המחלקה להוראת המדעים

עבודת גמר במסגרת תואר שני בהוראת המתמטיקה בתכנית
רוטשילד-ויצמן

חלוקת זווית לשלוש במערכות אקסיומות שונות

מגישה: אוריה בן לולו

מנחה: פרופסור מוטי בן-ארי

שבט תש״פ

פברואר 2020

תוכן עניינים

הקדמה

בעיית החלוקה של זווית לשלוש היא אחת הבעיות שנותרו פתוחות מתקופת יוון העתיקה. במשך 2000 שנה ניסו מתמטיקאים רבים לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה או לחילופין להוכיח כי לא ניתן לבצע חלוקה כזו.

במאה ה- 19 , כאשר פותחה תורת גלואה, הוכח כי לא ניתן לחלק זווית לשלוש בעזרת סרגל ומחוגה. עם זאת, ניתן לבצע חלוקה זו במערכות אקסיומות אחרות.

בעבודה זו אציג דוגמאות למשפטים ה"קרובים" לחלוקת זווית לשלוש אשר אותם ניתן לבנות עם סרגל ומחוגה:

1. חציית זווית כללית.
2. חלוקה של זווית בת 90^{o} לשלוש.

לאחר מכן, אוכיח שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש בעזרת סרגל מחוגה- הוכחה שמבוססת על תורת גלואה והרחבת שדות.

בנוסף, אציג שתי מערכות אקסיומות אחרות בהן ניתן לחלק זווית לשלוש:

1. ניאוסיס (neusis)- סרגל עם שני סימנים ומחוגה.
2. תורת האוריגמי (תורת קיפולי הנייר).

לבסוף, אציג פעילות שערכתי בכיתה בנושא "האקסיומות של האוריגמי" שמטרה הייתה לבדוק את היכולת של התלמידים להבין את אקסיומות האוריגמי ואת היכולת שלהם להשתמש באקסיומות אלו על מנת להצדיק תהליכי קיפול שונים.

פרק 1- בניות עם סרגל ומחוגה

1.1 מבוא לבניות עם סרגל ומחוגה

מושג ה"הוכחה" כהסקת מסקנות מהנחות מפורשות (הוכחה דדוקטיבית) החלה להופיע כבר במאה החמישית לפני הספירה במתמטיקה של יוון העתיקה. היוונים התעניינו בגיאומטריה, מעבר לצרכים מעשיים, בעיקר מבחינה אסטטית ופילוסופית ושאפו ליצור תשתית לוגית מלאה ועקבית של מדע הגיאומטריה (אונגרו, 1989). המתמטיקאי היווני אוקלידס, מהמאה השלישית לספירה נחשב לאבי הגיאומטריה בזכות ספרו "יסודות", בו אסף ואיגד משפטים והוכחות גיאומטריות, שנוסחו עוד לפניו, למבנה סדור, שיטתי ולוגי. אוקלידס הניח בספר "יסודות" את היסודות לגיאומטריה הדדוקטיבית. הוא מגדיר מושגי יסוד כמו ישר, זווית ונקודה, מניח הנחות יסוד ומציג את חמש אקסיומות של הגיאומטריה האוקלידית. בהתבסס על כל אלו או מוכיח כ-465 משפטים בגיאומטריה ובתורת המספרים. כל הוכחת משפט מתבססת על היסקים לוגיים מתוך הגדרות, אקסיומות ומשפטים קודמים (פרוים, 2008).

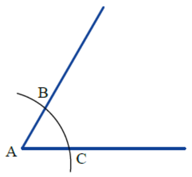
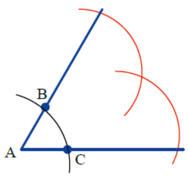
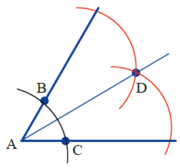
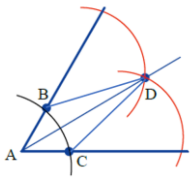
ההוכחות הגיאומטריות של אוקלידס התבססו על בניות בסרגל ומחוגה. הסרגל (ללא שנתות מידה) לא שימש ככלי למדידת אורך, אלא כל תפקידו היה לסמן קווים ישרים, והמחוגה שימשה כמכשיר להתוויית מעגלים ולהקצאת קטעים שווים. בעזרת שני הכלים המינימליים של סרגל ומחוגה הצליחו היוונים לבנות בניות גיאומטריות רבות והוכיחו משפטים רבים. הוכחות רבות התבססו על "בניות בסיסיות" שהיוונים הוכיחו שניתן לבנות. לדוגמא, העתקת קטע, חיבור וחיסור קטעים, חציית קטע, העתקת זווית, בניית ישר מקביל, חיבור וחיסור זוויות וחציית זווית.

היוונים הגיעו להישגים רבים בזכות המערכת האקסיומטית האוקלידית , אך למרות זאת הם השאירו מספר בעיות פתוחות. אחת מהבעיות היא חלוקת זווית לשלש שבה אעסוק בעבודה זו. במשך שנים ניסו מתמטיקאים רבים להוכיח או להפריך את הטענה שניתן לחלק כל זווית לשלש באמצעות סרגל ומחוגה. נבנו בניות שונות שחילקו זוויות בגודל מסוים לשלוש (כמו חלוקה של זוויות ישרה לשלוש- אותה אציג בעבודה) אך לא נמצאה בנייה שמחלקת זווית שרירותית לשלוש.

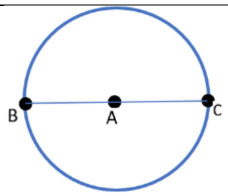
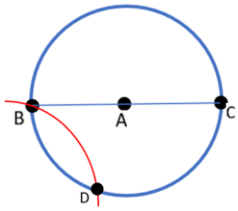
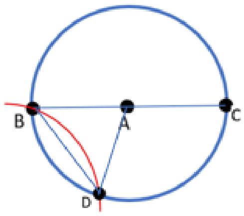
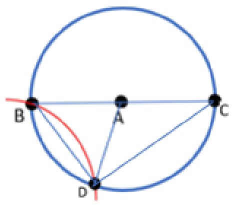
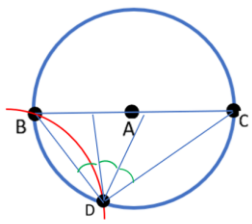
במאה ה- 19 , כאשר פותחה תורת השדות, הוכח כי לא ניתן לחלק זווית לשלוש בעזרת סרגל ומחוגה.

1.2 בניות ה"קרובות" לחלוקת זווית לשלוש אשר ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה

1.2.1 חציית זווית בעזרת סרגל ומחוגה

תיאור הבנייה	הבנייה
• נשרטט זווית כלשהי. נסמן אותה ב- A. • נשרטט קשת החותכת את שוקי הזווית, ונסמן את נקודות חיתוך של הקשת עם שוקי הזווית ב C ו B.	
• נשרטט שתי קשתות בעלות רדיוסים שווים באורכם. קשת אחת מנקודה B וקשת אחת מנקודה C.	
• נסמן את נקודת החיתוך של הקשתות באות D ונעביר את הקטע AD.	
• נעביר את הקטעים BD ו CD • נתבונן ב : ΔABD ו $-\Delta ACD$ AB = AC (רדיוסים במעגל שווים) BD = CD (מאופן הבנייה-הרדיוסים בשני הקשתות האדומות שווים). • AD = AD (צלע משותפת) 🡨 $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (על-פי משפט חפיפה צלע.צלע.צלע) 🡨 $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים שוות) 🡨 ניתן לחצות זווית שרירותית בעזרת סרגל ומחוגה. מ.ש.ל	

1.2.2 חלוקת זווית בת 90^0 לשלוש (בניית זווית בת 30^0)

תיאור הבנייה	הבנייה
• נצייר מעגל בעל רדיוס כלשהו ונסמן את מרכזו ב A. • נעביר קוטר כלשהו ונסמן את קצות הקוטר ב- B ו- C.	
• מנקודה B נשרטט קשת בעלת רדיוס זהה לרדיוס המעגל • נסמן את נקודת החיתוך של הקשת עם המעגל ב- D.	
• נעביר את הקטעים AD ו BD • AB = AD (רדיוסים במעגל שווים) • AD = AB = BD (רדיוס הקשת שווה לרדיוס המעגל) 🡐 • משולש ABD שווה צלעות 🡐 • $\measuredangle ABD = \measuredangle BDA = \measuredangle DAB = 60^0$	
• נעביר את הקטע CD ונתבונן במשולש ADC • $\measuredangle DAC = 120^0$ (זוויות צמודות משלימות ל 180^0) • AD = AC (רדיוסים במעגל שווים) 🡐 • $\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = 30^0$ (במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות, סכום זוויות במשולש הוא 180^0).	
• נתבונן ב- ΔBDC: $\measuredangle BDC = \measuredangle BDA + \measuredangle ADC = 60^0 + 30^0 = 90^0$ $\measuredangle CBD = 60^0$ (הוכחנו ש $\measuredangle ABD = 60^0$ וזו אותה זווית). • על ידי חצייה של $\measuredangle BDC$ כפי שהראנו בסעיף 1.2.1 נקבל חלוקה של $\measuredangle BDC$ לשלוש זוויות בנות 30^0. בכך, הוכחנו שניתן לחלק זווית ישרה לשלוש בעזרת סרגל ומחוגה. מ.ש.ל	

פרק 2- חלוקת זווית לשלוש בעזרת סרגל ומחוגה

בעיית החלוקה של זווית לשלוש נחקרה כבר מתקופת היוונים. פתרונה נמצא רק לאחר 2000 שנה, במאה ה-19, עם התפתחותה של תורת השדות.

לפני שאציג את ההוכחה לכך שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש באמצעות סרגל ומחוגה, אציג תחילה מספר מושגים ומשפטים מתורת השדות שבהם נעשה שימוש במהלך ההוכחה:

<u>מבוא להוכחה:</u>

הגדרה 2.1

שדה: שדה F הינו מבנה אלגברי הכולל לפחות שני איברים 0 ו-1 , בעל שתי פעולות בינאריות המסומנות ב "+" (חיבור) ו-"·" (כפל), השומר על סגירות תחת פעולות אלה ומקיים לכל $a, b, c \in F$:

i. $a + b = b + a$ (קומוטטיביות בחיבור)

ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (אסוציאטיביות בחיבור)

iii. $a + 0 = a$ (קיום איבר ניטרלי בחיבור)

iv. $\forall a, \exists b : a + b = 0$ (קיום איבר נגדי לכל איבר ב- F)

v. $a \bullet b = b \bullet a$ (קומוטטיביות בכפל)

vi. $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (אסוציאטיביות בחיבור)

vii. $a \bullet 1 = a$ (קיום איבר ניטרלי בכפל)

viii. $\forall a \neq 0, \exists b : a \bullet b = 1$ (קיום הופכי לכל איבר ב-F)

ix. $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ (דיסטריבוטיביות)

הגדרה 2.2

שדה הרחבה: יהיו F ו K שדות. אם מתקיים F ⊆ K, נאמר כי F הוא תת שדה של K,

ו- K ייקרא **שדה ההרחבה** של F.

הגדרה 2.3

יהיו F ו- K שדות המקיימים F ⊆ K , ותהי A קבוצה של איברים מתוך K. נסמן ב- $F(A)$ את התת-שדה הקטן ביותר של K המכיל את F ואת A.

הערה: מכיון ש F ו- $F(A)$ שדות ו- $F \subseteq F(A)$ מתקיים ש **$F(A)$ הוא שדה הרחבה של F.**

הגדרה 2.4

דרגת ההרחבה: אם $F \subseteq K$, אז הממד של השדה K, כמרחב ליניארי מעל שדה F , נקרא **דרגת ההרחבה** של K מעל F , ומסמנים אותו $[K : F]$.

משפט 2.1:

אם L הוא הרחבה סופית של F ו- K הוא שדה ביניים (כלומר $F \subseteq K \subseteq L$), אז גם הדרגות $[L: K]$, $[K : F]$ הן סופיות ומתקיים:

$[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.

הגדרה 2.5:

איבר אלגברי: יהי K שדה ההרחבה של F. **איבר $\alpha \in K$ נקרא אלגברי מעל F** אם קיימים איברים $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$ לא כולם 0, כך ש-: $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$.

במילים אחרות, $\alpha \in K$ הוא איבר אלגברי מעל F , אם הוא שורש של פולינום שונה מאפס עם מקדמים מתוך F.

הגדרה 2.6:

פולינום מינימלי: יהא α איבר אלגברי מעל שדה F. הפולינום המתוקן[1] $p(x) \in F(x)$ ממעלה קטנה ביותר המקיים $p(\alpha) = 0$ נקרא **הפולינום המינימלי של α מעל F**.

הגדרה 2.7:

איבר $\alpha \in K$ הוא **אלגברי מדרגה n** מעל F, אם הפולינום המינימלי של α מעל F הוא ממעלה n.

משפט 2.2:

אם α הוא איבר אלגברי מדרגה n מעל F, אזי $[F(\alpha): F] = n$.

משפט 2.3

יהיו $s, t \in Z$ זרים זה לזה ויהי $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in Z[x]$. אם $b = \frac{s}{t}$ הוא שורש של הפולינום $p(x)$ אז s מחלק את a_0 ו t מחלק את a_n.

הוכחה למשפט 2.3:

נניח ש $b = \frac{s}{t}$ הוא שורש רציונלי של $p(x)$ וש- s, t זרים זה לזה.

[1] פולינום מתוקן הוא פולינום שבו המקדם של האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר הוא 1. בהינתן פולינום מעל שדה כלשהו, ניתן לתקן אותו על ידי חלוקתו במקדם של האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר.

נוכיח תחילה ש-s מחלק את a_0. אנחנו יודעים שמתקיים $p(b) = 0$, כלומר:

$$a_n \frac{s}{t^n}^n + a_{n-1} \frac{s}{t^{n-1}}^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{s}{t} + a_o = 0 \quad \backslash \bullet\, t^n$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_o t^n = 0 \quad \backslash -a_o t^n$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} = -a_o t^n$$

אנו רואים שהביטוי באגף שמאל מתחלק ב-s, לכן גם הביטוי שבצד ימין מתחלק ב-s. כלומר, $-a_o t^n$ מתחלק ב-s. t ו- s זרים ולכן t לא מתחלק ב-s וגם t^n לא מתחלק ב-s.

קיבלנו ש- s מחלק את a_o.

כעת, נוכיח ש- t מחלק את a_n.

נתבונן בשיוויון שקיבלנו מקודם:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_o t^n = 0 \quad \backslash -a_n s^n$$

$$a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_o t^n = -a_n s^n$$

באופן דומה, גם כאן ניתן לראות שהביטוי באגף שמאל מתחלק ב-t ולכן גם $-a_n s^n$ (הביטוי באגף ימין של השוייון) מתחלק ב-t. t ו- s זרים ולכן s לא מתחלק ב-t וגם s^n לא מתחלק ב-t.

קיבלנו ש- t מחלק את a_n

מ.ש.ל

הגדרה 2.8:

קבוצת **המספרים הניתנים לבניה** היא הקבוצה הקטנה ביותר שכוללת את 1 וסגורה לפעולות החיבור, החיסור, הכפל, החילוק והוצאת שורש ריבועי.

נראה שניתן לבנות פעולות אלו בעזרת סרגל ומחוגה:

טענה 2.1

אם נתון קטע באורך יחידה (יחידת אורך אחת) ובנוסף נתונים שני קטעים AB ו- CD כך שאורכו של AB הוא a ואורכו של CD הוא b אז ניתן לבנות את פעולות הבאות בעזרת סרגל ומחוגה:

$\sqrt{a}\ ,\ \frac{a}{b}\ ,\ a \bullet b\ ,\ a - b\ ,\ a + b$.

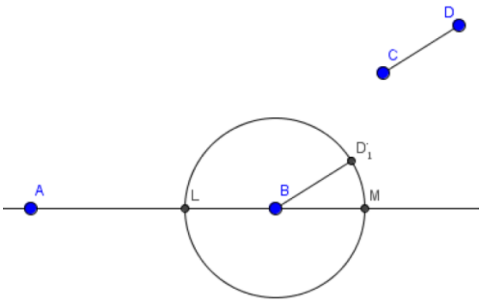
הוכחה לטענה 2.1:

הערה: לאורך ההוכחה אשתמש בביטוי "קטע באורך יחידה" ככתיב מקוצר ל"קטע שאורכו יחידת אורך אחת".

