בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.0

מסמך זה מציג את התובנה של Gauss שניתן לבנות **heptadecagon**, מצולע משוכלל עם 17 צלעות באמצעות סרגל ומחוגה. ההצגה מבוססת על [1] אבל מכיל חישובים מפורטים של הפיתוח של הנוסחה של Gauss. מוצגת גם בנייה של ממש לפי [3], שוב עם חישובים מפורטים.

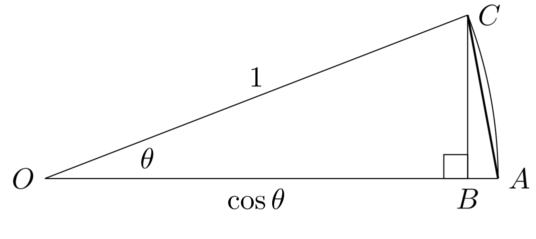
1 בנייה של מצולעים משוכללים

היסטוריה היוונים ידעו לבנות מצולעים משוכללים מסויים עם סרגל ומחוגה: משולש, ריבוע, מחומש ומצולע משוכלל עם 15 צלעות. כמובן, בהינתן מצולע משוכלל עם n צלעות, קל לבנות מצולע עם $2n$ צלעות על ידי בניית חוצי הצלעות.

לא היית התקדמות במשך אלפיים שנה עד שבשנת 1796, קצת לפני יום הולדתו ה־19, Carl Friedrich Gauss התעורר בוקר אחד ולאחר "מחשבה מרוכזת" מצא דרך לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות. הישג זה עודד אותו להיות מתמטיקאי.

הבנייה של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היתה אבן דרך למשפט Gauss-Wantzel: מצולע משוכלל עם n צלעות ניתן לבנייה עם סרגל ומחוגה אם ורק אם n הוא מכפלה של חזקה של 2 ואפס או יותר מספרי Fermat ראשונים **שונים** $2^{2^k}+1$. $F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537$ הם מספרי Fermat ראשונים ידועים. מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי Magnus Georg Paucker ב־1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב־1832. ב־1894 Johann Gustav Hermes טען שבנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו נשמר באוניברסיטת Göttigen, במקרה שתרצו לבדוק אותו.

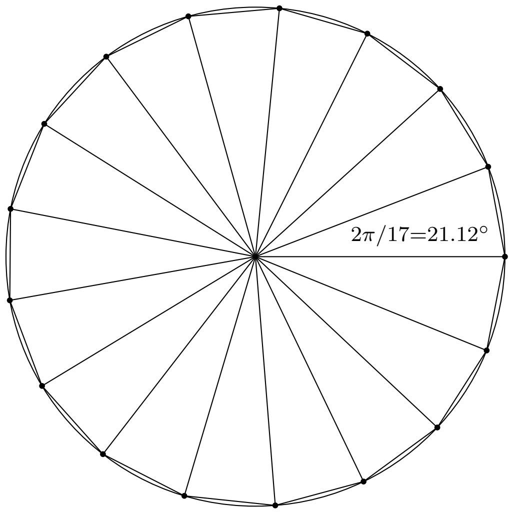
הקוסינוס של הזווית המרכזית כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע קו באורך $\cos\theta$, כאשר θ היא הזווית המרכזית במעגל היחידה עליה נשען המיתר שהוא צלע של המצולע.



נתון קטע הקו $\overline{OB} = \cos\theta$, בנו אנך ב־$B$ וסמן את החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב־C. אזי $\overline{OC} = 1$ ו־$\overline{OB} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \cos\theta$, כך שי־$\theta = \cos^{-1}(\overline{OB})$. המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע.

פעולות חשבוניות שניתנות ליישם באמצעות בנייה נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ־1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$. בנספחים A, B נראה שניתן לבנות משולש שווה־צלעות ומחומש משוכלל על ידי חישוב ביטויים המשתמשים רק בפעולות הללו. נפתח את הנוסחאות גם על ידי שימוש בטריגונומטריה וגם על ידי שימוש בגיאומטריה.

בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היא $\dfrac{2\pi}{17}$ רדיאנים או $\dfrac{360^\circ}{17} \approx 21.12^\circ$.



Gauss הראה ש־[2, 1]:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

ערך זה ניתן לחשב תוך שימוש בפעולות $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ ולכן הוא ניתן לבנייה!

סעיפים 2, 3, 4 מביאים את הרעיונות המתמטיים של Gauss, בתוספת החישובים המפורטים. ההוכחה לא משתמשת במפורש במספרים מרוכבים, אבל הוספתי מספר הערות עליהן. סעיף 5 מראה בנייה יעילה של $\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$.

2 השורשים של אחד

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה:

המשפט הבסיסי של אלגברה לכל פולינום במעלה n (עם מקדמים מרוכבים) בדיוק n שורשים (מרוכבים).

השורשים של אחד ומצולעים משוכללים נתבונן במשוואה $x^n - 1 = 0$ עבור כל מספר שלם $n > 1$. שורש אחד הוא $x = 1$. לפי המשפט הבסיסי של אלגברה קיימים $n - 1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד ב־r כך ש־$r^n = 1$. r נקרא **שורש של אחד**.

מספרים מרוכבים השורש r הוא $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. לפי נוסחאת de Moivre: $$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = \cos\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right) = 1\,,$$

נתבונן כעת ב־r^2. אנו רואים ש:

$$r^{2\cdot n} = (r^n)^2 = 1^2 = 1\,.$$

כך שהשורשים של $x^n - 1$, שורשי n של אחד, הם:

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\,.$$

משפט יהי n ראשוני ו־r שורש n של אחד. אזי $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ שונים זה מזה, אז הם מהווים **כל** שורשי ה־n של אחד.

הוכחה נניח ש־$r^i = r^j$ עבור מספרים כלשהם $1 \leq i < j \leq n$, כך ש־$r^j/r^i = r^{j-i} = 1$. יהי m המספר השלם הקטן ביותר פחות מ־n כך ש־$r^m = 1$. כעת $n = ml + k$ עבור מספרים $0 < l < n$, $0 \leq k < m$. מ־$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k$, מתקבל ש־$0 \leq k < m$ ו־$r^k = 1$. m נבחר כמספר החיובי הקטן ביותר המקיים את התנאי, ולכן $k = 0$ ו־$n = ml$, כך ש־n אינו ראשוני.

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה:

משפט יהיו $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ השורשים של פולינום $f(x)$ מסדר n. אזי:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n-1})(x - a_n)\,.$$

מהנוסחה של Vieté [1, עמוד 82] מתקבלים המקדמים של הפולינום לפי השורשים. ניתן לקבל את מקדמים על ידי הכפלה. עבור x^{n-1} המקדם הוא:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)\,.$$

בפולינום $x^n - 1$, ברור שהמקדם של x^{n-1} tuv הוא אפס ולכן:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = 0\,.$$

נשמתמש בעובדה זו בעתיד בצורה:

$$r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = -1\,.$$

עבור מצולע משוכלל עם 17 צלעות המשוואה היא:

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1\,,$$

3 ההוכחה של Gauss שניתן לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות

Gauss ראה שאין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. במקום זה, נשים לב שהחזקות של r^3 נותנות אם כל השורשים, אבל בסדר שונה. עבור $k < 17$, $r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k$, ולכן רשמנו את החזקות כשאריות לאחר חלוקה ב־17.

$$r^1,\ r^{1\cdot 3=3},\ r^{3\cdot 3=9},\ r^{9\cdot 3=27=10},\ r^{10\cdot 3=30=13},\ r^{13\cdot 3=39=5},\ r^{5\cdot 3=15},\ r^{15\cdot 3=45=11},$$
$$r^{11\cdot 3=33=16},\ r^{16\cdot 3=48=14},\ r^{14\cdot 3=42=8},\ r^{8\cdot 3=24=7},\ r^{7\cdot 3=21=4},\ r^{4\cdot 3=12},\ r^{12\cdot 3=36=2},\ r^{2\cdot 3=6}\,.$$

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל 16 השורשים בדיוק פעם אחת.

