מסתבר שלא כל כך קשה
לפתור בעיות בהסתברות

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

במסמך זה ננתח את השאלות על סדרות בבחינות הבגרות, שאלון 806. נחפש תבניות המופיעות בשאלות ונצביע על דרכים לפתרונן. בסוף המסמך רשמתי המלצות למתמודד עם סדרות.

חורף תשע"ח

3. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3.

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א. נתון הסיכוי של מיכל לנצח שיקרה אם מיכל מטילה 4 (לא משנה מה גלית מטילה), או אם מיכל מטילה 2 וגלית מטילה 1. נסמן ב־n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1. המשוואה לניצחון של מיכל היא:

$$\frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12}\,.$$

הפתרון של המשוואה הוא $n=1$.

סעיף ב. גלית תנצח אם היא תנצח ב־$3,4,5$ סיבובים. לפי נוסחת ברנולי ההסתברות היא:

$$\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג. השאלה דומה לשאלה בבחינה של **חורף תשע"ז**. את החישוב נעשה בדרך שונה המשתמשת בעובדה ההטלות הקוביה בלתי תלויות אחת מהשנייה:

$$P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון / גלית תנצח})=$$

$$\frac{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})\cdot P(\text{גלית תנצח בשנים מתוך ארבעה סיבובים אחרונים})}{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})}\,.$$

לאחר צימצום, התשובה היא:

$$\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2=0.5534\,.$$

קיץ תשע"ח, מועד א

3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

כאשר שני אירועים שונים מופיעים בשאלה נבנה טבלה כדי להציג את ההסתברות של כל אירוע וההסתברות של כל חיתוך של האירועים.

נסמן ב־N את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב־A את התלמידים שעברו את המבחן. נתון ש־$P(N) = 0.37$, וש־$P(A/N)$. נחשב:

$$P(A/N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{P(N \cap A)}{0.37} = \frac{35}{37}, \qquad P(N \cap A) = 0.35\,.$$

עד כאן הטבלה של ההסתברויות היא:

	$\boldsymbol{A}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{N}$	0.35	0.02	0.37
$\overline{\boldsymbol{N}}$			0.63
			1.0

בהמשך נתון ש־

$$P(\overline{N} \cap \overline{A}) = \frac{P(N \cap A)}{5} = \frac{0.35}{5} = 0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

בעזרת הטבלה ניתן למצוא את התשובות לשאלות.

סעיף א.

$$P(N/\overline{A}) = \frac{N \cap \overline{A}}{\overline{A}} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב. עבור יעל:

$$P(A/N) = \frac{A \cap N}{N} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459\,,$$

ועבור הדס:

$$P(A/\overline{N}) = \frac{A \cap \overline{N}}{\overline{N}} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889\,.$$

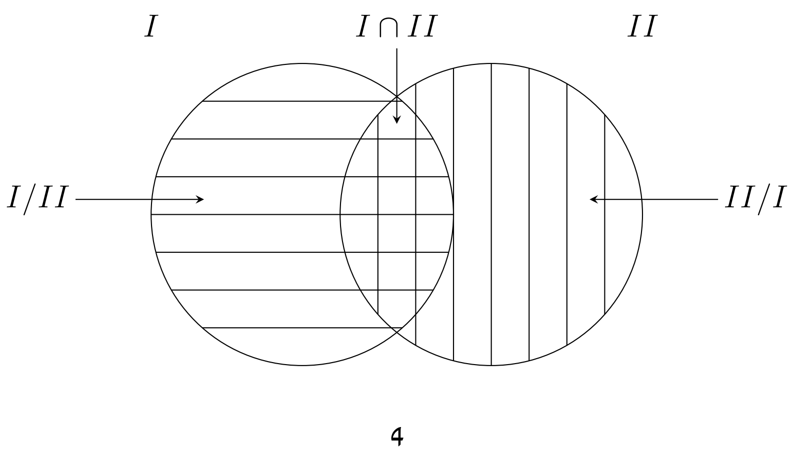
ליעל סיכוי טוב יותר לעבור את המבחן.