חיבור וחיסור-

נבנה מעגל שמרכזו בנקודה B ושאורך הרדיוס שלו כאורך הקטע DC (ניתן לעשות זאת על ידי הבנייה הבסיסית של העתקת קטע).
נעביר את המשכו של הקטע AB כך שיחתוך את המעגל, נסמן את נקודות חיתוך אלו ב L ו- M כמתואר באיור 1 ונקבל:

$$AM = a + b \,, \qquad AL = a - b$$

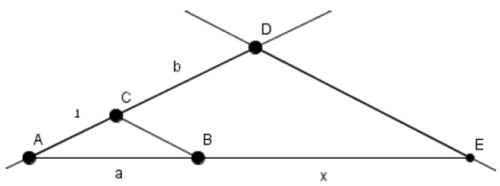


איור 1

כפל-

נשרטט את הקטע AB שאורכו a. נעתיק את הקטע באורך יחידה כך שיתחיל מנקודה A ונסמן את הקטע המתקבל ב- AC.
לקטע AC נחבר את הקטע CD שאורכו b (על ידי הבניה של חיבור קטעים) כמתואר באיור 2.
נבנה ישר היוצא מנקודה D והמקביל לקטע CB (בנייה בסיסית) ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם הקרן שהיא המשכו של AB ב- E.
כעת, נסמן את אורך הקטע BE ב- x ועל פי משפט תלס נקבל:

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = a \bullet b$$

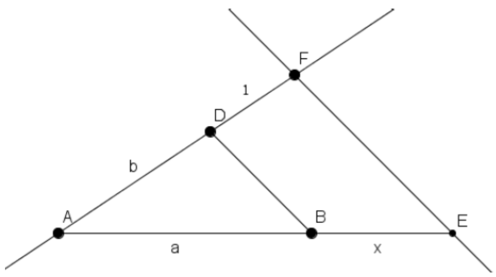


איור 2

חילוק-

נשרטט את הקטע AB שאורכו a.
נעתיק את הקטע באורך b כך שיתחיל בנקודה A. נסמן את קצה הקטע ב D ונעביר את הקטע DB .
נשרטט מעגל שמרכזו A ורדיוסו באורך יחידה (ניתן לבצע זאת על ידי העתקת הקטע באורך יחידה כך שיתחיל מנקודה A).
נסמן ב- F את נקודת החיתוך של מעגל זה עם הקרן שהיא המשכו של AD.
דרך נקודה F נעביר ישר המקביל ל BD (בנייה בסיסית) ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם הקרן AB ב E.
כעת, נסמן את אורך הקטע BE ב- x ועל פי משפט תלס נקבל:

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$$



איור 3

הוצאת שורש ריבועי למספר ממשי חיובי-

על ידי חיבור קטעים נחבר קטע שאורכו a (הקטע AB) עם קטע באורך יחידה (נסמנו ב- BD) ונקבל קטע שאורכו AC= a+1. נמצא את אמצע הקטע AC על ידי בנייה בסיסית של חציית קטע. מאמצע הקטע AC נעביר מעגל בעל רדיוס באורך $\frac{a+1}{2}$ (מעגל זה יעבור דרך הנקודות A ו-C).

מנקודה B נעביר אנך לקטע AC. נסמן את נקודת החיתוך של האנך והמעגל ב D.

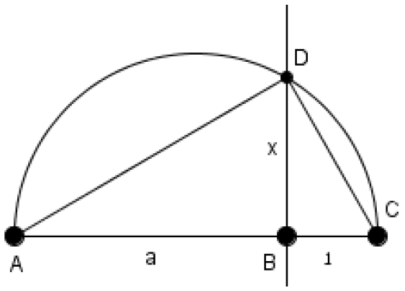
נעביר את הקטעים DC ו- AD.

משולש ADC הוא ישר זווית (זוויות היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה).

נסמן את אורך הקטע BD ב-x.

במשולש ישר זווית הגובה ליתר שווה לממוצע הגיאומטרי של היטלי הניצבים על היתר, כלומר:

$$x^2 = AB \bullet BC \Rightarrow x^2 = a \bullet 1 \Rightarrow x = \sqrt{a}$$



איור 4

כפי שראינו, קבוצת המספרים הניתנים לבניה סגורה לארבע פעולות החשבון ולכן היא שדה. השדה הקטן ביותר שמכיל את 1 הוא Q כך שאפשר לתאר את קבוצת המספרים הניתנים לבניה בתור שדה הרחבה של Q. שדה הרחבה זו מוכל ב- R מכיון ש R הוא שדה הרחבה של Q הסגור להוצאת שורש.

יהי $\alpha \in R$ מספר הניתן לבניה. קיימת סדרת מספרים סופית שנבנו החל מ 1 ועד אליו (סדרת המספרים היא סופים כי α נבנית על ידי מספר סופי של צעדי בניה). נסמן איברי סדרה זו ב α_1 , α_2 , ... , α_n. עכשיו, נבנה סדרה של שדות הרחבה המתאימים לסדרה זו. נגדיר $F_0 = Q$ ולכל $1 \le k \le n$ מתקיים $F_k = F_{k-1}(\alpha_k)$. לכל k , α_k התקבל בצורה כלשהי מאיברים ב- F_{k-1} בעזרת פעולות השדה ו\או הוצאת שורש. לכן קיים פולינום ריבועי שמאפס את α_k מעל F_{k-1}. פולינום זה הוא מדרגה 1 או 2 ולכן עפ״י משפט 2.2 מתקיים $[F_k : F_{k-1}] = 1$ או $[F_k : F_{k-1}] = 2$.

על פי משפט 2.1 מתקיים $[F_n : Q] = [F_n : F_{n-1}] \bullet [F_{n-1} : F_{n-2}] \bullet\bullet\bullet [F_1 : F_0]$. כלומר, הדרגה של F_n מעל Q היא חזקה של 2. אנחנו יודעים ש $Q \subseteq Q(\alpha) \subseteq F_n$ ולכן $[Q_\alpha : Q]$ מחלקת את $[F_n : Q]$. לכן הדרגה של α חייבת גם היא להיות חזקה של 2.

לכן ניתן להסיק שאם ניתן לבנות קטע באורך α בעזרת סרגל ומחוגה (כשנתון קטע באורך 1), אז α הוא מספר אלגברי ודרגתו מעל Q היא חזקה של 2.

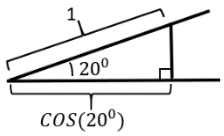
כעת, נוכיח כי לא ניתן לחלק זווית לשלוש בעזרת סרגל ומחוגה.

בשביל להוכיח זאת מספיק להוכיח שלא ניתן לחלק זווית בת 60^0 מעלות לשלוש- כלומר, שלא ניתן לבנות זווית בת 20^0 בעזרת סרגל ומחוגה.

הוכחה:

נניח שניתן לחלק זווית בת 60^0 לשלושה חלקים- כלומר ניתן לבנות זווית בת 20^0.

נבחר נקודה על אחת מצלעות הזווית (בת ה 20^0) במרחק 1 מן הקודקוד ונוריד אנך לצלע השנייה (איור 5)



איור 5

קיבלנו קטע על הצלע השנייה שאורכו $\cos(20^0)$.

אבל אז:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \cos(60^0) &= \cos(40^0 + 20^0) = \cos(40^0)\cos(20^0) - \sin(40^0)\sin(20^0) \\ &= (2cos^2(20^0) - 1)\cos(20^0) - 2\cos(20^0)(1 - cos^2(20^0) \\ &= 4cos^3(20^0) - 3\cos(20^0)\end{aligned}$$

לכן אם נסמן $x = \cos(20^0)$, נקבל כי x הוא פתרון למשוואה $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

נוכיח שהפולינום $8x^3 - 6x - 1$ הוא אי-פריק מעל Q:

לצורך ההוכחה נשתמש במשפט הבא:

אם הפולינום $8x^3 - 6x - 1$ פריק מעל Q, אז יש לו שורש ב Q (שכן הוא פולינום ממעלה 3).

על-פי משפט 2.3 השורשים הרציונליים של פולינום זה יכולים להיות רק המספרים הבאים:

$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$.

קל לראות שאף לא אחד ממספרים אלה הוא שורש של הפולינום $8x^3 - 6x - 1$.

לכן $8x^3-6x-1$ הוא פולינום הוא אי-פריק מעל Q. נתקן את פולינום זו ע״י חלוקה שלו ב 8 ונקבל את הפולינום $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$. פולינום זה הוא פולינום מתוקן ואי-פריק מעל Q, כלומר הוא פולינומים מינימלי של x מעל Q.

לכן, x הוא מספר אלגברי מדרגה 3 מעל Q.

3 איננו חזקה של 2 בסתירה לדרישה. לכן אי אפשר לבנות קטע שאורכו $x=\cos(20^0)$ בעזרת סרגל ומחוגה.

- ⇦ לא ניתן לבנות זווית בת 20^0 באמצעות סרגל ומחוגה
- ⇦ לא ניתן לחלק את הזווית של 60^0 לשלושה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה.
- ⇦ לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה.

פרק 3- חלוקת זווית לשלוש בעזרת ניאוסיס (neusis).

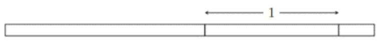
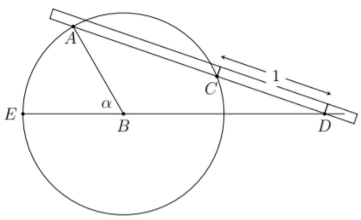
הסרגל שבו השתמשו היוונים בבניותיהם היה סרגל ללא סימונים המשמש למתיחת קווים ישרים בלבד. בפרק הקודם הוכחנו שבעזרת סרגל כזה לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש.

לעומת זאת, מסתבר שבעזרת סרגל עם סימונים ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש די בקלות.

יותר מכך, מספיקים שני סימונים על הסרגל בכדי לחלק זוויות לשלוש. סרגל כזה, אשר בו שני סימנים בלבד נקרא **ניאוסיס (neusis)** כמתואר באיור 1 :

איור 1

נוכיח שבעזרת ניאוסיס ומחוגה ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש[2]:

תיאור הבנייה	**הבנייה**
• נניח שהמרחק בין שני הסימונים שעל הניאוסיס הוא 1 (איור 2).	 איור 2
• בעזרת המחוגה, נשרטט מעגל בעל רדיוס באורך 1 (נעשה זאת על ידי קביעת המרחק בין רגלי המחוגה כמרחק בין שני הסימונים על הניאוסיס) כמתואר באיור 3. • נסמן זווית שרירותית α שיוצאת ממרכז המעגל B . • נמשיך את הקטע EB אל מחוץ למעגל כמתואר באיור 3. • נמקם את הניאוסיס על נקודה A כך שיחתוך את המעגל (נסמן את נקודת החיתוך ב- C) , שיחתוך את המשכו של הקטע EB (נסמן את נקודת החיתוך ב- D) וכך שהמרחק בין נקודות חיתוך אלו (C ו- D) יהיה 1 (איור 3). • נעביר את הקו AD	 איור 3

---

[2] ההוכחה והאיורים בפרק זה לקוחים מ- https://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/mathematics#surprising

- נעביר את הרדיוס BC.
- נתבונן ב-: ΔABC

$AB = CB$ (רדיוסים במעגל) ולכן

$\measuredangle ACB = \measuredangle CAB$ (במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות).

- נתבונן ב-ΔCBD :

$CB = CD$ (מאופן הבניה עם הניאוסיס) ולכן

$\measuredangle CBD = \measuredangle CDB$ (במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות).

- נסמן את הזוויות כמתואר באיור 4.
- נוכיח כי : $\alpha = 3\beta$:

מהעובדה שסכום זוויות במשולש הוא 180^0

ושסכום זוויות צמודות הוא 180^0 נקבל:

$$\epsilon = 180^0 - 2\beta$$

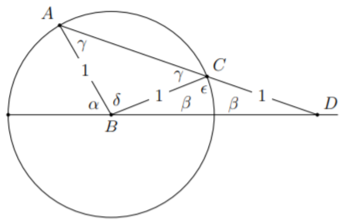
$$\gamma = 180^0 - \epsilon = 180^0 - (180^0 - 2\beta) = 2\beta$$

$$\delta = 180^0 - 2\gamma = 180^0 - 4\beta$$

$$\alpha = 180^0 - \delta - \beta = 4\beta - \beta = 3\beta$$

כלומר, ניתן לחלק זווית שרירותית לשלוש על ידי ניאוסיס ומחוגה.

מ.ש.ל



איור 4

פרק 4- המתמטיקה של האוריגמי

4.1 מבוא למתמטיקה של האוריגמי

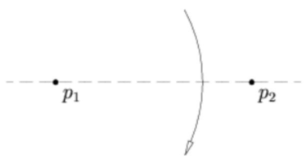
אוריגמי הינה אומנות עתיקה העוסקת בקיפולי נייר. אומנות האוריגמי החלה להתפתח עם המצאת הנייר ב- 105 לספירה כשמושגי היסוד העומדים בבסיסה הם "נקודה", "קיפול" ו"מישור". בשנת 1930 החל להתפתח האוריגמי המודרני על ידי אקירה יושיזאווה (Akira Yoshizawa, 1911-2005). יושיזאווה פיתח שיטת רישום ובה תרשימים המתארים את תהליך הקיפול. שיטת רישום זו, הייתה שיטה אחידה שכללה סמלים בסיסיים. בנוסף, יושיזאווה פיתח שיטות קיפול חדשניות ועסק בפתרון בעיות גיאומטריות באמצעות אוריגמי.

בשנות ה-50 של המאה ה-20 האוריגמי החל להתפשט לארצות הברית, שם נחקרה מורכבותו ונחקר הקשר בינו לבין תחומים אחרים. כך, החל האוריגמי לשמש בפתרון בעיות ואתגרים מתמטיים, טכנולוגיים, רפואיים, חינוכיים ומדעיים.

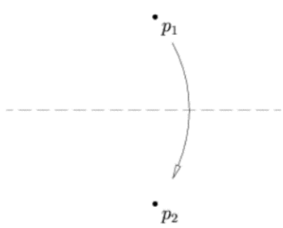
התפתחות המחקר המתמטי של האוריגמי החל בשנות ה-80. בבסיס החקר המתמטי של האוריגמי מונחות שבע אקסיומות הנקראות "אקסיומות הוזיטה-האטורי", אשר מתארות את הפעולות הגיאומטריות האפשריות בתהליך קיפול הנייר. שש האקסיומות הראשונות פורסמו על ידי המתמטיקאי הומיאקי הוזיטה (Humiaki Huzita) בשנת 1989. האקסיומה השביעית, המשלימה את שש האקסיומות של הוזיטה, פורסמה בשנת 2001 על ידי המתמטיקאי קושירו האטורי (Koshiro Hatori).

4.2 אקסיומות הוזיטה-האטורי

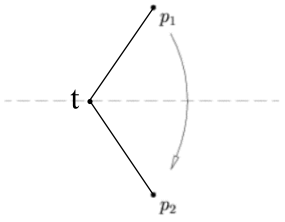
1. בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2 , קיים קיפול יחיד העובר דרך שתיהן.



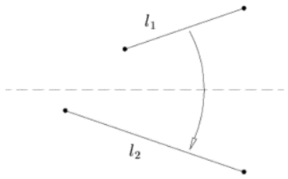
2. בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2 , קיים קפל יחיד הממקם את p_1 על גבי p_2.



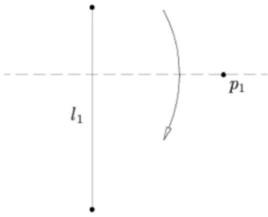
הערה: על ידי שימוש באקסיומה זו הנקודה p_1 ממוקמת על גבי הנקודה p_2 ולכן לכל נקודה t הנמצאת על הקו הנוצר מהקיפול, הקיפול ממקם את הקטע p_1t על גבי הקטע p_2t, כלומר $p_1t = p_2t$.



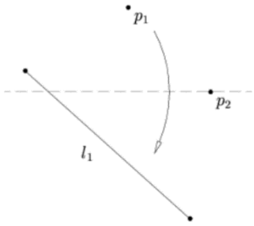
3. בהינתן שני קווים l_1 ו- l_2 , קיים קפל הממקם את l_1 על גבי l_2 .



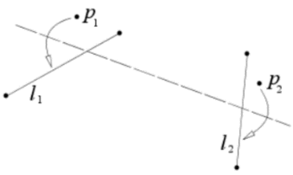
4. בהינתן נקודה p וקו l , קיים קפל יחיד המאונך ל-l שעובר דרך p.



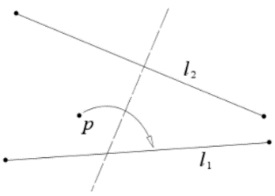
5. בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2 וקו l, כך שמרחקה של p_2 מ- l אינו עולה על מרחקה מ-p_1 , ניתן ליצור קפל העובר דרך p_2 שימקם את p_1 על גבי l.



6. בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2 ושני קווים l_1 ו- l_2 , ניתן ליצור קפל שימקם בו זמנית את p_1 על גבי l_1 ואת p_2 על גבי l_2.



7. בהינתן נקודה p ושני קווים l_1 ו- l_2 , ניתן ליצור קפל המאונך ל- l_2 שימקם את p על גבי l_1.



הערה: בניסוח האקסיומות, כל שני אובייקטים מוגדרים להיות שונים זה מזה.

