1 Задача [6 балла]

Вася очень долго играет в следующую игру. Он выбирает одно из чисел от 1 до 6. Затем бросаются 3 игральных кубика. Если число Васи встречается 1, 2 или 3 раза, то он получает соответственно 1, 2 или 3 очка. если число ниразу не встретилось, то Вася теряет 1 очко. Является ли игра справедливой для игрока? (Для ответа на данный вопрос можно посчитать исход игры в среднем случае.)

$$P(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(1) = C(3,1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{216}$$

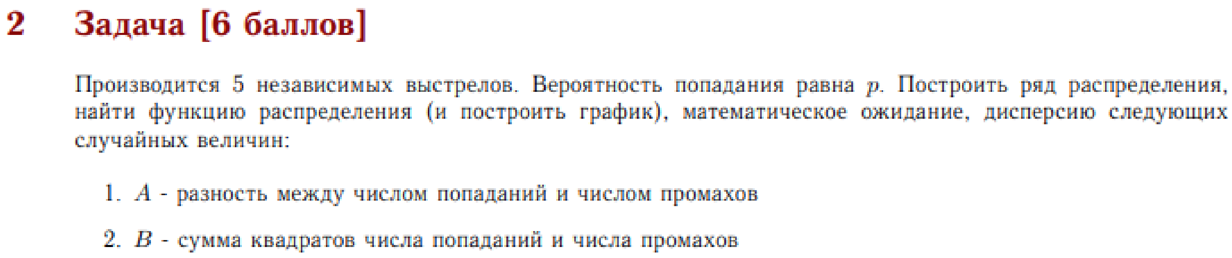
$$P(2) = C(3,2) \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P(3) = \frac{1}{216}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$$

$$M = \sum x_i \cdot p_i = \frac{75}{216} + \frac{2 \cdot 15}{216} + \frac{3}{216} - \frac{125}{216} = -\frac{17}{108}$$

Справедливой игра не является, потому что в среднем случае Вася будет терять очки (M[x] < 0).



2 Задача [6 баллов]

Производится 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания равна p. Построить ряд распределения, найти функцию распределения (и построить график), математическое ожидание, дисперсию следующих случайных величин:

1. A - разность между числом попаданий и числом промахов
2. B - сумма квадратов числа попаданий и числа промахов

1)

Попадание(+)/промах(-)

+ -

5 0 → 5 $p(5) = p^5$

4 1 → 3 $p(3) = C(5,4) \cdot p^4 \cdot q = 5 \cdot p^4 \cdot q$

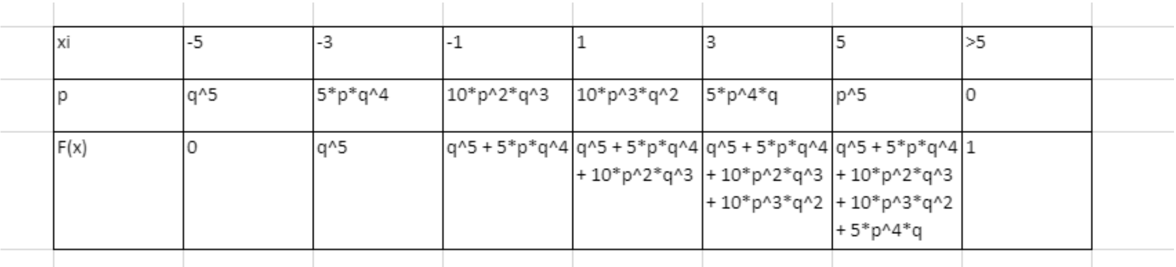
3 2 → 1 $p(1) = C(5,3) \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 \cdot p^3 \cdot q^2$

2 3 → -1 $p(-1) = 10 \cdot p^2 \cdot q^3$

1 4 → -3 $p(-3) = 5 \cdot p \cdot q^4$

0 5 → -5 $p(-5) = q^5$

Ряд:



xi	-5	-3	-1	1	3	5	>5
p	q^5	5*p*q^4	10*p^2*q^3	10*p^3*q^2	5*p^4*q	p^5	0
F(x)	0	q^5	q^5 + 5*p*q^4	q^5 + 5*p*q^4 + 10*p^2*q^3	q^5 + 5*p*q^4 + 10*p^2*q^3 + 10*p^3*q^2	q^5 + 5*p*q^4 + 10*p^2*q^3 + 10*p^3*q^2 + 5*p^4*q	1

Функция распределения:

$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor} C(5,i) \cdot p^i \cdot (1-p)^{5-i} & x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

$F(-5)$

0

$F(-3)$

$(1-p)^5$

$F(-1)$

$(1-p)^5+5\,p\,(1-p)^4$

$F(1)$

$(1-p)^5+5\,p\,(1-p)^4+10\,p^2\,(1-p)^3$

$F(3)$

$(1-p)^5+5\,p\,(1-p)^4+10\,p^2\,(1-p)^3+10\,p^3\,(1-p)^2$

$F(5)$

1

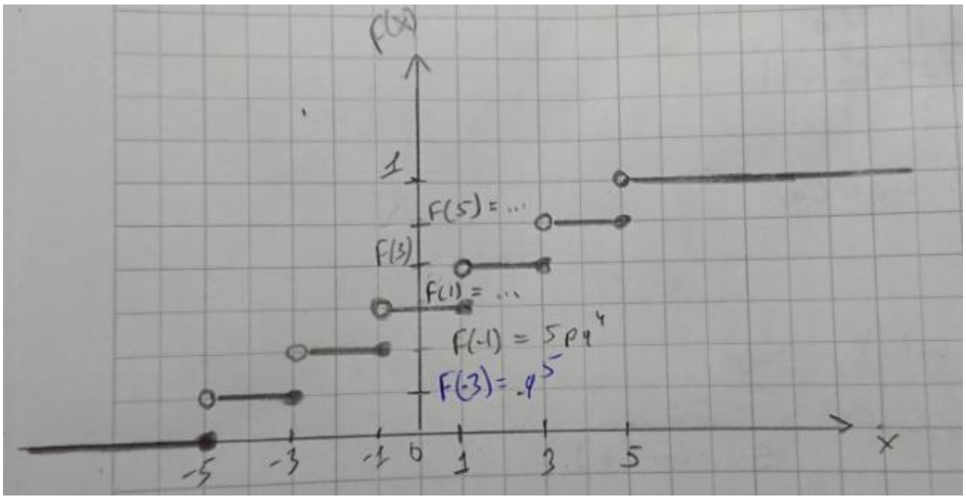
Мат. ожидание и дисперсия:

$M[x] = -5\cdot q^5 - 15\cdot p\cdot q^4 - 10\cdot p^2\cdot q^3 + 10\cdot p^3\cdot q^2 + 15\cdot p^4\cdot q + 5\cdot p^5 = 10\cdot p - 5$

$M[x^2] = 25\cdot q^5 + 45\cdot p\cdot q^4 + 10\cdot p^2\cdot q^3 + 10\cdot p^3\cdot q^2 + 45\cdot p^4\cdot q + 5\cdot p^5 = 80\cdot p^2 - 90\cdot p + 25$

$\mathrm{D}[x] = M[x^2] - M^2[x] = -20\cdot p^2 + 20\cdot p$

График:

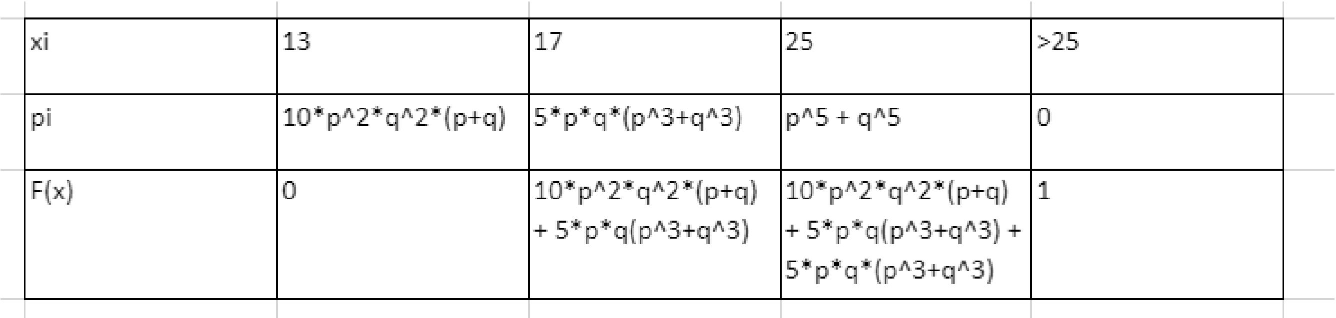


2)

Попадание(+)/промах(-)

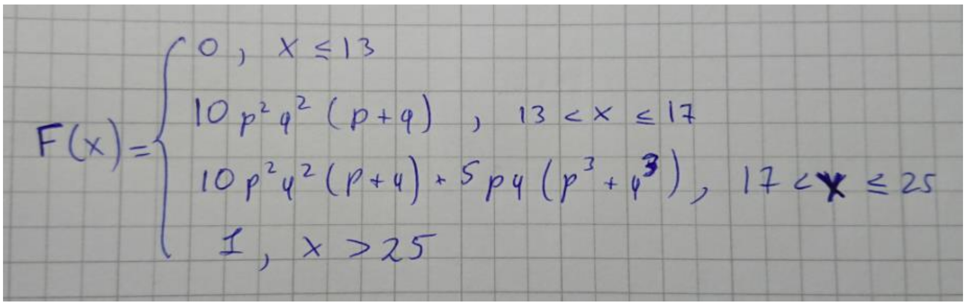
+	-		
5	0	→	25
4	1	→	17
3	2	→	13
2	3	→	13
1	4	→	17
0	5	→	25

Ряд:



xi	13	17	25	>25
pi	10*p^2*q^2*(p+q)	5*p*q*(p^3+q^3)	p^5 + q^5	0
F(x)	0	10*p^2*q^2*(p+q) + 5*p*q(p^3+q^3)	10*p^2*q^2*(p+q) + 5*p*q(p^3+q^3) + 5*p*q*(p^3+q^3)	1

Функция распределения:



$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 13 \\ 10p^2q^2(p+q), & 13 < x \le 17 \\ 10p^2q^2(p+q)+5pq(p^3+q^3), & 17 < x \le 25 \\ 1, & x > 25 \end{cases}$$

$F(13)$

0

$F(17)$

$10\,p^2\,q^2\,(p+q)$

$F(25)$

$10\,p^2\,q^2\,(p+q)+5\,p\,q\,\left(p^3+q^3\right)$

$F(26)$

1

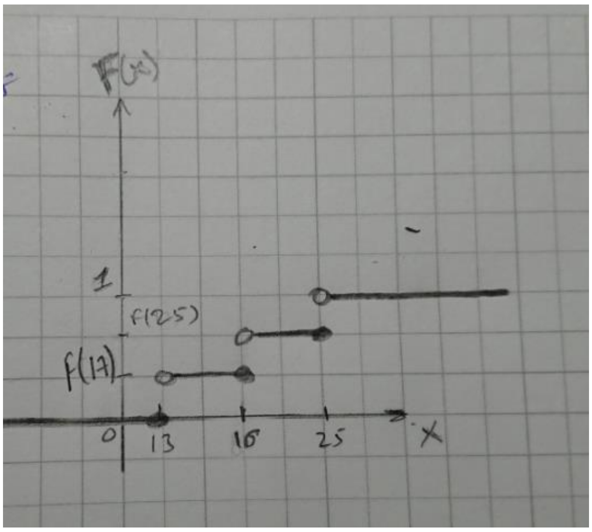
Мат. ожидание и дисперсия:

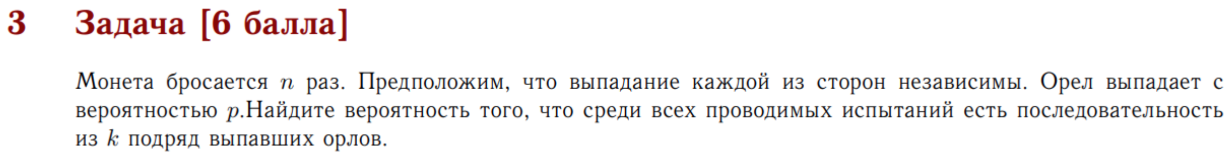
$$M[x]=130\cdot p^2\cdot q^2\cdot(p+q)+85\cdot p\cdot q\cdot\left(p^3+q^3\right)+25\cdot\left(p^5+q^5\right)=40\cdot p^2-40\cdot p+25$$

$$M\left[x^2\right]=1690\cdot p^2\cdot q^2\cdot(p+q)+1445\cdot p\cdot q\cdot\left(p^3+q^3\right)+625\cdot\left(p^5+q^5\right)=480\cdot p^4-960\cdot p^3+2160\cdot p^2-1680\cdot p+625$$

$$\mathrm{D}[x]=M\left[x^2\right]-M^2[x]=-1120\cdot p^4+2240\cdot p^3-1440\cdot p^2+320\cdot p$$

График:





3 Задача [6 балла]

Монета бросается n раз. Предположим, что выпадание каждой из сторон независимы. Орел выпадает с вероятностью p.Найдите вероятность того, что среди всех проводимых испытаний есть последовательность из k подряд выпавших орлов.

В случае, если первые k - орлы, то результат в остальных n-k не важен, т.е. там могут быть как орлы, так и решки, а т.к. выпадение орла и решки -- независимы, то вероятность такого события = $p^k 1^{(n-k)} = p^k$.

Однако такое событие может и не произойти, значит на любой из первых k позиций выпала решка. И нам надо проверять оставшуюся часть строки после такого “прерывания”.

Принцип проверки оставшейся части строки будут таким же, поэтому итоговая формула нахождение вероятности будет рекурсивной 🙁.

Пусть $R(n,k,p)$ - функция нахождения вероятности выпадения k орлов в последовательности из n, но т.к. k и p меняться не будут по ходу счета, то сокращу ее сигнатуру до R(n).

Итого: надо посчитать вероятность того, что первые k -- орлы, или же, что последовательность из k орлов находится после первой “прерывающей” решки.

$$R(n) := p^k + \sum_{i=1}^{k} p^{i-1} \cdot q \cdot R(n-i)$$

По факту мы считает вероятности всех случаев, когда нам выпала последовательность из k орлов (повторюсь, после k-орлов без разницы, что выпадет).

Получается, при решении такой задача всплывают числа Фибоначчи k-го порядка, только подстроенные под условие, что орел выпадает с вероятностью p.

4 Задача [4 балла]

Предположим, что землетрясения происходят в соответствии с законом распределения Пуассона с $\lambda = 2$. В качестве единицы измерения времени взята 1 неделя. (То есть в среднем происходит 2 землетрясения в неделю).

1. Найдите вероятность того, что в течении следующих 2-х недель произойдет по крайней мере 3 землетрясения
2. Найдите распределение вероятностей для случайной величины X - количества дней до первого землетрясения.

1)

Учитывая стационарность потока:

$\lambda_{14} = 4$ в среднем за 2 недели.

$$P\{x \geq 3\} = 1 - P\{x < 3\}$$

$$P\{x = 0\} = \frac{\lambda_{14}{}^{0} \cdot e^{-\lambda_{14}}}{0!} = e^{-4}$$

$$P\{x = 1\} = 4 \cdot e^{-4}$$

$$P\{x = 2\} = 8 \cdot e^{-4}$$

$$P\{x \geq 3\} = 1 - 13e^{4} \approx 0.76$$

2)

Учитывая стационарность потока:

$\lambda_1 = \frac{2}{7}$ в среднем за день.

$\lambda_n = \frac{2 \cdot n}{7}$ в среднем за n дней.

Тогда вероятность, что первые x дней произойдут без происшествий, а на следующий день случится землетрясение.

$$P(x) = P(k = 0, n = x) \cdot P(k = 1, n = 1) = e^{-\frac{2 \cdot x}{7}} \cdot \frac{2}{7} \cdot e^{-\frac{2}{7}} = \frac{2}{7} \cdot e^{-\frac{2 \cdot (x + 1)}{7}}$$

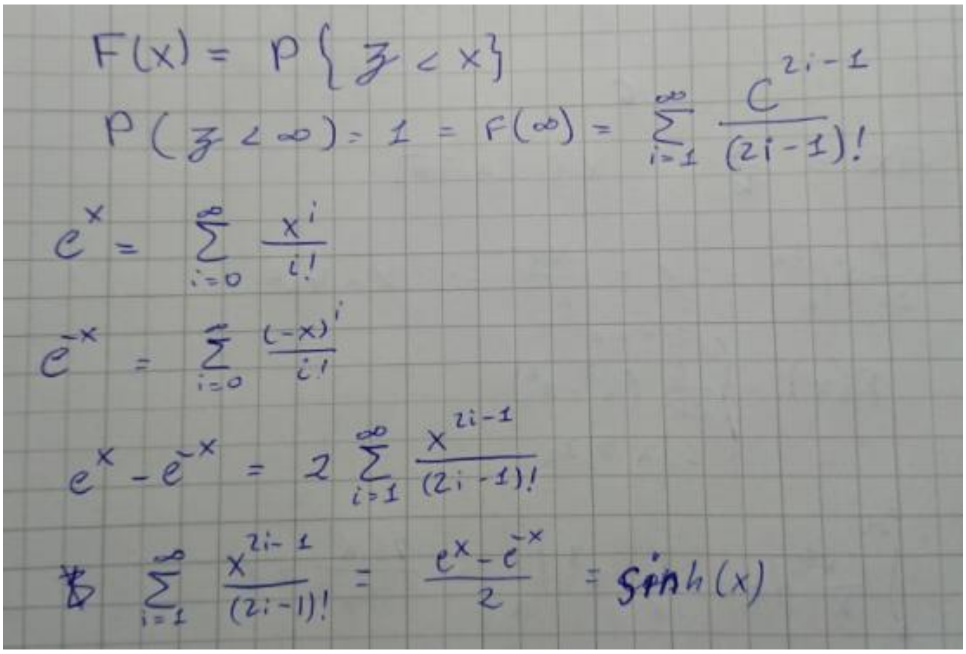
5 Задача [8 балла]

Случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения с вероятностью

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{C^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Найдите C, если известно, что $C > 0$

Пользуемся функцией распределения и условием нормировки:



$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

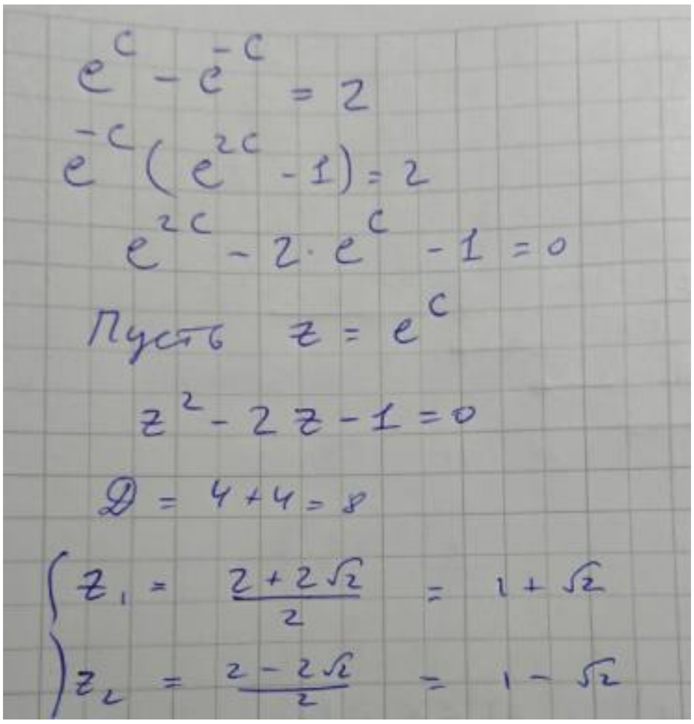
$$P(\xi < \infty) = 1 = F(\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

$$e^{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i}}{i!}$$

$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^{i}}{i!}$$

$$e^{x} - e^{-x} = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$



$$e^{C} - e^{-C} = 2$$

$$e^{-C}(e^{2C} - 1) = 2$$

$$e^{2C} - 2 \cdot e^{C} - 1 = 0$$

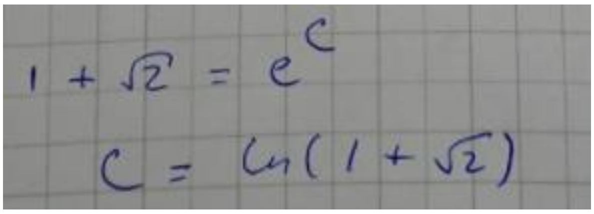
Пусть $z = e^{C}$

$$z^{2} - 2z - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

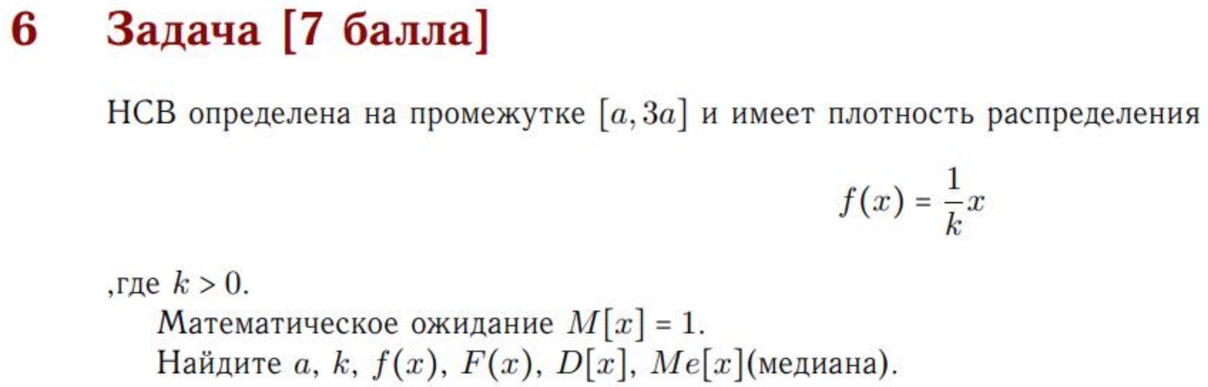
$$\left[\begin{aligned} z_1 &= \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ z_2 &= \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}\right.$$

Z_2 не подходит т.к. $e^\wedge x > 0$ для любых вещественных x.



$$1 + \sqrt{2} = e^{C}$$

$$C = \ln(1 + \sqrt{2})$$



6 Задача [7 балла]

НСВ определена на промежутке $[a, 3a]$ и имеет плотность распределения

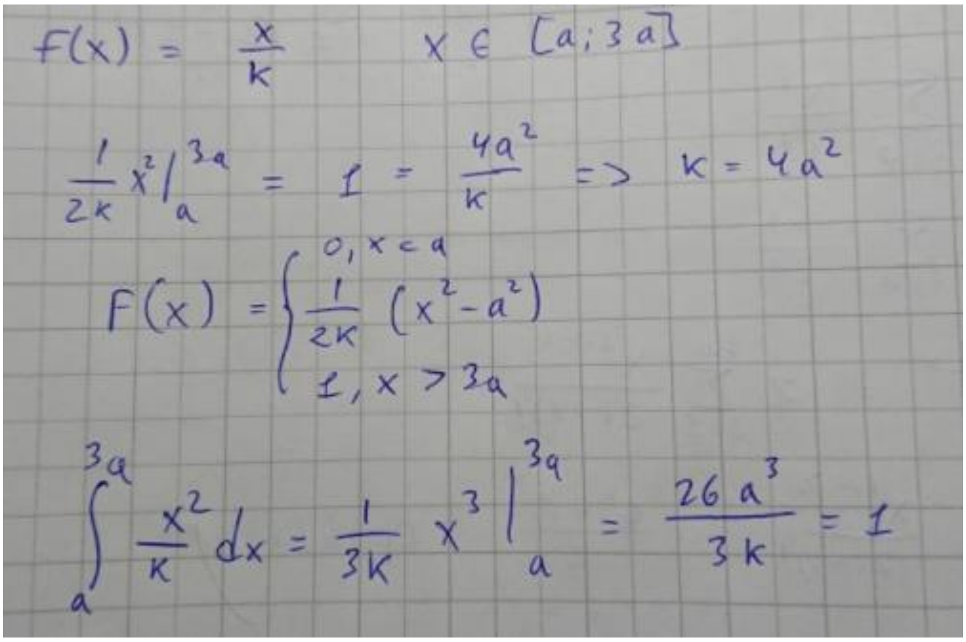
$$f(x) = \frac{1}{k}x$$

,где $k > 0$.

Математическое ожидание $M[x] = 1$.

Найдите a, k, $f(x)$, $F(x)$, $D[x]$, $Me[x]$(медиана).

Пользуемся известным мат. ожиданием, условием нормировки, определением медианы:

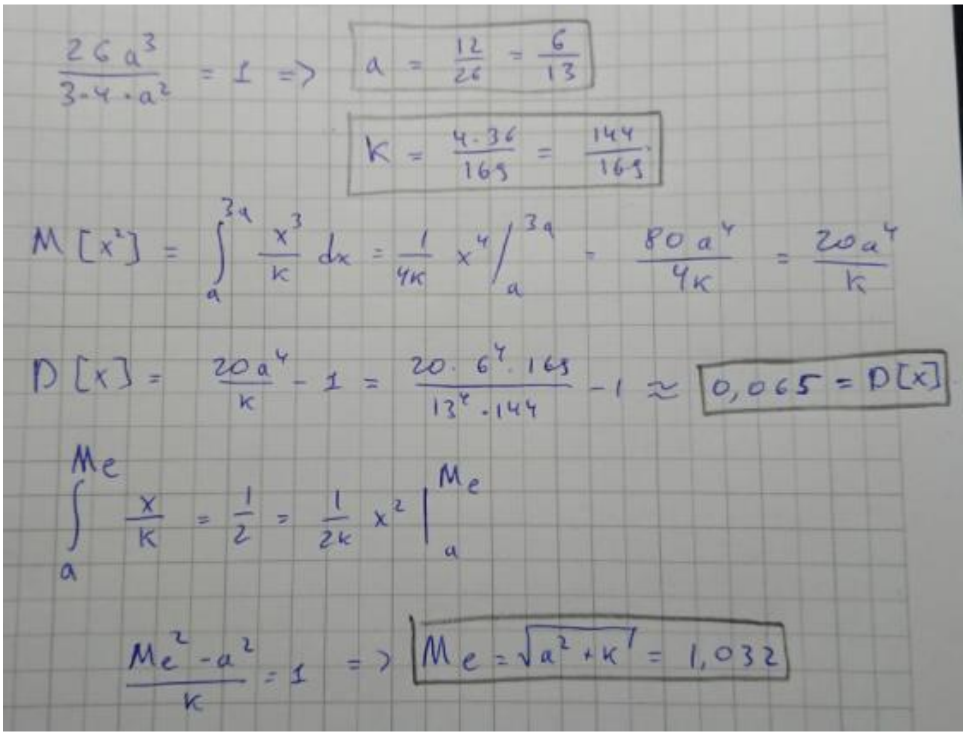


$$f(x) = \frac{x}{k} \qquad x \in [a; 3a]$$

$$\frac{1}{2k} x^2 \Big|_a^{3a} = 1 = \frac{4a^2}{k} \Rightarrow k = 4a^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{1}{2k}(x^2 - a^2) \\ 1, x > 3a \end{cases}$$

$$\int_a^{3a} \frac{x^2}{k} dx = \frac{1}{3k} x^3 \Big|_a^{3a} = \frac{26a^3}{3k} = 1$$



$$\frac{26a^3}{3\cdot 4\cdot a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}}$$

$$\boxed{k = \frac{4\cdot 36}{169} = \frac{144}{169}}$$

$$M[x^2] = \int_a^{3a} \frac{x^3}{k} dx = \frac{1}{4k} x^4 \Big|_a^{3a} = \frac{80a^4}{4k} = \frac{20a^4}{k}$$

$$D[x] = \frac{20a^4}{k} - 1 = \frac{20\cdot 6^4\cdot 169}{13^4\cdot 144} - 1 \approx \boxed{0,065 = D[x]}$$

$$\int_a^{Me} \frac{x}{k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2k} x^2 \Big|_a^{Me}$$

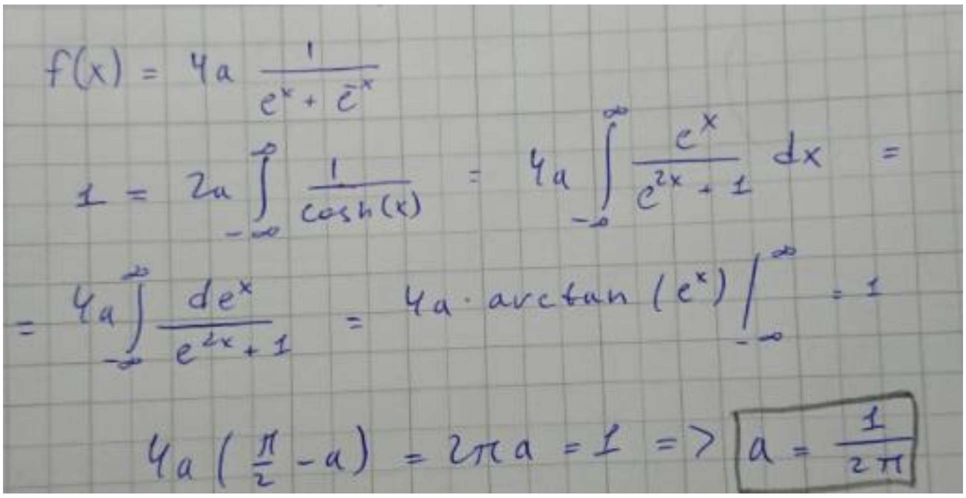
$$\frac{Me^2 - a^2}{k} = 1 \Rightarrow \boxed{Me = \sqrt{a^2 + k} = 1,032}$$

7 Задача [5 балла]

Задана НСВ X на всей оси Ox с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{4a}{e^x + e^{-x}}$$

Найдите постоянный параметр a, $Me[X]$



$$f(x) = 4a \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

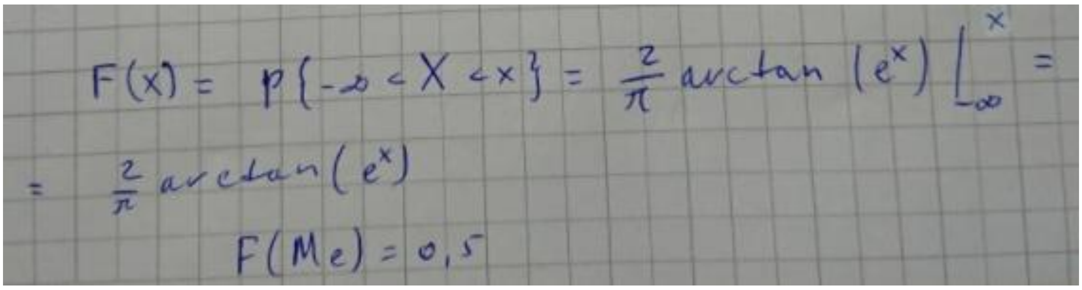
$$1 = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} = 4a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx =$$

$$= 4a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^x}{e^{2x}+1} = 4a \cdot \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

$$4a\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\pi a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2\pi}}$$

т.к. *f(-x)* = *f(x)* => *f(x)* -- четная, то медиана *Me* будет равняться *0*.

