מתמודדים עם סדרות

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

אני מודה לרונית בן־בסט לוי על הערותיה המועילות.

במסמך זה ננתח את השאלות על סדרות בבחינות הבגרות, שאלון 806. נחפש תבניות המופיעות בשאלות ונצביע על דרכים לפתרונן. בסוף המסמך רשמתי המלצות למתמודד עם סדרות.

חורף תשע"ד

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ \dots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1\ ,\ -a_2\ ,\ a_3\ ,\ -a_4\ ,\ \dots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}\ ,\ \frac{1}{a_3}\ ,\ \frac{1}{a_4}\ ,\ \dots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

סעיף א. המנה של הסדרה השלישית קבועה כי נתון שהסדרה הראשונה הנדסית:

$$\frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

סעיף ב. נתון:

$$\frac{a_2}{1-q} = 6, \qquad \frac{-a_2}{1-(-q)} = -3, \qquad \frac{1}{a_2}\cdot\frac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q}-1} = 273.25\,.$$

משתי הנוסחות הראשונות נחשב $q=\frac{1}{3}$ ו־$a_2 = 6\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$. נציב בנוסחה השלישית ונקבל $3^n = 2187$. בדיקת חזקות של 3 מראה ש־$n=7$.

קיץ תשע"ד, מועד א

2. בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0 .

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0 .

סכום כל איברי הסדרה הוא 726 .

מצא את הפרש הסדרה.

כדי לדייק עם האינדקסים כדאי לרשום את הסדרה עם סימון של הסדרות החלקיות:

$$\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{S_1}, \overbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}}^{S_2}, \overbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{3n}}^{S_3}}_{S_{3n}}\,.$$

סעיף א. נסכם כל תת־סדרה בנפרד כאשר ההפרשים שווים אבל האיברים הראשונים שונים:

$$a_1, \qquad a_{n+1} = a_1 + nd, \qquad a_{2n+1} = a_1 + 2nd\,.$$

לפי היחס הנתון בין הסכומים:

$$\begin{aligned}
S_3 &= 2S_2\\
\tfrac{n}{2}(2(a_1+2nd)+(n-1)d) &= 2\cdot\tfrac{n}{2}(2(a_1+nd)+(n-1)d)\\
2a_1+(5n-1)d &= 4a_1+(6n-2)d\\
2a_1+(6n-5n-2+1)d &= 0\\
2a_1+(n-1)d &= 0\,.
\end{aligned}$$

הביטוי בצד השמאלי של המשוואה האחרונה הוא הסכום S_1.

אפשר לפתור את הבעיה אם נחסיר את הסכום של תת־הסדרות מהסכום של הסדרה כולה:

$$S_1 = S_{3n} - (S_2+S_3) = S_{3n} - (S_2+2S_2) = S_{3n} - 3S_2\,.$$

במאמר מוסגר, בבחינה של **חורף תשע"ב** אורך הסדרה הוא $2n-1$, ונתונים הסכומים של n האיברים הראשונים ו־n האיברים האחרונים. רק רישום זהיר של הסדרה יבהיר שיש חפיפה בין שתי תת־הסדרות:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}\,,\qquad \underbrace{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}$$

בדוגמה, קל יותר לשים לב לחפיפה. עם $n=4$:

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, a_4}^{4}, a_5, a_6, a_7\,,\qquad \underbrace{a_4, a_5, a_6, a_7}_{4}$$

סעיף ב. נתון סכום הסדרה ועלינו למצוא d למרות שאין לנו a_1. אבל נתון $a_5+a_7=0$:

$$a_1+4d+a_1+6d=0\,,$$

ונקבל $2a_1=-10d$. בסעיף א חישבנו ש־$S_1=0$ ונציב עבור a_1:

$$\frac{n}{2}(-10d+(n-1)d)=0\,.$$

אפשר לחלק את שני צדי המשוואה ב־$\frac{n}{2}, d$ ונקבל $n=11$.

נציב עבור $2a_1, n$ בנוסחה ל-S_{3n}:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d) \\ &= \frac{33}{2}(-10d + (33-1)d) \\ &= \frac{33}{2} \cdot 22d = 363d = 726\,, \end{aligned}$$

ונקבל $d = 2$.

קיץ תשע"ד, מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ , \dots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, $a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2}$, מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5\ ,\ a_9\ ,\ a_{13}\ ,\ \dots\ ,\ a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה ה<u>נתונה בפתיח</u> הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

סעיף א. הסדרה חשבונית ולכן ניתן להשתמש בהצבות:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_{n+2} = a_n + 2d\,,$$

כדי לקבל שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned} 4a_n d + 4d^2 &= 216 \\ 3a_n + 3d &= 54\,. \end{aligned}$$

ערכי הנעלמים הם $d = 3, a_n = 15$.

סעיף ב. הסדרה החדשה חשבונית שאיבריה $a'_1, a'_2, \dots$ הן:

$$\overbrace{a_5 = a_1 + 4d}^{a'_1}, \quad a_6 = a_5 + 5d, \quad a_7 = a_5 + 6d, \quad a_8 = a_5 + 7d, \quad \overbrace{a_9 = a_5 + 8d}^{a'_2}\,.$$

בסדרה החדשה:

$$d' = 8d - 4d = 4d = 12\,, \qquad a'_1 = -21 + 4d = -21 + 12 = -9.$$

מסכום הסדרה החדשה:

$$\frac{k}{2}(2a_1' + (k-1)d') = \frac{k}{2}(-18 + (k-1)\cdot 12) = 450$$

נקבלת משוואה ריבועית שהשורש החיובי שלה הוא $k = 10$.

חורף תשע"ה

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

סעיף א. כדאי לרשום את הסדרה כדי לוודא מהם האיברים האמצעיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50}\,.$$

ניתן לחשב את הסכום מהגדרת הסדרה:

$$a_{50} + a_{51} = 4\cdot 50 + 2 = 202\,.$$

סעיף ב. כדי לחשב את ההפרשים נשתמש ב־"טריק": נוסיף ונחסיר את אותו ערך למשוואה:

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_k &= a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k \\ &= (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) \\ &= (4(k+1)+2) - (4k+2) \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

ההפרש קבוע ולא תלוי בזוגיות, ולכן הזוגיים והאי־זוגיים מהווים סדרות חשבוניות.

סעיף ג. שוב כדאי לרשום את הסדרה:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}^{50}\,.$$

לא ידוע שהסדרה a_n חשבונית, אבל a_{51} הוא האיבר ה־25 בסדרת האי־זוגיים. $d' = 4$ חושב בסעיף ב, ולכן:

$$a_{51} = a_1 + 25d' = 4 + 25 \cdot 4 = 104\,.$$

סעיף ד. נחשב את סכום הסדרה כחיבור של סכום האי־זוגיים וסכום הזוגיים: $S = S_{odd} + S_{even}$. $a_1 = 4$ נתון, וניתן לחשב:

$$a_2 = a_{1+1} = 4 \cdot 1 + 2 - a_1 = 4 + 2 - 4 = 2\,.$$

כבר חישבנו שהפרשים של שתי תת־הסדרות הם 4. מספר האי־זוגיים הוא 51 ומספר הזוגיים הוא 50. הסכום הוא:

$$S = S_{odd} + S_{even} = \frac{51}{2}(2 \cdot 4 + 50 \cdot 4) + \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 4) = 5304 + 5000 = 10304\,.$$

קיץ תשע"ה, מועד א

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3, \dots, a_n, \dots$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .
מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

סעיף א. נתון:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + q a_n\right)\,.$$

a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית שפתורונותיה הן $q = \frac{1}{2}, 2$. נתון שהסדרה יורדת ולכן $q = \frac{1}{2}$.

סעיף ב (1). בחילוק של איברים בסמוכים נציב $a_{n+1} = a_n q,\ a_{n+2} = a_n q^2$ ונצמצם את a_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\dfrac{(a_n)^2}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}} = \frac{q^2}{(q)^2} \cdot \frac{(1)^2}{q} = \frac{1}{q} = 2\,.$$

סעיף ב (2). $b_1 = 20$ מתקבל מ:

$$\frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 20460\,.$$

השאלה מבקשת את סכום **הסדרה המקורית** a_n. כבר חישבנו את המנה וניתן לחשב את a_1 מהנוסחה עבור b_n. החישובים הם:

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{qa_1}{(a_1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1}\,, \qquad a_1 = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{40}\,, \qquad S_a = \frac{1}{40}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{20}\,.$$

קיץ תשע"ה, מועד ב

2. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,

וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל־ $3\frac{7}{16}$.

מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

סעיף א. החילוק של איברים במרחק שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n b_n}b_n} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב. נחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי־זוגיים:

$$\begin{aligned} S_{odd} &= b_1+b_3+b_5+b_7 = b_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_1 \\ S_{even} &= b_2+b_4+b_6+b_8 = b_2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_2 = \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2^1 b_1}\,. \end{aligned}$$

מ:

$$S_{odd}+S_{even} = \frac{15}{8}\left(b_1+\frac{1}{2b_1}\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16}\,.$$

נקבל משוואה ריבועית $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$ שיש לה שני פתרונות $b_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$.

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1 \ ,\ a_2 \ ,\ a_3 \ ,\ \ldots \ ,\ a_n \ ,\ \ldots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב־ 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו־ II:

$$\text{I.} \quad a_1 \cdot a_2 \ ,\ a_2 \cdot a_3 \ ,\ a_3 \cdot a_4 \ ,\ \ldots \ ,\ a_n \cdot a_{n+1} \ ,\ a_{n+1} \cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.} \quad \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} \ ,\ \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} \ ,\ \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4} \ ,\ \ldots ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730 .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I .

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II .

סעיף א. נתון:

$$(1)\, a_4 - a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad (2)\, a_6 - a_1 = 31\,.$$

נציב $a_n = a_1 q^{n-1}$ עבור a_2, a_3, a_4, ב־(1), ונקבל שלוש תשובות $q = 1, q = 2, q = -2$.
נתון שהסדרה **עולה** ולכן $q = 2$. נציב $a_1 q^5 = 32a_1$ עבור a_6 ב־(2), ונקבל $a_1 = 1$.

סעיף ב (1). עבור סדרה I:

$$q_I = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n\, q^2}{a_n} = q^2 = 4\,,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית עולה. עבור סדרה II:

$$q_{II} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) / \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{q+q}{q+q} = 1\,.$$

הסדרה הנדסית אבל **לא עולה**.

סעיף (2). מסכום הסדרה ניתן לחשב את מספר האיברים בסדרה:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 + \cdots + a_{n+1} \cdot a_{n+2} &= 2730 \\ (1 \cdot 2) \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} &= 2730 \\ 4^{n+1} &= 4096 \\ n &= 5\,. \end{aligned}$$

שימו לב! אמנם $n=5$ אבל מספר האיברים בסדרה I הוא $n+1=6$:

$$(1)\, a_1 \cdot a_2, \quad (2)\, a_2 \cdot a_3, \quad (3)\, a_3 \cdot a_4, \quad (4)\, a_4 \cdot a_5, \quad (5)\, a_5 \cdot a_6, \quad (6)\, a_6 \cdot a_7\; (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\,.$$

סעיף ב (2). חישבנו $q_{II}=1$. נחשב את a_1^{II}:

$$a_1^{II} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4\,.$$

שימו לב! מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

$$(1)\, \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \quad (2)\, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \quad (3)\, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \quad (4)\, \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5}, \quad (5)\, \frac{a_6}{a_5} + \frac{a_7}{a_6} \left(= \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right)\,.$$

ולכן סכום האיברים הוא:

$$a_1^{II} + a_1^{II} \cdot 1 + a_1^{II} \cdot 1^2 + \cdots + a_1^{II} \cdot 1^4 = 4 \cdot 5 = 20\,.$$

קיץ תשע"ו, מועד א

2. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : $S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3\ ,\ \dots$

נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.

ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום

$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$.

סעיף א. נציב $a_n = a_1 + (n-1)d$ עבור האיברים בסכום ונקבל משוואה אחת עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned}(a_1+3d)+(a_1+7d)+(a_1+11d)+(a_1+15d) &= 224\\ a_1+9d &= 56\,.\end{aligned}$$

לא נתייאש וננסה לחשב את הסכום S_{19}:

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1+18d) = 19(a_1+9d) = 19 \cdot 56 = 1064\,.$$

סעיף ב. נשווה את המשוואה הנתונה $S_n = n \cdot a_n$ לנוסחה עבור סכום של סדרה חשבונית תוך הצבת הנוסחה לאיבר a_n:

$$\begin{aligned} n \cdot a_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ n(a_1 + (n-1)d) &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \end{aligned}$$

נפשט את המשוואה ונקבל $d = d/2$ שהפתרון היחיד שלה הוא $d = 0$.

סעיף ג. נציב 0 עבור d: $a_1 + 9d = a_1 + 0 = 56$.

סעיף ד. במבט ראשון נראה שכדאי לצמצם את סכום הסדרה ל־$b_{20} - b_1$, אבל זה מבוי סתום כי אין לנו דרך לחשב את איברי הסדרה b_n. במקום זה נחשב את הביטויים $(b_{i+1} - b_i)$:

$$b_{i+1} - b_i = a_i + S_i = (a_1 + (i-1) \cdot 0) + \frac{i}{2}(2a_1 + (i-1) \cdot 0) = a_1(1+i)\,.$$

הסכום הוא:

$$a_1(2 + 3 + \cdots + 20) = 56 \cdot \frac{19}{2}(2 \cdot 2 + (19-1) \cdot 1) = 11704\,.$$

קיץ תשע"ו, מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3 ,

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.

(2) נתון כי היחס שמופיע בתת־סעיף (1) שווה ל־ 1.9 .

סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5 .

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של <u>הסדרה הנתונה</u>. הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

סעיף א (1). מספר האיברים החדשים הוא $n-1$, כפי שרואים אם רושמים את הסדרה:

$$a_1,\ a'_1,\ a_2,\ a'_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a'_{n-1},\ a_n\,.$$

נתון שהסדרה החדשה גם היא חשבונית. הפרש הסדרה אינו מספר שלם אלא 1.5! המנה של סכומי הסדרות היא:

$$\frac{S_{new}}{S_{old}} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 1.5(2n-1-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 3(n-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{2n-1}{n}\,.$$

סעיף א (2). מ־$\frac{2n-1}{n}=1.9$ נקבל $n=10$.

נתון שהסדרה החדשה חשבונית ולכן גם סדרת האיברים החדשים חשבונית:

$$a'_{i+1}-a'_i=a'_{i+1}-(a_{i+1}-a_{i+1})-a'_i=(a'_{i+1}-a_{i+1})+(a_{i+1}-a'_i)=\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=3\,.$$

ניתן לבטא את האיבר הראשון כ־$a'_1=a_1+1.5$, ולחשב את a_1 מהנוסחה לסכום הנתון:

$$\frac{10-1}{2}(2(a_1+1.5)+((10-1)-1)\cdot 3)=130.5\,,\qquad 9a_1=9\,,\qquad a_1=1\,.$$

סעיף ב. השאלה מכלילה את השאלה בסעיף א על ידי הכנסת k איברים חדשים בין כל שני איברים סמוכים של הסדרה המקורית. נתון גם שהסדרה החדשה **חשבונית**, ולכן ההפרשים בין האיברים החדשים חייבים להיות שווים וסכומם שווה להפרש של הסדרה הנתונה שהוא 3.

$$a_i,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k,\ a_{i+1}\,.$$

יש $k+1$ הפרשים שערכם $\frac{3}{k+1}$.

חורף תשע"ז

2. נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{a_n}{4\cdot a_n+3}$, $a_1=-1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n=\frac{1}{a_n}+2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}$.

סעיף א. נחשב את המנה על ידי הצבה עבור b_n לפי ההגדרה, ואחר כך הצבה עבור a_{n+1} לפי כלל הנסיגה. נקבל מנה קבועה ולכן הסדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+2}{\frac{1}{a_n}+2}=\frac{\frac{4a_n+3}{a_n}+2}{\frac{1}{a_n}+2}=\frac{3(2a_n+1)}{2a_n+1}=3\,.$$

סעיף ב. לא נתון שהסדרה a_n הנדסית, אבל בסעיף א הוכחנו שהסדרה b_n הנדסית, ולכן ניתן לבטא את סכום הסדרה $\frac{1}{a_n}$ כסכום של הסדרה b_n על ידי ההצבה $\frac{1}{a_i}=b_i-2$:

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}=(b_1-2)+\cdots+(b_n-2)=b_1+\cdots+b_n-2n\,.$$

בסעיף א חישבנו $q_b = 3$ ו־$b_1 = \dfrac{1}{a_1} + 2 = \dfrac{1}{-1} + 2 = 1$. סכום הסדרה של ההפוכים של a_n הוא:

$$b_1 + \cdots + b_n - 2n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} - 2n = \frac{3^n - 4n - 1}{2}\,.$$

סעיף ג. לפי ההגדרה של b_n נוכל לבטא את הסכום כך:

$$(b_1 - 2) - (b_2 - 2) + \cdots + (b_{n-1} - 2) + (b_n - 2)\,.$$

נתון שמספר האיברים זוגי ולכן סכום הקבועים מתאפס. הסכום של איברי b_i הוא:

$$b_1 - b_2 + \cdots + b_{n-1} - b_n = \frac{1((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = \frac{3^n - 1}{-4}\,.$$

נתון שמספר האיברים זוגי ולכן סימני השלילה ב־$(-3)^n$ מצטמצמים.

קיץ תשע"ז, מועד א

2. נתונה הסדרה $a_n = \dfrac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$.

b_n ו־ c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \dfrac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n.

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n.

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב־ A_n,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב־ B_n,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב־ C_n.

ב. הראה ש־ $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי־שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

הנוסחה ל־a_n אינה כלל נסיגה כי איברים של הסדרה לא מופיעים בצד הימני של המשוואה. המשוואה מגדריה את a_n כפונקציה של n. נתון שהסדרות b_n, c_n הנדסיות או לא נתון שום אפיון של הסדרה המקורית a_n. נחשב ערכים של הסדרה המקורית לפי הפונקציה:

$$a_3 = \frac{(2^3 + 1)(2^3 - 1)}{2^3} = \frac{63}{8}\,, \qquad a_6 = \frac{(2^6 + 1)(2^6 - 1)}{2^6} = \frac{65 \cdot 63}{64}\,.$$

סעיף א $(1, 2)$. ההגדרה $a_n = b_n - c_n$ מאפשרת לחשב את הערכים:

$$b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8\,, \qquad c_6 = b_6 - a_6 = 64 - \frac{65 \cdot 63}{64} = \frac{1}{64}\,.$$

אי אפשר לחשב את מנות של b_n, c_n, על ידי חילוק של איברים סמוכים כי אין לנו אותם. במקום זה, ננצל את העבודה שנתון שהסדרות הנדסיות כדי לחשב את המנות והאיברים הראשוניים:

b_6	q_b	b_3	b_1
$b_3 q_b^3$	$\sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = \sqrt[3]{8} = 2$	$b_1 q_b^2$	$\frac{b_3}{q_b^2} = \frac{8}{4} = 2$
c_6	q_c	c_3	c_1
$c_3 q_c^3$	$\sqrt[3]{\frac{c_6}{c_3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$	$c_1 q_c^2$	$\frac{c_3}{q_c^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$

סעיף ב. נוכיח תוך שימוש בחוקים של חיבור של מספרים שלמים:

$$\begin{aligned} C_n &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= B_n - A_n\,. \end{aligned}$$

סעיף ג. הוכחנו ש־$C_n = B_n - A_n$, ונתונה שהסדרה c_n הנדסית. חישבנו $c_1 = \frac{1}{2}$, $q_c = \frac{1}{2}$, ולכן:

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}^n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 1 - 2^{-n}\,.$$

בדיקה מראה ש־$0.9 \not< 1 - 2^{-3} = 0.875$, אבל $0.9 < 1 - 2^{-4} = 0.9375 < 1$.

השאלה מבקשת את **כל הערכים** של n המקיימים את האי־שוויון, ולכן התשובה המליאה היא **כל מספר גדול או שווה ל־**4, כי גם עבור מספרים גדולים מ־4 הביטוי $1 - 2^{-n}$ מקיים את האי־שוויון.

קיץ תשע"ז, מועד ב

2. נתונה סדרה כללית a_n.

נסמן ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו־ k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \ldots$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב־ a_2).

ג. חשב את T.

שאלה זו שונה משאלות אחרות כי נתון ביטוי עבור **הסכומים** ולא עבור האיברים בסדרה.

סעיף א. ניתן לחשב:

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{9}\,, \qquad a_n = S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{2}{3^{n+1}}\,.$$

סעיף ב. המנה $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ לא תלויה ב־k. במבט ראשון נראה שהתשובה היא שהסדרה היא הנדסית עבור כל ערך של k, אולם זו **טעות**. המנה המתקבלת מ־$\frac{a_2}{a_1}$ חייבת להיות **שווה** למנה המתקבלת במקרה הכללי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. נחשב:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}\,.$$

הפתרון היחיד הוא $k = \frac{1}{3}$ ואז האיבר הראשון הוא $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

סעיף ג. הסדרה החדשה הנדסית כי הסדרה המקורית הנדסית, והמנה של הסדרה החדשה היא המנה המקורית לחזקת $3 \cdot 2 = 6$: נבחרו כל איבר שלישי מהסדרה המקורית וכל איבר הוא הריבוע של האיבר המקורי. האיבר הראשון של הסדרה החדשה היא האיבר השני של הסדרה המקורית לחזקת שניים. פתרון אחר הוא לחשב את המנה לפי הנוסחה:

$$q' = \frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2}{3^{n+4}}\right)^2}{\left(\frac{2}{3^{n+1}}\right)^2} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = \frac{1}{729}\,.$$

האיבר הראשון הוא

$$a'_1 = a_2^2 = (a_1 q)^2 = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{729}\,,$$

והסכום הוא:

$$S' = \frac{a'_1}{1 - q'} = \frac{\frac{4}{729}}{1 - \frac{1}{729}} = \frac{1}{182}\,.$$

חורף תשע"ח

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ־ 0.

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. **(1)** האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

סעיף א. נציב $a_1+(n-1)d$ עבור a_7, a_{17} ונשתמש במשוואה הנתונה $a_7=-a_{17}$.

$$\begin{aligned} a_1+6d &= -(a_1+16d) \\ a_1+11d &= 0 \\ a_{12} &= a_1+11d=0 \end{aligned}$$

סעיף ב (1). נשווה את $-a_1$ לנוסחה לאיבר כללי:

$$-a_1=a_n=a_1+(n-1)d\,.$$

נציב $a_1=-11d$:

$$-(-11d)=-11d+(n-1)d\,.$$

d מצטמצם ונקבל $n=23$.

סעיף ב (2). נציב $a_1=-11d$ בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\cdot -11d+(n-1)d)=\frac{dn}{2}(n-23)=0\,.$$

נתון שההפרש d שונה מאפס וש־n מספר טבעי ולכן חיובי, כך שהביטוי מתאפס רק עבור $n=23$.

סעיף ג. אם איבר חיובי וההפרש חיובי, המכפלה של שני איברים עוקבים היא חיובית, וכך גם אם שניהם שליליים. האפשרות היחידה לקבל מכפלה שלילית היא איבר חיובי והפרש שלילי או להיפך:

$$\begin{aligned} &a_k<0,\ a_{k+1}>0 \\ &a_k>0,\ a_{k+1}<0\,. \end{aligned}$$

אבל ידוע שאחד האיברים בסדרה (a_{12}) הוא אפס:

$$\begin{aligned} &a_k<0,\ a_{k+1}=0,\ a_{k+2}>0 \\ &a_k>0,\ a_{k+1}=0,\ a_{k+2}<0\,, \end{aligned}$$

ולכן המכפלה של זוג איברים עוקבים חייבת להיות חיובית או אפס.

סעיף ד. נרשום את הסדרה:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{11},\ 0,\ -a_{11},\ \ldots,\ -a_2,\ -a_1,\ \ldots\,.$$

או ש־11 האיברים הראשונים שליליים אם ההפרש חיובי, או כל האיברים לאחר האיבר $a_{12}=0$ שליליים אם ההפרש שלילי.

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו־ q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (I-IV) . רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I) $q < 0$

II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$

III) $a_1 < 0$

IV) $a_1 > 0$ או $q < 0$

נסמן ב־ T את סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הבע את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

השאלה בסעיף א יפה כי היא דורשת חשיבה, לא חישובים! נבדוק את הטענות על סדרה מוכרת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2\,.$$

אם נהפוך את כל הסימנים למינוס, נקבל סדרה שסכומה שלילי:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = -2\,.$$

ברור שהמנה עדיין חיובית $\frac{1}{2}$. לכן אפשר לפסול מייד תשובות I, II, IV ונשאר רק תשובה III.
סדרה הנדסית מתכנסת רק אם $|q| < 1$. נבדוק: מהנוסחה עבור הסכום:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

ניתן לראות שהסכום שלילי רק אם a_1 שלילי כי המכנה חיובי $0 < 1 - q < 2$.

סעיף ב. המנה של כל אחת מהסדרות היא q^2 ולכן הסכומים הם:

$$T = \frac{a_1}{1-q^2}, \qquad R = \frac{a_1 q}{1-q^2}.$$

מהמשוואה הנתונה $T + pR = 0$, נקבל $1 + pq = 0$ ו־ $p = -\dfrac{1}{q}$.

סעיף ג. הסדרה לא מתכנסת כי $|q| < 1$ גורר $|p| > 1$.

סעיף ד. השאלה שואלת על **הסדרה המקורית** a_n ולא על b_n. נתון ש־p שלילי ולכן $q = -\dfrac{1}{p}$ חיובי. נתון שהסדרה מתכנסת ולכן $0 < q < 1$. מצאנו בסעיף א ש־a_1 שלילי ולכן $a_{n+1} > a_n$. נבדוק בדוגמה: אם $a_n = -6, q = \frac{1}{2}$, אז:

$$a_{n+1} = a_n q = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \;>\; -6 = a_n\,.$$

קיץ תשע"ח, מועד ב

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\dfrac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\dfrac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. **(1)** רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב־ n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\dfrac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האין־סופית b_n היא סדרה יורדת. הבע באמצעות c את סכומה.

סעיף א. נציב את כלל הנסיגה בתוך עצמו:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n} = -\frac{c^{n-2}}{-\dfrac{c^{n-3}}{a_{n-1}}} = c a_{n-1}\,.$$

המנה $a_{n+1}/a_{n-1} = c$ קבועה לא תלוי בזוגיות של האיברים.

סעיף ב (1). הסדרות של הזוגיים והאי־זוגיים הן סדרות הנדסיות **נפרדות**, ולכן יש לחשב את האיברים $(a_1, a_3, a_5, a_7), (a_2, a_4, a_6)$ בנפרד:

$$a_1 = -\frac{1}{c}, \quad a_3 = ca_1 = -1, \quad a_5 = ca_3 = -c, \quad a_7 = ca_5 = -c^2$$

$$a_2 = -\frac{c^{1-2}}{a_1} = -\frac{c^{-1}}{-\frac{1}{c}} = 1, \quad a_4 = ca_2 = c, \quad a_6 = ca_4 = c^2\,.$$

סעיף ב (2). כאשר מסכמים את האיברים הם מצטמצמים פרט לאיבר הראשון, ולכן $S_7 = -\frac{1}{c}$.

סעיף ב (3). יש n אי־זוגיים ו־$n-1$ זוגיים, ראו את הפתרון לבחינה של **קיץ תשע"ו ב**:

$$S_{odd} + S_{even} = -\frac{1}{c}\frac{c^n - 1}{c-1} + 1 \cdot \frac{c^{n-1}-1}{c-1} = \frac{-c^{n-1} + c^{-1} + c^{n-1} - 1}{c-1} = -\frac{1}{c}\,.$$

סעיף ג (1).

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{2}{a_{n+1}a_{n+2}}}{\dfrac{2}{a_n a_{n+1}}} = \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{\dfrac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{c}\,.$$

סעיף ג (2). סדרה יורדת אם $0 < q = \dfrac{1}{c} < 1$. נתון $c > 0$, ולכן הסדרה יורדת אם $c > 1$.

סעיף ג (3). נתון שהסדרה היא הנדסית אינסופית יורדת. ניתן להשתמש בנוסחה $S = \dfrac{a_1 q}{1-q}$:

$$b_1 = \frac{-2}{a_1 a_2} = \frac{-2}{-\dfrac{1}{c}\cdot 1} = 2c\,, \qquad S_b = 2c \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{c}} = \frac{2c^2}{c-1}\,.$$

המלצות

- **חובה לקרוא את השאלות בזהירות רבה.** בבחינה של **קיץ תשע"ה א**, סעיף ב שואלת על סדרה חדשה b_n אבל בסוף חוזרת ומבקשת למצוא את הסכום של הסדרה הנתונה a_n.

- שימו לב אם סדרה היא חשבונית, הנדסית או לא זו ולא זו. אני מציע להדגיש את המילים "חשבונית" ו־"הנדסית" בשאלה.

- ברוב השאלות נתונה סדרה ומוגדרת סדרה חדשה המובססת על הסדרה הנתונה. **אין בהכרח קשר** בין תכונה של הסדרה המקורית והסדרה החדשה. להלן שתי סדרות חשבוניות, אבל כאשר משלבים את שתיהן, מתקבלת סדרה שאיננה חשבונית:

$$\begin{array}{l}
1,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 10,\ \ 13,\ \ \ldots\\
2,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 11,\ \ 14,\ \ \ldots\\
1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 10,\ \ 11,\ \ 13,\ \ 14,\ \ \ldots
\end{array}$$

בבחינה של **חורף תשע"ד** נתונה סדרה הנדסית אבל השאלה מבקשת להוכיח שסדרת ההפוכים של האיברים הגם היא הנדסית.

- כאשר מבקשים להוכיח שתת־סדרת הזוגיים חשבונית או הנדסית וגם תת־סדרת האי־זוגיים (בחינה של **קיץ תשע"ה ב**), הוכחה אחת תספיק כי אם $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ קבועה, לא משנה אם n זוגי או אי־זוגי.

- כדאי לרשום את איברי הסדרה במיוחד כאשר שואלים על איברים זוגיים ואי־זוגיים (בחינה של **חורף תשע"ה**):

$$\begin{array}{l}
\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50}\\
\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}_{50}, a_{51}, \underbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}_{50}\ .
\end{array}$$

- מקרה מעניין הוא תת־סדרות חופפות (בחינה של **חורף תשע"ב** שלא נמצאת במסמך זה):

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}\!\!\!\!\underbrace{, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}$$

- קיימות שתי דרכים לסכם מספר תת־סדרות (בחינה של **קיץ תשע"ד א**). דרך אחת היא לסכם כל תת־סדרות בנפרד עם ערכי ה־d, a_1 או n, q שלהן. זה קורה לעתים קרובות כאשר השאלה מבקשת לחשב סכום של סדרה, אבל ידוע רק שתת־סדרות חשבוניות או הנדסיות, למשל, זוגיים ואי־זוגיים (בחינה של **קיץ תשע"ח ב**).

- דרך אחרת היא לחבר הסכומים של תת־סדרות ולהחסיר את התוצאה מסכום הסדרה כולה:

$$S_1 = S_n - (S_2 + S_3)\ .$$

- בסדרה קיימים ארבעה נעלמים d, a_1 או S, n, q. כדי למצוא את ערכו של נעלם אחד, צריך לדעת את ערכי שלושת הנעלמים האחרים (או שניים אם לא מדובר בסכום). אם מבקשים לבטא נעלם אחד באמצעות בנעלם אחר, אפשר להסתדר עם פחות ערכים. לפעמים, מספיק לדעת את הקשר בין שני נעלמים כדי לפתור בעיה, כגון $a_1 + 11d = 0$ בבחינה של **הורף תשע"ח**.

- הבחינה של **חורף תשע"ו** מעניינת כי מספר האיברים הוא לא הערך של מספר n המופיע בשאלה. חשוב לרשום דוגמה מספרית כדי לוודא מהו מספר האיברים:

$$(1)\, a_1 \cdot a_2, \quad (2)\, a_2 \cdot a_3, \quad \cdots \quad (5)\, a_5 \cdot a_6 = (a_n \cdot a_{n+1}), \quad (6)\, a_6 \cdot a_7\, (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\,.$$

- טריק שימושי הוא לחבר ולהחסיר את אותו ערך בביוטי (בחינה **חורף תשע"ה**):

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k = (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k)\,.$$

- הכנסת איברים חדשים בתוך סדרה לא בהכרח שומרת על הסדרה כחשבונית או הנדסית. השורה הראשונה להלן היא סדרה חשבונית. בשורה השנייה הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה היא חשבונית. בשורה השלישית הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה איננה חשבונית.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 5, & 9, & 13, & 17 & & & & \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & 17 \\ 1, & 2, & 5, & 6, & 9, & 10, & 13, & 14, & 17 \end{array}$$

  בבחינה של **קיץ תשע"ו ב** כתוב במפורש שהסדרה חדשה חשבונית.

- בישוב הפרש או מנה, כדאי להציב ב־$a + n + 1$ ביוטי שיש בו a_n. הנה דוגמה מהבחינה של **קיץ תשע"ה א**:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + q a_n\right)\,.$$

  a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית ב־q.