$$P(N/\overline{A}) = \frac{N \cap \overline{A}}{\overline{A}} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ג. שליש משש הוא שניים. (שימו לב לא ליפול למלכודת ולקרוא "שלושה" במקום "שליש"!)
החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך של $P(\overline{N} \cap A)$ נמצא בטבלה:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(0.44)^4 = 0.1763\,.$$

סעיף ד. הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I,II" אומר שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**. באיור להלן שני המעגלים מייצגים את שני האירועים I ו־II. האירוע "לחות אחד משניהם" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו.



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות:

$$
\begin{aligned}
P(I \cup II) &= P(I) + P(II) - P(I \cap II) \\
P(I \cup II) &= P(I/II) + P(II/I) - P(I \cap II)\,.
\end{aligned}
$$

בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים ואז מחסירים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II. בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד.

את ההסתברויות לחישוב $P(N \cup \overline{A})$ ניקח מהטבלה, ואין הבדל מהותי בין שתי הדרכים. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{A}$	A	
$\boxed{0.37}$	$\boxed{0.02}$	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	$\boxed{0.09}$	0.91	

	$\overline{A}$	A	
0.37	$\boxed{0.02}$	$\boxed{0.35}$	N
0.63	$\boxed{0.07}$	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$
\begin{aligned}
P(N \cup \overline{A}) &= P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44 \\
P(N \cup \overline{A}) &= P(N/\overline{A}) + P(\overline{A}/N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,.
\end{aligned}
$$

קיץ תשע"ח, מועד ב

.3 במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, <u>אינה</u> נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k . נמק.

סעיף א (1). שחר ידע שהוא ענה על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיוק אחת** משלושת השאלות האחרות, שניתן לחישוב על ידי נוסחת ברנולי:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

סעיף א (2). כדי לעבור את המבחן עליו לצבור **לפחות שלוש** תשובות נכונות. לכן, עלינה להוסיף את ההסבתרויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב. כמו שחר, דניאל צירך לענות נכון על שאלה אחת **בדיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל יודע שתשובה אחת מתוך ארבע לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא יענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$. לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג. אם הדס יודעת ש־k מתוך 4 תשובות לא נכונות, מספר התשובות שמהן היא בוחרת באקראי הוא $4-k$. הסיכוי לענות תשובה נכונה היא $\frac{1}{4-k}$ וסיכוי לענות תשובה לא נכונה היא $\frac{4-k-1}{4-k}$ כי אם תשובה אחת מתוך $4-k$ נכונה, כל שאר התשובות לא נכונות.

כדי לקבל ציון 100 ברור שהיא צריכה לבחור תשובות נכונות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בדיוק** 60 עליה לבחר תשובות לא נכונות לשתי השאלות הנותרות. החישוב הוא פשוט לפי מכפלת הסתברויות של אירועים בלתי תלויים:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 &= \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2\\ (3-k)^2 &= 1\\ k^2-6k+8 &= 0\,.\end{aligned}$$

הפתרונות של המשוואה הם $k=2, k=4$ אבל נתון ש־"אחת מהן נכונה", לכן הפתרון האפשרי היחיד הוא $k=2$.

חורף תשע"ז

3. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P>0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל־ P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א. נשתמש בנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 &= 3p^5\\ 5(1-p) &= 3p\\ p &= \frac{5}{8}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב. ההסתברות ל־$3,4,5$ פגיעות היא:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)^1+\binom{5}{5}p^5(1-p)^0$$

נציב את $p=\frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1). מצאתי שניסוח השאלה לא בהיר. אני פירשתי אותה: מה ההסתברות של **האירוע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנת: "**אם ידוע ש־**אביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"?

$$=P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה/אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)$$

$$\frac{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השנייה ופגעה שלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}$$

שימו לב שהסתברות במנה היא נכונה לפי הפירוש שלי, וכדי לקבל את הפירוש הרשמי נחלק אותה בהסתברות להחטאה $\frac{3}{8}$. ההסתברות מורכבת משני גורמים. הראשון הוא ההסתברות של האירוע: "לא משנה מה יצאה מהזריקה הראשונה, הזריקה השניה החטיאה, ושלושת הזריקות האחרונות פגעו". הגורם השני הוא ההסתברות של האירוע: "הזריקה הראשונה פגעה, הזריקה השניה החטיאה, ושתיים מתוך שלושת הזריקות האחרונות פגעו":

$$1\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^3 \quad + \quad \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\left[\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{3}{8}\right]=\frac{375}{4096}+\frac{3375}{32768}=0.1945\,.$$

נחלק ב־$\frac{3}{8}$ ונקבל את התשובה 0.5188.

סעיף ג (2). שאלה זו זהה לשאלה בתת־סעיף הקודם. לא משנה איזו זריקה החטיאה, ההסתברות של האירוע היא 0.1945 וכאשר מפרשים לפי הסתברות מותנית יש לחלק ב־$\frac{3}{8}$.

קיץ תשע"ז, מועד א

3. בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א. נסמן ב־D את האירוע "דייר עם קלנועית" ואת ההסתברות של האירוע ב־p. כאשר מבקשים **בדיוק** את כמות ה־"הצלחות" k מ־n בחירות אקראיות, נשתמש בנוסחת ברנולי:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,,$$

כאן:

$$P_9(4) = \binom{9}{4} p^4 (1-p)^5 = 24 P_9(6) = 24 \binom{9}{6} p^6 (1-p)^3 \,.$$

נפשט את המשוואה ונקבל משוואה ריבונית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0 \,,$$

שיש לה שני פתרונות $p = \frac{1}{5}, -\frac{1}{3}$. ההסתברות לא יכולה להיות שלילית ולכן התשובה היא $p = \frac{1}{5}$.

סעיף ב. המילה **ידוע** מכוונת אותנו להסתברות מותנת:

$$P(D = 4 / D \geq 3) = \frac{P(D = 4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)} \,.$$

כאשר יש חפיפה בין ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותו. ברור שאם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל־4, אז הוא שווה ל־4.

$$P(D = 4 / D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)} \,.$$

את הערך של $P(D = 4)$ נחשב לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{6}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 = 0.01536 \,.$$

את הערך של $P(D \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה או כאחד פחות המשלים:

$$\begin{aligned} P(D \geq 3) &= P(D = 3) + P(D = 4) + P(D = 5) + P(D = 6) \\ 1 - P(D \geq 3) &= 1 - P(D < 3) = 1 - (\, P(D = 0) + P(D = 1) + P(D = 2) \,) \,. \end{aligned}$$

נבחר את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים בביטוי:

$$1 - 0.8^6 - \binom{6}{1} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^5 - \binom{6}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^4 = 0.099 \,,$$

והתשובה היא $0.15534 = \frac{0.01536}{0.099}$.

סעיף ג. מפסיקים את הבחירה כאשר יש בדיוק שלושה דיירים עם קלנועית. מכאן שהבחירה **האחרונה** היא "הצלחה" ויש שתי "הצלחות" נוספות בחמשת הבחירות הקודמות:

$$\overbrace{\pm \;\pm \;\pm \;\pm \;\pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1} \,.$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 \;\cdot\; 0.2 = 0.04096 \,.$$

קיץ תשע"ז, מועד ב

3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

הביטוי **מוציאים באקראי** ואחר כך **שוב מוציאים באקראי** מכוון אותנו לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית. נסמן ב־A את מספר הכדורים האדומים בקופסה I.

