Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №6

Интерполяционные многочлены

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.

Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

Цель задания: изучить интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

Краткие теоретические сведения:

Пусть *f(x)* – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$.

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,n$.

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,\ldots n. \tag{6.1}$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

Можно показать, что задача интерполяции всегда имеет решение, причем единственное.

Обозначим

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Пусть $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. Тогда погрешность интерполяции оценивается по формуле

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|, \quad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Положим $l_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}$,

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}.$$

Очевидно $l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & при\ i \ne j \\ 1, & при\ i = j. \end{cases}$

Построим многочлен $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$.

Легко видеть, что $L_n(x_i) = l_i(x_i)y_i = 1 \cdot y_i = y_i, \quad i = \overline{0,n}$, т. е. это интерполяционный многочлен. Его *называют интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2) Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, ..., x_n$ - набор узлов интерполирования,

$y_0, y_1, ..., y_n$ - значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в *к*-ом узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

……………………………………………………………………………………

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} \; \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
x_3	y_3			

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$ и т. д.

Пусть x – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

откуда $f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0)$.

(6.2)

Далее $f_2(x, x_0, x_1) = \dfrac{f_1(x_0, x_1) - f_1\ (x, x_0)}{x_1 - x}$,

откуда $f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2\ (x, x_0, x_1)(x - x_1)$.

Подставляя в (6.2), получаем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2\ (x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

(6.3)

Далее $f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2\ (x, x_0, x_1)}{x_2 - x}$,

откуда $f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3\ (x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2)$.

Подставляя в (6.3), имеем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \qquad (6.4)$$

Продолжая процесс, получим:

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_n),$$

где $N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \ldots + f_n(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$.

Очевидно при $x = x_i$, $\forall i = \overline{0,n}$, $f(x_i) = N_n(x_i)$, $i = \overline{0,n}$,

т. е. $N_n(x)$ - интерполяционный многочлен. Его называют *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

ЗАДАНИЕ. Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, используя номер варианта к, соответствующие значения параметров m и p_i и значения x_i, y_i из таблиц:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
p_i	0.0	0.41	0.79	1.13	1.46	1.76	2.04	2.3	2.55	2.79	3.01

$$y_i=p_i+(-1)^k m$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	1.8	2.53	3.96	5.33	1.96

Оценить погрешность. Вычислить значение ф-ии в точке 0.47 с помощью интерполяционного многочлена и многочлена наилучшего приближения. Сравнить значения.

Программная реализация:

Сначала высчитываются значения yi:

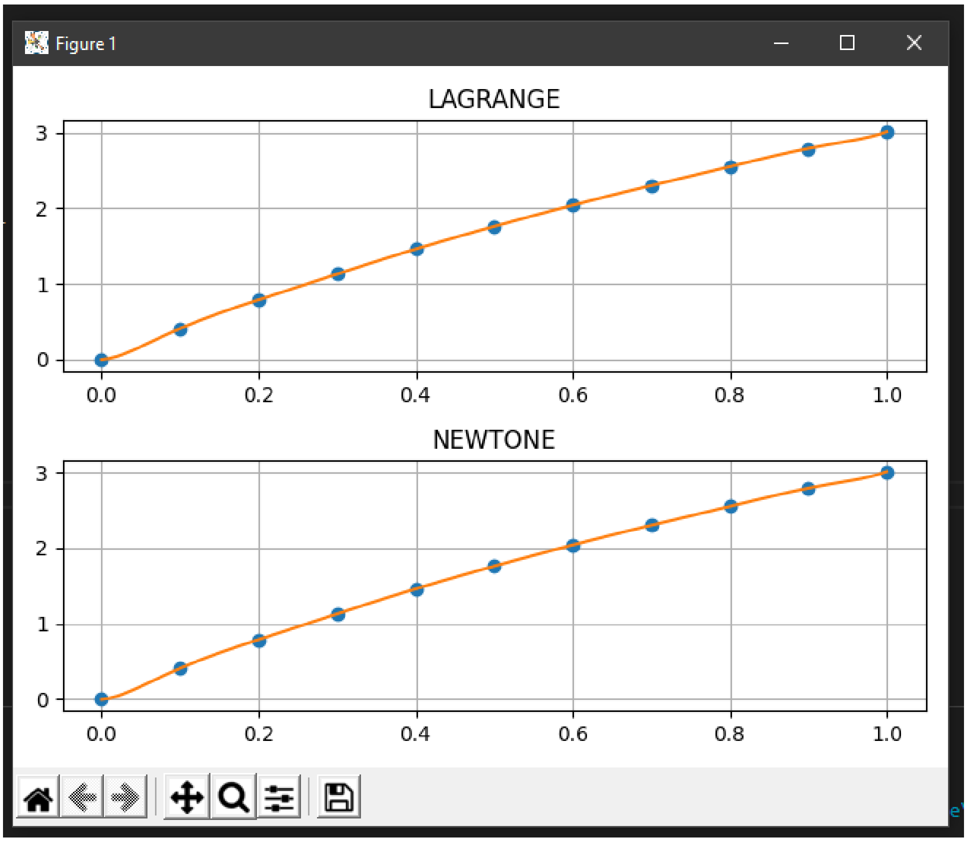
```
def yf(x):
    res = d[x] + m * (-1)**k
    return res
```

Затем и высчитываются многочлены:

```
ya = [lagrangeLAGRANGElagrange(x, y, i) for i in xa]
```

```
ya = newtoneNEWTONEnewtone(x, y)
```

Результат:



Так же высчитываются значения в точке 0.47:

```
print(v1 := ya[47])
```

```
print(v2 := ya[47])
```

```
print("Error at point 0.47 is: ", abs(v1 - v2))
```

```
1.686597183217558
1.6865971832175584
Error at point 0.47 is:  4.440892098500626e-16
```

Погрешность:

M102 = 2.79

|Rn(x)| <= (2.79/102!)*П(x-i/100, i from 0 to 100)

Заключение: изучил интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранджа и Ньютона.