

Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №10
Метод Адамса

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.
Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

1. Цель работы.....	3
2. Краткие теоретические сведения.....	3
3. Задание.....	6
4. Программная реализация.....	7
5. Заключение.....	10

Цель выполнения задания: Изучить численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

Краткие теоретические сведения.

Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y),$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Разбиваем отрезок $[a, b]$ с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad \text{где } x_0 = a.$$

Пусть $y = y(x)$ - решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла.

Получим

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \text{ то есть формулу Эйлера.}$$

Очевидно, то не самый точный метод вычисления интеграла.

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x)) dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}), \text{ где}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x) dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты A_i методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} x dx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = (h - A_1)x_k + A_1x_{k-1};$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1(x_k - x_{k-1});$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1h;$$

$$A_1h = hx_k - \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = \frac{h(x_k - x_{k+1})}{2}.$$

В итоге получим:

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx = \frac{3}{2} h f_k - \frac{h}{2} f_{k-1}, \quad \text{где } f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{3}{2} f(x_k, y_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, y_{k-1}) \right) \quad k = \overline{1, n}.$$

Это формула Адамса второго порядка, которая используется для выполнения задания.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

$$y_{-1} = y(x_0 - h) \text{ или } y_1 = y(x_0 + h).$$

Достоинством метода является то, что значение функции f в каждой точке (x_k, y_k) вычисляется только один раз.

ЗАДАНИЕ. Найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке $[0; 1]$

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0,$$

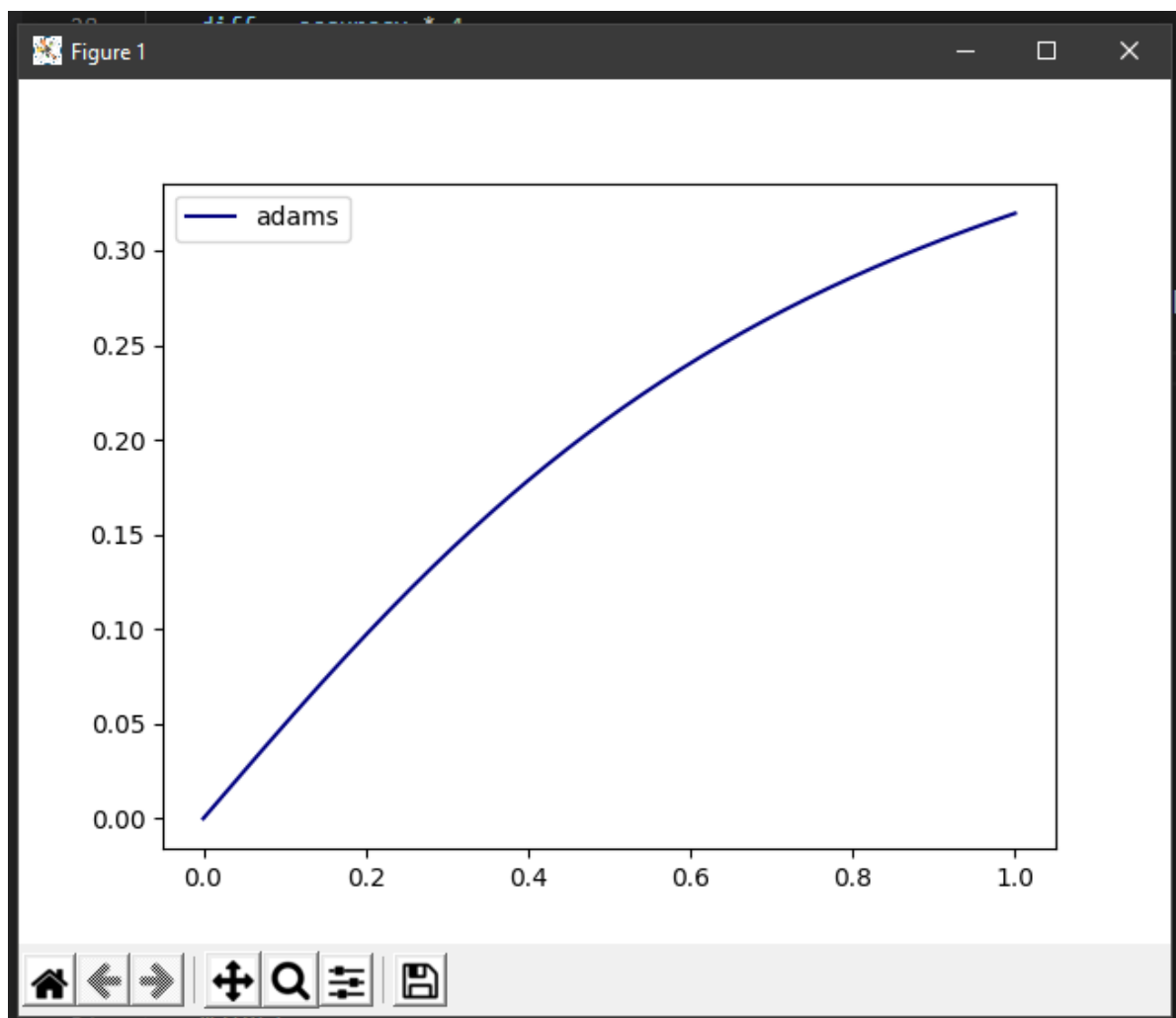
где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Программная реализация..

