Ejercicio 12 Demostracion

a) Sea $P(e) = \text{cantLit}(e) = S(\text{cantOp}(e))$.
La inducción estructural se va a realizar sobre la expresión.

b) **Por inducción estructural:**

Casos base:

$$\forall x :: \text{Float}, \quad P(\text{Const } x)$$

$$\forall a, b :: \text{Float}, \quad P(\text{Rango } a\ b)$$

Casos inductivos:

$$\forall e_1, e_2 :: \text{Expr}, \quad P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(\text{Suma } e_1 e_2)$$

$$\forall e_1, e_2 :: \text{Expr}, \quad P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(\text{Resta } e_1 e_2)$$

$$\forall e_1, e_2 :: \text{Expr}, \quad P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(\text{Mult } e_1 e_2)$$

$$\forall e_1, e_2 :: \text{Expr}, \quad P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(\text{Div } e_1 e_2)$$

c) **Caso base:** Para todo x :: Float, $P(\text{Const } x)$.

Sea x :: Float, queremos ver que vale $P(\text{Const } x)$:

$$P(\text{Const } x) = \text{cantLit}(\text{Const } x) = S(\text{cantOp}(\text{Const } x))$$

Lado izquierdo:

$$\text{cantLit}(\text{Const } x) = SZ \quad \{L1\}$$

Lado derecho:

$$S(\text{cantOp}(\text{Const } x)) = SZ \quad \{O1\}$$

Para todo a, b :: Float, $P(\text{Rango } ab)$.

Sea a, b :: Float, queremos ver que vale $P(\text{Rango } ab)$:

$$P(\text{Rango } ab) = \text{cantLit}(\text{Rango } ab) = S(\text{cantOp}(\text{Rango } ab))$$

Lado izquierdo:

$$\text{cantLit}(\text{Rango } ab) = SZ \quad \{L2\}$$

Lado derecho:

$$S(\text{cantOp}(\text{Rango } ab)) = SZ \quad \{O2\}$$

Casos inductivos:

Para todo $e_1, e_2 :: \text{Expr}$, $P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(\text{Suma } e_1 e_2)$.

Sea $e_1, e_2 :: \text{Expr}$, queremos ver que vale $P(\text{Suma } e_1 e_2)$.

Sabemos que:

$$\text{HI}_1 : P(e_1) \Rightarrow \text{cantLit}(e_1) = S(\text{cantOp}(e_1))$$

$$\text{HI}_2 : P(e_2) \Rightarrow \text{cantLit}(e_2) = S(\text{cantOp}(e_2))$$

Queremos ver que:

$$P(\text{Suma } e_1 e_2) \Rightarrow \text{cantLit}(\text{Suma } e_1 e_2) = S(\text{cantOp}(\text{Suma } e_1 e_2))$$

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\text{cantLit}(\text{Suma } e_1 e_2) &= \text{suma}(\text{cantLit}(e_1), \text{cantLit}(e_2)) && \{L3\} \\
&= \text{suma}(S(\text{cantOp}(e_1)), S(\text{cantOp}(e_2))) && \{\text{HI}\} \\
&= S(\text{suma}(\text{cantOp}(e_1), S(\text{cantOp}(e_2)))) && \{S2\} \\
&= S(\text{suma}(S(\text{cantOp}(e_2)), \text{cantOp}(e_1))) && \{\text{CONMUT}\} \\
&= S(S(\text{suma}(\text{cantOp}(e_2), \text{cantOp}(e_1)))) && \{S2\}
\end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned}
S(\text{cantOp}(\text{Suma } e_1 e_2)) &= S(S(\text{suma}(\text{cantOp}(e_1), \text{cantOp}(e_2)))) && \{O3\} \\
&= S(S(\text{suma}(\text{cantOp}(e_2), \text{cantOp}(e_1)))) && \{\text{CONMUT}\}
\end{aligned}$$

□

Dado a que se llego a la misma expresión desde ambos lados de la igualdad podemos decir que queda demostrado que

$$\forall e :: \text{Expr}.\ \text{cantLit}(e) = S(\text{cantOp}(e)).$$