איך לעשות טריגונומטריה (כמעט) בלי לשנן בעל פה

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci¯tea/benari/

אני מודה לאביטל אלבוים כהן ורונית בן־בסט לוי על הערותיהן המועילות.

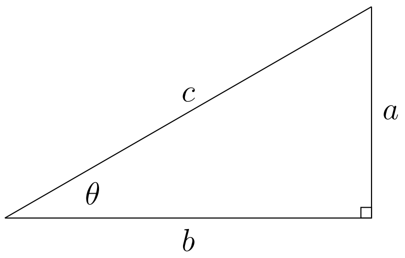
1 מבוא

טריגונומטריה מאפשרת הסקת תוצאות גיאומטרית תוך שימוש בחישובים אלגבריים. לתלמידים, טריגונומטריה יכולה להיראות כאוסף של נוסחאות סתמיות שיש לזכור בעל פה. מטרת מסמך זה להראות שניתן לשחזר נוסחאות טריגונומטריות ופונקציות טריגונומטריות על יד חשיבה גיאומטרית עם מעט מאוד שינון בעל פה.

בנספחים מופיעים הוכחות לחוק הסינוסים ולחוק הקוסינוסים. הנוסחאות קלות לשינון אבל כדאי לראות כמה קל להוכיח אותם תוך שימוש בעובדות גיאומטריות בלבד.

2 הגדרות בסיסיות

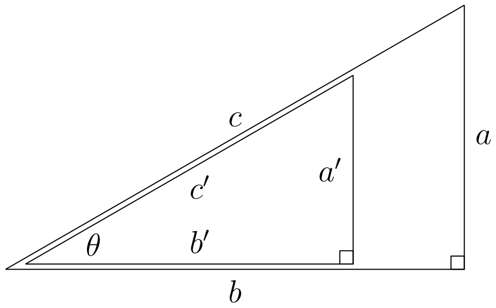
אין ברירה אלא להתחיל עם ההגדרות שיש ללמוד בעל פה. במשולש ישר־זווית:



הסינוס והקוסינוס מוגדרים כיחס בין הצלעות והיתר:[1]

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}\,.$$

את היחסים ניתן לבטא: "סינוס הוא הניצב מול היתר חלקי היתר" ו־"קוסינוס הוא הניצב ליד היתר חלקי היתר".
הפונקציות הטריגונומטריות מוגדרות על הזווית בלבד ואינן תלויות בגודל המשולש. נתון שני משולשים עם אותן זוויות:



מהדמיון בין המשולשים מתקבלות הנוסחאות:

$$\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}\,,$$

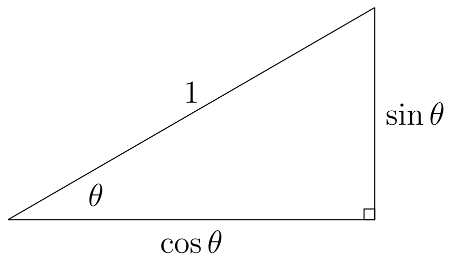
ומכאן:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \sin\theta$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos\theta\,.$$

הדמיון מאפשר לבחור צלע אחד באופן שרירותי, ונקל על עצמנו אם נקבע שאורך היתר הוא 1:

[1] לא נדון בטנגנס. מההגדרה $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$, הנוסחאות לטנגנס מתקבלות מאלו של סינוס וקוסינוס.

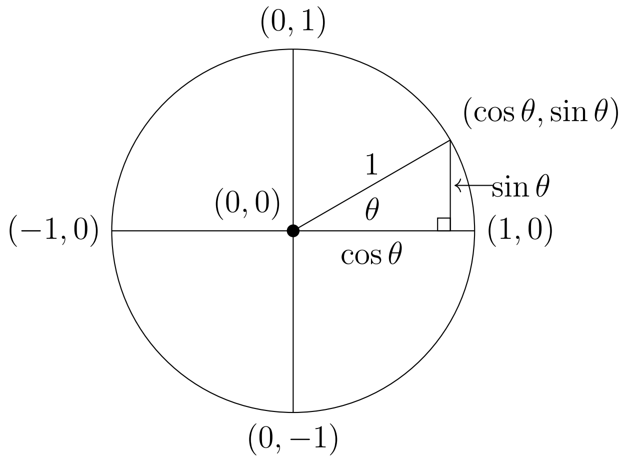


המכנה של יחסים של סינוס וקוסינוס הוא 1 וניתן להתעלם ממנו. ערכי הפונקציות $\sin\theta$ ו $\cos\theta$ הם האורכים של הצלעות במשולש. ממשפט פיתגורס מתקבלת הנוסחה:

