איך לחלק זווית לשלושה (אם אתם מוכנים לרמות)

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

1 מבוא

ידוע שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה בעזרת מחוגה וסרגל. הסיבה היא שחלוקת זווית לשלושה דורשת בנייה של שורש שלישי, אבל עם מחוגה וסרגל ניתן לבנות רק אורכים המתקבלים מארבעת פעולות החשבון וכן שורש ריבועי.

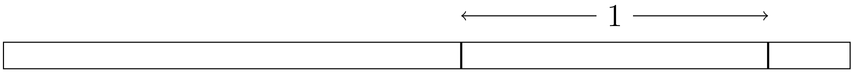
המתמטיקאים היוונים גילו שבאמצעות כלים אחרים ניתן לחלק זווית לשלושה. סעיף 2 מציג בנייה של ארכימדס עם כלי פשוט הנקרא ביוונית ניאוסיס (neusis). סעיף 3 מביא בנייה מסובכת יותר של היפיאס באמצעות קוודרטריקס (quadratrix). כהטבה מיוחדת, נראה בסעיף 4 איך ניתן לרבע מעגל באמצעות קוודרטריקס.

מקורות:

https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_trisection
https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratrix_of_Hippias
https://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

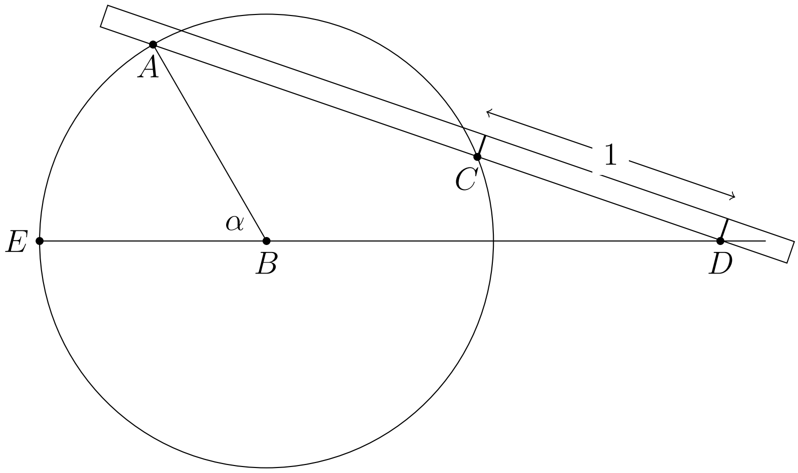
2 חלוקת זווית לשלושה באמצעות ניאוסיס

בבית הספר אנו לומדים לבנות צורות גיאומטריות באמצעות סרגל ומחוגה. למעשה, השימוש במילה "סרגל" מטעה, כי הכוונה היא למקל ישר ללא כל סימן, שהפעולה היחידה שניתן לעשות איתו היא למתוח קו ישר בין שתי נקודות. לסרגל המוכר יש סימנים המאפשרים למדוד אורכים. כדי לחלק זווית לשלושה, נשתמש ב־**ניאוסיס** שהוא מקל עם שני סימנים בלבד, כאשר למען הנוחיות נגדיר שהמרחק בין שני הסימנים הוא 1:

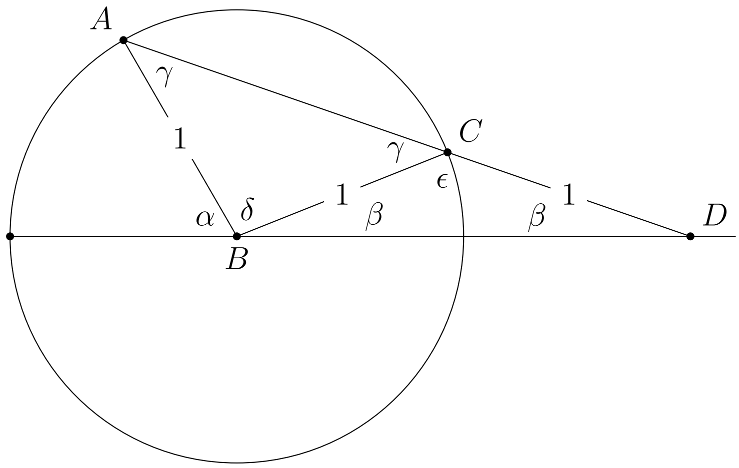


תהי α זווית שרירותית $\angle ABE$ בתוך מעגל שמרכזו B עם רדיוס 1. ניתן לבנות את המעגל עם רדיוס 1 על ידי קביעת המרחק בין רגלי החוגה למרחק בין סימני הניאוסיס.

