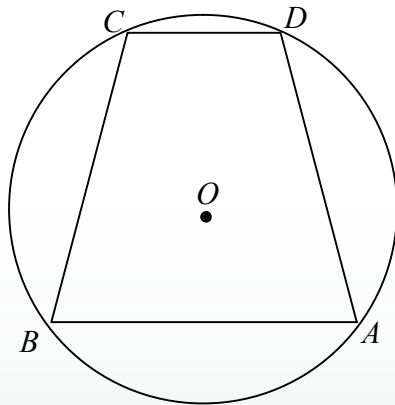


שאלה 5 מתוך בגרות קיץ 2016 מועד ב' (בגרות במתמטיקה 5 יחידות)

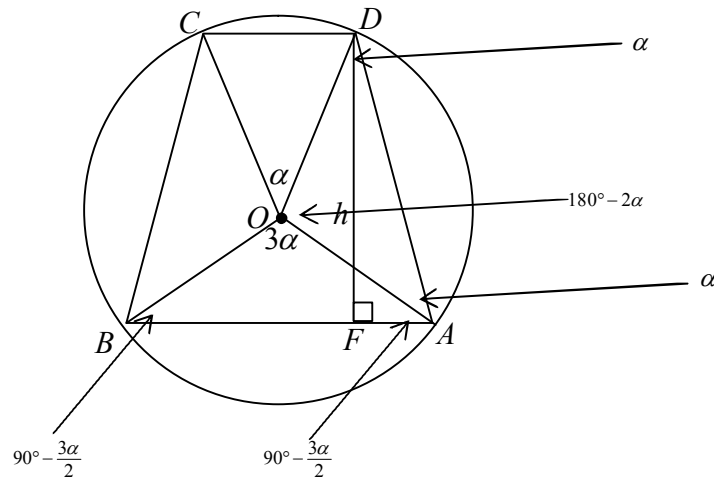


במעגל חסום טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).
מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).
רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h
נתון: $\angle BOA = 3\alpha$, $\angle COD = \alpha$.

- הבע באמצעות α את $\angle DAB$.
- הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-R.
- הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-h.
- נתון כי שטח המשולש COD הוא $\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. מצא את α .

פתרון: א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ב. $2R \cos \alpha$ ג. $\frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ ד. 30°

פתרון מלא:



סעיף א'

טרפז ABCD חסום במעגל, ולכן:

ABCD טרפז שווה שוקיים - $AD = BC$

AD=BC, ולכן:

$$\angle AOD = \angle BOC = \frac{360 - 3\alpha - \alpha}{2} = \frac{360 - 4\alpha}{2} = \boxed{180 - 2\alpha}$$

(זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים – שוות זו לזו)

משולש AOD משולש שווה שוקיים ($AO = DO = R$), ולכן:

$$\angle ODA = \angle OAD = \frac{180 - (180 - 2\alpha)}{2} = \frac{180 - 180 + 2\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \boxed{\alpha}$$

(זוויות בסיס במשו"ש שוות זו לזו, משלימות ל-180 מעלות במשולש OAD)

משולש AOB משולש שווה שוקיים ($AO=BO=R$), ולכן:

$$\angle OBA = \angle OAB = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} = \boxed{90^\circ - \frac{3\alpha}{2}}$$

(זוויות בסיס במשולש שוות זו לזו, משלימות ל-180 מעלות במשולש OAB)

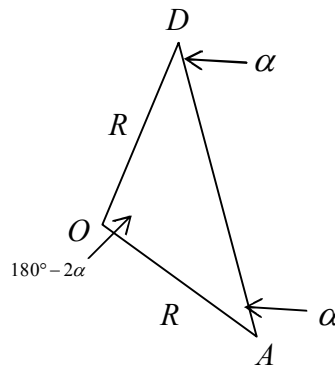
ולכן:

$$\angle DAB = \angle OAB + \angle DAO = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2} + \alpha = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2} + \alpha = \boxed{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