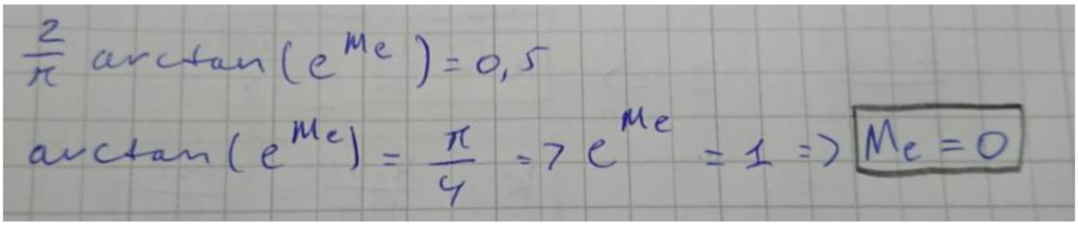
Если искать ручками:



$$F(x) = p\{-\infty < X < x\} = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

$$F(M_e) = 0{,}5$$



$$\frac{2}{\pi} \arctan(e^{Me}) = 0{,}5$$

$$\arctan(e^{Me}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow e^{Me} = 1 \Rightarrow \boxed{M_e = 0}$$

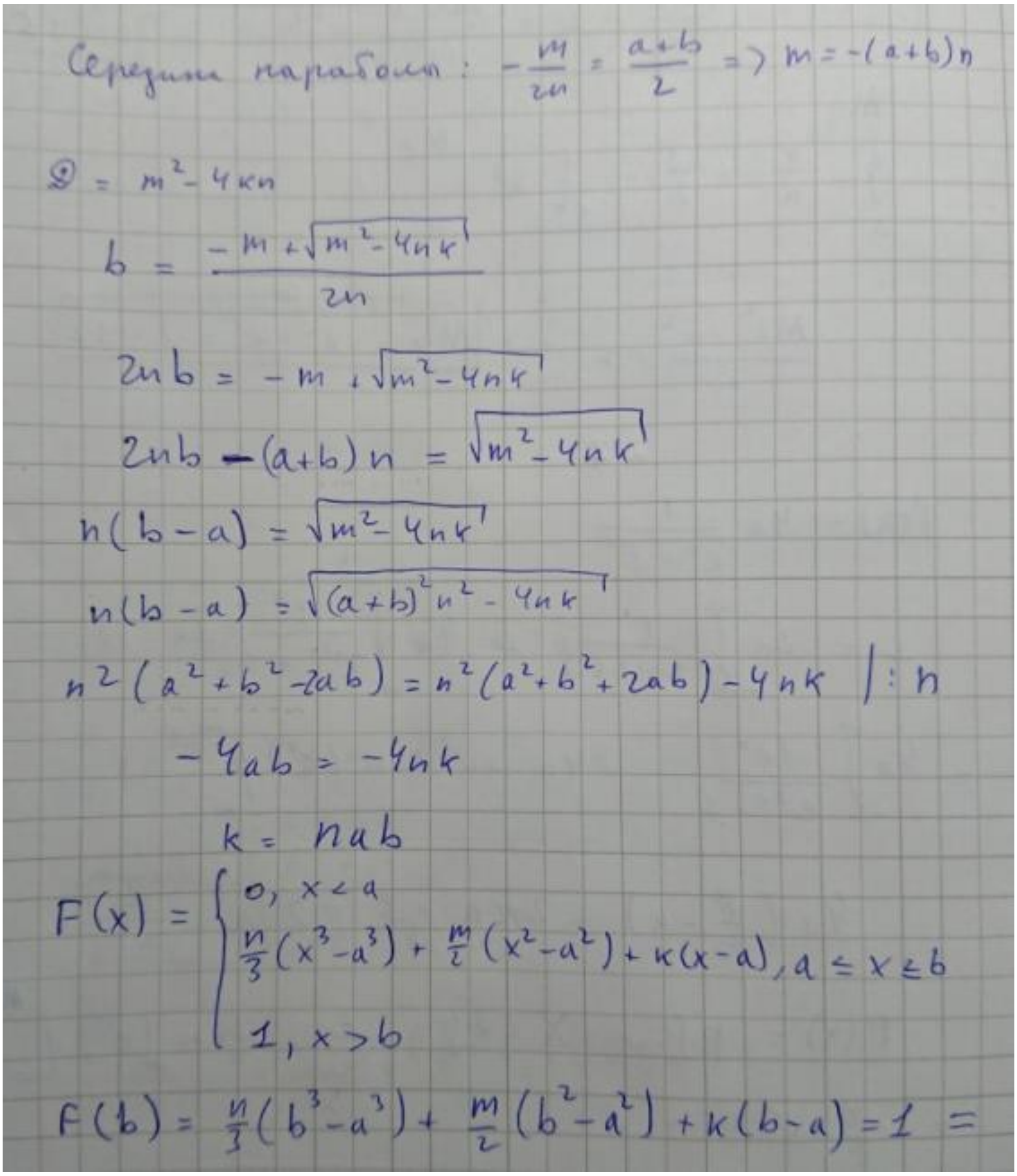
8 Задача [10 балла]

Диаметр круга измерен приближенно. Его величина распределена на отрезке $[a, b]$ с плотностью

$$f(x) = nx^2 + mx + k$$

. Известно, что $f(a) = f(b) = 0$

1. Найдите n, m, k
2. Найдите $f(x)$,$F(x)$, $M[x]$, $D[x]$
3. Найдите среднее значение и дисперсию площади круга



Середина параболы: $-\frac{m}{2n} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow m = -(a+b)n$

$\mathcal{D} = m^2 - 4kn$

$$b = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4nk}}{2n}$$

$$2nb = -m + \sqrt{m^2 - 4nk}$$

$$2nb - (a+b)n = \sqrt{m^2 - 4nk}$$

$$n(b-a) = \sqrt{m^2 - 4nk}$$

$$n(b-a) = \sqrt{(a+b)^2 n^2 - 4nk}$$

$$n^2(a^2 + b^2 - 2ab) = n^2(a^2 + b^2 + 2ab) - 4nk \quad \Big| : n$$

$$-4ab = -4nk$$

$$k = nab$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{n}{3}(x^3 - a^3) + \frac{m}{2}(x^2 - a^2) + k(x-a), \ a \leq x \leq b \\ 1, \ x > b \end{cases}$$

$$F(b) = \frac{n}{3}(b^3 - a^3) + \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + k(b-a) = 1 =$$

$$= \frac{n}{3}\left(b^3-a^3\right) - (a+b)\,\frac{n}{2}\left(b^2-a^2\right) + n\,ab\,(b-a) = 1$$

$$\frac{1}{n(b-a)} = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+ab\right) - \frac{1}{2}(a+b)(a+b) + ab$$

$$\frac{6}{n(b-a)} = 2a^2+2b^2+2ab-3a^2-3b^2-6ab+6ab$$

$$\frac{6}{n(b-a)} = -(a-b)^2 \Rightarrow n = \frac{6}{(a-b)^3}$$

$$\begin{cases} n = \dfrac{6}{(a-b)^3} \\ k = \dfrac{6ab}{(a-b)^3} \\ m = -\dfrac{(a+b)\,6}{(a-b)^3} \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{6}{(a-b)^3}x^2 - \frac{6(a+b)}{(a-b)^3}x + \frac{6ab}{(a-b)^3}}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{(a-b)^3}\left(x^3-a^3\right) - \frac{3(a+b)}{(a-b)^3}\left(x^2-a^2\right) + \frac{6ab}{(a-b)^2}(x-a)}$$

$$M[x] = \int_a^b x f(x) = \frac{6}{4}\cdot\frac{1}{(a-b)^3}\left(b^4-a^4\right) - 2\frac{(a+b)}{(a-b)^3}\left(b^3-a^3\right)$$

$$+ 3\frac{ab}{(a-b)^3}\left(b^2-a^2\right) = \frac{1}{4(a-b)^3}\Big(6\left(b^4-a^4\right) - 8(a+b)\left(b^3-a^3\right) +$$

$$+ 12\,ab\left(b^2-a^2\right)\Big) = \frac{1}{4(a-b)^3}\Big(6b^4-6a^4-8ab^3+8a^4-8b^4$$

$$+8a^3b+12ab^3-12a^3b\Big) = \frac{1}{2(a-b)^3}\left(a^4-2a^3b+2ab^3-b^4\right) = \cancel{x}$$

$$a^4-2a^3b+2ab^3-b^4=ab(2b^2-2a^2)+a^4-b^4=$$

$$=2ab(b^2-a^2)+(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2-2ab)=$$

$$=(a^2-b^2)(a-b)^2=(a+b)(a-b)^3$$

$$\otimes=\frac{2(a+b)(a-b)^3}{4(a-b)^3}=\boxed{\frac{a+b}{2}=M[x]}$$

$$M[x^2]=\int_a^b x^2f(x)=\frac{6}{(a-b)^3}\Big(\frac{x^5}{5}-\frac{(a+b)x^4}{4}+$$

$$+\frac{abx^3}{3}\Big)\Big|_a^b=\frac{6}{(a-b)^3\,60}\big(12(b^5-a^5)-15(a+b)\cdot$$

$$\cdot(b^4-a^4)+20ab(b^3-a^3)\big)=\frac{1}{10(a-b)^2}\big(-12(a^4+a^3b+$$

$$+a^2b^2+ab^3+b^4)+15(a+b)(a^2+b^2)(a+b)-20ab\cdot$$

$$\cdot(a^2+ab+b^2)\big)=\frac{1}{10(a-b)^3}(3a^4-2a^3b-2a^2b^2-2ab^3+3a^4)=$$

$$=\otimes$$

$$3a^4-2a^3b-2a^2b^2-2ab^3+3b^4\;\Big|\;a-b$$
$$-\underline{3a^4-3a^3b}\qquad\qquad 3a^3+a^2b-ab^2-3b^2$$
$$a^3b-2a^2b^2$$
$$-\underline{a^3b-a^2b^2}$$
$$-a^2b^2-2ab^3$$
$$-\underline{-a^2b^2+ab^3}$$
$$-3ab^3+3b^4$$
$$-\underline{-3ab^3+3b^4}$$
$$0$$

$$3a^3+a^2b-ab^2-3b^3\;\Big|\;a-b$$
$$-\underline{3a^3-3a^2b}\qquad\qquad 3a^2+4ab+3b^2$$
$$4a^2b-ab^2$$
$$-\underline{4a^2b-4ab^2}$$
$$3ab^2-3b^3$$
$$-\underline{3ab^2-3b^3}$$
$$0$$

$$\emptyset = \frac{(a-b)^2(3a^2+4ab+3b^2)}{10(a-b)^2} =$$

$$= \frac{3a^2+4ab+3b^2}{10} = M[x^2]$$

$$D[x] = M[x^2] - M^2[x] = \frac{(6a^2+8ab+6b^2)-(5a^2+10ab+b^2)}{20} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{20} = \boxed{\frac{(a-b)^2}{20} = D[x]}$$

$$M[S] = M[\tfrac{\pi}{4}d^2] = \tfrac{\pi}{4}M[x^2] = \tfrac{\pi}{40}(3a^2+4ab+3b^3)$$

$$M[S^2] = \frac{\pi^2}{16}M[x^4] =$$

$$M[x^4] = \int_a^b x^4 f(x)dx = \frac{6}{(a-b)^3}\int_a^b (x^6-(a+b)x^5+abx^4)dx =$$

$$= \frac{6}{210\cdot(a-b)^3}(30(b^7-a^7)-35(a+b)(b^6-a^6)+420ab\cdot$$

$$\cdot(b^5-a^6)) = \frac{1}{35(a-b)^2}(5a^6-2a^5b-2a^4b^2-2a^3b^3-$$

$$-2a^2b^4-2ab^5+5b^6) = \emptyset$$

$$5a^6 - 2a^5b - 2a^4b^2 - 2a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 + 5b^6 \;\Big|\; a-b$$

$$-\underline{5a^6 - 5a^5b} \qquad\qquad \Big|\; 5a^5 + 3a^4b + a^3b^3 - a^2b^3 - 3ab^4 - 5b^5$$

