אפשר גם אחרת

גרפים כאמצעי עזר לפתרון בעיות תנועה והספק

מוטי בן-ארי

מבוא

אחת הדרכים המקובלות לפתרון של בעיות תנועה היא לצייר תרשים חד-ממדי: קו אופקי עבור מסלול התנועה של כל דמות (מכונית, סירה, וכדומה) המשתתפת בתסריט הבעיה. ממד המרחק מוצג באופן מפורש, אבל ממד הזמן מוצג באופן מובלע כהתקדמות לאורך הקו. מאמר זה מציע להסתייע בגרפים כדי שממד הזמן יוצג באופן מפורש.

הציר האופקי בגרף הוא ציר הזמן, והציר האנכי הוא ציר המרחק. לכל דמות נצייר מסלול המורכב ממקטעים לפי ניסוח הבעיה. המהירות קבועה בכל מקטע, ולכן כל מקטע יהיה קטע קו ששיפועו הוא המהירות. ככל שהמהירות גבוהה יותר, הקו תלול יותר. יש לשים לב שבניגוד לתרשים חד-ממדי בו אורך קטע קו הוא מרחק בין שתי נקודות, כאן המרחק בין שתי נקודות הוא ההפרש בציר האנכי בין הנקודות.

הפתרון של בעיית תנועה מחייב שימוש בנוסחה: **מרחק שווה זמן כפול מהירות**, ומקובל לארגן את הנתונים בטבלה. הגרף מיועד לשפר את השלב הראשון בהתמודדות עם הבעיה: הבנת הקשרים בין התכונות של מסלולי הדמויות בתסריט. במאמר זה, לאחר הצגת הגרף אקצר בשלבים הבאים בפתרון.

הנוסחה של בעיות הספק דומה לזו של בעיות תנועה, ולכן ניתן להשתמש בגרפים גם עבור בעיות הספק.

כדי לבדוק את השיטה, פתרתי בעזרת גרפים את כל בעיות התנועה וההספק משאלוני 806 של בחינות הבגרות, בשנים תשע"ד ועד תשע"ז. מאמר זה מציג תחילה את הפתרון לשאלה פשוטה יחסית, הלקוחה מבחינת הבגרות של קיץ תשע"ד מועד א', ואחר כך מציג את הפתרון לשאלה הלקוחה מהבחינה של קיץ תשע"ה מועד ב'. לדעתי, בדוגמה השנייה, הגרף תורם תרומה משמעותית להבנת התסריט ולפתרון הבעיה.

שאר הפתרונות נמצאים במסמך, שניתן להוריד מהאתר שלי:

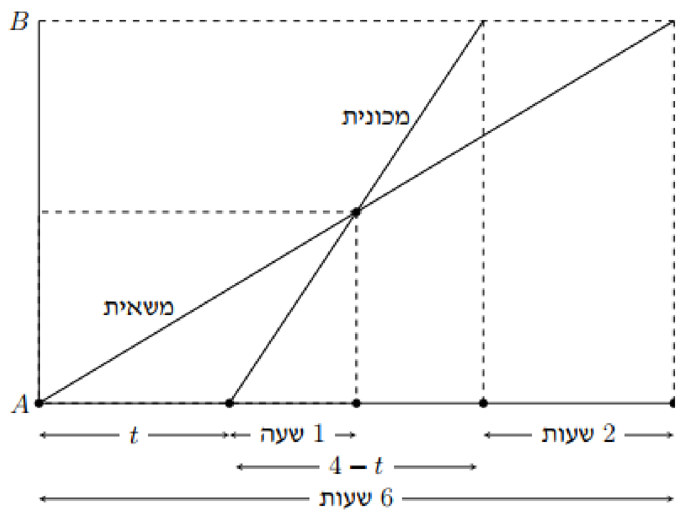
http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/mathematics/

כהשלמה למאמר זה אני ממליץ לקרוא את המאמר של אלבוים-כהן וקופר (2015), המציג פתרונות גיאומטריים לבעיות הספק.

מפגש בין מכונית למשאית

השאלה

משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B. זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A, והגיעה לעיר B שעתיים לפני המשאית. המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע יציאתה של המכונית. המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות. מצאו כמה שעות אחרי היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצאו את שני הפתרונות).



איור 1: ייצוג בגרף של הבעיה: מפגש בין מכונית למשאית

ייצוג בגרף

איור 1 מציג ייצוג של הבעיה באמצעות גרף. הציר האופקי בגרף מסמן את מעבר הזמן מיציאת המשאית מעיר A ועד להגעתה לעיר B, כעבור 6 שעות. הציר האנכי הוא המרחק בין שתי הערים. מתחת לציר האופקי בגרף מסומנים הזמנים לפי התסריט. המהירויות קבועות, ולכן לכל דמות מסלול המורכב ממקטע אחד בלבד. המכונית נוסעת מהר יותר מהמשאית, כך שהקו שלה תלול יותר מזה של המשאית. אין חשיבות לדיוק בקנה המידה בגרף, כי מטרת הגרף היא רק להבין את הקשרים בין המסלולים ולא לחשב את הפתרונות.

