1 Задача [4 балла]

Установлено, что в некоторой местности июне в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из 10-ти случайно взятых в этом месяце дне будет:

a) ровно 3 дождливых дня

b) ни одного дождливого дня

c) не более 5-ти дождливых дней

d) наивероятнейшее число дождливых дней

a)

C_{12}^{3} – кол-во способов выбрать 3 дождливых дня из 12.

C_{18}^{7} – кол-во способов выбрать 7 не дождливых дней из (30 - 12) дней.

C_{30}^{10} – кол-во способов выбрать 10 любых дней из 30.

m $= C_{12}^{3} * C_{18}^{10-3} = C_{12}^{3} * C_{18}^{7}$

n $= C_{30}^{10}$

p = m/n = 1088/4669 ≈ 0.233

Ответ: 0.233

b)

$$\frac{C(12, 0) \cdot C(18, 10)}{C(30, 10)} = \frac{C(18, 10)}{C(30, 10)}$$

$$convert\left(\frac{\text{binomial}(18, 10)}{\text{binomial}(30, 10)}, float\right)$$

0.001456414650

Ответ: 0.0015

c)

$$P_{10}(\leq 5) = \sum_{i=0}^{5} \frac{C(12, i) \cdot C(18, 10 - i)}{C(30, 10)}$$

$$convert\left(\sum_{i=1}^{5}\frac{\text{binomial}(12, i)\cdot\text{binomial}(18, 10-i)}{\text{binomial}(30, 10)} + \left(\frac{18}{30}\right)^{10}, float\right)$$

0.8863185695

Ответ: 0.886

d)

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

$$solve\left(\frac{10\cdot 12}{30} - \frac{18}{30} \le k0 \le \frac{10\cdot 12}{30} + \frac{12}{30}\right)$$

$$\left[\frac{17}{5}, \frac{22}{5}\right]$$

Ответ: 4

2 Задача [3 баллов]

В корзине находится n шаров. Каждый из них равновероятно может оказаться либо белым, либо красным. Из урны вынимается m раз по одному шару, причем вынутый шар каждый раз возвращается обратно, и шары перемешиваются. Среди вынутых m шаров k оказались белыми. Определить вероятность того, что среди n шаров урны ровно l белых.

A – выпадет k из m

B – выпадет l из n

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \frac{C(n, l)}{n^l}$$

$$P(A) = \frac{C(m, k)}{C(n, k)}$$

$$P_A(B) = \frac{1 \cdot C(n,l) \cdot C(n,k)}{n^l \cdot C(m,k)}$$

Ответ: $\boldsymbol{\dfrac{C(n,l) \cdot C(n,k)}{n^l \cdot C(m,k)}}$

3 Задача [3 балла]

Доказать, что $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\bar{A}_1 \mid \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_3) P(\bar{A}_3)$

$p(A / B) = p(B / A) p(A)$

$1 - p(\bar{A}_1 / \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cdot p(\bar{A}_2 / \bar{A}_3) \cdot p(\bar{A}_3) = 1 - p(\overline{A_1} / \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cdot p(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) =$
$1 - p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = p\left(\overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3}\right) = |\text{ по правилу де Моргана }| =$
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

4 Задача [4 балла]

Из полной колоды карт (52 карты) вынимается одна карта. Рассматриваются следующие события:

- A - появление туза
- B - появление карты черной масти
- C - появление пикового туза
- D - появление короля

Зависимы или независимы следующие пары событий:

1. A и B
2. A и C
3. B и C
4. B и D
5. C и D

1. A и B

P(A) = 4/52 P(B) = ½

$P(A \cap B) = 2/52$

$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$ => **A и B независимы**

2. A и C

   $P(A) = 4/52$

   $P(C) = 1/52$

   $P(A \cap C) = 1/52$

   $P(A \cap C) \neq P(A)*P(C)$ => **A и C зависимы**

3. B и C

   $P(B) = ½$

   $P(C) = 1/52$

   $P(B \cap C) \neq P(B)*P(C)$ => **B и D зависимы**

4. B и D

   $P(B) = ½$

   $P(D) = 4/52$

   $P(B \cap D) = 2/52$

   $P(B \cap D) = P(B)*P(D)$ => **B и D независимы**

5. C и D

   $P(C) = 1/52$

   $P(D) = 4/52$

   $P(C \cap D) \neq P(C)*P(D)$ => **C и D зависимы**

5 Задача [2 балла]

Завод произвел партию в 10000 стеклянных ваз и тщательно упаковал. Вероятность того, что ваза разобьется при транспортировке, равна p. Найти вероятность того, что из 10000 ваз при транспортировке разобьётся ровно 5.

a) по формуле Пуассона. $p = 0.0005$.

b) по локальной теореме. Муавра-Лапласа. $p = 0.009$.

a)

$$n := 10000 :$$
$$p := 0.0005 :$$
$$\alpha := n \cdot p :$$
$$k := 5 :$$
$$P_n(k) = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \exp(-\alpha)$$
$$P_{10000}(5) = 0.1754673698$$

Ответ: 0.18

b)

$$n := 10000 :$$
$$p := 0.009 :$$
$$k := 5 :$$
$$x := \frac{n \cdot p - k}{\operatorname{sqrt}(n \cdot p \cdot (1 - p))};$$
$$x := 9.000379955$$
$$\varphi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\operatorname{sqrt}(2 \cdot \pi)}; \ \varphi := rhs(\%) :$$
$$\varphi(9.000379955) = 7.244082892\ 10^{-19}\ \sqrt{2}$$
$$P_n(k) = \frac{\varphi}{\operatorname{sqrt}(n \cdot p \cdot (1 - p))}$$
$$P_{10000}(5) = 7.670529230\ 10^{-20}\ \sqrt{2}$$
$$convert(rhs(\%), float)$$
$$1.084776646\ 10^{-19}$$

Ответ: 1.085e-19

6 Задача [2 балла]

Охотник стреляет $2N$ раз ($N \to \infty$). Попадание в цель и промах равновероятны. Найти вероятность того, что число попаданий будет заключено между числами $N - \sqrt{2N}/2$ и $N + \sqrt{2N}/2$.

$$n := 2 \cdot N:$$

$$p := 0.5:$$

$$k1 := N - \frac{\operatorname{sqrt}(2 \cdot N)}{2}:$$

$$k2 := N + \frac{\operatorname{sqrt}(2 \cdot N)}{2}:$$

$$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\operatorname{sqrt}(n \cdot p \cdot (1 - p))}:$$

$$x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\operatorname{sqrt}(n \cdot p \cdot (1 - p))}:$$

$$\Phi := \mathbf{proc}(x):$$

$$\mathbf{return}\ \frac{1}{\operatorname{sqrt}(2 \cdot \pi)} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t;$$

$$\mathbf{end\ proc}:$$

$$P_n(k1 \le k \le k2) = \Phi(x2) - \Phi(x1);$$

$$P_{2N}\left(N - \frac{\sqrt{2}\sqrt{N}}{2} \le 5 \le N + \frac{\sqrt{2}\sqrt{N}}{2}\right) = 0.4827343690\sqrt{2}$$

$$convert(rhs(\%), float)$$

$$0.6826894915$$

Ответ: 0.68

7 Задача [4 балла]

В урне находится n шаров, 4 из которых бракованные. Достаются k шаров, при этом за 1 раз равновозможно вытащить любой из оставшихся шаров.

a) Найти вероятность того, что будет вытащен хотя бы один бракованный мяч.

b) Найти вероятность того, что будет вытащено ровно 2 бракованных мяча.

a)

Вер-ть достать бракованный шар p = ½ - const, исходя из условия.

$q = 1 – p \Rightarrow q = p$.

$P_k(>=1) = 1-1/2^k$.

Ответ: $1-1/2^k$

b)

Т.к. p – const, то

$P_k(2) = C(n, k)/2^k$

Ответ: $C(n, k)/2^k$

8 Задача [3 балла]

На определенном этапе расследования инспектор убежден на 70% в виновности подозреваемого. Предположим, что новая улика показывает, что преступник левша. 20% населения левши. На сколько инспектор будет уверен в том, что подозреваемый виновен, если он левша.

P(g) = 0.7 – вер-ть того, что преступник виновен

P(l) = 0.2 – вер-ть того, что преступник левша

$$P(g/l) = \frac{p(l/g)\cdot p(g)}{p(l/g)\cdot p(g)+p(l/\bar{g})p(\bar{g})} = \frac{1\cdot 0.7}{1\cdot 0.7+0.2\cdot 0.3} = 0.921$$

Ответ: 0.921

9 Задача [4 балла]

Футбольная команда состоит из 20 нападающих и 20 защитников. Игроки должны быть расселены случайным образом в комнаты по 2 человека.

a) Какая вероятность того, что нет комнаты, в которой живет нападающий и защитник?

b) Какая вероятность того, что есть $2i$ комнат, в которых проживают пары нападающий-защитник?

a)

Кол-во способов выбрать 2 тела из одной команды для заселения:

m = C(20, 2)

Из всевозможных случаев:

n = C(40, 2)

Кол-во способов выбрать 2 тела из другой команды для заселения:

m = C(20, 2)

Из всевозможных

N = C(38, 2), тк 2 тела уже заселены.

И т.д., получаем:

$$p = \prod_{i=0}^{9} \frac{(C(20-2\cdot i, 1))^4}{C(40-4\cdot i, 2)\cdot C(38-4\cdot i, 2)}$$

$$convert\left(\prod_{i=0}^{9} \frac{(\mathrm{binomial}(20-2\cdot i, 1))^4}{\mathrm{binomial}(40-4\cdot i, 2)\cdot \mathrm{binomial}(38-4\cdot i, 2)}, float\right)$$

0.0002450229719

Ответ: 2.45e-4

10 Задача [4 балла]

Боб случайным образом выбирает букву из слова RESERVE и затем случайным образом из слова VERTICAL. Найти вероятность того, что он выберет одинаковые буквы.

RESERVE – 3E, 2R, V

VERTICAL – E, R, V

Вероятность, того что из обеих слов будет выбрана буква E:

$$\frac{C(3,1)}{C(7,1)} \cdot \frac{1}{C(8,1)}$$

Так же считаем вероятности для отдельных событий и суммируем:

$$\frac{C(3,1)}{C(7,1)} \cdot \frac{1}{C(8,1)} + \frac{C(2,1)}{C(7,1)} \cdot \frac{1}{C(8,1)} + \frac{1}{C(7,1)} \cdot \frac{1}{C(8,1)} \quad = 0.107$$

Ответ: 0.107

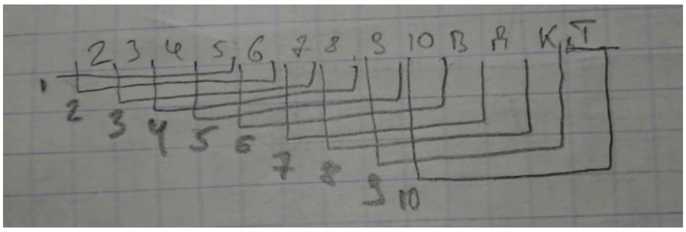
12 Задача [6 баллов]

Из колоды в 52 карты вытягиваются 5 карт.

a) Комбинация из 5 последовательных по рангу карт разной масти называется "стрит". Например, 5♠, 6♢, 7 ♣, 8♠, 9 ♣ - стрит. Какая вероятность того, что выпадет стрит.

b) Комбинация 5 карт, состоящая из 2-ух карт одного ранга и 3-ех карт другого ранга, называется фулл хаус. Например, 5♠, 5♣, Д♠, Д♢, Д♡. Какая вероятность того, что выпал фулл хаус.

а)



Всего существует 10 вариантов «стрита». В «стрите» 5 карт, каждая из которых может быть любой из 4 мастей.

Получаем кол-во благоприятных случаев:

$m = 10*4^5$

$n = C(52, 5)$ – кол-во вариантов выбора 5-ти карт из колоды.

$p = m/n = 0.00394$

Ответ: 0.00394

б)

Выбираем кол-во благоприятных случаев для 2х карт. Имеем в наличии все 13 рангов, так же карты должны быть разных мастей:

C(13, 1) –кол-во вариантов выбора ранга для 2х карт.

C(4, 2) – кол-во вариантов выбора мастей для двух карт.

Для 3ки имеем 12 рангов на выбор, так же три карты должны быть разных мастей:

C(12, 1) – кол-во вариантов выбора ранга.

C(4, 3) – кол-во вариантов выбора мастей.

Всего исходов:

C(52, 5)

Получаем:

P = C(13, 1)*C(12, 1)*C(4, 3)*C(4, 2)/C(52, 5) =

$$convert\left(\frac{\text{binomial}(13, 1)\cdot\text{binomial}(12, 1)\cdot\text{binomial}(4, 3)\cdot\text{binomial}(4, 2)}{\text{binomial}(52, 5)}, float\right)$$

0.001440576230

Ответ: 0.00144

13 Задача [5 баллов]

Имеется группа в составе N стрелков. При одном выстреле в мишень i-ый стрелок попадает с вероятностью p_i. Вызывается наугад один из стрелков. Произведя один выстрел по мишени, он попал в нее. Найти вероятность того, что при следующих четырех выстрелах того же самого стрелка будет 2 попадания и 2 промаха.

Вызов стрелка -> попадание -> 2 попадания, 2 промаха

1/N -> p_i -> $C(4, 2)p_i^2(1-p_i)^2$

Считаем полную вероятность:

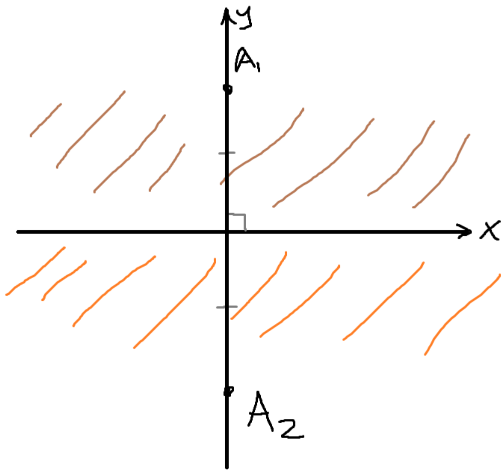
$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot p_i\, C(4, 2)\cdot p_i^2\cdot q_i^2$$

Ответ: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C(4, 2)\cdot p_i^3\cdot(1-p_i)^2$

15 Задача [6 баллов]

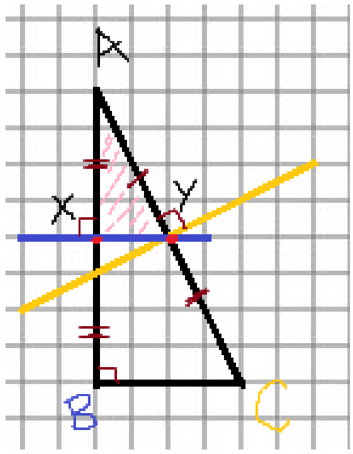
В прямоугольном треугольнике ABC , в котором $\angle A = \alpha$, случайным образом выбрана точка. Какова вероятность того, что она расположена ближе к вершине A , чем к вершинам B и C ?

Через 2 любые неодинаковые точки можно провести прямую => можно соединить 2 точки отрезком, провести через середину отрезка перпендикуляр.



Для удобства можно повернуть систему координат так, чтобы отрезок, проведенный между данными точками, совпадал с какой-нибудь осью, например Oy, и поместить середину отрезка в центр системы координат. Тогда ось Ox и будет являться серединным перпендикуляром. Все точки, что находятся в верхней полуплоскости (выше оси Ox) будут ближе к точке A1. Остальные точки, которые не лежат на оси Ox, будут ближе к A2. Те точки, которые лежат на оси Ox, равноудалены от A1 и A2.

Применяем вышесказанное, получаем:



Находим площадь треугольника AXY, $S_{AXY} = S_{ABC}/4 \Rightarrow p = ¼$.

Ответ: 1/4

16 Задача [7 баллов]

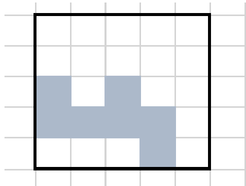
Дана клетчатая плоскость $n \times n$.

a) Сколько на этой плоскости можно нарисовать различных букв Ц?

b) На плоскость бросается буква Ц случайного размера (1 из всевозможных, которые могут быть размещены на этой плоскости). Найти вероятность того, что в букве ц задействовано 10 клеток.

a)

Сперва определим, сколькими способами ‘Ц’ определенного размера можно поместить на поле n*n.



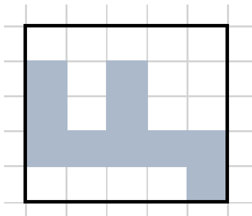
Как видно из рисунка, ‘Ц’ минимальных размеров можно сдвинуть на 2 позиции вверх (2 новых позиции + 1 начальная = 3) и на 1 клетку вправо (1+1 = 2). «Минимальная» ‘Ц’ имеет измерения 3 x 4.

Кол-во расстановок по вертикали: 3 = 5 – 3 + 1 = n - 3 + 1 = n – 2

Кол-во расстановок по горизонтали: 2 = 5 – 4 + 1 = n - 3

Введем i и j: i отображает, на сколько клеток увеличили ‘Ц’ по вертикали. j отображает, на сколько клеток увеличили ‘Ц’ по горизонтали.

Увеличим i и j на 1.



Тогда количество всевозможных позиций, при данных измерениях, по вертикали будет 2, по горизонтали 1.

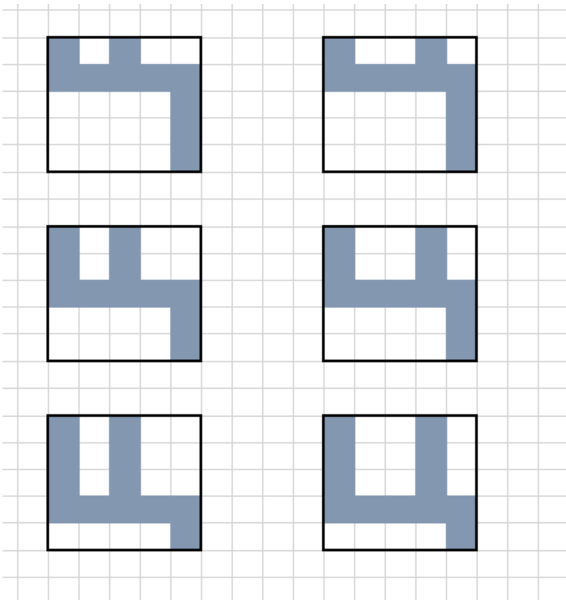
Кол-во расстановок по вертикали: 2 = 5 – 2 – 1 = n – 2 – 1 = n – 2 – i.

Кол-во расстановок по горизонтали: 1 = 5 – 3 – 1 = n – 3 – j.

Получаем, что количество перестановок по полю, в зависимости от размеров ‘Ц’, будет равняться (n-2-i)(n-3-j), где i и j – значения на которые увеличились высота и ширина ‘Ц’ соответственно. Перемножаем их, т.к.

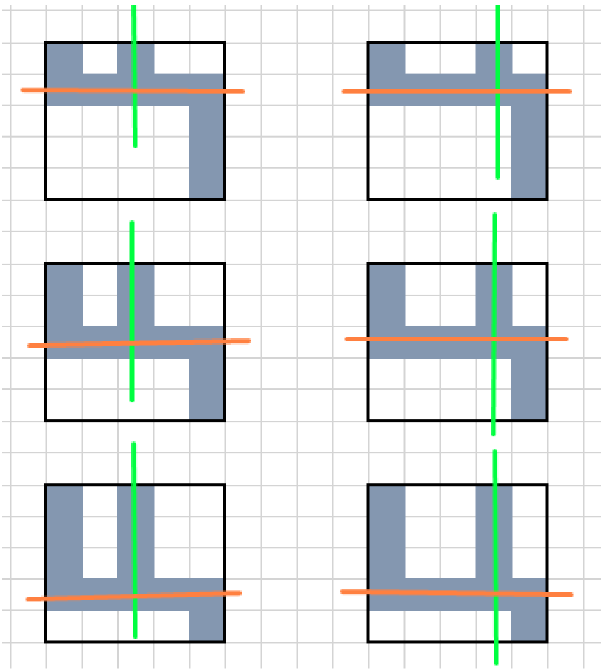
увеличение по вертикали и увеличение по горизонтали это события совместимые.

Но ведь увеличивая размеры ‘Ц’ мы увеличиваем кол-во ‘Ц’, которые имеют одинаковые измерения. Например:



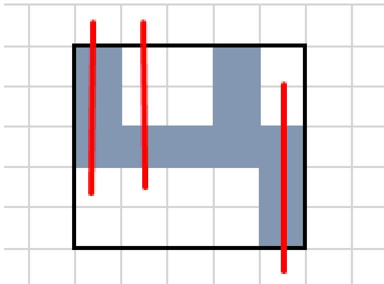
На поле 5*5, ‘Ц’, с увеличениями i = 2 и j = 1, имеет 6 разных комбинаций.

Для учета этих комбинаций решил воспользоваться методом перегородок. Например:



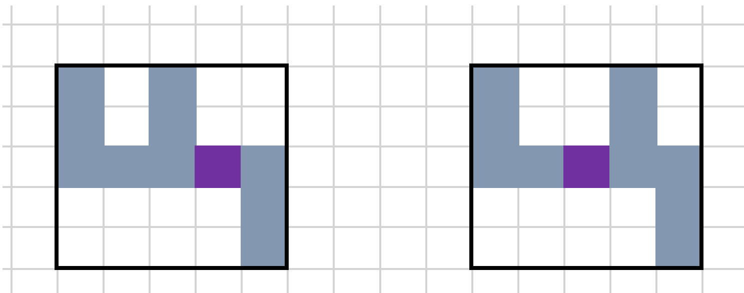
Зеленые и оранжевые линии и есть те самые перегородки.

В случае с перегородками по ширине, мы не можем ставить перегородку на 2 левые и правую вертикали, которые затрагивает ‘Ц’.

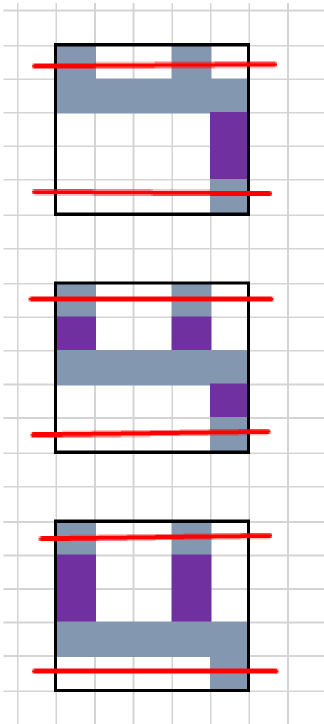


Т.к. перегородка может быть только 1, то на данной ‘Ц’ кол-во способов ее[перегородку] расставить на <u>2х позициях</u> будет равняться C(2, 1) = C(j + 1, 1).

j+1, т.к. кол-во добавленных клеток в ширину j = 1 => можно эту клетку пустить как в основание ‘Ц’, так и в длину ее хвоста. Например:



Такая же история и с перегородкой по вертикали:



Т.к. перемещение ‘Ц’ по вертикали, горизонтали, увеличение ее в высоту и длину это события совместимые, то просто перемножаем все, учитывая разные размеры ‘Ц’, получили:

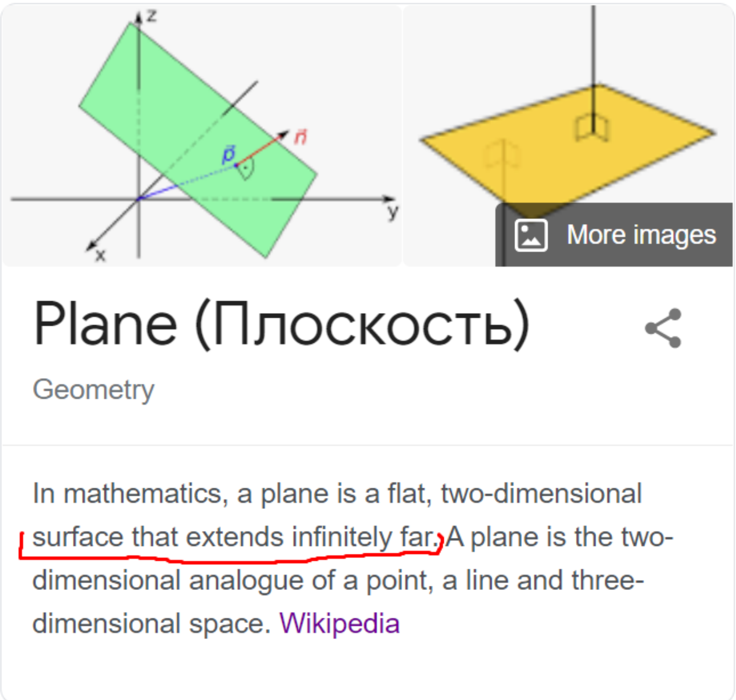
$$n = \sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{n-4}(n-2-i)(n-3-j)C_{i+1}^{1}C_{j+1}^{1}.$$

Или, если принимать i и j за измерения ‘Ц’, то:

$$n = \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=4}^{n}(n+1-i)(n+1-j)\, C_{i-2}^{1}C_{j-3}^{1}$$

Ответ: $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{n-4} C_{i+1}^{1}C_{j+1}^{1}(n-2-i)(n-3-j)}$

b)



На плоскость бросается буква Ц случайного размера (1 из всевозможных, которые могут быть размещены на этой плоскости). Найти вероятность того, что в букве ц задействовано 10 клеток.

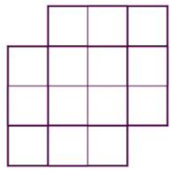
Каким бы не было кол-во благоприятных случаев, когда в ‘Ц’ задействовано 10 клеток (я, кстати, насчитал 12), оно конечно ($m \in R$), а число всевозможных исходов $n = \infty$, т.к. плоскость – бесконечная поверхность.

Поэтому $p = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n} = 0$, $m \in R$.

Ответ: 0

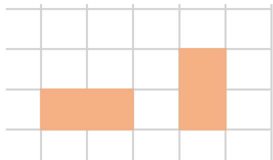
18 Задача [7 баллов]

Имеется клетчатая доска размером $n \times n$ в которой вырезаны 2 клетки в двух противоположных углах. Катя старается замостить эту доску костями домино. Каждая доминошка может покрыть ровно 2 клетки. Наслаивать их друг на друга нельзя. Найдите вероятность того, что Кате удастся это сделать.



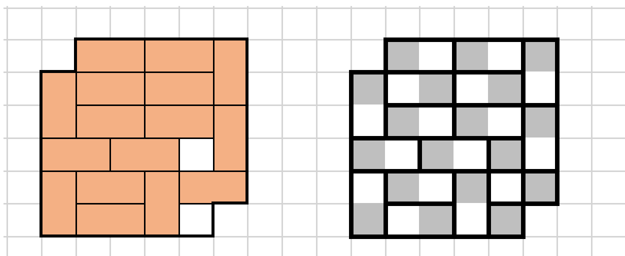
Если $n = 2*k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, то мы не сможем заполнить доску, т.к. кость имеет площадь 2 клетки, а $(n^2 - 1)$ – число нечетное.

Если $n = 2*k$, $k \in \mathbb{N}$, то мы все так же не сможем заполнить доску костями. Несмотря на то, что $(4k^2 - 2)/2 = 2k^2-1$, т.е. потребуется целое число костей. Однако, кости могут принимать только 2 позиции, вертикальную и горизонтальную:



Если мы покрасим доску, как шахматную, то на противоположных углах клетки будут иметь одинаковые цвета => удаленные клетки будут одинаковых цветов. Мы имели $2k^2$ белых и $2k^2$ черных клеток. Затем удалили клетки на противоположных углах, которые, например, были белыми. Теперь имеем $2k^2 – 2$ белых и $2k^2$ черных клеток.

С тех пор, как мы покрасили нашу доску, одна кость стала занимать одну черную и одну белую клетку. Мы смело можем разместить $2k^2 - 2$ костей, однако $2k^2 – (2k^2 – 2) = 2$, и именно столько белых, в нашем случае, клеток остается для заполнения. Вспоминаем, как располагаются белые клетки, вспоминаем, как располагаются кости, и получаем то, что не можем заполнить доску. Например:



Ответ: 0

19 Задача [8 баллов]

Каждый из N детей бросил игрушку в центр комнаты. Игрушки перемешивают, после чего каждый ребенок случайным образом выбирает игрушку.

a) Найдите вероятность того, что каждый ребенок выберет чужую игрушку.

b) Найдите вероятность того, что ровно k детей выберут свою игрушку.

а) Нам надо, чтобы каждый ребенок доставал любую, которая не его, игрушку, т.е. всего оставшихся игрушек n, а кол-во благоприятных случаев n – 1. Получаем:

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\ldots=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$$

Ответ: 1/N

b) Только k детям нужно вытащить свои игрушки, а это 1/n:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{N-k+1}$$

Остальные свои игрушки не получат, а это (n-1)/n:

$$\frac{N-k-1}{N-k}\cdot\frac{N-k-2}{N-k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}$$

Перемножаем:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{N-k+1}\cdot\frac{N-k-1}{N-k}\cdot\frac{N-k-2}{N-k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}=\frac{(N-k-1)!}{N!}$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{(N-k-1)!}{N!}}$