$$3a^5b - 2a^4b^2$$

$$-\underline{3a^5b - 3a^4b^2}$$

$$a^4b^2 - 2a^3b^3$$

$$-\underline{a^4b^2 - a^3b^3}$$

$$-a^3b^3 - 2a^2b^4$$

$$-\underline{-a^3b^3 + a^2b^4}$$

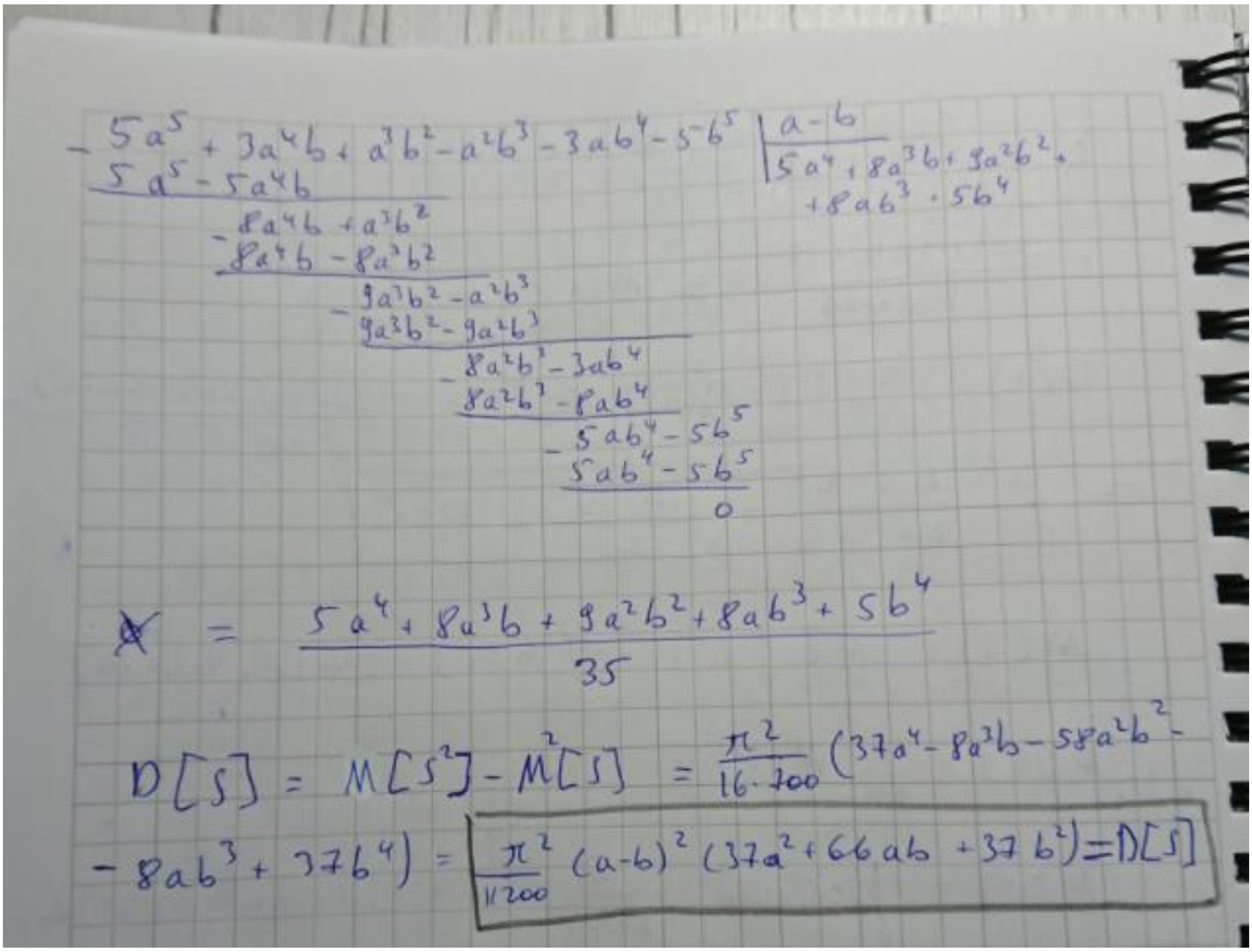
$$-3a^2b^4 - 2ab^5$$

$$-\underline{-3a^2b^4 + 3ab^5}$$

$$-5ab^5 + 5b^6$$

$$-\underline{-5ab^5 + 5b^6}$$

$$0$$



$$-\,5a^5+3a^4b+a^3b^2-a^2b^3-3ab^4-5b^5 \;\Big|\; a-b$$

$$\underline{5a^5-5a^4b} \qquad\qquad \overline{5a^4+8a^3b+9a^2b^2+}$$

$$+8ab^3+5b^4$$

$$-\,8a^4b+a^3b^2$$

$$\underline{8a^4b-8a^3b^2}$$

$$-\,9a^3b^2-a^2b^3$$

$$\underline{9a^3b^2-9a^2b^3}$$

$$-\,8a^2b^3-3ab^4$$

$$\underline{8a^2b^3-8ab^4}$$

$$-\,5ab^4-5b^5$$

$$\underline{5ab^4-5b^5}$$

$$0$$

$$\cancel{x} = \frac{5a^4+8a^3b+9a^2b^2+8ab^3+5b^4}{35}$$

$$D[S] = M[S^2]-M^2[S] = \frac{\pi^2}{16\cdot 700}\left(37a^4-8a^3b-58a^2b^2-\right.$$

$$\left.-8ab^3+37b^4\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{11200}(a-b)^2(37a^2+66ab+37b^2)=D[S]}$$

9 Задача [7 балла]

Петя и Вася играют в игру. Пете нужно разложить по коробкам 10 синих и 10 белых шаров по двум одинаковым коробкам. После этого Вася равновероятно выбирает одну коробку и равновероятно достает из нее 1 шар. Если шар белый, то выйграл Петя, иначе - Вася. Как Петя должен разложить шары по коробкам, чтобы победа была наиболее вероятной. (пустых коробок оставлять нельзя. все шары должны быть разложены по коробкам)

a – белых шаров в 1й коробке
b – синих шаров в 1й коробке

$$D = \{0 < a+b < 20,\ 0 \le a \le 10,\ 0 \le b \le 10\}$$

Полная вероятность успеха:

$$p = \frac{1}{2}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{10-a}{20-a-b}, \quad (a,b) \in D$$

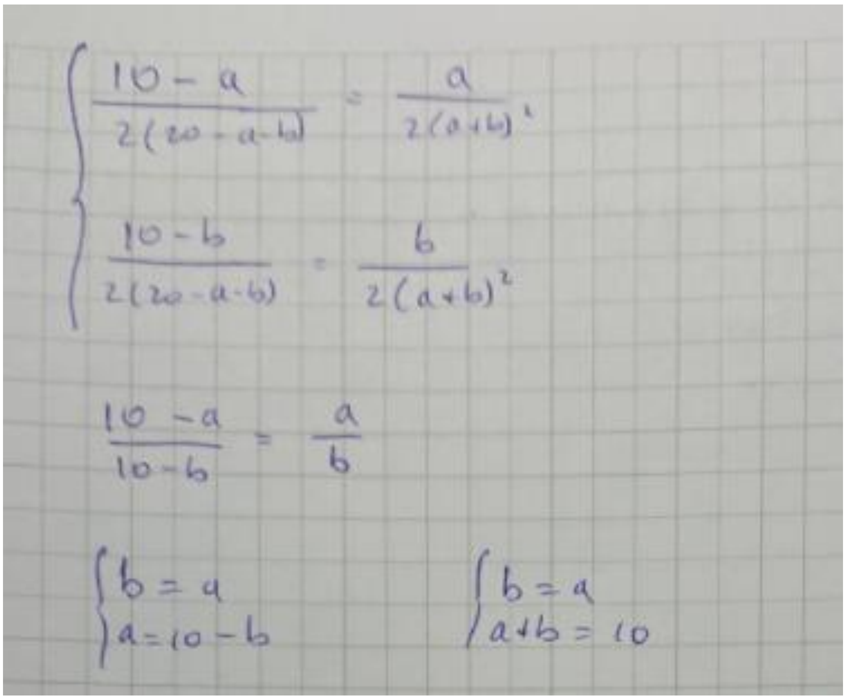
Для поиска максимума на области методом оптимизации, допустим, что a и b могут быть вещественными (Z ∈ R).

Найдем производные по каждой переменной для поиска максимума на области:

$$p'_a = \frac{1}{2}\frac{b}{(a+b)^2} + \frac{b-10}{2(20-a-b)^2}$$

$$p'_b = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(a+b)^2} + \frac{10-a}{2(20-a-b)^2}$$

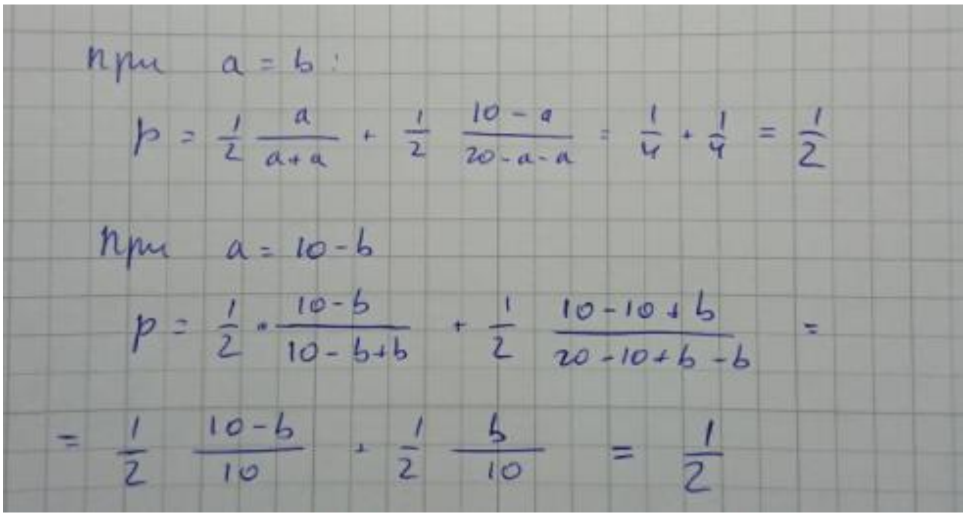
Приравниваем производные по обеим переменным к 0, чтобы найти экстремумы.



$$\begin{cases} \frac{10-a}{2(20-a-b)} = \frac{a}{2(a+b)^2} \\ \frac{10-b}{2(20-a-b)} = \frac{b}{2(a+b)^2} \end{cases}$$

$$\frac{10-a}{10-b} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{cases} b = a \\ a = 10 - b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a \\ a + b = 10 \end{cases}$$



при $a = b$:

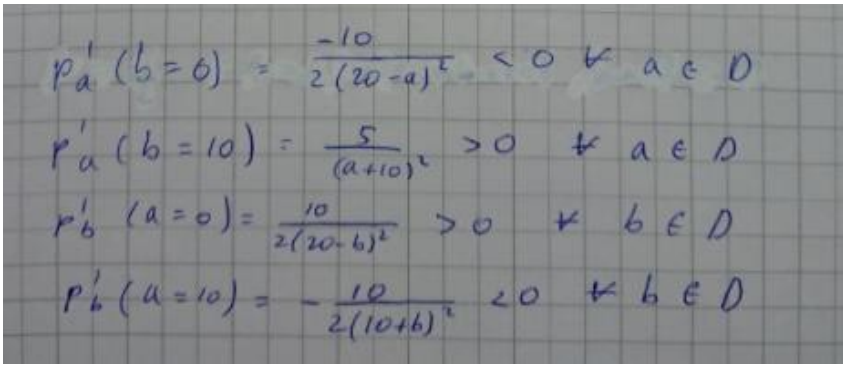
$$p = \frac{1}{2}\frac{a}{a+a} + \frac{1}{2}\frac{10-a}{20-a-a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

при $a = 10 - b$

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{10-b}{10-b+b} + \frac{1}{2}\frac{10-10+b}{20-10+b-b} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{10-b}{10} + \frac{1}{2}\frac{b}{10} = \frac{1}{2}$$

Проверяем границы области:



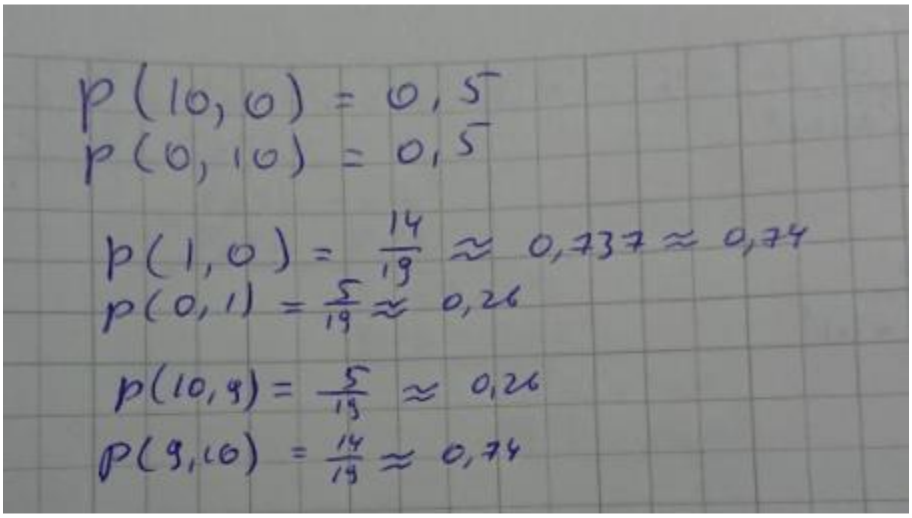
$$p'_a(b=0) = \frac{-10}{2(20-a)^2} < 0 \quad \forall \; a \in D$$

$$p'_a(b=10) = \frac{5}{(a+10)^2} > 0 \quad \forall \; a \in D$$

$$p'_b(a=0) = \frac{10}{2(20-b)^2} > 0 \quad \forall \; b \in D$$

$$p'_b(a=10) = -\frac{10}{2(10+b)^2} < 0 \quad \forall \; b \in D$$

Находим граничные значения:



$p(10, 0) = 0,5$

$p(0, 10) = 0,5$

$p(1, 0) = \frac{14}{19} \approx 0,737 \approx 0,74$

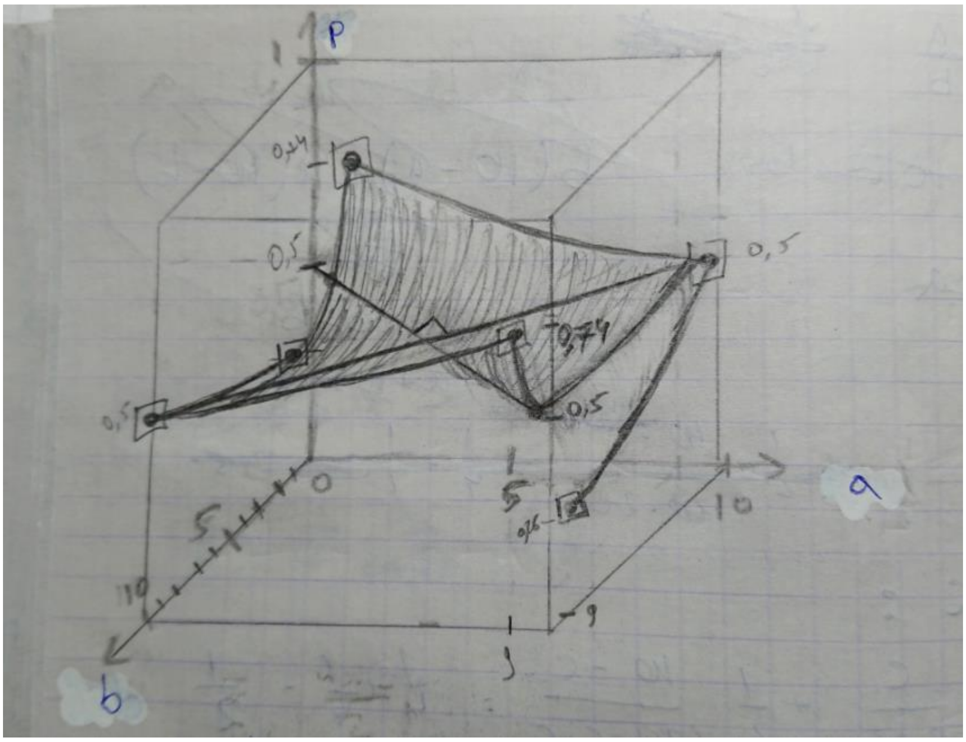
$p(0, 1) = \frac{5}{19} \approx 0,26$

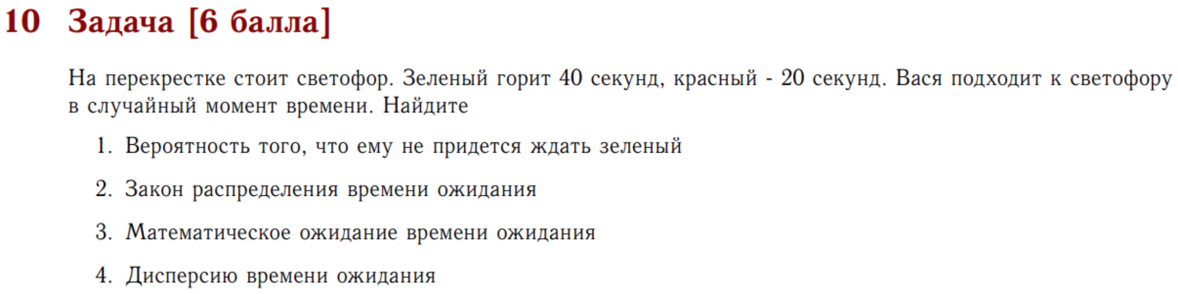
$p(10, 9) = \frac{5}{19} \approx 0,26$

$p(9, 10) = \frac{14}{19} \approx 0,74$

Наибольшая вероятность выиграть составляет 0,74. Выходит, для наиболее вероятной победы, Пете надо в одной коробке оставить один белый шар, остальные шары (которых 19) в другую коробку.

График (примерный):





10 Задача [6 балла]

На перекрестке стоит светофор. Зеленый горит 40 секунд, красный - 20 секунд. Вася подходит к светофору в случайный момент времени. Найдите

1. Вероятность того, что ему не придется ждать зеленый
2. Закон распределения времени ожидания
3. Математическое ожидание времени ожидания
4. Дисперсию времени ожидания

Пусть f(x) - плотность “прихода” Васи, fo(x) - плотность времени ожидания Васи.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{60} & 0 \le x \le 60 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$fo(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{20} & 0 \le x \le 20 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Вероятность того, что Вася придет на зеленый свет и ему не придется ждать:

$$p = \int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}(x) = \frac{2}{3}$$

Пусть событие *A* -- зеленый свет, *B* -- красный, тогда при событии А горит зеленый свет, значит время ожидания составит *0*:
F(x = 0) = 2/3.

$$F(x) := P\{X < x\} = P\left\{x = 0 \,\middle|\, A\right\} \cdot P(A) + P\left\{X < x \,\middle|\, B\right\} \cdot P(B) =$$

$$P\left\{x = 0 \,\middle|\, A\right\} \cdot p + P\left\{X < x \,\middle|\, B\right\} \cdot (1 - p) =$$

$$P\left\{x = 0 \,\middle|\, A\right\} \cdot \frac{2}{3} + P\left\{X < x \,\middle|\, B\right\} \cdot \frac{1}{3}$$

При событии А горит зеленый свет, значит время ожидания составит 0:
F(x = 0) = 2/3.

Функция распределения ожидания:

$$Fo(x) := \begin{cases} \frac{x}{20} & 0 \le x \le 20 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Получаем:

$$F(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{20} & 0 \le x \le 20 \\ 1 & x > 20 \end{cases}$$

Мат. ожидание, дисперсия:

$$M[x] = M[x \mid A] \cdot P(A) + M[x \mid B] \cdot P(B) =$$
$$M[0] \cdot \frac{2}{3} + M\left[x \middle| B\right] \cdot \frac{1}{3} =$$
$$M\left[x \middle| B\right] \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(b+a)}{2} = \frac{10}{3}$$

$$M[x^2] = M[x^2 \mid A] \cdot P(A) + M[x^2 \mid B] \cdot P(B) =$$
$$M[0] \cdot \frac{2}{3} + M\left[x^2 \middle| B\right] \cdot \frac{1}{3} =$$
$$M\left[x^2 \middle| B\right] \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \int_0^{20} \frac{x^2}{20} \, d(x) = \frac{400}{9}$$

$$D[x] = M[x^2] - M^2[x] = \frac{100}{3}$$

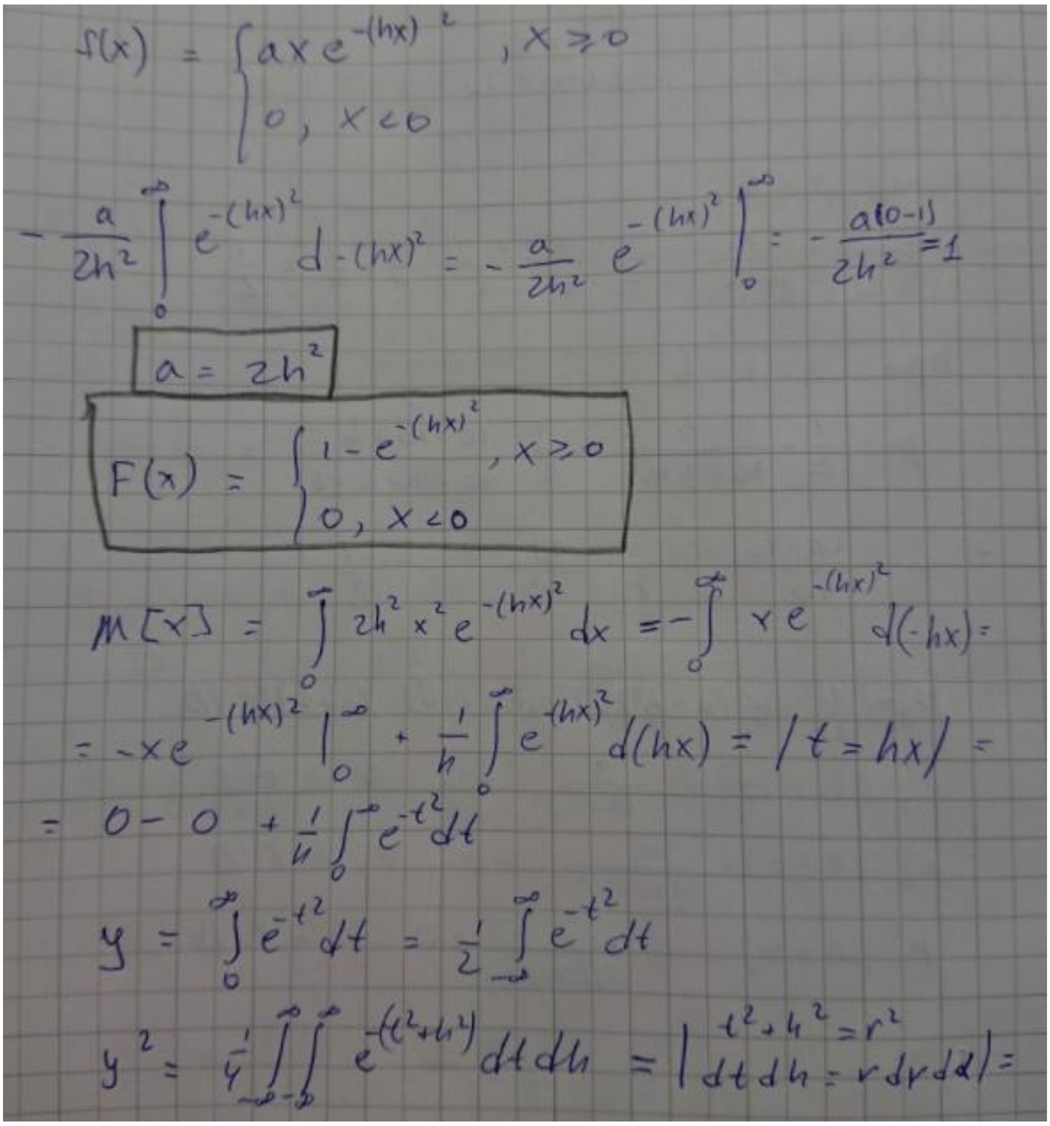
11 Задача [8 балла]

Непрерывная случайная величина X распределена по следующему закону распределения ($h = const$)

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-h^2x^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Найдите

1. коэффициент a
2. функцию распределения
3. мат. ожидание
4. дисперсию
5. моду
6. вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее чем мода
7. медиану



$$f(x) = \begin{cases} axe^{-(hx)^2}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{a}{2h^2}\int_0^{\infty} e^{-(hx)^2} d-(hx)^2 = -\frac{a}{2h^2} e^{-(hx)^2}\Big|_0^{\infty} = -\frac{a(0-1)}{2h^2} = 1$$

$$\boxed{a = 2h^2}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(hx)^2}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$

$$M[x] = \int_0^{\infty} 2h^2x^2e^{-(hx)^2}dx = -\int_0^{\infty} xe^{-(hx)^2} d(-hx) =$$

$$= -xe^{-(hx)^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{h}\int_0^{\infty} e^{-(hx)^2} d(hx) = /t = hx/ =$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{h}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$$

$$y = \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+h^2)}dt\,dh = \left| \begin{matrix} t^2+h^2 = r^2 \\ dt\,dh = r\,dr\,d\alpha \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\alpha = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} d(-r^2)\,d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(0-1)\,d\alpha = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{M[x] = \frac{1}{h}\cdot y = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}}$$

$$1 - e^{-(hM_e)^2} = 0,5$$

$$e^{-(hM_e)^2} = 0,5$$

$$-(hM_e)^2 = -\ln(2)$$

$$\boxed{M_e = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{h}}$$

$$f'(x) = \left(2h^2 x\, e^{-(hx)^2}\right)'_x = -4h^4x^2e^{-(hx)^2} +$$

$$2h^2e^{-(hx)^2} = 0$$

$$2h^2e^{-(hx)^2} = 4h^4x^2e^{-(hx)^2}$$

$$2h^2x^2 = 1$$

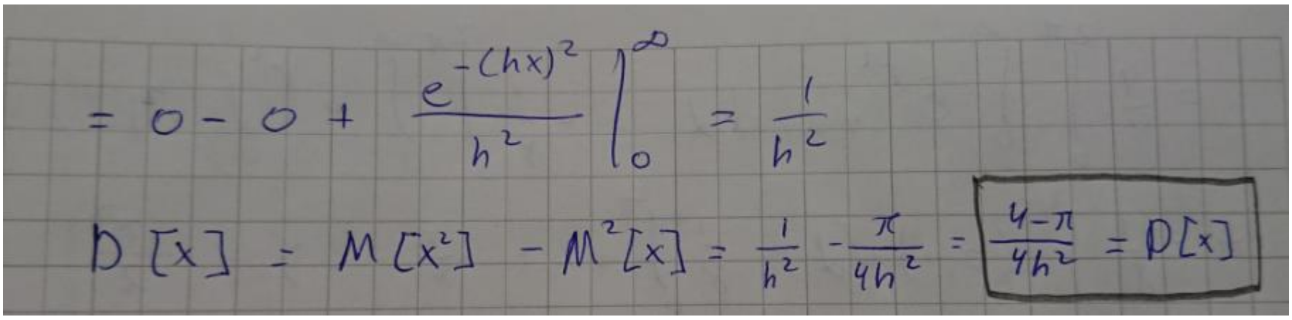
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}h} = \boxed{\frac{1}{h\sqrt{2}} = M_0}$$

$$F(M_0) = 1 - e^{-(hM_0)^2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,39.$$

$$\boxed{F(M_0) \approx 0,39}$$

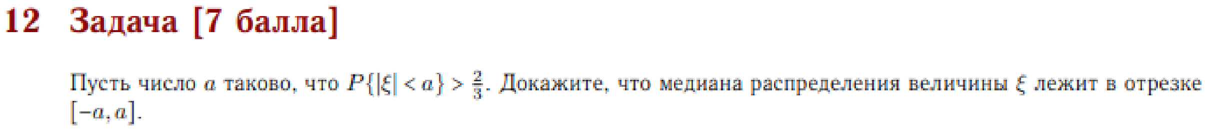
$$M[x^2] = \int_0^{\infty} 2h^2x^3e^{-(hx)^2}dx = -\int_0^{\infty} x^2\,d\,e^{-(hx)^2} =$$

$$= -x^2e^{-(hx)^2}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{h^2}\int_0^{\infty} e^{-(hx)^2}d(-h^2x^2) =$$



$$= 0 - 0 + \frac{e^{-(hx)^2}}{h^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{h^2}$$

$$D[x] = M[x^2] - M^2[x] = \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{4h^2} = \boxed{\frac{4-\pi}{4h^2} = D[x]}$$



12 Задача [7 балла]

Пусть число a таково, что $P\{|\xi| < a\} > \frac{2}{3}$. Докажите, что медиана распределения величины ξ лежит в отрезке $[-a, a]$.

Обозначу *x* как ξ.

$$\xi = x$$
$$P\Big\{|x| < a\Big\} = P\{-a < x < a\} = F(a) - F(-a) = \frac{2}{3}$$
$$F(a) > \frac{2}{3} + F(-a)$$
$$0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in R$$

Пользуясь неравенством выше, можем установить, что:

$$F(a) > \frac{2}{3}$$

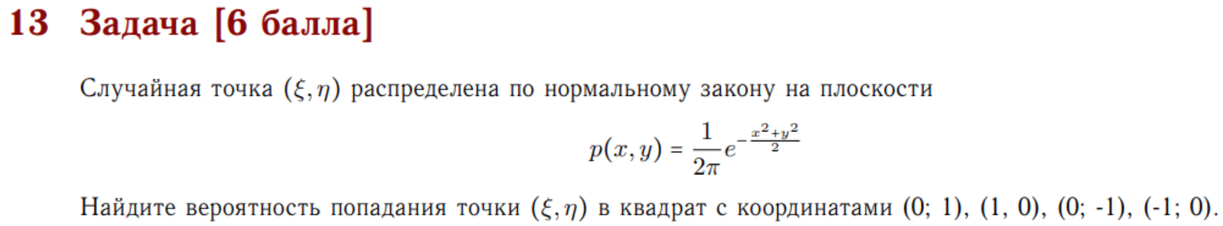
Т.к. F(-a) может равняться 0.

$$F(-a) < \frac{1}{3}$$

F(-a) не может равняться 1/3, т.к. при таком значении F(-a) получим, что F(a) > 1, но макс. знач., которое может принимать функция распределения, равняется 1.

Зная, что *F(Me) = 0.5*, *F(-a)* $\in$ *[0; 1/3)* и *F(a)* $\in$ *(2/3; 1]*, получаем:

$$F(Me) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(-a) < F(Me) < F(a) \Rightarrow -a > Me > a \Rightarrow Me \in (-a; a)$$



13 Задача [6 балла]

Случайная точка (ξ, η) распределена по нормальному закону на плоскости

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Найдите вероятность попадания точки (ξ, η) в квадрат с координатами (0; 1), (1, 0), (0; -1), (-1; 0).

$p(\pm x, \pm y) = p(x, y)$, потому что *x* и *y* возводятся в квадрат.

Получается *p(x,y)* симметрична относительно *Oz*.

