

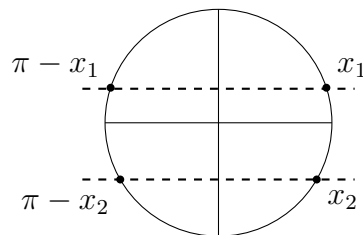
מוטי בן-ארי

עבור הפונקציה  $y = 3 \cos x - \cos 3x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ , מצא (א) נקודות קיצון, (ב) תחומי עלייה וירידה, (ג) נקודות חיתוך עם הצירים, (ד) שרטט את גרף הפונקציה.

הנגזרת:

$$y' = -3 \sin x + 3 \sin 3x$$

מתאפסת כאשר  $\sin x = \sin 3x$ . מתי שני סינוסים שווים? כאשר הקואורדינטות בציר ה- $y$  שוות, וזה קורה כאשר קואורדינטות ה- $x$  שוות או כאשר אחת מהן היא  $\pi$  פחות השנייה:



הוספת כפולה של  $2\pi$  לקואורדינטת ה- $x$  לא משנה את הערך של פונקציה טריגונומטרית. הפתרונות של  $\sin x = \sin 3x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  הם:

$$3x = x + 2\pi k$$

$$x = \pi k$$

$$x = 0, \pi,$$

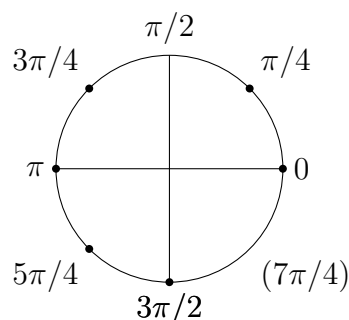
ו:

$$3x = (\pi - x) + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

$x = \frac{3\pi}{2}$  היא נקודת קיצון (מקומית) נוספת. נסמן את נקודות הקיצון על מעגל היחידה:



כדאי לבדוק שאם מכפילים ב-3 את הזוויות המסומנות בנקודה מקבלים זווית עם אותו סינוס (לא אותה נקודה). למשל:

$$3 \cdot \frac{5\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4},$$

והסינוס של  $\frac{7\pi}{4}$  שווה לסינוס של  $\frac{5\pi}{4}$ .

נקודות הקיצון הן:

$$(0, 2), \left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right), (\pi, -2), \left(\frac{5\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

אין אסימטוטות אנכיות, ולכן תחומי העלייה והירידה ואיפיון נקודות הקיצון כמינימום או מקסימום מוגדרים על ידי ההפרשים בקואורדינטות ה- $y$  של נקודות הקיצון:

$$(0, 2) \nearrow \left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right) \searrow \left(\frac{3\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right) \nearrow (\pi, -2) \searrow \left(\frac{5\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right) \searrow \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

מקסימום      מינימום      מקסימום      מינימום      מקסימום      מינימום

עבור נקודות הקיצון בפנימיות, אפשר לחשב מינימום או מקסימום לפי הנגזרת השנייה:

$$y'' = -3 \cos x + 9 \cos 3x = 3(3 \cos 3x - \cos x).$$

כדי לבדוק את הסימן אפשר להשמיט את הגורם הקבוע ולחשב  $3 \cos 3x - \cos x$ :

$x$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$
$y''$	$-2\sqrt{2} < 0$	$\sqrt{2} > 0$	$-2 < 0$	$2\sqrt{2} > 0$
	max	min	max	min

נקודות החיתוך עם הצירים הן הנקודות בקצה התחום:  $(0, 2)$  עם ציר ה- $y$ ,  $(\frac{3}{2}, 0)$  עם ציר ה- $x$ , ועוד חיתוך עם ציר ה- $x$  בין  $\frac{\pi}{4}$  ו- $\frac{3\pi}{4}$ . אנו יודעים ש- $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , ולכן:

$$y = 3 \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} = 0 - 0 = 0,$$

ונקודת החיתוך היא  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ .

הגרף של הפונקציה הוא:

