

Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИЭЛЕКТРОНИКИ”

Кафедра информатики

Ответ по лабораторной работе №9

Методы Эйлера и Рунге-Кутты

Выполнил:

Студент гр. 953505

Басенко К. А.

Руководитель:

Доцент

Анисимов В. Я.

Минск 2021

Содержание:

1. Цель работы.....	3
2. Краткие теоретические сведения.....	3
3. Задание.....	9
4. Программная реализация.....	10
5. Заключение.....	12

Цель выполнения задания: Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутты.

Краткие теоретические сведения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что $f(x, y)$ непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0) .

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$, такую что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a, b]$ и $y(x_0) = y_0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ с помощью точек разбиения $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ с шагом $h = (b - a) / n$. Тогда узлы разбиения имеют вид $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$.

Пусть $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$ - значения функции в точках разбиения.

1) Метод Эйлера

Построим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.1)$$

$$y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k) , полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Точность метода Эйлера на всем отрезке $[a, b]$ будет $O(h)$.

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9.2)$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Полагая $h = 0,2$ и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.8 \cdot y_k.$$

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.82 \cdot y_k.$$

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция $y = e^{-x}$, можно сравнить точность обоих методов.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.572	0.4086	0.3277
$y_k^{\text{модиф}}$	1	0.82	0.6724	0.5514	0.4521	0.3708

e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679
----------	---	--------	--------	--------	--------	--------

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

2) Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4 :

$$K_1 = hf(x_k, y_k);$$

$$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2});$$

$$K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2});$$

$$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3).$$

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на $[a, b]$.

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ на отрезке } [0, 1].$$

Выберем шаг $h = 0,2$. Результат вычислений поместим в таблицу.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8187	0.6703	0.5487	0.4493	0.3678
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Таким образом, метод Рунге-Кутты 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при

начальном выборе шага меньше ε . В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

ЗАДАНИЕ. С помощью метода Эйлера, а затем метода Рунге-Кутты найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке $[0; 1]$.

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Шаг интегрирования h , обеспечивающий требуемую точность, выбирать в процессе вычисления из сравнения результатов, полученных с h и $h/2$. В случае необходимости шаг h должен быть уменьшен.

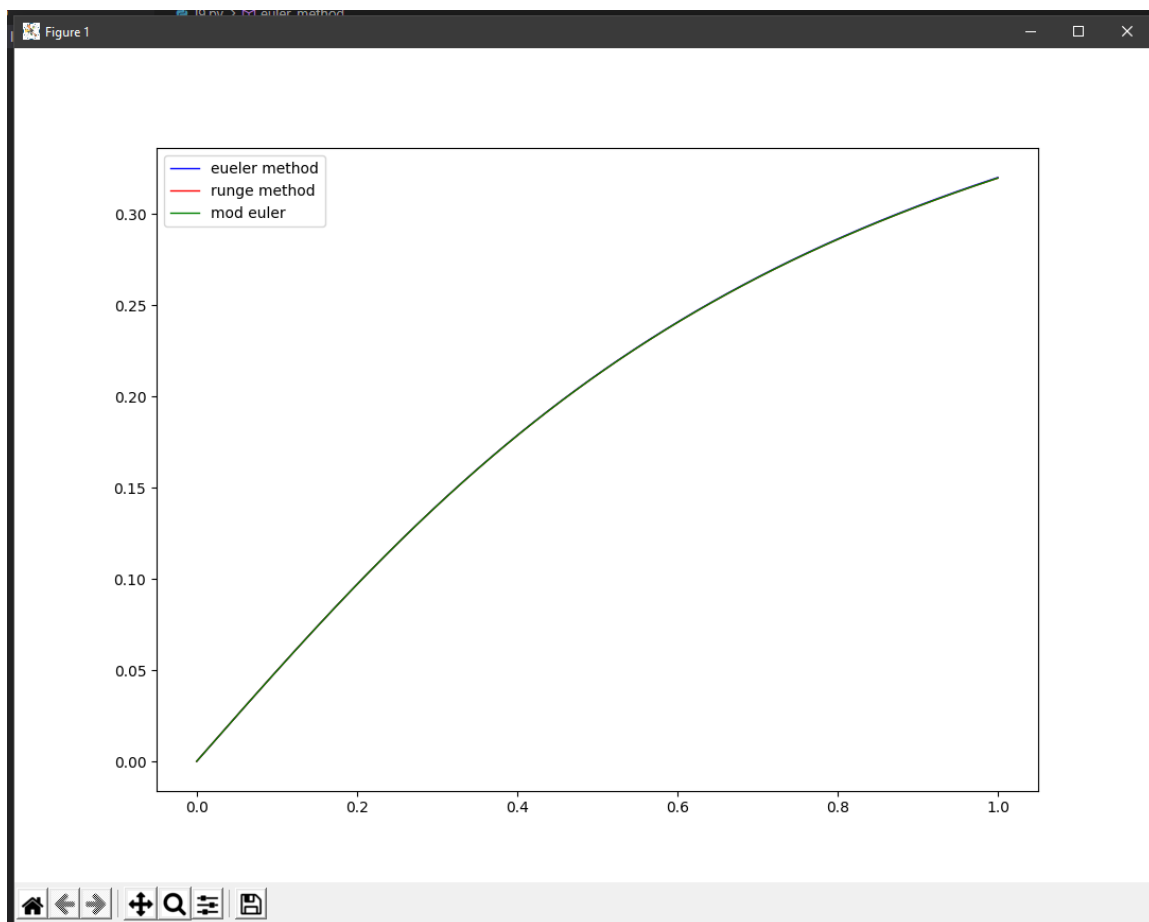
Сравнить результаты.