באיור 1, בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I, ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II. הכוכבית מסמנת את שתי האפשרויות בהן הוצאנו כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. שימו לב שמספר הכדורים הכחולים בכל אחת המקופסאות לא משתנה. נשווה את הסתברות הנתונה לשתי האפשרויות לסכום ההסתברויות של שני המסלולים:

$$\frac{A}{10}\cdot\frac{10-A}{9}+\frac{10-A}{10}\cdot\frac{A}{10}=\frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $x^2-10a+25=0$ שיש לה פתרון אחד $a=$, שהוא גם מספר הכדורים הכחולים וגם מספר הכדורים האדומים בקופסה I.

סעיף ב. עבור כל מצב סופי, ההסתברות להוציא כדור אדום מקופסה II הוא מספר הכדורים האדומים בקופסה לחלק למספר הכדורים בקופסה:

$$\frac{5}{5+7},\ \frac{4}{4+7},\ \frac{4}{4+7},\ \frac{3}{3+7}\,.$$

כדי לקבל את ההסתברות לכל המצבים, נסכם את ההסתברויות אלו לאחר הכפלתן בהסתברות להגיע למצב:

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{12}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}=0.3595\,.$$

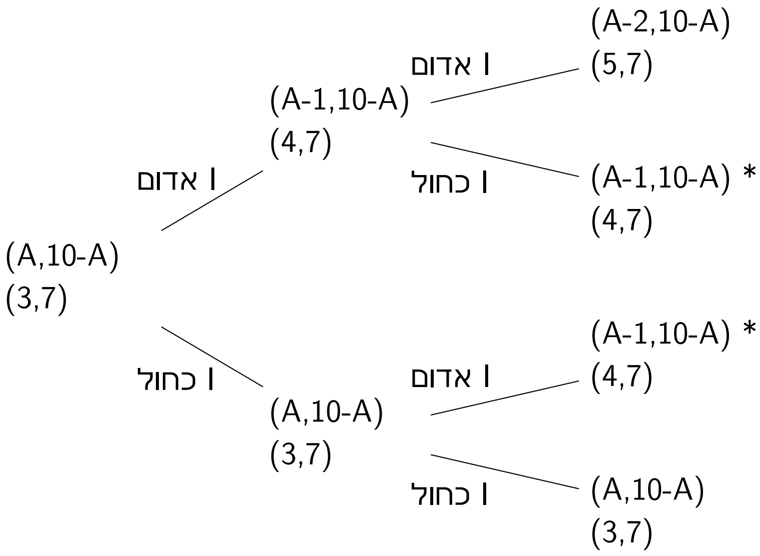


Figure 1: עץ ההסתברויות של הוצאת הכדורים

סעיף ג. המילה **ידוע** מכוון להסתברות מותנת. אם רואים באיור שיישארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו אברעה כדורים אדומים לפני הבחירה, כלומר, אותם שני מצבים המסומנים כוכבית.

$$P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II}/\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II}) =$$

$$\frac{P(\text{הוציאו כדיר אדום מקופסה II} \cap \text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II})}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})}$$

ההסדברות במנה היא ההסתברות (הנתונה!) שנגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II, וההסתברות במכנה חישבנו בסעיף ב. התשובה היא:

$$\frac{\frac{19}{36} \cdot \frac{4}{11}}{0.3595} = 0.53385\,.$$

חורף תשע"ו

3. במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.
דן משחק 5 משחקים במכונה זו.
ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות
שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.
(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)
ההסתברות שדן <u>לא</u> יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.
מהי ההסתברות שהוא <u>לא</u> זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

נתון שיש שלוש אפשרויות עבור זכיה במשחק ולכן יש שלוש הסתברויות שסכומן אחד:

$$P(0) + P(50) + P(100) = 1\,.$$

סעיף א. ההסתברות שדן לא זכה באף אחד מחמישה משחקים היא $P(0)^5$. נתון שהערך הזה הוא $\frac{1}{32}$, ולכן $P(0) = \frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}\binom{5}{2} P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1} P(50)(1-P(50))^4\\ P(50) &= \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב. מייד מתקבל $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