באמצעות אקסיומות האוריגמי ניתן לפתור בעיות מתמטיות וגיאומטריות הניתנות ושאינן ניתנות לפתרון על ידי הגיאומטריה האוקלידית. מבין בעיות אלו, בעיית חלוקת זווית שלוש שלא ניתנת לפתרון על ידי סרגל ומחוגה, דווקא ניתנת לפתרון באמצעות האוריגמי.

4.3 חלוקה של זווית לשלוש באוריגמי

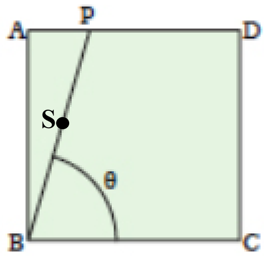
נוכיח כי ניתן לחלק זווית לשלוש באמצעות אוריגמי.

הוכחה:

שלב 1:

ניקח דף בצורת ריבוע (ABCD ריבוע). נסמן נקודה אקראית S על הדף. נקפל את הקיפול העובר דרך נקודה B ונקודה S (אקסיומה 1).
הקו הנוצר מהקיפול חותך את הקו AD או את הקו DC (צלעות הריבוע שאינן עוברות דרך הנקודה B).
נסמן את הנקודה שבה הקו הנוצר מהקיפול חותך את אחת מצלעות הריבוע ב- P.
הערה: האיורים בהוכחה זו מתארים מצב בו P נמצאת על הקו AD אך ההוכחה תקפה גם במצב בו P נמצאת על הקו DC.
נסמן את הזווית שנוצרה בין הקו BP והקו BC ב- θ.

נוכיח שניתן לחלק את θ לשלושה חלקים שווים[3] (איור 1).



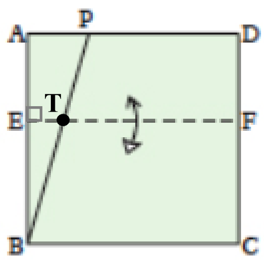
איור 1

שלב 2:

נקפל את הקיפול הממקם את נקודה B על גבי הנקודה P (אקסיומה 2). נסמן את הנקודה שבה הקו הנוצר מהקיפול חותך את הקו BP ב-T.
נקפל את הקיפול המאונך לקו AB ועובר דרך נקודה T (אקסיומה 4).
נפרוש את הדף בחזרה.
נסמן את הקו שנוצר מהקיפול ב- EF כמתואר באיור 7.

טענה: $EF \parallel BC$.

נימוק: EF מאונך ל- AB ולכן $\measuredangle AEF = 90^0$.



איור 2

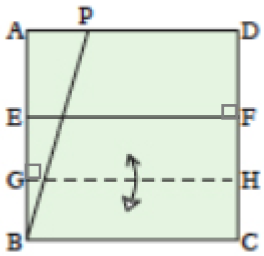
[3] θ זווית אקראית- ניתן לבצע את השלבים הבאים על כל זווית θ שנבחר, $0^0 < \theta < 90^0$. הוכחות נוספות קיימות עבור זוויות שגודלן גדול או שווה ל- 90^0.

ABCD ריבוע ולכן $\measuredangle ABC = 90^0$ (זוויות הריבוע ישרות).

$\leftarrow$ $\measuredangle ABC = \measuredangle AEF = 90^0$.

$\leftarrow$ $EF \parallel BC$ שני ישרים בעלי זוג זוויות מתאימות שוות מקבילים זה לזה.

שלב 3 :



איור 3

נקפל את הקיפול הממקם את נקודה B על גבי נקודה E (אקסיומה 2). נסמן את הנקודה שבה הקיפול שנוצר חותך את הקו AB ב-G.

נקפל את הקיפול המאונך לקו AB והעובר דרך הנקודה G (אקסיומה 4).

נפתח את הדף בחזרה ונסמן את הקו שנוצר מהקיפול ב- GH כמתואר באיור 3.

הערה : $GH \parallel BC$

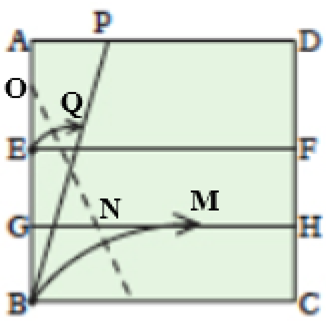
נימוק : GH מאונך ל- AB ולכן $\measuredangle AGH = 90^0$.

ABCD ריבוע ולכן $\measuredangle ABC = 90^0$ (זוויות הריבוע ישרות).

$\leftarrow$ $\measuredangle ABC = \measuredangle AGH = 90^0$.

$\leftarrow$ $GH \parallel BC$ שני ישרים בעלי זוג זוויות מתאימות שוות מקבילים זה לזה.

שלב 4 :



איור 4

נקפל את הקיפול שממקם את נקודה B על גבי הקו GH ואת נקודה E על גבי הקו BP (אקסיומה 6) , כמתואר באיור 4.

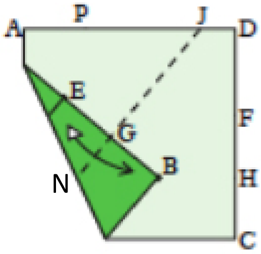
נסמן את הנקודה שעל גביה ממוקמת נקודה E ב- Q ואת הנקודה שעל גביה ממוקמת נקודה B ב- M.

נסמן הנקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו GH ב- N.

בנוסף, הקו הנוצר מהקיפול חותך את הקו AB או את הקו AD (צלעות הריבוע). אם הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו AB נסמן את

נקודת החיתוך של הקווים ב-O. אם הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו AD נסמן את נקודת החיתוך של הקווים ב- 'O.

הערה: האיורים בהוכחה זו מתארים מצב בו הקו הנוצר מהקיפול חותך את הקו AB אך ההוכחה תקפה גם למצב בו הוא חתוך את הקו AD.



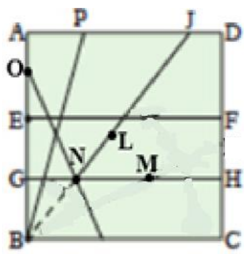
איור 5

שלב 5:

נקפל קיפול נוסף (מבלי לפתוח את הקיפול משלב 4) ונקפל את הקפל העובר דרך נקודה N ונקודה G (אקסיומה 1).

הקו הנוצר מהקיפול חותך את הקו AD או את הקו DC. נסמן הנקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את אחד מהקווים הנ"ל ב- J ואת הנקודה על גבי הקו NJ שעליה ממוקמת נקודה G ב- L.

הערה: האיורים בהוכחה זו מתארים מצב בו הנקודה J נמצאת על הקו AD אך ההוכחה תקפה גם למצב בו הנקודה J נמצאת על הקו DC.



איור 6

שלב 6:

נפרוש בחזרה את הדף.

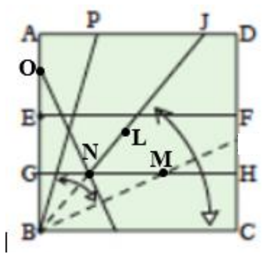
נקפל את הקיפול המחבר בין נקודה N לנקודה B (אקסיומה 1) ונסמן את הקו הנוצר מהקיפול ב BN

נפרוש את הדף .

טענה 4.3.1:

הקו BN והקו NJ נמצאים על ישר אחד.

בשביל להוכיח את הטענה נקפל קיפול נוסף (קיפול שאיננו מסתמך על הטענה):



איור 7

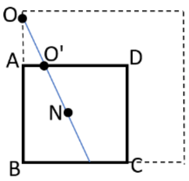
שלב 7:

נקפל את הקיפול שעובר דרך הנקודה B והנקודה M (אקסיומה 1)

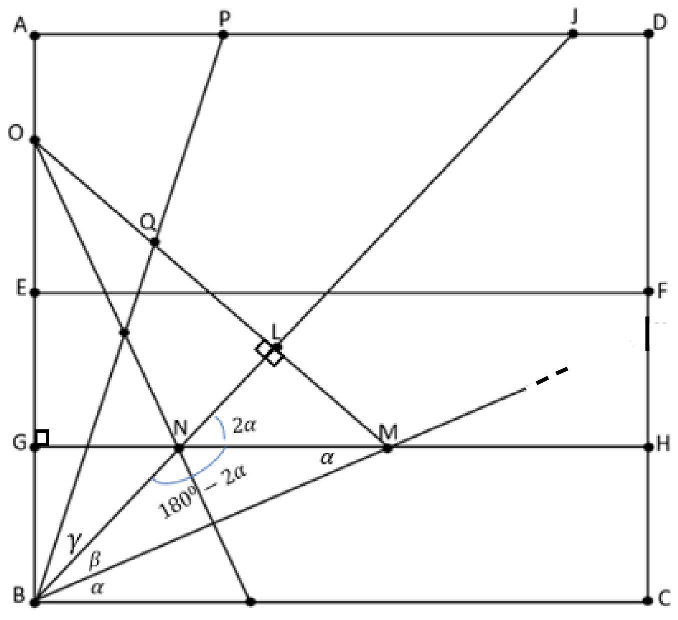
נפרוש את הדף ונסמן את קו שנוצר מהקיפול ב- BM (איור 7).

