

Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”

Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №8
Численное дифференцирование и интегрирование функций

Выполнил:

Студент гр. 953505

Басенко К. А.

Руководитель:

Доцент

Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

1. Цель работы.....	3
2. Краткие теоретические сведения.....	3
3. Задание.....	8
4. Программная реализация.....	9
5. Тестирование.....	10
6. Заключение.....	11

Цель работы: Изучить методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Сравнить методы по трудоемкости, точности. Выполнить тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.

Краткие теоретические сведения.

1) Численное дифференцирование. Для получения формул вычисления производной разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Тогда $y_k = f(x_k)$, $y'_k = f'(x_k)$, и по формуле Тейлора (считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой) получаем

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + f''(\xi) h^2 \frac{1}{2},$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{f''(\xi)h}{2};$$

где ξ – некоторая точка на $[x_k, x_{k+1}]$.

Таким образом получаем формулу для приближенного вычисления производной : $y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$, с погрешностью $R \leq \frac{M_2 h}{2}$.

где $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Таким образом, обеспечивается точность $O(h)$.

Далее воспользуемся следующей теоремой.

Теорема (о среднем).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Тогда \exists точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = f(\xi)$.

Считая функцию трижды непрерывно дифференцируемой, получим:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6} h^3;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6} h^3.$$

Отсюда можем определить производную как

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12} h^2 \text{ и, применяя теорему о среднем, получаем:}$$

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_k)}{6} h^2.$$

Т.е. имеет место формула для приближенного вычисления производной:

$$\boxed{y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, R \leq \frac{M_3 h^2}{6}}, \text{ где } M_3 = \max_{a \leq x \leq b} |f'''(x)|.$$

Точность вычисления производной в этом случае имеет порядок $O(h^2)$.

Для того чтобы найти формулу для вычисления второй производной будем считать функцию $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируемой, тогда:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24} h^4;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{24} h^4,$$

отсюда
$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = y''_k + \frac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{24} h^2,$$

значит
$$y''_k \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad R = \frac{|f^{IV}(\xi_k)|}{12} h^2 \leq \frac{M_4 h^2}{12}$$

При этом обеспечивается точность $O(h^2)$.

2) Интегрирование функций. Пусть дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей следующим образом:

$h = \frac{b-a}{n}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, и зафиксируем значения функции в точках разбиения y_0, y_1, \dots, y_n .

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$ и, полагая $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx y_{k-1} h$,

можно получить формулы:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (\text{правых прямоугольников});$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad (\text{левых прямоугольников});$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(f(x_0 + h/2) + \dots + f(x_{n+1} + h/2)) \quad (\text{средних прямоугольников}).$$

Проанализируем точность наиболее точной из них формулы средних прямоугольников.

$$\text{Пусть } \Phi(x) = \int_{x_{k-1}+h/2}^{x_k} f(x)dx \Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}). \quad (*)$$

Считая исходную функцию дважды непрерывно дифференцируемой, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x_k) &= \Phi(x_{k-1} + h/2) + \Phi'(x_{k-1} + h/2) \frac{h}{2} + \Phi''(x_{k-1} + h/2) \frac{h^2}{8} + \frac{\Phi'''(\xi_1)}{6} \frac{h^3}{8} = \\ &= f(x_{k-1} + h/2) \frac{h}{2} + f'(x_{k-1} + h/2) \frac{h^2}{8} + f'''(\xi_1) \frac{h^3}{48} \end{aligned}$$

$$\text{Значит } \Phi(x_{k-1}) = -f(x_{k-1} + h/2) \frac{h}{2} + f'(x_{k-1} + h/2) \frac{h^2}{8} - f'''(\xi_2) \frac{h^3}{48}$$

Полученные значения подставим в (*) и приведем подобные:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + h/2)h + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{48} h^3;$$

Таким образом

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + h/2)h + \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) \frac{h^3}{24} = h \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + h/2) + \frac{f''(\xi)nh^3}{24}, \quad R \leq \frac{M_2nh^3}{24};$$

То есть оценка точности для данного метода $O(h^2)$.

Используя формулы правых и левых прямоугольников (взяв их среднее арифметическое) получим формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right), R \leq \frac{M_2nh^2}{12}.$$

Можно показать, что ее точность тоже $O(h^2)$.

Формула Симпсона.

Дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на $2n$ частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

Будем аппроксимировать элементарную трапецию некоторой параболической трапецией (например $y = ax^2 + bx + c$) через точки вида

$$A(x_{2k}, y_{2k}), B(x_{2k+1}, y_{2k+1}), C(x_{2k+2}, y_{2k+2});$$

$$\text{Составим систему: } \begin{cases} y_{2k} = ax_{2k}^2 + bx_{2k} + c \\ y_{2k+1} = ax_{2k+1}^2 + bx_{2k+1} + c \\ y_{2k+2} = ax_{2k+2}^2 + bx_{2k+2} + c \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Посчитаем определитель: } \Delta = \begin{vmatrix} x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \\ x_{2k+1}^2 & x_{2k+1} & 1 \\ x_{2k+2}^2 & x_{2k+2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ значит данная система имеет}$$

решение a, b, c и причем единственное.

Решая ее мы получим так называемую малую формулу Симпсона:

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (ax^2 + bx + c)dx = \dots = \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}), \text{ где } a, b \text{ и } c \text{ берутся из системы } (**).$$

По двоясному элементарному промежутку запишем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) = \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + y_{2n}) \end{aligned}$$

Таким образом, получается формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1})], \quad R \leq \frac{(b-a)^4 h^4 M_4}{180};$$

Данная формула обеспечивает точность вычислений $O(h^4)$.

Анализируя рассмотренные методы численного интегрирования мы можем сделать вывод, что расчет по формуле Симпсона является наиболее точным.

Задание. В каждом варианте найти численное значение первой и второй производной в точке, являющейся серединой заданного интервала, с точностью до 0,01. Вычислить с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить методы по точности.

№ вар и- ант а	Функция $f(x)$	Интервал	Метод	Точность	Значение интеграла
1.	$lg\ x$	[1 ; 3]	Трапеций	0,000001	0,5627743
2.	$arctg\ x$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	1,4095786
3.	$ch\ x$	[0 ; 2]	Средних	0,000001	0,4995949
4.	\sqrt{x}	[0 ; 4]	Симпсона	0,000001	5,3333335
5.	$\sqrt{tg\ x}$	[0 ; 1.5]	Трапеций	0,000001	1,6893633
6.	$\sqrt{1 - lg^2\ x}$	[1 ; 10]	Средних	0,000001	5,7980142
7.	$arctg\ \sqrt{x}$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	1,4517355
8.	$\frac{\sin x}{x}$	[1 ; 2]	Трапеций	0,000001	0,6593294
9.	$\frac{\cos x}{x}$	[1 ; 2]	Симпсона	0,000001	0,0855770
10.	$sh(1/x)$	[1 ; 2]	Средних	0,000001	0,7576327

Программная реализация.

Задается функция $f(x)$:

```
def f(x):  
    return log10(x)
```

Находятся производные в точке:

```
diffs = [diff, diff2]  
for dif in diffs:  
    res = dif(f, (a + b) / 2, diff_acc)  
    print(dif.__name__, ": ", round(res[0], int(abs(log10(diff_acc)))), "\niterations: ", res[1])
```

Результат

```
diff : 0.5  
iterations: 2  
diff2 : -0.25  
iterations: 2
```

Находятся интегралы на отрезке:

```
for i in integration:  
    res = integrate(f, a, b, int_acc, i)  
    print(i,": ", round(res[0], int(abs(log10(int_acc)))), "\niterations: ", res[1])
```

Результаты:

```
diff : 0.22  
iterations: 2  
diff2 : -0.11  
iterations: 2  
  
left_rect : 0.5627747  
iterations: 16  
right_rect : 0.5627748  
iterations: 4  
central_rect : 0.5627748  
iterations: 4  
trapezium : 0.5627748  
iterations: 4  
simpson : 0.5627748  
iterations: 1
```

Метод Симпсона оказался быстрее.

Тестирование..

$$f(x) = \arctan(x)$$

```
diff : 0.5
iterations: 2
diff2 : -0.5
iterations: 2

left_rect : 1.4095784
iterations: 17
right_rect : 1.4095785
iterations: 5
central_rect : 1.4095785
iterations: 5
trapezium : 1.4095785
iterations: 5
simpson : 1.4095785
iterations: 1
```

$$f(x) = \operatorname{ch}(x)$$

```
diff : 0.35
iterations: 2
diff2 : -0.09
iterations: 2

left_rect : 5.3333333
iterations: 18
right_rect : 5.3333334
iterations: 8
central_rect : 5.3333334
iterations: 8
trapezium : 5.3333333
iterations: 9
simpson : 5.3333333
iterations: 8
```

Заключение

Изучил методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Сравнил методы по трудоемкости, точности. Выполнил тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.