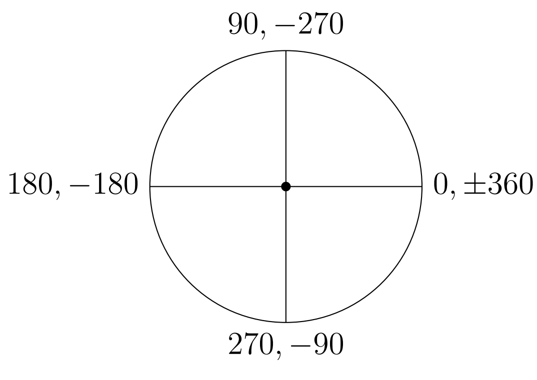
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1^2 = 1\,.$$

3 מעגל היחידה

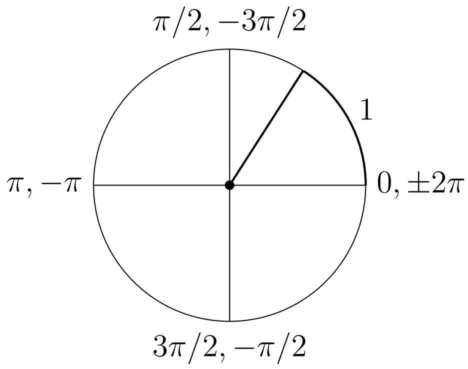
קביעת אורך היתר ל 1 מאפשרת להציג טריגונומטריה במסגרת של **מעגל היחידה** במערכת הצירים של המישור. הערכים של $\cos\theta$ ו $\sin\theta$ הם לא רק אורכי הצלעות של המשולש, אלא גם הקואורדינטות $(\cos\theta, \sin\theta)$ של החיתוך בין הקרן ממרכז המעגל למעגל:



היחידה של זווית היא ה־**מעלה**. במעגל מודדים זוויות נגד כיוון השעון החל מציר ה־x החיובי. במעגל 360 מעלות (מסומן $360°$). הצירים של המרחב הקרטזי מחלקים את מעגל היחידה באופן טבעי לארבעה **רבעים**:



יחידה אחרת לזווית היא ה־**רדיאן**. רדיאן אחד הוא הזווית כולאת קשת על היקף המעגל שאורכו שווה לרדיוס. במעגל היחידה הרדיוס הוא 1 ולכן אורך ההיקף הוא 2π. כאשר קרן מסתובבת לאורך כל ההיקף (נגד כיוון השעון) היא עוברת מזווית 0 רדיאנים לזווית 2π רדיאנים:

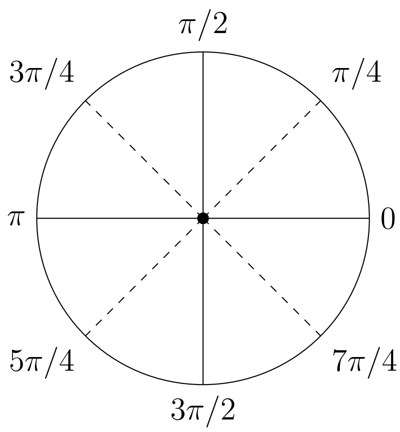


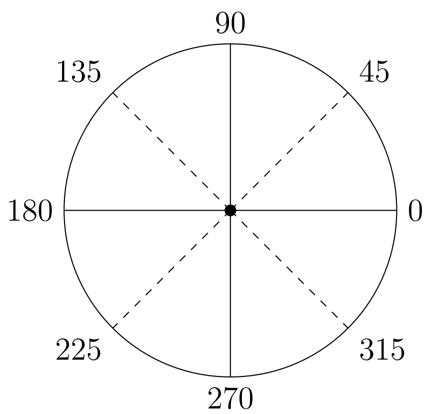
רדיאן אחד שווה בערך 57.3 מעלות.
מהקואורדינטות של החיתוכים של הצירים x, y עם מעגל היחידה נקבל את ערכי הסינוס והקוסינוס של הזוויות:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
90	$\pi/2$	1	0
180	π	0	-1
270	$3\pi/2$	-1	0