כעת, נוכיח את טענה 4.3.1 ונוכיח שהקיפולים המתוארים מחלקים לשלוש את θ.
ההוכחות הבאות מבוססת על אקסיומות האוריגמי ועל הגיאומטריה האוקלידית. הסיבה לכך היא שכאשר דף הנייר פרוש הוא מהווה מישור בו הגיאומטריה האוקלידית תקפה. לכן, ניתן להתייחס לאיור 8 (המתאר את תוצאות שלבי הקיפול) כשרטוט ולא כדף עם קיפולים.

הערה: בהוכחות הבאות אניח שהנקודה O נמצאת על הקטע AB.
במידה והנקודה O אינה על הקו AB אלא הנקודה 'O נמצאת על הקו AD (ראה שלב 4) נמשיך את הקו 'NO עד שיחתוך את המשכו של הקו AB (ניתן לחשוב על זה כאילו ערכנו את הקיפולים מחדש על דף גדול יותר שבו הקפל שנוצר יחתוך את AB. נסמן את נקודת החיתוך של 'NO והקו AB ב- O ואז ההוכחה המוצגת תקפה לשני המקרים.



הוכחת טענה 4.3.1:



איור 8

נסמן $\measuredangle MBC = \alpha$

ידוע כי $BC \parallel GH$ (משלב 3) ולכן $\measuredangle MBC = \measuredangle GMB = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות)

נתבונן במשולש BNM :

הקיפול בשלב 4 ממקם את נקודה B על גבי נקודהM.

הנקודה N ממוקמת על הקו שנוצר מהקיפול הזה ולכן $BN = MN$ (ראה הערה לאקסיומה 2).

במשולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ולכן $\measuredangle NBM = \measuredangle NMB = \alpha$.

סכום זוויות במשולש הוא 180^0 ולכן $\measuredangle BNM = 180^0 - 2\alpha$.

כעת, נקפל את הקיפול המחבר את נקודות M ו-O (אקסיומה 1).
מהגדרת הנקודות Q ו-L , נקודות אלו נמצאות על הקו OM (ראה שלבים 4 ו-5)

נתבונן על ΔOLN ו ΔOGN :
הקיפול בשלב 4 ממקם את נקודה G על גבי נקודה L. בנוסף הנקודות O ו-N נמצאות על הקו הנוצר מקיפול זה ולכן $GN = LN$ ו- $GO = LO$ (ראה הערה לאקסיומה 2).
בנוסף $ON = ON$ צלע משותפת לשני המשולשים.
לכן, $\Delta OLN \cong \Delta OGN$ (על-פי משפט חפיפה צלע.צלע.צלע)
מהקיפול בשלב 3 נובע ש- $\measuredangle OGN = 90^0$ (כי הקו GH מאונך לקו AB).
← $\measuredangle OGN = \measuredangle OLN = 90^0$ (זוויות מתאימות בין משולשים חופפים שוות).
← $\measuredangle BLM = 90^0$ (זוויות צמודות משלימות ל- 180^0).
נתבונן ב- ΔBLM :
$\measuredangle BLM = 90^0$ (הוכחנו)
$\measuredangle LBM = \alpha$ (הוכחנו)
← $\measuredangle BML = 90^0 - \alpha$ (סכום זוויות במשולש 180^0).
נתבונן ב- ΔLNM :
$\measuredangle BLM = 90^0$
$\measuredangle NML = \measuredangle BML - \measuredangle BMN = 90^0 - \alpha - \alpha = 90^0 - 2\alpha$
← $\measuredangle LNM = 180^0 - 90^0 - (90^0 - 2\alpha) = 2\alpha$ (סכום זוויות במשולש 180^0).
כעת, נתבונן על $\measuredangle BNL$:
$\measuredangle BNL = \measuredangle BNM + \measuredangle MNL = 180^0 - 2\alpha + 2\alpha = 180^0$
← הקו BN והקו LN נמצאים על ישר אחד.

מ.ש.ל

כעת, נוכיח שהקיפולים שביצענו חילקו את $\measuredangle PBC = \theta$ לשלושה חלקים שווים :
נסמן $\measuredangle MBC = \alpha$, $\measuredangle JBK = \beta$, $\measuredangle PBJ = \gamma$ $(\theta = \alpha + \beta + \gamma)$
טענה 4.3.2 : $\alpha = \beta = \gamma$

הוכחת טענה 4.3.2:

כפי שראינו בהוכחה לטענה 4.3.1 $\measuredangle NBM = \alpha$ ולכן $\alpha = \beta$.

כעת, נוכיח ש $\beta = \gamma$:

הקיפול בשלב 3 ממקם את נקודה B על נקודה E והנקודה G נמצאת על הקו שנוצר מקיפול זה. לכן, $BG = EG$ (ראה הערה לאקסיומה 2)

הקיפול בשלב 4 ממקם את נקודה B על נקודה M, את נקודה G על נקודה L ואת נקודה E על נקודה Q. במילים אחרות, בקיפול זה הקטעים BG ו- EG מועתקים על הקו OM ומסומנים ב- ML וב- QL בהתאמה. לכן, מתקיים: $BG = ML$ ו- $EG = QL$.

$BG = EG$ ולכן גם $QL = ML$.

נתבונן על ΔQBL ו $\Delta MBL -$:

$QL = ML$ (הוכחנו)

ראינו בהוכחה לטענה 4.3.1 ש $\measuredangle BLM = \measuredangle BLQ = 90^0$

$BL = BL$ (צלע משותפת).

$\leftarrow$

$\Delta MBL \cong \Delta QBL$ לפי משפט חפיפיה צלע.זווית.צלע

$\leftarrow$

$\measuredangle QBL = \measuredangle LBM$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים) כלומר, $\beta = \gamma$.

לכן, $\alpha = \beta = \gamma$

$\leftarrow$ ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים במערכת האוריגמי

מ.ש.ל

פרק 5- פעילות בכיתה

5.1 מערך הפעילות

מטרת הפעילות:

לבדוק את הבנת אקסיומות האוריגמי ואת היכולת של התלמידים להשתמש בהם ולהצדיק קיפולים בעזרתן.

אוכלוסיית יעד:

6 תלמידים בכיתה י״ב הלומדים בקבוצות של 4-5 יח״ל.

משך הפעילות:

שעה וחצי

מהלך הפעילות:

שלב א'

נציג לתלמידים את המושג אקסיומה:

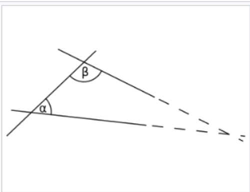
אַקְסִיּוֹמָה, **אמיתה**, או **הנחת יסוד** היא הנחה אשר מתייחסים אליה כנכונה וכמובנת מאליה. מקור המילה ״אקסיומה״ הוא מהיוונית העתיקה ופירושה ״עיקרון מובן מאליו״ שאינו מצריך הוכחה.

במתמטיקה ובלוגיקה אקסיומה היא הנחה בסיסית (או ״נקודת מוצא״) מסוימת, אליה מתייחסים כנכונה. השילוב בין מספר אקסיומות נקרא **מערכת אקסיומטית** האקסיומות של תורה מתמטית מהווה בסיס להוכחה של המשפטים הנכללים בתורה.

שלב ב'

נציג לתלמידים דוגמא לאקסיומה שהם מכירים- אקסיומת המקבילים:

אם שני ישרים ייחתכו על ידי ישר שלישי, באופן שסכום הזוויות הפנימיות שייווצרו באחד הצדדים קטן מסכום שתי זוויות ישרות, אזי אם יוארכו הישרים מספיק באותו צד הם ייפגשו.



"אם יוארכו הישרים מספיק באותו צד, הם ייפגשו"

נדון עם התלמידים על המשמעות של אקסיומה זו השייכת לגיאומטריה שהם מכירים – הגיאומטריה האוקלידית, ונחשוף אותם לכך שקיימות גם גיאומטריות אחרות שבהן אקסיומת המקבילים לא קיימת.