סעיף ג. **ידוע כי** מכוון להסתברות מותנת:

$$P(\text{לא זכה ב־50 באף משחק}/\text{זכה ב־100}) =$$

$$\frac{P(\text{זכה ב־100} \cap \text{לא זכה ב־50 באף משחק})}{P(\text{זכה ב־100})}\,.$$

נתבונן בעץ המציג את תוצאות שני המשחקים (איור 2). הסימן $=$ מסמן שדן זכה ב־100, והסימן $\neq$ מסמן שדן לא זכה ב־50 באף אחד משני המשחקים. חישוב ההסתברות המותנת:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}\,.$$

קיץ תשע"ו, מועד א

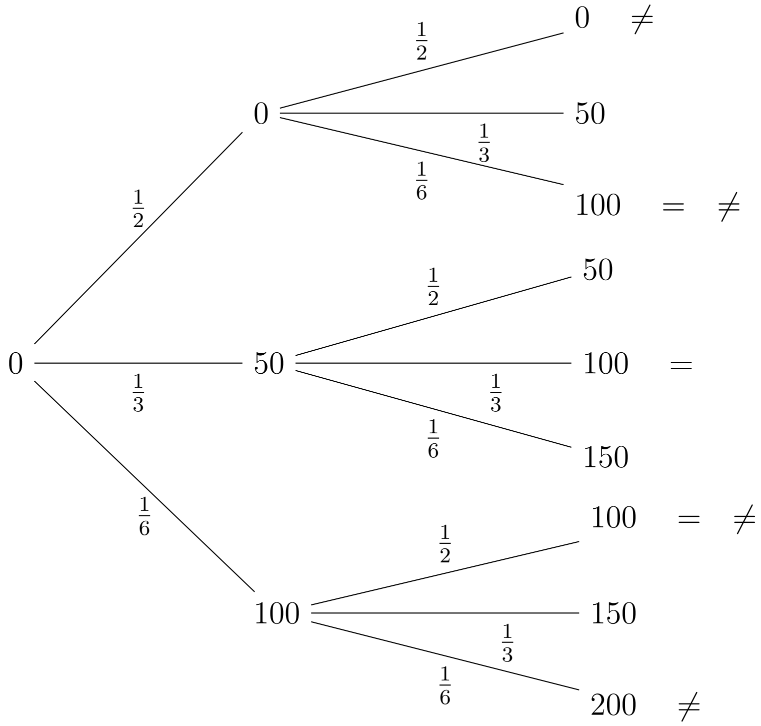


Figure 2: עץ ההסתברויות של המשחקים

3. במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.
40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.
70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.
$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.
ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה
פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.
מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?
(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן $S =$ נבחנים שהצליחו, $K =$ נבחנים מקיבוצים, $M =$ נבחנים ממושבים, $E =$ נבחנים מערים, $p = P(K \cap S)$, ההסתברות שנבחנים מקיבוצים הצליחו במבחן. ההסתברויות $P(K), P(M), P(E)$ נתונות, כמו גם ההסתברות של $P(S)$, ולכן $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$. לבסוף, נתונה ההסתברות $P(M \cap \overline{S})$, והיחס $P(E \cap S) = 2.5P(K \cap S)$. נסכם את המידע הנתונה בטבלה:

	E	***M***	***K***	
0.70	$2.5p$	0.35	p	$\boldsymbol{S}$
0.30		0.05		$\overline{\boldsymbol{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

נכתוב את המידע בשורה עבור S כמשוואה:

$$\begin{aligned} p + 0.35 + 2.5p &= 0.70 \\ p &= 0.1\,. \end{aligned}$$

כעת ניתן למלא את הטבלה:

	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{K}$	
0.70	0.25	0.35	0.10	$\boldsymbol{S}$
0.30	0.15	0.05	0.10	$\overline{\boldsymbol{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

סעיף א. לפי הנוסחה להסתברות מותנת:

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K \cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K \cap \overline{S}) + P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1). לפי הנוסחה להסתברות מותנת:

$$P(\overline{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2). "לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל־"כולם לא מהמושב":

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

קיץ תשע"ו, מועד ב

3. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.
יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.
ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים
או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.
ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

סיכום

- **קרא בזהירות את השאלה.**

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות וגם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבחינה של **קיץ תשע"ח ב** כאשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמש, אז ההסתברות לקבל שני "כשלונות" צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי "הצלחות".