Задаются параметры, функция, производятся вычисления и выводится график:

```
def f(x, y):  
    res = (a * (1 - y ** 2)) / ((1 + m) * x ** 2 + y ** 2 + 1)  
    return res  
  
m = 1.  
a = .5  
init_v = (0, 0)  
_range = [0, 1]  
acc = 1e-3  
  
def main():  
    adams_method(f, _range, init_v, acc)  
    plt.legend()  
    plt.show()
```



Так же выводятся результаты вычислений в виде списка значений формата $(x, y(x))$


```
step: 0.002
values:
[(0, 0), (0.002, 0.001), (0.004, 0.002), (0.006, 0.003), (0.008, 0.004), (0.01, 0.005), (0.012, 0.006), (0.014, 0.007), (0.016, 0.008), (0.018, 0.009), (0.02, 0.01), (0.021, 0.011), (0.023, 0.012), (0.025, 0.013), (0.027, 0.014), (0.029, 0.015), (0.031, 0.016), (0.033, 0.017), (0.035, 0.018), (0.037, 0.019), (0.039, 0.02), (0.041, 0.02), (0.043, 0.021), (0.045, 0.022), (0.047, 0.023), (0.049, 0.024), (0.051, 0.025), (0.053, 0.026), (0.055, 0.027), (0.057, 0.028), (0.059, 0.029), (0.061, 0.03), (0.062, 0.031), (0.064, 0.032), (0.066, 0.033), (0.068, 0.034), (0.07, 0.035), (0.072, 0.036), (0.074, 0.037), (0.076, 0.038), (0.078, 0.039), (0.08, 0.04), (0.082, 0.041), (0.084, 0.042), (0.086, 0.043), (0.088, 0.044), (0.09, 0.045), (0.092, 0.046), (0.094, 0.047), (0.096, 0.047), (0.098, 0.048), (0.1, 0.049), (0.102, 0.05), (0.104, 0.051), (0.105, 0.052), (0.107, 0.053), (0.109, 0.054), (0.111, 0.055), (0.113, 0.056), (0.115, 0.057), (0.117, 0.058), (0.119, 0.059), (0.121, 0.06), (0.123, 0.061), (0.125, 0.062), (0.127, 0.063), (0.129, 0.064), (0.131, 0.065), (0.133, 0.065), (0.135, 0.066), (0.137, 0.067), (0.139, 0.068), (0.141, 0.069), (0.143, 0.07), (0.145, 0.071), (0.146, 0.072), (0.148, 0.073), (0.15, 0.074), (0.152, 0.075), (0.154, 0.076), (0.156, 0.077), (0.158, 0.078), (0.16, 0.078), (0.162, 0.079), (0.164, 0.08), (0.166, 0.081), (0.168, 0.082), (0.17, 0.083), (0.172, 0.084), (0.174, 0.085), (0.176, 0.086), (0.178, 0.087), (0.18, 0.088), (0.182, 0.088), (0.184, 0.089), (0.186, 0.09), (0.188, 0.091), (0.189, 0.092), (0.191, 0.093), (0.193, 0.094), (0.195, 0.095), (0.197, 0.096), (0.199, 0.097), (0.201, 0.097), (0.203, 0.098), (0.205, 0.099), (0.207, 0.1), (0.209, 0.101), (0.211, 0.102), (0.213, 0.103), (0.215, 0.104), (0.217, 0.104), (0.219, 0.105), (0.221, 0.106), (0.223, 0.107), (0.225, 0.108), (0.227, 0.109), (0.229, 0.11), (0.23, 0.111), (0.232, 0.111), (0.234, 0.112), (0.236, 0.113), (0.238, 0.114), (0.24, 0.115), (0.242, 0.116), (0.244, 0.117), (0.246, 0.117), (0.248, 0.118), (0.25, 0.119), (0.252, 0.12), (0.254, 0.121), (0.256, 0.122), (0.258, 0.122), (0.26, 0.123), (0.262, 0.124), (0.264, 0.125), (0.266, 0.126), (0.268, 0.127), (0.27, 0.127), (0.271, 0.128), (0.273, 0.129), (0.275, 0.13), (0.277, 0.131), (0.279, 0.132), (0.281, 0.132), (0.283, 0.133), (0.285, 0.134), (0.287, 0.135), (0.289, 0.136), (0.291, 0.136), (0.293, 0.137), (0.295, 0.138), (0.297, 0.139), (0.299, 0.14), (0.301, 0.14), (0.303, 0.141), (0.305, 0.142), (0.307, 0.143), (0.309, 0.144), (0.311, 0.144), (0.312, 0.145), (0.314, 0.146), (0.316, 0.147), (0.318, 0.148), (0.32, 0.148), (0.322, 0.149), (0.324, 0.15), (0.326, 0.151), (0.328, 0.151), (0.33, 0.152), (0.332, 0.153), (0.334, 0.154), (0.336, 0.154), (0.338, 0.155), (0.34, 0.156), (0.342, 0.157), (0.344, 0.157), (0.346, 0.158), (0.348, 0.159), (0.35, 0.16), (0.352, 0.16), (0.354, 0.161), (0.355, 0.162), (0.357, 0.163), (0.359, 0.163), (0.361, 0.164), (0.363, 0.165), (0.365, 0.166), (0.367, 0.166), (0.369, 0.167), (0.371, 0.168), (0.373, 0.169), (0.375, 0.169), (0.377, 0.17), (0.379, 0.171), (0.381, 0.171), (0.383, 0.172), (0.385, 0.173), (0.387, 0.174), (0.389, 0.174), (0.391, 0.175), (0.393, 0.176), (0.395, 0.176), (0.396, 0.177), (0.398, 0.178), (0.4, 0.179), (0.402, 0.179), (0.404, 0.18), (0.406, 0.181), (0.408, 0.181), (0.41, 0.182), (0.412, 0.183), (0.414, 0.183), (0.416, 0.184), (0.418, 0.185), (0.42, 0.185), (0.422, 0.186), (0.424, 0.187), (0.426, 0.188), (0.428, 0.188), (0.43, 0.189), (0.432, 0.19), (0.434, 0.19), (0.436, 0.191), (0.438, 0.192), (0.439, 0.192), (0.441, 0.193), (0.443, 0.193), (0.445, 0.194), (0.447, 0.195), (0.449, 0.195), (0.451, 0.196), (0.453, 0.197), (0.455, 0.197), (0.457, 0.198), (0.459, 0.199), (0.461, 0.199), (0.463, 0.2), (0.465, 0.201), (0.467, 0.201), (0.469, 0.202), (0.471, 0.203), (0.473, 0.203), (0.475, 0.204), (0.477, 0.204), (0.479, 0.205), (0.48, 0.206), (0.482, 0.206), (0.484, 0.207), (0.486, 0.207), (0.488, 0.208), (0.49, 0.209), (0.492, 0.209), (0.494, 0.21), (0.496, 0.211), (0.498, 0.211), (0.5, 0.212), (0.502, 0.212), (0.504, 0.213), (0.506, 0.214), (0.508, 0.214), (0.51, 0.215), (0.512, 0.215), (0.514, 0.216), (0.516, 0.217), (0.518, 0.217), (0.52, 0.218), (0.521, 0.218), (0.523, 0.219), (0.525, 0.219), (0.527, 0.22), (0.529, 0.221), (0.531, 0.221), (0.533, 0.222), (0.535, 0.222), (0.537, 0.223), (0.539, 0.223), (0.541, 0.224), (0.543, 0.225), (0.545, 0.225), (0.547, 0.226), (0.549, 0.226), (0.551, 0.227), (0.553, 0.227), (0.555, 0.228), (0.557, 0.229), (0.559, 0.229), (0.561, 0.23), (0.562, 0.23), (0.564, 0.231), (0.566, 0.231), (0.568, 0.232), (0.57, 0.232), (0.572, 0.233), (0.574, 0.233), (0.576, 0.234), (0.578, 0.235), (0.58, 0.235), (0.582, 0.236), (0.584, 0.236), (0.586, 0.237), (0.588, 0.237), (0.59, 0.238), (0.592, 0.238), (0.594, 0.239), (0.596, 0.239), (0.598, 0.24), (0.6, 0.24), (0.602, 0.241), (0.604, 0.241), (0.606, 0.242), (0.608, 0.242), (0.61, 0.243), (0.612, 0.243), (0.614, 0.244), (0.616, 0.244), (0.617, 0.245), (0.619, 0.245), (0.621, 0.246), (0.623, 0.246), (0.625, 0.247), (0.627, 0.247), (0.629, 0.248), (0.631, 0.248), (0.633, 0.249), (0.635, 0.249), (0.637, 0.25), (0.639, 0.25), (0.641, 0.251), (0.643, 0.251), (0.645, 0.252), (0.646, 0.252), (0.648, 0.253), (0.65, 0.253), (0.652, 0.254), (0.654, 