שלב ג'

נציג בפני התלמידים את תורת האוריגמי ואת מערכת האקסיומות של תורה זו:

עבור כל אקסיומה- נסביר את האקסיומה גם בעזרת איור וגם בעזרת קיפולי נייר.

בשביל להגביר את ההבנה של האקסיומות, עבור כל אקסיומה התלמידים יבצעו בעצמם קיפולי נייר המהווים דוגמא לשימוש באקסיומה .

שלב ד'

נציג לתלמידים את ההוכחה לכך שניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים בתורת האוריגמי (ההוכחה שניתנה לתלמידים איננה ההוכחה המלאה אלא הוכחה ידידותית יותר המהווה הוכחה עבור חלק מהזוויות) : התלמידים יקפלו (כל אחד בנפרד) בהנחייתי את הקיפולים על פי שלבי ההוכחה ויחלקו זווית אקראית לשלוש.

לאחר שהתלמידים יבינו את שלבי הקיפול המחלקים את הזווית הם יקבלו את דף הפעילות (ראה נספח) ויתבקשו לבצע בזוגות את "משימה 1" בה מופיעים שלבי הקיפול. התלמידים יצטרכו לקבוע עבור כל אחד משלבי הקיפול באיזה אקסיומות נעשה שימוש.

משימה זו נועדה לבחון את מידת ההבנה של התלמידים את האקסיומות.

שלב ה'

נבקש מהתלמידים לבצע בזוגות את "משימה 2" המופיעה בדף הפעילות (ראה נספח) בה התלמידים צריכים לבצע שלוש משימות קיפול באוריגמי תוך הצדקה של כל מהלך שלהם על ידי האקסיומות המתאימות.

המשימות בדף זה נבחרו להיות משימות קיפול פשוטות כי המטרה היא לבחון רק את היכולת של התלמידים להשתמש באקסיומות ולהצדיק בעזרתן את המהלכים שלהם.

5.2 ניתוח הפעילות:

בשלבים א-ג התלמידים הביעו עניין בנושא והופתעו לשמוע שאקסיומת המקבילים איננה מוכחת. קיימנו דיון בנושא והרחבתי מעט על הגיאומטריה הפרוייקטיבית ועל השימושים בה.

בשלב ד' כל תלמיד בחר זוויות שרירותית על דף בצורת ריבוע ועל ידי ביצוע קיפולים בהנחייתי חילק אותה לשלוש.

לאחר מכן, התלמידים ביצעו את "משימה 1" מדף הפעילות. טבלה 1 מציגה את תשובות התלמידים:

השלב בהוכחה	האקסיומה בה נעשה שימוש	זוג מספר 1	זוג מספר 2	זוג מספר 3
שלב 1	אקסיומה 1	✓	✓	✓
שלב 2	אקסיומה 4	☒ (אקסיומה 7)	✓	☒ (אקסיומה 7)
שלב 3	אקסיומה 2	✓	✓	✓
	אקסיומה 4	✓	☒ (אקסיומה 7)	✓
שלב 4	אקסיומה 6	✓	✓	☒ (אקסיומה 3)
שלב 5	אקסיומה 1	✓	✓	✓
שלב 6	אקסיומה 1	✓	✓	✓
שלב 7	אקסיומה 3	✓	✓	☒ (אקסיומה 6)

הערה: הסימון ✓ מתאר הצלחה בזיהוי האקסימה בה נעשה שימוש בשלב המתואר. הסימון מתאר ☒ טעות בזיהוי האקסיומה ובסוגריים מופיעה האקסיומה שבה התלמידים חשבו שנעשה שימוש.

טבלה 1

ניתוח הממצאים ממשימה מספר 1:

מהנתונים המוצגים בטבלה 1 ניתן לראות שכל התלמידים ידעו לזהות כאשר נעשה שימוש באקסיומות 1 ו- 2 (שלבים 1, 3, 5, 6). ייתכן והסיבה לכך שהתלמידים צדקו בזיהוי באופן מלא דווקא כשדובר על האקסיומות 1 ו- 2 היא הפשטות שבאקסיומות אלו- הן מבחינה אינטואיטיבית והן מבחינת הנוסח שלהן.

בנוסף, ניתן לראות שכל הזוגות עשו שימוש באקסיומה 7 במקום באקסיומה 4 בשלב מסוים (זוג מספר 1 וזוג מספר 3 בשלב 2 וזוג מספר 2 בשלב 3. ייתכן והסיבה לבלבול קשורה בעובדה ששתי האקסיומות עוסקות בהעברת קיפול מאונך לישר.

ממצא מעניין נוסף הוא שזוג מספר 3 עשה שימוש הפוך באקסיומות 3 ו- 6 : בשלב 4 בחרו להצדיק את הקיפול באמצעות אקסיומה 3 כאשר התשובה הייתה אקסיומה 6 ובשלב 7 בחרו להצדיק את הקיפול באמצעות אקסיומה 6 כאשר התשובה הייתה אקסיומה 3.

לסיכום, זוג 1 וזוג 2 הצדיקו את הקיפולים על פי האקסיומה המתאימה ב- 87.5% מהמקרים. זוג 3 הצדיק את הקיפולים על פי האקסיומה המתאימה ב 62.5% מהמקרים.

ממצאים אלו מעידים על הבנה טובה של אקסיומות 1 ו 2 אצל כל התלמידים והבנה חלקית (ברמות שונות) של שאר האקסיומות.

בשלב ה' התלמידים התבקשו לבצע את משימה 2.

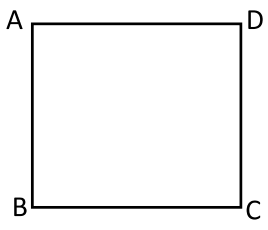
טבלה 2 מציגה את עיקרי התוצאות :

	זוג 1		זוג 2		זוג 3	
	הצלחה בקיפול	הצלחה בהתאמת האקסיומות	הצלחה בקיפול	הצלחה בהתאמת האקסיומות	הצלחה בקיפול	הצלחה בהתאמת האקסיומות
סעיף א' : יצירת משולש שווה שוקיים	✓	✓ (שימוש באקסיומה 1)	✓	✓ (שימוש באקסיומה 1)	✓	✓ (שימוש באקסיומה 1)
סעיף ב' : חלוקה של הדף לארבע ריבועים חופפים	✓	הצדקה שגויה	✓	הצדקה שגויה	✓	הצדקה שגויה
סעיף ג' : חציית זווית θ אקראית	✓	הצדקה שגויה	✓	הצדקה חלקית	✓	לא הצליחו להצדיק

הערה : הסימון ✓ מתאר הצלחה בחלק המתואר.

טבלה 2

ניתוח הממצאים ממשימה מספר 2 :



יצירת משולש שווה שוקיים-

מטבלה 2 ניתן לראות שכל הזוגות הצליחו ליצור משולש שווה שוקיים על ידי שימוש באקסיומה 1 – הם קיפלו את הקפל העובר דרך שתי נקודות שהן קודקודים שך זוויות נגדיות של הריבוע (לדוגמא את הקו המחבר בין נקודה A ונקודה C) ויצרו משולש שווה שוקיים אשר שוקיו שוקי הריבוע.

חלוקה של הדף לארבעה משולשים חופפים-

גם במשימה זו כל הזוגות הצליחו לבצע בקלות חלוקה של הדף לארבע ריבועים חופפים. כולם ביצעו זאת על ידי שימוש כפול באקסיומה 3- הם קיפלו את הקיפול הממקם את הקו AB על הקו CD ואת הקיפול הממקם את הקו AD על גבי הקו BC. אמנם התוצאה היא נכונה אך הבעיה

בביצוע המשימה באופן זה הוא שאין בקיפול זה בכדי להוכיח שאכן נוצרו ארבעה ריבועים חופפים- אין בתהליך זה הוכחה שהקווים שנוצרו מהקיפולים אכן מאונכים לצלעות הריבוע ושכל צלעות הריבועים החדשים שנוצרו אכן שוות.

שימוש נכון באקסיומות היה למצוא את אמצע הקטע AD (או BC) על ידי שימוש באקסיומה 2 ולאחר מכן להעביר אנך העובר דרך אמצע הקטע על ידי שימוש באקסיומה 4. לאחר מכן לבצע את אותן פעולות על הקטע AB (או DC). חשוב לציין שהתלמידים ראו את הטכניקה המתוארת במשימה 1 בשלב 3 ובכל זאת לא השתמשו בה בחלק זה.

