

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №4
Решение систем нелинейных уравнений

Выполнил:
студент гр. 953505
Басенко К. А.

Руководитель:
доцент
Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

| | |
|-------------------------------------|----|
| Цель задания..... | 3 |
| Краткие теоретические сведения..... | 3 |
| Задание..... | 7 |
| Программная реализация..... | 8 |
| Тестирование..... | 9 |
| Заключение..... | 10 |

Метод простых итераций. Чтобы воспользоваться методом простых итераций, необходимо предварительно привести систему к следующему виду:

[illegible]

где $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

Исходя из некоторого начального приближения x^0 , построим итерационную последовательность точек

$$x^{-k} = \varphi(x^{-k-1}), \quad k=1,2,\dots$$

Пусть точка \bar{x}^0 есть некоторое начальное приближение к решению. Рассмотрим δ -окрестность $U_\delta(\bar{x})$ этой точки. В силу принципа сжимающих отображений итерационная последовательность

$$x^{-k} = \varphi(x^{-k-1}), \quad k=1,2,\dots$$

Пусть точка \bar{x}^0 есть некоторое начальное приближение к решению. Рассмотрим δ -окрестность $U_\delta(\bar{x})$ этой точки. В силу принципа сжимающих отображений итерационная последовательность

$$x^{-k} = \varphi(x^{-k-1}), \quad k=1,2,\dots$$

будет сходиться, если существует число $q < 1$ такое, что выполнено условие:

$$\|\varphi(\bar{x}^{-1}) - \varphi(\bar{x}^{-2})\| \leq q \|\bar{x}^{-1} - \bar{x}^{-2}\|, \quad \forall \bar{x}^{-1}, \bar{x}^{-2} \in U_\delta(\bar{x}^0), \quad (4.3)$$

называемое условием сжатия для отображения φ . В частности, это условие всегда выполняется, если векторная функция φ непрерывно дифференцируема и норма матрицы производных функции φ удовлетворяет неравенству:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{x}) \right\| \leq q$$

во всех точках x из δ -окрестности $U_\delta(\bar{x})$ точки \bar{x}^0

Будем предполагать, что векторная функция f непрерывна дифференцируема в некоторой окрестности начального приближения. Вместо системы (4.1) будем искать решение соответствующей ей линеаризованной системы

$$f(\bar{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}^0)(\bar{x} - \bar{x}^0) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}^0) + J(\bar{x}^0)(\bar{x} - \bar{x}^0) = 0,$$

где через $J(\bar{x}^0)$ обозначена для удобства записи матрица производных векторной функции f в точке \bar{x}^0 (матрица Якоби системы (4.1) в этой точке).

При этом при применении метода Ньютона предполагается, что $\det J(\bar{x}^0) \neq 0$ в окрестности точки \bar{x}^0 .

Тогда из линеаризованной системы, которая линейна относительно переменных x , можно найти первое приближение

$$\bar{x}^k = \bar{x}^{k-1} - J^{-1}(\bar{x}^{k-1})f(\bar{x}^{k-1}), k = 1, \dots$$

Рассматривая линеаризованную систему в точках \bar{x}^{k-1} при $k=1, 2, \dots$, найдем k -ое приближение

$$\bar{x}^k = \bar{x}^{k-1} - J^{-1}(\bar{x}^{k-1})f(\bar{x}^{k-1}), k = 1, \dots$$

Построенная таким способом рекуррентная последовательность Ньютона сходится при определенных дополнительных условиях к решению системы (4.1). Легко видеть, что рассматриваемый метод совпадает с методом касательных в случае $n=1$, т.е. является многомерным вариантом метода касательных.

На практике обратную матрицу не считают, а на каждом шаге решают линеаризованную систему:

$$f(\bar{x}^{k-1}) + J(\bar{x}^{k-1})(\bar{x} - \bar{x}^{k-1}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}^k$$

Теорема. При сделанных выше предположениях, последовательность

Ньютона сходится к решению системы (4.1), если начальное приближение выбрано достаточно близко к решению.

