אמא'לה, המחוגה שלי התמוטטה!

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

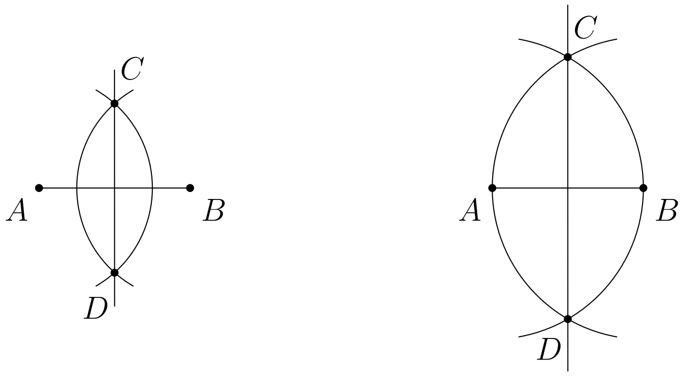
מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

1 מחוגה קבועה ומחוגה מתמוטטת

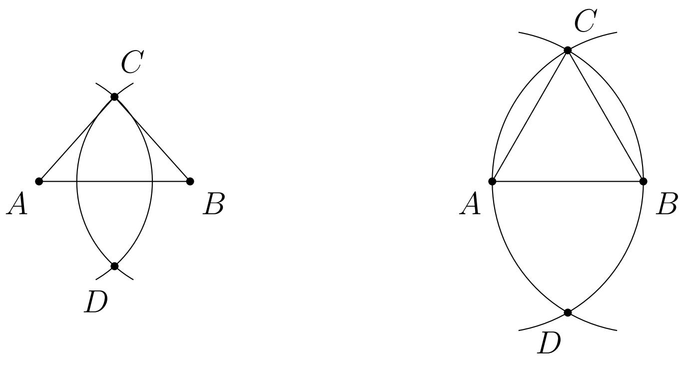
במחוגה מודרנית ניתן לקבע את המרחק בין הרגליים, וכך להעתיק קטע קו או מעגל ממקום למקום. ראיתי בספרי לימוד הצעה לבניית אנך אמצעי של קטע קו על ידי בניית שני מעגלים עם רדיוסים שווים, ובלבד שהרדיוסים **גדלים ממחצית אורך הקטע** (איור 1 שמאל). נקרא למחוגה זו: "מחוגה קבועה".

אוקלידס השתמש במחוגה "מתמוטטת" (collapsing), שרגליה מתקפלות כאשר מרימים אותה מהנייר. מחוגה המורכבת מגיר הקשור לחוט היא מחוגה מתמוטטת, כי אי־אפשר לשמור על המרחק בין הגיר ומקום על החוט כאשר מרימים אותה מהלוח. איור 1 (ימין) מראה בנייה של אנך אמצעי באמצעות מחוגה מתמוטטת: האורך של AB שווה כמובן לאורך של BA, ולכן הרדיוס של המעגלים שווים ללא צורך להעביר אורך קטע ממקום למקום.



איור 1: אנך אמצעי

ההוכחה שהקו שנבנה הוא האנך האמצעי היא לא מאוד פשוטה, כי צריך להשתמש במושגים יחסית מתקדמים כגון משולשים חופפים. לעומתה, ההוכחה שבאותה הבנייה מתקבל משולש שווה צלעות פשוטה (איור 2 ימין).



איור 2: משולש שווה צלעות?

אורך הקטע AC שווה לאורך הקטע AB כי שניהם רדיוסים של אותו מעגל, ומאותה סיבה האורך של BC שווה לאורך של BA. מכאן:

$$AC = AB = BA = BC\,.$$

איור 2 (שמאל) מראה שאם משתמשים במחוגה קבועה עם רדיוסים שרירותיים, מתקבל משולש שווה־שוקיים ולא משולש שווה צלעות.

בנייה זו של משולש שווה צלעות והוכחת נכונתה היא המשפט הראשון בספר "יסודות" של אוקלידס. המשפט השני בספר מראה שאפשר להעתיק קטע קו נתון AB למקום אחר נתון C. אם בונים מעגל שמרכזו C והרדיוס שלו הוא העותק של AB, מתקבל העתק של מעגל נתון שמרכזו A והרדיוס שלו AB. המסקנה היא שלכל בנייה באמצעות מחוגה קבועה, קיימת בנייה שקולה באמצעות מחוגה מתמוטטת.