- שימו לב לניסוחים המכוונים להסתברות מותנת:

  – בבחינה של **חורף תשע"ז** סעיף ג (1) כתוב "**אם** ... , **מהי ההסתברות** ...". לא לגמרי ברור שלמילה אם יש משמעות של אם ידוע, אבל זאת הכוונה.

  – הניסוח בבחינה של **קיץ תשע"ז א** סעיף ב ברור יותר: **אם** ... , **מהי ההסתברות** ...".

- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנת, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישב. בבחינה של **קיץ תשע"ז א** יש לחשב $P(D=4\cap D\geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל־4, אז הוא שווה ל־4, ולכן מספיק לחשב $P(D=4)$.

- בבחינה של **קיץ תשע"ז א** סעיף ג כתוב: "בוחרים באקראי ...,. **עד של־** 3 מהם בדיוק יש קלנועית". מהמילים "עד ש־" אפשר להבין שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה יש שתי "הצלחות" שיש לחשב את ההסתברות לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של "הצלחה" בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad\overbrace{+}^{1/1}\ .$$

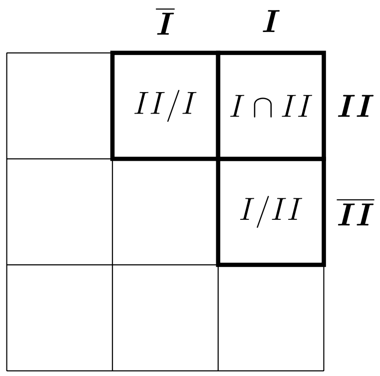
דרך אחרת לחשב שאלות מסוג זה הודגמה בסעיף ג של הבחינה של **חורף תשע"ח**, שם השתמשנו בעובדה שהטלות הקוביה הן בלתי תלויות ולכן ההסתברות של ההטלה הראשונה מצטמצמת בחישוב ההסתברות המותנית.

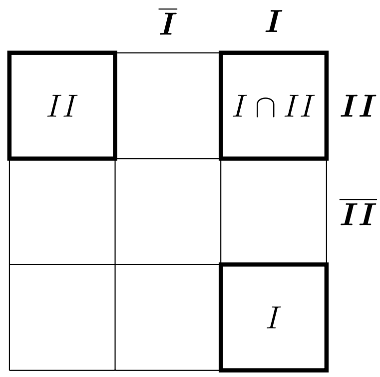
- בבחינה של **קיץ תשע"ז ב** הביטוי "**מוציאים באקראי**, ...", ובהמשך הביטוי "**שוב מוציאים באקראי** ..." מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- כאשר יש שני אירועים בשאלה אפשר לסדר את ההסתברויות בטבלה המקילה על הבנת היחסים ביניהם כגון אירוע משותף או משלים לאירוע. הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I,II" אומר שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**, המסומן $I\cup II$. יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני האירועים וחיסור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני.

$$\begin{aligned}P(I\cup II) &= P(I)+P(II)-P(I\cap II)\\ P(I\cup II) &= P(I/II)+P(II/I)-P(I\cap II)\,.\end{aligned}$$

הערכים לחישוב $P(I\cup II)$ בשתי הדרכים מסומנים בטבלה להלן:





- בבחינה של **חורף תשע"ו** נתון ההסתברות p ש-"לא יזכה **באף משחק** M מתוך n משחקים". נוכל לחשב את ההסתברות של זכייה בכל אחד מהמשחקים על ידי הוצאת שורש מ-$P(M)^n = p$. מצב דומה יקרה אם נתון שהיתה זכייה **כל** המשחקים.