השורשים של משוואות ריבועיות נתבונן במשוואה הריבועית עם מקדם אחד ל־x^2:

$$y^2 + py + q = 0\,,$$

ונניח שהשורשים שלה הם: a, b. אזי:

$$(y-a)(y-b) = y^2 - (a+b)y + ab\,.$$

לכן $p = -(a+b)$ ו־$q = ab$, כך שאם **נתונים** $a+b$ ו־ab, נוכל לרשום את המשוואה הריבועית עבורה הם השורשים.[1]

יהי a_0 החיבור של השורשים במקומות האי־זוגיים ברשימה לעיל:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי a_1 הסכום של השורשים במקומות הזוגיים ברשימה:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

כדי לקבל את a_0, a_1 כשורשים של משוואה ריבועית. תחילה נחשב את הסכום שלהם:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כעת עלינו לעבוד קשה מאוד כדי לחשב את $a_0 a_1$! באיור 1 מופיע החישוב כאשר הערכים של $r^i r^j$ רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. מתחת לכל שורש נמצא מספר המופעים שלו עד כה; בדקו שכל

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2)\,\cdot \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
&\quad \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
&\quad \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
&\quad \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
&\quad \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^6} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
&\quad \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{2}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
&\quad \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
&\quad \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
&= -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 1: החישוב של a_0a_1

שורש מופיע בדיוק ארבע פעמיים כך שערכו של המכפלה הוא -4. מ־$a_0 + a_1 = -1$ ו־$a_0, a_1 = -4$, אנו יודעים ש־a_0, a_1 הם השורשים של המשוואה הריבועית:

$$y^2 + y - 4 = 0\,.$$

מהנוסחה לפתרון של משוואות ריבועיות מתקבל:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

יהי b_0, b_1, b_2, b_3 הסכום של כל שורש רביעי החל מ־r^1, r^3, r^9, r^{10}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}
$$

[1] Po-Shen Lo השתמש בעבודה זו כדי לפתח שיטה מהירה למצוא את השורשים אל משוואה ריבועית. ראו [4] והמסמך על האתר שלי.

בדקו ש־$b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$. נחשב את המכפלות:

$$\begin{aligned}
b_0 b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times \\
&\quad (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
&= r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3 + \\
&\quad r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15} + \\
&\quad r^8 + r^{14} + r^7 + r^1 + \\
&\quad r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6 \\
&= -1 \\
b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times \\
&\quad (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
&= r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9 + \\
&\quad r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11} + \\
&\quad r^7 + r^8 + r^4 + r^3 + \\
&\quad r^5 + r^6 + r^2 + r^1 \\
&= -1 \,.
\end{aligned}$$

נסכם את החישובים:

$$\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0 b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1 b_3 &= -1 \,,
\end{aligned}$$

ולכן b_0, b_2 הם השורשים של:

$$y^2 - a_0 y - 1 = 0 \,.$$

ו־b_1, b_3 הם השורשים של:

$$y^2 - a_1 y - 1 = 0 \,.$$

מהנוסחה לפתרון משוואות ריבועיות ומהערכים שחישבנו קודם עבור a_0, a_1, מתקבלים השורשים b_0, b_1 (איור 3 ,2t). לבסוף יהי c_0, c_4 הסכום של כל שורש שמיני החל מ־r^1, r^{13}, בהתאמה:[2]

$$\begin{aligned}
c_0 &= r^1 + r^{16} \\
c_4 &= r^{13} + r^4 \\
c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\
c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\
&= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1 \,,
\end{aligned}$$

[2] יש סכומים נוספים אבל שני אלה יספיקו

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0+\sqrt{a_0^2+4}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2+16}}{4} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\,,
\end{aligned}
$$

איור 2: החישוב של b_0

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2+16}}{4} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 3: החישוב של b_1

כך ש־c_0, c_4 הם השורשים של:

$$y^2 - b_0 y + b_1 = 0$$

נראה שמספיק לחשב את השורש $c_0 = r^1 + r^{16}$ (איור 4).