במאמר מרתק [4], Godfried Toussaint מראה שלאורך מאות השנים מאז הופעת ספרו של אוקלידס, פורסמו הוכחות שגויות רבות של המשפט, ודווקא אוקלידס הוא זה שנתן הוכחה נכונה! במסמך זה, אביא את הבנייה של אוקלידס בשלבים, ביחד עם הוכחת הנכונות, ואחר כך בנייה שגויה שניתן למצוא אפילו בספרים שפרסמו לאחרונה. בסוף, אסקור משפטים אחרים על בנייה גיאומטרית באמצעות כלים אחרים.

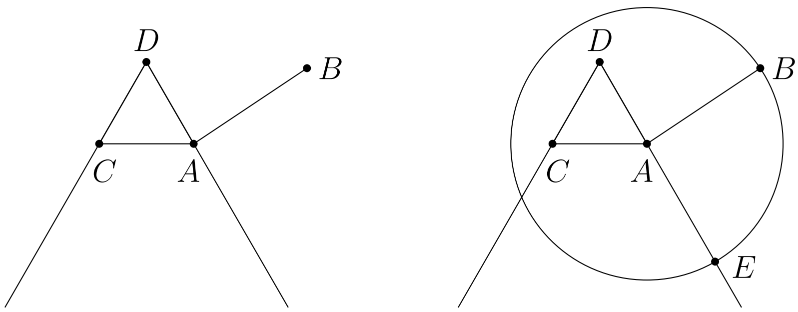
2 העתקת קטע קו לפי אוקלידס

משפט (Compasss Equivalence Theorem): נתון קטע קו AB ונקודה C (איור 3 שמאל), ניתן לבנות (באמצעות מחוגה מתמוטטת) בנקודה C קטע קו שאורכו שווה לאורכו של AB.

איור 3: העתק AB לנקודה C. בנה משולש שווה צלעות על AC.

הבנייה:

- חבר בקו את הנקודות A ו־C.
- בנה משולש שווה צלעות שבסיסו AC. סמן את הקודקוד של המשולש ב־D (איור 3 ימין). לפי המשפט הראשון של אוקלידס, ניתן לבנות את המשולש באמצעות מחוגה מתמוטטת.
- בנה קרן בהמשך של DA וקרן בהמשך של DC (איור 4 שמאל).
- בנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB. סמן את החיתוך של המעגל עם הקרן DE ב־E (איור 4 ימין).



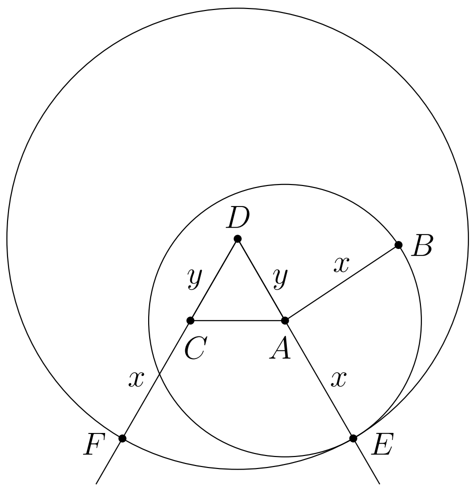
איור 4: קרנות מ־D דרך A, C. מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB.

- בנה מעגל שמרכזו D עם רדיוס DE. סמן את החיתוך של הקרן DC עם המעגל ב־F (איור 5).
- אורכו של קטע הקו CF שווה לאורך קטע הקו AB.

הוכחה: $DC = DA$ כי הם צלעות של משולש שווה צלעות. $AB = AE$ כי שניהם רדיוסים של אותו מעגל שמרכזו A. $DE = DF$ כי שניהם רדיוסים של אותו מעגל שמרכזו D. לכן, אורך קטע הקו CF הוא:

$$CF = DF - DC = DE - DC = DE - DA = AE = AB\,.$$

.



