Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”
Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №8

Численное дифференцирование и интегрирование функций

Выполнил:
Студент гр. 953505
Басенко К. А.
Руководитель:
Доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

Цель работы: Изучить методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Сравнить методы по трудоемкости, точности. Выполнить тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.

Краткие теоретические сведения.

1) Численное дифференцирование. Для получения формул вычисления производной разобьем отрезок *[a, b]* на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда $y_k = f(x_k)$, $y_k^{'} = f'(x_k)$, и по формуле Тейлора (считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой) получаем

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + f''(\xi) h^2 \frac{1}{2},$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{f''(\xi) h}{2} \; ;$$

где ξ – некоторая точка на $[x_k, x_{k+1}]$.

Таким образом получаем формулу для приближенного вычисления производной : $\boxed{y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \text{ с погрешностью } R \le \frac{M_2 h}{2}}$, где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Таким образом, обеспечивается точность $O(h)$.

Далее воспользуемся следующей теоремой.

Теорема(о среднем).

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Тогда $\exists$ точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = f(\xi)$.

Считая функцию трижды непрерывно дифференцируемой, получим:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6} h^3;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6} h^3.$$

Отсюда можем определить производную как

$y'_k = \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \dfrac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12} h^2$ и, применяя теорему о среднем, получаем:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_k)}{6} h^2.$$

Т.е. имеет место формула для приближенного вычисления производной:

$\boxed{y'_k \approx \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h},\ R \le \dfrac{M_3 h^2}{6}}$, где $M_3 = \max\limits_{a \le x \le b} |f'''(x)|$.

Точность вычисления производной в этом случае имеет порядок $O(h^2)$.

Для того чтобы найти формулу для вычисления второй производной будем считать функцию f(x) четырежды непрерывно дифференцируемой, тогда:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24} h^4;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{24} h^4,$$

отсюда $\dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = y''_k + \dfrac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{24} h^2,$

значит $\boxed{y''_k \approx \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}\ ,\ R = \dfrac{\left|f^{IV}(\xi_k)\right|}{12} h^2 \le \dfrac{M_4 h^2}{12}}$

При этом обеспечивается точность $O(h^2)$.

2) Интегрирование функций. Пусть дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на n частей следующим образом:

$h=\dfrac{b-a}{n}$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, и зафиксируем значения функции в точках разбиения $y_0,y_1,...,y_n$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ и, полагая $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\approx y_{k-1}h$,

можно получить формулы:

$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h(y_1+y_2+...+y_n)$ (*правых прямоугольников*) ;

$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h(y_0+y_1+...+y_{n-1})$ (*левых прямоугольников*);

$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h(f(x_0+h/2)+...+f(x_{n+1}+h/2))$ (*средних прямоугольников*).

Проанализируем точность наиболее точной из них формулы средних прямоугольников.

Пусть $\Phi(x) = \int\limits_{x_{k-1}+h/2}^{x_k} f(x)dx \Rightarrow \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$. (*)

Считая исходную функцию дважды непрерывно дифференцируемой, получаем

$$\Phi(x_k) = \Phi(x_{k-1}+h/2) + \Phi'(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2} + \Phi''(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8} + \frac{\Phi'''(\xi_1)}{6}\frac{h^3}{8} =$$
$$= f(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2} + f'(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8} + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{48}$$

Значит $\Phi(x_{k-1}) = -f(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2} + f'(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8} - f'''(\xi_2)\frac{h^3}{48}$

Полученные значения подставим в (*) и приведем подобные:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = f(x_{k-1}+h/2)h + \frac{f''(\xi_1) + f(\xi_2)}{48}h^3;$$

Таким образом $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n f(x_{k-1}+h/2)h + \sum\limits_{k=1}^n f''(\xi_k)\frac{h^3}{24} = h\sum\limits_{k=1}^n f(x_{k-1}+h/2) + \frac{f''(\xi)nh^3}{24}$, $R \le \frac{M_2 nh^3}{24}$;

То есть оценка точности для данного метода $O(h^2)$.

Используя формулы правых и левых прямоугольников (взяв их среднее арифметическое) получим *формулу трапеций*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right), R \le \frac{M_2 nh^2}{12}.$$

Можно показать, что ее точность тоже $O(h^2)$.

Формула Симпсона.

Дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на 2n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \ \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

Будем аппроксимировать элементарную трапецию некоторой параболической трапецией (например $y = ax^2 + bx + c$) через точки вида

A(x_{2k}, y_{2k}), B(x_{2k+1}, y_{2k+1}), C(x_{2k+2}, y_{2k+2});

Составим систему: $\begin{cases} y_{2k} = ax_{2k}^2 + bx_{2k} + c \\ y_{2k+1} = ax_{2k+1}^2 + bx_{2k+1} + c \quad (**) \\ y_{2k+2} = ax_{2k+2}^2 + bx_{2k+2} + c \end{cases}$

Посчитаем определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \\ x_{2k+1}^2 & x_{2k+1} & 1 \\ x_{2k+2}^2 & x_{2k+2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, значит данная система имеет решение a,b,c и причем единственное.

Решая ее мы получим так называемую малую формулу Симпсона:

$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (ax^2 + bx + c)dx = \ldots = \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$, где a, b и c берутся из системы (**).

По сдвоенному элементарному промежутку запишем

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}) + y_{2n})$$

Таким образом, получается формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})], \ R \le \frac{(b-a)^4 h^4 M_4}{180};$$

Данная формула обеспечивает точность вычислений $O(h^4)$.

Анализируя рассмотренные методы численного интегрирования мы можем сделать вывод, что расчет по формуле Симпсона является наиболее точным.

Задание. В каждом варианте найти численное значение первой и второй производной в точке, являющейся серединой заданного интервала, с точностью до 0,01. Вычислить с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить методы по точности.

№ вар и-ант а	**Функция** $f(x)$	Интервал	**Метод**	**Точность**	**Значение интеграла**
1.	$lg\,x$	[1 ; 3]	Трапеций	0,000001	**0,5627743**
2.	$arctg\,x$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	**1,4095786**
3.	$ch\,x$	[0 ; 2]	Средних	0,000001	**0,4995949**
4.	$\sqrt{x}$	[0 ; 4]	Симпсона	0,000001	**5,3333335**
5.	$\sqrt{tg\,x}$	[0 ; 1.5]	Трапеций	0,000001	**1,6893633**
6.	$\sqrt{1-lg^2 x}$	[1 ; 10]	Средних	0,000001	**5,7980142**
7.	$arctg\sqrt{x}$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	**1,4517355**
8.	$\frac{\sin x}{x}$	[1 ; 2]	Трапеций	0,000001	**0,6593294**
9.	$\frac{\cos x}{x}$	[1 ; 2]	Симпсона	0,000001	**0,0855770**
10.	$sh(1/x)$	[1 ; 2]	Средних	0,000001	**0,7576327**

Программная реализация.

Задается функция f(x):

```
def f(x):
    return log10(x)
```

Находятся производные в точке:

```
diffs = [diff, diff2]
for dif in diffs:
    res = dif(f, (a + b) / 2, diff_acc)
    print(dif.__name__, ": ", round(res[0], int(abs(log10(diff_acc)))), "\niterations: ", res[1])
```

Результат

```
diff :  0.5
iterations:  2
diff2 :  -0.25
iterations:  2
```

Находятся интегралы на отрезке:

```
for i in integration:
    res = integrate(f, a, b, int_acc, i)
    print(i,": ", round(res[0], int(abs(log10(int_acc)))), "\niterations: ", res[1])
```

Результаты:

```
diff :  0.22
iterations:  2
diff2 :  -0.11
iterations:  2


left_rect :  0.5627747
iterations:  16
right_rect :  0.5627748
iterations:  4
central_rect :  0.5627748
iterations:  4
trapezium :  0.5627748
iterations:  4
simpson :  0.5627748
iterations:  1
```

Метод Симпсона оказался быстрее.

Тестирование..

f(x) = arctan(x)

```
diff :  0.5
iterations:  2
diff2 :  -0.5
iterations:  2


left_rect :  1.4095784
iterations:  17
right_rect :  1.4095785
iterations:  5
central_rect :  1.4095785
iterations:  5
trapezium :  1.4095785
iterations:  5
simpson :  1.4095785
iterations:  1
```

f(x) = ch(x)

```
diff :  0.35
iterations:  2
diff2 :  -0.09
iterations:  2


left_rect :  5.3333333
iterations:  18
right_rect :  5.3333334
iterations:  8
central_rect :  5.3333334
iterations:  8
trapezium :  5.3333333
iterations:  9
simpson :  5.3333333
iterations:  8
```

Заключение

Изучил методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Сравнил методы по трудоемкости, точности. Выполнил тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.