \phi_i + (\alpha+\beta+\gamma) &= 180^\circ(n-2) + 3 \cdot 180^\circ \\
&= 180^\circ((n+3)-2)\,.
\end{aligned}$$

משפט 5 חייב להיות לפחות שלושה קודקודים קמורים במצולע.

הוכחה נסמן ב־k את מספר הקודקודים הקעורים, כאשר הזווית הפנימית של כל אחד הוא $180^\circ + \epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. סכום הזוויות הפנימיות של הקודקודים **הקעורים** הוא בוודאי פחות או שווה לסכום **כל** הזוויות הפנימיות:

$$\begin{aligned}
k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i &\leq 180^\circ(n-2) \\
(k+2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i &\leq n \cdot 180^\circ \\
(k+2) \cdot 180^\circ &< n \cdot 180^\circ \\
k &< n-2\,.
\end{aligned}$$

מכאן שיש לא רק קודקוד אחד, אבל לפחות שלושה קודקודים שאינם קעורים אלא קמורים.

הוכחה של משפט 2 באינדוקציה על מספר הקודקודים. עבור $n=3$ אין מה להוכיח. נניח ש־$n>3$. לפי משפט 5, חייב להיות קודקוד קמור C. סמנו את הקודקודים השכנים שלו B, D. אם $\overline{BD}$ נמצא כולו בתוך המצולע אז הוא אלכסון וניתן לחלק את המצולע למשולש $\triangle BCD$ ולמצולע קטן יותר כאשר $\overline{BD}$ הוא צלע. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לתלת את המצולע ואז להדביק אותו למשולש $\triangle BCD$ ולקבל תילות של המצולע המקורי. אחרת, חייב להיות קודקוד קעור הקרוב ביותר ל־C. $\overline{CF}$ הוא אלכסון המחלק את המצולע לשני מצולעים קטנים יותר. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת אותם ולהדביק אותם אחד לשני.