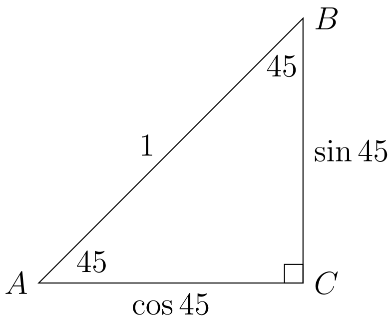
4 חלוקת מעגל היחידה ל 8 קטעים

ראינו שהצירים מחלקים את מעגל היחידה ל־4 רבעים. כדאי גם לבדוק את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות כאשר מחלקים את המעגל ל־$6, 8, 12$ קטעים. תחילה נחלק כל רבע בחצי כדי לקבל 8 קטעים, כאשר הזווית של כל קטע הוא 45° או $\pi/4$ רדיאנים:





מה הם ערכי הסינוס והקוסינוס של 45°? במשולש:

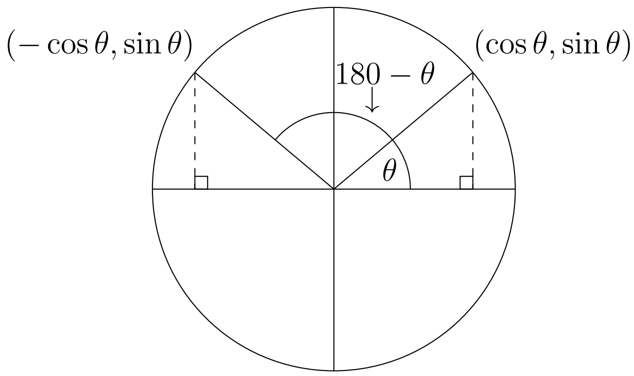


אם הזווית $\angle BAC$ הוא $45°$, הזווית הנגדית $\angle ABC$ חייבת להיות גם היא $45°$ כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה $180°$. המשולש שווי־שוקיים כך שערכי הסינוס והקוסינוס שווים. ממשפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\sin^2 45 + \cos^2 45 &= 1\\
2\sin^2 45 &= 1\\
\sin 45 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos 45 &= \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

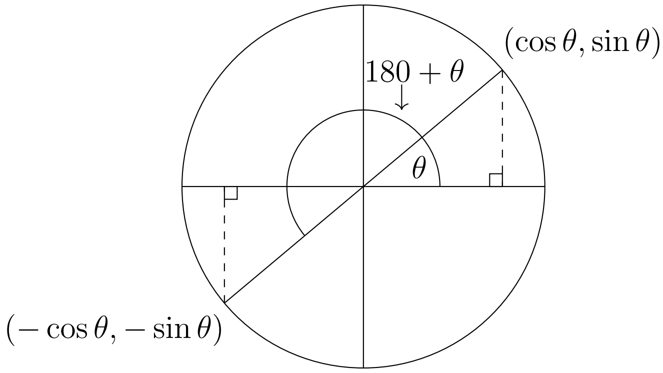
5 סינוס וקוסינוס של זוויות הגדולות מ־$90°$

עכשיו שאנו יודעים את ערכי הסינוס והקוסינוס של $45°$, נוכל לשאול על הזוויות הסימטריות $135°$, $225°$, $315°$. בעזרת חברינו מעגל היחידה, נמצא מיד את ערכי הסינוס והקוסינוס שלהן.
תחילה נחשב את הערכים עבור זווית שרירותית θ ברבע הראשון. היטלי הקרניים על הצירים x, y שווים כך שיש רק לשנות את הסימנים. ברבע השני:



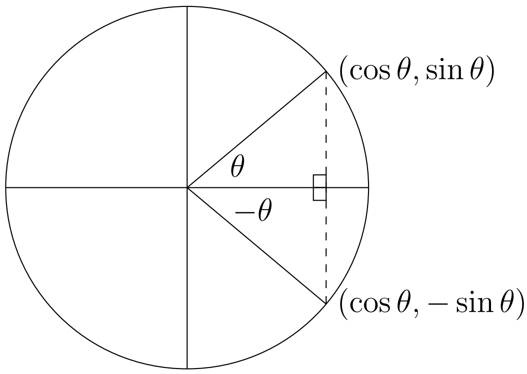
$$\begin{aligned}
&\cos 135 = \cos(180-45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\sin 135 = \sin(180-45) = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