נסמן: t = זמן יציאת המכונית, v_c = מהירות המכונית, v_m = מהירות המשאית.

המרחקים הם ההפרשים בין הנקודות בציר האנכי. נכתוב משוואות למרחקים שווים, מ-A עד למפגש, ומ-A עד ל-B:

$$v_m(t+1) = v_c \cdot 1$$

$$v_m \cdot 6 = v_c(4-t)$$

משתי המשוואות מתקבלת משוואה ריבועית ב- t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

למשוואה שני פתרונות $t = 1$ שעה, ו- $t = 2$ שעות.

יוסי נפגש עם אימא

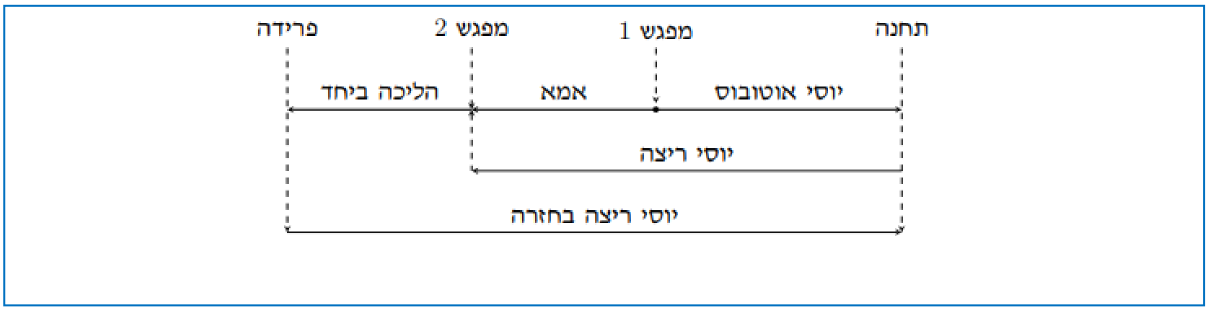
השאלה

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו, ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס. כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באמו, עצר האוטובוס בתחנה, ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אמו. מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אמו, והיא 1/7 ממהירות הנסיעה של האוטובוס. כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אמו?

ברגע שיוסי השיג את אמו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אמו (בכיוון ההליכה שלה). מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה. (מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?



איור 2: ייצוג בתרשים חד-ממדי של הבעיה: יוסי נפגש עם אמא

ייצוג בתרשים חד-ממדי

איור 2 מציג תרשים חד-ממדי שהשתמשתי בו בניסיונות הראשונים שלי לפתור את הבעיה: ברור מהתרשים מה היחסים בין המרחקים, אבל קשה להבין את היחסים בין הזמנים.

ייצוג בגרף

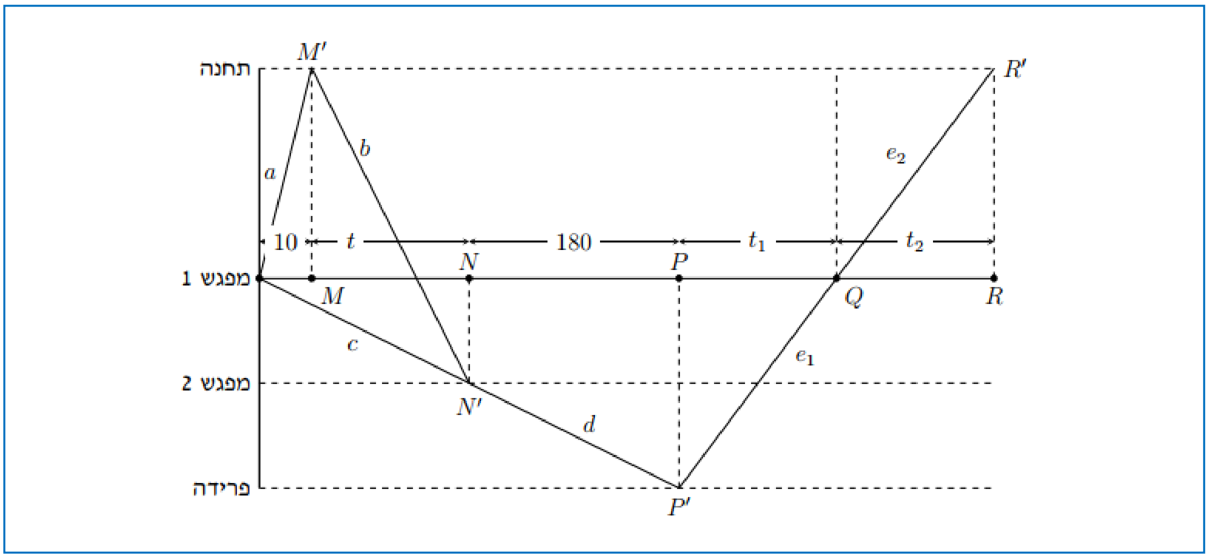
איור 3 מציג את תסריט הבעיה באמצעות גרף.