0.254), (0.656, 0.255), (0.658, 0.255), (0.66, 0.256), (0.662, 0.256), (0.664, 0.257), (0.666, 0.257), (0.668, 0.258), (0.67, 0.258), (0.672, 0.258), (0.674, 0.259), (0.676, 0.259), (0.678, 0.26), (0.68, 0.26), (0.682, 0.261), (0.684, 0.261), (0.686, 0.262), (0.688, 0.262), (0.689, 0.263), (0.691, 0.263), (0.693, 0.263), (0.695, 0.264), (0.697, 0.264), (0.699, 0.265), (0.701, 0.265), (0.703, 0.266), (0.705, 0.266), (0.707, 0.267), (0.709, 0.267), (0.711, 0.267), (0.713, 0.268), (0.715, 0.268), (0.717, 0.269), (0.719, 0.269), (0.721, 0.27), (0.723, 0.27), (0.725, 0.27), (0.727, 0.271), (0.729, 0.271), (0.73, 0.272), (0.732, 0.272), (0.734, 0.273), (0.736, 0.273), (0.738, 0.273), (0.74, 0.274), (0.742, 0.274), (0.744, 0.275), (0.746, 0.275), (0.748, 0.275), (0.75, 0.276), (0.752, 0.276), (0.754, 0.277), (0.756, 0.277), (0.758, 0.278), (0.76, 0.278), (0.762, 0.278), (0.764, 0.279), (0.766, 0.279), (0.768, 0.28), (0.77, 0.28), (0.771, 0.28), (0.773, 0.281), (0.775, 0.281), (0.777, 0.281), (0.779, 0.282), (0.781, 0.282), (0.783, 0.283), (0.785, 0.283), (0.787, 0.283), (0.789, 0.284), (0.791, 0.284), (0.793, 0.285), (0.795, 0.285), (0.797, 0.285), (0.799, 0.286), (0.801, 0.286), (0.803, 0.287), (0.805, 0.287), (0.807, 0.287), (0.809, 0.288), (0.811, 0.288), (0.812, 0.288), (0.814, 0.289), (0.816, 0.289), (0.818, 0.289), (0.82, 0.29), (0.822, 0.29), (0.824, 0.291), (0.826, 0.291), (0.828, 0.291), (0.83, 0.292), (0.832, 0.292), (0.834, 0.292), (0.836, 0.293), (0.838, 0.293), (0.84, 0.293), (0.842, 0.294), (0.844, 0.294), (0.846, 0.295), (0.848, 0.295), (0.85, 0.295), (0.852, 0.296), (0.854, 0.296), (0.855, 0.296), (0.857, 0.297), (0.859, 0.297), (0.861, 0.297), (0.863, 0.298), (0.865, 0.298), (0.867, 0.298), (0.869, 0.299), (0.871, 0.299), (0.873, 0.299), (0.875, 0.3), (0.877, 0.3), (0.879, 0.3), (0.881, 0.301), (0.883, 0.301), (0.885, 0.301), (0.887, 0.302), (0.889, 0.302), (0.891, 0.302), (0.893, 0.303), (0.895, 0.303), (0.896, 0.303), (0.898, 0.304), (0.9, 0.304), (0.902, 0.304), (0.904, 0.305), (0.906, 0.305), (0.908, 0.305), (0.91, 0.306), (0.912, 0.306), (0.914, 0.306), (0.916, 0.307), (0.918, 0.307), (0.92, 0.307), (0.922, 0.308), (0.924, 0.308), (0.926, 0.308), (0.928, 0.309), (0.93, 0.309), (0.932, 0.309), (0.934, 0.31), (0.936, 0.31), (0.938, 0.31), (0.939, 0.31), (0.941, 0.311), (0.943, 0.311), (0.945, 0.311), (0.947, 0.312), (0.949, 0.312), (0.951, 0.312), (0.953, 0.313), (0.955, 0.313), (0.957, 0.313), (0.959, 0.313), (0.961, 0.314), (0.963, 0.314), (0.965, 0.314), (0.967, 0.315), (0.969, 0.315), (0.971, 0.315), (0.973, 0.316), (0.975, 0.316), (0.977, 0.316), (0.979, 0.316), (0.98, 0.317), (0.982, 0.317), (0.984, 0.317), (0.986, 0.318), (0.988, 0.318), (0.99, 0.318), (0.992, 0.318), (0.994, 0.319), (0.996, 0.319), (0.998, 0.319), (1.0, 0.32)]
```

Заклучение

Изучил численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.