Отметим в заключение, что метод Ньютона сходится достаточно быстро (скорость сходимости квадратичная), если начальное приближение выбрано удачно. На практике итерационный процесс заканчивают, когда норма разности двух последовательных приближений меньше заданной точности вычисления решения.

ЗАДАНИЕ. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + m) = x \\ ax^2 + 2y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{где } x > 0, y > 0,$$

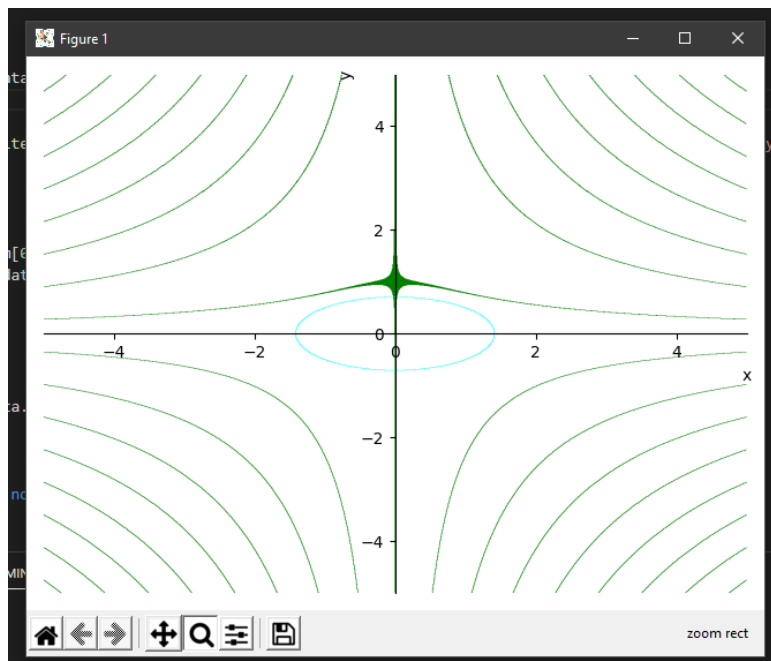
с точностью до 0,0001 методами простых итераций и Ньютона, принимая для номера варианта k значения параметров a и m из таблицы:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| m | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |
| a | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,7 | 0,5 |

Начальные приближения найти графически. Сравнить скорость сходимости методов.

Программная реализация.

Выводится график функции.



Далее вводится начальное приближение и система решается двумя методами.

```
x0 = list(map(lambda n: float(n), input("Enter x0, y0:\n").replace(", ", " ").split()))
print()

sim(x0)
nm(x0)
```

Ответ:

```
Enter x0, y0:
0 0.7

2
[0.0, 0.7071]
5
[0.0, 0.7071]
```

Метод простых итераций оказался эффективнее.

Тестирование.

#1

```
system:  
cos(y) = x  
x-y**2 = y
```

```
[0.5, 0.5]  
Enter x0, y0:  
0.8 0.5
```

```
23  
[0.8525, 0.55]  
6  
[0.8525, 0.55]
```

Input interpretation:

solve

$$\cos(y) = x$$

$$x - y^2 = y$$

for

y, x

Results:

y = 0.550009 and x = 0.85252

#2

```
system:  
x**4-y = x  
sin(cos(sin(x) - 2)) = y
```

```
[1.0, 1.5]  
Enter x0, y0:  
1.1 0.4
```

```
6  
[1.1164, 0.437]  
2  
[1.1164, 0.437]
```

Input interpretation:

solve

$$x^4 - y = x$$

$$\sin(\cos(\sin(x) - 2)) = y$$

for

x, y

Results:

x = 1.11641 and y = 0.437022

По результатам немногочисленных тестов метод Ньютона оказался эффективнее.

Заключение.

Изучены численные решения систем нелинейных уравнений методами простых итераций и Ньютона. Проведены отделения решений, построены и запрограммированы алгоритмы методов, численно решены тестовые задания, сравнены трудоемкости методов.