התחפושות הרבות של אינדוקציה

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

רקע

- החזרת אינדוקציה לתכנית הלימודים
- קורס "המתמטיקה של התכנות" למורים למתמטיקה בתכנית רוטשילד־ויצמן:
  - המרת בעיות לנוסחאות בלוגיקה ופתרונן על ידי בדיקה ממוחשבת של נכונות הנוסחאות.
  - ייצוג טענות נכונות של תכניות על ידי נוסחאות בלוגיקה והוכחת נכונות הטענות.

אינדוקציה מיבנית על נוסחאות בלוגיקה

משפט: התכונה X מתקיימת עבור כל נוסחה.

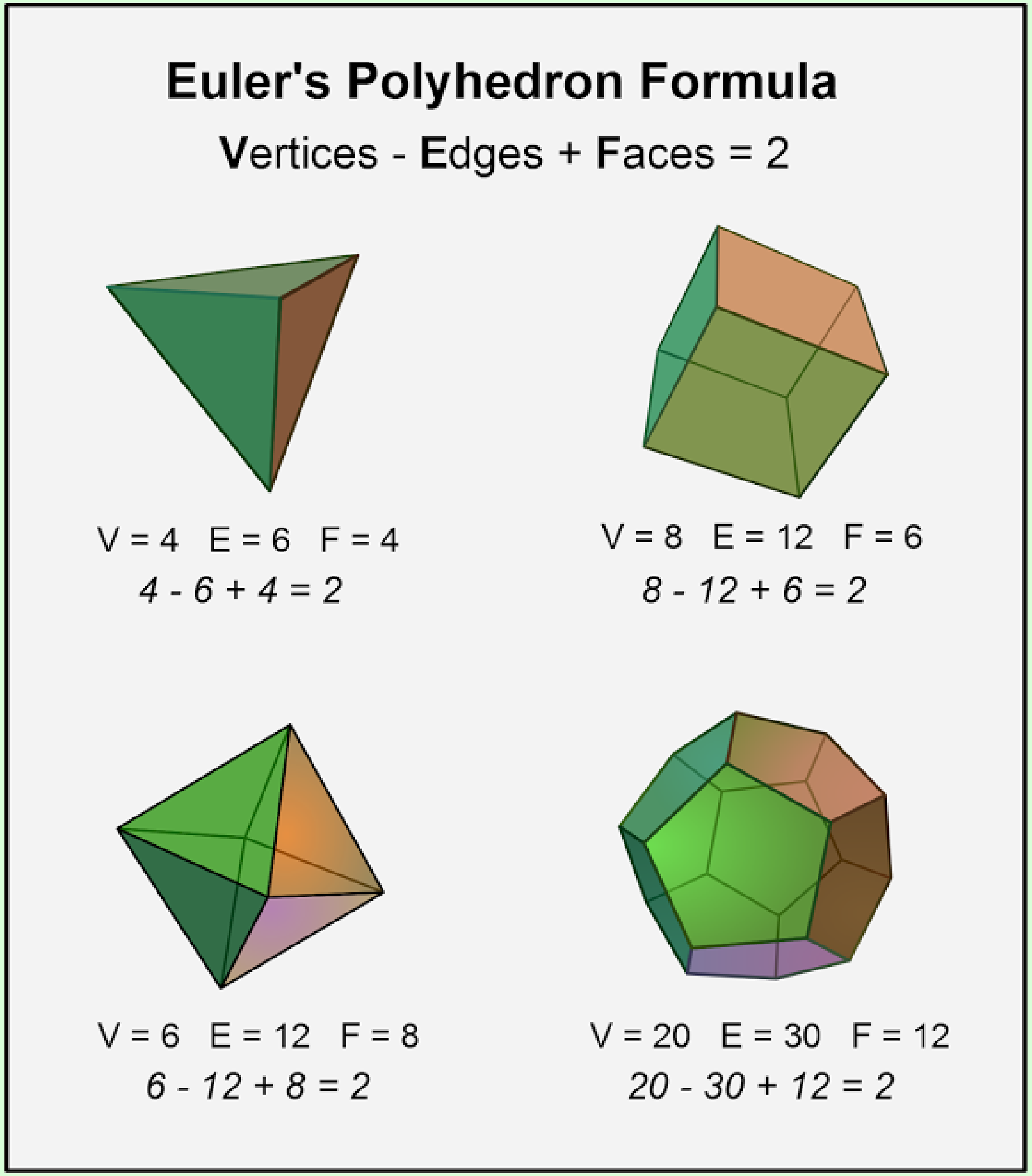
- טענת בסיס: X מתקיימת עבור כל נוסחה אטומית p.
- הנחת האינדוקציה: X מתקיימת עבור A, B.
- הצעד האינדוקטיבי: X מתקיימת עבור $A \wedge B, A \vee B, A \to B$.
- לפי עיקרון האינדוקציה, X מתקיימת לכל נוסחה.

אינדוקציה מיבנית על סדרת חישוב

משפט: התכונה X מתקיימת בכל מצב במהלך ביצוע של תכנית.

- טענת בסיס: X מתקיימת במצב התחילי של התכנית.
- הנחת האינדוקציה: X מתקיימת במצב s.
- הצעד האינדוקטיבי: X מתקיימת בכל מצב s' אליו מגיע התכנית מביצוע פקודה במצב s.
- לפי עיקרון האינדוקציה, X מתקיימת בכל מצב במהלך ביצוע התכנית.

אינדוקציה נמצאת בכל מקום



אינדוקציה נמצאת בכל מקום

- טריגונומטריה:

$$\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 4\theta\cdot\cdots\cdot\cos 2^{n-1}\theta=\frac{\sin 2^n\theta}{2^n\sin\theta}.$$

- לוגיקה: ניתן להמיר כל נוסחה בתחשיב הפסוקים לנוסחה במבנה 3CNF.

- מדעי המחשב: נתון ביטוי רגולרי, ניתן לבנות אוטומט סופי שמקבל את השפה של הביטוי.

קצת נסחפתי

התחפושות הרבות של אינדוקציה

מוטי בן־ארי

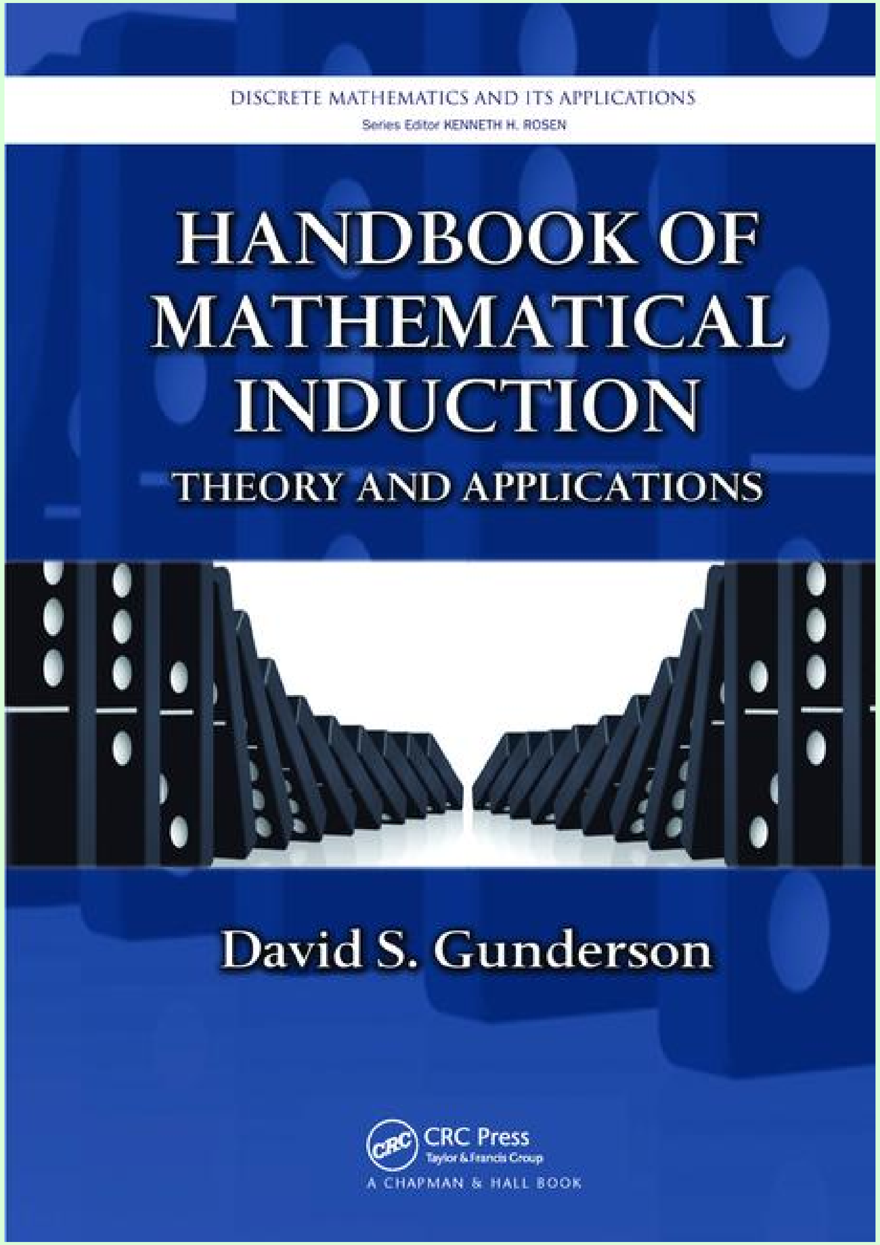
המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.6.1

מישהו נסחף יותר ממני!



אי־אפשר בלי אינדוקציה!

Fundamental Theorem of Arithmetic

משפט: ניתן לפרק כל מספר שלם למכפלה של מספרים ראשוניים בדרך אחת (הסדר לא חשוב).

$$337,500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \,.$$

אי־אפשר בלי אינדוקציה!

הוכחת הקיום של פירוק למספרים ראשוניים

- טענת בסיס: אם n ראשוני, אין מה להוכיח.
- הנחת האינדוקציה: כל $n \geq k$ ניתן לפרק למכפלה של מספרים ראשוניים.
- הצעד האינדוקטיבי: אם $n+1$ ראשוני, המשפט נכון. אחרת, $n+1 = n' \cdot n''$ כאשר $n \geq n', n''$. לפי הנחת האינדוקציה (אינדוקציה שלמה) יש ל־$n+1$ פירוק למכפלה של מספרים ראשוניים.
- לפי עיקרון האינדוקציה, המשפט נכון (אינדוקציה 1).

אי־אפשר בלי אינדוקציה!

הוכחת פירוק בדרך אחת

הזהות של Bézout:

$$\gcd(n_1, n_2) = a \cdot n_1 + b \cdot n_2$$

$$\gcd(15, 81) = 11 \cdot 15 + (-2) \cdot 81 = 165 - 162 = 3$$

$$\gcd(25, 81) = 13 \cdot 25 + (-4) \cdot 81 = 325 - 324 = 1\,.$$

הוכחה באמצעות עיקרון הסדר הטוב (גם אינדוקציה 2).

אי־אפשר בלי אינדוקציה!

הלמה של אוקלידס: אם p **ראשוני מחלק את** $n = n_1 \cdot n_2$**, אזי** p **מחלק את** n_1 **או** p **מחלק את** n_2**.**

הוכחה באמצעות הזהות של Bézout.

אי־אפשר בלי אינדוקציה!

הלמה הכללית של אוקלידס: אם p **ראשוני מחלק את** $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$**, אזי** p **מחלק אחד מ־**$n_i,\ 1 \le i \le k$**.**

הוכחה: $k = 2$ הוא הלמה של אוקלידס.

$k > 2$:

$$n = (n_1 \cdot n_2 \cdots n_{k-1}) \cdot n_k\,.$$

לפי הלמה של אוקלידס, p מחלק את n_k או p מחלק את $n_1 \cdot n_2 \cdots n_{k-1}$. לפי אינדוקציה שלמה, p מחלק את אחד מ־$n_i,\ 1 \le i \le k-1$ (אינדוקציה 3).

אי־אפשר בלי אינדוקציה!

נניח בשלילה שעבור $\{p_i\} \neq \{q_j\}$ ראשוניים:

$$n = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_m \, .$$

לפי הלמה הכללית של אוקלידס, p_1 מחלק את q_i עובר $1 \leq i \leq m$. **ללא הגבלת הכלליות** p_1 מחלק את q_1.

p_1, q_1 ראשוניים, ולכן $p_1 = q_1$ וניתן לצמצם את המכפלה.

נמשיך באותה דרך עד שייגמרו כל ה־p_i או כל ה־q_j.

אינדוקציה סמויה

- הביטוי **ללא הגבלת הכלליות** מסתיר אינדוקציה (4) תוך שימוש בחוקי החילוף והקיבוץ:

$$n = (q_1 \cdot q_2) \cdot (q_3) \cdot (q_4 \cdot q_5 \cdot q_6) \cdots .$$

- הביטוי **נמשיך באותה דרך** מסתיר אינדוקציה (5).

קיימת הוכחה אינדוקטיבית של Zermelo ללא שימוש בזהות של Bézout.

עיקרון הסדר הטוב

עיקרון הסדר הטוב: בכל קבוצה של מספרים שלמים חיוביים קיים איבר קטן ביותר.

משפט: אם עיקרון הסדר הטוב נכון, גם עיקרון האינדוקציה נכון.

הוכחה: נניח בשלילה שאינדוקציה לא נכונה. תהי S קבוצת המספרים עבורם אינדוקציה לא נכונה, כלומר: $X(1)$ נכונה, אם מניחים ש־$X(n)$ נכונה, אזי $X(n+1)$ נכונה, אבל עבור כל $k_i \in S$, $X(k_i)$ לא נכונה.

עיקרון הסדר הטוב

$X(1)$	$X(2)$	$X(3)$	$X(4)$	$\cdots$	$X(56)$	$X(57)$	$\cdots$
$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$

$X(127)$	$\cdots$	$X(158)$	$X(159)$	$\cdots$	$X(542)$	$\cdots$
$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$

$S = \{158, 57, 542, 159, \cdots\}$. לפי עיקרון הסדר הטוב, קיים איבר הקטן ביותר בקבוצה, כאן 57, ולכן $X(56)$ נכונה. לפי הצעד האינדוקטיבי $X(57)$ נכונה. סתירה!

עיקרון הסדר הטוב

משפט: אם עיקרון האינדוקציה נכון, עיקרון הסדר הטוב נכון.

הוכחה: תהי S קבוצה **לא־ריקה** של המספרים החיוביים.
נניח שאין איבר קטן ביותר בקבוצה S.

$$S = \{\ldots, 37, 175, 539, \ldots\}.$$

נגדיר: $X(n)$ נכונה אם לכל $k \leq n$, k **אינו** איבר של S.

עיקרון הסדר הטוב

$$X(1) \quad X(2) \quad X(3) \quad \cdots \quad X(n) \quad X(n+1)$$

$$1 \notin S \quad 2 \notin S \quad 3 \notin S \quad\quad n \notin S \quad (n+1) \, ?\!\in\!? \, S$$

- טענת בסיס: 1 הוא המספר החיובי הקטן ביותר, ולכן אם אין מספר קטן ביותר ב־S, 1 לא יכול להיות ב־S, ו־$X(1)$ נכונה.

עיקרון הסדר הטוב

$$X(1) \quad X(2) \quad X(3) \quad \cdots \quad X(n) \qquad X(n+1)$$

$$1 \notin S \quad 2 \notin S \quad 3 \notin S \qquad\qquad n \notin S \quad (n+1)\ ?\in?\ S$$

- הנחת האינדוקציה: $X(k)$ נכונה, לכן $k \leq n$.

- הצעד האינדוקטיבי: לפי הנחת האינדוקציה, אם

  $n+1$ ב־S, אזי $n+1$ הוא האיבר הקטן ביותר ב־S.
  סתירה. לכן, $n+1$ אינו ב־S ו־$X(n+1)$ נכונה.

- לפי אינדוקציה, $X(n)$ נכונה לכל המספרים החיוביים,
  כלומר, S היא קבוצה **ריקה**. סתירה.

פנינה

משפט: כל מספר פיבונצ'י רביעי מתחלק בשלוש!

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,.$$

$$1, 1, 2, \mathbf{3}, 5, 8, 13, \mathbf{21}, 34, 55, 89, \mathbf{144}, 233, 377, 610, \ldots\ .$$

הוכחה:

טענת בסיס: $f_4 = 3$.

הנחת האינדוקציה: f_{4n} מתחלק ב־3.

פנינה

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}\,. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ מתחלק ב־3 ולפי הנחת האינדוקציה גם f_{4n}.

תרגיל: $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

מסקנות

- אינדוקציה היא לא תבנית קבועה אלא מושג בסיסי במתמטיקה.
- רצוי שמורים יכירו אינדוקציה לעומקה ולרוחבה.
- הוראת עיקרון הסדר הטוב עשויה להקל על התלמידים במפגשם הראשון עם אינדוקציה.