הרחיבו את רדיוס EB מחוץ למעגל. הניחו את הניאוסיס על הנקודה A והזיזו אותו עד שהוא חותך את ההרחבה של EB בנקודה D ואת המעגל בנקודה C. השתמשו בסימנים כדי שאורך קטע הקו CD יהיה 1. ציירו את הקו AD:



ציירו את הקו BC וסמנו את הזוויות וקטע הקו כפי שמופיע בתרשים שלהלן:



השתמשנו בעובדה ש־$\triangle ABC$ ו־$\triangle BCD$ משולשים שווי שוקיים: $AB = BC$ כי שניהם רדיוסים ו־$BC = CD$ לפי הבניה באמצעות הניאוסיס.

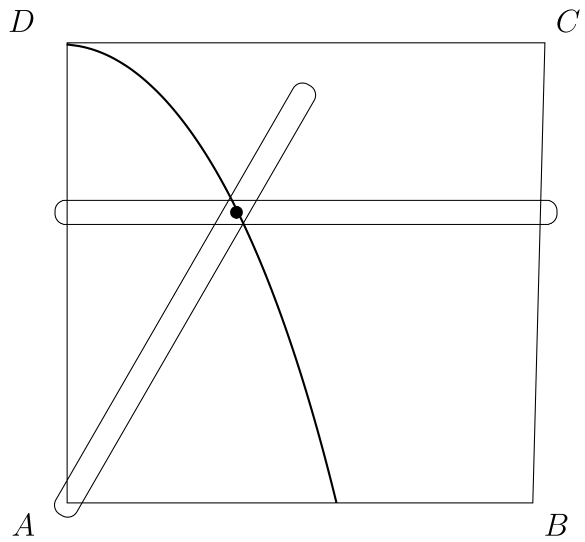
החישוב שלהלן משתמש בעובדות שסכום הזוויות של משולש ושל זוויות משלימות הוא π רדיאנים.

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \pi - 2\beta \\
\gamma &= \pi - \epsilon = 2\beta \\
\delta &= \pi - 2\gamma = \pi - 4\beta \\
\alpha &= \pi - \delta - \beta \\
&= 4\beta - \beta \\
&= 3\beta\,.
\end{aligned}$$

מכאן שהזווית β היא שליש הזווית α.

3 חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס

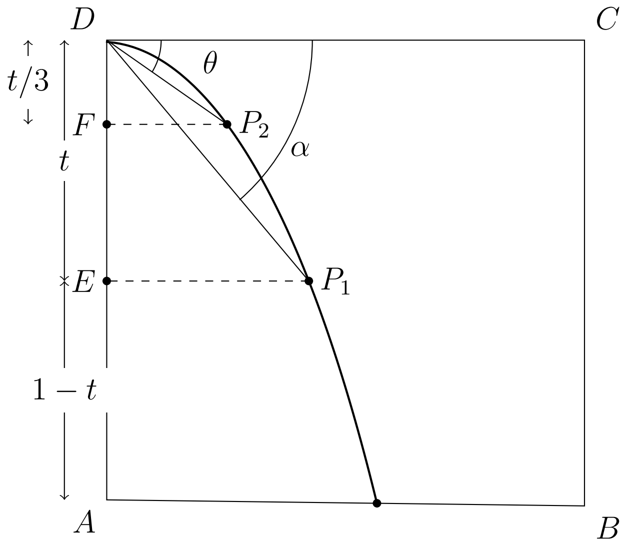
התרשים שלהלן מראה **מחוגת קוודרטריקס**:



מחוגת קוודרטריקס מורכב משני סרגלים (ללא סימנים כמקובל בבנייה גיאומטרית) המחוברים במפרק המאלץ אותם לנוע ביחד. סרגל אחד חייב לנוע במקביל לציר ה־x מ־DC עד AB, בעוד הסרגל השני מחובר במפרק למרכז מערכת הצירים ב־A. סרגל זה מונח לאורך ציר ה־y, AD, והוא מסתובב עד שהוא מונח לאורך ציר ה־x, AB. העקומה המצוירת על ידי המפרק המחבר את שני הסרגלים נקראת **עקומת הקוודרטריקס** או פשוט **קוודרטריקס**.

כאשר מזיזים את הסרגל האופקי במהירות אחידה, החיבור עם הסרגל השני מאלץ אותו להסתובב במהירות זוויתית קבועה. למעשה זו ההגדרה של הקוודרטריקס. כאשר קואורדינטת ה־y של הסרגל האופקי יורד מ־1 ל־0, הזווית של הסרגל השני יחסית לציר ה־x יורד מ־$\pi/2$ ל־0.

התרשים שלהלן מראה איך אפשר לחלוק זווית שרירותית α לשלושה באמצעות קוודרטריקס:



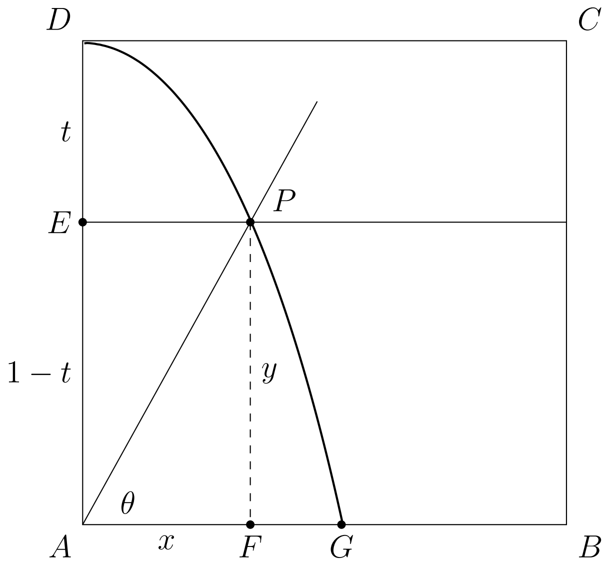
הזווית α היא $\angle CDP_1$, כאשר הנקודה P_1 היא החיתוך בין הקו המגדיר את הזווית α לבין הקוודרטריקס. קואורדינטת ה־y שלה היא $1-t$, כאשר t הוא המרחק שהסרגל האופקי נע ממקומו ההתחלתי DC. חלקו את **קטע הקו** DE לשלושה חלקים כדי לקבל את הנקודה F. יהי P_2 נקודת החיתוך בין הקו מ־F המקביל ל־DC לבין הקוודרטריקס. לפי העיקרון של מהירויות שוות:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{t/3}{t}$$

$$\theta = \alpha/3\,.$$

4 ריבוע המעגל באמצעות קוודרטריקס

נחשב את המשוואה של הקוודרטריקס לפי התרשים שלהלו:



נניח שהסרגל האופקי נע מרחק t לאורך ציר ה־y עד לנקודה E, והסרגל המסתובב מגדיר זווית θ עם ציר ה־x. הנקודה P היא החיתוך בין קוודרטריקס לבין הסרגל האופקי, והנקודה F היא היטל של P על ציר ה־x. מהן הקואורדינטות של הנקודה P על הקוודרטריקס? ברור ש:

$$y = PF = EA = 1 - t\,.$$

על העקומה, θ יורד באותו קצב ש־t עולה:

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{1} &= \frac{\theta}{\pi/2}\\ \theta &= \frac{\pi}{2}(1-t)\,.\end{aligned}$$

נבדוק אם זה הגיוני: כאשר $t = 0$ אז $\theta = \pi/2$, וכאשר $t = 1$ אז $\theta = 0$.

את קואורדינטת ה־x של P נקבל בטריגונומטריה:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\,.$$

ומכאן:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = y\cot\theta = y\cot\frac{\pi}{2}(1-t) = y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

בדרך כלל המשוואה של עקומה היא מהצורה $y = f(x)$, אבל אפשר גם להשתמש במשוואה מהצורה $x = f(y)$.

נחשב את קוארדינטת ה־x של הנקודה G, החיתוך של הקוודרטריקס עם ציר ה־x. לא ניתן פשוט להציב $y = 0$ כי $\cot 0$ לא מוגדר, אבל ייתכן שיהיה לנו מזל אם נחשב את הגבול של x כאשר y שואף ל־0:

$$x = y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

למען הנוחיות, נחליף משתנה $z = \frac{\pi}{2}y$, ואז נחשב את הגבול:

$$\lim_{z\to 0} z \cot z = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\cos 0}{1} = 1\,,$$

השתמשנו בעובדה הידועה ש־$1 = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$.

כאשר $y \to 0$:

$$x \to \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\pi}{2} y \cot \frac{\pi}{2} y = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}\,.$$

על ידי שימוש בקוודרטריקס בנינו קטע קו AG שאורכו $x = \dfrac{2}{\pi}$. עם סרגל רגיל ומחוגה, קל לבנות קו באורך $\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{\pi}$, ואז לבנות ריבוע ששטחו π.