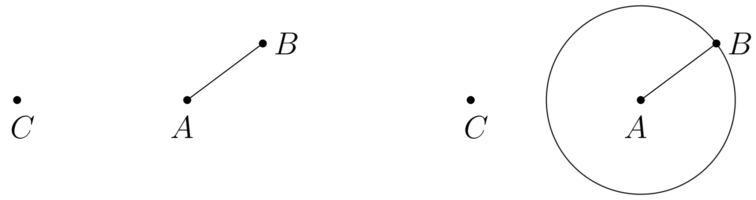
איור 5: מעגל שמרכזו D עם רדיוס DE. קטעים שווים: $CF = AE = AB$.

3 העתקה שגויה של קטע קו

הבנייה לקוחה מ־[3] שם המחבר מאתגר את הקורא למצוא את השגיאה.

בנייה:

- בנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB (איור 6).

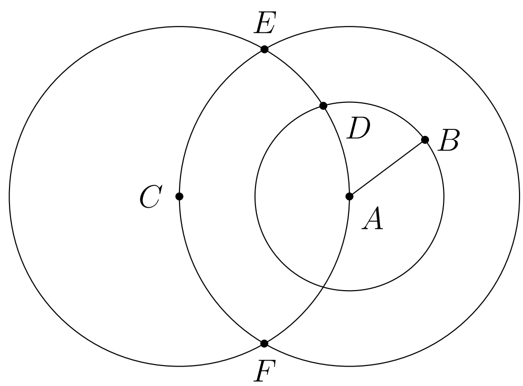


איור 6: העתק AB לנקודה C. בנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB.

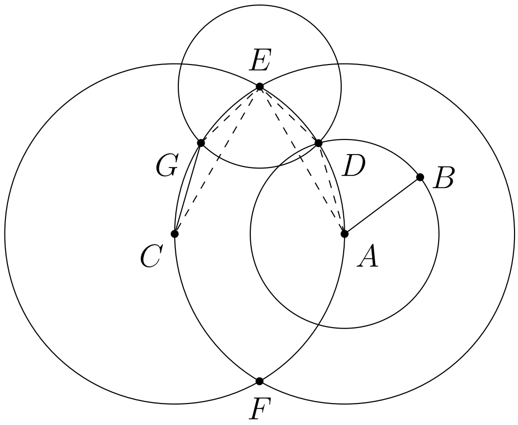
- בנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס AC ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $AC = CA$. נסמן את שתי נקודות החיתוך של המעגלים ב־E, F. סמן את החיתוך של מעגל שמרכזו C עם המעגל שמרכזו A ב־D (איור 7).
- בנה מעגל שמרכזו E עם רדיוס ED. סמן את החיתוך של מעגל זה עם המעגל שמרכזו C ב־G (איור 8).
- ארכו של קטע הקו GC שווה לאורכו של AB.

חשוב להשתכנע שהבנייה אפשרית עם מחוגה מתמוטטת.

את ההוכחה ש־$AB = GC$ ניתן למצוא ב־[3]. בהוכחה יש להראות ששני המשולשים המסומנים בקווים במקוקווים חופפים. לא רק שההוכחה ארוכה הרבה יותר מההוכחה של אוקלידס, היא משתמשת במושגים מתקדמים יחסית להוכחה של אוקלידס המשתמשת רק במושגים מעגל ומשולש שווה צלעות.



איור 7: מעגל שמרכזו A עם רדיוס AC ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $AC = CA$.



איור 8: מעגל שמרכזו E עם רדיוס ED. קטעים שווים: $AB = DA = GC$.

עברו בעיון על ההוכחה ב־$AB = GC$ וחפש את השגיאה. התשובה: אין שום שגיאה בהוכחה! השגיאה נובעת ממקור אחר: השווין $AB = GC$ מתקיים רק כאשר אורכו של AB קטן מאורכו של AC. הבנייה של אוקלידס נכונה ללא קשר לאורך היחסי של הקווים ולמיקום של הנקודה C ביחס לקטע הקו AB ([4]).

4 חקר הבניות עם גיאוגברה

הכנתי קבצי גיאוגברה עבור שתי הבניות:

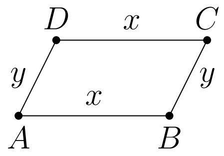
`compass-equivalency.ggb, rusty-compass.ggb`.

ניתן להזיז את הנקודות A, B, C ולמדוד את שני אורכים כדי לבדוק אם הם שווים.

שימו לב: בבנייה של אוקלידס, אם מתחילים עם $AB < AC$, עוברים למצב ש־$AB > AC$ וחוזרים, התצוגה מתקלקלת. הסיבה היא שכאשר $AB < AB$, לקרן DA יש שתי נקודות חיתוך עם המעגל שמרכזו A. כאשר חוזרים למצב ש־$AB > AC$ נאבד נקודת החיתוך. כדי להתגבר על הבעייה הכנתי שני קבצים עבור שני מצבים.

5 דרך "פשוטה יותר" להעתקת מעגל עם מחוגה מתמוטטת

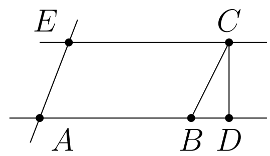
נתון קטע קו AB ונקודה C, אם נוכל לבנות מקבילית כאשר שלושת הנקודות הן קודקודים, נקבל קטע קו עם C בקצה אחד שאורכו שווה לאורכו של AB (איור 9). ראו [עמודים 207–208 ,5].



איור 9: מקבילית: $DC = AB$.

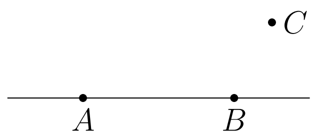
בנייה: (איור 10)

- חבר את B ו־C.
- בנה אנך מ־C לקו המכיל את הקטע AB. נסמן את נקודת החיתוך ב־D.
- בנה אנך לקטע CD מהנקודה C. הקו המכיל את האנך מקביל ל־AB.
- באותה דרך בנה קו המקביל ל־BC דרך A. נסמן את נקודת החיתוך של שני הקווים שבנינו ב־E. אורכו של קטע הקו EC שווה לאורכו של AB ו־C היא נקודת קצה שלו.



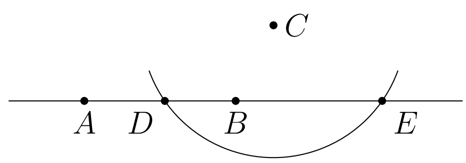
איור 10: בניית המקבילית.

יש לוודא שאפשר לבנות את המקבילית עם מחוגה מתמוטטת. למעשה, הבנייה יחידה הנחוצה היא של אנך מנקודה שרירותית נתונה לקו המכיל קטע קו נתון (איור 11).



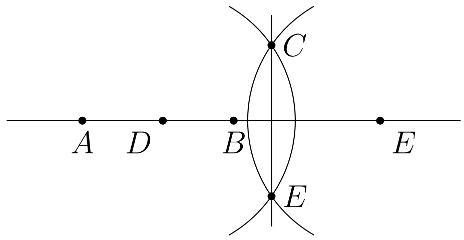
איור 11: אנך מ־C לקו המכיל את הקטע AB.

נבנה מעגל שמרכזו C עם רדיוס הגדול מהמרחק של C מהקו (איור 12).



איור 12: D ו־E במרחק שווה מ־C.

לא נותר אלא לבנות אנך אמצעי דרך C (איור 13). בגלל שהמרחק מ־D ל־C שווה למרחק מ־E ל־C, ניתן לבנות את האנך באמצעות מחוגה מתמוטטת.



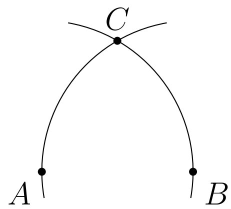
איור 13: אנך לקו AB העובר דרך C.

למה אוקלידס לא הביא בנייה זו? כפי שהזכרנו לעיל, הוכחת הנכונות של הבנייה של אנך אמצעי כלל לא "פשוטה", בעוד ההוכחה של הנכונות של הבנייה של אוקלידס פשוטה ביותר.

6 הגבלות והרחבות של בנייה באמצעות סרגל ומחוגה

ראינו שמה שניתן לבנות עם סרגל ומחוגה קבועה ניתן לבנות עם סרגל ומחוגה מתקפלת. מתמטיקאים חקרו אפשרות מוגבלות יותר:

- כל בנייה עם סרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם מחוגה בלבד! כמובן, אם אין סרגל לא נראה קווים, אבל שתי נקודות במישור מגדירות קו ואין צורך ממש לראות אותו. למשל, אם ניתנות שתי נקודות A, B אפשר לבנות עם מחוגה בלבד נקודה C שהמרחק שלה מ־A ומ־B שווה למרחק AB (איור 14). בנינו משולש שווה צלעות, אמנם ללא צלעות.