המסלול של יוסי מורכב מארבעה מקטעים נפרדים (אחד משותף עם אמו) בשלוש מהירויות שונות (נסיעה באוטובוס, ריצה, הליכה עם אימא). בחרתי לחלק את המקטע האחרון של יוסי לשני מקטעים: הריצה לנקודת המפגש הראשונה, ומשם לתחנה.

כנקודת ייחוס בחרתי את הנקודה ההתחלתית של התסריט. מפני שהתנועה היא בשני כיוונים מנקודה זו, לציר האנכי ערכים חיוביים ושליליים.

כדי להקל על הדיון סימנתי כל מקטע באות אנגלית קטנה, וכל נקודת זמן באות אנגלית גדולה. משמעות הקטעים היא: a = יוסי נוסע באוטובוס, b = יוסי רץ לפגישה עם אימא, c = אימא הולכת עד למפגש עם יוסי, d = יוסי ואימא הולכים ביחד, $e_1 + e_2$ = יוסי רץ חזרה לתחנה.

היחסים בין המהירויות של הדמויות נתונים בשאלה. סרטטתי את הקווים כך שהשיפוע של קו האוטובוס גדול מזה של הקו של יוסי, והשיפוע של הקו של יוסי גדול מהשיפוע של הקו של אמו.



איור 3: ייצוג בגרף של הבעיה: יוסי נפגש עם אמא

נסמן: t = הזמן שיוסי רץ מהתחנה כדי להשיג את אימא. $t_1 + t_2$ = הזמן שיוסי רץ בחזרה לתחנה.

נסמן מהירויות: v_y = יוסי, v_a = אימא, v_b = אוטובוס.

נתון: $v_y = 2v_a$, $v_y = \frac{v_b}{7}$.

סעיף א

'NN הוא המרחק ממפגש 1 למפגש 2. אימא הלכה לפי הקו c, ולכן המרחק שהלכה הוא $v_a(t+10)$. יוסי הלך לכיוון אחד לפי הקו a, וחזר לפי הקו b. ההפרש בין המרחקים יהיה שווה גם הוא ל-'NN. נכתוב משוואה לשוויון המרחקים:

$$v_a(t+10) = v_y t - v_b \cdot 10$$

לאחר הצבת יחסי המהירויות הנתונים:

$$\frac{v_y}{2}(t+10) = v_y t - 7v_y \cdot 10$$

נקבל $t = 150$ שניות.

סעיף ב

הקו $e_1 + e_2$ מתאר את הריצה של יוסי בחזרה לתחנה.

'PP הוא המרחק שאימא עברה בין מפגש 1 לבין נקודת הפרידה, המרחק של e_1, המקטע הראשון של הריצה של יוסי. פרק הזמן שאימא הלכה מרחק זה הוא:

$10 + 150 + 180 = 340$ שניות.

יוסי רץ פי שניים מהר מאמא, ולכן את המקטע e_1 הוא עבר ב-$t_1 = 170$ שניות.

'MM הוא המרחק שהאוטובוס עבר ממפגש 1 ועד התחנה. 'RR'=MM, המרחק של e_2, המקטע השני של הריצה של יוסי. האוטובוס עבר מרחק זה ב- 10 שניות. יוסי רץ פי שבע לאט, ולכן את מקטע e_2 הוא עבר ב- $t_2 = 70$ שניות.

נסכם ונקבל שיוסי רץ מנקודת הפרידה לתחנה ב- $t_1 + t_2 = 70 + 170 = 240$ שניות.

תרומת הגרף

בשאלה זו מצאתי שהגרף עזר פעמיים:

א. לראות שהריצה של יוסי בחזרה לתחנה מורכבת משני מקטעים (עד הציר האופקי e_1 ומעל לציר האופקי e_2).

ב. בחישוב הזמנים $10 + 150 + 180 = 340$ שממש "קופץ לעין" מהגרף.

מסקנות

כדי לפתור בעיות תנועה יש למצוא משוואות בין מרחקים שווים או זמנים שווים. השימוש בגרף מאפשר למצוא את המשוואות בקלות. גם המהירויות מיוצגות בצורה ברורה כשיפועים של קווי התנועה. התרומה העיקרית של הגרף היא בחלוקת התסריט למקטעים ברורים, ולכן אין צורך לדייק בקנה המידה, וניתן להשתמש בשיטה זו בציור ידני במבחנים.

הבעת תודה

ברצוני להודות לאביטל אלבוים-כהן שהעלתה בפניי את האפשרות להשתמש בגרפים. קיבלתי הערות מועילות מהשופטים.

מקורות

אלבוים-כהן, א', וקופר, ג' (2015). פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים. על"ה 51, 14 - 19.

פרופ' מרדכי בן ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע