Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №10

Метод Адамса

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.
Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

Цель выполнения задания: Изучить численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

Краткие теоретические сведения.

Пусть есть дифференциальное уравнение

$y' = f(x, y)$,

с начальным условием

$y(x_0) = y_0$.

Разбиваем отрезок $[a,b]$ с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, где $x_0 = a$.

Пусть $y = y(x)$ - решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, то есть формулу Эйлера.

Очевидно, то не самый точный метод вычисления интеграла.

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$ где

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты A_i методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} x dx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \dfrac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1}+x_k)}{2}=(h-A_1)x_k+A_1x_{k-1};$$

$$\frac{h(x_{k+1}+x_k)}{2}=hx_k-A_1(x_k-x_{k-1});$$

$$\frac{h(x_{k+1}+x_k)}{2}=hx_k-A_1h;$$

$$A_1h=hx_k-\frac{h(x_{k+1}+x_k)}{2}=\frac{h(x_k-x_{k+1})}{2}.$$

В итоге получим:

$$A_1=-\frac{h}{2};$$

$$A_0=h-A_1=\frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = \frac{3}{2}hf_k - \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h(\frac{3}{2}f(x_k, y_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, y_{k-1}) \qquad k = \overline{1, n}.$$

Это формула Адамса второго порядка, которая используется для выполнения задания.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

$y_{-1} = y(x_0 - h)$ или $y_1 = y(x_0 + h)$.

Достоинством метода является то, что значение функции *f* в каждой точке *(x_k, y_k)* вычисляется только один раз.

ЗАДАНИЕ. Найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1]

$$y' = \frac{a(1 - y^2)}{(1 + m)x^2 + y^2 + 1}, \; y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\boldsymbol{m}$	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
$\boldsymbol{a}$	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Программная реализация..

Задаются параметры, функция, производятся вычисления и выводится график:

```
def f(x, y):
    res = (a * (1 - y ** 2)) / ((1 + m) * x ** 2 + y ** 2 + 1)
    return res

m = 1.
a = .5
init_v = (0, 0)
_range = [0, 1]
acc = 1e-3

def main():
    adams_method(f, _range, init_v, acc)
    plt.legend()
    plt.show()
```

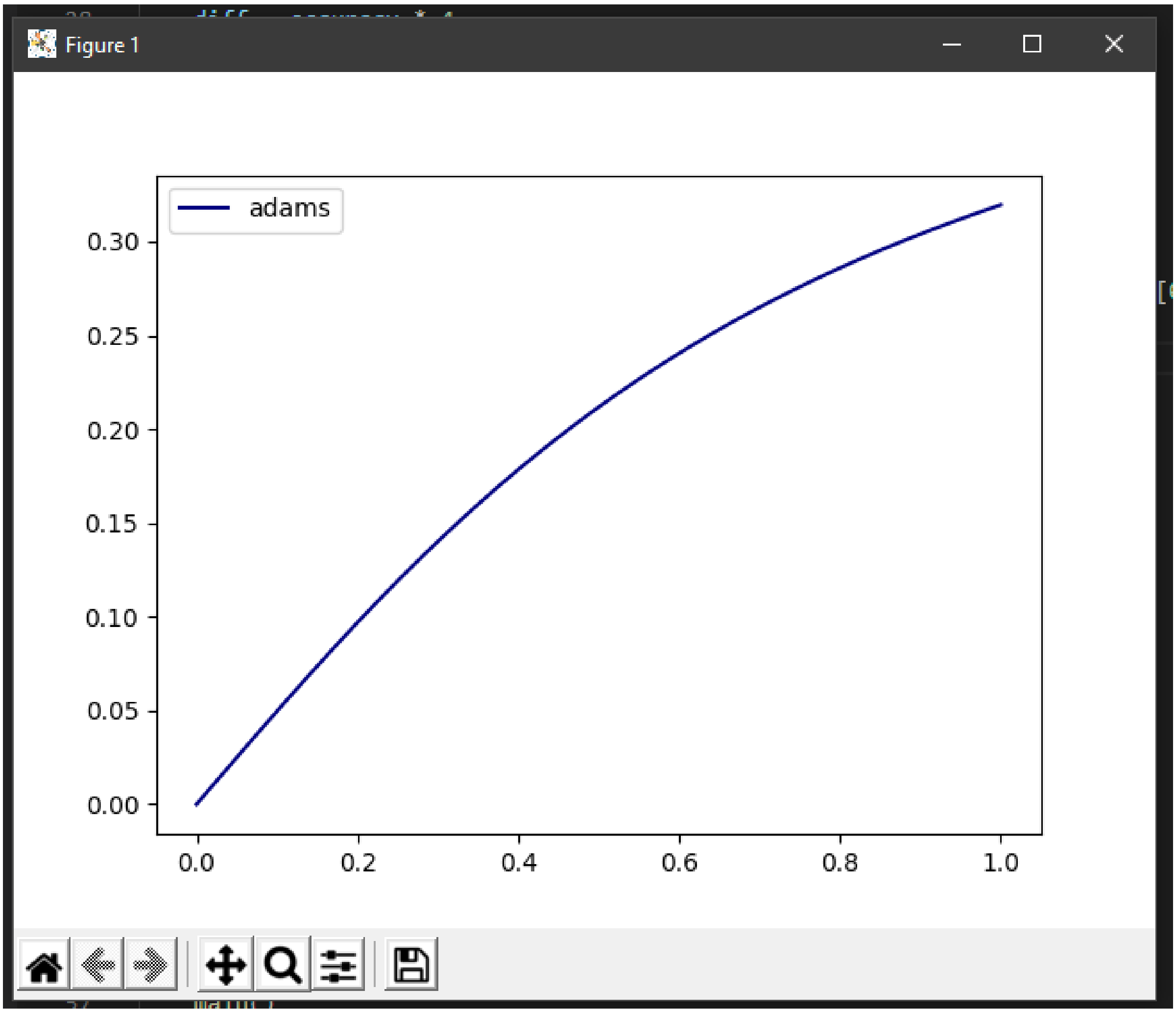
Figure 1
adams
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Заключение

Изучил численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.