חציית זווית θ אקראית-

במשימת חציית הזוויות כל הזוגות הצליחו לחצות את הזווית על ידי ביצוע כפל הממקם קרן אחת של הזווית על גבי הקרן השנייה (אקסיומה 3) אך הנימוקים מדוע הקיפול שביצעו אכן חצה את הזווית השתנו מזוג לזוג:

זוג 1 טען ש "לא ברור באיזה אקסיומה משתמשים פה". לבסוף החליט שמדובר באקסיומה 4 .

זוג 2 טען כי "זאת אקסיומה 3 אבל לא ברור איך להוכיח שזה באמת חוצה את הזווית..".

זוג 3 שלא הצליח להצדיק את הקיפול שביצע הסביר: "הצלחנו לבצע את הקיפול בדיוק איך שביקשו אך התקשינו להצדיק את זה על ידי האקסיומות מכיוון שהרבה אקסיומות דומות אחת לשנייה וזה בלבל".

5.3 ממצאי הפעילות

- ממצאי המחקר מראים כי כל התלמידים הביעו הבנה של אקסיומה 1 ואקסיומה 2.
- ברוב הסעיפים התלמידים הביעו הבנה טובה אך לא מלאה של שאר האקסיומות.
- כל התלמידים הצליחו ליישם את השימוש באקסיומה 1 (משימה 2 סעיף א').
- התלמידים התקשו ליישם ולהשתמש באקסיומות האחרות והתקשו להצדיק את הקיפולים שביצעו בעזרתן.

ביבליוגרפיה

Fraleigh, John B (2003). A First Course in Abstract Algebra. 7th ed. Pearson, Upper Saddle River.

Hatori, K. (n.d). *History of origami.* Retrieved Juner, 2020, from k's origami: http://origami.ousaan.com/library/historye.html

Huzita, Y. (n.d). *Centro diffusione origami.* Retrieved Juner, 2020, from: http://www.origamicdo.it/articoli/yoshizawahuzita.htm

Newton, L. (2009). *The power of origami.* Retrieved from: https://plus.maths.org/content/power-origami

Origami resource center. (2009). *History of origami.* Retrieved Juner, 2020, from: http://www.origami-resource-center.com/history-oforigami.html

בן-ארי, מ. (2019).בניות מפתיעות עם סרגל ומחוגה. נדלה מאתר:
https://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/mathematics#surprising

גינצבורג, א. (2001). הרחבת שדות ותורת גלואה. האוניברסיטה הפתוחה.

נספח

דף פעילות לתלמיד בנושא אקסיומות של אוריגמי

משימה 1:

לפניכם שלבי הקיפול המחלקים זווית לשלוש באוריגמי. בכל שלב, נמקו איזו אקסיומה מצדיקה את הקיפול המוצג.

הערה: הטענה שלפניכם היא שעל ידי שלבי קיפול המוצגים הזווית מתחלקת לשלוש אך לא מוכיחים זאת. כדי להוכיח שהזווית אכן חולקה לשלוש דרושה הוכחה נוספת (ניתן לבקש את ההוכחה בסיום הפעילות).

חלוקה של זווית לשלוש באוריגמי

נראה כיצד ניתן לחלק זווית לשלוש באמצעות אוריגמי.

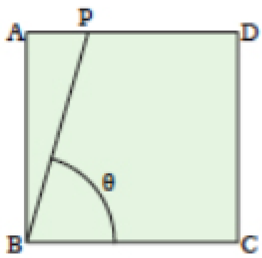
שלב 1:

ניקח דף בצורת ריבוע (ABCD ריבוע). נסמן נקודה P אקראית על הקו AD ונקפל את הקיפול העובר דרך נקודה B ונקודה P (אקסיומה ____).

נסמן את הזווית שנוצרה בין הקו BP והקו BC ב- θ.

נוכיח שניתן לחלק את θ לשלושה חלקים שווים[4].

(איור 1)



איור 1

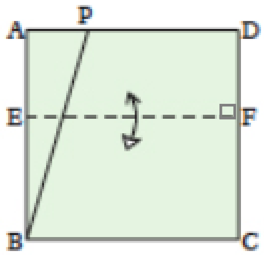
שלב 2:

נסמן נקודה E אקראית על הקו AB. נקפל קיפול העובר דרך E ומאונך לקו DC (אקסיומה ____).

נפרוש את הדף בחזרה.

נסמן את הקו שנוצר מהקיפול ב- EF כמתואר באיור 7.

הערה: $BC \,||\, EF$ (מדוע?)

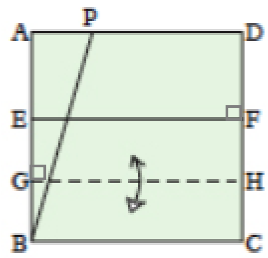


איור 2

---

[4] θ זווית אקראית- ניתן לבצע את השלבים הבאים על כל זווית θ שנבחר, $0^0 \le \theta \le 90^0$. הוכחות נוספות קיימות עבור זוויות שגודלן גדול מ- 90^0.

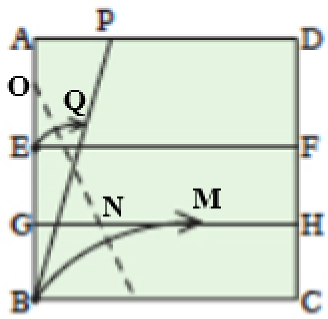
שלב 3:
נקפל את הקיפול הממקם את נקודה B על גבי נקודה E (אקסיומה _____).
נסמן את הנקודה שבה הקיפול שנוצר חותך את הקו AB ב-G.
נקפל את הקיפול המאונך לקו AB והעובר דרך הנקודה G (אקסיומה _____).
נפתח את הדף בחזרה ונסמן את הקו שנוצר מהקיפול ב- GH כמתואר באיור 3.
הערה: $GH \parallel BC$ (מדוע?)



איור 3

שלב 4:
נקפל את הקיפול שממקם את נקודה B על גבי הקו GH ואת נקודה E על גבי הקו BP (אקסיומה _____), כמתואר באיור 4.

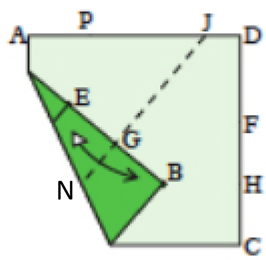
נסמן את הנקודה שעל גביה ממוקמת נקודה E ב- Q ואת הנקודה שעל גביה ממוקמת נקודה B ב- M.
בנוסף, נסמן את הנקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו AB ב- O ואת הנקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו GH ב- N.



איור 4

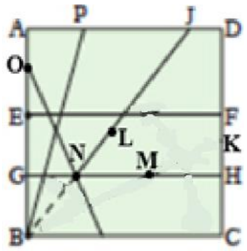
שלב 5:
נקפל קיפול נוסף (מבלי לפתוח את הקיפול משלב 4) ונקפל את הקפל העובר דרך נקודה N ונקודה G (אקסיומה _____).

נסמן הנקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו AD ב- J ואת הנקודה שעל גביה ממוקמת נקודה G ב- L .



איור 5

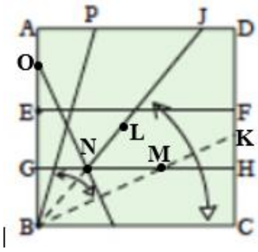
שלב 6:
נפרוש בחזרה את הדף.
נקפל את הקיפול העובר דרך נקודה N ונקודה B (אקסיומה _____) ונסמן את הקו הנוצר מהקיפול ב BN
נפרוש את הדף .



איור 6

טענה:
הקו BN והקו LN נמצאים על ישר אחד.
(ניתן לקבל הוכחה לכך בסיום הפעילות)

שלב 7:
נקפל את הקיפול שממקם את הקו BC על גבי הקו BN (אקסיומה _____).
נפרוש את הדף ונסמן את קו שנוצר מהקיפול ב- BK (כאשר K היא נקודה שבה הקו שנוצר מהקיפול חותך את הקו DC) כמתואר באיור 7.



איור 7

טענה: $\measuredangle PBJ = \measuredangle JBK = \measuredangle KBC$

משימה 2:

לפניכם דף בצורת ריבוע.

בכל אחד מהסעיפים, עליכם לנסות לבצע את הקיפול הנדרש **תוך הצדקה של כל צעד שלכן בעזרת אקסיומות האוריגמי**. נמקו את תשובותיכם.

א. צרו משולש שווה שוקיים.
ב. חלקו את הדף לארבע ריבועים חופפים.
ג. סמנו זווית θ כלשהי . חצו את הזווית.