איור 14: בניית משולש שווה צלעות עם מחוגה בלבד.

המשפט הוכח בשנת 1672 על ידי Georg Mohr ובאופן עצמאי בשנת 1797 על ידי Lorenzo Mascheroni.

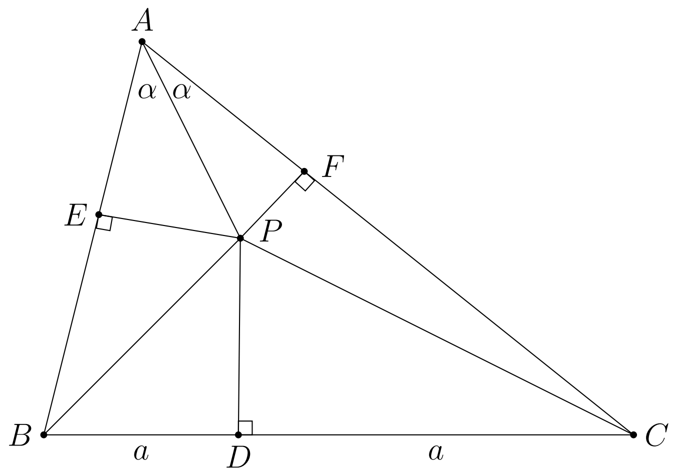
- אי־אפשר להסתפק בסרגל בלבד, אבל אם קיים במישור מעגל אחד בלבד (לא משנה איפה מרכז המעגל או הרדיוס שלו), ניתן לבנות את כל מה שאפשר לבנות עם סרגל ומחוגה. המשפט הוכח ב־1833 על ידי Jacob Steiner.

ההוכחות של שני המשפטים מעט ארוכות אבל לא מסובכות במיוחד. אפשר למצוא אותן בספרו של Heinrich Dörrie [1]. ספר זה נגיש יותר במהדורה חדשה [2].

בכיוון השני, היוונים עצמם חקרו מה אפשר לבנות אם משתמשים בכלים מסובכים יותר מסרגל (ללא סימנים) ומחוגה. במאה ה־19 הוכח שלא ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה. ניתן לבצע את הבנייה עם סרגל בעל שני סימנים הנקרא neusis או עם מכשיר המורכב משני סרגלים המחוברים בציר הנקרא quadratrix. כתבתי מסמך המתאר את הבניות **איך לחלק זווית לשלושה (אם אתם מוכנים לרמות)** שניתן למצוא באתר שלי:
`http://www.weizmann.ac.il/scitea/benari/mathematics`.

7 אין לסמוך על ציור

כדי להדגים את המלכודת הממתינה למי שמסתמך על ציור, אביא הוכחה **שכל** משולש הוא משולש שווי שוקיים! בציור להלן P היא נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle A$ לבין האנך האמצעי של BC. D, E, F הן נקודות החיתוך של האנכים מ P אל הצלעות.



המשולשים $\triangle APE, \triangle APF$ הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות α בנקודה A, והצלע AP משותף, ולכן המשולשים חופפים. PD הוא אנך אמצעי כך ש־$BD = DC$, ולכן המשולשים $\triangle DPB, \triangle DPC$ חופפים ו־$PB = PC$. המשלושים $\triangle EPB, \triangle FPC$ הם משלושים ישר זווית עם יתר שווה, ולכן גם הם חופפים. ניתן להסיק ש $AE + EB = AF + FC$ והמשולש $\triangle ABC$ שווה שוקיים.

ההוכחה **נכונה** אבל הציור אינו נכון. הכנתי קובץ גיאוגברה `isosceles.ggb` המראה משולש עבורו הנקודה P נמצאת **מחוץ** למשולש.

מקורות

[1] Heinrich Dörrie. *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover, 1965.

[2] Heinrich Dörrie. *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. 2010. Newly reworked by Michael Woltermann. `http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm`.

[3] Timothy Peil. The rusty compass theorem. `http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm`.

[4] Godfried Toussaint. A new look at Euclid's second proposition. *The Mathematical Intelligencer*, 15(3):12–23, 1993.

[5] Edward C. Wallace and Stephen F. West. *Roads to Geometry (Third Edition)*. Pearson, 2003.