Т.к. *p(x,y)* симметрична относительно *Oz*, повернем область на *45°* для упрощения вычислений. Для этого используем матрицу поворота на *45°:*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Получаем новые границы нашего квадрата:

$$(0;1) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(1;0) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(-1;0) \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(0;-1) \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Если мы-таки повернем *x* и *y*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cdot x' - \sqrt{2}\cdot y' - x \\ y = \sqrt{2}\cdot y' + \sqrt{2}\cdot x' - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

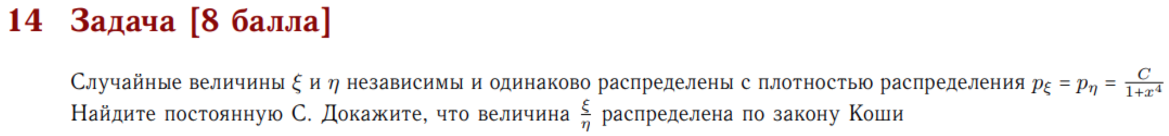
$$p(x', y') = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^{-\frac{x'^2 + y'^2 - 2\cdot x'\cdot y' + x'^2 + y'^2 + 2\cdot x'\cdot y'}{2\cdot 2}} =$$

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^{-\frac{2\cdot x'^2 + 2\cdot y'^2}{4}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{2}}$$

Находим вероятность с помощью функции Лапласа:

$$P\{(x, y) \in \mathrm{D}\} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, \mathrm{d}(y)\,\mathrm{d}(y) = \frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}(x)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}(y)\right) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}(x)\right)^2 = \left(2\cdot\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \approx 4\cdot(0.258)^2 \approx 0.27$$



14 Задача [8 балла]

Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены с плотностью распределения $p_\xi = p_\eta = \frac{C}{1+x^4}$
Найдите постоянную C. Докажите, что величина $\frac{\xi}{\eta}$ распределена по закону Коши

Коэффициент *C*, конечно же, можно найти и из *p(x)* или *p(y)*, но такой определенный интегральчик:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^4}\,\mathrm{d}(x)$$

находится вынесением квадрата из-под знаменателя, потом разложением полученной дроби по методу неопределенных коэффициентов:

$$1+x^4 = \left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)$$

$$\frac{A+B\cdot x}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{C+\mathrm{D}\cdot x}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot x}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot x}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}$$

Но ведь проще найти через g(z).

$\xi = x$
$\eta = y$

$$g(z) = \int_0^\infty x \frac{c}{1+(2x)^4} \cdot \frac{c}{1+x^4}\, dx - \int_{-\infty}^0 y \frac{c}{1+(zy)^2} \frac{c}{1+y^4}\, dy$$

$$\int \frac{x}{(1+x^4)(1+(zx)^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{(1+x^4)(1+(zx)^4)} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x^2 = dt \\ z^4 = q \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+qt^2)} = \emptyset$$

$$\frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Et+G}{1+qt^2} = \frac{At + qAt^3 + B + qBt^2 + Et + Et^3}{(1+t^2)(1+qt^2)} +$$

$$+ \frac{G+Gt^2}{(1+qt^2)(1+t^2)}$$

$$\begin{cases} qA + E = 0 \\ qB + G = 0 \\ A + E = 0 \\ B + G = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ E = 0 \\ B = \frac{1}{1-q} \\ G = \frac{q}{1-q} \end{cases}$$

$$\ast = \frac{1}{2}\frac{c^2}{1-q}\arctan(t) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{1-q}\frac{q}{\sqrt{q}}\arctan(\sqrt{q}\,t) =$$

$$= \frac{c^2}{2(1-q)}\left(\arctan(t) - \sqrt{q}\arctan(\sqrt{q}\,t)\right)$$

$$g(z) = \frac{c^2}{2(1-z^4)}\left(\arctan(x^2)\Big|_0^{\infty} - z^2\arctan(z^2x^2)\Big|_0^{\infty} -\right.$$

$$\left. - \arctan(y^2)\Big|_{-\infty}^{0} + z^2\arctan(z^2y^2)\Big|_{-\infty}^{0}\right) =$$

$$= \frac{c^2}{2(1-z^4)}\left(\frac{\pi}{2} - z^2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - z^2\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\pi - z^2\pi)c^2}{2(1-z^4)} = \frac{\pi c^2}{2(1+z^2)}$$

$$\frac{\pi c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi c^2}{2}\arctan(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi c^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2 c^2}{2} = 1$$

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{2}}{\pi}}$$

$$\boxed{g(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}}$$

15 Задача [7 балла]

В ящике содержится 2^n билетов. Номер i обозначен на C_n^i из них. Наудачу вынимаются m билетов, s - сумма номеров. Найдите мат. ожидание и дисперсию s.

Вероятность выпадения k-го билета:

$$P(x=k) = \begin{cases} \dfrac{C(n,i)}{2^n} & 1 \le i \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Тогда, мат. ожидание номера билета:

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} p(i)\cdot i = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n} C(n,i)\cdot i$$

Находим сумму через бином Ньютона:

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)\cdot x^i$$

$$\left((x+1)^n\right)'_x = \left(\sum_{i=0}^{n} C(n,i)\cdot x^i\right)'_x$$

$$n\cdot(x+1)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)\cdot i\cdot x^{i-1}$$

$$x=1:$$

$$n\cdot 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)\cdot i = \sum_{i=1}^{n} C(n,i)\cdot i$$

В последней строке повышаем нижний предел суммы, т.к. *C(n, i)* i* при *i = 0:*

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i)\cdot i = \sum_{i=1}^{n} C(n,i)\cdot i + 0\cdot C(n,0) = \sum_{i=1}^{n} C(n,i)\cdot i$$

Мат. ожидание номера билета:

$$M[x] = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n} C(n, i)\cdot i = \frac{1}{2^n}\cdot\left(n\cdot 2^{n-1}\right) = \frac{n}{2}$$

Тогда, мат. ожидание суммы *m* вытянутых билетов:

$$M[S] = M[m\cdot x] = m\cdot M[x] = \frac{n\cdot m}{2}$$

Найдем дисперсию X:

$$M[x^2] = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{n} C(n, i)\cdot i^2$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i\cdot x^{i-1}$$

$$\left(n(1+x)^{n-1}\right)_x' = \left(\sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i\cdot x^{i-1}\right)_x'$$

$$n(n-1)\cdot(1+x)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i\cdot(i-1)\cdot x^{i-2}$$

$$x = 1:$$

$$n(n-1)\cdot 2^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i\cdot(i-1) = \sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i^2 - \sum_{i=0}^{n} C(n, i)\cdot i$$

$$\sum_{i=1}^{n} C(n, i)\cdot i^2 = n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}$$

Нижнюю сумму ряда увеличиваем на *1* все по той же причине (при *i = 0* член ряда обнуляется).

$$M[x^2] = \frac{n\left((n-1)\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right)}{2^n} = \frac{n\cdot 2^n}{2^n}\cdot\left((n-1)\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$M[x^2] = \frac{n\cdot(n+1)}{4}$$

$$\mathrm{D}[x] = M[x^2] - M^2[x] = \frac{n}{4}$$

Найдем дисперсию суммы номеров билетов, а сумма в свою очередь является линейной комбинацией номеров билетов ($c_i = 1$):

$$\mathrm{D}[S] = \mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}[X_i] + 2\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i-1} K_{x_i x_j}$$

Момент ковариации i-го и j-го номеров билетов является их произведение их мат. ожиданий среди m вытянутых билетов минус произведение мат. ожиданий вытянутых билетов по отдельности:

$$K_{x_i x_j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \cdot p(x_i)\cdot p(x_j) - M[x_i]\cdot M[x_j] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \cdot p(x_i)\cdot p(x_j) - M^2[x]$$

Получается момент ковариации для каждого i-го и j-го номеров билетов одинаковые (а значит и постоянной), т.к. каждый раз мы считаем одну и ту же величину, да и плюс мы не можем точно сказать билет под каким номером был вытянут 1м, 2м и так далее:

Выражаем момент ковариации (которая тоже const) через коэффициент ковариации и дисперсию [вытянутых билетов по отдельности]:

$$K_{x_i x_j} = r_{x_i x_j}\cdot\sqrt{\mathrm{D}[x_i]\cdot\mathrm{D}[x_j]} = r\cdot\mathrm{D}[x]$$

Получаем:

$$\mathrm{D}[S]=\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right]=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{D}[X_i]+2\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i-1} r\cdot\mathrm{D}[x]=$$

$$=m\cdot\mathrm{D}[x]+2\cdot r\cdot\mathrm{D}[x]\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}1=m\cdot\mathrm{D}[x]+2\cdot r\cdot\mathrm{D}[x]\sum_{i=1}^{m}(i-1)=$$

$$=m\cdot\mathrm{D}[x]+2\cdot r\cdot\mathrm{D}[x]\cdot(m-1+0)\cdot\frac{m}{2}=\frac{m\cdot n}{4}+\frac{n}{4}\cdot(m\cdot(m-1))\cdot r=\frac{m\cdot n}{4}\cdot(1+r\cdot(m-1))$$

Найдем *r*:

Для этого допустим, что мы достаем все билеты ($m = 2^n$), получается, что каждый раз получаем одинаковую сумму (т.к. достаем все билеты):

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{2^n} X_i\right]=0$$

$$\frac{m\cdot n}{4}\cdot(1+r\cdot(m-1))=0$$

$$1+r\cdot(m-1)=0\Rightarrow r=\frac{1}{1-2^n}$$

$$\mathrm{D}[S]=\frac{m\cdot n}{4}\cdot(1+r\cdot(m-1))=\frac{m\cdot n}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{1-2^n}\cdot(m-1)\right)=$$

$$=\frac{m\cdot n}{4}\cdot\left(1+\frac{m-1}{1-2^n}\right)=\frac{m\cdot n\cdot\left(m-2^n\right)}{4\cdot\left(1-2^n\right)}=\frac{m\cdot n\cdot\left(2^n-m\right)}{4\cdot\left(2^n-1\right)}$$

16 Задача [7 балла]

Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены. Доказать, что если указанные ниже математические ожидания существуют, то

$$M\left\{\frac{\xi}{\xi+\eta}\right\}=M\left\{\frac{\eta}{\xi+\eta}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$x = \xi$$
$$y = \eta$$

$$z_1 = \frac{x}{x+y}$$

$$z_2 = \frac{y}{x+y}$$

$$\alpha_1[z_1] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x+y} \cdot f(x) \cdot f(y) \mathrm{d}(x)\ \mathrm{d}(y) = M[z_1]$$
$$\alpha_1[z_2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x+y} \cdot f(x) \cdot f(y) \mathrm{d}(x)\ \mathrm{d}(y) = M[z_2]$$
$$M[z_1] + M[z_2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+y}{x+y} \cdot f(x) \cdot f(y) \mathrm{d}(x)\ \mathrm{d}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot f(y) \mathrm{d}(x)\ \mathrm{d}(y) = 1 \cdot 1 = 1$$

Заменяемая последовательность СВ -- последовательность *{x1, x2, ..., xn}* совместное распределение которой не меняется при изменении позиций СВ в последовательности.

{x,y} и *{y,x}* имеют одинаковое распределение. *x* и *y* -- независимы и имеют одинаковое распределение =>

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$f(x, y) = f(y, x) = f(x) \cdot f(y)$$

Значит *z1* и *z2* будут одинаково распределены, значит их числовые характеристики равны.

Получаем:

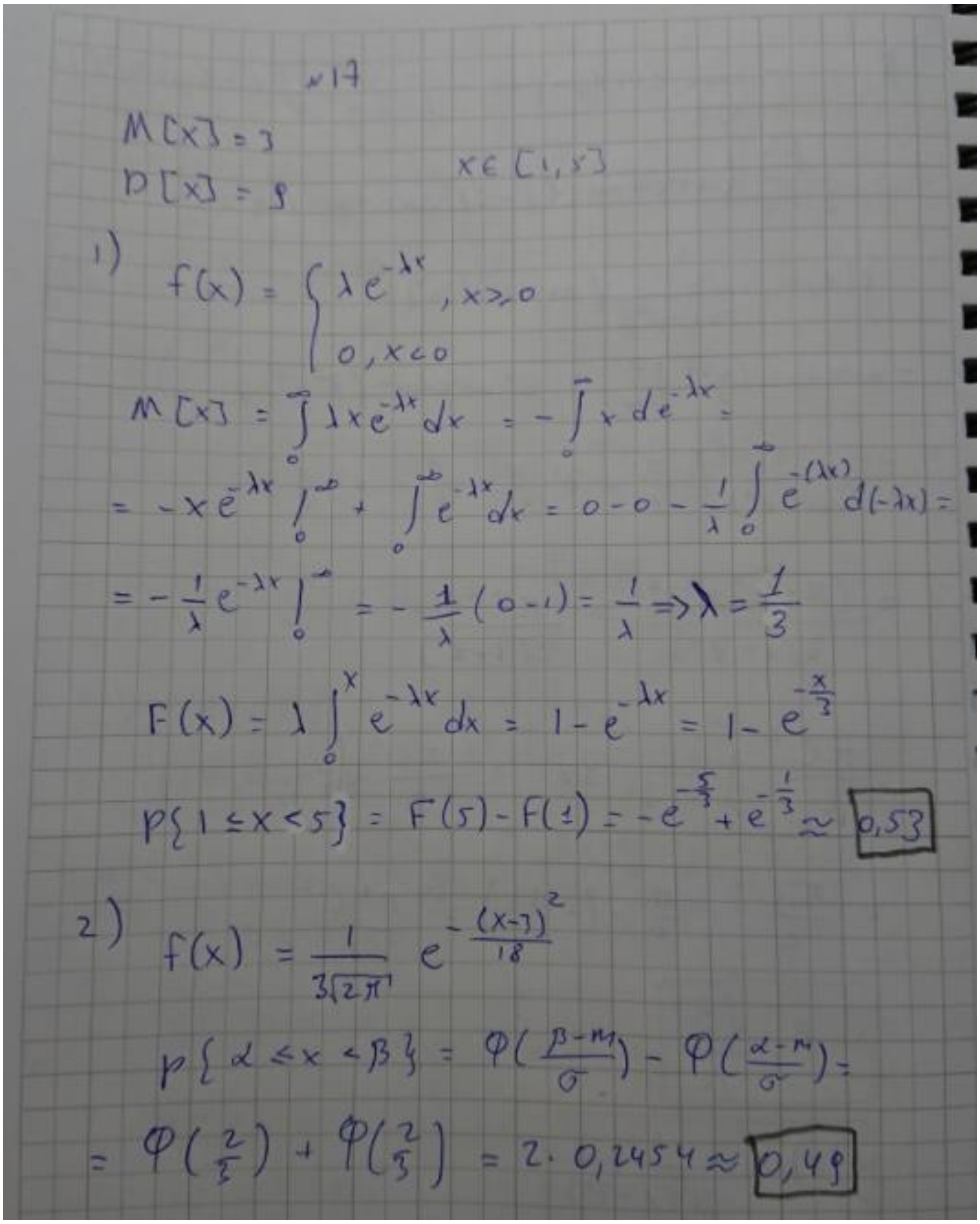
$$\begin{cases} M[z_1] + M[z_2] = 1 \\ M[z_1] = M[z_2] \end{cases}$$

Решая эту несложную системку, получаем что *M[z1] = M[z2] = 0.5.*

17 Задача [6 балла]

Случайная величина X имеет $M[X] = 3$ и $D[X] = 9$. Найдите вероятность попадания в интервал $[1, 5]$, если случайная величина подчинена:

1. Показательному закону распределения
2. Нормальному закону распределения
3. Равномерный закон распределения



№17

$M[x] = 3$

$D[x] = 9$

$x \in [1, 5]$

1)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$M[x] = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x \, de^{-\lambda x} =$$

$$= -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 - 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda x)} d(-\lambda x) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda}(0 - 1) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$F(x) = \lambda \int_0^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$$

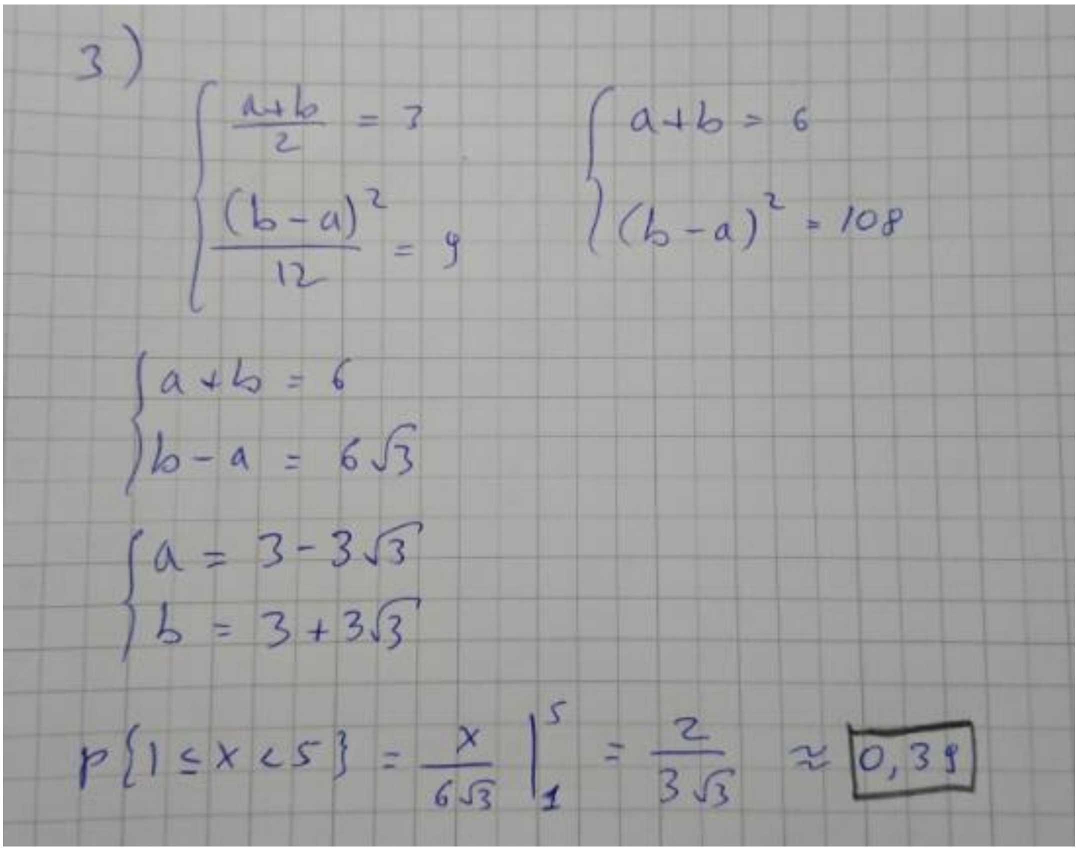
$$p\{1 \leq x < 5\} = F(5) - F(1) = -e^{-\frac{5}{3}} + e^{-\frac{1}{3}} \approx \boxed{0,53}$$

2)

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}$$

$$p\{\alpha \leq x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot 0,2454 \approx \boxed{0,49}$$



3)

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 3 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = 6 \\ (b-a)^2 = 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 6 \\ b-a = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3-3\sqrt{3} \\ b = 3+3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$p\{1 \leq x < 5\} = \frac{x}{6\sqrt{3}}\Big|_1^5 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx \boxed{0,39}$$

18 Задача [8 балла]

Случайная точка (X,Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата с координатами (0; 1), (1, 0), (0; -1), (-1; 0). Найдите

1. $f(x,y)$
2. $f_1(x)$
3. $f_2(y)$
4. $f_1(x|y)$
5. $f_2(y|x)$
6. Зависимы или независимы X и Y
7. Коррелированы ли X и Y.

№18

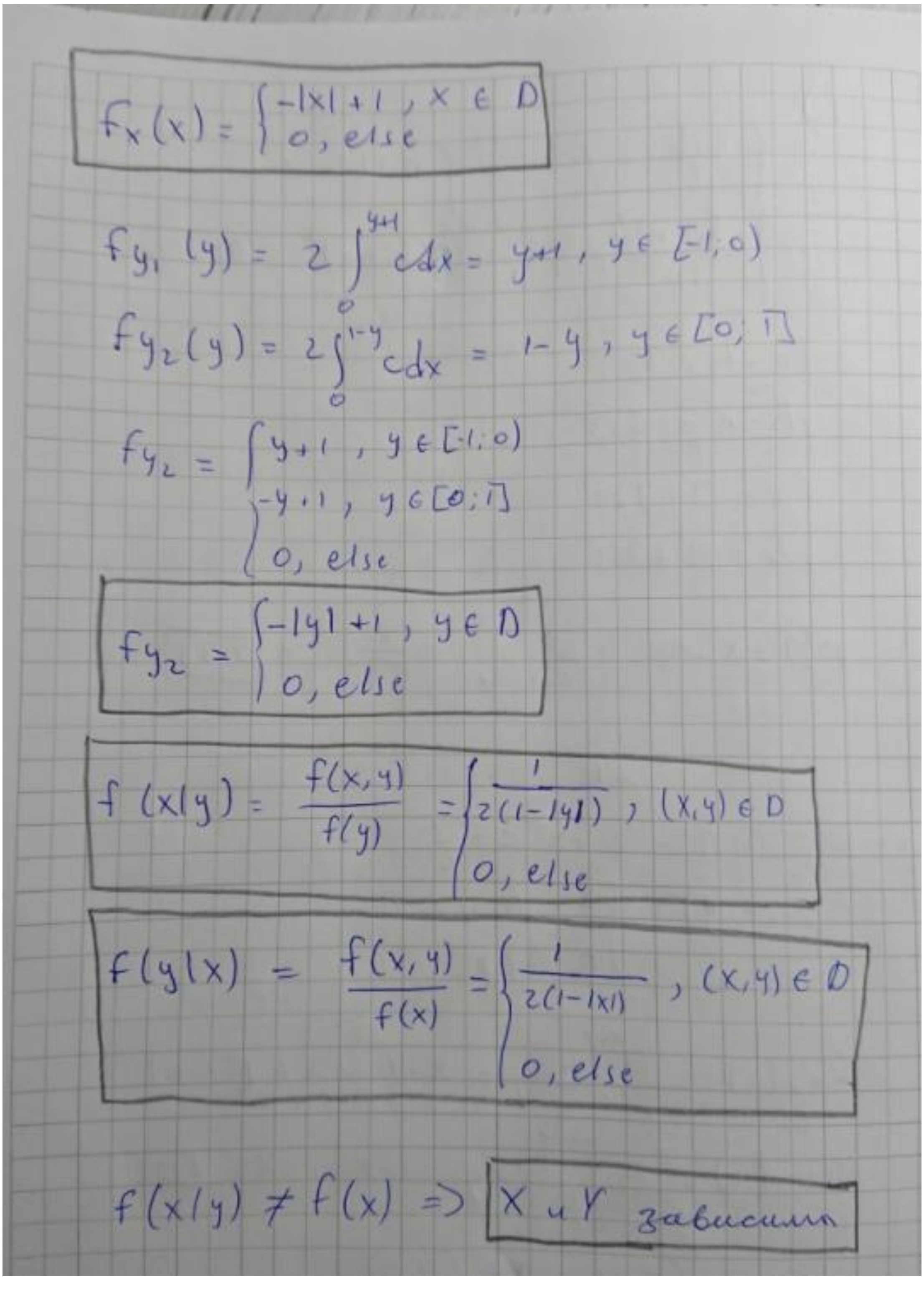
$$S = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{else} \end{cases}}$$

$$f_{X_1}(x) = 2\int_0^{x+1} c\,dy = x+1 \quad , \quad x \in [-1;0)$$

$$f_{X_2}(x) = 2\int_0^{-x+1} c\,dy = 1-x \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [-1;0) \\ -x+1 & , x \in [0;1] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$\boxed{f_x(x) = \begin{cases} -|x|+1, & x \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$f_{y_1}(y) = 2\int_0^{y+1} c\,dx = y+1, \quad y \in [-1;0)$$

$$f_{y_2}(y) = 2\int_0^{1-y} c\,dx = 1-y, \quad y \in [0;1]$$

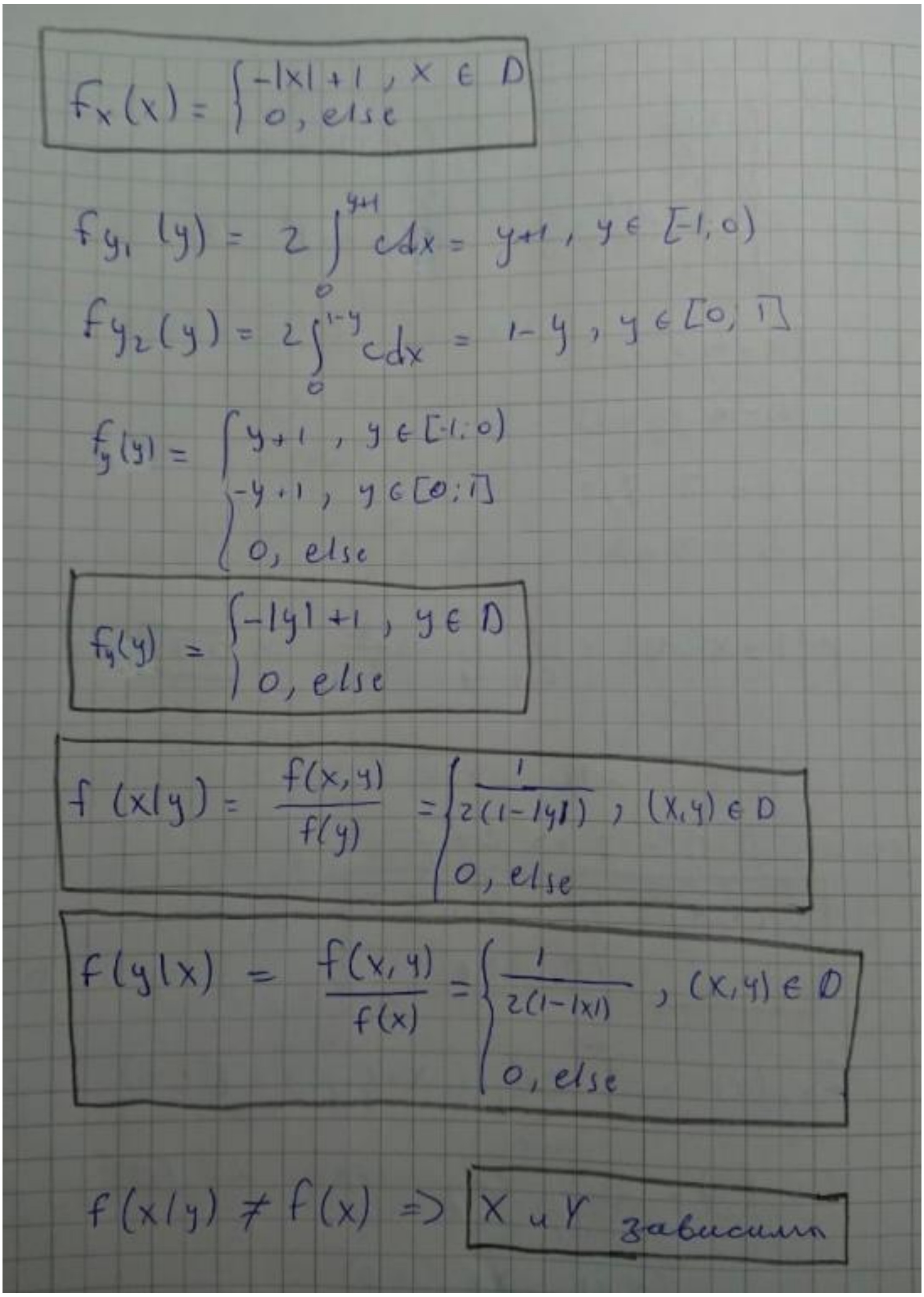
$$f_{y_2} = \begin{cases} y+1, & y \in [-1;0) \\ -y+1, & y \in [0;1] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\boxed{f_{y_2} = \begin{cases} -|y|+1, & y \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$\boxed{f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|y|)}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$\boxed{f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|x|)}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$f(x|y) \neq f(x) \Rightarrow \boxed{\text{X и Y зависимы}}$$



$$\boxed{f_x(x) = \begin{cases} -|x|+1, & x \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$f_{y_1}(y) = 2\int_0^{y+1} c\,dx = y+1,\ y \in [-1; 0)$$