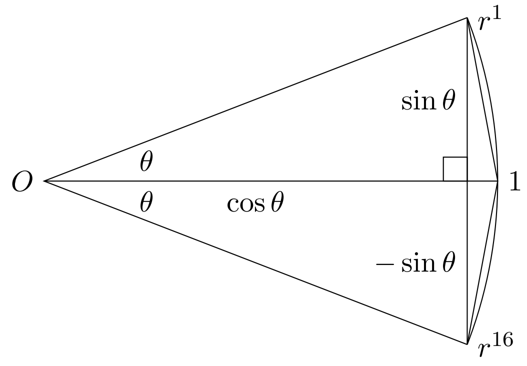
$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2} + \\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2 - 4\left[\frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2 - 16\left[(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2 + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + (34-2\sqrt{17}) - \left[(-16-16\sqrt{17})+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 4: החישוב של c_0

סיימנו כי:

$$c_0 = r_1 + r_{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) .$$

קואורדינטות ה־y של r_1, r_16 שוות עם סימנים הפוכים ולכן הסכום שלהם אפס. קואורדינטות ה־x נספרות פעמיים:



הוכחנו שהקוסינוס שת הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות עם סרגל ומחוגה, כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &\quad \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

מספרים מרוכבים

$$\begin{aligned}c_0 &= r_1 + r_{16} \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) .\end{aligned}$$

4 פיתוח הנוסחה של Gauss

הנוסחה שקיבלנו עבור $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ איננה הנוסחה שניתנה על ידי Gauss עצמו [2, עמוד 458]. הנוסחה של Gauss מופיעה גם ב־[1, עמוד 68]. את הנוסחה שקיבלתי מצאתי רק ב־[5], כאשר המחבר Rike רושם כתרגיל להמיר את הנוסחה לנוסחה שניתנה על ידי Gauss. סעיף זה פותר את התרגיל.

נפשט את הביטוי $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
& \quad 4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
& \quad -4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נזכור את הביטוי $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הביטוי הראשון. נרבע אותו ואז ניקח שורש הריבועי:

$$\begin{aligned}
2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2} \\
&= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})} \\
&= 2\sqrt{(18\cdot 34-4\cdot 17)+\sqrt{17}(2\cdot 34-2\cdot 18)} \\
&= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

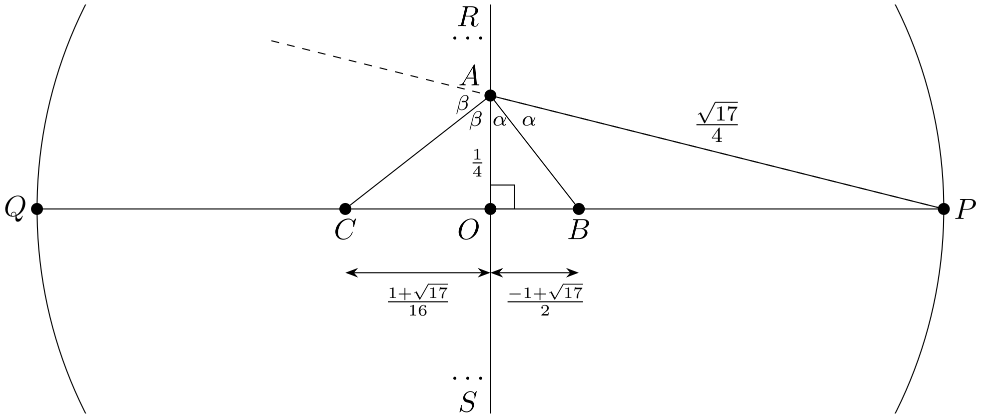
נציב את הביטויים ונקבל את הנוסחה של Gauss:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
& \quad \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\
&= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
& \quad \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

5 בנייה עם סרגל ומחוגה

מספר בניות נמצאות ב־[8]. כאן אביא את הבנייה מ־[3] כי הבנייה היא של $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ שחישבנו. הבנייה משתמשת רק במשפט פיתגורס ובמשפט חוצי הזוויות [7].

נבנה מעגל יחידה שמרכזו O, עם קוטרים ניצבים $\overline{PQ}, \overline{RS}$.[3]



נבנה A כך ש־$\overline{OA} = \frac{1}{4}\overline{OR}$. לפי משפט פיתגורס, $\overline{AP} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4$.

יהי B החיתוך של חוצה הזווית הפנימי של $\angle OAP$ וציר ה־x, ויהי C החיתוך החיצוני של חוצה הזווית החיצוני של $\angle OAP$ וציר ה־x. לפי משפט חוצה הזווית:

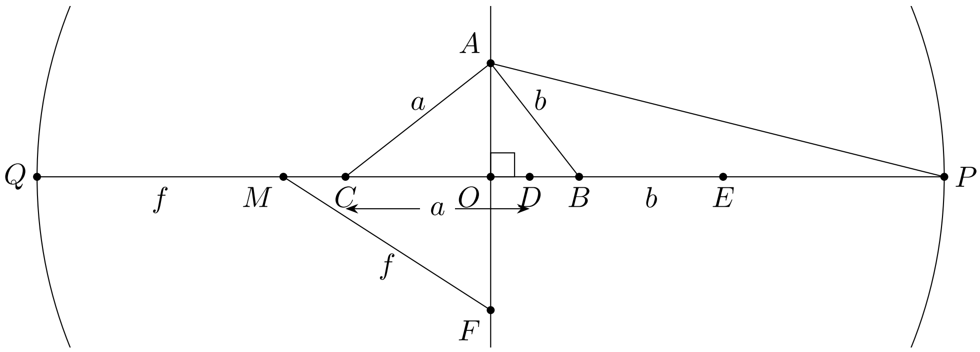
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OB}}{1-\overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OB} &= \frac{1}{1+\sqrt{17}} = \frac{1}{1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}} \\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16},
\end{aligned}$$

ו:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OC}}{1+\overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OC} &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}} = \frac{1}{-1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}} \\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}.
\end{aligned}$$

[3] כדי לחסוך במקום המעגל צומצם כך שהנקודות $R = (0,1), S = (0,-1)$ לא מופיעות.

בנו D על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{CA} = \overline{CD}$:



$$\begin{aligned}
\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

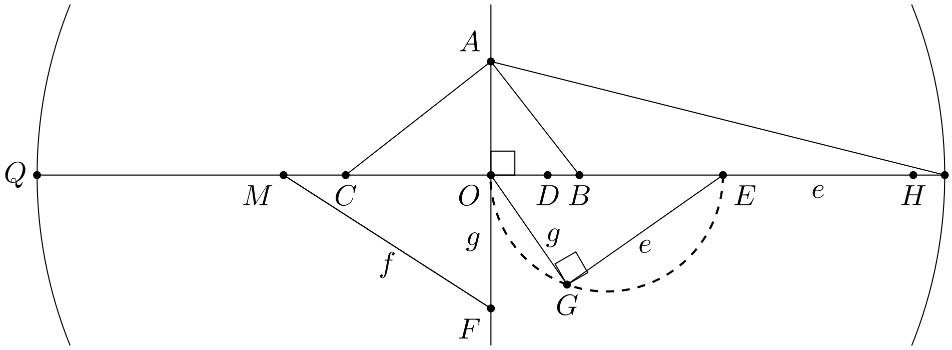
נבנה E על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{BA} = \overline{BE}$:

$$\begin{aligned}
\overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

בנו M, נקודת האמצע של $\overline{QD}$ ובנו F על $\overline{OS}$ כך ש-$\overline{MQ} = \overline{MF}$:

$$\begin{aligned}
\overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}$$

בנו מעגל שקטרו $\overline{OE}$. בנו מיתר $\overline{OG}=\overline{OF}$. שימו לב ש-$\overline{MF}-1=\overline{MQ}-1=\overline{MO}$:



$$\begin{aligned}
\overline{OG}=\overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2-\overline{MO}^2}=\sqrt{\overline{MF}^2-(1-\overline{MF})^2}\\
&= \sqrt{2\overline{MF}-1}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)-1}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned}$$

יהי E החיתוך של המעגל עם $\overline{OP}$; לפי ההגדרה, $\overline{OE}$ הוא קוטר של המעגל כך ש-$\angle OGE$ היא זווית ישרה. בנו H על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{EH}=\overline{EG}$:

$$\begin{aligned}
\overline{EH}=\overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2-\overline{OG}^2}=\sqrt{(\overline{OB}+\overline{BE})^2-\overline{OG}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2-\frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17})+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})\right)+\left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned}$$

נחשב את $\overline{OE}$:

$$\begin{aligned}
\overline{OE}=\overline{OB}+\overline{BE} &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}$$

לבסוף, $\overline{OH}=\overline{OE}+\overline{EH}$ שהוא $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ כפי שמופיע באיור 4.

א' בניית משולש שווה־צלעות

טריגונומטריה הזווית המרכזית של משולש שווה־צלעות היא $360^\circ/3 = 120^\circ$ וניתן לחשב את הקוסינוס שלה מהנוסחה של הקוסינוס של הסכום של שתי זוויות:

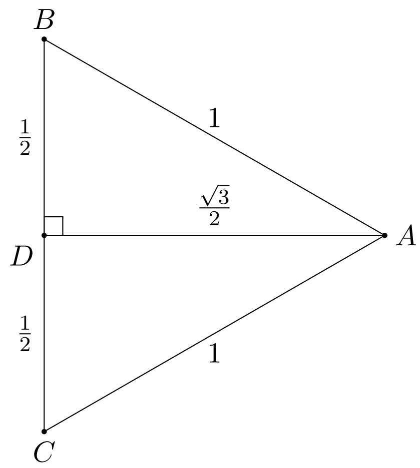
$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

ערך זה ניתן לבנייה.

גיאומטריה נתבונן במשולש שווה־צלעות ABC שאורך צלעותיו 1. יהי $\overline{AD}$ הגובה מ־A ל־$\overline{BC}$. $\overline{AB} = \overline{AC}$ ולכן קטע הקו חוצה את $\overline{BC}$. מכאן ש:

$$\overline{AD} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

$1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ניתנים לבנייה ולכן גם משולש שווה־צלעות.



ב' בניית מחומש משוכלל

טריגונומטריה הזווית המרכזית היא $360^\circ/5 = 72^\circ$. נחשב $\cos 36^\circ$ תוך שימוש בזהויות הטריגונומטריות עבור 2θ ו־$\theta/2$ [9]:

$$\begin{aligned}
0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ)\\
&= (2\cos^2 36^\circ - 1)\sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} - 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}}\,.
\end{aligned}$$

כעת יש רק זווית אחת בנוסחה; נסמן $x = \cos 36^\circ$ ונחשב:

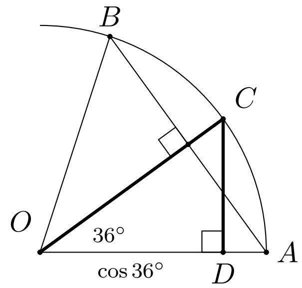
$$\begin{aligned}
(2x^2-1)\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}}\\
(2x^2-1)\sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x}\\
2x^2 - 1 &= 2x(1-x)\\
4x^2 - 2x - 1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

מהפתרון למשוואה הריבועית מתקבל:

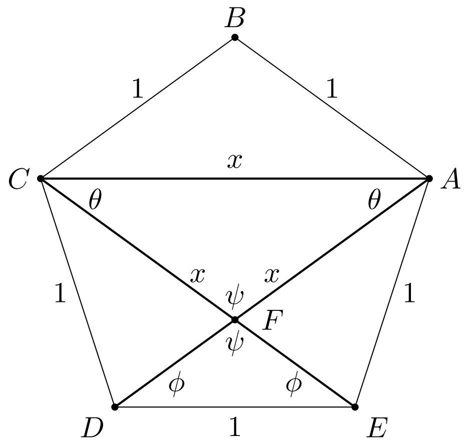
$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,,$$

שניתן לחשב עם $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ ולכן הוא ניתן לבנייה.

האיור שלהלן מראה שניתן לבנות מחומש משוכלל מ-$\cos 36^\circ$. מ-D במרחק $\cos 36^\circ$ מ-O בנו אנך ל-$\overline{OA}$ החותך את מעגל היחידה ב-C. בנו $\overline{OC}$. בנו אנך מ-A ל-$\overline{OC}$. החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב-B מגדיר את $\overline{AB}$, הצלע של המחומש החסום על ידי המעגל.



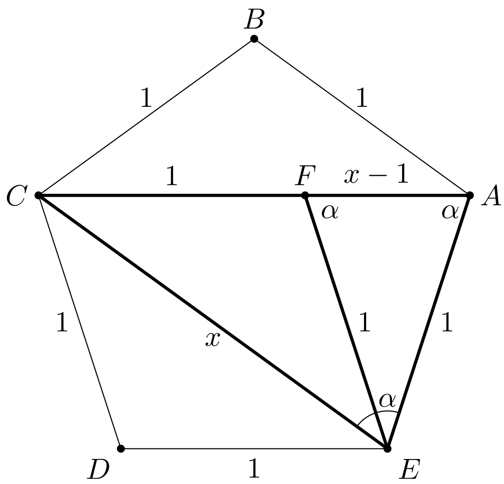
גיאומטריה הנה פתרון לתרגילים 2.3.3–2.3.4 ב-[6, עמוד 28], המראה שניתן לבנות מחומש משוכלל.



יהי $ABCDE$ מחומש משוכלל. לפי ההגדרה, כל הצלעות שווים וכל הזוויות הפנימיות שוות. קל להראות שכל האלכסונים שווים.[4] נקבע שאורכי הצלעות הם 1 ואורכי אלכסונים הם x.

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ כך ש-$\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ כך ש-$\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle EFD = \psi$ הן זוויות קודקודיות. $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi = 180^\circ$ ולכן $\theta = \phi$. לפי זוויות מתחלפות, נסיק ש-$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.

[4] למשל, $\triangle ABC \cong \triangle AED$ לפי צ.ז.צ., כך ש-$\overline{AC} = \overline{AD}$.



בנו קו דרך E המקביל ל־$\overline{DC}$ ותהי F נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AC}$. $\triangle ACE$ הוא משולש שווה־שוקיים עם זוויות בסיס α. $\triangle AEF$ הוא גם שווה־שוקיים ולכן $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$. מכאן ש־$\triangle ACE \sim \triangle AEF$:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

נכפיל ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

שהשורש החיובי שלה הוא:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

ניתן לבנות אורך כי הוא מורכב ממספרים רציונליים ושורשים ריבועיים. ניתן לבנות את המחומש המשוכלל כי מקטע הקו $\overline{AC}$ באורך $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ניתן לבנות משולש שווה־שוקיים $\triangle ABC$ שהשוקיים הם הצלעות באורך 1 והזווית $\angle ABC$ היא הזווית הפנימית.

References

[1] Jörg Bewersdorff. *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. American Mathematical Society, 2006.

[2] Todd W. Bressi and Paul Groth, editors. *Disquisitiones Arithmeticae*. Yale University Press, 2006.

[3] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette*, 67(442):290–292, 1983. `https://wwww.jstor.org/stable/3617271`.

[4] Po-Shen Lo. A different way to solve quadratic equations, 2019. `https://www.poshenloh.com/quadratic/`.

[5] Tom Rike. Fermat numbers and the heptadecagon, 2005. `https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf`.

[6] John Stillwell. *Mathematics and Its History (Third Edition)*. Springer, 2010.

[7] Wikipedia contributors. Angle bisector theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Angle_bisector_theorem&oldid=984147660`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].

[8] Wikipedia contributors. Heptadecagon — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Heptadecagon&oldid=975964212`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].

[9] Wikipedia contributors. Pentagon — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pentagon&oldid=983136827`, 2020. [Online; accessed 23-October-2020].