משולש AEC הוא משולש עם 5 נתונים (3 זוויות, 2 צלעות), נשתמש במשפט הסינוסים ונמצא את צלע AD, שוק הטרפז:



$$\frac{AD}{\sin \angle AOD} = \frac{DO}{\sin \angle DAO} \rightarrow \frac{AD}{\underbrace{\sin(180^\circ - 2\alpha)}_{\sin 2\alpha}} = \frac{R}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{AD}{\underbrace{\sin 2\alpha}_{2 \sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

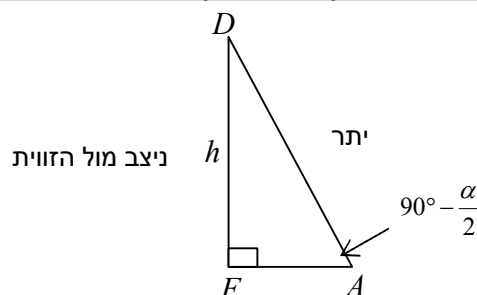
$$\rightarrow \frac{AD}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha} \rightarrow AD = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot R}{\sin \alpha} \rightarrow AD = \frac{2 \cancel{\sin \alpha} \cos \alpha \cdot R}{\cancel{\sin \alpha}}$$

$$\rightarrow \boxed{AD = 2 \cos \alpha \cdot R}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

משולש ADF הוא משולש ישר זווית עם 3 נתונים (α , h , 90 מעלות), נשתמש בהגדרת הסינוס ונמצא את אורך AD, שוק הטרפז:



$$\sin \angle DAF = \frac{\text{ניצב מול הזווית}}{\text{יתר}} = \frac{DF}{AD} \rightarrow \sin \underbrace{\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}_{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{AD} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{AD}$$

$$\rightarrow \boxed{AD = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}}$$

תשובה סופית סעיף ג'

סעיף ד'

$$S_{\triangle COD} = \boxed{\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad \text{מצד אחד נתון:}$$

מצד שני נחשב:

$$S_{\triangle COD} = \frac{CO \cdot DO \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{R \cdot R \cdot \sin \alpha}{2} = \boxed{\frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2}}$$

נשווה בין שני הערכים:

$$\frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

מצאנו בסעיף ג' כי $AD = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ נבודד את h, ונקבל:

$$h = AD \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

מצאנו בסעיף ב' כי $AD = 2 \cos \alpha \cdot R$ נבודד את R ונקבל:

$$R = \frac{AD}{2 \cos \alpha}$$

נציב את h ו-R ונקבל:

$$\frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{\left(\frac{AD}{2 \cos \alpha}\right)^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\left(AD \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{\frac{AD^2 \cdot \sin \alpha}{4 \cos^2 \alpha}}{2} = \frac{AD^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{AD^2} \cdot \sin \alpha}{8 \cos^2 \alpha} = \frac{\cancel{AD^2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \cancel{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{8 \underbrace{\cos^2 \alpha}_{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{12} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{8}{12}$$

$$\rightarrow 12 \sin \alpha = 8(1 - \sin^2 \alpha) \rightarrow 12 \sin \alpha = 8 - 8 \sin^2 \alpha \rightarrow 8 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha - 8 = 0$$

נסמן $\sin \alpha = t$

$$8t^2 + 12t - 8 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{-12 \pm 20}{16}$$

$t_1 = 0.5$
 $t_2 = -2$

נציב את $t_1 = 0.5$, $t_2 = -2$ ב- $\sin \alpha = t$

~~$t_2 = -2: \sin \alpha = -2$~~
 $t_1 = 0.5: \sin \alpha = 0.5$
אי שוויון טריגונומטרי

$\sin \alpha = 0.5$ \rightarrow $\sin \alpha = \sin 30^\circ$ \rightarrow $\begin{cases} \alpha = 30^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

פתרון כללי למשוואה הטריגונומטרית

ה- α היא זווית במשולש ולכן $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
אך בגלל הזווית $\sphericalangle AOB = 3\alpha$ לא ייתכן כי $\alpha = 150^\circ$, כי אז זווית AOB תהיה גדולה מ- 360° מעלות.

לכן: $\alpha = 30^\circ$

תשובה סופית סעיף ד'