$$f_{y_2}(y) = 2\int_0^{1-y} c\,dx = 1-y,\ y \in [0, 1]$$

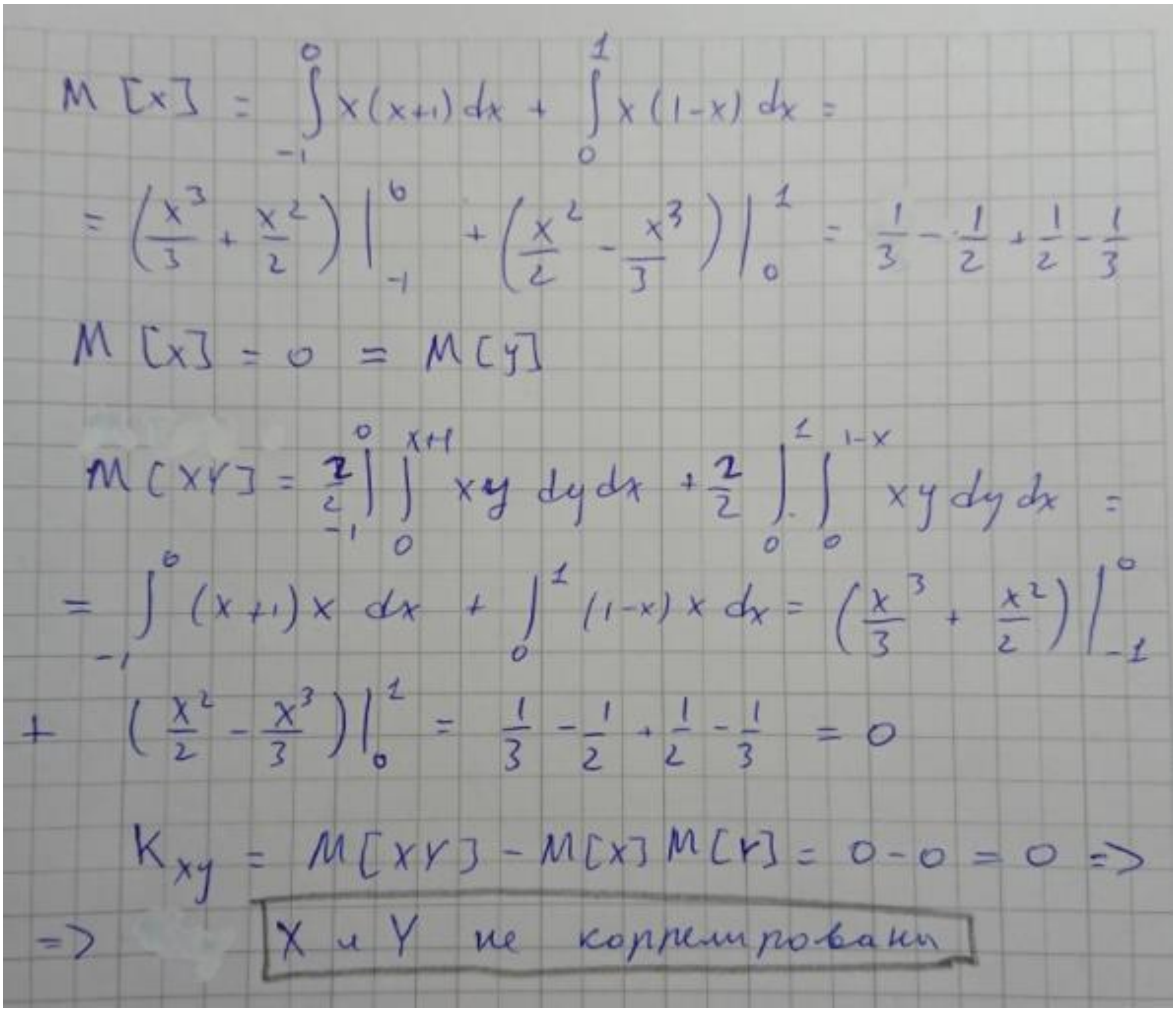
$$f_y(y) = \begin{cases} y+1, & y \in [-1; 0) \\ -y+1, & y \in [0; 1] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\boxed{f_y(y) = \begin{cases} -|y|+1, & y \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$\boxed{f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$\boxed{f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|x|)}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}}$$

$$f(x/y) \neq f(x) \Rightarrow \boxed{X \text{ и } Y \text{ зависимы}}$$



$$M[x] = \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$M[x] = 0 = M[y]$$

$$M[XY] = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} xy\,dy\,dx + \frac{2}{2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} xy\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)x\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)x\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$K_{xy} = M[XY] - M[X]M[Y] = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X \text{ и } Y \text{ не коррелированы}}$$

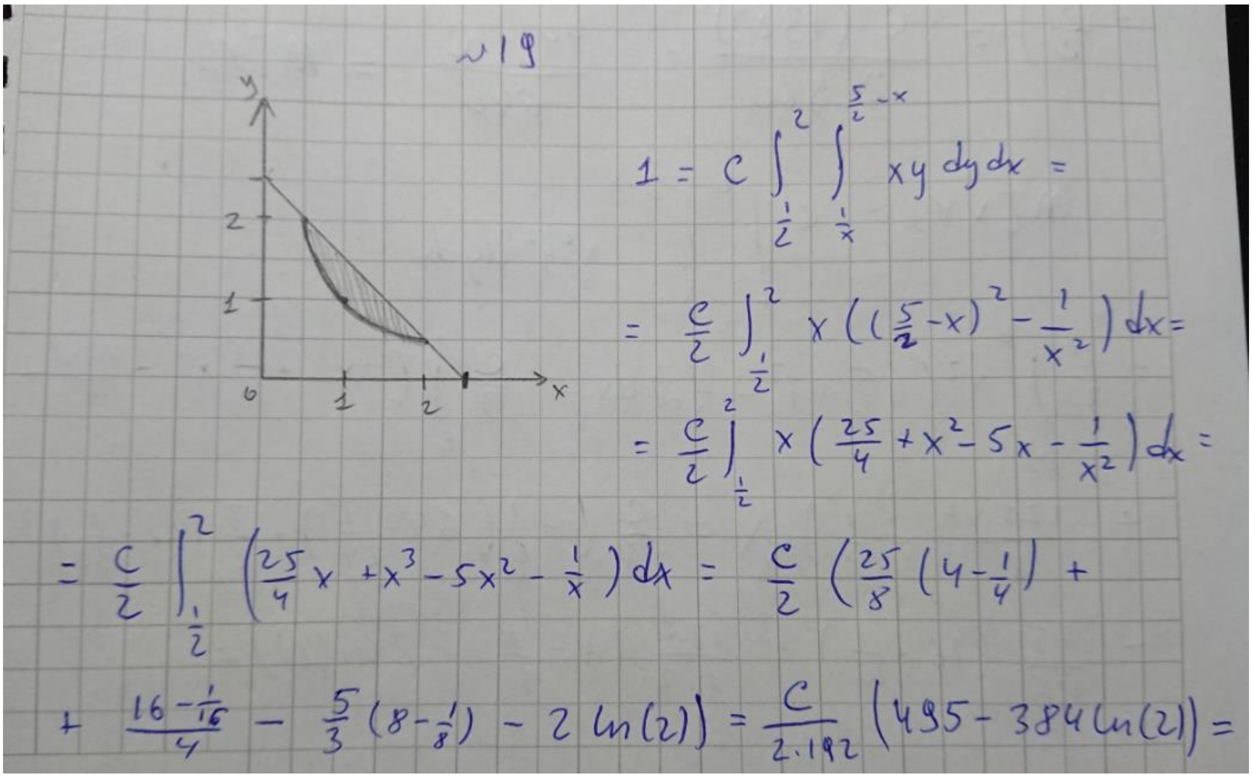
19 Задача [8 балла]

Совместная плотность распределения двух случайных величин X и Y задана следующей формулой

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Область D ограничена линиями $xy = 1$ и $x + y = \frac{5}{2}$. Найдите

1. c
2. $M[X]$
3. $M[Y]$
4. $cov(X,Y)$
5. $\rho(X,Y)$



№19

$$1 = c\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,dy\,dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(\frac{25}{4} + x^2 - 5x - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x + x^3 - 5x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{c}{2}\left(\frac{25}{8}\left(4-\frac{1}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{16-\frac{1}{16}}{4} - \frac{5}{3}\left(8-\frac{1}{8}\right) - 2\ln(2)\right) = \frac{c}{2\cdot 192}\left(495 - 384\ln(2)\right) =$$

$$= \frac{c}{128}\left(165 - 128\ln(2)\right) \Rightarrow \boxed{c = \frac{128}{165 - 128\ln(2)}}$$

$$f_x(x) = cx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}} y\,dy = \frac{c}{2}\left(x^3 - 5x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{1}{x}\right)$$

$$f_y(y) = \frac{c}{2}\left(y^3 - 5y^2 + \frac{25}{4}\cdot y - \frac{1}{y}\right)$$

$$M[x] = \frac{c}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^4 - 5x^3 + \frac{25}{4}x^2 - 1\right)dx =$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{5}\left(32 - \frac{1}{32}\right) - \frac{5}{4}\left(16 - \frac{1}{16}\right) + \frac{25}{12}\left(8 - \frac{1}{8}\right) -\right.$$

$$\left.-\left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{1023}{5\cdot 32} - \frac{5\cdot 255}{4\cdot 16} + \frac{25\cdot 63}{4\cdot 3\cdot 8} -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\right) = \frac{c\,(1323)}{2\cdot 960} = \frac{441\cdot c}{640} = M[Y]$$

$$M[XY] = c\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x^2y^2\,dy\,dx =$$

$$= \frac{c}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2\left(\left(\frac{5}{2}-x\right)^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{c}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-x^5 + \frac{15}{2}x^4 - \frac{75x^3}{4} +\right.$$

$$\left.+\frac{125x^2}{8} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{c}{3}\left(-\frac{1}{6}\left(64 - \frac{1}{64}\right) + \frac{3}{2}\left(32 - \frac{1}{32}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{75}{16}\left(16 - \frac{1}{16}\right) + \frac{125}{8\cdot 3}\left(8 - \frac{1}{8}\right) - 2\ln(2)\right) =$$

$$= \frac{c}{3}\left(-\frac{4095}{6\cdot 64} + \frac{3\cdot 1023}{2\cdot 32} - \frac{75\cdot 255}{16\cdot 16} + \right.$$

$$\left. + \frac{125\cdot 63}{8\cdot 8\cdot 3} - 2\ln(2)\right) = \frac{c}{3}\cdot\frac{(2763 - 1536\ln(2))}{6\cdot 64\cdot 2} =$$

$$= \frac{c\,(921 - 512\ln(2))}{768}$$

$$K_{xy} = M[XY] - M[X]M[Y] = \frac{c(921 - 512\ln(2))}{768} -$$

$$- \frac{441^2 c^2}{640^2} \approx \boxed{-0,1 = K_{xy}}$$

$$M[x^2] = \frac{c}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^5 - 5x^4 + \frac{25}{4}x^3 - x\right)dx =$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{6}\left(64 - \frac{1}{64}\right) - \left(32 - \frac{1}{32}\right) + \frac{25}{16}\left(16 - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

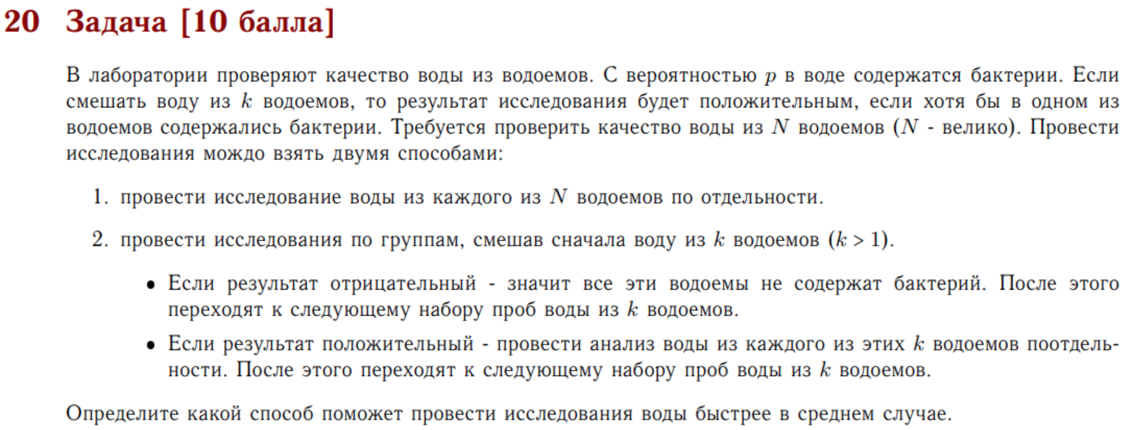
$$= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{6\cdot 64}(4095) - \frac{1023}{32} + \frac{25\cdot 255}{16\cdot 16} - \frac{15}{2\cdot 4}\right) =$$

$$= \frac{c\cdot 1323}{2\cdot 2\cdot 6\cdot 64} = \frac{441\cdot c}{512}$$

$$D[x] = \frac{441c}{512} - \left(\frac{441\cdot c}{640}\right)^2 = 441\cdot c\left(\frac{1}{512} - \frac{441\cdot c}{640}\right) \approx$$

$$\approx 0,108 = D[y]$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D[x]D[y]}} \approx \boxed{-0,93 = r_{xy}}$$



20 Задача [10 балла]

В лаборатории проверяют качество воды из водоемов. С вероятностью p в воде содержатся бактерии. Если смешать воду из k водоемов, то результат исследования будет положительным, если хотя бы в одном из водоемов содержались бактерии. Требуется проверить качество воды из N водоемов (N - велико). Провести исследования мождо взять двумя способами:

1. провести исследование воды из каждого из N водоемов по отдельности.
2. провести исследования по группам, смешав сначала воду из k водоемов ($k > 1$).
    - Если результат отрицательный - значит все эти водоемы не содержат бактерий. После этого переходят к следующему набору проб воды из k водоемов.
    - Если результат положительный - провести анализ воды из каждого из этих k водоемов поотдельности. После этого переходят к следующему набору проб воды из k водоемов.

Определите какой способ поможет провести исследования воды быстрее в среднем случае.

В 1м способе нам надо проверить воду из всех водоемов, значит каждый раз будут проверяться *N* водоемов:

$M(N) = N$

Во 2м способе мы проверяем воду из *k* водоемов (1 проверка), если тест отрицательные -- идем дальше, если тест положительный, то проверяем каждый водоем по отдельности (+*k* проверок).

Получается или *1* проверка или *1 + k.*

Вероятность того, что мы сделаем одну проверку = *q^k*, т.е. вероятность, что все водоемы не заражены.

Вероятность того, что мы сделаем *k+1* проверку = *1 – q^k*, т.е. вероятность, что хотя бы один водоем заражен.

Пусть X - количество проверок, в которых все проверяемые водоемы окажутся чистыми, тогда мат. ожидание количества таких проверок:

$$M[x] = \sum_{i=1}^{\frac{N}{k}} 1 \cdot q^k = \frac{N}{k} \cdot q^k$$

Пусть Y - количество проверок, в которых мы проверяем сначала смешанную соду из *k* водоемов, а потом и все *k* по отдельности. Тогда мат. Ожидание количества таких проверок будет:

$$M[y] = \sum_{i=1}^{\frac{N}{k}} (k+1) \cdot \left(1 - q^k\right) = \frac{N}{k} \cdot (k+1) \cdot \left(1 - q^k\right)$$

Тогда, мат. ожидание от всех проверок:

$$M[x+y]=M[x]+M[y]=\frac{N}{k}\cdot\left(q^{k}+(k+1)\cdot\left(1-q^{k}\right)\right)$$

И теперь нам надо сравнить мат. ожидания количества проверок обоих способов:

$$N\vee\frac{N}{k}\cdot\left(q^{k}+(k+1)\cdot\left(1-q^{k}\right)\right)$$

$$k\vee q^{k}+(k+1)\cdot\left(1-q^{k}\right)$$

$$k\vee q^{k}+k-k\cdot q^{k}+1-q^{k}$$

$$0\vee-k\cdot q^{k}+1$$

$$k\cdot q^{k}\vee 1$$

$$\left(k\cdot q^{k}\right)^{\frac{1}{k}}\vee 1$$

$$k^{\frac{1}{k}}\cdot q\vee 1$$

$$1-p\vee k^{-\frac{1}{k}}$$

$$1-k^{-\frac{1}{k}}\vee p$$

Получается,
что если *p* больше, чем $1\text{-}k^{(-1/k)}$, то 1й способ окажется быстрее в среднем случае.
Если *p* меньше, чем $1\text{-}k^{(-1/k)}$, то 2й способ окажется быстрее в среднем случае.
Если *p* равно $1\text{-}k^{(-1/k)}$, то в среднем случае способы по скорости равны.

$p > 1-k^{(-1/k)}$ => первый способ быстрее [в среднем случае].
$P < 1-k^{(-1/k)}$ => второй способ быстрее [в среднем случае].
$P = 1-k^{(-1/k)}$ => оба способы по скорости равны [в среднем случае].