אני מסתפק בסרגל (ועוד משהו)

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

`http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/`

1 מבוא

כל בנייה בסרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם מחוגה בלבד. משפט זה הוכח בשנת 1672 על ידי Georg Mohr וב־ 1797 על ידי Lorenzo Mascheroni. נשאלת השאלה: האם כל בנייה בסגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם סרגל בלבד? התשובה היא שלילית. ב־ 1822 המתיטיקאי הצרפתי Jean-Victor Poncelet שיער שכן ניתן להסתפק בסרגל בלבד, בתנאי שקיים במישור מעגל **אחד**. המשפט הוכח ב־ 1833 על ידי המתימטיקאי השוויצרי Jakob Steiner.

במסמך זה אביא את הוכחת המשפט המבוססת על ההוכחה שמופיעה כבעייה 34 בספר:

Heinrich Dörrie: *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution* (Dover, 1965),

ועובדה על ידי Michael Woltermann.[1]

במאה ה־ 19 הוכח שאם נתחיל עם קטע קו שאורכו 1 (המידות לא משנות, פשוט קובעים שאורך הקטע הוא אחד), ניתן לבנות קטעי קו באורכים המתקבלים מהמספרים הרציונליים על ידי פעולות החשבון $+, -, \times, \div$ ועוד פעולת שורש ריבועי $\sqrt{}$, **ורק** מספרים אלה.

משפט זה מסביר למה לא ניתן לפתור את הבעיות המפורסמות שהציגו היוונים: חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים, בניית קוביה שנפחו פי שניים מהנפח של קוביה נתונה, ובניית ריבוע ששטחו שווה לשטח של מעגל נתון. שתי הבניות הראשונות מחייבות בניית קטע קו שאורכו שורש שלישי של קו אחר, וריבוע המעגל מחייב בניית קטע באורך π שהוא מספר "טרנסנדנטלי", כלומר, אי אפשר לחשב אותו מהמספרים הרציונליים ועוד פעולה שורש מחזקה כלשהי.

עם סרגל בלבד ניתן למצוא את נקודת החיתוך של שני קווים, פעולה לשמעשה פותרת משוואה מסדר ראשון, כלומר, אי אפשר לחשב שורש ריבועי. הבנייה של Poncelet-Steiner מראה שאם קיים מעגל אחד, ניתן להשתמש בו כדי לחשב שורש ריבועי וכך לבניות כל בנייה עםf סרגל ומחוגה.

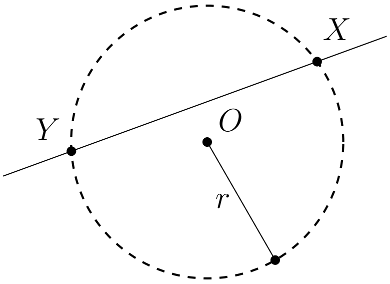
עיון בבנייה גיאומטרית יגלה שכל צעד הוא אחת משלוש פעולות:

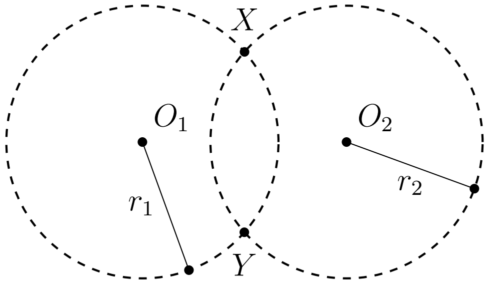
- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים ישרים.
- מציאת נקודות החיתוך של קו ישר עם מעגל.
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

ברור שניתן לבצע את הפעולה הראשונה עם סרגל בלבד. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למוצא בנייה שקולה המשתמשת רק בסרגל עם מעגל אחד.

מה המשמעות של בנייה עם סרגל בלבד? מעגל מוגדר על ידי נקודה O שהיא מרכז המעגל, וקטע קו באורך r שאחת מהנקודות הקצה שלה היא O, קטע המגדיר את הרדיוס. אם נצליח לבנות את הנקודות X, Y המסומנות בהתרשים שלהלן, נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון עם קו נתון ושל שני מעגלים. המעגלים מצויירים בקו מקווקוו כי הם לא ממש מפיעים בבנייה. נמשיך להשתמש בסימון זה: המעגל היחיד הנתון יצוייר בקו רגיל, ומעגלים המשמשים רק להדגמת הבנייה והוכחתה יהיו מקווקווים.

[1] http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm.
ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו.





תחילה נביא חמש בניות עזר נחוצות (סעיפים 2–6), ואחר כך נראה איך למצוא נקודות חיתוך של קו עם מעגל (סעיף 7) ושל שני מעלגים (סעיף 8).

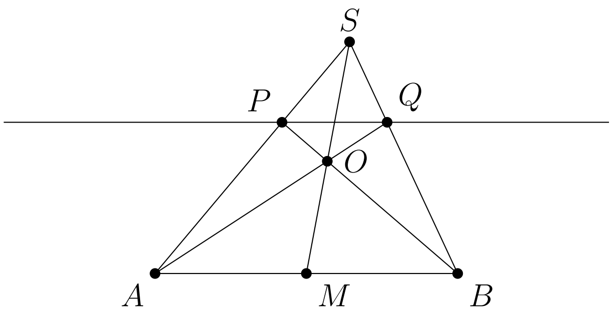
2 בניית קו המקביל לקו נתון

נתון קו l המוגדר על ידי שתי נקודות A, B, ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות קו דרך P המקביל ל־ AB.

נפריד את הבנייה לשני מקרים:

- "קו מכוון": נתון שתי נקודות A, B על הקו והנקודה M **החוצה** את AB.
- כל קו אחר.

קו מכוון: נבנה קרן הממשיכה את AP, ונבחר S, נקודה כלשהי על הקרן מעבר ל־AP. נבנה את הקווים SB, SM, BP. נסמן ב־O את נקודת החיתוך של BP עם SM. נבנה קרן הממשיכה את AO ונסמן ב־Q את החיתוך של הקרן AO עם SB.



מהתרשים נראה ש־PQ מקביל ל־AB, אבל זה בדיוק מה שעלינו להוכיח.

ההוכחה תשתמש במשפט של Ceva שנוכיח בהמשך. לפי המשפט, קיים קשר בין האורכים של קטעים המרכיבים את היקף המשולש:

$$\frac{AM}{MB}\frac{BQ}{QS}\frac{SP}{PA} = 1$$

M חוצה את AB ולכן $\frac{AM}{MB} = 1$. הגורם הראשון של המכלפה מצטמצם ונקבל את המשוואה:

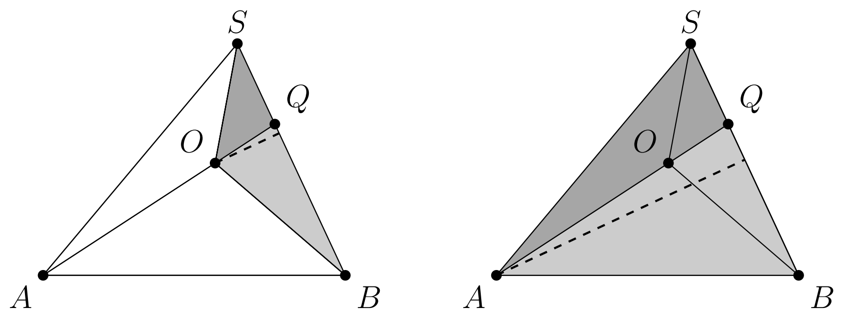
$$\frac{BQ}{QS} = \frac{PA}{SP} = \frac{AP}{PS}\,. \tag{1}$$

נוכיח שהמשולש $\triangle ABS$ דומה ל־$\triangle PQS$, ולכן הקו PQ מקביל לקו AB כי $\angle ABS = \angle PQS$.
ההוכחה שהמשולשים דומים היא:

$$\begin{aligned}
BS &= BQ + QS \\
\frac{BS}{QS} &= \frac{BQ}{QS} + \frac{QS}{QS} = \frac{BQ}{QS} + 1 \\
AS &= AP + PS \\
\frac{AS}{PS} &= \frac{AP}{PS} + \frac{PS}{PS} = \frac{AP}{PS} + 1 \\
\frac{BS}{QS} &= \frac{AS}{PS} \,,
\end{aligned}$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקבלת ממשוואה־(1).

כדי להוכיח את המשפט של Ceva, נתבונן בתרשימים שלהן:



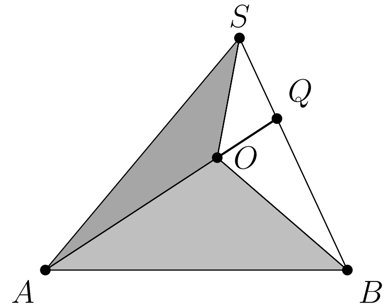
אם הגבהים של שני משולשים שוואים, יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$A_1 = \frac{1}{2} h b_1, \quad A_2 = \frac{1}{2} h b_2, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2}\,.$$

בכל אחד מהתרשימים, הגבהים של זוג המשולשים המסומנים באפור שווים. לכן:[2]

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{BQ}{QS}\,, \qquad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{BQ}{QS}\,.$$

על ידי חיסור של המשולשים המסומנים, נקבל יחס בין המשולשים המסומנים באפור:



[2] נשתמש בשם המשולש כקיצור לשטחו.

$$\frac{BQ}{QS} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\,.$$

החישוב עלול להיראות חשוד. נסביר אותו תוך שימוש בסימונים פשוטים יותר:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\\
\frac{e}{f} &= \frac{a}{b}\\
c-e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b}\\
c-e &= \frac{a}{b}(d-f)\\
\frac{c-e}{d-f} &= \frac{a}{b}\,.
\end{aligned}$$

באופן דומה ניתן להוכיח:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\,, \qquad \frac{SP}{PA} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

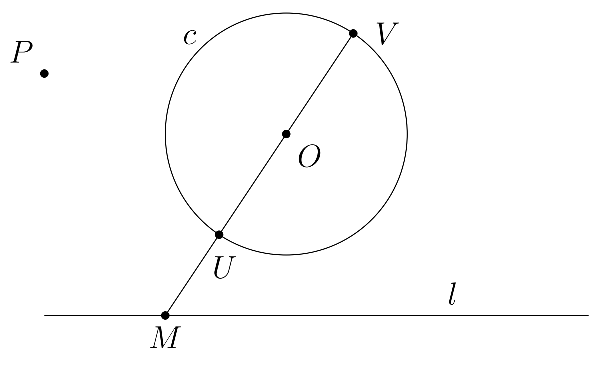
ומכאן

$$\frac{AM}{MB}\frac{BQ}{QS}\frac{SP}{PA} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1\,,$$

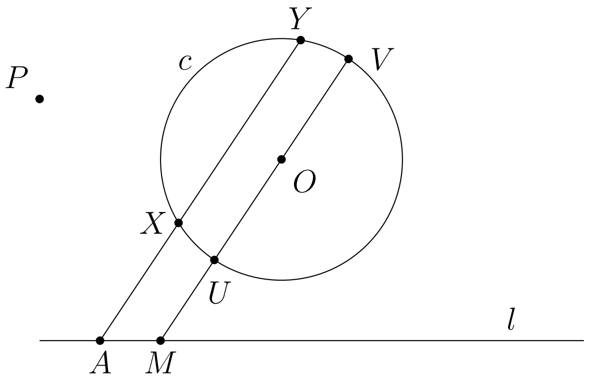
כי השטחים במונה ובמכנה מצטצמים (זכרו שסדר הקודקים במשלוש לא חשוב).

כל קו אחר: נסמן את הקו ב־l, נסמן ב־c את **המעגל הקבוע** שמרכזו בנקודה O והרדיוס שלו הוא קטע קו באורך r, ונסמן ב־P את הנקודה שלא נמצאת על הקו. עליך להשתכנע שהבנייה, כאן ובהמשך, לא תלוייה במיקום המעגל במישור או ברדיוס שלו.

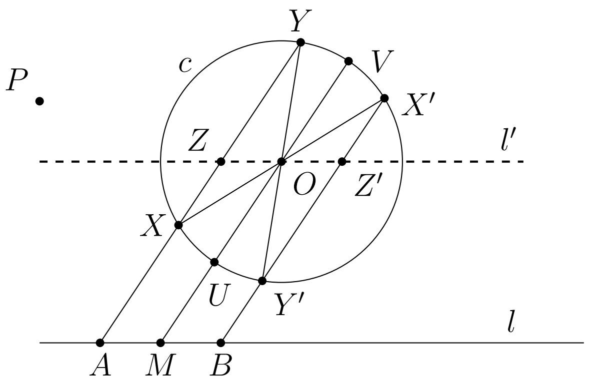
נבחר M, נקודה כלשהי על הקו l, ונבנה קרן הממשיכה את MO והחותך את המעגל ב־X, Y.



קו זה הוא **קו מכוון** כי O, מרכז המעגל, חוצה את הקוטר UV. נבחר נקודה שנייה A על l ונשתמש בבנייה עבור קו מכוון כדי לבנות קו המקביל ל־UV. הקו חותך את המעגל X, Y.



נבנה קוטר XX' וקוטר YY'. נבנה קרן מ־$X'Y'$ ונסמן ב־B, את נקודת החיתוך עם l.



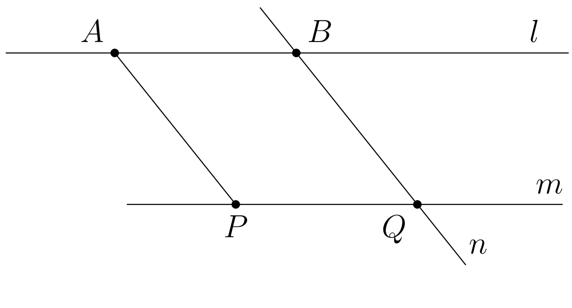
טענה: l הוא **קו מכוון** כי M חוצה את AB.

מהטענה אפשר לבנות קו דרך P מקביל ל־AB לפי הבנייה עבור קו מכוון.

הוכחה: OX, OX', OY, OY' הם כולם רדיוסים של המעגל, ו־$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות נגדיות. לכן, $\triangle XOY$ חופף ל־$\triangle X'OY'$ לפי צלע־זווית־צלע. נגדיר l', קו מקביל ל־l, החותך את XY ב־Z והחותך את X', Y' ב־Z'. $\triangle XOZ$, $\triangle X'OZ'$ חופפים לפי זווית־צלע־זווית, ולכן $ZO = OZ'$. הוכחנו ש־$AMOZ$ ו־$BMOZ'$ מקביליות, ולכן $AM = ZO = OZ' = MB$.

מסקנה: נתון קטע קו AB ונקודה P שאיננה על הקו. ניתן לבנות קטע קו PQ המקביל ל־AB, שאורכו שווה לאורכו של AB. במילים אחרות: ניתן להעתיק את AB מקביל לעצמו כך שקצה אחד יהיה נקודה כלשהי P.

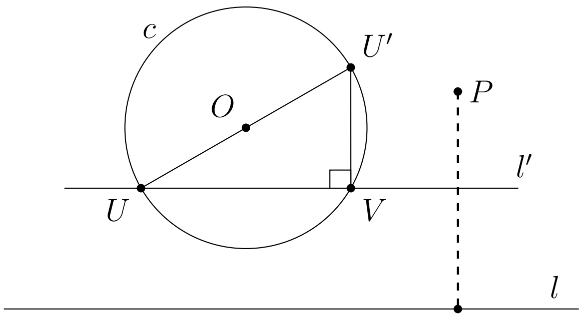
הוכחה: בסעיף זה הוכחנו שניתן לבנות קו m דרך P המקביל ל־AB, וקו n דרך B המקביל ל־AP. המרובע $ABQP$ הוא מקבילית, ולכן הצלעות הנגדיות שוות: $AB = PQ$.



3 בניית אנך לקו נתון

נתון קו l ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות אנך ל־l דרך P.

נבנה (לפי סעיף 2) קו l' מקביל ל־l החותך את **המעגל הקבוע** ב־U, V. נבנה את הקוטר UOU' והמיתר $U'V$.

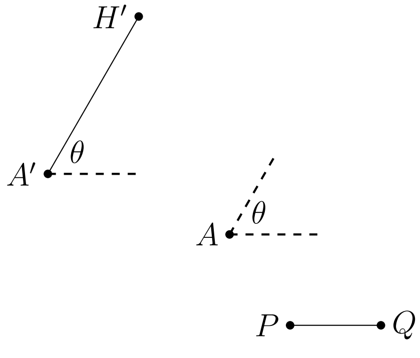


$\angle UVU'$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על מחצית המעגל. מכאן ש־$U'V$ הוא אנך ל־UV ו־l'.
נבנה קו מקביל ל־$U'V$ דרך P (לפי סעיף 2).

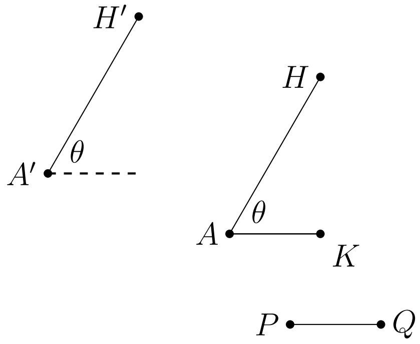
4 העתקת קטע קו נתון בכיוון נתון

נתון נקודה A, קטע קו PQ וכיוון, ניתן לבנות קטע קו AS כך ש־$AS = PQ$.

המסקנה בסוף סעיף 2 מראה שאפשר להעתיק קטע קו מקביל לעצמו. כאן נוכיח שניתן להנתיק קטע קו בכיוון של כל קו אחר. הכוונה של "כיוון" היא שקו המוגדר על ידי שתי נקודות A', H' מגדיר זווית θ יחסית לציר כלשהו. המשימה היא להעתיק את קטע הקו PQ ל־AS, כך ש־AS יהיה באותה זווית θ יחסית לאותו ציר. בתרשים הציר הוא הכיוון של PQ אבל אין לזה חשיבות.



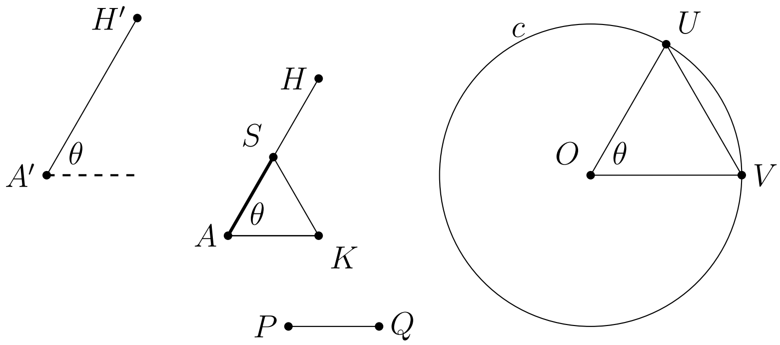
נתחיל את הבנייה על ידי העתקת קטע הקו $A'H'$ אל AH כך ש־AH יהיה מקביל ל־$A'H'$.
הבנייה אפשרית לפי המסקנה בסוף סעיף 2. באותו אופן נעתיק את PQ ל־AK כך ש־AK מקביל ל־PQ.



הזווית $\angle HAK$ שווה ל־θ, לכן כל מה שנשאר הוא למצוא נקודה S על AH כך ש־$AS = AK$.

במעגל הקבוע c נבנה שני רדיוסים OU ו־OV מקבילים ל־AH ו־AK, בהתאמה, ונבנה קרן דרך K המקבילה ל־UV. נסמן את נקודת החיתוך של הקו עם AH ב־S.

טענה: $AS = PQ$.

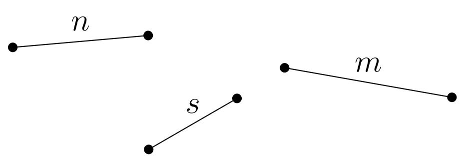


הוכחה: AH מקביל ל־OU ו־AK מקביל ל־OV, ולכן $\angle SAK = \angle HAK = \theta = \angle UOV$. SK מקביל ל־UV, והמשולש $\triangle SAK$ דומה למשולש $\triangle UOV$ לפי זווית־זווית־זווית. $\triangle UOV$ הוא משולש שווה שוקיים כי OU, OV הם רדיוסים של אותו מעגל. מכאן, $\triangle SAK$ הוא משולש שווה שוקיים ו־$AS = AK = PQ$.

5 בניית קטע קו שאורכו מוגדר יחסית לשלושה קטעי קו אחרים

נתון קטעי קו באורכים n, m, s**, ניתן לבנות קטע קו באורך** $x = \frac{n}{m}s$.

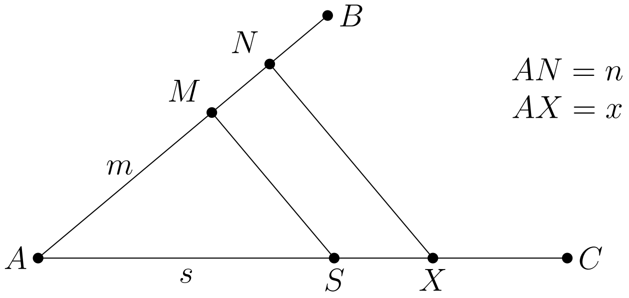
קטעי הקו הנתונים נמצאים במיקומים כלשהם במישור ובכיוונים כלשהם.



נבחר נקודה כלשהי A ונבנה שתי קרנות AB, AC. לפי סעיף 4 ניתן למצוא נקודות M, N, S כך ש־$AM = m$, $AN = n$ ו־$AS = s$. נבנה דרך N קו המקביל ל־MS החותך את AC ב־X,

ונסמן את אורכו ב־x. המשולש $\triangle MAS$ דומה למשולש $\triangle NAX$ לפי זווית־זווית־זווית, ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m} s\,.$$



6 בניית שורש ריבועי

נתון קטעי קו באורכים a, b, ניתן לבעות קטע קו שאורכו $\sqrt{ab}$.

אנו שואפים לבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \frac{n}{m}s$ כדי להשתמש בבנייה מסעיף 5.

- עבור n נשתמש ב־d, הקוטר של **המעגל הקבוע**.
- עבור m נשתמש ב־$t = a + b$ שניתן לבנות מהאורכים הנתונים a, b לפי סעיף 4.
- נגדיר $s = \sqrt{hk}$ כאשר h, k מוגדרים כביטויים מעל האורכים a, b, t, d, ונראה איך ניתן לבנות קטע קו באורך $s = \sqrt{hk}$.

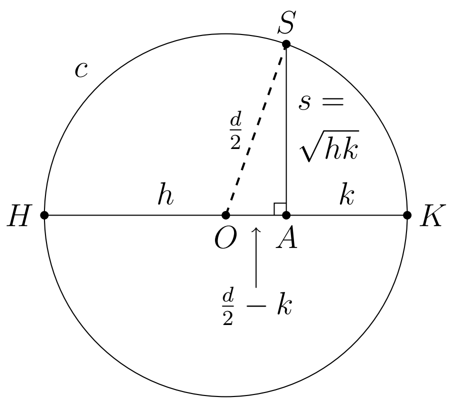
נגדיר $h = \dfrac{d}{t}a$, $k = \dfrac{d}{t}b$, ונחשב:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d}hk = \frac{t}{d}s\,.$$

נחשב גם:

$$h + k = \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d\,.$$

לפי סעיף 4 ניתן לבנות $HA = h$ על הקוטר HK של **המעגל הקבוע**. מ־$h + k = d$, $AK = k$.



לפי סעיף 3 ניתן לבנות דרך A אנך ל־HK, ונסמן ב־S את החיתוך של האנך עם **המעגל הקבוע**. $OS = OK = \frac{d}{2}$ כי הם רדיוסים של המעגל, ו־$OA = \frac{d}{2} - k$. לפי משפט פיתגורס:

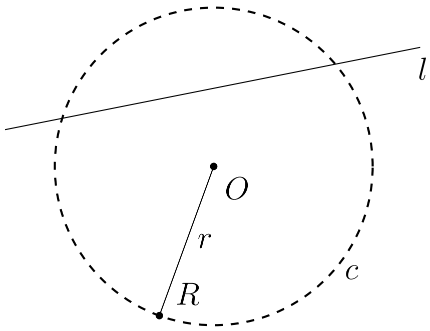
$$\begin{aligned}
SA^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - (\frac{d}{2} - k)^2 \\
&= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\
&= k(d-k) \\
&= kh, \qquad h + k = d \quad \text{כי} \\
s &= SA = \sqrt{hk}\,.
\end{aligned}$$

כעת ניתן לבנות $x = \dfrac{t}{d}s$ לפי סעיף 5.

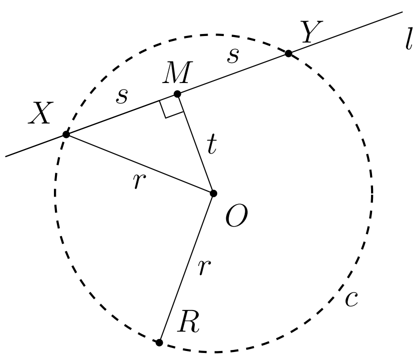
7 בניית נקודות חיתוך של קו עם מעגל

נתון קו l ומעגל c שמרכזו O והרדיוס שלו r. ניתן לבנות את נקודות החיתוך של הקו עם המעגל.

לא מדובר על המעגל הקבוע, אלא על מעגל המוגדר על ידי מרכזו וקטע קו שהוא הרדיוס.



לפי סעיף 3 ניתן לבנות אנך ממרכז המעגל O לקו l. נסמן ב־M את נקודת החיתוך של הקו עם האנך. M חוצה של המיתר XY, כאשר X, Y הן נקודות החיתוך של הקו עם המעגל. שימו לב שבתרשים X, Y, s הם רק סימונים. טרם בנינו את נקודות החיתוך.



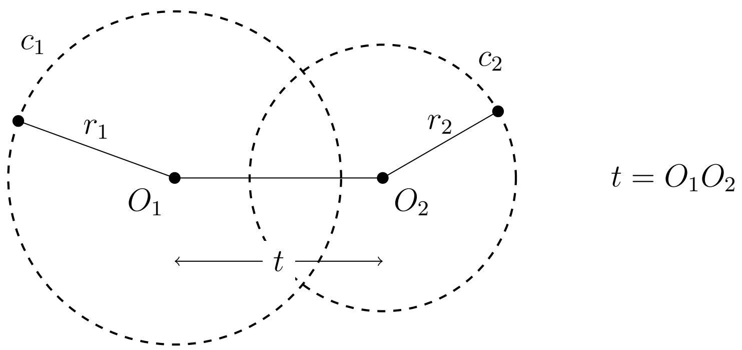
$\triangle OMX$ הוא מעגל ישר זווית, ולכן $s^2 = r^2 - t^2 = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. r נתון כרדיוס המעגל, ו־t הוגדר כאורך של OM, קטע קו שבנינו. לפי סעיף 4 ניתן לבנות קטעי קו באורך t מהנקודה O בשני הכיוונים RO ו־OR. כלומר, ניתן לבנות קטעים באורכים $r+t, r-t$. לפי סעיף 6 ניתן

לבנות קטע קו באורך $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. שוב לפי סעיף 4, ניתן לבנות קטעי קו באורך s על הקו הנתון l מהנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מקטעי הקו האלה הוא נקודת חיתוך של הקו עם המעגל.

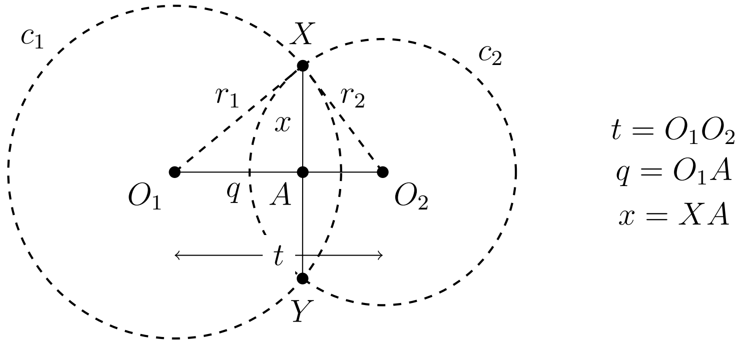
8 בניית נקודות חיתוך של שני מעגלים

נתון שני מעגלים עם מרכזים O_1, O_2 והדיוסים r_1, r_2. ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם X, Y

עם סרגל ניתן לבנות את קטע הקו O_1O_2 המחבר את שני המרכזים. נסמן את אורכו ב־t.



נסמן ב־A את נקודת החיתוך של O_1O_2 עם XY, ונסמן את האורכים $q = O_1A, x = XA$.



שימו לב שלא בנינו את הנקודה A, אבל אם נצליח לבנות את האורכים q, x, לפי סעיף 4 נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון O_1O_2. לפי סעיף 3 ניתן לבנות את האנח ל־O_1O_2 בנקודה A, ושוב לפי סעיף 4 ניתן לבנות קטעי קו באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנח. הקצה השני של כל קטע קו X, Y הוא נקודת חיתוך של שני המעגלים.

בניית האורך q**:** נסמן $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$. d הוא האורך של היתר של משולש ישר זווית, ולפי סעיפים 3,4 ניתן לבנות אותו מ־r, t, האורכים הידועים של שני הצלעות האחרות: על קו כלשהי נבנה קטע

קו RS באורך r, אחר כך אנח ל־RS דרך R, ולבסוף קטע קו RT באורך t מ־R על האנח. אורך היתר ST שווה ל־d. ניתן לבנות את המשולש בכל מקום במישור, לאו דווקא בקירבת המעגלים.

לפי חוק הקוסינוסים במשולש $\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 + t^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= r_1^2 + t^2 - 2t(r_1 \cos \angle XO_1O_2) \\ &= r_1^2 + t^2 - 2tq \\ 2tq &= (r_1^2 + t^2) - r_2^2 \\ q &= \frac{(d+r_2)(d-r_2)}{2t} \,. \end{aligned}$$

נסמן:

$$n = d + r_2, \qquad m = 2t, \qquad s = d - r_2 \,.$$

לפי סעיף 4 ניתן לבנות את כל האורכים האלה, ואז לפי סעיף 5 ניתן לבנות $q = \frac{n}{m}s$.

בניית האורך x: $\triangle AO_1X$ הוא משולש ישר זווית, ולכן $x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1+q)(r_1-q)}$. לפי סעיף 4 ניתן לבנות את $h = r_1 + q$ ו־$k = r_1 - q$, ולפי סעיף 6 ניתן לבנות את $x = \sqrt{hk}$.