$\sqrt{\mathbf{x+5}} = \mathbf{5 - x^2}$

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

פתור עבור x. חשב את הריבוע של שני צדי המשוואה ואסוף איברים:

$$f(x) = x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0\,.$$

האם אפשר לפרק את הפולינום ממעלה ארבע לשני פולינומים ממעלה שניים עם מקדמים שלמים? אם כן, **המקדמים של האיברים x חייבים להיות בעלי ערך שווה וסימנים הפוכים כי אין איבר x^3!** יהי n מספר שלם חיובי, ו־ k_1, k_2 מספרים שלמים כלשהם:

$$f(x) = \left(x^2 - nx + k_1\right)\left(x^2 + nx + k_2\right).$$

נכפיל את הפולינומים:

$$\begin{array}{rlllll}
f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 & & \\
 & & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x & \\
 & & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2\,.
\end{array}$$

ונשווה מקדמים. נקבל שלוש משוואות בשלושה נעלמים:

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2) - n^2 &= -10\\
n(k_1 - k_2) &= -1\\
k_1k_2 &= 20\,.
\end{aligned}$$

משתי המשוואות האחרונות ומהבחירה של n כמספר שלם חיובי, ברור ש:

$$k_1 = 4,\ k_2 = 5 \ \text{ or } \ k_1 = -5,\ k_2 = -4\,.$$

רק $k_1 = -5,\ k_2 = -4$ מספקים את המשוואה הראשונה עבור המקדם של x^2:

$$f(x) = \left(x^2 - x - 5\right)\left(x^2 + x - 4\right).$$

הפוקציה $f(x)$ שווה לאפס אם אחד הגורמים שווה לאפס. נפתור את שני המשוואות הריבועיות ונקבל ארבעה פתרונות אפשריים:

$$\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\ ,\ \ \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

בגלל השורש ב־ $\sqrt{x+5}$, מתקיים $5 - x^2 \geq 0$, ולכן:

$$-2.24 \approx -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \approx 2.24\,.$$

מחישוב נומרי מתקבלים שני פתרונות:

$$\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \approx -1.79\ ,\ \ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1.56\,.$$