Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №5

Вычисление собственных значений и векторов

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.

Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

Цель выполнения задания: освоить методы вычисления собственных значений и векторов.

Краткие теоретические сведения.

Метод Якоби (вращений) использует итерационный процесс, который приводит исходную симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью последовательности *элементарных ортогональных преобразований* (в дальнейшем называемых *вращениями Якоби* или *плоскими вращениями)*. Процедура построена таким образом, что на $(k+1)$-ом шаге осуществляется преобразование вида

$$A^{(k)} \to A^{(k+1)} = V^{(k)*} A^{(k)} V^{(k)} = V^{(k)*} \ldots V^{(0)*} A^{(0)} V^{(0)} \ldots V^{(k)}, \ k=0,1,2\ldots, \qquad (5.1)$$

где $A^{(0)}= A$, $V^{(k)} = V^{(k)}{}_{ij}\ (\varphi)$ — ортогональная матрица, отличающаяся от единичной матрицы только элементами

$$v_{ii}= v_{jj} = cos\ \varphi \quad v_{ij} = - v_{ji} = -sin\ \varphi \ , \qquad (5.2)$$

значение φ выбирается при этом таким образом, чтобы обратить в 0 наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы $A^{(k)}$. Итерационный процесс постепенно приводит к матрице со значениями недиагональных элементов, которыми можно пренебречь, т.е. матрица $A^{(k)}$ все более похожа на диагональную, а диагональная матрица Λ является пределом последовательности $A^{(k)}$ при $k \to \infty$.

Алгоритм метода вращений.

1) В матрице $A^{(k)}$ $(k=0,1,2,\ldots.)$ среди всех недиагональных элементов выбираем максимальный по абсолютной величине элемент, стоящий выше главной диагонали; определяем его номера i и j строки и столбца, в которых

он стоит (если максимальных элементов несколько, можно взять любой из них);

2) По формулам

$$\cos\varphi_k = \sqrt{\frac{1}{2}(1+(1+p_k^2))^{-1}}, \quad \sin\varphi_k \quad \operatorname{sgn} p_k \sqrt{\frac{1}{2}(1-(1+p_k^2))^{-1}},$$

где

$$p_k = 2a_{ij}^{(k)} / (a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}).,$$

вычисляем $\cos\varphi_k$ и $\sin\varphi_k$, получаем матрицу $V^{(k)} = V^{(k)}_{ij}\ (\varphi_K)$.

3) По формулам

$$b_{si} = a_{si}^{(k)} \cos\varphi_k + a_{sj}^{(k)} \sin\varphi_k,$$
$$b_{sj} = -a_{si}^{(k)} \sin\varphi_k + a_{sj}^{(k)} \cos\varphi_k, \quad s = 1, 2, ..., n,$$

$$a_{is}^{(k+1)} = b_{is}\cos\varphi_k + b_{js}\sin\varphi_k,$$
$$a_{js}^{(k+1)} = -b_{is}\sin\varphi_k + b_{js}\cos\varphi_k, \quad s = 1, 2, ..., n.$$

находим элементы матрицы $A^{(k+1)}$.

3) Итерационный процесс останавливаем, когда в пределах принятой точности суммой квадратов всех недиагональных элементов матрицы $A^{(k+1)}$, обозначаемой $t(A^{(k+1)})$, можно пренебречь.

4) В качестве собственных значений матрицы A берем диагональные элементы матрицы $A^{(k+1)}$, в качестве собственных векторов – соответствующие столбцы матрицы

$$V = V^{(0)} V^{(1)} \dots V^{(k)}.$$

Основное достоинство метода Якоби заключается в том, что при выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов недиагональных элементов; сходимость этой суммы к нулю по мере увеличения числа шагов гарантирует сходимость процесса диагонализации.

ЗАДАНИЕ 5. С точностью 0,0001 вычислить собственные значения и собственные векторы матрицы А ,

где A = kC + D, A – исходная матрица для расчёта, k – номер варианта (0-15), матрицы C, D заданы ниже:

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}92 & -0{,}53 \\ 0{,}81 & 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}92 \\ 0{,}67 & 0{,}81 & 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}92 \\ 0{,}92 & 0{,}67 & 0{,}81 & 2{,}33 & -0{,}53 \\ -0{,}53 & 0{,}92 & 0{,}92 & -0{,}53 & 2{,}33 \end{bmatrix}.$$

Программная реализация.

Программа работает по вышеописанному алгоритму. Реализацию можно глянуть в прикрепленных файлах. Результат выполнения:

```
a =
[[ 2.53  0.81  0.87  0.92 -0.53]
 [ 0.81  2.53  0.81  0.87  0.92]
 [ 0.87  0.81  2.53  0.81  1.12]
 [ 0.92  0.87  0.81  2.53 -0.53]
 [-0.53  0.92  1.12 -0.53  2.53]]


values:
        [3.6458, 1.7462, 0.4878, 1.5838, 5.1865]
vectors:
        [0.422, -0.1492, -0.2276, 0.4243, -0.7535]
        [-0.3246, 0.6865, -0.6033, 0.2437, 0.0017]
        [-0.3557, 0.378, 0.4782, -0.3503, -0.6158]
        [-0.629, -0.3025, 0.2633, 0.666, 0.0032]
        [0.4409, 0.5217, 0.5349, 0.4407, 0.2303]



a*[ 0.422  -0.1492 -0.2276  0.4243 -0.7535] = [ 1.538507 -0.544091 -0.829777  1.546914 -2.74707 ] =
3.6458*[ 0.422  -0.1492 -0.2276  0.4243 -0.7535]

a*[-0.3246  0.6865 -0.6033  0.2437  0.0017] = [-0.566741  1.198829 -1.053385  0.42561   0.003062] =
1.746*[-0.3246  0.6865 -0.6033  0.2437  0.0017]

a*[-0.3557  0.378   0.4782 -0.3503 -0.6158] = [-0.173609  0.184268  0.233128 -0.170927 -0.30045 ] =
0.4881*[-0.3557  0.378   0.4782 -0.3503 -0.6158]

a*[-0.629  -0.3025  0.2633  0.666   0.0032] = [-0.9963   -0.479178  0.416938  1.054702  0.005082] =
1.5839*[-0.629  -0.3025  0.2633  0.666   0.0032]

a*[0.4409 0.5217 0.5349 0.4407 0.2303] = [2.286802 2.705584 2.77436  2.285688 1.194463] = 5.1867*[0.
4409 0.5217 0.5349 0.4407 0.2303]
```

В качестве проверки проводится произведение данной матрицы и собственных векторов.

Так же был рассмотрен метод Данилевского: Метод построен на том факте, что преобразование подобия S-1 AS не изменяет характеристического многочлена. С помощью такого преобразования исходная матрица A приводится к канонической форме Фробениуса.

$$\Phi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |\Phi - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Для матрицы Φ характеристический многочлен может быть легко записан, если последовательно разлагать определитель det|Φ - λ E| по элементам первого столбца. В результате получим:

$$det|\Phi - \lambda E_n| = (-1)^n(\lambda^n - p_n\lambda^{n-1} - \ldots - p_1\lambda \quad - p_0) = (-1)^n \operatorname{Pn}(\lambda)$$

Из последнего соотношения видно, что элементы 1-й строки матрицы в форме Фробениуса Φ являются коэффициентами её собственного многочлена и, следовательно, собственного многочлена исходной матрицы A. Матрицы Φ и A связаны между собой преобразованием подобия Φ=S^-1*A*S.

Решив полученное уравнение Pn(λ)=0, находим собственные значения матрицы A. Далее, неособенная матрица S, полученная в методе Данилевского, используется при нахождении собственных векторов матрицы A.

Построение матрицы S в методе Данилевского осуществляется последовательно с помощью n-1 преобразований подобия, которые переводят строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы Φ.

Матрица А приводится к Ф, в результате последовательного домножения справа на Mn-1 и слева на (Mn-1)^-1 , а S можно получить как S = Mn-1 Mn-2.. Mn-1.

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn-1}} & \cdots & \dfrac{1}{a_{nn-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{n1} & a_{n1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Заключение: освоил методы вычисления собственных значений и векторов матриц.