ברבע השלישי:



$$\cos 225 = \cos(180+45) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 225 = \sin(180+45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

עבור הרבע הרביעי, נוח להשתמש בזווית השלילית $-\theta$ במקום הזווית החיובית $360-\theta$:



$$\cos 315 = \cos(-45) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 315 = \sin(-45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

נסכם את הערכים בטבלה:

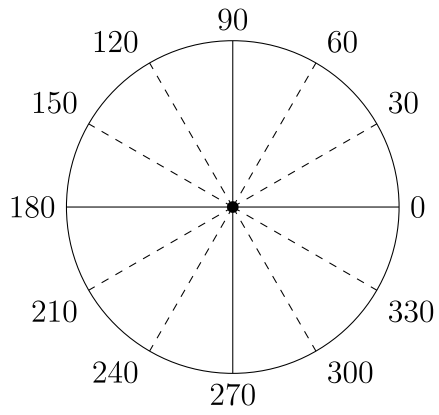
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
θ	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$180-\theta$	$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$
$180+\theta$	$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$
$-\theta$	θ	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

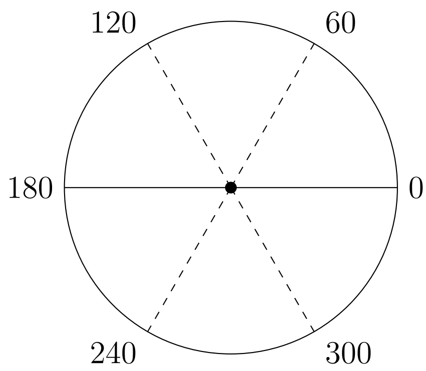
ועבור 45°:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

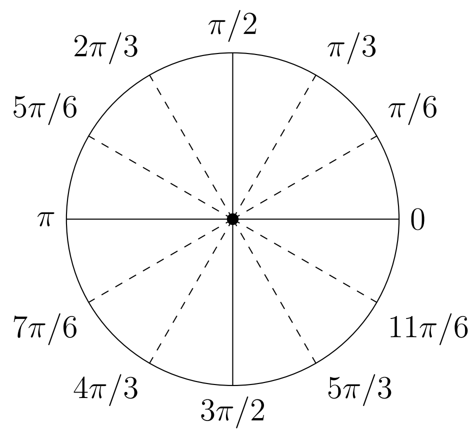
6 הסינוס והקוסינוס של 30° ו 60°

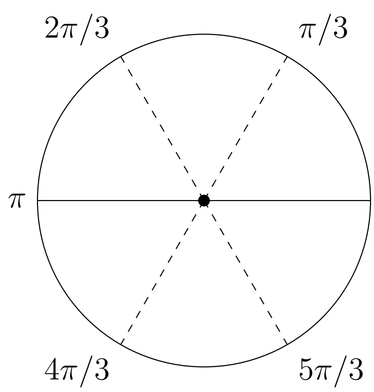
את מעגל היחידה ניתן לחלק ל־6 קטעים של 60° או ל־12 קטעים של 30°:



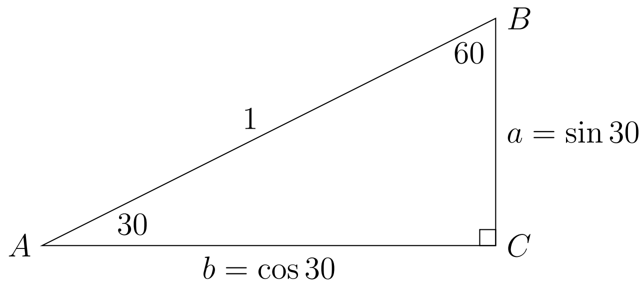


ברדיאנים:

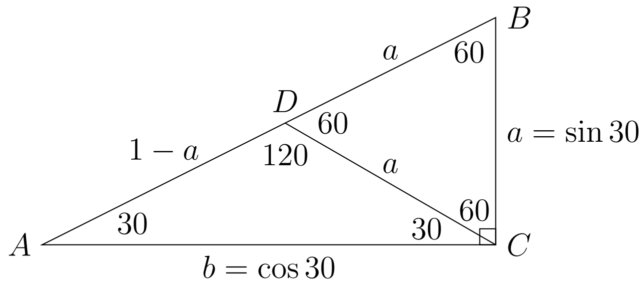




נחשב תחילה את הסינוס של 30°. במשולש ישר־זווית:



צייר קו מ־C אל היתר כך שהזווית עם הצלע AC היא $30°$:



מעובדות על זוויות במשולש השלמנו בציור את שאר הזוויות. המשולש $\triangle BCD$ שווי־צלעות ואורך כל צלע הוא $a = \sin 30$. בנוסף, $\triangle ACD$ שווי־שוקיים כך ש־$a = 1 - a$ (זכור שהמשולש נמצא במעגל היחידה ואורך היתר הוא 1). מכאן:

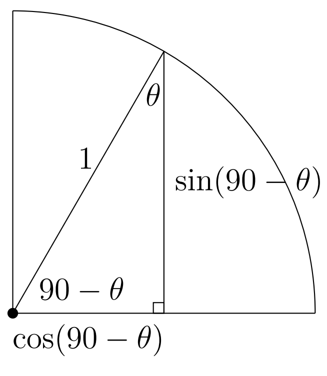
$$\begin{aligned} \sin a &= a = 1 - a \\ &= \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

מהנוסחה $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ מתקבל ערך הקוסינוס:

$$\cos 30 = \sqrt{1 - \sin^2 30} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \,.$$

7 סינוס וקוסינוס של $(90 - \theta)$

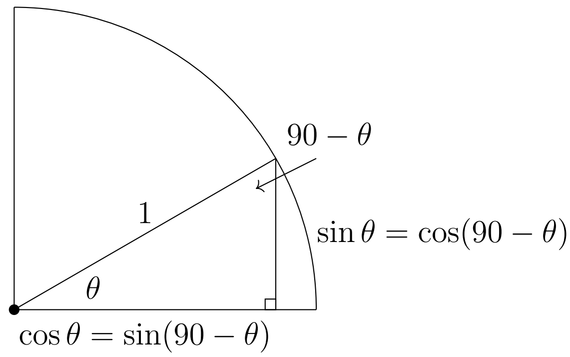
נפנה עכשיו לחישוב של סינוס וקוסינוס של $60°$. מ־ $90 - 30 = 60$, אפשר לחשוד שיש קשר פשוט בין הפונקציות הטריגונומטריות של $60°$ ו־ $30°$. הקשר מתברר כאשר נצייר זווית של $90 - \theta$ במעגל היחידה:



הזווית בנקודה שהמשולש נושק למעגל היחידה היא θ, כך שהפונקציות הטריגונומטריות של $90-\theta$ מתקבלות מאלו של θ על ידי החלפת הצלעות "נגדי" ו־"צדדי" בהגדרות:

$$\begin{aligned}\cos(90-\theta) &= \sin\theta \\ \sin(90-\theta) &= \cos\theta\,.\end{aligned}$$

דרך אחרת לראות את הקשר היא לשים לב שהמשולש חופף את המשולש שהשתמשנו לחשב $\sin\theta$ ו־ $\cos\theta$:



מכאן:

$$\begin{aligned}\cos 60 = \cos(90-30) = \sin 30 = \frac{1}{2} \\ \sin 60 = \sin(90-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

ניתן לחשב בקלות את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של כפולות של 30°, 60° על ידי התבוננות במעגל היחידה:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
180	π	0	-1
210	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
240	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
270	$3\pi/2$	-1	0
300	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
330	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$

8 נוסחאות עבור זוויות מרובות

לצערי, עליך לזכור בעל פה את הנוסחה עבור הסינוס של סכום של שתי זוויות (או לחפש בנוסחאון):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,.$$

ההוכחה היא לא קשה במיוחד אבל קשה לשחזר אותה בן רגע. לאחר שלומדים את הנוסחה בעל פה, שאר הנוסחאות מתקבלות בקלות. הסינוס של ההפרש בין שתי זוויות הוא:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,.$$

הנוסחאות לקוסינוס הן:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\sin(90-(\alpha+\beta))\\&=\sin((90-\alpha)-\beta)\\&=\sin(90-\alpha)\cos\beta-\cos(90-\alpha)\sin\beta\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,,\end{aligned}$$

ו:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.$$

הנוסחאות עבור כפל זוויות מתקבלות מהנוסחאות לסכום של שתי זוויות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=\sin(\alpha+\alpha)\\&=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\\\cos 2\alpha&=\cos(\alpha+\alpha)\\&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\\&=2\cos^2\alpha-1\\\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha\\&=1-2\sin^2\alpha\,.\end{aligned}$$

9 סיכום

התחלנו מההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות סינוס וקוסינוס כיחסים בין הצלעות של משולש ישר־זווית. ערכי הפונקציות תלויים רק ביחס בין אורכי הצלעות ולכן קבענו שאורך היתר הוא 1. ממשפט פתגורס קבלנו:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

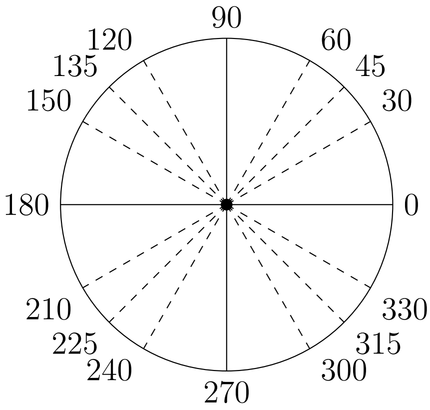
ו:

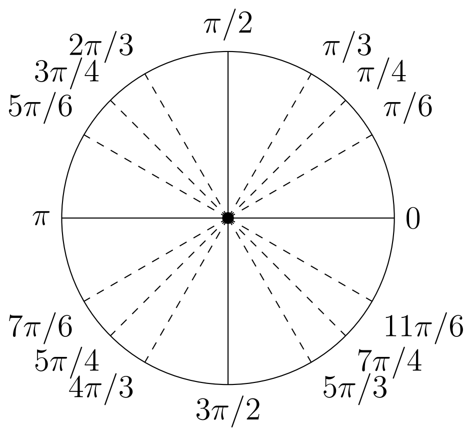
$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \, .$$

מבניית עזר פשוטה ועובדות גיאומטריות על משולש חישבנו:

$$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

כאשר נתונים הסינוס והקוסינוס של זווית שרירותית θ ברבע הראשון, בעזרת חברינו מעגל היחידה מיד מצאנו את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של כל זווית המתקבלת מ־θ על ידי חיבור וחיסור כפולות של 90°. בפרט, חישבנו את הסינוס והקוסינוס של הזוויות:





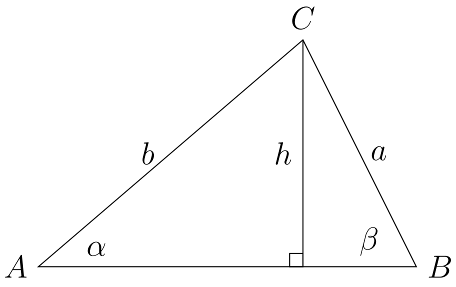
כל זה בלי לזכור כלום בעל פה פרט להגדרות של סינוס וקוסינוס!

הנוסחאות לזוויות מרובות מתקבלות בקלות מהנוסחה ל $\sin(\alpha + \beta)$ שצריך ללמוד בעל פה או לחפש בנוסחאון.

נספחים

א' משפט הסינוסים

לא קשה לזכור את משפט הסינוסים (והמשפט מופיע בנוסחאון של בחינת הבגרות), אבל כדאי לראות כמה קל להוכיח אותו. נתון משולש $\triangle ABC$, הורד גובה מקודקוד אחד:



לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{h}{b}\\ \sin\beta &= \frac{h}{a}\,,\end{aligned}$$

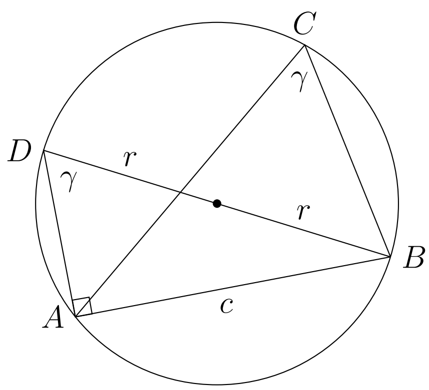
ולכן:

$$\begin{aligned}b\sin\alpha &= a\sin\beta\\ \frac{\sin\alpha}{a} &= \frac{\sin\beta}{b}\,.\end{aligned}$$

ב' חוק הסינוסים במעגל

קיימת הוכחה אחרת לחוק הסינוסים המקשר בין היחסים של הסינוסים לצלעות לבין הרדיוס של המעגל החוסם.[2]

נתון משולש $\triangle ABC$ והמעגל החוסם אותו.[3] (ניתן לחסום כל משולש במעגל שמרכזו הוא החיתוך של האנכים האמצעיים.) מצא נקודה D כך שהקו DB עובר דרך מרכז המעגל. צייר את הקו AD:



[2]אני מודה לאביטל אלבוים כהן שהביאה לתשומת ליבי הוכחה לו.

[3]ההוכחה היא למשולש חד־זווית. ההוכחה למשולש קהה־זווית דומה.

הזוויות $\angle ADB$ ו $\angle ACB$ נשענות על אותו מיתר AB ולכן הן שוות ומוסמנות γ. הזווית $\angle DAB$ נשען על הקוטר ולכן שווה ל־90°. מכאן:

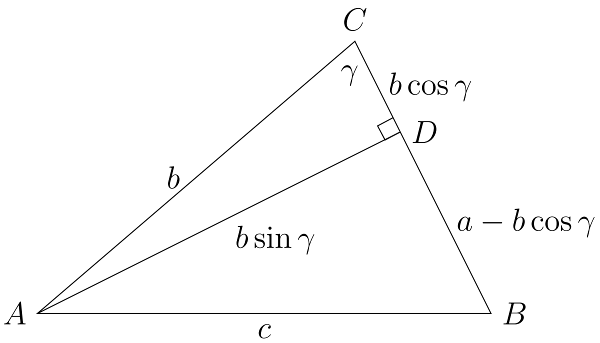
$$\sin\gamma = \frac{c}{2r}\,.$$

מבנייה דומה בקודקודים האחרים מתקבלות הנוסחאות:

$$\frac{1}{2r} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

ג' משפט הקוסינוסים

משפט הקוסינוסים גם הוא לא קשה לזכור בעל פה (ומופיע בנוסחאון), אבל ההוכחה לא ברורה מאליה. בכל זאת, נביא את ההוכחה כדי לראות שנחוצים רק עובדות גיאמטריות וההגדרות של סינוס וקוסינוס.[4] הורד גובה מקודקוד אחד:



במשולש ישר־הזווית $\triangle ADC$, היתר הוא b וניתן לחשב את אורכי הצלעות האחרים באמצעות טריגונומטריה. האורך של DB הוא האורך של CB (a, לא מסומן בציור) פחות האורך של CD שחישבנו. לפי משפט פיתגורוס במשולש $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned}
c^2 &= (a - b\cos\gamma)^2 + b^2\sin^2\gamma \\
&= a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma \\
&= a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.
\end{aligned}$$

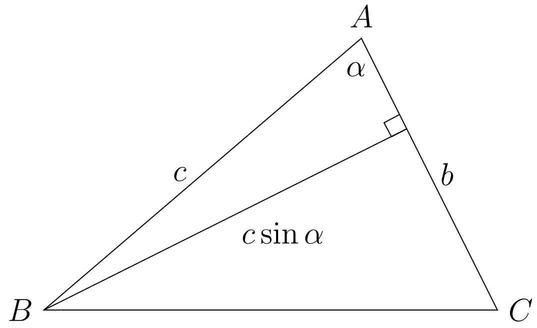
משפט פיתגורוס מתקבל על ידי הצבת $\gamma = 90^\circ$, כך שאפשר לראות במשפט הקוסינוסים הרחבה של משפט פיתגורוס.

---

[4] ההוכחה היא למשולש חד־זווית. ההוכחה למשולש קהה־זווית דומה.

ד׳ שטח משולש

מאותה בנייה:



מתקבלת הנוסחה הכללית עבור שטח של משולש:

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \text{בסיס} \cdot \text{גובה} = \frac{1}{2} bc\sin\alpha\,.$$

כאשר α זווית ישרה מתקבלת הנוסחה המוכרת $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc$.