Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №7
Интерполяция сплайнами

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.
Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

1. Цель работы …...3
2. Краткие теоретические сведения …..3
3. Задание..9
4. Программная реализация...10
5. Тестирование..13
6. Заключение...16

Цель работы: изучить построение кубических интерполяционных сплайнов.

Краткие теоретические сведения:

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке *[a, b]*. Пусть мы имеем узлы $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и значения функции $y_0, \ldots, y_n$ в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$ - длина элементарного отрезка, $i = \overline{1, n}$.

Сплайном называется функция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a*, *b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

Степенью сплайна называется наивысший порядок степени многочлена.

Дефектом сплайна называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [a, b] производной.

Пример. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{x^3}{27} - x + 4, & 3 \le x < 4. \end{cases}$$

Очевидно, функция $S(x)$ является кубическим сплайном на отрезке [0, 4], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

$S(1-0) = S(1+0) = 1$, $S(2-0) = S(2+0) = 2$, $S(3-0) = S(3+0) = 2.$

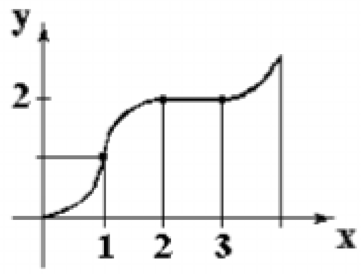


Рис. 7.1.

Найдем дефект сплайна.

$S'(1-0) = S'(1+0) = 2,\ S'(2-0) = S'(2+0) = 0,\ S'(3-0) = S'(3+0) = 0.$

В то же время $S''(2-0) = -2,\ \ S''(2+0) = 0.$

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции S на отрезке [0,4] равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. Смотри рисунок 7.1.

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн $S(x)$ имеет вид

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (7.1)$$

Таким образом, для построения кубического сплайна необходимо найти $4n$ неизвестных коэффициентов многочленов (7.1).

Очевидно $S(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$. Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка (x_{i-1}) в уравнение:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i \ , \qquad i = \overline{1,n}$$

$$S(x_{i+1}) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \, , \qquad i = \overline{1,n} \, .$$

В итоге получаем *2n* уравнений:

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i & i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \, ,$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \, , \qquad i = \overline{1, n-1} \, .$$

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:

$$\begin{cases} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} & i = \overline{1,n} \, , \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \end{cases}$$

т. е. *(2n-2)* уравнений.

Недостающие 2 уравнения можно задать разными способами. Обычно

берут $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

Отсюда

$$2c_1 = 0 \, , \qquad 2c_n + 6d_n h_n = 0 \, .$$

Для удобства положим еще $c_{n+1} = 0$.

Объединяя все уравнения, получим систему

$$
\begin{cases}
y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad y_i \quad = & i \quad \overline{1,n} \quad = \\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad b_{i+1} & i \quad \overline{1,n-1} \\
c_i + 3d_i h_i \quad c_{i+1} & i \quad \overline{1,n-1} \\
c_n + 3d_n h_k = 0 & \\
c_1 = 0 & \\
c_{n+1} = 0. &
\end{cases}
$$

Решая систему, получим

$$
\begin{cases}
b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad y_i - y_{i-1} \quad = & i = \overline{1,n} \\
2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad b_{i+1} - b_i \quad = & i \quad \overline{1,n-1} \\
d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & \\
c_1 = c_{n+1} = 0, &
\end{cases}
$$

далее

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & i=\overline{1,n} \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + \left(\dfrac{(c_{i+1}-c_i)h_i^2}{3}\right) = y_i - y_{i-1} & i=\overline{1,n} \\ 2c_i h_i + (c_{i+1}-c_i)h_i = b_{i+1} - b_i & i=\overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1}-c_i}{3h_i} & i=\overline{1,n} \\ c_1 = c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{3}, \qquad i=\overline{1,n}.$$

$$2c_i h_i + (c_{i+1}-c_i)h_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - c_{i+1}h_{i+1} - \frac{(c_{i+2}-c_{i+1})h_{i+1}}{3} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i + \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{3}.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

$$c_i\left(\frac{h_i}{3}\right) + c_{i+1}\left(\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1}\right) + c_{i+2}\left(\frac{h_{i+1}}{3}\right) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i=\overline{1,n-1} \qquad (7.2)$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Это треухдиагональная система и ее целесообразно решать методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

$$\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1} > \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3},$$

то система имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки.

Метод прогонки применяется для трехдиагональных систем, которые имеют матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

т. е. матрицу, у которой ненулевыми могут быть только элементы, стоящие на главной и двух смежных с главной диагоналях. Т.е. трехдиагональная систем имеет вид:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

Суть метода прогонки заключается в построении рекуррентной последовательности для нахождения прогоночных коэффициентов A_i и B_i, а каждое неизвестное представляется в виде

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i.$$

Для удобства полагают, что $a_n = 0$, $c_n = 0$ и тогда формулы для прогоночных коэффициентов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} \\ B_i = \dfrac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i}. \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

При этом

$$\begin{cases} x_i = A_i \cdot x_{i+1} + B_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\ x_n = B_n. \end{cases}$$

Проводя обратный ход метода прогонки, последовательно найдем значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

ЗАДАНИЕ. Произвести интерполирование кубическими сплайнами приведенных в таблице функций. Вычислить значение сплайна в точк $x = 0.5*(b-a)$.

Значение сплайна в точке $x = 0.5*(b-a)$ записать в качестве ответа. Сравнить его со значением функции в соответствующей точке.

№ варианта	Функция $f(x)$	Интервал $[a,b]$ 50	Число узлов	Значение в точке $x = 0.5*(b-a)$
1.	e^{-x}	[0,4]	5	0,1372
2.	$\ln(x)$	[1,3]	6	0
3.	$\sqrt{x}$	[0,4]	5	1,4065
4.	$1/x$	[1,2]	6	1
5.	$sh(x)$	[0,2]	6	1,1752
6.	$arctg(x)$	[0,2]	6	0,7854
7.	$ch(x)$	[0,2]	6	1,5431
8.	$th(x)$	[0,2]	6	0,7616
9.	$1/\sqrt{x}$	[1,3]	6	1
10.	$tg(x)$	[0,1.5]	6	0,9316

Программная реализация:

На вход идут узлы и значение функции в данных узлах.

```
x = [0, 1, 2, 3, 4]
y = [exp(-i) for i in x]
```

Затем вычисляются сплайны.

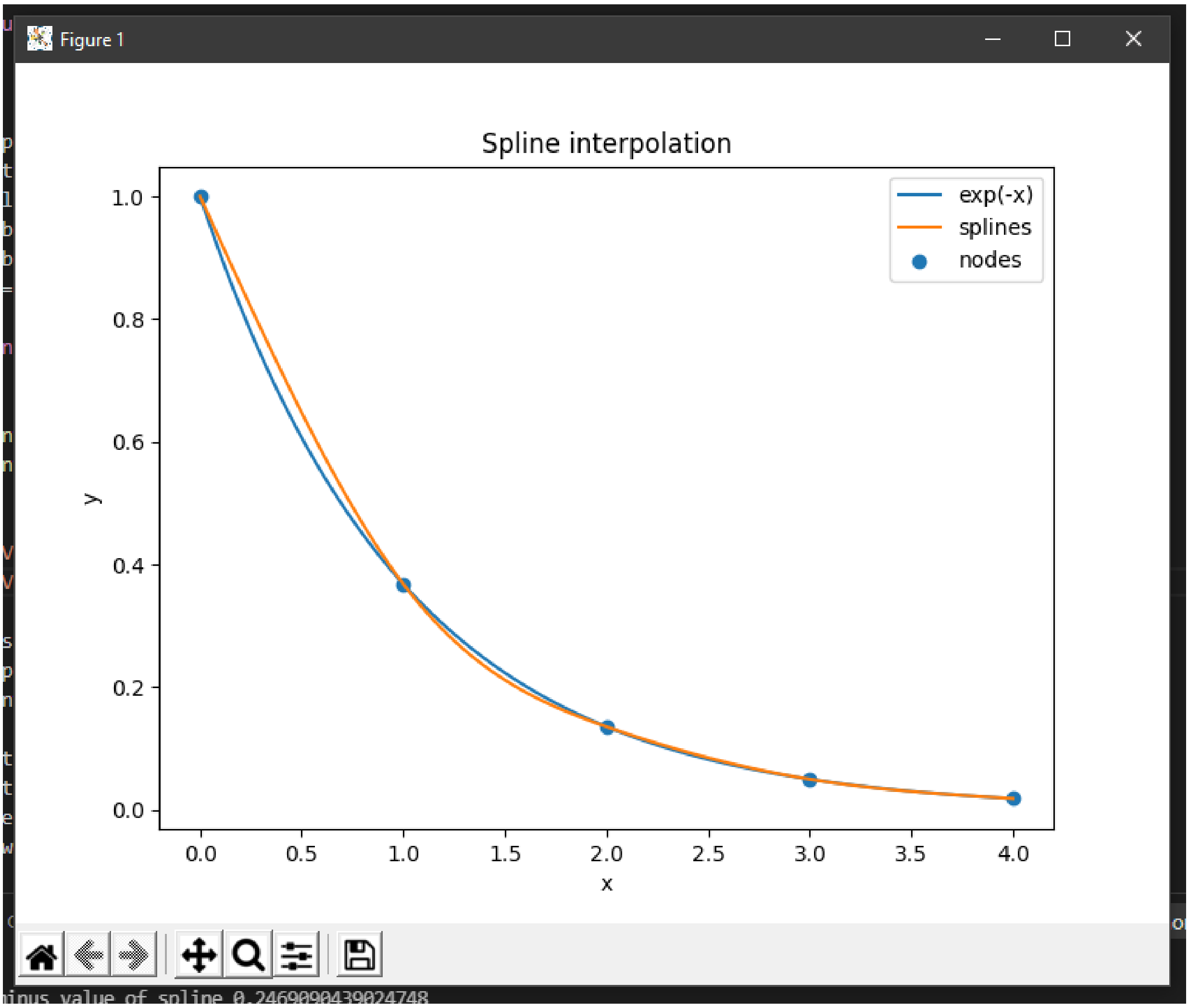
```
spline = BuildSpline(x, y, len(x))[1:]
```

Затем выводятся сплайны на отрезках.

```
for i in range(len(spline)):
    s = spline[i]

    print("xi = ", s.x)
    print("coefs from ai to di:\n", list(map(r, [s.a, s.b, s.c, s.d])), f" x from {x[i]} to {x[i+1]}\n")
```

```
xi =  1
coefs from ai to di:
 [0.36787944117144233, -0.4371298793095857, 0.5849720385569159, 0.5849720385569159]  x from 0 to 1

xi =  2
coefs from ai to di:
 [0.1353352832366127, -0.11585873446377558, 0.05757025113470423, -0.5274017874222117]  x from 1 to 2

xi =  3
coefs from ai to di:
 [0.049787068367863944, -0.05371230124604724, 0.06672261530075241, 0.009152364166048178]  x from 2 to 3

xi =  4
coefs from ai to di:
 [0.01831563888873418, -0.02035099359567103, 0.0, -0.06672261530075241]  x from 3 to 4
```

И выводится график сплайна и данной функции:



И так же вычисляется значение сплайна в точке x = 0.5*(b-a)

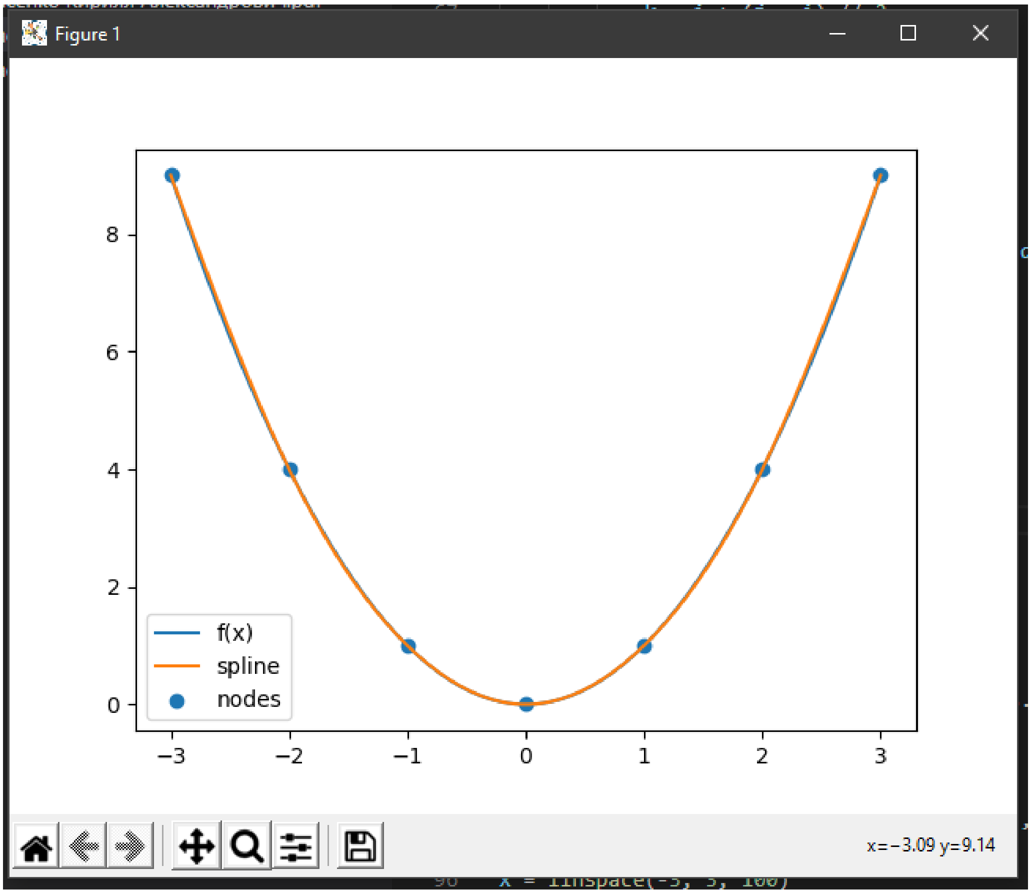
```
x0 = 0.5*(4-0)
print("Value of spline in x = 0.5*(b-a), S(x) =", Interpolate(spline, x0))
print("Value of func minus value of spline", exp(-x0) - Interpolate(spline, x0))
```

```
Value of spline in x = 0.5*(b-a) = 0.1353352832366127
Value of func minus value of spline 0.0
```

Тестирование:

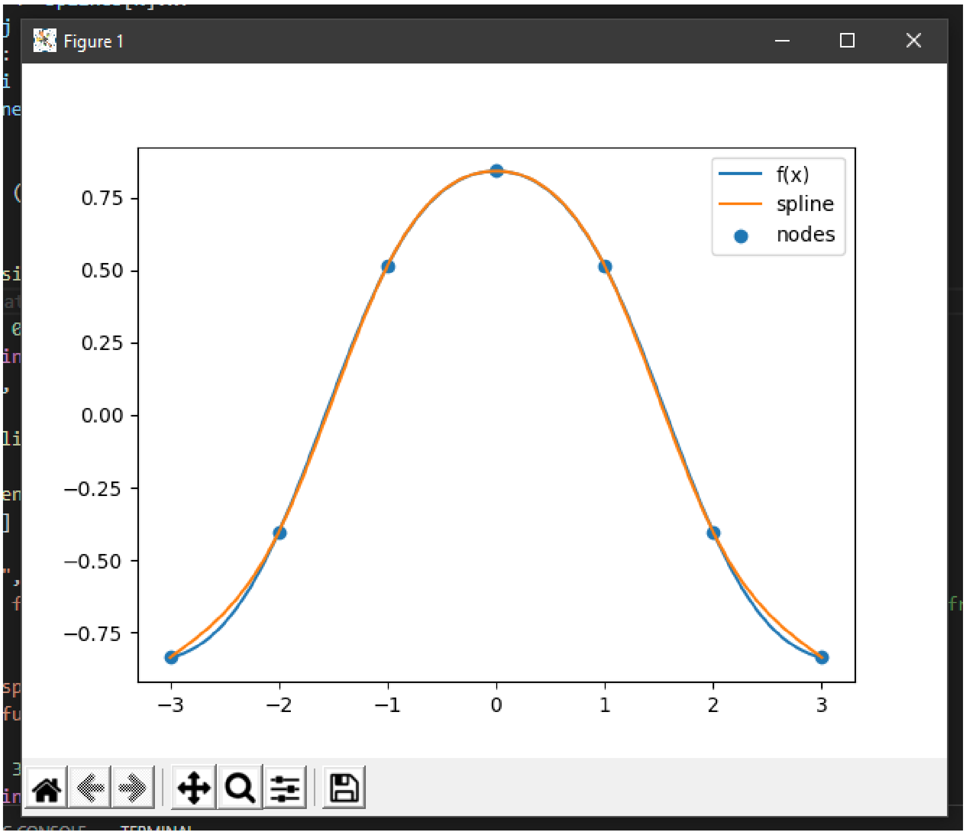
Для f(x) = x^2, на отрезке [-3; 3] с целочисленными узлами

```
xi =  1
coefs from ai to di:
 [0.36787944117144233, -0.4371298793095857, 0.5849720385569159, 0.5849720385569159]  x from 0 to 1

xi =  2
coefs from ai to di:
 [0.1353352832366127, -0.11585873446377558, 0.05757025113470423, -0.5274017874222117]  x from 1 to 2

xi =  3
coefs from ai to di:
 [0.04978706836786394, -0.05371230124604724, 0.06672261530075241, 0.009152364166048178]  x from 2 to 3

xi =  4
coefs from ai to di:
 [0.01831563888873418, -0.02035099359567103, 0.0, -0.06672261530075241]  x from 3 to 4
```



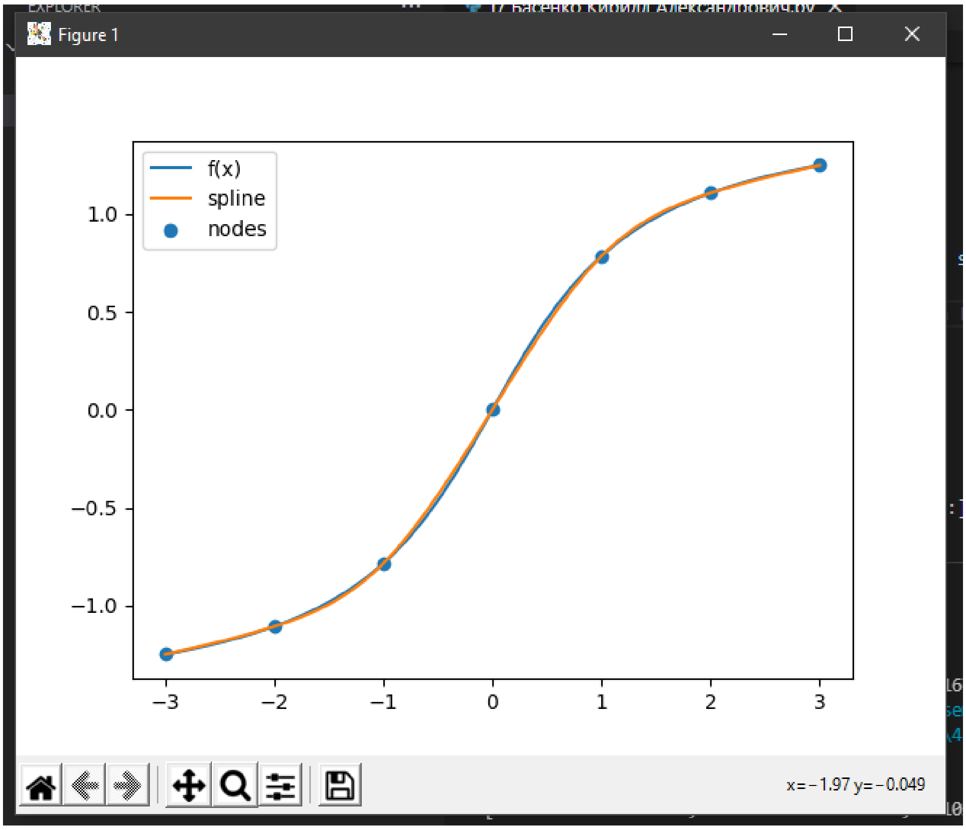
Для f(x) = sin(cos(x)) на том же отрезке, с целочисленными узлами

```
xi =  -2
coefs from ai to di:
 [-0.9092974268256817, -0.4254612987199095, 1.0281483601377148, 1.0281483601377148]  x from -3 to -2

xi =  -1
coefs from ai to di:
 [-0.8414709848078965, 0.540327743424317, 0.9034297241507382, -0.12471863598697663]  x from -2 to -1

xi =  0
coefs from ai to di:
 [0.0, 0.9920426054996861, -5.551115123125783e-17, -0.9034297241507383]  x from -1 to 0

xi =  1
coefs from ai to di:
 [0.8414709848078965, 0.5403277434243172, -0.9034297241507381, -0.9034297241507381]  x from 0 to 1

xi =  2
coefs from ai to di:

xi =  3
coefs from ai to di:
 [0.1411200080598672, -0.939535478788767, 0.0, 1.028148360137715]  x from 2 to 3
```



Для f(x) = arcrtan(x) на том же отрезке, в целочисленных узлах

```
xi =  -2
coefs from ai to di:
 [-1.1071487177940904, 0.17599923996004485, 0.10230655606764252, 0.10230655606764252]  x from -3 to -2

xi =  -1
coefs from ai to di:
 [-0.7853981633974483, 0.5620999052360154, 0.6698947744842986, 0.5675882184166561]  x from -2 to -1

xi =  0
coefs from ai to di:
 [0.0, 0.8970472924781647, 2.7755575615628914e-17, -0.6698947744842986]  x from -1 to 0

xi =  1
coefs from ai to di:
 [0.7853981633974483, 0.5620999052360154, -0.6698947744842987, -0.6698947744842987]  x from 0 to 1

xi =  2
coefs from ai to di:
 [1.1071487177940904, 0.17599923996004485, -0.10230655606764251, 0.5675882184166562]  x from 1 to 2

xi =  3
coefs from ai to di:
 [1.2490457723982544, 0.1248459619262236, 0.0, 0.10230655606764251]  x from 2 to 3
```



Заключение: изучил построение кубических интерполяционных сплайнов.