Программная реализация

Задаются значения параметров, вычисляется результат и выводится:

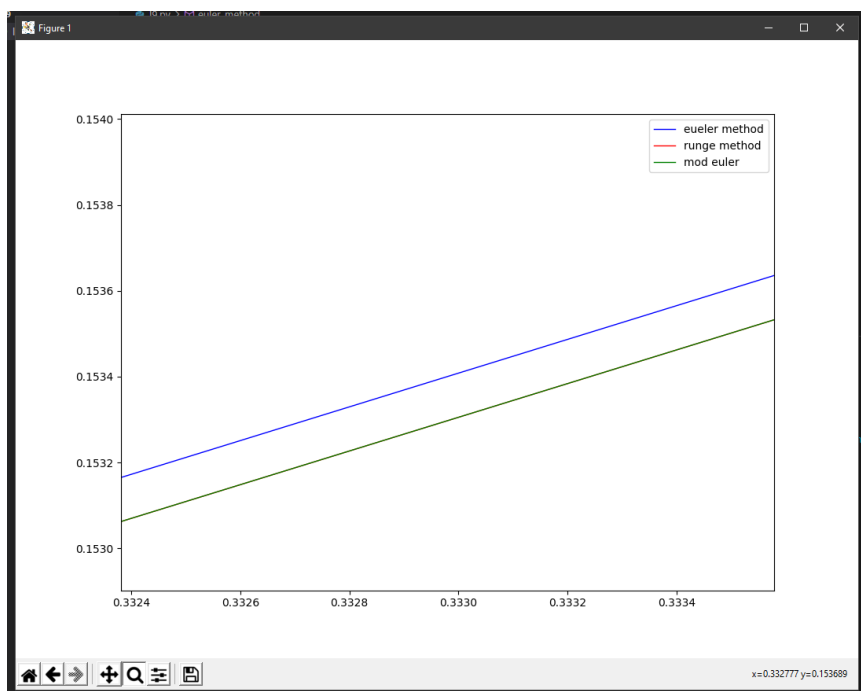
```
a = 0.5
m = 1.
acc = 1e-3

def main():
    tasks = [euler_method, runge_method, modified_euler]
    for task in tasks:
        res = task(f, solution_range, initial_value, acc)
    plt.legend()
    plt.show()
```

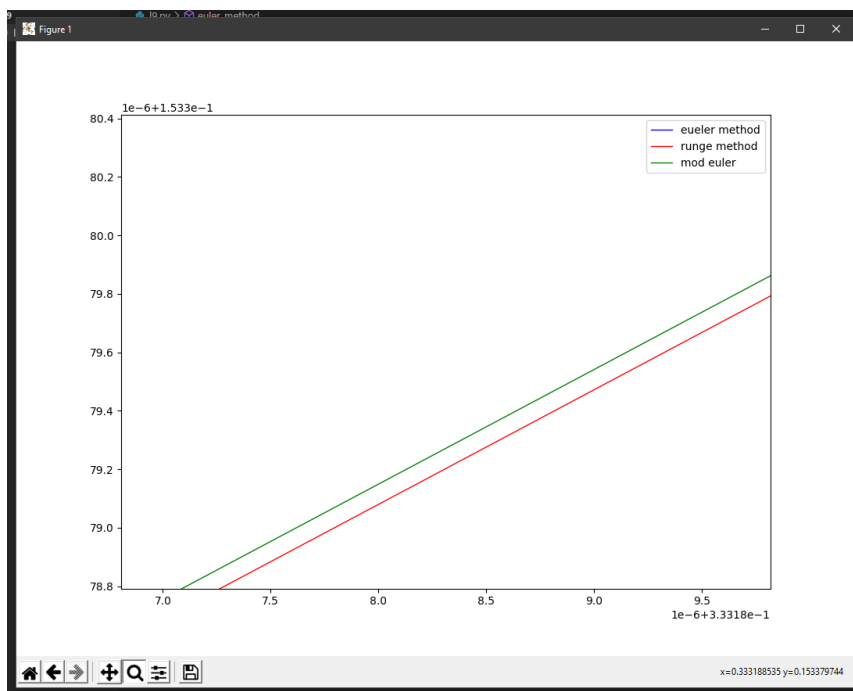


Кривые почти легли в одну.

Если приблизить:



Еще приблизить (к зеленой кривой):



Заключение.

Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутты.